Metodi matematici per l'informatica

Nicola Calvio

February 4, 2024

TEORIA

1 Introduzione

Appunti del corso di Metodi matematici per l'informatica, tenuto dal prof. Cenciarelli presso l'università Sapienza di Roma. $\overline{b}$

2 Relazioni

Le relazioni sono sottoinsiemi di prodotti cartesiani, ad esempio $R \subseteq A \times B$, dove A e B sono insiemi. Ci sono varie tipologie di relazioni (o arità), come relazioni binarie, ternarie, unarie, e nullarie.

2.1 Principi per Relazioni Binarie

Le seguenti sono proprietà comuni delle relazioni binarie su un insieme A:

2.2 Principi

- **Principio di simmetria**: se un certo x è in relazione con y allora y è in relazione con X una relazione si dice simmetrica quando per ogni $(a, b) \in A$ se $(a, b) \in R$ allora $(b, a) \in R$ oppure usando una notazione infissa possiamo scrivesre se aRb allora bRa
- **Principio di riflessività**: una relazione binaria su un insieme A si dice riflessiva quando ogni elemento è in relazione con se stesso ossia per ogni $a \in A$ la coppia (a, a) è in relazione
- **Principio di transitività**: una relazione binaria su un insieme A si dice transitiva quando per ogni $a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ allora $(a, c) \in R$
- **Principio di antisimmetria**: una relazione binaria su un insieme A si dice antisimmetrica quando per ogni $a, b \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ allora $a = b$

- **Principio di antitransitività**: una relazione binaria su un insieme A si dice antitransitiva quando per ogni $a, b, c \in A$ se aRb e bRc allora non deve essere aRc
- **Principio di antiriflessività**: una relazione binaria su un insieme A si dice antiriflessiva quando per ogni $a \in A$ non deve essere $(a, a) \in R$

2.3 Considerazioni Aggiuntive

- Le relazioni possono essere di varie arità, non solo binarie. Ad esempio, una relazione ternaria coinvolge triple di elementi.

3 Funzioni

Una funzione è un particolare tipo di relazione binaria che associa ogni elemento di un insieme A (detto dominio) con uno e un solo elemento di un insieme B (detto codominio).

3.1 Definizione Formale

Una funzione da un insieme A a un insieme B è una relazione $R \subseteq A \times B$ tale che per ogni elemento $a \in A$, esiste uno ed un solo elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in R$.

3.2 Tipi di Funzioni

- **Iniettività**: Una funzione $f : A \to B$ è iniettiva se, per ogni $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$.
  Se due elementi di A sono uguali devono avere lo stesso elemento in B come corrispondente
- **Suriettività**: Una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se, per ogni $b \in B$, esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
  Ogni elemento in B deve avere un collegamento in A
- **Biettività**: Una funzione $f : A \to B$ è biettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva. Ciò significa che f stabilisce una corrispondenza uno-a-uno tra tutti gli elementi di A e B.

3.3 Funzione Inversa e Equipotenza

- **Funzione Inversa**: Se $f : A \to B$ è biettiva, esiste una funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1}(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ e $f(f^{-1}(b)) = b$ per ogni $b \in B$.
- **Equipotenza**: Due insiemi A e B sono equipotenti se esiste una funzione biettiva $f : A \to B$.

3.4 Composizione e Proprietà

- La composizione di due funzioni mantiene certe proprietà: la composizione di due funzioni iniettive è iniettiva; la composizione di due funzioni suriettive è suriettiva; la composizione di due funzioni biettive è biettiva.
- Invertendo l'ordine delle coppie di una funzione non iniettiva si ottiene una relazione che non è necessariamente una funzione, perché potrebbero esserci elementi in B associati a più elementi in A.
- Una funzione $f : A \to B$ è biettiva se e solo se invertendo l'ordine delle sue coppie si ottiene una funzione, la quale è l'inversa di f e si indica con $f^{-1} : B \to A$.

3.5 Considerazioni Aggiuntive

- **Dominio e Codominio**: È importante specificare il dominio e il codominio di una funzione, poiché questi insiemi influenzano le proprietà di iniettività, suriettività e biettività.
- **Immagine e Controimmagine**: L'immagine di una funzione è l'insieme degli elementi di B che sono associati ad almeno un elemento di A. La controimmagine è l'insieme degli elementi di A che sono mappati su un dato elemento di B.
- **Funzioni Parziali**: Esistono anche funzioni parziali, dove alcuni elementi di A potrebbero non avere un'immagine in B.

4 Cardinalità

La **cardinalità** di un insieme si riferisce alla sua classe di **equipotenza**.

4.1 Definizione di Equipotenza

Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se esiste una biiezione tra A e B. In altre parole, A ha la stessa cardinalità di B se e solo se esiste una corrispondenza uno-a-uno e su tutto tra gli elementi di A e quelli di B.

4.2 Proprietà dell'Equipotenza

L'equipotenza è una relazione di equivalenza che presenta le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**: Ogni insieme è equipotente a se stesso, poiché la funzione identità è una biiezione.
- **Simmetrica**: Se A è equipotente a B, allora B è equipotente a A.
- **Transitiva**: Se A è equipotente a B e B è equipotente a C, allora A è equipotente a C.

4.3 Notazione e Confronto di Cardinalità

La cardinalità di un insieme A viene indicata con $|A|$. La relazione di cardinalità tra due insiemi è definita come segue:

- $|A| \leq |B|$ se e solo se (sse) esiste una iniezione da A a B.
- $|A| = |B|$ se e solo se esiste una biiezione tra A e B.
- $|A| < |B|$ se $|A| \leq |B|$ ma $|A| \neq |B|$.

4.4 Teoremi Fondamentali

- **Teorema**: Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, allora $|A| = |B|$. Questo è noto come il **teorema di Cantor-Bernstein-Schroeder**, che afferma che se esistono funzioni iniettive da A a B e da B a A, allora esiste una biiezione tra A e B.

4.5 Teorema di Cantor

Georg Cantor ha dimostrato che non esiste una biiezione tra un insieme e il suo insieme delle parti. In altre parole:

- **Teorema**: $|A| < |P(A)|$ per ogni insieme A, dove $P(A)$ indica l'insieme delle parti di A.

5 Algebra di Boole

5.1 Definizione

L'algebra di Boole è definita su un gruppo con delle operazioni e dei valori, queste strutture e operazioni verificano alcune proprietà, l'algebra.

5.2 operazioni

Le operazioni dell'algebra di Boole sono:

- **meet** che si indica con il simbolo $\wedge$ e ha valenza dell'AND logico
- **join** che si indica con il simbolo $\vee$ e ha valenza dell'OR logico
- **complemento** che si indica con il simbolo $\overline{a}$ e ha valenza del NOT logico ($\neg$)

5.3 proprietà dell'algebra di Boole

- **Associativa**
  $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
  $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- **Commutativa**
  $A \vee B = B \vee A \qquad A \wedge B = B \wedge A$
- **Assorbimento**
  $A \vee (A \wedge B) = A \qquad A \wedge (A \vee B) = A$
- **Idempotenza**
  $A \vee A = A \qquad A \wedge A = A$
- **Distributiva**
  $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- **Identità**
  $A \vee \bot = A \qquad A \vee \top = A$
- **Complemento**
  $A \vee \overline{A} = \top \qquad A \wedge \overline{A} = \bot$
- **De Morgan**
  $\overline{A \vee B} = \overline{A} \vee \overline{B} \qquad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

5.4 Considerazioni Aggiuntive

- Le operazioni booleane sono definite su un insieme di due elementi, tipicamente rappresentati come $0, 1$, $\bot, \top$, o $\text{false}, \text{true}$.

6 Conclusion

This is the conclusion section of your math document.