

Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

Nicola Canzonieri

Ottobre 2024

Indice

3. Capitolo 1

1 Capitolo 1

1.1 Introduzione e Problemi di ordinamento

I problemi di ordinamento consistono nell'ordinare una data sequenza di interi, contenuta in un vettore di interi A di lunghezza n .

Vedremo una serie di algoritmi che si occuperanno di svolgere questo problema e in particolare andremo a studiare la **complessità spaziale**, **temporale** e la **correttezza** di questi algoritmi.

1.2 Insertion Sort

L'idea alla base dell'algoritmo Insertion Sort è quella che dato un vettore A dove sappiamo che $A[1...i-1]$ è già ordinato, per ordinare tutto $A[1...i]$ ci basterà inserire $A[i]$ nel posto giusto.

Possiamo applicare questa strategia pensando già da subito che il vettore $A[1...1]$ è già ordinato e che quindi ci basterà iniziare a posizionare $A[2]$ e così via.

Questo è lo pseudocodice di Insertion Sort:

```
InsertionSort(A) {
    for (i ← 2 to n) {
        key ← A[i]
        j ← i - 1

        while (key < A[j] and j > 0) {
            A[j + 1] ← A[j]
            j ← j - 1
        }

        A[j + 1] ← key
    }
}
```

1.3 Complessità temporale di Insertion Sort

Analizziamo adesso la complessità temporale di Insertion Sort andando a costruire la funzione che ci ritornerà il tempo di esecuzione che l'algoritmo necessita:

`for (i <- 2 to n)` necessita tempo $c_1 + c_2(n - 1)$
`key <- A[i]` necessita tempo $c_3(n - 1)$
`j <- i - 1` necessita tempo $c_4(n - 1)$
`while (key < A[j] and j > 0)` necessita tempo $c_5 \sum_{i=2}^n t_i$ dove t_i indica
il numero di volte che l'intestazione viene eseguita durante la i -esima
iterazione del `for`
`A[j + 1] <- A[j]` necessita tempo $c_6 \sum_{i=2}^n (t_i - 1)$
`j <- j - 1` necessita tempo $c_7 \sum_{i=2}^n (t_i - 1)$
`A[j + 1]` necessita tempo $c_8(n - 1)$
Sommando tutti i termini c_i abbiamo che:

$$T_{Insert}(n) = c_1 + c_2(n - 1) + c_3(n - 1) + c_4(n - 1) + c_5 \sum_{i=2}^n t_i + c_6 \sum_{i=2}^n (t_i - 1) + c_7 \sum_{i=2}^n (t_i - 1) + c_8(n - 1)$$

Che possiamo semplificare in:

$$T_{Insert}(n) = a + b(n - 1) + c \sum_{i=2}^n t_i$$

Da questa nuova equazione (molto più maneggiabile) possiamo analizzare il tempo necessario per la computazione dell'algoritmo Insertion Sort nel **caso peggiore** e nel caso **caso minore**.

Per quanto riguarda il **caso peggiore** possiamo subito dire che questo caso corrisponde al caso in cui il vettore è ordinato in ordine decrescente e quindi avremo che $t_i = i$ da cui vediamo che:

$$\sum_{i=2}^n i = \frac{n(n + 1)}{2} - 1$$

e quindi:

$$T_{Insert}(n) = a + b(n - 1) + c \frac{n(n + 1)}{2} - c = \Theta(n^2)$$

che vuol dire che la complessità temporale nel caso peggiore è **quadratica**.

Nel **caso migliore** il vettore è già ordinato e quindi $t_i = 1$ poiché l'intestazione del `while` viene eseguita comunque una volta per il confronto. Quindi abbiamo che:

$$T_{Insert} = a + b(n - 1) + c(n - 1) = \Theta(n)$$

che vuol dire che la complessità temporale nel caso migliore è **lineare**.

1.4 Complessità spaziale e stabilità di Insertion Sort

Lo spazio richiesto dall'algoritmo (cioè il numero di variabili presenti) non dipende dalla grandezza del vettore A (infatti le variabili sono sempre i , j e key). Per questo motivo abbiamo che:

$$S_{Insert}(n) = \Theta(1)$$

che vuol dire che la complessità spaziale è **costante** e quindi si dice anche che Insertion Sort è un algoritmo **in place**.

Un altro concetto molto importante è quello della **stabilità**, infatti un algoritmo di ordinamento che fa sì che gli elementi ripetuti restino nello stesso ordine viene detto **algoritmo stabile**.

1.5 Correttezza di Insertion Sort

Dobbiamo dimostrare che $\forall A$, `InsertionSort(A)` termina con A ordinato. Questo corrisponde al nostro **enunciato di correttezza**.

Per procedere abbiamo bisogno di un **invariante** per il ciclo **for** che risponderà alla domanda: "Alla i -esima iterazione del ciclo **for**, cos'è sempre vero?".

La risposta sarà: "All'inizio della i -esima iterazione del **for**, $A[1 \dots i - 1]$ è ordinato".

Dimostriamolo per induzione su i :

Caso base: $i = 2$

$A[1 \dots i - 1] = A[1 \dots 1]$ è ordinato poiché è composto da un unico elemento

Passo induttivo

Supponiamo che alla i -esima iterazione $A[1 \dots i - 1]$ sia ordinato, e dimostriamo che $A[1 \dots i]$ verrà ordinato alla $i + 1$ -esima iterazione.

Analizzando il corpo del ciclo **for** vediamo che il ciclo **while** sposta a dx gli elementi senza modificare l'ordine. Infatti tutti i valori prima del j -esimo (una volta che il ciclo **while** si è interrotto) sono ordinati e la stessa cosa vale per quelli dopo.

Per questo motivo il valore che verrà inserito nel j -esimo posto sarà maggiore di tutti quelli prima di lui e minore di tutti quelli dopo di lui. Inoltre poiché la guardia del ciclo **for** (vale a dire i) non è stata toccata all'interno del ciclo stesso possiamo essere sicuri che il **for** terminerà all'inizio della $(n + 1)$ -esima iterazione per l'invariante avremo che $A[1 \dots (n + 1) - 1] = A[1 \dots n]$ è ordinato.