Appunti di Logica

Nicola Canzonieri

Ottobre 2024

Indice

3. Capitolo 3

1 Capitolo 3: Forma normale congiuntiva e disgiuntiva

L'obbiettivo di questo capitolo è quello di trasformare una formula proposizionale in una formula ad essa logicamente equivalente che abbia una forma particolarmente semplice dal punto di vista sintattico che ci consentirà di valutare in maniera più semplice la sua validità e la sua soddisfacibilità.

1.1 Definizione di forma normale congiuntiva e disgiuntiva

Un **letterale** è una lettera proposizionale oppure la negazione di una lettera proposizionale.
Se p è una lettera proposizionale, $\{p, \neg p\}$ è una **coppia complementare di letterali**. Più in generale se F è una formula, $\{F, \neg F\}$ è una **coppia complementare**. Diciamo inoltre che F e $\neg F$ sono uno il **complemento** dell'altro.

Lemma 3.3
Un insieme di letterali è soddisfacibile se e solo se non contiene nessuna coppia complementare.

Esercizio 3.5
Vogliamo dimostrare che una disgiunzione di letterali è valida se e solo se tra i disgiunti vi è una coppia complementare.

Dimostriamo che $p \vee q$ valida $\Rightarrow \{p, q\}$ è una coppia complementare.

Per ipotesi abbiamo che $p \vee q$ è valida che vuol dire che per ogni interpretazione possibile abbiamo che la formula $F = p \vee q$ è soddisfatta, cioè $\forall v,\ v(F) = \mathbb{V}$. Dobbiamo dimostrare che $\{p, q\}$ è una coppia complementare, cioè $q = \neg p$.
Poiché $F = p \vee q$ è una disgiunzione, ed soddisfatta, $\forall v$ abbiamo che se $v(p) = \mathbb{F}$ allora $v(q) = \mathbb{V}$ oppure il viceversa. Tuttavia ricordiamo che esistono due casi importanti nella disgiunzione e sono i casi in cui $v(p) = \mathbb{V}, v(q) = \mathbb{V}$ e $v(p) = \mathbb{F}, v(q) = \mathbb{F}$. Nel primo caso si avrebbe che F è comunque soddisfatta ma nel secondo caso no. Questa è la prova che automaticamente implica che ci sia una relazione di complementarità tra p e q, infatti solo se $q = \neg p$ (oppure $p = \neg q$) si avrà che F è soddisfatta per qualsiasi caso.

Dimostriamo ora che $\{p, \neg p\} \Rightarrow p \vee \neg p$ è valida.

Ma questo è ovvio anche in parte per quanto visto prima $\square$

Diciamo che una formula proposizionale è in **forma normale congiuntiva** se è della forma $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$ dove per $1 \leq i \leq m$, F_i è della forma $G_{i,1} \vee G_{i,2} \vee ... \vee G_{i,h_i}$ dove per $1 \leq j \leq h_i$, $G_{i,j}$ è un letterale.

Diciamo che una formula proposizionale è in **forma normale disgiuntiva** se è della forma $F_1 \vee F_2 \vee ... \vee F_m$ dove per $1 \leq i \leq m$, F_i è della forma $G_{i,1} \wedge G_{i,2} \wedge ... \wedge G_{i,h_i}$ dove per $1 \leq j \leq h_i$, $G_{i,j}$ è un letterale.

Esempix:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg s \vee \neg t)$$

dove $m = 2$, $h_1 = 2$, $h_2 = 3$.

$$(\neg p \vee q \vee \neg t) \wedge (r \vee \neg s \vee t) \wedge (s \vee \neg p)$$

dove $m = 3$, $h_1 = 3$, $h_2 = 3$, $h_3 = 2$.

Teorema 3.10
Ogni formula proposizionale F può essere trasformata in due formule G_1 e G_2, la prima in forma normale congiuntiva e la seconda in forma normale disgiuntiva, tali che

$$F \equiv G_1 \text{ e } F \equiv G_2$$