Appunti di Automi e Linguaggi Formali

Nicola Baesso

April 14, 2022

Contents

Disclaimer

Questi appunti sono una raccolta parziale delle spiegazioni del prof. Bresolin, e sono state scritte con la gioia di poterle portare al primo parziale dell'anno. Si consiglia comunque di utilizzare solo come eventuale ripasso e non come testo di studio.

1 Introduzione

1.1 Definizioni utili alla comprensione

Per questo corso, ci si avvarrà di alcune definizioni riportate in seguito, utili per una migliore comprensione della materia.

1.1.1 Algoritmi e Problemi

Un problema è definito da 3 (tre) caratteristiche specifiche: l'insieme dei possibili input, l'insieme dei possibili output e la relazione che collega questi due insiemi.
Un algoritmo è una procedura meccanica che, eseguendo delle computazioni eseguibili da un calcolatore, risolve un determinato problema se per ogni input si ferma dopo un numero finito di passaggi e produce un output corretto.
Inoltre è composto da una complessità temporale, che indica il tempo di esecuzione, e una complessità spaziale, che indica la quantità di memoria utilizzata. Entrambe queste misure sono dipendenti dalla dimensione dell'input.

1.1.2 Linguaggi formali

Un linguaggio formale può essere definito come un'astrazione del concetto di problema.
Infatti, un problema può essere espresso sia come un insieme di stringhe (che da qui in avanti indicheremo con Linguaggio), con soluzioni che indicano se una stringa è presente nel Linguaggio o meno, oppure come una trasformazione tra vari Linguaggi, dove la soluzione trasforma una stringa di input in una stringa di output.
Quindi, ogni processo computazionale può essere ridotto ad una determinazione dell'appartenenza ad un insieme di stringhe, oppure essere ridotto ad una mappatura tra insiemi di stringhe.

1.1.3 Automi

Un automa è un dispositivo matematico (inteso in forma astratta) che può determinare l'appartenenza di una stringa ad un Linguaggio e può trasformare una stringa in una seconda stringa. Possiede ogni aspetto di un computer, poichè dato un input provvede a fornire un output, è dotato di memoria e ha la capacità di prendere delle decisioni.
La memoria per un automa è fondamentale. Sostanzialmente esistono automi a memoria finita e automi a memoria infinita, quest'ultimi con accesso limitato e non.
Chiaramente si hanno vari tipi di automi, ognuno di questi adatti ad una determinata classe di linguaggi, dove vengono differenziati per quantità di memoria e per il tipo di accesso ad essa.

1.1.4 Alfabeto e Linguaggio

Esattamente come nel caso del linguaggio naturale, un alfabeto è un insieme finito e non vuoto di simboli, ed è indicato con il simbolo Σ. Da esso si ha la stringa, ovvero una sequenza finita di simboli presi da un alfabeto. Inoltre, si definisce come stringa vuota la stringa senza alcun simbolo preso dall'alfabeto, e si indica con il simbolo ε. Infine la lunghezza di una stringa indica il numero di simboli presenti nella stringa, indicandola con |w|, con w una stringa qualsiasi .

Esempio Si consideri il codice binario, composto da 0 ed 1. Allora definiremo l'alfabeto come Σ={0,1}, una stringa valida come w=010110, e in questo particolare caso |w|=6.

La potenza di un alfabeto, espressa come Σ^k con k>0, esprime l'insieme delle stringhe composte da simboli dell'alfabeto di lunghezza k. L'espressione Σ^* indica l'insieme di tutte le stringhe sull'alfabeto.

Esempio Consideriamo nuovamente il codice binario. Per 0<k<2 (inclusi) si ha
$\Sigma^0=\varepsilon$ (la stringa vuota)
$\Sigma^1=\{0,1\}$
$\Sigma^2=\{00,01,10,11\}$
E così per ogni k positivo. Mentre $\Sigma^*=\Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots$

Quindi la potenza di un alfabeto crea a sua volta un alfabeto, con stringhe di lunghezza k, e tale alfabeto è composto da 2^k stringhe.

Un linguaggio L è un sottoinsieme dell'insieme di tutte le stringhe dell'alfabeto. In simboli: L $\subseteq \Sigma^*$ per un certo Σ.

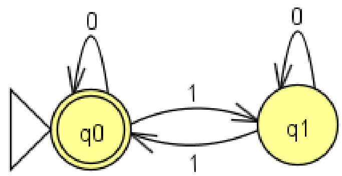
2 DFA, NFA, espressioni e Linguaggi (non) regolari

2.1 DFA

Gli Automi a Stati Finiti (in Inglese Deterministic Finite Automation, abbreviato in DFA) sono la forma più semplice di automa e dispongono di una quantità finita di memoria. Tali automi accettano una parola nel linguaggio unicamente se è in uno stato terminale.

Esempio Trovare ogni parola nel linguaggio binario che sia composta da un numero pari di 1.
Per creare questro DFA, abbiamo bisogno di due stati:
-Il primo sarà lo stato con il numero pari di 1. Tale stato sarà sia iniziale che terminale (e quindi accetterà la stringa).

-Il secondo sarà lo stato nel quale si ha un numero dispari di 1. In tale stato l'automa non accetterà la stringa.
Nel caso s'incontri uno 0, si deve rimanere nello stato attuale.
Segue immagine dell'automa, fatta su JFlap:



Si noti, nel esempio, che ogni stato esegue una transazione **per ogni simbolo nel linguaggio**. Inoltre, quello che fa l'automa è semplicemente "contare" quante cifre di 1 sono presenti, accettando la stringa solo quando questa cifra è pari.

3 Grammatiche di Linguaggi liberi da contesto e PDA