EXAMEN FINAL 10/08/2022

ANÁLISIS NUMÉRICO (I) / ANÁLISIS NUMÉRICO

Apellido:
Nombre:
Cantidad de hojas entregadas (sin contar la hoja de enunciados):
Nota: Todos los desarrollos deben estar debidamente justificado.

1. Si $x, y \geq 0$, demostrar que:
$$\left|\frac{x+y-fl(fl(x)+fl(y))}{x+y}\right| \leq 2e+e^2,$$
donde $fl(x) = x(1+\delta_x)$ y $|\delta_x| \leq e$.

2. Se desea encontrar la raíz de $f(x) = 1-\log(x)$. Si usamos el método de Newton, demuestre que para cualquier punto inicial $x_0 \in (0, e)$ vale:
   (a) $0 < x_n \leq x_{n+1}$ y $x_n \leq e$ para todo $n \geq 1$,
   (b) $\{x_n\}$ converge a e.

3. Mostrar que la mejor parábola que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los puntos $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(2,1)$ y $(4,2)$ es
$$y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{40}x - \frac{19}{20}.$$

4. Considere el sistema
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_3 + x_1 &= 1 + x_2, \\ 1 + x_2 &= x_3. \end{aligned}$$
Resuelva usando factorización LU.

5. (Sólo libres) Se desea desarrollar una método de cuadratura para integrales, de la forma
$$\int_0^{2h} f(x)dx \approx h\left(c_1 f(h) + c_2 f(2h)\right)$$
que sea exacta para todas las funciones de la forma
$$f(x) = ax^{-\frac{1}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$$
donde a y b son números reales arbitrarios. ¿Cómo deberían elegirse c_1 y c_2?

Parte Teórica:

1. Dar la definición de convergencia lineal de una sucesión convergente de números reales. Mostrar un ejemplo.
2. Dar la definición de solución básica factible en un problema de programación lineal.
3. Enunciar y demostrar el teorema de convergencia del método de bisección.
4. Explicar en qué consiste el método de punto fijo: dar la definición de punto fijo, para qué se utilizan estos métodos, explicar resultados de existencia, unicidad y convergencia.