Introducción a los Algoritmos 2C 2025

Práctico 2: Cálculo y propiedades de la lógica proposicional

Cálculo Proposicional

Tomando ideas de E. W. Dijkstra, proponemos el uso de lo que llamamos *calculational proofs (pruebas calculacionales)*. Como resultado, el cálculo que presentamos nos permite demostrar teoremas y propiedades al estilo de un cálculo; como cuando despejamos una `x` para resolver una ecuación. La expresión de un teorema es en esencia una expresión booleana, y su prueba es, en esencia, calcular que esa expresión tiene valor verdadero. La forma más directa de "evaluar" una expresión booleana es someterla a una o varias transformaciones que preserven el valor de verdad hasta que alcancemos una formulación simplificada de la expresión, en el caso de un teorema: `True`. Continuando con la analogía de "despejar la `x`" en cada paso podemos, por ejemplo, sumar miembro a miembro una constante, y finalmente decimos que resolvimos la ecuación cuando llegamos a una expresión, equivalente a la original, que tiene una forma más simple, por ejemplo `x = 5`.
Si en alguna oportunidad alguien nos pidiera que multipliquemos `179.347` por `9.325` y no contamos con alguna calculadora a mano, no dudaríamos en escribir un número debajo del otro y resolver el problema con el método que aprendimos en la escuela primaria. De la misma manera, contar con una buena notación y una forma ordenada de escritura, sumado a contar con una cálculo de tipo ecuacional que permite expresar las pruebas con una estructura lineal, extiende nuestra capacidad para razonar sobre los problemas.
Una demostración en el *Cálculo Proposicional* que veremos en este curso consiste en probar la validez de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con axiomas y teoremas del Cálculo. Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a `True`; por lo tanto, una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es `True`.

P
≡ { Razón 1 }
Q
≡ { Razón 2 }
(...)
≡ { Razón n }
True

Ejemplo: Como ejemplo concreto podemos ver la siguiente demostración:

$(\neg p \land s) \lor r \equiv r \lor (s \land \neg p)$
≡ { Conmutatividad de la conjunción }
$(s \land \neg p) \lor r \equiv r \lor (s \land \neg p)$
≡ { Conmutatividad de la disyunción }
$r \lor (s \land \neg p) \equiv r \lor (s \land \neg p)$
≡ { Reflexividad del equivalente }
True

En este ejemplo, primero aplica el teorema llamado conmutatividad de la conjunción (P ∧ Q ≡ Q ∧ P), luego la conmutatividad de la conjunción (P ∨ Q ≡ Q ∨ P) y finalmente la reflexividad del equivalente (P ≡ P). Si la fórmula que se quiere demostrar es de la forma R ≡ S, para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia seguida anteriormente transformando la expresión completa en True, o bien partir de la subexpresión R y transformarla en la subexpresión S (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos. A continuación escribimos las mismas pruebas explicadas anteriormente siguiendo esta nueva estrategia.

R
≡ { Razón 1 }
T
≡ { Razón 2 }
(...)
≡ { Razón n }
S

Ejemplo:

(¬p ∧ s)) ∨ r
≡ { Conmutatividad de la conjunción }
(s ∧ ¬p) ∨ r
≡ { Conmutatividad de la disyunción }
r ∨ (s ∧ ¬p)

Sustitución y Regla de Leibniz

Las herramientas que venimos usando para hacer demostraciones se llaman: la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz fue quien introdujo la regla de que es posible reemplazar en una fórmula una expresión por otra expresión equivalente, sin que esto altere el significado de la fórmula. Los sistemas de ecuaciones hacen uso de la regla de Leibniz, por ejemplo

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & x+3 & (2) \end{array}\right. \xrightarrow{Utilizo\ (1)\ en\ (2)} \left\{\begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & 5+3 & (2) \end{array}\right.$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones tienen el mismo significado porque el de la derecha reemplaza `x` por el valor al cual es equivalente en este sistema de ecuaciones, es decir, 5. En las demostraciones del Cálculo Proposicional se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para "transformar" fórmulas. Por ejemplo, como `p ∨ p ≡ p` es una instanciación del axioma `P ∨ P ≡ P`, se puede transformar la fórmula p ∧ q a la fórmula `(p ∨ p) ∧ q` donde se reemplazó p por otra expresión equivalente, `p ∨ p`.

Propiedades de la lógica proposicional

A continuación se listan un conjunto de propiedades del equivalente y la negación. Notá que hacemos una distinción entre algunos que identificamos con asterisco (*), y que llamaremos **axiomas**, y otros que llamaremos **teoremas**; pero ambos son propiedades que sirven para trabajar con fórmulas booleanas.

Axiomas de Equivalencia y Negación

*Asociatividad equivalencia

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

*Conmutatividad equivalencia

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

* Elemento Neutro equivalencia

$$(P \equiv True) \equiv P$$

*Definición de False

$$False \equiv \neg True$$

*Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

Ejercicio 1: Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas válidas utilizando los axiomas del equivalente y la negación. Realizá la demostración justificando cada paso.

Algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

$\underline{x > 5 \equiv True}$
$\equiv$ { neutro de equivalencia $(P \equiv True) \equiv P$, donde $P := x > 5$ }
$x > 5$

a) Reflexividad equivalencia : $p \equiv p$

b) Doble negación: $\neg\neg p \equiv p$

Ejemplo 2: demostremos el TEOREMA doble negación

$\underline{\neg\neg p \equiv p}$
$\equiv$ { Definición de negación $\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$, donde $P:=\neg p$, $Q:=p$ }
$\neg(\underline{\neg p \equiv p})$
$\equiv$ { Conmutatividad equivalencia, $(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$, donde $P:=\neg p$, $Q:=p$}

$\underline{\neg(p \equiv \neg p)}$
≡ { Definición de negación $\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$, donde $P:=p$, $Q:= \neg p$ }
$\underline{\neg p \equiv \neg p}$
≡ {Reflexividad de la Equivalencia $P \equiv P$, donde $P:= \neg p$ }
True ya que demostramos que la reflexividad es un Teorema dentro de nuestra lógica proposicional

c) Equivalencia y negación: ¬p ≡ (p ≡ False)

d) $\neg False \equiv True$

e) $r \equiv s \wedge t \equiv s \wedge t \equiv r$

f) $\neg p \equiv q \equiv p \equiv \neg q$

Ejercicio 2: Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente con una demostración o un contraejemplo.

a) $p \equiv p \equiv p \equiv True$

b) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

c) $\neg p \equiv False$

Disyunción y Conjunción

*Asociatividad disyunción

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

*Conmutatividad disyunción

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

*Idempotencia disyunción

$$P \vee P \equiv P$$

*Distributividad disyunción con equivalencia

$$(P \vee (Q \equiv R)) \equiv ((P \vee Q) \equiv (P \vee R))$$

*Tercero excluido

$$P \vee \neg P \equiv True$$

*Regla dorada

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

Ejercicio 3: ¿Es válida la siguiente fórmula que podría interpretarse como la distributividad de la conjunción con la equivalencia? Justificá la respuesta.

$(p \wedge (q \equiv r)) \equiv ((p \wedge q) \equiv (p \wedge r))$

Ejercicio 4: Demostrá los siguientes teoremas de la disyunción utilizando las propiedades de la equivalencia y la negación, y sólo los axiomas de la disyunción. Justificá en cada cada paso con el axioma o teorema aplicado.

a) Elemento absorbente de la disyunción: $p \vee True \equiv True$
Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

$p \vee True \equiv True$
$\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
$p \vee (p \equiv p) \equiv True$
$\equiv$ { Distributividad de disyunción con equivalencia }
....

b) Elemento neutro de la disyunción: $p \vee False \equiv p$
Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

$p \vee False \equiv p$
$\equiv$ { Definición de False }
$p \vee \neg True \equiv p$
$\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
$p \vee \neg(p \equiv p) \equiv p$
$\equiv$ { Definición de negación }
....

c) Teorema Estrella : $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$
Ayuda: Podés utilizar la distributividad del $\vee$ con el $\equiv$, como si aplicaras factor común.

Ejercicio 5: Demostrá los siguientes teoremas de la conjunción utilizando las propiedades de la equivalencia, la negación y la disyunción y el axioma llamado regla dorada. Justificá en cada paso con el axioma o teorema aplicado.

a) Asociatividad de la conjunción: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) Conmutatividad de la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

c) Idempotencia de la conjunción: $p \wedge p \equiv p$

d) Elemento absorbente de la conjunción: $p \wedge False \equiv False$

e) Elemento neutro de la conjunción: $p \wedge True \equiv p$

f) Principio de no contradicción: $p \wedge \neg p \equiv False$

Ejercicio 6: Demostrá los siguientes teoremas de la disyunción con la conjunción, sin utilizar las propiedades que estás demostrando. Justificá en cada paso con el axioma o teorema aplicado.

a) Ley de absorción: $p \land (p \lor q) \equiv p$

b) Ley de absorción (bis): $p \lor (p \land q) \equiv p$

c) Distributividad de la disyunción con la conjunción: $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

d) De Morgan para la disyunción: $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

e) De Morgan para la conjunción: $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$

Implicación

La implicación es uno de los mecanismos más intuitivos para razonar, ya que de esta forma representamos la causalidad. De la misma forma que la causalidad no es simétrica, tampoco lo es la implicación. Es decir, los dos elementos que componen una implicación no participan de igual forma en la relación. Por ejemplo, cuando como demasiado (causa) me duele la panza (efecto), pero no a la inversa (cuando me duele la panza no necesariamente es porque he comido demasiado, puede ser porque estoy nervioso). El elemento a la izquierda de la implicación se llama ***antecedente***, y el de la derecha, ***consecuente***. Esta asimetría también se pone de manifiesto en la tabla de verdad de la implicación:

p	q	p ⇒ q
False	False	True
False	True	True
True	False	False
True	True	True

*Definición de implicación

$$(P \Rightarrow Q) \equiv P \lor Q \equiv Q$$

Ejercicio 7: Demuestre los siguientes teoremas de la implicación a partir de las propiedades de los operadores ya conocidos y la definición de implicación.

a) Caracterización de implicación: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q$

b) Definición dual de implicación: $p \Rightarrow q \equiv p \land q \equiv p$

c) Demostración por el absurdo: $p \equiv (\neg p \Rightarrow \text{False})$

d) Debilitamiento para $\lor$: $p \Rightarrow p \lor q$

Ejercicio 8: Demostrá los siguientes teoremas de la implicación:

a) Debilitamiento para $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$

b) Modus Ponens $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$

c) Modus Tollens $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$

d) Contrarrecíproca $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$
Ayuda: Podés utilizar caracterización de la implicación para demostrar los últimos ejercicios.

Debilitamiento para $\wedge$

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

Modus Ponens

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$$

Modus Tollens

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Contrarrecíproca

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Formalización de razonamientos

Una tarea muy importante en el desarrollo de software es el modelado de problemas. Cuando nos encontramos con un problema a resolver la primera tarea que se plantea es cómo expresar este problema ordenadamente para trabajar con rigor en su solución. Un ejercicio simple de modelado es formalizar razonamientos lógicos con el cálculo proposicional. La idea principal consiste en modelar oraciones del lenguaje natural en términos proposicionales.

$\neg$	"No –", "Es falso que –", "No es el caso que –", etc.
$\wedge$	"– y –", "–, pero –", "–, sin embargo –"
$\vee$	"– o –", "– o – o ambos –".
$\Rightarrow$	"[Si] – entonces –", "– luego –", "–. Como consecuencia, –"
$\equiv$	"– si y sólo si –", "Son equivalentes – y –".
$\not\equiv$	"O bien – o –"

Ejemplo:
Enunciado: Si el gobernador quiere mejorar su imagen, o mejora su política social o gasta más en publicidad. El gobernador no mejora su política social. Luego, si el gobernador quiere mejorar su imagen, entonces deberá gastar más en publicidad.
Solución: Si utilizamos las siguientes variables proposicionales para las proposiciones atómicas que aparecen en el razonamiento:

i : el gobernador quiere mejorar su imagen
s : el gobernador mejora su política social

p : el gobernador gasta más en publicidad

podemos especificar la primera oración con la fórmula $i \Rightarrow s \lor p$, la segunda con $\neg s$, y la tercera con $i \Rightarrow p$. La primera y segunda oraciones son las hipótesis del razonamiento, y la final la conclusión. **Un razonamiento de este tipo es correcto cuando la conjunción de todas las hipótesis implican la conclusión**, es decir cuando la siguiente fórmula es válida:

$$P1 \land P2 \land \ldots \land Pn \Rightarrow C$$

En nuestro ejemplo, el razonamiento completo se puede formalizar como:

$$(i \Rightarrow s \lor p) \land \neg s \Rightarrow (i \Rightarrow p)$$

Este razonamiento válido y su validez puede ser demostrada.

Ejercicio 9: Formalizá los siguientes razonamientos en la lógica proposicional. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración, o un contraejemplo, según corresponda.

a) Soy fea, sucia y mala. Por lo tanto soy mala.

b) Soy fea, sucia o mala. Por lo tanto soy mala.

c) El círculo está pintado de rojo, azul o amarillo. Por lo tanto está pintado de amarillo.

d) Llueve. Por lo tanto llueve y hace frío.

e) Llueve. Por lo tanto llueve o hace frío.

Modus Ponens y Modus Tollens

Tal vez es más común encontrar los teoremas de Modus ponens y Modus Tollens en su forma $p \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ y $\neg q \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$. Éstos nos permiten eliminar el símbolo de implicación si se cumple el antecedente, en el caso del Modus Ponens, y si el consecuente es falso, en el caso del Modus Tollens.

Modus Ponens

$$p \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

Modus Tollens

$$(p \Rightarrow q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$$

La versión de Modus Ponens con implicación, de alguna manera modela una forma de razonamiento muy utilizado en el lenguaje natural. Por un lado tenemos que “si vale p entonces vale q”, es decir, en el caso de que el antecedente sea cierto puedo concluir que el consecuente es cierto. Por otro lado, tenemos que “vale p”, es decir, tengo información de que el antecedente es cierto. Por lo tanto, “vale q”, es decir, puedo concluir que el consecuente es cierto. De manera similar, el Modus Tollens con implicación, expresa que “si vale p entonces vale q”, pero como sé que q no es cierto, entonces no puede ser posible de que valga p. En otras palabras, si p fuera cierto, puedo concluir que q también es cierto a causa de la implicación. Pero eso no puede ser posible porque q no es cierto. Por lo tanto p es falso, o lo que es lo mismo, $\neg p$ es verdadero.

La versión con equivalente de ambos teoremas puede ser más conveniente en algunos casos, cuando trabajamos en nuestro cálculo ecuacional, ya que no nos obliga a debilitar las expresiones.

Ejercicio 10: Escribí dos razonamientos en lenguaje natural cuyos modelos se representen con Modus Ponens y Modus Tollens con implicación.
Ejercicio 11: Modelá los siguientes razonamientos y demostrá que son correctos.

a) Los martes y jueves tengo Introducción a los algoritmos. Hoy es martes; por lo tanto tengo Introducción a los algoritmos.

b) Si el gobernador quiere mejorar su imagen entonces mejora su política social. El gobernador no mejora su política social por lo tanto no quiere mejorar su imagen.

Ejercicio 12: Simplificá las siguientes expresiones eliminando los símbolos de implicación que sean posibles aplicando los teoremas de Modus Ponens y Modus Tollens. (Observá que estas expresiones no son teoremas)

a) $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \land p$

b) $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \land \neg r$

c) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \land \neg(p \Rightarrow r)$

Ejercicio 13: Demostrá los siguientes teoremas

a) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \land (p \land q) \equiv p \land q \land r$

b) $\neg p \land (s \lor t \Rightarrow p) \equiv \neg s \land \neg p \land \neg t$

Currificación

Una interpretación posible del símbolo de implica es considerar al antecedente como una hipótesis; por lo tanto $p \Rightarrow q$ quiere decir que si la hipótesis p es cierta, puedo concluir q. A su vez, si tenemos la expresión $p \land q \Rightarrow r$ podemos interpretar que tenemos dos hipótesis, p y q. Entonces, si ambas hipótesis son ciertas, la conclusión debe ser cierta. En este último caso, el teorema de currificación nos expresa que es posible “anidar” estas hipótesis en el siguiente sentido: si la hipótesis p vale, entonces debería valer $q \Rightarrow r$. Es decir, puedo considerar por separado cada hipótesis obteniendo la expresión $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Por ello a este teorema también le llamamos descarga de hipótesis.
En el otro sentido, si parto de una expresión con implicación con antecedente es h1 y cuyo consecuente es otra implicación con antecedente h2 $(h1 \Rightarrow (h2 \Rightarrow c))$, utilizando el teorema de currificación puedo “unir” las dos hipótesis involucradas y trasformar la expresión a la forma $h1 \land h2 \Rightarrow c$.

Currificación

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \land q \Rightarrow r$$

Ejercicio 14: Demostrá currificación.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \land q \Rightarrow r$

(Ayuda: Utilizá la caracterización del implica.)

Ejercicio 15: Simplificá las siguientes expresiones utilizando sólamente los teoremas de Modus Ponens, Modus Tollens y Currificación.

a) $(p \land q \Rightarrow r) \land p$

b) $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

c) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \land \neg r$

Ejercicio 16: Demostrá los siguientes teoremas de la implicación:

a) Transitividad: $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

b) Monotonía de la conjunción: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \land r \Rightarrow q \land r)$

c) Monotonía disyunción: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \lor r \Rightarrow q \lor r)$

Transitividad

$$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Monotonía de la conjunción

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \land r \Rightarrow q \land r)$$

Monotonía disyunción

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \lor r \Rightarrow q \lor r)$$

Ejercicios adicionales del cálculo proposicional

Ejercicio 17: Demostrá utilizando axiomas y teoremas del cálculo proposicional sin utilizar la propiedad que se pide demostrar

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \land r \Rightarrow q \land r)$

b) $(p \Rightarrow q \land r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

c) $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \land (\neg r \Rightarrow \neg q)$

d) $(p \Rightarrow q) \land r \equiv \neg (p \land \neg q) \equiv r \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \lor r$

e) $\neg(\neg p \lor q) \land (r \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$

f) $p \land \neg(q \equiv r) \equiv \neg((p \land q) \equiv (p \land r))$

g) $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$