Appunti di Calcolo della Probabilità e Statistica

Nicola Canzonieri

Ottobre 2024

Indice

1 Capitolo 1: Esperimenti casuali, spazi campionari ed eventi

TODO!

2 Capitolo 2: Probabilità classica, frequentista e assiomatica

2.1 Operazioni su eventi

Abbiamo quattro principali operazioni logiche su eventi:

- Evento contrario
- Unione
- Intersezione
- Differenza

Evento contrario:
È quell'evento $\overline{A}$ che si verifica quando non si verifica A

Unione:
È quell'evento $A \cup B$ che si verifica quando si verifica A oppure B (oppure entrambi)

Intersezione:
È quell'evento $A \cap B$ che si verifica quando si verificano entrambi A e B

Differenza:
È quell'evento $A \setminus B$ che si verifica quando si verifica A ma non B

Valgono inoltre le leggi di **De Morgan**:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ e } \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Diciamo inoltre che se due eventi non possono realizzarsi simultaneamente allora sono due **eventi incompatibili**. Tramite formule abbiamo che questo è vero se:

$$A \cup B = \emptyset$$

2.2 Classe degli eventi

La **classe degli eventi** è la collezione di tutti gli eventi di cui ha senso parlare nel contesto del dato esperimento casuale con spazio campionario S. È indicata con $\mathcal{A}$.

Adesso che abbiamo lo spazio campionario S e la classe degli eventi $\mathcal{A}$ possiamo modellare l'incertezza presente nell'esperimento casuale ε.
Per ogni $E \in \mathcal{A}$ indichiamo con $P(E)$ la **probabilità** di E, che sarà pertanto un'applicazione $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Per la costruzione effettiva della probabilità ci sono bisogno di alcuni schemi concettuali, dove la **probabilità classica**, **frequentista** e **assiomatica** sono i più importanti.

2.3 Probabilità Classica

Sia ε un esperimento casuale, S il suo spazio campionario con cardinalità finita $|S|$ e la classe degli eventi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$, pure con cardinalità finita $2^{|S|}$. Allora il modo più semplice di valutare $P(E)$ è secondo la definizione classica di Laplace:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Notiamo che questa definizione suppone che tutti i risultati siano egualmente possibili.

2.4 Probabilità frequentista

Dati ε, S, $\mathcal{A}$ e un evento $E \in \mathcal{A}$ nella concezione frequentista $P(E)$ misura la propensione dell'esperimento ε a produrre la realizzazione di E in base alla sue preassegnate regole.
Assumendo omogeneità nel tempo delle ripetizioni dell'esperimento, il valore $P(E)$, relativo a ciò che si deve ancora sperimentare, può venire empiricamente approssimato da un dato di esperienza. Si supponga quindi di replicare ε un numero grande di volte che indichiamo con R e di prendere nota che l'evento si sia realizzato o meno nelle varie replicazioni. Il valore $P(E)$ varrà quindi:

$$P(E) \approx P_R(E) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} y_r$$

dove $y_r = 1$ se la replicazione r-esima si è verificata, mentre $y_r = 0$ altrimenti.

2.5 Probabilità assiomatica

L'assiomatizzazione del Calcolo delle Probabilità offre le regole per calcolare correttamente nuove probabilità a partire da probabilità assegnate. Seguendo le regole, i calcoli funzionano qualunque sia lo scopo dell'analisi e qualunque sia la nostra concezione di probabilità.
Il primo passo per l'assiomatizzazione è descrivere bene la classe degli eventi $A \subseteq \mathcal{P}(S)$, cioè le operazioni sugli eventi non devono portare al di fuori della classe degli eventi stessa.
In pratica la scelta di $A \subseteq \mathcal{P}(S)$ è guidata dalla cardinalità di S:

- Se S ha cardinalità finita o numerabile, si farà sempre la scelta $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$
- Se S ha la cardinalità del continuo, $\mathcal{P}(S)$ risulta troppo grande e quindi si deve scegliere una $A \subset \mathcal{P}(S)$ somigliante a $\mathcal{P}(S)$, cioè con analoghe proprietà di chiusura alle operazioni su eventi. I dettagli sono un po' tecnici

2.6 La classe degli eventi come σ-algebra

Si postula che $\mathcal{A}$ sia sempre una σ-algebra di parti di S, ossia una collezione di parti di S tale che valgano le seguenti tre proprietà:

- $i) S \in \mathcal{A}$
- $ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $iii) A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in I \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

In sintesi $i)$ richiede che S sia un evento e $ii)$ postula che se A è un evento allora anche $\overline{A}$ sia sempre un evento. Il punto $iii)$ esige che, data una successione finita o numerabile di eventi, anche la loro unione sia un evento, ossia che si possa sempre parlare della realizzazione di almeno uno degli eventi di una successione finita o numerabile.
Notiamo inoltre che anche $\emptyset$ è un evento, infatti $\overline{S} \in A$ per $i)$ e $ii)$.

2.7 Spazi probabilizzabili e Spazi probabilizzati

La coppia ordinata $(S, \mathcal{A})$, dove S è non vuoto e $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di S, è detta **spazio probabilizzabile**

Chiamiamo invece **misura di probabilità** l'applicazione:

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

che soddisfa le tre proprietà, dette **assiomi di Kolmogorov**:
A1: $P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$ detto assioma di non-negatività
A2: $P(S) = 1$ detto assioma di normalizzazione
A3: per ogni successione $A_i,\ i \in I \subseteq \mathbb{N}$, di eventi a due a due incompatibili vale:

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Avendo definito la **misura di probabilità** possiamo definire la terna ordinata $(S, \mathcal{A}, P)$ (dove P è appunto la misura di probabilità) come **spazio probabilizzato**