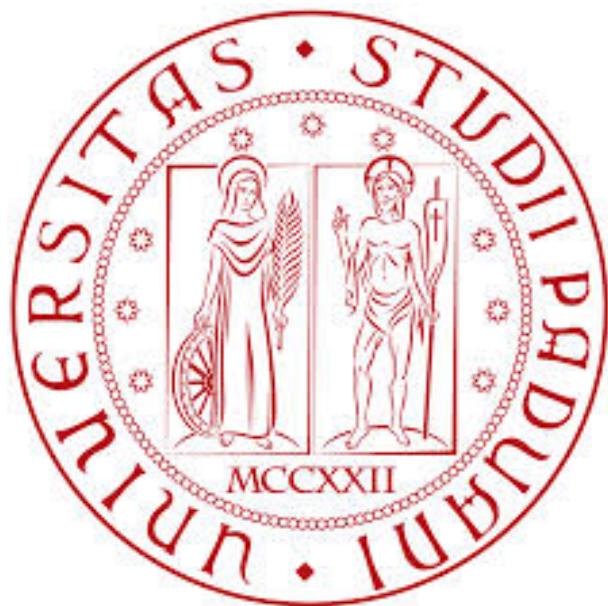


**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione**

Corso di Laboratorio di Controlli

Esperienza 2: Progettazione di controllori PID e con retroazione stato per un  
motore elettrico



Dal Lago Nicola - 1104228

Anno Accademico 2014-2015

# Indice

<b>1 Scopo</b>	<b>2</b>
<b>2 Descrizione apparato sperimentale</b>	<b>2</b>
<b>3 Modellizzazione</b>	<b>4</b>
3.1 Modellizzazione del motore . . . . .	4
3.2 Modellizzazione del motoriduttore . . . . .	5
3.3 Modellizzazione in spazio di stato . . . . .	7
<b>4 Progettazione controllore PID con desaturatore</b>	<b>9</b>
4.1 Il controllore PID . . . . .	9
4.2 Progettazione in frequenza del controllore PID . . . . .	10
4.3 Progetto del controllore PID con desaturatore . . . . .	12
<b>5 Progettazione controllori in spazio di stato</b>	<b>14</b>
5.1 Controllo in feedforward . . . . .	14
5.2 Controllo integrale . . . . .	14
<b>6 Simulazione e esperienza in laboratorio</b>	<b>17</b>
6.1 Simulazione controllore PID con desaturatore . . . . .	17
6.2 Simulazione controllo in feedforward . . . . .	18
6.3 Simulazione controllo integrale . . . . .	19
6.4 Verifica sperimentale in laboratorio . . . . .	21
<b>7 Generalizzazione controllo integrale, principio del modello interno</b>	<b>23</b>
<b>A Progettazione in frequenza per un sistema del secondo ordine</b>	<b>24</b>
A.1 Sovraelongazione e tempo al picco . . . . .	24
A.2 Sovraelongazione e margine di fase . . . . .	25
<b>B Grafici e prestazioni</b>	<b>26</b>
B.1 Simulazione controllore PID con desaturatore . . . . .	26
B.2 Simulazioni controllo in feedforward . . . . .	28
<b>C Codice MATLAB utilizzato</b>	<b>29</b>
C.1 controllore_PID.m . . . . .	29
C.2 controllore_feedforward.m . . . . .	29
C.3 controllore_integrale.m . . . . .	30
<b>D Modelli SIMULINK utilizzati</b>	<b>31</b>
D.1 modello_PID.slx . . . . .	31
D.2 modello_feedforward.slx . . . . .	32
D.3 modello_integrale.slx . . . . .	32

## 1 Scopo

Lo scopo di questa esperienza è la progettazione di regolatori PID e in spazio di stato per il controllo di un motore elettrico a corrente continua controllato in tensione. In particolar modo si vuole analizzare il comportamento del sistema in catena chiusa sollecitato da un ingresso a gradino. Si vogliono quindi caratterizzare le differenze tra un regolatore PID con desaturatore e un regolatore ottenuto tramite retroazione di stato. Altro obiettivo importante dell'esperienza è il confronto tra i risultati ottenuti per simulazione e sperimentalmente, motivando le eventuali ritarature dei parametri di controllo.

## 2 Descrizione apparato sperimentale

Il sistema di controllo fornito in laboratorio si basa sul programma *Real-Time Workshop* che permette l'esecuzione in tempo reale di controllori implementati tramite *Matlab-Simulink*. L'apparato sperimentale è rappresentato in figura 1.

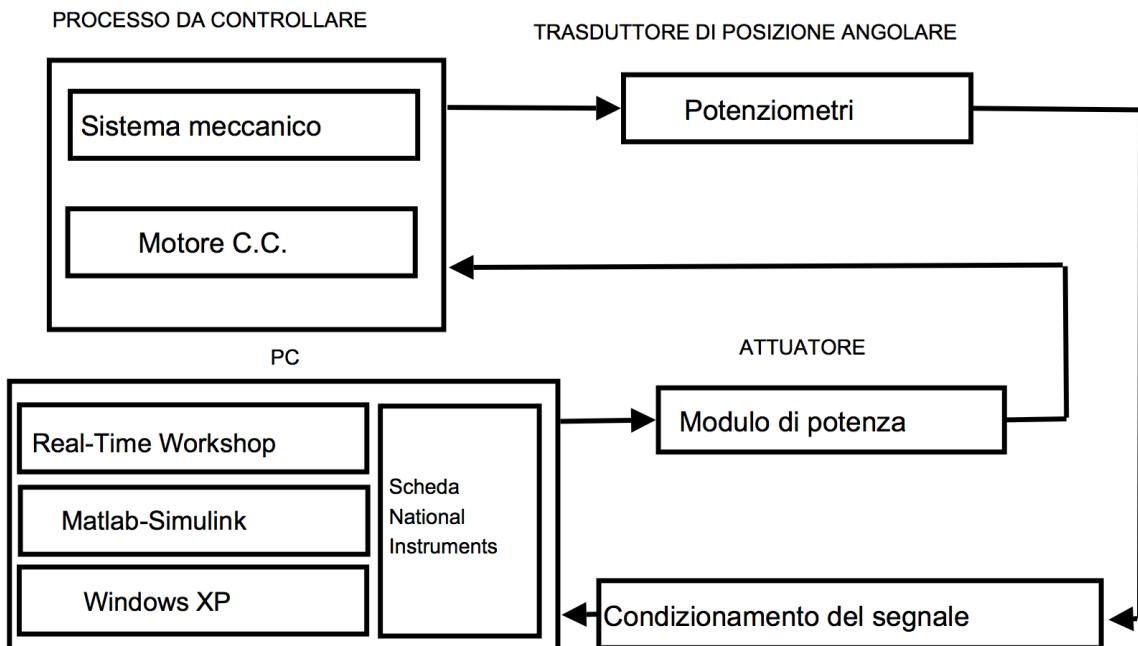


Figura 1: Schema componenti dell'apparato sperimentale.

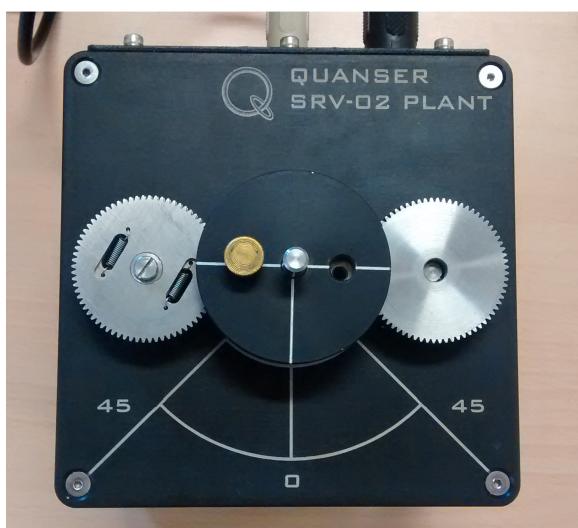
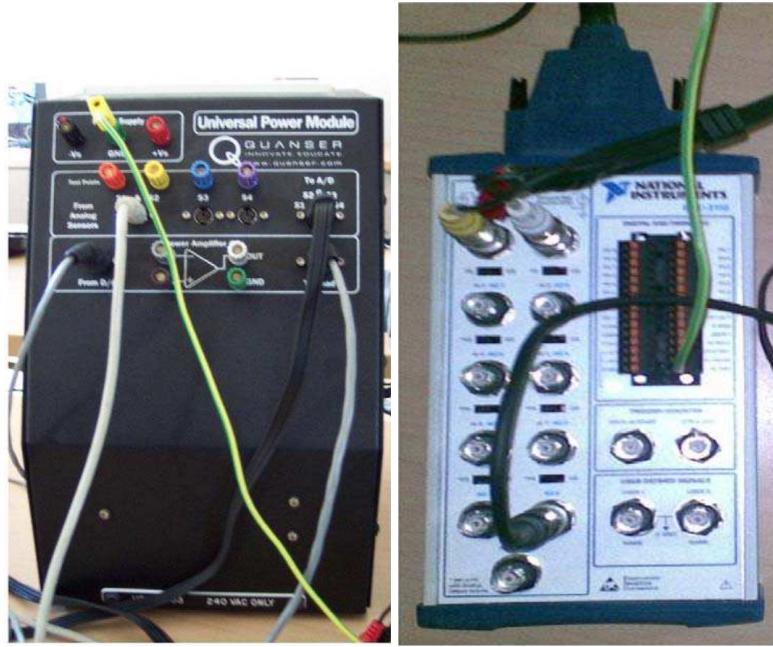


Figura 2: Sistema elettromeccanico da controllare (vista dall'alto)



(a) Modulo di potenza

(b) Scheda di acquisizione PCI

Figura 3: Componenti dell'apparato sperimentale

Il processo da controllare è costituito da un sistema elettromeccanico comandato da un motore in corrente continua con motoriduttore. Quest'ultimo muove altre due ruote dentate, quella centrale che rappresenta il carico e ha lo scopo di indicare la posizione e il movimento in gradi della ruota, mentre nella seconda ruota (quella più esterna) è montato un trasduttore (costituito da un potenziometro) che converte la posizione in gradi del carico in segnale elettrico. Da notare che il sistema a tre ruote serve per ridurre l'effetto di *backlash* al carico ovvero il gioco che esiste fra due ingranaggi qualunque per il semplice fatto che le tolleranze meccaniche non permettono di avere un accoppiamento perfetto. A causa di questo fenomeno si ha un ritardo nell'inversione del moto su un asse rispetto al comando stesso di inversione. Per comandare tutto ciò si è utilizzato un modulo di potenza costituito da un alimentatore DC duale da 12V e da un amplificatore lineare che è in grado di fornire al motore  $\pm 5V$ . L'acquisizione dati è stata fatta con la scheda *National Instruments PCI-6221* accessibile via software attraverso porte I/O. In figura 2 si osservano i diversi componenti che costituiscono il sistema elettromeccanico da controllare e in figura 3a si nota il modulo di potenza utilizzato assieme alla scheda di acquisizione dati in figura 3b. In figura 4 sono raffigurati blocchi che permettono la comunicazione tra Matlab-Simulink e la scheda PCI che a sua volta, tramite il modulo di potenza, è connessa al motore e al trasduttore.

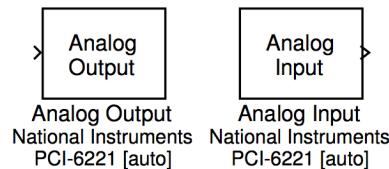


Figura 4: Blocchi Simulink per la prova sperimentale

### 3 Modellizzazione

Nel corso di questa esperienza, viene impiegato un motore elettrico a corrente continua. Il motore è controllato tramite un segnale in tensione e fornisce in output l'attuale posizione del carico, attraverso l'utilizzo di un encoder.

#### 3.1 Modellizzazione del motore

Un motore elettrico in corrente continua, può essere suddiviso in due parti, statore e rotore.

Lo statore ha il compito di indurre un campo magnetico  $B$ , attraverso l'uso di materiali ferromagnetici e correnti elettriche.

Il rotore è composto da un elevato numero di spire percorse da corrente  $i$  e immerse nel campo magnetico prodotto dallo statore.

Come è noto dalla *legge di Faraday*, una spira in tale situazione produce una forza elettro motrice *f.e.m.*, pari all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso concatenato dalla spira

$$f.e.m. = -\frac{d\theta(t)}{dt} = AB \sin(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (1)$$

dove  $A$  è l'area della spira, e  $\alpha$  è l'angolo tra il vettore campo magnetico e il versore perpendicolare alla spira con verso dato dalla regola della vite destrorsa.

Si può quindi ricavare anche il momento torcente totale  $\tau_{TOT}$  di ciascuna spira come

$$\tau_{TOT} = ABi \sin \alpha(t) \quad (2)$$

Riassumendo, possiamo scrivere la **dinamica elettro-meccanica** del rotore:

$$\begin{cases} f.e.m. = -AB\omega = -k_\phi \omega \\ \tau_{TOT} = ABi = k_\phi i \end{cases} \quad (3)$$

dove, con  $\omega$  si indica la velocità angolare del rotore e con  $k_\phi$  la *costante elettrica* fornita da datasheet.

Per la **dinamica meccanica**, supponendo di avere un attrito viscoso descritto come  $\tau_{attr} = -b\omega$ , possiamo ricavarne l'equazione utilizzando il momento di inerzia  $J$ :

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_\phi i - b\omega \quad (4)$$

si noti come questa equazione può essere interpretata come l'uscita del nostro sistema motore, in quanto è una equazione differenziale in funzione della velocità angolare del motore.

Passando alla **dinamica elettrica**, possiamo pensare il motore come una serie di una resistenza  $R$ , un generatore di forza elettromotrice *f.e.m.* e una induttanza  $L$ ; ai capi di tale serie, viene applicata una tensione  $v_m$ , il nostro controllo. Possiamo quindi scrivere l'equazione di controllo

$$v_m - k_\phi \omega = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (5)$$

Ora possiamo unire le equazioni di uscita e di controllo, e interpretare  $i$  e  $\omega$  come le variabili di stato

$$\begin{cases} v_m = Ri + L \frac{di}{dt} + k_\phi \omega \\ J \frac{d\omega}{dt} = -b\omega + k_\phi i \end{cases} \quad (6)$$

e applicando la *trasformata di Laplace* scriviamo

$$\begin{cases} V_m(s) = RI(s) + sLI(s) + k_\phi \Omega(s) \\ Js\Omega(s) = -b\Omega(s) + k_\phi I(s) \end{cases} \quad (7)$$

Con dei semplici passaggi algebrici è possibile ottenere

$$\Omega(s) = P(s)V_m(s) = \frac{k_\phi}{(R + sL)(b + SJ) + k_\phi^2} \cdot V_m(s) \quad (8)$$

dove con  $P(s)$  indichiamo la funzione di trasferimento del processo. Nel caso del nostro motore, possiamo trascurare l'effetto induttivo, in quanto è di molto inferiore rispetto a tutti gli altri parametri; ci risulta quindi una equazione di trasferimento

$$P(s) = \frac{k_\phi}{RJs + Rb + K_\phi^2} \quad (9)$$

Come accennato all'inizio del paragrafo, il motore è disposto di un encoder in grado di misurare solo la posizione angolare  $\theta_m$  del motore, e non la velocità angolare; è possibile però ricondursi ad una funzione di trasferimento che abbia la posizione e non la velocità come parametro di uscita ricordando la relazione che le lega:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega$$

e utilizzando la *trasformata di Laplace*  $s\Theta_m(s) = \Omega(s)$ . Viene quindi aggiunto un polo in zero al processo:

$$P_\theta(s) = \frac{k_\phi}{s(RJs + Rb + k_\phi^2)} \quad (10)$$

Per comandare il motore in gradi rispetto alla tensione, bisogna introdurre due costanti moltiplicative che sono in grado di trasformare un valore in gradi a uno in tensione e viceversa:

- $K_{g2v}$  : costante moltiplicativa per passare da gradi a tensione;
- $K_{v2g}$  : costante moltiplicativa per passare da tensione a gradi.

### 3.2 Modellizzazione del motoriduttore

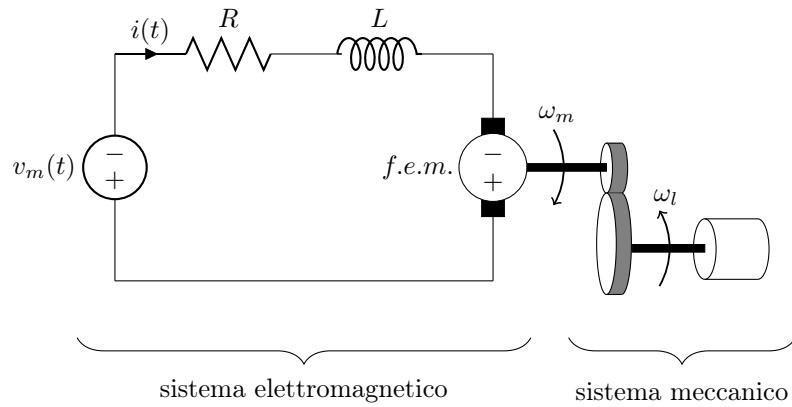


Figura 5: Schema del motore

Tipicamente un motore non viene usato direttamente per comandare un carico, ma si utilizzano una coppia di ingranaggi necessari per adattare le prestazioni del motore alle specifiche di progetto; questo tipo di configurazione viene chiamata *motoriduzione*. E' necessario quindi definire nuove variabili:

- $N_m$  : numero denti dell'ingranaggio collegato al motore;
- $N_l$  : numero denti dell'ingranaggio collegato al carico;
- $\tau_m$  : momento torcente applicato al motore dall'ingranaggio;
- $\tau_l$  : momento torcente applicato al carico;
- $b_m$  : costante di attrito viscoso nel rotore lato motore;
- $b_l$  : costante di attrito viscoso nel rotore lato carico;
- $N = \frac{N_l}{N_m}$  : rapporto di motoriduzione.

Inoltre il motore ha una serie di non idealità le quali ne complicherebbero di molto lo studio; riportiamo qui le semplificazioni fatte

- $L = 0$  : induttanza trascurabile;
- non c'è slittamento tra le ruote, il che implica;

$$\theta_m N_m = \theta_l N_l \implies N_m \frac{d\theta_m}{dt} = N_l \frac{d\theta_l}{dt} \quad (11)$$

- non c'è dissipazione al punto di contatto, cioè le potenze rimangono costanti.

$$\tau_m \omega_m = \tau_l \omega_l \implies \tau_m \frac{d\theta_m}{dt} = \tau_l \frac{d\theta_l}{dt} \quad (12)$$

dall'equazione 11 e 12 otteniamo

$$\frac{\omega_m}{\omega_l} = \frac{N_l}{N_m} = N \iff \omega_m = N \omega_l \quad (13)$$

$$\tau_m N \omega_l = \tau_l \omega_l \iff \tau_l = N \tau_m \quad (14)$$

e unendo tutto insieme nell'equazione del motore ricaviamo

$$(J_m N^2 + J_l) \frac{d\omega_l}{dt} = -(b_m N^2 + b_l) \omega_l + N k_\phi i \quad (15)$$

$$J_{eq} \frac{d\omega_l}{dt} = -b_{eq} \omega_l + k_{\phi, eq} i \quad (16)$$

Si può vedere come la forma delle equazioni del motore e del motoriduttore siano praticamente uguali, ciò che cambia è il valore delle costanti. I dati di targa del motore presente in laboratorio sono riassunti nella tabella 1.

Parametro	Valore	Unità di misura
$K_{g2v}$	0,0284	Volt/rad
$K_{r2v}$	1,63	Volt/rad
$N$	14	
$k_\phi$	0,00767	Volt/(rad/sec)
$J_m$	$3,87 \times 10^{-7}$	$kg \cdot m^2$
$J_l$	$3,42 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$R$	2,6	$\Omega$
$L$	$0,18 \times 10^{-3}$	H

Tabella 1: Dati di targa del motore

$b_m$  e  $b_l$  non sono noti a priori, ma per il nostro laboratorio vengono considerati nulli, come  $L$ .

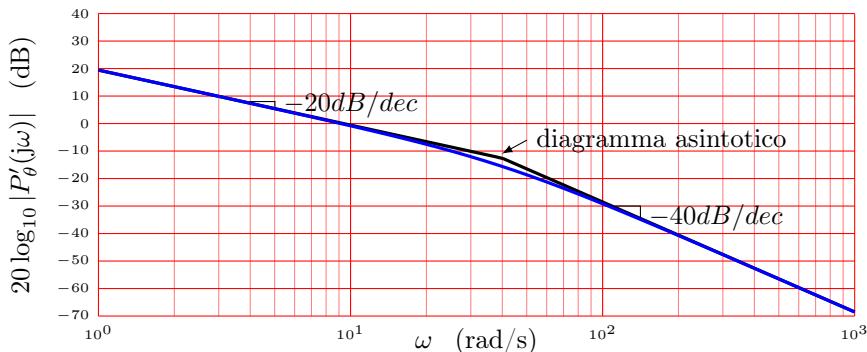
Come prima, anche in questo caso l'encoder ci fornisce la posizione angolare del carico e non la sua velocità, ma applicando gli stessi ragionamenti si può arrivare a formulare l'equazione finale del processo:

$$P_\theta(s) = \frac{N k_\phi}{s(R(J_m N^2 + J_l)) + N^2 k_\phi^2} \quad (17)$$

mentre la vera funzione di trasferimento "osservata" dal motore è moltiplicata per il fattore  $K_{r2v}$ , risulta allora

$$P'_\theta(s) = K_{r2v} \cdot P_\theta(s) \approx \frac{375}{s(s+40)}$$

Per completezza, in figura 6 è rappresentato l'andamento di modulo e fase della funzione di trasferimento  $P'_\theta(s)$ .



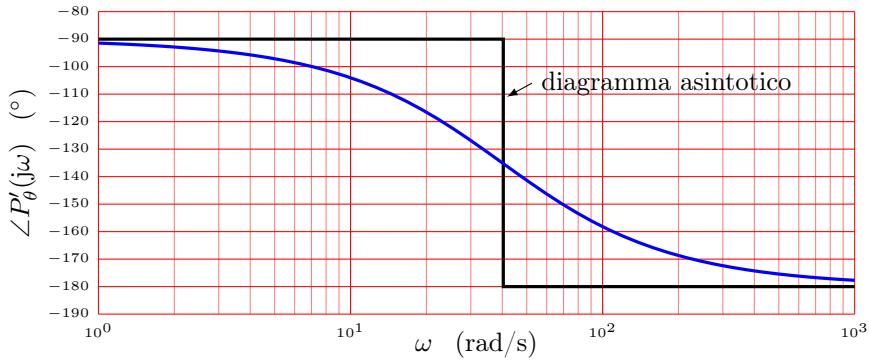


Figura 6: Diagrammi di Bode di modulo e fase.

### 3.3 Modellizzazione in spazio di stato

Una delle possibili rappresentazioni di un processo, insieme a quella in funzione di trasferimento usata fin'ora, è quella in spazio di stato. E' possibile scrivere il sistema come una coppia di equazioni lineari descritte come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (18)$$

dove  $x(t)$  è lo stato,  $u(t)$  l'ingresso e  $y(t)$  l'uscita. Si dimostra che il processo in funzione di trasferimento può essere scritto come  $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , ma quello che tipicamente si fa, è di ricavare direttamente le il modello dalle equazioni fisiche. Si procederà anche qui in questo modo. Le equazioni fisiche del motore, ricavate nella sessione 3, sono divise in quattro parti:

- elettrica:  $V_m(t) = Ri(t) + k_\phi^{eq}\dot{\Theta}_l$
- elettromeccanica:  $\tau_l(t) = k_\phi^{eq}i(t)$
- meccanica:  $J_{eq}\ddot{\Theta}_l = -b_{eq}\dot{\Theta}_l + \tau_l(t)$
- sensore:  $V_{out}(t) = K_T\Theta_l$

Come stato si è preso l'angolo del carico e la sue velocità angolare,  $x = [\Theta_l \ \dot{\Theta}_l]^T$ , come ingresso  $u = V_m$  e come uscita  $y = V_{out}$ . Si può riscrivere le prime tre equazioni nel seguente modo

$$i(t) = \frac{V_m(t) - k_\phi^{eq}\dot{\Theta}_l(t)}{R} \quad (19)$$

$$\tau_l(t) = k_\phi^{eq}\left(\frac{1}{R}V_m(t) - \frac{k_\phi^{eq}}{R}\dot{\Theta}_l\right) \quad (20)$$

$$J_{eq}\ddot{\Theta}_l = -b_{eq}\dot{\Theta}_l + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) - \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\dot{\Theta}_l = -\left(b_{eq} + \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\right)\dot{\Theta}_l(t) + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) \quad (21)$$

e allora

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_l(t) = -\left(b_{eq} + \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\right)\dot{\Theta}_l(t) + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) \\ V_{out}(t) = K_T\Theta_l \end{cases} \quad (22)$$

e riscrivendo il tutto in forma di stato esplicitando le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_l(t) \\ \ddot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} - \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_l(t) \\ \dot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\phi^{eq}}{R} \end{bmatrix} V_m(t) \\ V_{out}(t) = \begin{bmatrix} K_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_l(t) \\ \dot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_m(t) \end{cases}} \quad (23)$$

Essendo questo un sistema *SISO*, la matrice di raggiungibilità ha rango pieno se e solo se il suo determinante è pari a zero. In questo caso

$$\mathcal{R} = [A|AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\phi^{eq}}{RJ_{eq}} \\ \frac{k_\phi^{eq}}{RJ_{eq}} & * \end{bmatrix} \quad (24)$$

ha rango 2, il che implica che il sistema considerato è raggiungibile. Lo stesso vale per la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \left[ \begin{array}{cc} C \\ CA \end{array} \right] = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_T \end{bmatrix} \quad (25)$$

che ha rango pieno, il che implica un sistema osservabile. La raggiungibilità ci garantisce che per ogni condizione iniziale, posso portare il sistema in qualunque stato. Mentre l'osservabilità ci permette di ricavare lo stato conoscendo gli ingressi e le uscite.

## 4 Progettazione controllore PID con desaturatore

In questa sessione si procede alla progettazione del controllore PID con desaturatore.

### 4.1 Il controllore PID

Un controllore PID utilizza tre diverse azioni: proporzionale, integrativa e derivativa. Nella sua configurazione più comune esse agiscono in parallelo, cioè sono alimentate dallo stesso ingresso e le tre uscite sono poi sommate per ottenere l'uscita complessiva del controllore, come in Figura 7. Si noti che il blocco derivatore non è un semplice  $s$ , ma una funzione di trasferimento strettamente propria, altrimenti impossibile da realizzare.

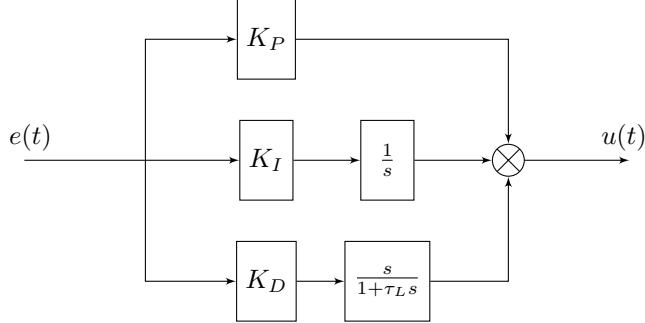


Figura 7: Schema a blocchi di un controllore PID

La funzione di trasferimento del controllore può essere scritta come:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \tau_L s} \quad (26)$$

in cui sono presenti quattro parametri:

- $K_P$ : costante dell'azione proporzionale
- $K_I$ : costante dell'azione integrale
- $K_D$ : costante dell'azione derivativa
- $\tau_L$ : costante temporale legata all'azione derivativa

Si noti che in generale non è necessario utilizzare tutte e tre le azioni. Ognuna di esse infatti ha specifici effetti sulle prestazioni e sulla stabilità del sistema, schematizzate a seguire.

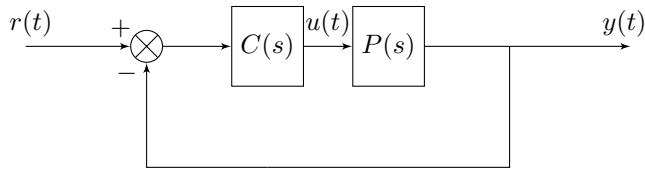


Figura 8: Schema a blocchi di un classico controllo in retroazione

Analizziamo ora gli effetti che le tre azioni del controllore portano, sia gli aspetti positivi che quelli negativi. In figura 8 è schematizzato un classico sistema di controllo in retroazione. Definendo  $G(s) = C(s)P(s)$  la funzione di trasferimento in catena aperta del sistema possiamo calcolare

- $\omega_a$ : pulsazione di attraversamento, ovvero la pulsazione tale per cui il modulo di  $G(s)$  raggiunge il valore uno;
- $m_\phi^G = 180^\circ + \arg[G(j\omega_a)]$ : margine di fase, che a meno di sistemi sfortunati, da una indicazione del grado di stabilità del sistema. Ovvero maggiore è il margine di fase, più stabile è il sistema.

### Azione proporzionale P

La parte proporzionale può essere scritta come

$$C_P(s) = K_P$$

Ciò porta ad avere dei diagrammi di Bode piatti, di ampiezza  $20 \log_{10} K_P$  dB per quanto riguarda il modulo e 0 per la fase. Questo significa che può modificare la pulsazione di attraversamento ma non il margine di fase.

### Azione integrale I

La parte integrale è invece

$$C_I(s) = \frac{K_I}{s}$$

Il modulo è una retta con intercetta con le ordinate pari a  $20 \log_{10} K_I$  dB e pendenza  $-20$  dB/decade, e la fase una retta di ampiezza  $-90^\circ$ . E' quindi rischioso da usare perché tende a far diventare il sistema  $G(s)$  instabile, però offre il vantaggio di aggiungere un polo nell'origine e quindi di portare l'errore a regime a zero.

### Azione derivativa D

L'azione derivativa è invece

$$C_D(s) = K_D s$$

In questo caso il modulo è una retta sempre con intercetta  $20 \log_{10} K_D$  ma con pendenza  $20$  dB/decade, mentre la fase è una retta di altezza  $90^\circ$ . La fase tende a far migliorare la stabilità, però la derivata del segnale amplifica il rumore in ingresso. E' necessario inoltre dire che un controllore così costruito risulta impossibile da progettare in pratica, perché avrebbe il modulo che cresce all'infinito. Quello che si fa è di aggiungere un polo in alta frequenza, facendo diventare il controllore

$$D_D(s) = \frac{K_D s}{1 + \tau_L s}$$

I pregi e difetti delle tre azioni sono schematizzati nella tabella che segue.

Classificazione dei tre termini del controllore in base ai pro e contro.		
Termine	Pro	Contro
1. Proporzionale	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permette di modificare <math>\omega_a</math> di <math>G(s)</math></li> <li>Semplice</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Non può modificare <math>m_\phi^G</math></li> </ul>
2. Integrale	<ul style="list-style-type: none"> <li>Elimina l'errore a regime</li> <li>Elimina disturbi costanti in ingresso</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Rende il sistema più instabile</li> </ul>
3. Derivativo	<ul style="list-style-type: none"> <li>Rende il sistema più stabile</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Amplifica rumori di misura</li> </ul>

## 4.2 Progettazione in frequenza del controllore PID

Possiamo riscrivere l'equazione del PID come

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} = \frac{K_I(1 + \frac{K_P}{K_I}s + \frac{K_D}{K_I}s^2)}{s} \quad (27)$$

e definendo  $\tau_I = \frac{K_P}{K_I}$  il tempo dell'azione integrale,  $\tau_D = \frac{K_D}{K_P}$  il tempo dell'azione derivativa e nell'ipotesi che  $\tau_I \gg \tau_D$ <sup>1</sup> si ottiene

<sup>1</sup>Questa ipotesi è del tutto lecita, perché l'azione integrale ha appunto bisogno che l'integrale del segnale raggiunga valori significativi prima di intervenire. Mentre l'azione derivativa, soprattutto in un ingresso a gradino, agisce istantaneamente.

$$C(s) = \frac{K_I}{s} (1 + \tau_I s + \tau_D \tau_I s^2) \approx \frac{K_I}{s} (1 + \tau_I s) (1 + \tau_D s) \quad (28)$$

Aggiungendo in fine il termine di non idealità  $\tau_L$  della parte derivativa e nell'ulteriore ipotesi che  $\tau_I \gg \tau_D \gg \tau_L^2$

$$C(s) \approx \frac{K_I(1 + \tau_I s)(1 + \tau_D s)}{s(1 + \tau_L s)} \quad (29)$$

Perché il controllore dia i benefici desiderati, bisogna che sia soddisfatta la condizione  $\tau_I \gg \tau_D \gg \frac{1}{\omega_a^{min}} \gg \tau_L$  dove  $\omega_a^{min}$  rappresenta la minima pulsazione di attraversamento richiesta nelle specifiche. Ciò comporta a scegliere

$$\boxed{\tau_L = \alpha \frac{1}{\omega_a^{min}}, \quad \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{10}} \quad (30)$$

Si definisce poi

$$a = \frac{1}{|P(j\omega_a)|} \quad \theta = \arg[C(j\omega_a)] = m_\phi^G - 180^\circ - \arg[P(j\omega_A)] \quad (31)$$

e riscrivendo la funzione di trasferimento del controllore nella variabile  $j\omega$

$$C(j\omega_a) = K_P - j \frac{K_I}{\omega_a} + j\omega_a K_D = K_P + j(\omega_a K_D - \frac{K_I}{\omega_a}) \quad (32)$$

si ottiene

$$\Re[C(j\omega_a)] = a \cos \theta = K_P \quad (33)$$

$$\Im[C(j\omega_a)] = a \sin \theta = \omega_a K_D - \frac{K_I}{\omega_a} \quad (34)$$

L'equazione 34 mi fornisce un grado di libertà nella scelta dei parametri  $K_P$  e  $K_D$ , tenendo però conto di soddisfare  $\tau_I \gg \tau_D$ . Solitamente si sceglie

$$\tau_I = b\tau_D, \quad b \geq 4 \quad (35)$$

stando attenti a non scegliere  $b$  troppo grande, altrimenti avrei tempi di reiezione del disturbo troppo lunghi. Rimane solo da ricavare  $K_I$ , per fare ciò basta risolvere l'equazione

$$K_I a \sin \theta = \omega_a \frac{K_P^2}{b} - \frac{K_I^2}{\omega_a} \quad (36)$$

con  $K_I$  incognita. Risolvendola si otterranno due valori, ma a noi interessa solo quello positivo e quindi

$$K_I = \frac{a\omega_a}{2} \left[ \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{4}{b} \cos^2 \theta} - \sin \theta \right] \quad (37)$$

e allora

$$K_D = \frac{K_P^2}{bK_I} \quad (38)$$

In questo caso però, le specifiche richieste non sono fornite in frequenza, ma in termini temporali.

$$t_s \leq 30 \text{ [s]} \text{ rispetto a } \pm 1 \text{ [gradi] dal valore a regime} \quad (39)$$

$$S \leq 5 \text{ [gradi]} \quad (40)$$

Il tempo di assestamento viene trasformato in un limite alla banda passante minima che il sistema deve garantire. Visto che si considera un sistema del secondo ordine, è possibile approssimare la banda passante con la frequenza di taglio  $\omega_a$  e ottenere:

$$\omega_a^{min} = \frac{3}{\xi t_{s,max}} \quad (41)$$

---

<sup>2</sup>Anche questa ipotesi è lecita, visto che il polo si cerca di metterlo più in alta frequenza possibile.

dove  $\xi$  rappresenta il coefficiente di smorzamento. Il vincolo sul massima sovraelongazione invece può essere convertito in una richiesta sul minimo margine di fase  $m_\phi$  ammissibile. Per la conversione si possono allora utilizzare i due grafici riportati in figura 9. Per una spiegazione dettagliata su come si possono ricavare i due grafici è possibile consultare l'appendice A.

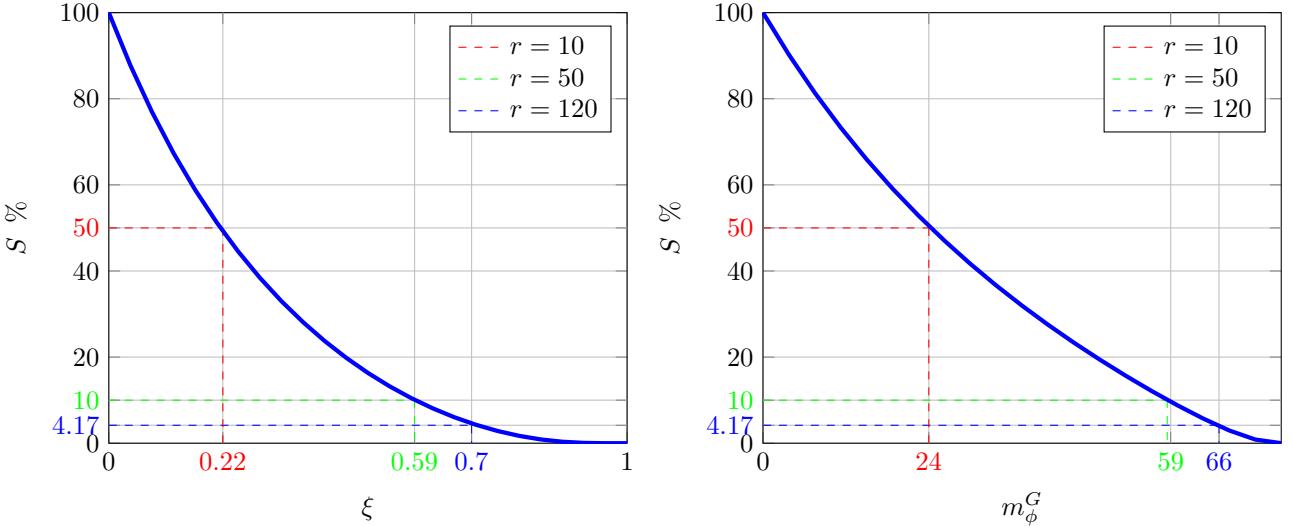


Figura 9: Relazione tra  $m_\phi$  e  $S$  e tra  $\xi$  e  $S$ .

### 4.3 Progetto del controllore PID con desaturatore

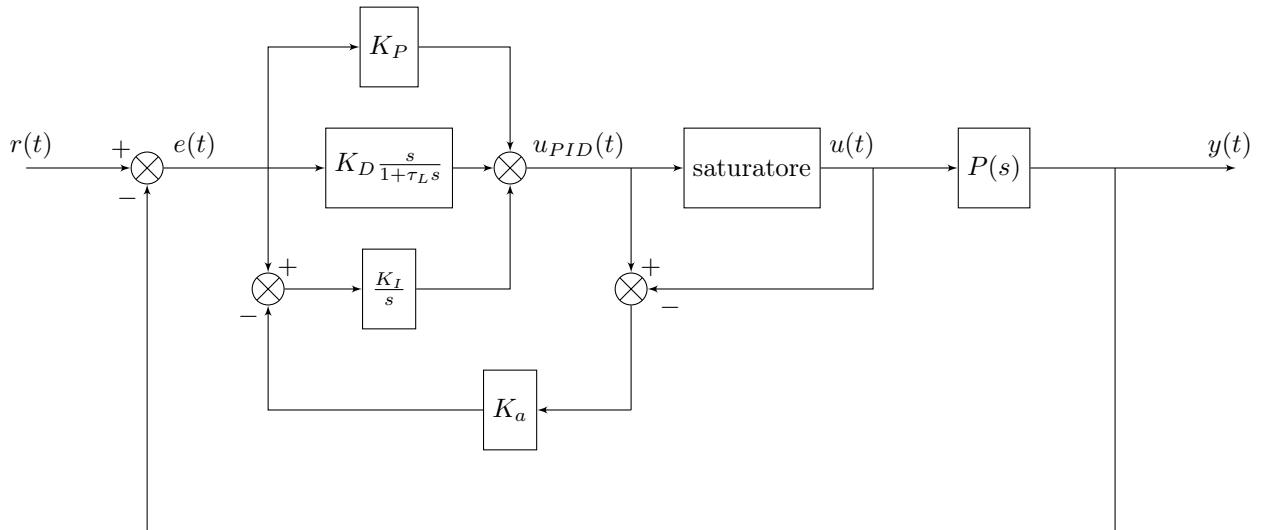


Figura 10: Schema a blocchi di un controllore PID con desaturatore

Il motore utilizzato in laboratorio è comandato con un segnale di tensione, tale segnale deve essere compreso tra un intervallo di valori pari a  $[-5, 5]$  Volt. Ciò significa che è necessario saturare il segnale di controllo con un dispositivo denominato saturatore. Saturando l'ingresso al motore, l'errore  $e(t)$  che comanda il controllore tende a diminuire più lentamente e il suo integrale sarà allora maggiore. Questo vuol dire che amplifica l'azione integrale durante la saturazione, rendendo il sistema più instabile. Per ovviare a questo introduco un secondo controllo in retroazione che interviene solo in caso di saturazione, lo schema di tale controllo è presente in Figura 10. Questa retroazione diminuisce il termine integrale per un fattore proporzionale alla differenza tra l'uscita del controllore e la vera uscita che riceve il motore. Rimane quindi da scegliere la variabile  $K_a$ . Con qualche passaggio algebrico è possibile scrivere la funzione di trasferimento tra l'uscita del controllore  $U_{PID}(s)$  e l'errore  $E(s)$  in presenza di saturazione come

$$U_{PID}(s) = \frac{K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}}{1 + \frac{K_a K_I}{s}} E(s) \quad (42)$$

Si vede dall'equazione 42 che il parametro  $K_a$  introduce un filtro passa basso che tende a rallentare il controllo. Allora si definisce la costante temporale del desaturatore  $\tau_a = K_a K_I$  e quello che si vuole è che  $\tau_a < t_s$ . Tipicamente si sceglie

$$\boxed{\tau_a \approx \frac{1}{3} t_s \quad \Rightarrow \quad K_a \approx \frac{1}{3t_s K_I}} \quad (43)$$

## 5 Progettazione controllori in spazio di stato

In questa sessione si procede alla realizzazione di due tipi di controllori in spazio di stato.

### 5.1 Controllo in feedforward

La rappresentazione in spazio di stato permette di fare una retroazione di stato invece che una retroazione dell'uscita, ed è proprio quello che si fa nel *controllo in feedforward*.

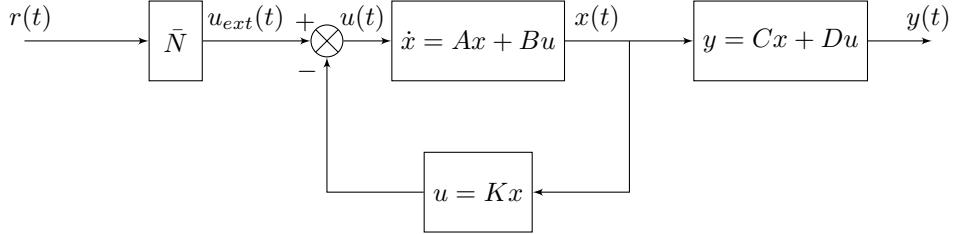


Figura 11: Schema a blocchi di un controllo in feedforward.

Con una retroazione dallo stato, il controllo, e quindi la matrice  $K$ , viene scelta piazzando i poli in catena chiusa del sistema. Ricordando che un processo può essere scritto in forma di stato come  $P(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , si nota immediatamente che i poli corrispondono agli autovalori di  $sI - A$ . Nel sistema complessivo retroazionato, tali autovalori sono di  $sI - A + BK$ . Il controllo in feedforward, oltre al piazzamento dei poli permette di modificare anche un parametro scalare  $\bar{N}$ . Per comprendere lo scopo del parametro  $\bar{N}$ , si pensi di voler riuscire ad inseguire perfettamente un segnale di ingresso costante:

$$\begin{aligned} r(t) = \text{cost} &\implies y_{DC} = \text{cost} \\ y_{DC} &= P_{CC}(0)r = -C(A - BK)^{-1}Br \end{aligned}$$

Per sistemi *SISO*  $-C(A - BK)^{-1}B$  si riduce ad uno scalare  $c$  per cui  $y = cr$  e quindi per poter inseguire il riferimento si usa in blocco  $\bar{N}$  che cancella il termine  $c$ .  $\bar{N}$  sarà allora scelto nel seguente modo

$$\bar{N} = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1}B} \quad (44)$$

Un possibile problema di questo tipo di controllo è che se non si conoscono perfettamente i valori nominali delle matrici  $(A, B, C, D)$ , a regime non si riesce ad inseguire perfettamente il riferimento, perché

$$y_{DC} = \bar{N}[-C(A - BK)^{-1}B]r_{DC} = \frac{C(A - BK)^{-1}B}{C_{nom}(A_{nom} - B_{nom}K)^{-1}B_{nom}}r_{DC} \neq r_{DC} \quad (45)$$

Un altro problema è se è presente un disturbo additivo  $d(t)$  in ingresso al controllo, infatti risulterebbe

$$y_{DC} = \alpha r_{DC} + \beta d_{DC} \quad (46)$$

### 5.2 Controllo integrale

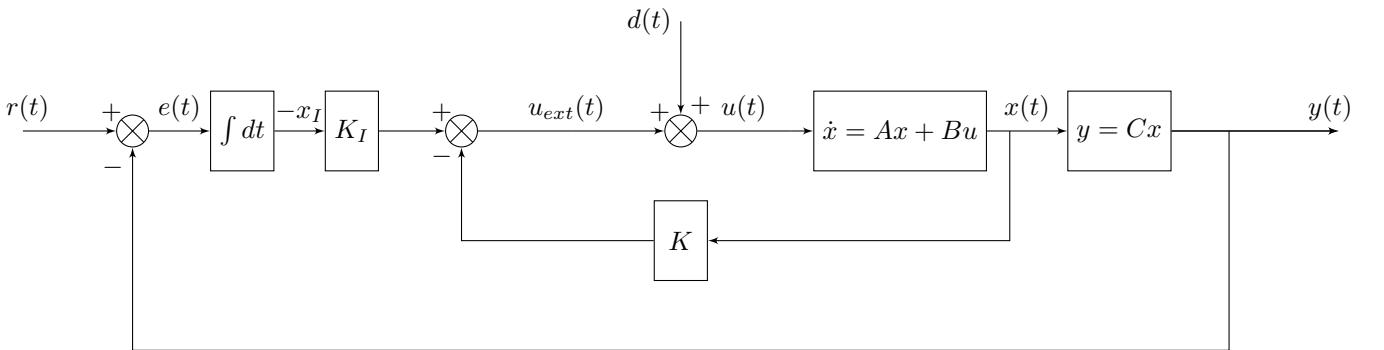


Figura 12: Schema a blocchi di un controllo integrale con rumore additivo  $d(t)$

Il controllo integrale è un altro esempio di controllore che sfrutta la retroazione di stato. Prendiamo in considerazione un sistema scritto in forma di stato, dove per semplicità si considera nulla la matrice  $D$ <sup>3</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (47)$$

Al sistema viene aggiunto un nuovo stato

$$\dot{x}_I = e = y - r = Cx - r \quad (48)$$

ottenendo ancora un sistema dinamico. Si definisce allora un nuovo *stato aumentato*  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$z = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \quad (49)$$

e supposto che l'ingresso sia composto da un ingresso di controllo e un disturbo, come in figura 12,  $u = u_{ext} + d$  si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u_z \\ y = C_z z \end{cases} \quad (50)$$

dove  $u_z = \begin{bmatrix} u_{ext} \\ d \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  e  $y_z = y$ . Quindi esplicitando l'equazione 50 si ricava

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ B & B & 0 \end{bmatrix}}_{B_z} \begin{bmatrix} u_{ext} \\ d \\ r \end{bmatrix} \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \end{cases} \quad (51)$$

Se si definisce  $B_z = [B_{ext} \ B_{ext} \ B_r]$  e si sostituisce  $u_{ext} = -K_z z$  in 51 si ottiene

$$\dot{z} = (A_z - B_{ext} K_z) z = [B_{ext} \ B_r] \begin{bmatrix} d \\ r \end{bmatrix}$$

Quindi, se  $A_z - B_{ext} K_z$  è strettamente stabile e gli ingressi sono costanti,  $r(t) = r_{DC}$  e  $d(t) = d_{DC}$ , si rileva che il sistema  $z \rightarrow z_{cost}$  a  $t \rightarrow \infty$ .

Di conseguenza  $\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow 0$  che implica  $\dot{x}_I \rightarrow 0$ . Ricordando che  $\dot{x}_I = Cx - r = y - r$  si trova che  $y \rightarrow r$  ottenendo, quindi, un inseguimento perfetto a regime  $y \rightarrow r \rightarrow r_{DC}$ . Se anche  $A_z$  e  $B_{ext}$  non sono note a priori la matrice  $A_z - B_{ext} K_z$  rimane stabile per piccole incertezze, grazie alla *proprietà di continuità* degli autovalori di  $A$  rispetto gli elementi di  $A$ .

Rimane ora da verificare che  $A_z - B_{ext} K_z$  sia strettamente stabile, questo avviene quando la coppia  $(A_z, B_{ext})$  è raggiungibile e quindi con il *criterio PBH* quando  $\text{rank}[sI - A_z | B_{ext}] = n + 1$ . Esplicitando

$$[sI - A_z | B_{ext}] = \begin{bmatrix} s & -C & 0 \\ 0 & sI - A & B \end{bmatrix} \quad (52)$$

si divide la dimostrazione in due parti:

- Se  $s \neq 0$ ,  $\text{rank}[sI - A_z | B_{ext}] = n + 1 \iff \text{rank}[sI - A | B] = n \iff$  la coppia  $(A, B)$  è raggiungibile<sup>4</sup>.
- Se  $s = 0$ , la prima colonna è ininfluente al calcolo e può essere rimossa. Inoltre una eventuale moltiplicazione di righe o colonne per  $-1$  così come lo scambio di righe, non cambia il rango, quindi la raggiungibilità per  $s = 0$  è equivalente a verificare

$$\text{rank} \left[ \begin{array}{cc} sI - A & -B \\ C & 0 \end{array} \right]_{s=0} = n + 1$$

Il rango di questa matrice è  $n + 1$  se e solo se  $s = 0$  non è uno zero di  $P(s) = C(sI - A)^{-1} B$ <sup>5</sup>

<sup>3</sup>del tutto lecito visto che il sistema del motore ha appunto  $D = 0$

<sup>4</sup>questa è una ipotesi necessaria per fare il controllo integrale.

<sup>5</sup>ulteriore ipotesi necessaria per il controllo integrale.

Per quanto riguarda la matrice di retroazione  $K$ , se le due ipotesi sono verificate, esiste tale che  $A_z - B_z K_z$  ha autovalori arbitrari e quindi

$$u_{ext}(t) = -K_z z(t) = -[K_I|K] \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = -K_I x_I(t) - K x(t) \quad (53)$$

Si fa notare che il termine  $-K_I x_I$  può essere scritto come  $-K_I x_I(t) = -K_I \int y(t) - r(t) dt = K_I \int r(t) - y(t) dt$  e rappresentato graficamente in figura 12.

Questo modello risulta più lento rispetto al feed-forward perché l'errore integrale richiede un certo tempo prima che l'effetto sul controllo sia evidente.

## 6 Simulazione e esperienza in laboratorio

In questa sezione si confrontano i dati ottenuti con le simulazioni sul modello del motore e quelli raccolti nell'esperienza di laboratorio con quanto previsto dalla teoria. In particolare si vogliono testare le differenze tra l'uso di un controllore PID con desaturatore, controllo in feed-forward e controllo integrale.

### 6.1 Simulazione controllore PID con desaturatore

Si verificano le prestazioni di un controllo PID con desaturazione in simulazione, utilizzando il modello del motore ricavato nella sezione 3.2; in particolare si utilizzano il codice *MATLAB* e i modelli *SIMULINK* riportati rispettivamente nelle appendici C.1 e D.1.

Le specifiche da rispettare sono:

$$\begin{aligned} t_s &\leq 0.30 \text{ [s]} && \text{rispetto a } \pm 1[\text{gradi}] \text{ del valore a regime} \\ S &\leq 5\% \\ r &= 10, 50, 120 \text{ [gradi]} \\ d &= \pm 0.5 \text{ [Volt]} \end{aligned}$$

dove  $t_s$  è il tempo di assestamento,  $S$  è la sovraelongazione in termini assoluti rispetto al valore di riferimento e  $r$  è l'ampiezza del gradino di ingresso. Si utilizza allora la progettazione in frequenza, come nella sezione 4.2 per il calcolo dei parametri PID e 4.3 per il calcolo del parametro di desaturazione. Ovviamente tale metodologia di progettazione prevede diversi gradi di libertà (la scelta di  $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{10}]$  e  $b \in [4, \infty)$ ) e introduce delle approssimazioni che possono rendere necessaria una taratura manuale dei parametri. Le simulazioni sono state suddivise per  $d = 0.5$  e  $d = -0.5$ , nell'appendice B.1 si possono osservare tutti i grafici e le tabelle delle simulazioni. Nel primo caso l'uscita del sistema risulta più veloce ma con una sovraelongazione piuttosto marcata, mentre nel secondo è più lenta ma con meno sovraelongazione. Questo si traduce nel fatto che le specifiche non sono rispettate per alcuni segnali di ingresso e si rende necessaria una ritaratura manuale dei parametri. Questa ritaratura però non è del tutto banale, in quanto bisogna diminuire la velocità del sistema per il primo caso e aumentarla nel secondo, si è cercato allora un compromesso. Si è data per prima cosa priorità al tempo di salita per  $d = -0.5$  e  $r = 10$  che superava addirittura il secondo; si è aumentato allora il guadagno integrale per rendere il sistema più veloce. Questo ha però aumentato la sovraelongazione per  $d = 0.5$  di parecchio, ma per abbassarla si è aumentato anche il guadagno proporzionale, che prima era inferiore all'unità. Alla fine si è dovuto aumentare anche il guadagno proporzionale visto che risultava troppo basso rispetto gli altri due e la sua azione era quasi ininfluente. In conclusione la ritaratura ha portato dei risultati soddisfacenti, riportati nelle figure 13 e 14. Nei grafici si può apprezzare come gli ingressi di controllo saturino quasi subito e sono parecchio instabili, probabilmente dovuto al fatto che i guadagni integrali sono molto elevati, ma la sovraelongazione rimane comunque bassa grazie all'intervento del desaturatore.

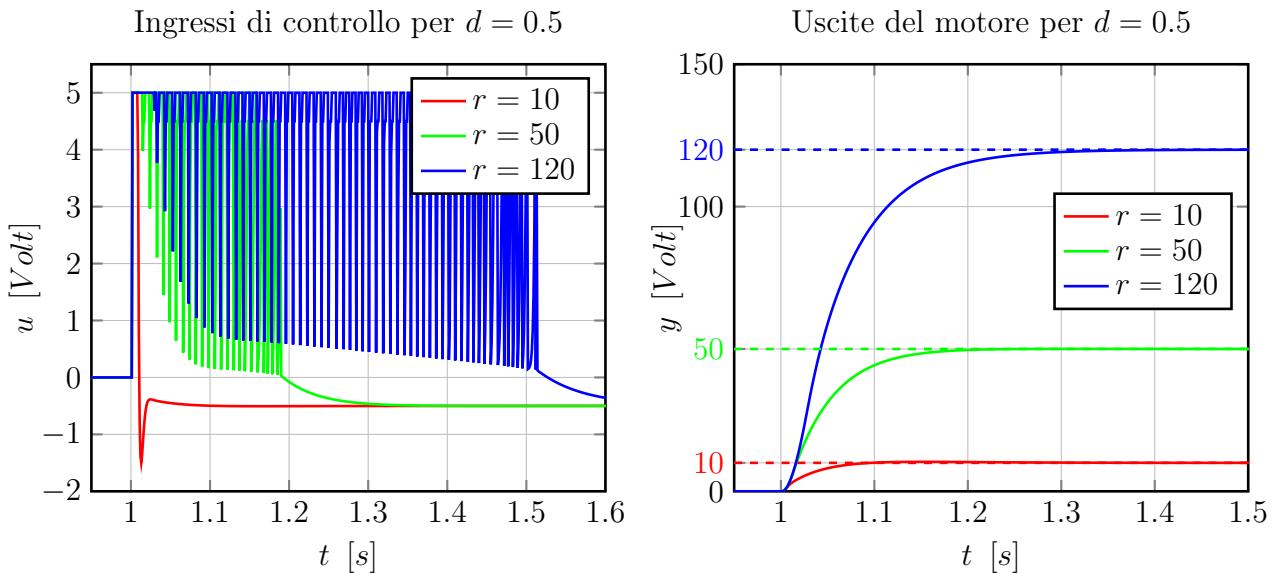


Figura 13: Ingressi di controllo e uscite del motore con controllore PID con desaturatore e rumore additivo  $d = 0.5$  dopo la taratura manuale.

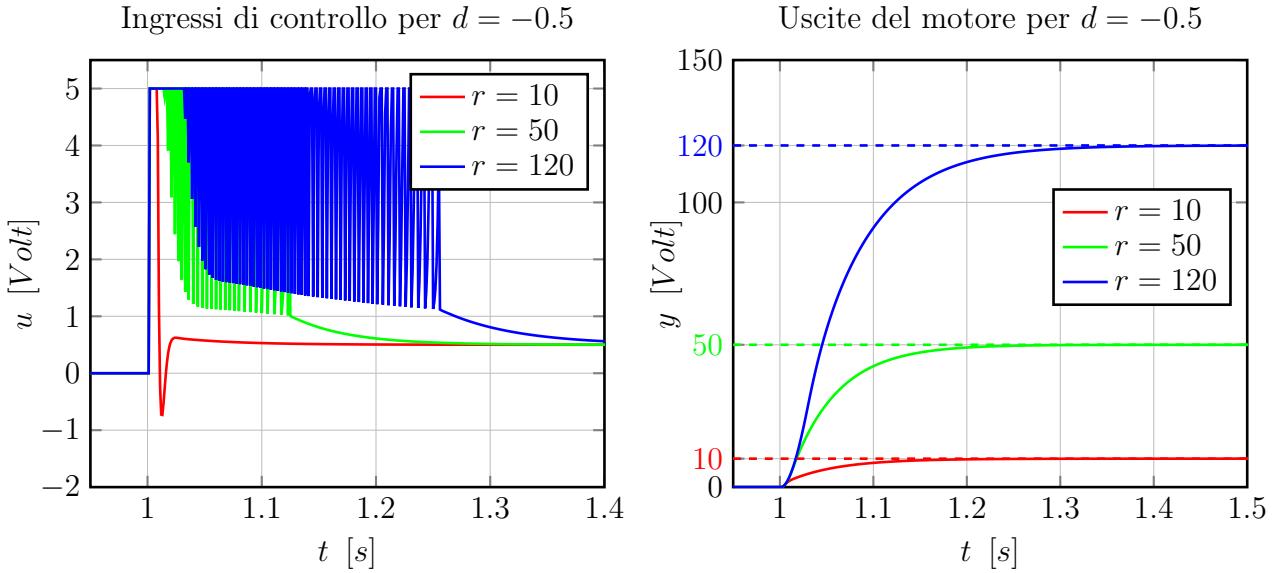


Figura 14: Ingressi di controllo e uscite del motore con controllore PID con desaturatore e rumore additivo  $d = -0.5$  dopo la taratura manuale.

## 6.2 Simulazione controllo in feedforward

In questo caso si vogliono verificare le prestazioni di un controllo in feedforward per rispettare le seguenti specifiche:

$$\begin{aligned} t_s &\leq 0.015 \text{ [s]} && \text{rispetto a } \pm 5\% \text{ del valore a regime} \\ S &\leq 10\% \\ r &= 10, 50, 120 \text{ [gradi]} \end{aligned}$$

Per la sua progettazione, mentre per il guadagno di feedforward si deve applicare semplicemente una formula, per il piazzamento dei poli in catena chiusa si ha più libertà. In questo laboratorio si usa l'*approssimazione ai poli dominanti*, ovvero si approssima il sistema in catena chiusa con uno del secondo ordine. Le matrici del sistema in forma di stato con stato  $x = [\theta_l(t) \quad \dot{\theta}_l(t)]^T$  sono:

$$A \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -40.3 \end{bmatrix} \quad B \approx [0 \quad 375.3] \quad C \approx 1.6 \quad D = 0$$

Inoltre il sistema è controllabile visto che  $\det[B|AB] \neq 0$  e allora è possibile trovare una matrice di retroazione  $K$ . Si deve allora semplicemente trovare  $K = [K_1 \quad K_2]$  che soddisfi la seguente equazione:

$$\det[sI - (A - BK)] = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (54)$$

dove i due poli dominanti della parte destra dell'equazione 54 sono

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n$$

con  $\sigma \approx \frac{3}{t_s}$  e  $\xi = 0.6$  dalla solita tabella di figura 9. Quindi i due poli risultano

$$\begin{aligned} p_1 &\approx -20 + j27 \\ p_2 &\approx -20 - j27 \end{aligned}$$

e dunque la matrice di retroazione  $K$  risulta  $K \approx [2.9608 \quad -0.0008]$ . Si passa allora alla simulazione, come prima il codice *MATLAB* è presente nell'appendice C.2 mentre lo schema *SIMULINK* in D.2. Ovviamente quando è presente il rumore  $d = \pm 0.2$  il sistema inseguirà il gradino ma avrà un errore a regime non nullo; per eliminarlo bisogna ritrarre il termine di feedforward per ogni tipo di ingresso. Una volta fatto questo comunque

il sistema risultante rispetta le specifiche proprio al limite. Le uscite risultanti, suddivise per  $d = 0.2$  e  $d = -0.2$  sono riportate in figura 15.

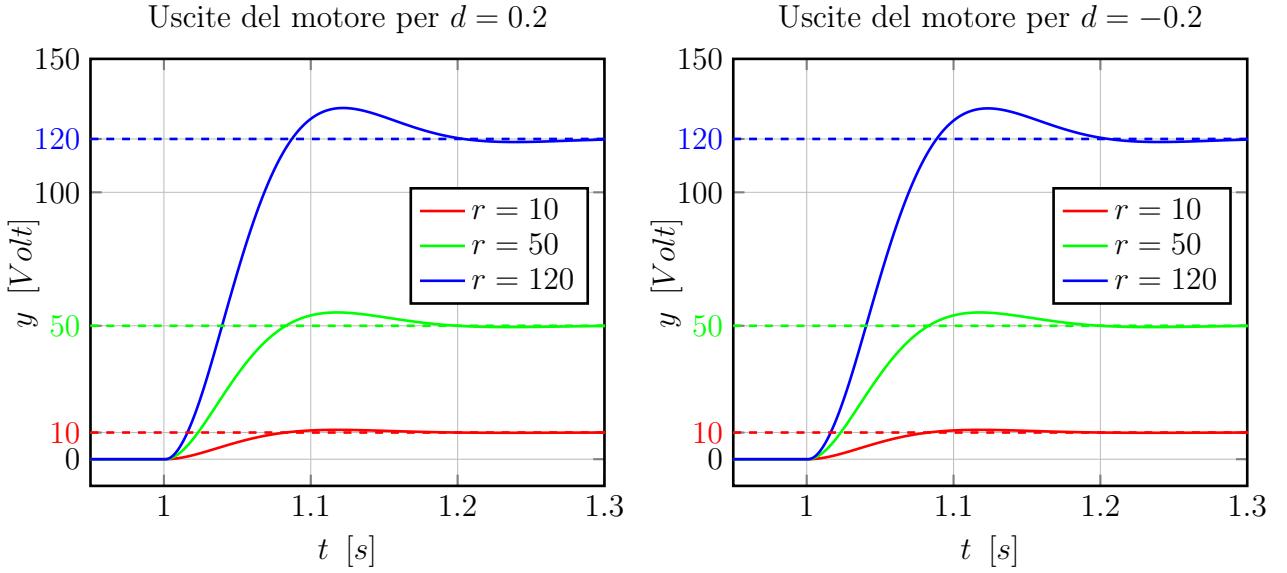


Figura 15: Uscite del motore con controllore feedforward e rumore additivo  $d = \pm 0.2$  dopo la taratura.

Se invece si elimina il rumore additivo ma si aggiunge dell'incertezza nella matrice  $A$ , nel nostro caso  $a = 1.1a_{nom}$  oppure  $a = 1.2a_{nom}$ , dove  $a$  è lo scalare in posizione (2, 2) della matrice A, il sistema non ha bisogno di ritarature manuali. Infatti il sistema rispetta le specifiche ancora meglio che avendo la conoscenza perfetta del parametro  $a$ ; questo può all'inizio sembrare contro intuitivo, ma è spiegabile dal fatto che il posizionamento dei poli in catena chiusa con l'approssimazione ai poli dominanti, introduce appunto approssimazioni, soprattutto se i poli non considerati sono abbastanza vicini a quelli considerati. Per scrupolo si è comunque provato ad aggiungere ulteriore incertezza e, dopo una certa soglia, le prestazioni si abbassano di molto.

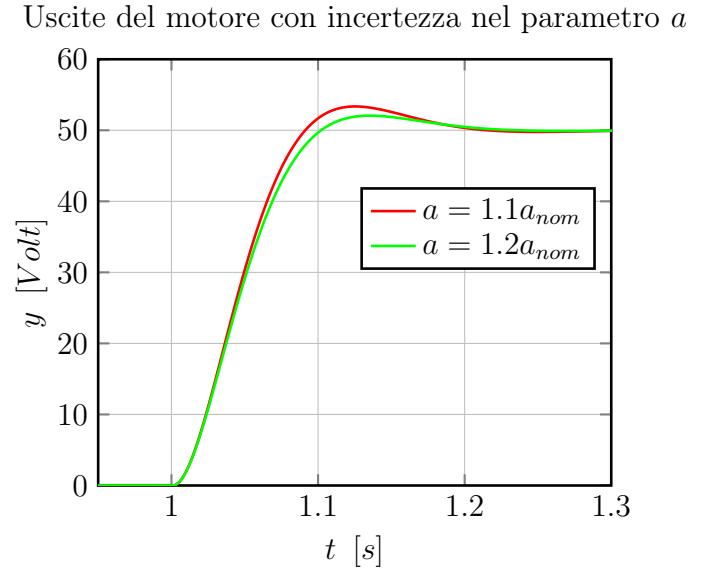


Figura 16: Uscite del motore con controllore feedforward e incertezza nel parametro  $a$ .

### 6.3 Simulazione controllo integrale

Per ultimo si vuole progettare un controllo integrale per rispettare le stesse specifiche del controllo in feedforward. Con questa tecnica il sistema ha tre stati, come descritto nella sessione 5.2, e bisogna decidere allora il posizionamento di tre poli invece di due. Anche in questo caso si considera un sistema del secondo ordine per individuare una regione indicativa per il posizionamento dei poli. Nello specifico si sono provate quattro configurazioni diverse, descritte nella figura 17 scegliendo quella migliore per un ingresso  $r = 50$  e senza disturbo  $d$ . La figura 17 mostra inoltre l'area dove è possibile collocare i poli per soddisfare le specifiche utilizzando l'approssimazione per un sistema del secondo ordine e quindi i valori di  $\sigma$  e  $\omega_d$  calcolati precedentemente. La configurazione (A) prevede di spostare i tre poli al limite della regione delle specifiche ma sufficientemente distanti tra loro, la (B) invece li posiziona sempre al limite ma tutti nello stesso punto, la (C) invece li posiziona molto all'interno della regione e distanziati tra loro, per ultimo la (D) li posiziona ancora più distanti e un polo è molto negativo.

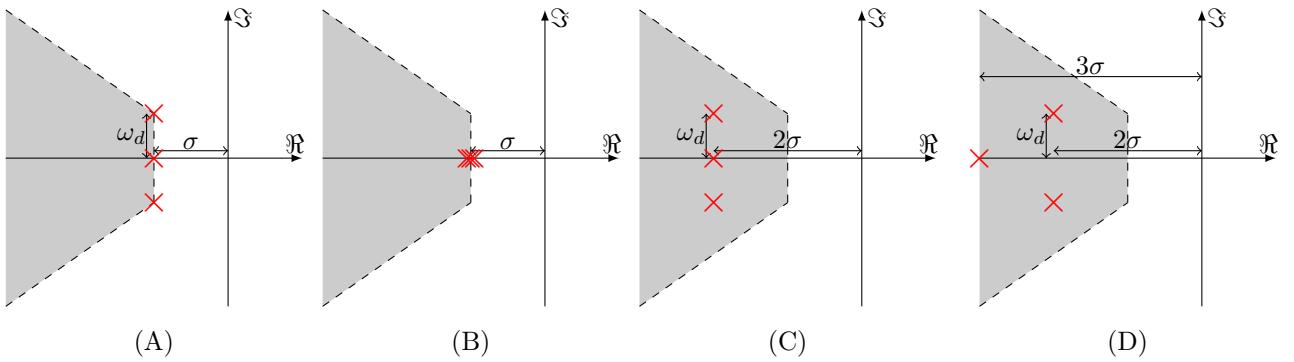


Figura 17: Quattro diverse configurazioni dei poli in catena chiusa.

In figura 18 sono rappresentate le quattro possibili uscite del sistema per le quattro diverse configurazioni dei poli. Si nota che nessuna delle uscite presenta della sovraelongazione ma per le posizioni dei poli (A) e (B) il tempo di assestamento non rispetta le specifiche. Questo significa che pur essendo teoricamente dentro la zona delle specifiche le approssimazioni fatte non permettono di rispettarle. Poi, nella configurazione (B) il tempo di assestamento minimo non viene rispettato di poco, questo farebbe pensare che il parametro maggiormente approssimato sarebbe  $\omega_d$  visto che se tutti i poli si trovano in posizione  $-\sigma$  si ottiene appunto quasi l'estremo delle specifiche. Per quanto riguarda (C) e (D) invece le prestazioni sono molto maggiori e sarebbero entrambe configurazioni valide. Si è comunque scelto come migliore la (D) visto che pur avendo una leggerissima sovraelongazione (circa 0,6%, evidenziata in figura) il tempo di assestamento è leggermente migliore. Scegliendo allora la (D) si eseguono le solite simulazioni per  $r = 10, 50, 120$  e  $d = \pm 0.2$ , i risultati sono riportati in figura 19. Come si può notare il sistema si comporta molto bene e le

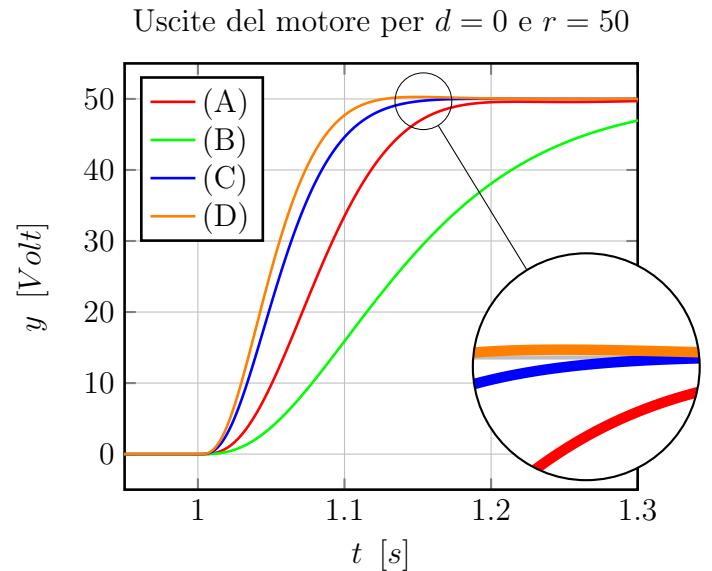


Figura 18: Uscite del motore per le quattro diverse configurazioni dei poli.

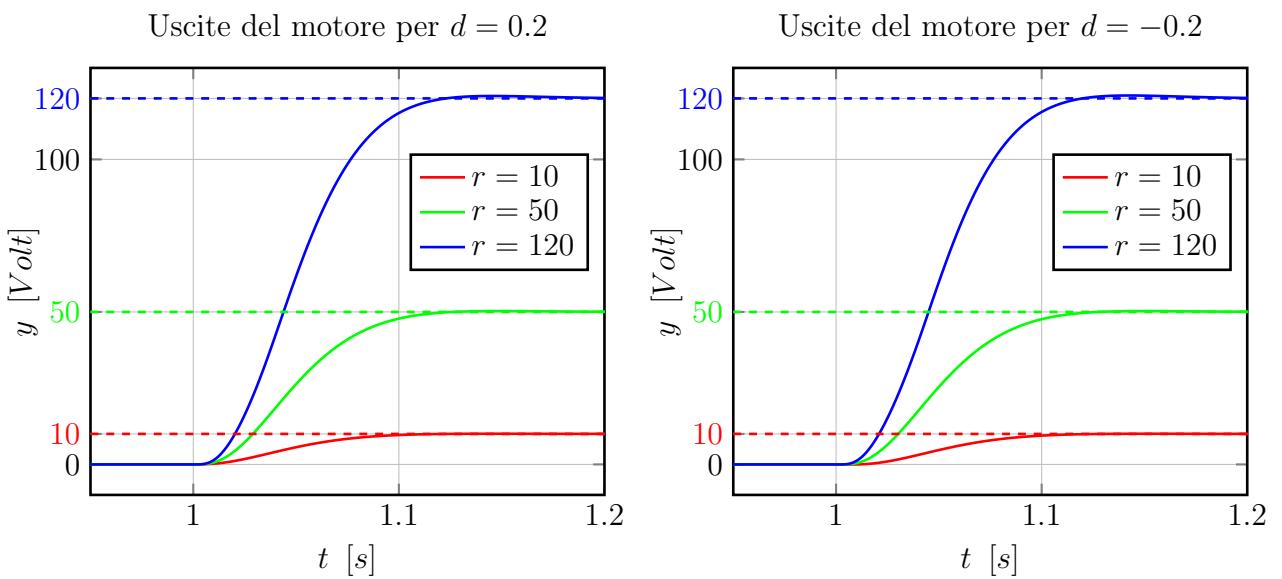


Figura 19: Uscite del motore con controllore integrale e rumore additivo  $d = \pm 0.2$  in configurazione (D).

prestazioni sono molto simili per tutte le simulazioni, ovvero tempi di assestamento di poco sotto al decimo di secondo e sovraelongazioni di circa 0.6% il valore  $r$ .

#### 6.4 Verifica sperimentale in laboratorio

Si passa alla verifica in laboratorio di quanto fatto fin'ora, in particolare si valuteranno le differenze fra quanto simulato e il dato reale per ciascun sistema di controllo ma soprattutto si valuterà quale controllore è migliore rispetto agli altri. Per prima cosa si è provveduto a una ritaratura manuale del PID, infatti questo tipo di controllore è piuttosto sensibile agli errori di modello, ma comunque non si è dovuto lavorare molto per la ritaratura, è bastato alzare leggermente il guadagno integrale per rendere il sistema più veloce. Stessa cosa anche per il controllo in feedforward, si è effettuata una prima prova con il valore teorico e misurato l'uscita e per la ritaratura si è semplicemente moltiplicato il valore di  $N$  per il rapporto tra  $r$  e l' $r$  misurato.

$$N_{ritarato} = N \cdot \frac{r}{r_{misurato}} \quad (55)$$

Questo semplice ma efficace sistema ha reso la taratura molto facile e l'errore a regime misurato si è dimostrato essere inferiore all'un per mille. Inoltre si è appurato come si è dovuto modificare il valore di meno di un centesimo rispetto a quello originale, dimostrando che l'errore di modello e/o l'errore sistematico degli strumenti di misura sono bassi. Per quanto riguarda il controllo integrale non si è effettuata nessuna ritaratura della posizione dei poli, ma si è tenuta la configurazione (D). Detto questo si procede allora al confronto dei diversi controllori, le uscite del motore sono riportate in figura 21 mentre in figura 20 sono riportati due semplici diagrammi che mostrano quale sia effettivamente il miglior controllo.

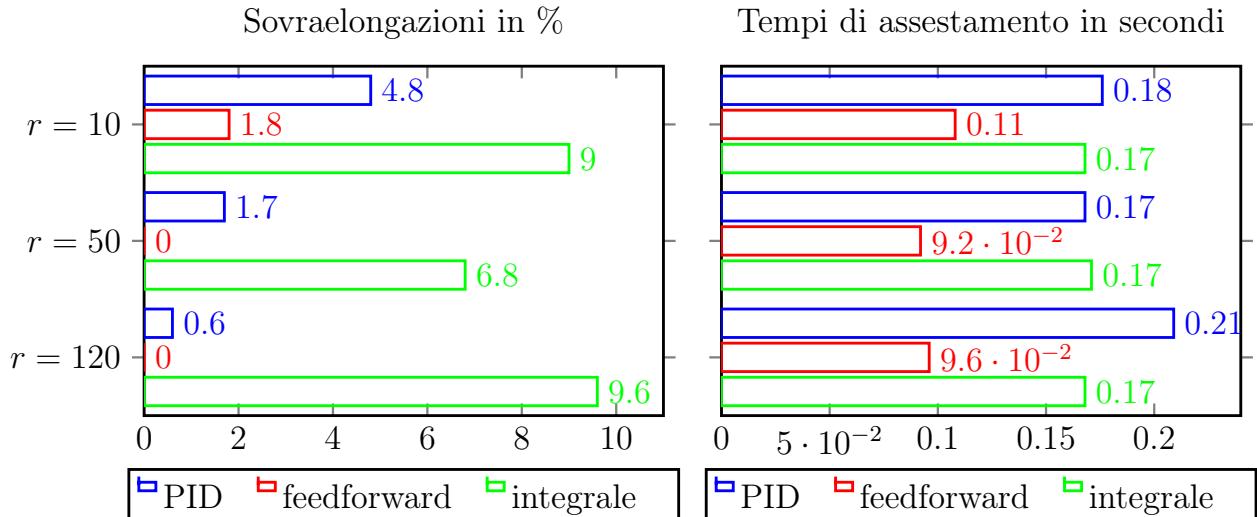


Figura 20: Confronto prestazioni mediante l'uso dei tre diversi controllori.

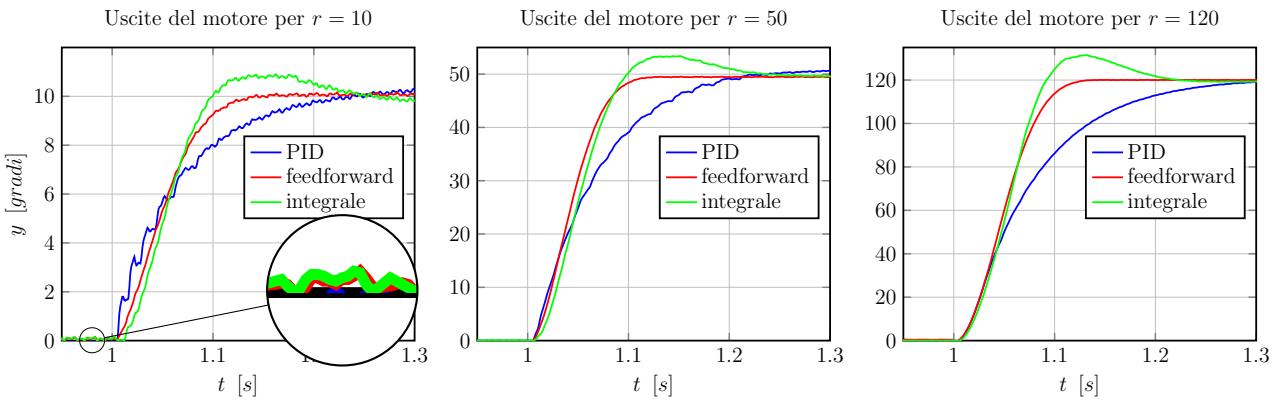


Figura 21: Uscite del motore con i tre diversi controllori.

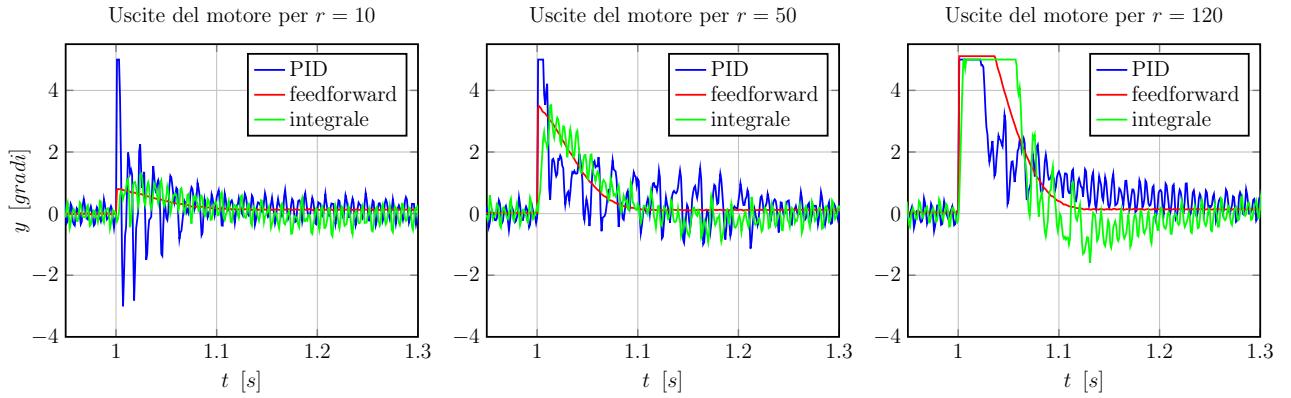


Figura 22: Ingressi di controllo con i tre diversi controllori.

Come si vede il miglior controllo è sempre quello in feedforward ritardato, sia per quanto riguarda il tempo di assestamento sia per quanto riguarda la massima sovraelongazione. Per assurdo è stato anche il controllore più semplice da realizzare, infatti bastano dei semplici comandi *MATLAB* per il posizionamento automatico dei poli e il guadagno di feedforward è stato molto semplice da ritrarre. Il controllore PID invece è anch'esso molto semplice ma ha richiesto del tempo per la sua ritaratura, cosa che può diventare anche piuttosto lunga se l'operatore non è abbastanza allenato nel fare questo. Dal controllo integrale invece si ottengono scarse prestazioni, comparabili al PID come tempo di assestamento ma nettamente peggiori come massima sovraelongazione. Ci si aspettava comunque che il controllo integrale fosse lento per la sua natura, infatti una possibile soluzione è quella di utilizzare in accoppiata il feedforward e l'integrale per compensare gli errori di entrambi, ma questo non è stato fatto in questa esperienza. Una curiosità che si nota in figura 21 è che prima che il riferimento cambi di stato da 0 a  $r$  è che l'uscita rimane poco sopra allo zero, questo è un effetto dell'attrito di stacco, completamente trascurato in fase di modellizzazione. Altra cosa è che gli ingressi del PID sono molto più stabili rispetto a quanto ottenuto in simulazione, pur rimanendo comunque più oscillanti rispetto al feedforward e l'integrale.

In conclusione questa esperienza di laboratorio fornisce diversi spunti di riflessione. Innanzitutto, fin da subito è stato evidente come un controllore progettato per rispettare le specifiche in simulazione non necessariamente farà altrettanto una volta provato sul processo reale. Ciò può essere dovuto ad eccessive semplificazioni nella fase di modellizzazione del processo, a dati nominali non fedeli alla realtà o semplicemente a disturbi impossibili da eliminare nei processi veri. Ciò però non significa che la progettazione su modello di un controllore sia completamente inutile. Infatti si è notato come nella maggior parte dei casi l'andamento di ingressi e uscite previste avesse un andamento molto simile a quello effettivamente misurato in laboratorio. Tuttavia una fase di ritaratura dei parametri si è resa necessaria per riuscire a rispettare le specifiche imposte e ciò accade spesso nella pratica. In sostanza, quindi, la fase di modellizzazione è necessaria per poter capire quale sarà approssimativamente il comportamento del nostro sistema in catena chiusa e decidere quale sia il miglior controllo da attuare. Ma è anche vero che non ha solitamente senso effettuare una troppo scrupolosa taratura dei parametri di controllo sul modello perché spesso il sistema fisico si comporterà diversamente da quanto previsto.

## 7 Generalizzazione controllo integrale, principio del modello interno

Il principio del modello interno si basa sulla conoscenza delle caratteristiche del segnale di riferimento  $r$  e dei disturbi  $d$ . Così è in grado di fornire una condizione sufficiente per la reiezione di disturbi e/o l'inseguimento di segnali di riferimento a regime permanente. Si possono distinguere tre diversi casi frequenti:

- $r(t)$  e  $d(t)$  segnali costanti (ma non noti), ovvero con  $\dot{r}(t) = \dot{d}(t) = 0$ . Con questo tipo di segnali, utilizzando la trasformata di Laplace e le sue proprietà si ottiene banalmente

$$\begin{aligned}sR(s) &= 0 \\ sD(s) &= 0\end{aligned}$$

a cui corrisponde un sistema dinamico con i poli situati in  $s = 0$ .

- $r(t)$  e  $d(t)$  segnali sinusoidali di frequenza  $\omega_0$

$$\begin{aligned}r(t) &= A \sin(\omega_0 t + \phi) \\ d(t) &= E \sin(\omega_0 t + \tau)\end{aligned}$$

con  $A, E, \phi$  e  $\tau$  non noti. Calcolando la derivata del secondo ordine e con qualche facile passaggio algebrico si ha

$$\begin{aligned}\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) &= 0 \\ \ddot{d}(t) + \omega_0^2 d(t) &= 0\end{aligned}$$

e ancora usando la trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}(s^2 + \omega_0^2)R(s) &= 0 \\ (s^2 + \omega_0^2)D(s) &= 0\end{aligned}$$

a cui corrispondono i poli del sistema dinamico  $s^2 + \omega_0^2 = 0$ .

È comunque possibile generalizzare il secondo punto avendo un sistema descritto in 56 con  $(A, B)$  raggiungibile

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad D = 0 \quad (56)$$

in

$$\begin{aligned}r^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}r^{(m-1)}(t) + \cdots + \alpha_0r(t) &= 0 \\ d^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}d^{(m-1)}(t) + \cdots + \alpha_0d(t) &= 0\end{aligned}$$

e definendo l'errore  $e(t) = y(t) - r(t)$  si ottiene

$$e^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}e^{(m-1)}(t) + \cdots + \alpha_0e(t) = C \underbrace{\left( x^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + \alpha_0x(t) \right)}_{\xi(t) \in \mathbb{R}^n} \quad (57)$$

Allora

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= x^{(m+1)}(t) + \alpha_{m-1}x^{(m)}(t) + \cdots + \alpha_0x^{(1)} = Ax^{(m)}(t) + Bu^{(m)}(t) + Gd^{(m)}(t) + \cdots + \alpha_0(Ax(t) + Bu(t) + Gd(t)) \\ &= A \left( x^{(m)}(t) + \alpha_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \cdots + \alpha_0x(t) \right) + B \underbrace{\left( u^{(m)}(t) + \cdots + \alpha_0u(t) \right)}_{u_\xi(t)} = A\xi(t) + Bu_\xi(t)\end{aligned}$$

Si definisce un nuovo stato  $z = [e \dots e^{(m-1)} | \xi]^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  e un relativo modello di stato

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu_\xi(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du_\xi(t) \end{cases} \quad (58)$$

dove le matrici  $A_z$  e  $B_z$  sono

## A Progettazione in frequenza per un sistema del secondo ordine

Una funzione di trasferimento del secondo ordine, può essere scritta in maniera del tutto generale come

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (59)$$

dove il parametro  $\xi$  è il *coefficiente di smorzamento* e  $\omega_n$  è la *pulsazione naturale non smorzata*. I poli di tale funzione di trasferimento sono una coppia complessa coniugata e si trovano ad una distanza dall'origine pari a  $\omega_n$  e a un angolo  $\theta = \arcsin \xi$ . Una specifica naturale per le prestazioni del sistema in termini di risposta in frequenza è la *larghezza di banda*, definita come la frequenza massima alla quale il sistema segue un ingresso sinusoidale in modo soddisfacente. Altro parametro importante è il valore massimo del modulo della risposta in frequenza, denominato come *picco di risonanza*  $S$ . La larghezza di banda è una misura della prontezza di risposta e come tale corrisponde ad altri parametri, quali il tempo di salita e il tempo al picco nel dominio del tempo.

### A.1 Sovraelongazione e tempo al picco

La massima sovraelongazione corrisponde al punto dove la derivata della risposta in frequenza del modulo si annulla. L'andamento nel tempo della risposta al gradino  $H(s)/s$  si ottiene grazie alla trasformata di Laplace inversa

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \quad (60)$$

dove  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$  e  $\sigma = \xi \omega_n$ . Utilizzando delle identità geometriche è possibile riscrivere l'equazione 60 in maniera più compatta

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega_d^2}} \cos(\omega_d t + \beta) \quad (61)$$

con  $\beta = \arctan(\frac{\sigma}{\omega_d})$ . Resta quindi da calcolare la sua derivata e porla pari a zero.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sigma e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - e^{-\sigma t} (-\omega_d \sin \omega_d t + \sigma \cos \omega_d t) = 0 \\ &= e^{-\sigma t} \left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin \omega_d t + \omega_d \sin \omega_d t \right) = 0 \end{aligned}$$

Questo si verifica quando  $\sin \omega_d t = 0$ , dunque il tempo al picco  $t_p$  risulta

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (62)$$

Sostituendo 62 dentro l'espressione di  $y(t)$  si ottiene allora

$$t(t_p) = 1 + S = 1 - e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} \left( \cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) = 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}$$

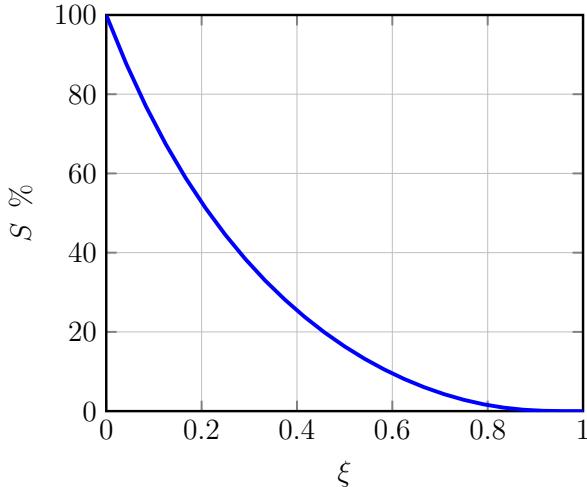


Figura 23: Relazione tra massima sovraelongazione  $S$  e coefficiente di smorzamento  $\xi$ .

Si ha dunque la seguente relazione, che lega la massima sovraelongazione al parametro  $\xi$ , a qui corrisponde il grafico di figura 23.

$$S = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (63)$$

## A.2 Sovraelongazione e margine di fase

Tenendo sempre in considerazione la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine, descritta nell'equazione 59, è possibile mostrare che la relazione tra il margine di fase  $m_\phi^G$  e il coefficiente di smorzamento  $\xi$  è

$$m_\phi^G = \arctan \left[ \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}} \right] \quad (64)$$

A questo punto è sufficiente invertire l'equazione 64 e esplicitare la massima sovraelongazione  $S$  in funzione del margine di fase  $m_\phi^G$  utilizzando il risultato ottenuto prima, nella formula 63, ottenendo quindi il seguente risultato, qui proposto solo in via grafica.

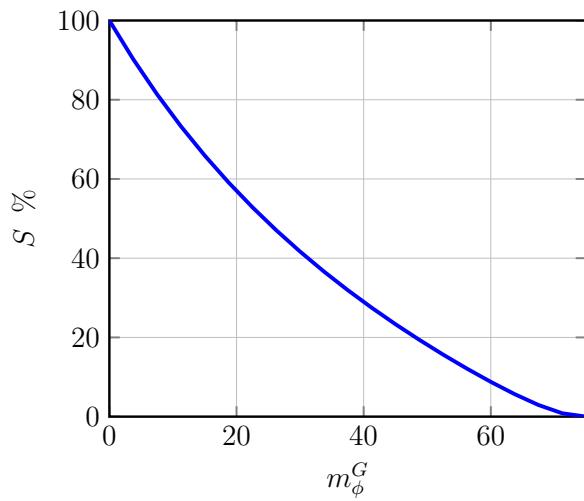


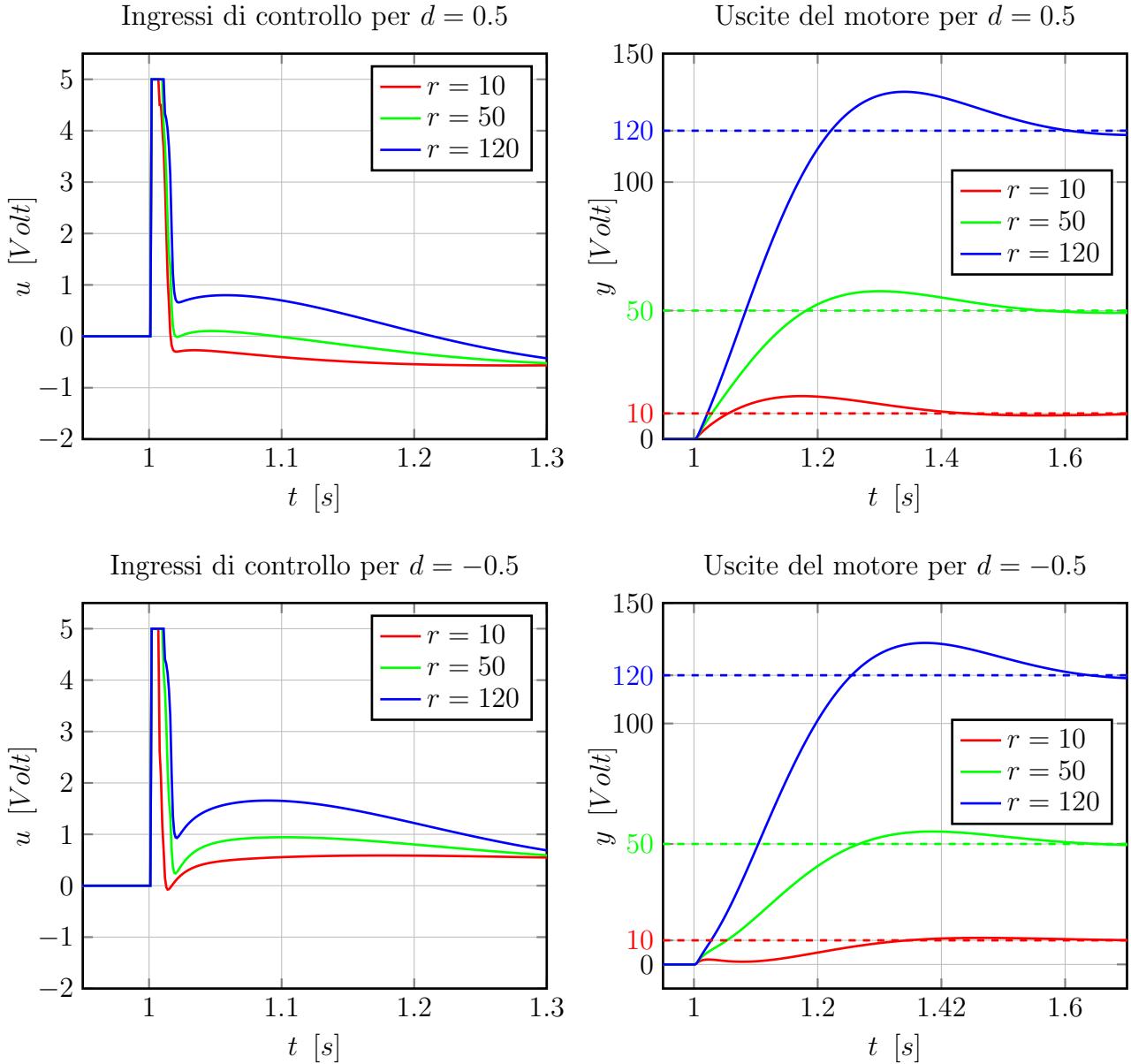
Figura 24: Relazione tra massima sovraelongazione  $S$  e margine di fase  $m_\phi$ .

## B Grafici e prestazioni

In questa appendice vengo riportati tutti i grafici e tutte le tabelle delle simulazioni e dei dati sperimentali di laboratorio.

### B.1 Simulazione controllore PID con desaturatore

#### Simulazioni prima della ritaratura

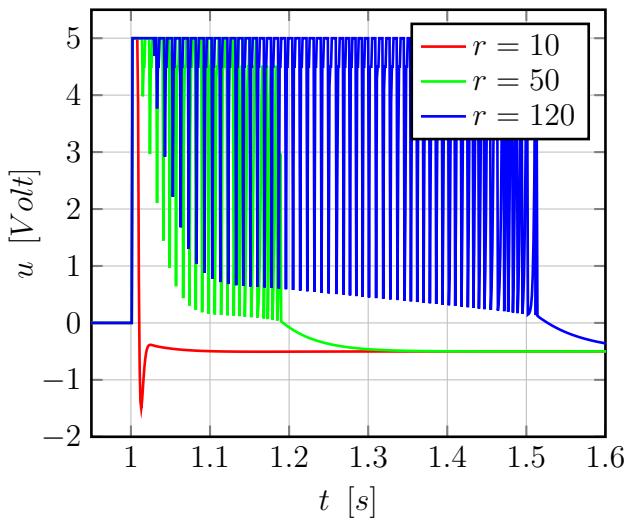


$d$ [Volt]	$r$ [gradi]	$t_s$ [s]	$S$ [%]
0.5	10	0.778	6.7
0.5	50	0.803	7.5
0.5	120	0.821	15.1
-0.5	10	0.909	1
-0.5	50	0.833	5.2
-0.5	120	0.836	13.4

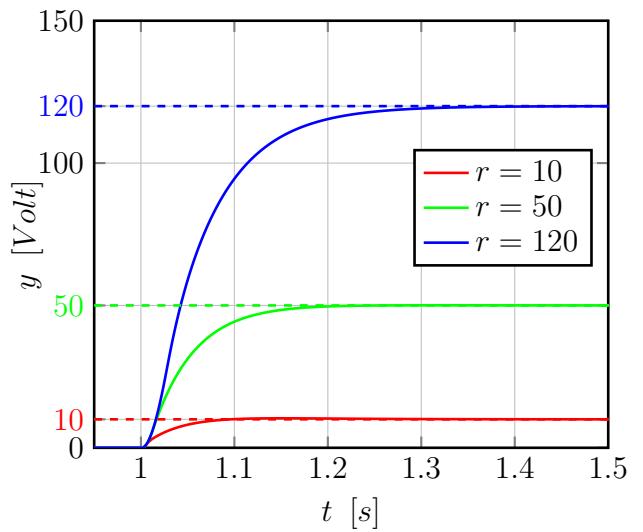
Tabella 2: Prestazioni controllore PID in simulazione prima della ritaratura

### Simulazioni dopo la ritaratura

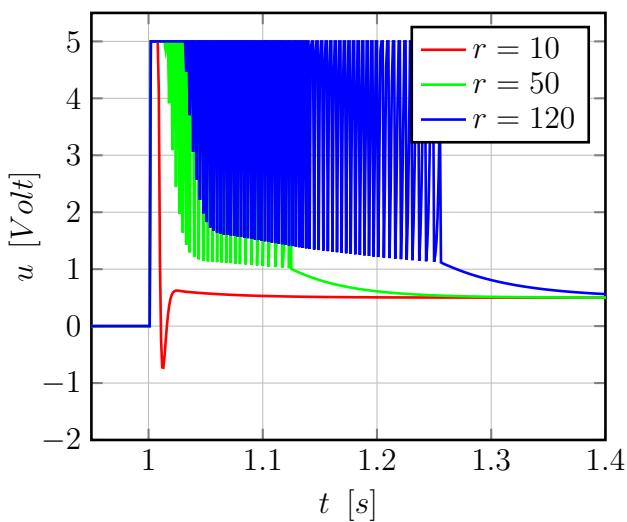
Ingressi di controllo per  $d = 0.5$



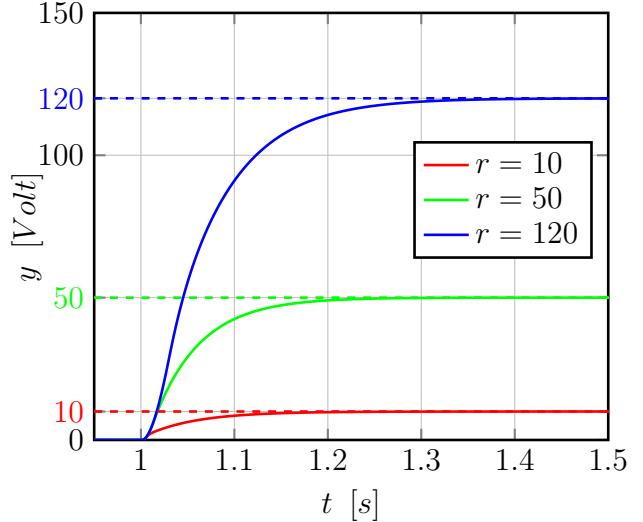
Uscite del motore per  $d = 0.5$



Ingressi di controllo per  $d = -0.5$



Uscite del motore per  $d = -0.5$



$d$ [Volt]	$r$ [gradi]	$t_s$ [s]	$S$ [%]
0.5	10	0.29	0.4
0.5	50	0.188	0
0.5	120	0.276	0
-0.5	10	0.248	0
-0.5	50	0.231	0
-0.5	120	0.296	0

Tabella 3: Prestazioni controllore PID in simulazione dopo la ritaratura

## B.2 Simulazioni controllo in feedforward

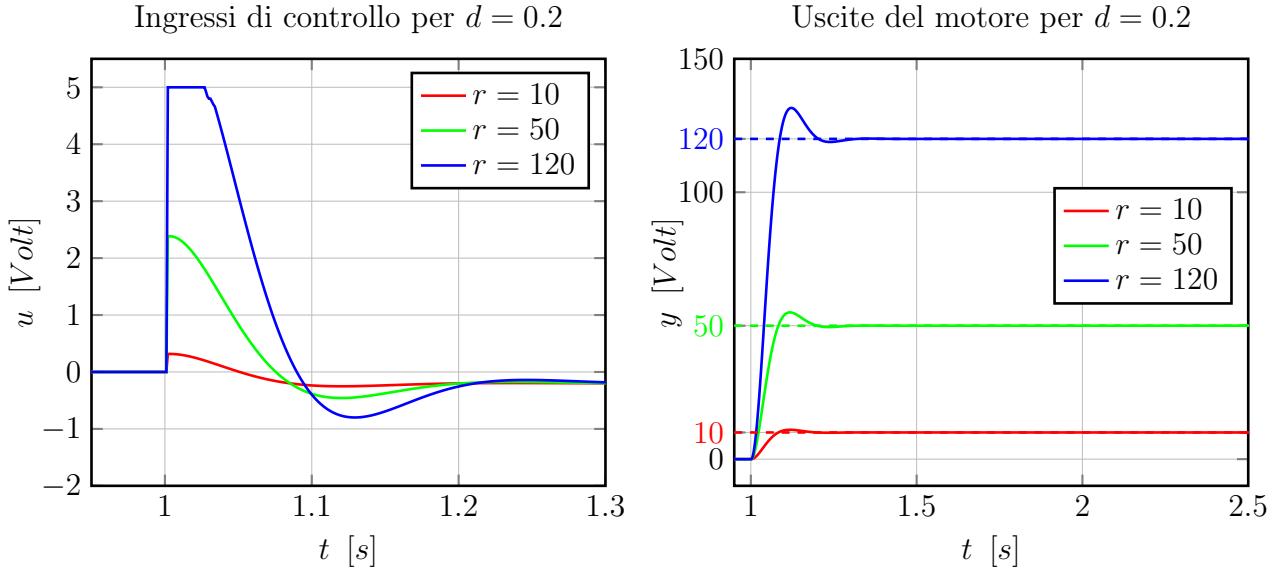


Figura 25: Ingressi di controllo e uscite del motore con controllore feedforward e rumore additivo  $d = 0.2$  dopo la taratura.

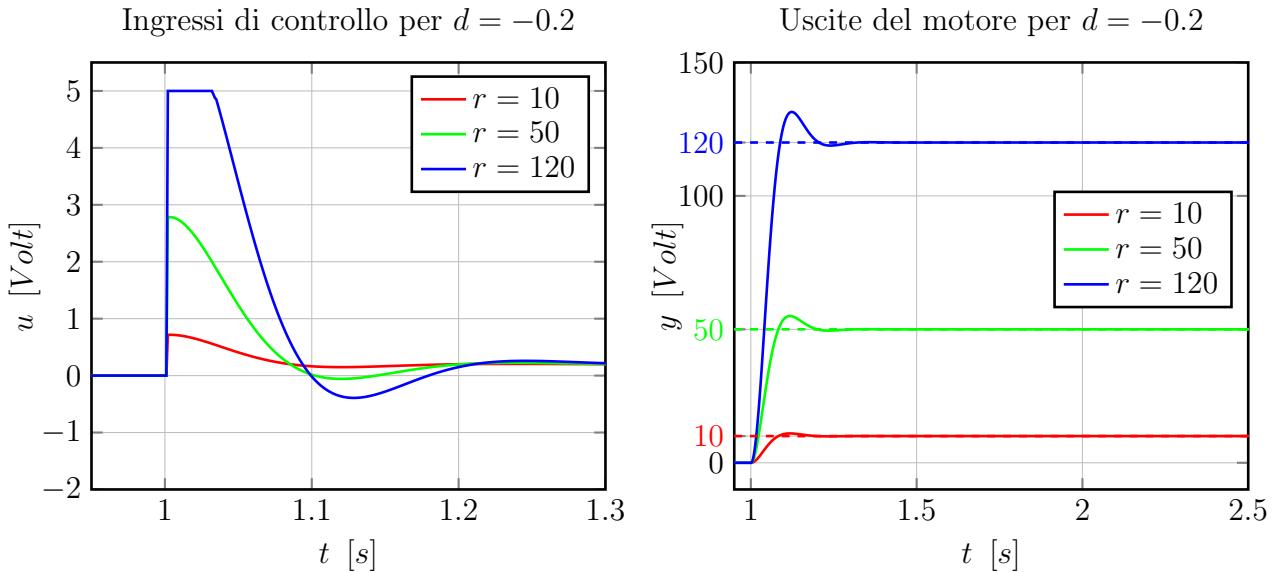


Figura 26: Ingressi di controllo e uscite del motore con controllore feedforward e rumore additivo  $d = -0.2$  dopo la taratura.

$d$ [Volt]	$r$ [gradi]	$t_s$ [s]	$S$ [%]
0.2	10	0.157	10
0.2	50	0.157	10
0.2	120	0.16	9.7
-0.2	10	0.157	10
-0.2	50	0.157	10
-0.2	120	0.161	9.5
$d = 0$ $a = 1.1a_{nom}$	50	0.15	6.7
$d = 0$ $a = 1.2a_{nom}$	50	0.088	4.1

Tabella 4: Prestazioni controllore feedforward in simulazione dopo la ritaratura

## C Codice MATLAB utilizzato

### C.1 controllore\_PID.m

```

1 %% specifiche progetto
2 t_s_max = 0.3; % [s] rispetto a +/-1%
3 S = 5; % gradi
4 r = 120; % ampiezza segnale di riferimento
5 d = -0.5; % ampiezza disturbo in ingresso
6
7 %% funzione di trasferimento del motoriduttore
8 % L = 0 per ipotesi
9 Kg2v = 5 / 176;
10 Kr2v = (180 / pi) * Kg2v;
11 Kphi = 7.67 * 10^-3;
12 R = 2.6;
13 Jm = 3.87 * 10^-7;
14 Jl = 3.42 * 10^-5;
15 N = 14;
16 bm = 0;
17 bl = 0;
18
19 %% calcolo parametri equivalenti
20 KphiEq = N * Kphi;
21 bEq = (bm * N^2) + bl;
22 Jeq = (Jm * N^2) + Jl;
23
24 numP = KphiEq;
25 denP = [R*Jeq (R*bEq + KphiEq^2) 0];
26 P = tf(numP, denP);
27
28 %% calcolo parametri PID con desaturatore
29 xi = 0.7; % da figura 9 S=4.17%
30 m_phi_G = 65; % da figura 9 S=4.17%
31 alpha = 0.3; % alpha appartiene a [1/3 , 1/10]
32 b = 4; % b appartiene a [4, inf)
33 w_a_min = 3 / (xi * t_s_max); % pulsazione di attraversamento minima
34 %tau_L = alpha / w_a_min; % termine non idealita' parte derivativa
35 tau_L = 0.001;
36 [mag_w_a, angle_w_a] = bode(P, w_a_min); % modulo e fase del processo alla
37 % minima pulsazione di
38 % attraversamento
39 a = 1 / mag_w_a;
40 theta = m_phi_G - 180 - angle_w_a;
41
42 K_p = a * cosd(theta); % guadagno proporzionale
43 K_i = ((a * w_a_min) / 2) * (sqrt((sind(theta))^2 + ...
44 (4/b)*(cosd(theta))^2) - sind(theta)); % guadagno integrale
45 K_d = K_p^2 / (b * K_i); % guadagno derivativo
46
47 %% ritaratura parametri PID
48 K_p = K_p * 9;
49 K_i = K_i * 10;
50 K_d = K_d * 4.5;
51
52 t_r = 1.8 / abs(w_a_min);
53 K_a = 3 / (t_r * K_i); % guadagno desaturatore
54
55 %% simulazione
56 step_time_input = 1; % [s] step time dell'ingresso a gradino
57 simulation_time = 5; % [s] tempo di simulazione
58 % all'uscita del motore
59
60 sim('modello_motore_PID_desaturatore'); % simulazione SIMULINK

```

### C.2 controllore\_feedforward.m

```

1 %% misc
2 simulation_time = 5; % tempo di esecuzione della simulazione
3 step_time_input = 1; % step time dell'ingresso a gradino
4
5 %% specifiche progetto
6 ts = 0.15; % ts < 0.15
7 S = 10 / 100; % S < 10%
8 r = 50; % [gradi] - ampiezza gradino
9 d = 0; % [Volt] - disturbo additivo
10
11 %% parametri motore (presi dalla tabella)
12 % L = 0 per ipotesi
13 Kg2v = 5 / 176;
14 Kr2v = 180 * Kg2v / pi;
15
16 Kphi = 7.67 * 10^-3;
17 R = 2.6;
18 Jm = 3.87 * 10^-7;
19 Jl = 3.42 * 10^-5;

```

```

20 N = 14;
21 bm = 0;
22 bl = 0;
23
24 % calcolo parametri equivalenti
25 KphiEq = N * Kphi;
26 bEq = 0;
27 Jeq = (Jm * N^2) + Jl;
28
29 %% creo il modello del motore e lo retroazione
30 a = -(bEq*R + KphiEq^2) / (Jeq*R);
31 b = KphiEq / (Jeq*R);
32 c = Kr2v;
33 A = [ 0 ,1 ;
34 0 ,a];
35 B = [0 ;
36 b];
37 C = [ c , 0];
38
39 sigma = 3 / ts; % dalla tabella
40 xi = 0.6;
41 wn = sigma / xi;
42 theta = acos(0.6); % poiche' xi=cos(theta)
43 h = wn * sin(theta); % parte immaginaria del polo
44
45 w1 = - sigma + i * h; % polo desiderato 1
46 w2 = - sigma - i * h; % polo desiderato 2
47 W = [w1 , w2]; % poli desiderati
48 K = place ( A , B , W ); % matrice di retroazione
49
50 %% calcolo termine feed-forward
51 N = 1 / (- C * inv(A - B * K) * B);
52
53 %% SIMULA
54 sim('modello_motore_stato.slx');

```

### C.3 controllore\_integrale.m

```

1 %% misc
2 simulation_time= 10; % tempo di esecuzione della simulazione
3 step_time_input = 1; % step time dell'ingresso a gradino
4
5 %% specifiche progetto
6 ts = 0.15; % ts < 0.15
7 S = 10 / 100; % S < 10%
8 r = 120; % [gradi] - ampiezza gradino
9 d = -0.2; % ampiezza disturbo sincronizzato al riferimento
10
11 %% parametri motore (presi dalla tabella)
12 % L = 0 per ipotesi
13 Kg2v = 5 / 176;
14 Kr2v = 180 * Kg2v / pi ;
15 Kt = Kr2v ;
16 Kphi = 7.67 * 10^-3;
17 R = 2.6;
18 Jm = 3.87 * 10^-7;
19 Jl = 3.42 * 10^-5;
20 N = 14;
21 bm = 0;
22 bl = 0;
23
24 % calcolo parametri equivalenti
25 KphiEq = N * Kphi;
26 bEq = 0 ;
27 Jeq = (Jm * N^2) + Jl;
28
29 %% creo il modello del motore e lo retroazione
30 a = -(bEq*R + KphiEq^2) / (Jeq*R) ;
31 b = KphiEq / (Jeq*R);
32 c = Kt;
33 A = [0 , 1;
34 0 , a];
35 B = [0;
36 b];
37 C = [c , 0];
38
39 Az = [0 , c , 0;
40 0 , 0 , 1;
41 0 , 0 , a];
42
43 Bz = [0;
44 0;
45 b];
46
47 sigma = 3 / ts;
48 xi = 0.6;
49 wn = sigma / xi;
50 theta = acos(0.6);

```

```

51 h = wn * sin(theta);
52 % scelto la configurazione (D) dei poli
53 w1 = - sigma + i * h;
54 w2 = - sigma - i * h;
55 w3 = - sigma;
56 W = [w1 - sigma, w2 - sigma, w3 - 2*sigma]; % poli desiderati
57 K = acker (Az, Bz, W); % matrice di retroazione K
58 Ki = K(1); % prima colonna -> guadagno Ki
59
60 %% SIMULA
61 sim('controllore_stato_integrale_new.slx');

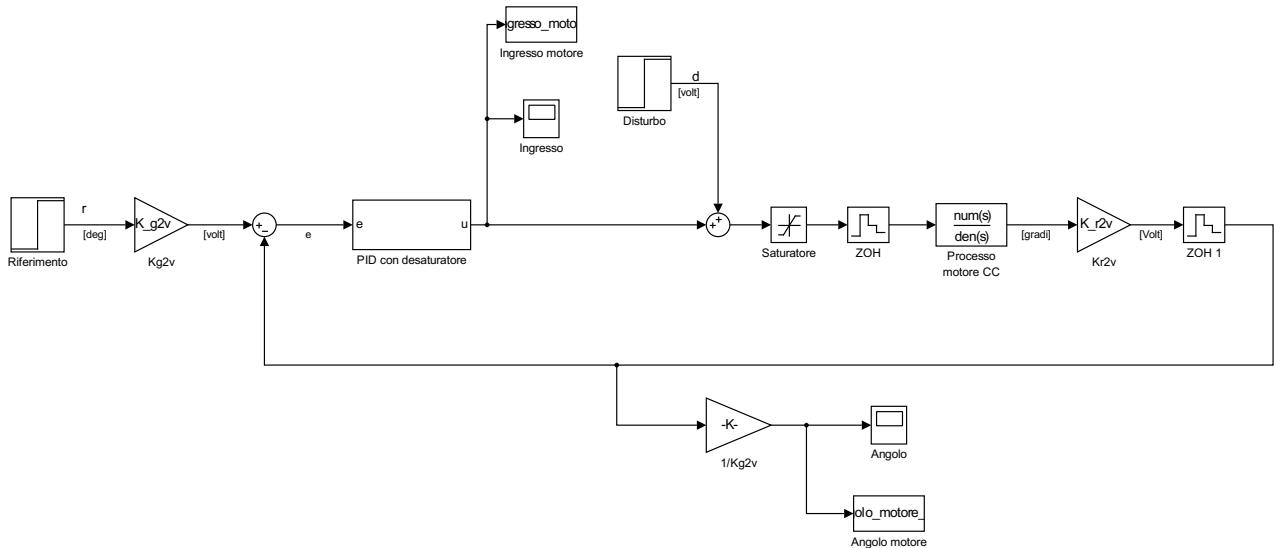
```

## D Modelli SIMULINK utilizzati

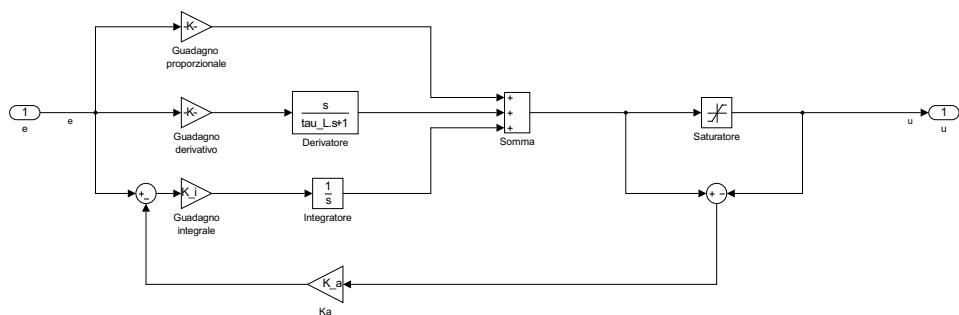
In questa appendice si riportano gli schemi *SIMULINK* utilizzati, compresi dei relativi sottosistemi.

### D.1 modello\_PID.slx

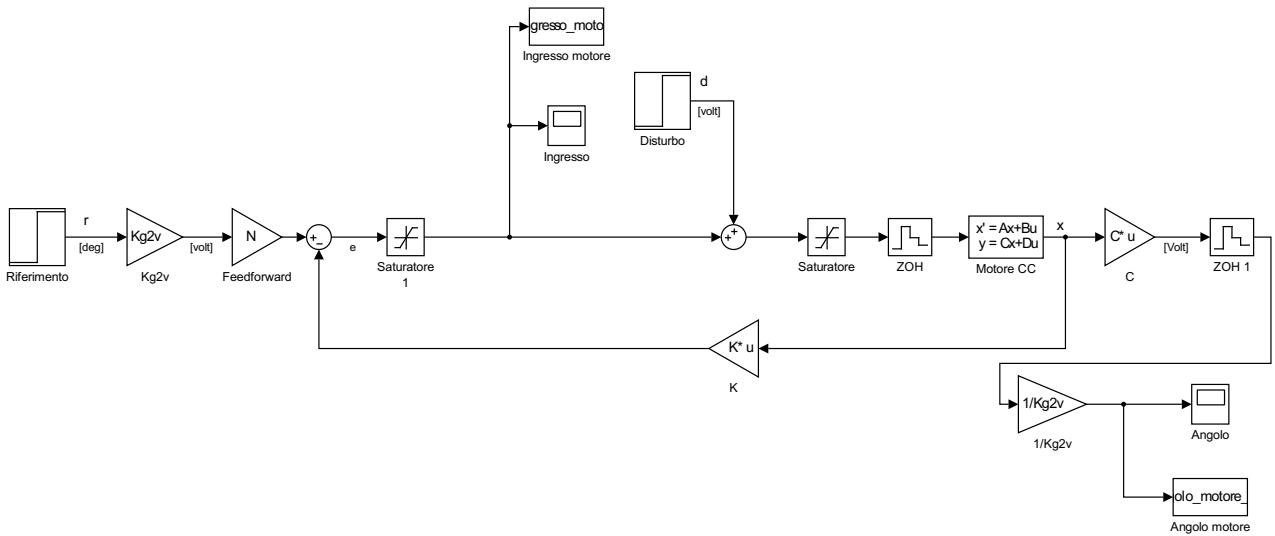
Questa schema rappresenta la simulazione del motore elettrico CC controllato da un PID con desaturatore; lo schema del PID è riportato sotto.



### PID con desaturatore



## D.2 modello\_feedforward.slx



## D.3 modello\_integrale.slx

