**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione**

Corso di Laboratorio di Controlli

# Esperienza 2: Progettazione di controllori PID e con retroazione stato per un motore elettrico

Dal Lago Nicola - 1104228

Anno Accademico 2014-2015

# Indice

# 1 Scopo

Lo scopo di questa esperienza è la progettazione di regolatori PID e in spazio di stato per il controllo di un motore elettrico a corrente continua controllato in tensione. In particolar modo si vuole analizzare il comportamento del sistema in catena chiusa sollecitato da un ingresso a gradino. Si vogliono quindi caratterizzare le differenze tra un regolatore PID con desaturatore e un regolatore ottenuto tramite retroazione di stato. Altro obiettivo importate dell'esperienza è il confronto tra i risultati ottenuti per simulazione e sperimentalmente, motivando le eventuali ritarature dei parametri di controllo

# 2 Descrizione apparato sperimentale

Il sistema di controllo fornito in laboratorio si basa sul programma *Real-Time Workshop* che permette l'esecuzione in tempo reale di controllori implementati tramite *Matlab-Simulink*. L'apparato sperimentale è rappresentato in figura 1.

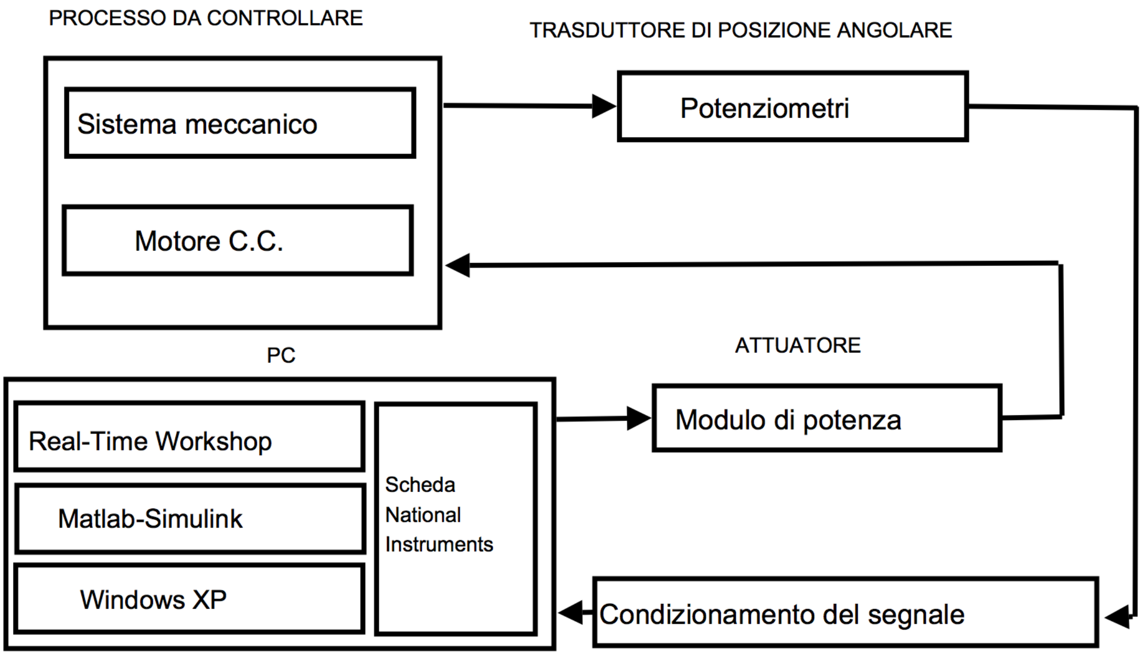



Figura 1: Schema componenti dell'apparato sperimentale.

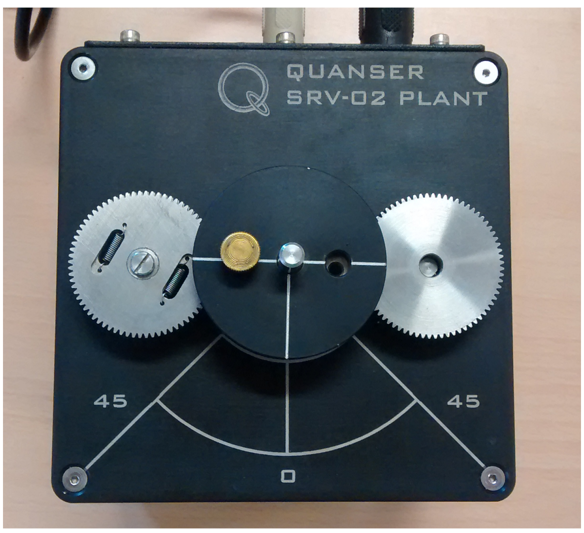
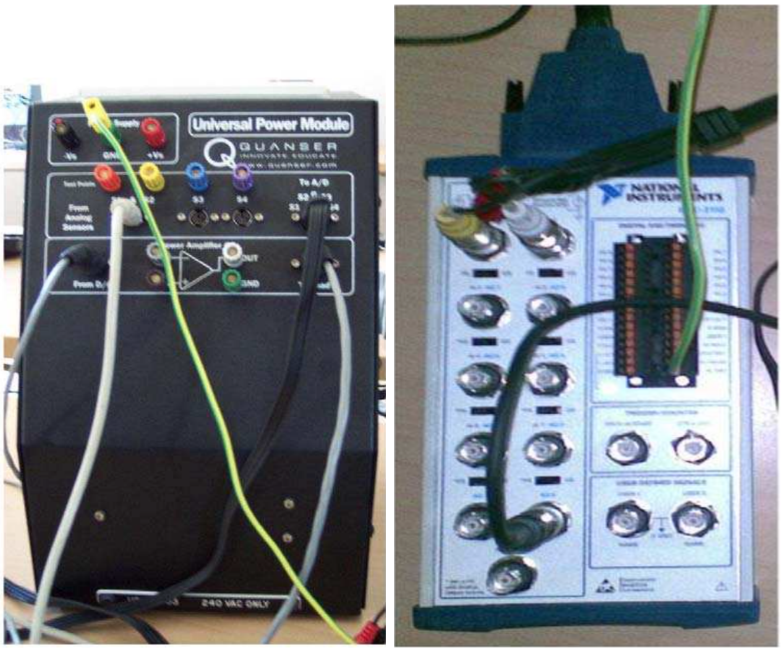



Figura 2: Sistema elettromeccanico da controllare (vista dall'alto)




(a) Modulo di potenza (b) Scheda di acquisizione PCI

Figura 3: Componenti dell'apparato sperimentale

Il processo da controllare è costituito da un sistema elettromeccanico comandato da un motore in corrente continua con motoriduttore. Quest'ultimo muove altre due ruote dentate, quella centrale che rappresenta il carico e ha lo scopo di indicare la posizione e il movimento in gradi della ruota, mentre nella seconda ruota (quella più esterna) è montato un trasduttore (costituito da un potenziometro) che converte la posizione in gradi del carico in segnale elettrico. Da notare che il sistema a tre ruote serve per ridurre l'effetto di *backlash* al carico ovvero il gioco che esiste fra due ingranaggi qualunque per il semplice fatto che le tolleranze meccaniche non permettono di avere un accoppiamento perfetto. A causa di questo fenomeno si ha un ritardo nell'inversione del moto su un asse rispetto al comando stesso di inversione. Per comandare tutto ciò si è utilizzato un modulo di potenza costituito da un alimentatore DC duale da 12V e da un amplificatore lineare che è in grado di fornire al motore ±5V. L'acquisizione dati è stata fatta con la scheda *National Instruments PCI-6221* accessibile via software attraverso porte I/O. In figura 2 si osservano i diversi componenti che costituiscono il sistema elettromeccanico da controllare e in figura 3a si nota il modulo di potenza utilizzato assieme alla scheda di acquisizione dati in figura 3b. In figura 4 sono raffigurati blocchi che permettono la comunicazione tra Matlab-Simulink e la scheda PCI che a sua volta, tramite il modulo di potenza, è connessa al motore e al trasduttore.

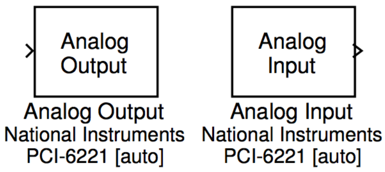



Figura 4: Blocchi Simulink per la prova sperimentale

# 3 Modellizzazione

Nel corso di questa esperienza, viene impiegato un motore elettrico a corrente continua. Il motore è controllato tramite un segnale in tensione e fornisce in output l'attuale posizione del carico, attraverso l'utilizzo di un encoder.

## 3.1 Modellizzazione del motore

Un motore elettrico in corrente continua, può essere suddiviso in due parti, statore e rotore.
Lo statore ha il compito di indurre un campo magnetico $B$, attraverso l'uso di materiali ferromagnetici e correnti elettriche.
Il rotore è composto da un elevato numero di spire percorse da corrente $i$ e immerse nel campo magnetico prodotto dallo statore.
Come è noto dalla *legge di Faraday*, una spira in tale situazione produce una forza elettro motrice $f.e.m.$, pari all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso concatenato dalla spira

$$f.e.m. = -\frac{d\theta(t)}{dt} = AB\sin(\alpha(t)) \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} \tag{1}$$

dove $A$ è l'area della spira, e $\alpha$ è l'angolo tra il vettore campo magnetico e il versore perpendicolare alla spira con verso dato dalla regola della vite destrorsa.
Si può quindi ricavare anche il momento torcente totale $\tau_{TOT}$ di ciascuna spira come

$$\tau_{TOT} = ABi\sin\alpha(t) \tag{2}$$

Riassumendo, possiamo scrivere la **dinamica elettro-meccanica** del rotore:

$$\begin{cases} f.e.m. = -AB\omega = -k_\phi\omega \\ \tau_{TOT} = ABi = k_\phi i \end{cases} \tag{3}$$

dove, con $\omega$ si indica la velocità angolare del rotore e con $k_\phi$ la *costante elettrica* fornita da datasheet.
Per la **dinamica meccanica**, supponendo di avere un attrito viscoso descritto come $\tau_{attr} = -b\omega$, possiamo ricavarne l'equazione utilizzando il momento di inerzia $J$:

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_\phi i - b\omega \tag{4}$$

si noti come questa equazione può essere interpretata come l'uscita del nostro sistema motore, in quanto è una equazione differenziale in funzione della velocità angolare del motore.
Passando alla **dinamica elettrica**, possiamo pensare il motore come una serie di una resistenza $R$, un generatore di forza elettromotrice $f.e.m.$ e una induttanza $L$; ai capi di tale serie, viene applicata una tensione $v_m$, il nostro controllo. Possiamo quindi scrivere l'equazione di controllo

$$v_m - k_\phi\omega = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{5}$$

Ora possiamo unire le equazioni di uscita e di controllo, e interpretare $i$ e $\omega$ come le variabili di stato

$$\begin{cases} v_m = Ri + L\frac{di}{dt} + k_\phi\omega \\ J\frac{d\omega}{dt} = -b\omega + k_\phi i \end{cases} \tag{6}$$

e applicando la *trasformata di Laplace* scriviamo

$$\begin{cases} V_m(s) = RI(s) + sLI(s) + k_\phi\Omega(s) \\ Js\Omega(s) = -b\Omega(s) + k_\phi I(s) \end{cases} \tag{7}$$

Con dei semplici passaggi algebrici è possibile ottenere

$$\Omega(s) = P(s)V_m(s) = \frac{k_\phi}{(R+sL)(b+SJ)+k_\phi} \cdot V_m(s) \tag{8}$$

dove con $P(s)$ indichiamo la funzione di trasferimento del processo. Nel caso del nostro motore, possiamo trascurare l'effetto induttivo, in quanto è di molto inferiore rispetto a tutti gli altri paramenti; ci risulta quindi una equazione di trasferimento

$$P(s) = \frac{k_\phi}{RJs + Rb + K_\phi^2} \tag{9}$$

Come accennato all'inizio del paragrafo, il motore è disposto di un encoder in grado di misurare solo la posizione angolare $\theta_m$ del motore, e non la velocità angolare; è possibile però ricondursi ad una funzione di trasferimento che abbia la posizione e non la velocità come parametro di uscita ricordando la relazione che le lega:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega$$

e utilizzando la *trasformata di Laplace* $s\Theta_m(s) = \Omega(s)$. Viene quindi aggiunto un polo in zero al processo:

$$P_\theta(s) = \frac{k_\phi}{s(RJs + Rb + k_\phi^2)} \tag{10}$$

Per comandare il motore in gradi rispetto alla tensione, bisogna introdurre due costanti moltiplicative che sono in grado di trasformare un valore in gradi a uno in tensione e viceversa:

- $K_{g2v}$ : costante moltiplicativa per passare da gradi a tensione;
- $K_{v2g}$ : costante moltiplicativa per passare da tensione a gradi.

## 3.2 Modellizzazione del motoriduttore

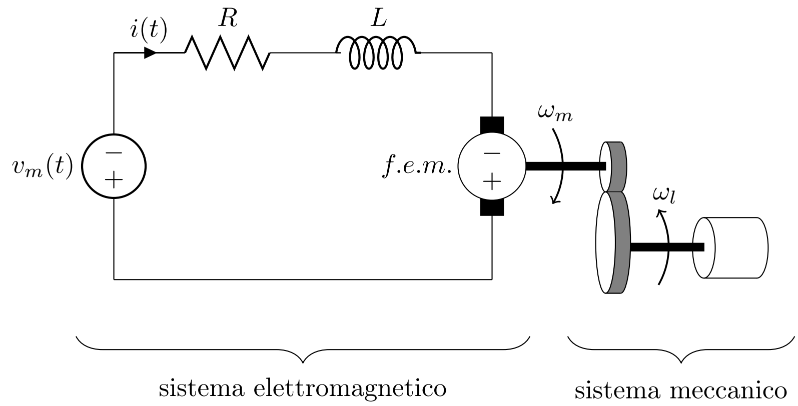



Figura 5: Schema del motore

Tipicamente un motore non viene usato direttamente per comandare un carico, ma si utilizzano una coppia di ingranaggi necessari per adattare le prestazioni del motore alle specifiche di progetto; questo tipo di configurazione viene chiamata *motoriduzione*. E' necessario quindi definire nuove variabili:

- $N_m$ : numero denti dell'ingranaggio collegato al motore;
- $N_l$ : numero denti dell'ingranaggio collegato al carico;
- $\tau_m$ : momento torcente applicato al motore dall'ingranaggio;
- $\tau_l$ : momento torcente applicato al carico;
- $b_m$ : costante di attrito viscoso nel rotore lato motore;
- $b_l$ : costante di attrito viscoso nel rotore lato carico;
- $N = \frac{N_l}{N_m}$ : rapporto di motoriduzione.

Inoltre il motore ha una serie di non idealità le quali ne complicherebbero di molto lo studio; riportiamo qui le semplificazioni fatte

- $L = 0$ : induttanza trascurabile;
- non c'è slittamento tra le ruote, il che implica;

$$\theta_m N_m = \theta_l N_l \Longrightarrow N_m \frac{d\theta_m}{dt} = N_l \frac{t\theta_l}{dt} \tag{11}$$

- non c'è dissipazione al punto di contatto, cioè le potenze rimangono costanti.

$$\tau_m \omega_m = \tau_l \omega_l \Longrightarrow \tau_m \frac{d\theta_m}{dt} = \tau_l \frac{d\theta_l}{dt} \tag{12}$$

dall'equazione 11 e 12 otteniamo

$$\frac{\omega_m}{\omega_l} = \frac{N_l}{N_m} = N \Longleftrightarrow \omega_m = N\omega_l \tag{13}$$

$$\tau_m N \omega_l = \tau_l \omega_l \Longleftrightarrow \tau_l = N\tau_m \tag{14}$$

e unendo tutto insieme nell'equazione del motore ricaviamo

$$\big(J_m N^2 + J_l\big)\frac{d\omega_l}{dt} = -\big(b_m N^2 + b_l\big)\omega_l + Nk_\phi i \tag{15}$$

$$J_{eq}\frac{d\omega_l}{dt} = -b_{eq}\omega_l + k_{\phi,eq} i \tag{16}$$

Si può vedere come la forma delle equazioni del motore e del motoriduttore siano praticamente uguali, ciò che cambia è il valore delle costanti. I dati di targa del motore presente in laboratorio sono riassunti nella tabella 1.

| **Parametro** | **Valore** | **Unità di misura** |
|---|---|---|
| $K_{g2v}$ | 0,0284 | $Volt/rad$ |
| $K_{r2v}$ | 1,63 | $Volt/rad$ |
| $N$ | 14 | |
| $k_\phi$ | 0,007 67 | $Volt/(rad/sec)$ |
| $J_m$ | $3{,}87 \times 10^{-7}$ | $kg \cdot m^2$ |
| $J_l$ | $3{,}42 \times 10^{-5}$ | $kg \cdot m^2$ |
| $R$ | 2,6 | $\Omega$ |
| $L$ | $0{,}18 \times 10^{-3}$ | $H$ |

Tabella 1: Dati di targa del motore

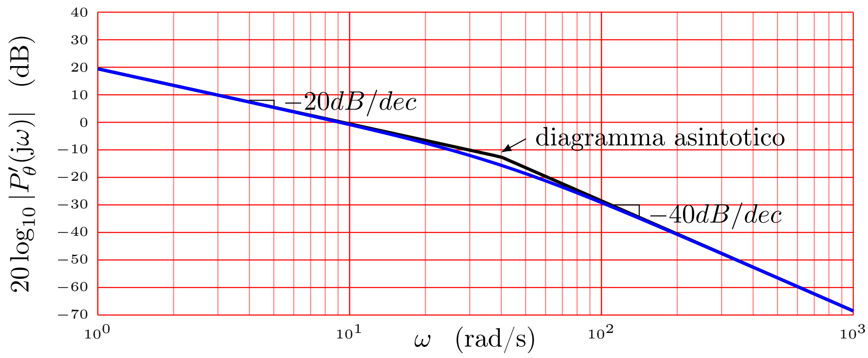
$b_m$ e $b_l$ non sono noti a priori, ma per il nostro laboratorio vengono considerati nulli, come $L$.
Come prima, anche in questo caso l'encoder ci fornisce la posizione angolare del carico e non la sua velocità, ma applicando gli stessi ragionamenti si può arrivare a formulare l'equazione finale del processo:

$$\boxed{P_\theta(s) = \frac{Nk_\phi}{s\big(R(J_m N^2 + J_l)\big) + N^2 k_\phi^2}} \tag{17}$$

mentre la vera funzione di trasferimento "osservata" dal motore è moltiplicata per il fattore $K_{r2v}$, risulta allora

$$P'_\theta(s) = K_{r2v} \cdot P_\theta(s) \approx \frac{375}{s(s+40)}$$

Per completezza, in figura 6 è rappresentato l'andamento di modulo e fase della funzione di trasferimento $P'_\theta(s)$.



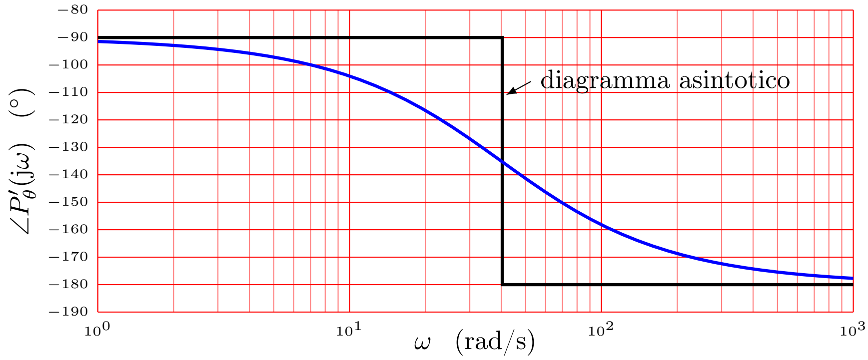



Figura 6: Diagrammi di Bode di modulo e fase.

### 3.3 Modellizzazione in spazio di stato

Una delle possibili rappresentazioni di un processo, insieme a quella in funzione di trasferimento usata fin'ora, è quella in spazio di stato. E' possibile scrivere il sistema come una coppia di equazioni lineari descritte come

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{18}$$

dove $x(t)$ è lo stato, $u(t)$ l'ingresso e $y(t)$ l'uscita. Si dimostra che il processo in funzione di trasferimento può essere scritto come $P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, ma quello che tipicamente si fa, è di ricavare direttamente le il modello dalle equazioni fisiche. Si procederà anche qui in questo modo. Le equazioni fisiche del motore, ricavate nella sessione 3, sono divise in quattro parti:

- elettrica: $V_m(t) = Ri(t) + k_\phi^{eq}\dot{\Theta}_l$
- elettromeccanica: $\tau_l(t) = k_\phi^{eq} i(t)$
- meccanica: $J_{eq}\ddot{\Theta}_l = -b_{eq}\dot{\Theta}_l + \tau_l(t)$
- sensore: $V_{out}(t) = K_T\Theta_l$

Come stato si è preso l'angolo del carico e la sue velocità angolare, $x = [\Theta_l \;\; \dot{\Theta}_l]^T$, come ingresso $u = V_m$ e come uscita $y = V_{out}$. Si può riscrivere le prime tre equazioni nel seguente modo

$$i(t) = \frac{V_m(t) - k_\phi^{eq}\dot{\Theta}_l(t)}{R} \tag{19}$$

$$\tau_l(t) = k_\phi^{eq}\Big(\frac{1}{R}V_m(t) - \frac{k_\phi^{eq}}{R}\dot{\Theta}_l\Big) \tag{20}$$

$$J_{eq}\ddot{\Theta}_l = -b_{eq}\dot{\Theta}_l + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) - \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\dot{\Theta}_l = -\Big(b_{eq} + \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\Big)\dot{\Theta}_l(t) + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) \tag{21}$$

e allora

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_l(t) = -\Big(\frac{b_{eq}}{J_{eq}} + \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R}\Big)\dot{\Theta}_l(t) + \frac{k_\phi^{eq}}{R}V_m(t) \\ V_{out}(t) = K_T\Theta_l \end{cases} \tag{22}$$

e riscrivendo il tutto in forma di stato esplicitando le matrici $A$, $B$, $C$ e $D$, si ottiene

$$\boxed{\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_l(t) \\ \ddot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} - \frac{(k_\phi^{eq})^2}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_l(t) \\ \dot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\phi^{eq}}{R} \end{bmatrix} V_m(t) \\ V_{out}(t) = \begin{bmatrix} k_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_l(t) \\ \dot{\Theta}_l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_m(t) \end{cases}} \tag{23}$$

Essendo questo un sistema *SISO*, la matrice di raggiungibilità ha rango pieno se e solo se il suo determinante è pari a zero. In questo caso

$$\mathcal{R} = [A|AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\phi^{eq}}{RJ_{eq}} \\ \frac{k_\phi^{eq}}{RJ_{eq}} & \star \end{bmatrix} \tag{24}$$

ha rango 2, il che implica che il sistema considerato è raggiungibile. Lo stesso valo per la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \left[\frac{C}{CA}\right] = \begin{bmatrix} k_T & 0 \\ 0 & k_T \end{bmatrix} \tag{25}$$

che ha rango pieno, il che implica un sistema osservabile. La raggiungibilità ci garantisce che per ogni condizione iniziale, posso portare il sistema in qualunque stato. Mentre l'osservabilità ci permette di ricavare lo stato conoscendo gli ingressi e le uscite.

# 4 Progettazione controllore PID con desaturatore

In questa sessione si procede alla progettazione del controllore PID con desaturatore.

## 4.1 Il controllore PID

Un controllore PID utilizza tre diverse azioni: proporzionale, integrativa e derivativa. Nella sua configurazione più comune esse agiscono in parallelo, cioè sono alimentate dallo stesso ingresso e le tre uscite sono poi sommate per ottenere l'uscita complessiva del controllore, come in Figura 7. Si noti che il blocco derivatore non è un semplice $s$, ma una funzione di trasferimento strettamente propria, altrimenti impossibile da realizzare.

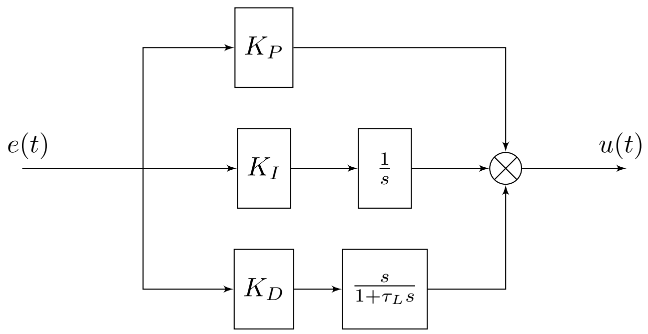



Figura 7: Schema a blocchi di un controllore PID

La funzione di trasferimento del controllore può essere scritta come:

$$\boxed{C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \tau_L s}} \tag{26}$$

in cui sono presenti quattro parametri:

- $K_P$: costante dell'azione proporzionale
- $K_I$: costante dell'azione integrale
- $K_D$: costante dell'azione derivativa
- $\tau_L$: costante temporale legata all'azione derivativa

Si noti che in generale non è necessario utilizzare tutte e tre le azioni. Ognuna di esse infatti ha specifici effetti sulle prestazioni e sulla stabilità del sistema, schematizzate a seguire.

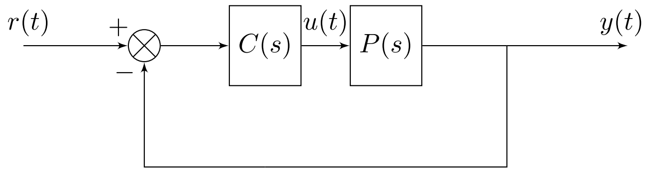



Figura 8: Schema a blocchi di un classico controllo in retroazione

Analizziamo ora gli effetti che le tre azioni del controllore portano, sia gli aspetti positivi che quelli negativi. In figura 8 è schematizzato un classico sistema di controllo in retroazione. Definendo $G(s) = C(s)P(s)$ la funzione di trasferimento in catena aperta del sistema possiamo calcolare

- $\omega_a$: pulsazione di attraversamento, ovvero la pulsazione tale per cui il modulo di $G(s)$ raggiunge il valore uno;
- $m_\phi^G = 180° + \arg[G(j\omega_a)]$: margine di fase, che a meno di sistemi sfortunati, da una indicazione del grado di stabilità del sistema. Ovvero maggiore è il margine di fase, più stabile è il sistema.

**Azione proporzionale P**
La parte proporzionale può essere scritta come

$$C_P(s) = K_P$$

Ciò porta ad avere dei diagrammi di Bode piatti, di ampiezza $20 \log_{10} K_P$ dB per quanto riguarda il modulo e 0 per la fase. Questo significa che può modificare la pulsazione di attraversamento ma non il margine di fase.

**Azione integrale I**
La parte integrale è invece

$$C_I(s) = \frac{K_I}{s}$$

Il modulo è una retta con intercetta con le ordinate pari a $20 \log_{10} K_I$ dB e pendenza $-20$ dB/decade, e la fase una retta di ampiezza $-90°$. E' quindi rischioso da usare perché tende a far diventare il sistema $G(s)$ instabile, però offre il vantaggio di aggiungere un polo nell'origine e quindi di portare l'errore a regime a zero.

**Azione derivativa D**
L'azione derivativa è invece

$$C_D(s) = K_D s$$

In questo caso il modulo è una retta sempre con intercetta $20 \log_{10} K_D$ ma con pendenza 20 dB/decade, mentre la fase è una retta di altezza $90°$. La fase tende a far migliorare la stabilità, però la derivata del segnale amplifica il rumore in ingresso. E' necessario inoltre dire che un controllore così costruito risulta impossibile da progettare in pratica, perché avrebbe il modulo che cresce all'infinito. Quello che si fa è di aggiungere un polo in alta frequenza, facendo diventare il controllore

$$D_D(s) = \frac{K_D s}{1 + \tau_L s}$$

I pregi e difetti delle tre azioni sono schematizzati nella tabella che segue.

| Classificazione dei tre termini del controllore in base ai pro e contro. | | |
|---|---|---|
| Termine | Pro | Contro |
| 1. Proporzionale | • Permette di modificare $\omega_a$ di $G(s)$<br>• Semplice | • Non può modificare $m_\phi^G$ |
| 2. Integrale | • Elimina l'errore a regime<br>• Elimina disturbi costanti in ingresso | • Rende il sistema più instabile |
| 3. Derivativo | • Rende il sistema più stabile | • Amplifica rumori di misura |

## 4.2 Progettazione in frequenza del controllore PID

Possiamo riscrivere l'equazione del PID come

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} = \frac{K_I(1 + \frac{K_P}{K_I} s + \frac{K_D}{K_I} s^2)}{S} \tag{27}$$

e definendo $\tau_I = \frac{K_P}{K_I}$ il tempo dell'azione integrale ,$\tau_D = \frac{K_D}{K_P}$ il tempo dell'azione derivativa e nell'ipotesi che $\tau_I >> \tau_D$ [1] si ottiene

[1] Questa ipotesi è del tutto lecita, perché l'azione integrale ha appunto bisogno che l'integrale del segnale raggiunga valori significativi prima di intervenire. Mentre l'azione derivativa, soprattutto in un ingresso a gradino, agisce istantaneamente.

$$C(s) = \frac{K_I}{s}\big(1+\tau_I s+\tau_D\tau_I s^2\big)\approx \frac{K_I}{s}\big(1+\tau_I s\big)\big(1+\tau_D s\big) \tag{28}$$

Aggiungendo in fine il termine di non idealità $\tau_L$ della parte derivativa e nell'ulteriore ipotesi che $\tau_I >> \tau_D >> \tau_L$ [2]

$$C(s) \approx \frac{K_I(1+\tau_I s)(1+\tau_D s)}{s(1+\tau_L s)} \tag{29}$$

Perché il controllore dia i benefici desiderati, bisogna che sia soddisfatta la condizione $\tau_I >> \tau_D >> \frac{1}{\omega_a^{min}} >> \tau_L$ dove $\omega_a^{min}$ rappresenta la minima pulsazione di attraversamento richiesta nelle specifiche. Ciò comporta a scegliere

$$\boxed{\tau_L = \alpha\frac{1}{\omega_a^{min}} \quad , \qquad \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{10}} \tag{30}$$

Si definisce poi

$$a = \frac{1}{|P(j\omega_a)|} \qquad\qquad \theta = \arg\big[C(j\omega_a)\big]= m_\phi^G - 180° - \arg\big[P(j\omega_A)\big] \tag{31}$$

e riscrivendo la funzione di trasferimento del controllore nella variabile $j\omega$

$$C(j\omega_a) = K_P - j\frac{K_I}{\omega_a} + j\omega_a K_D = K_P + j\big(\omega_a K_D - \frac{K_I}{\omega_a}\big) \tag{32}$$

si ottiene

$$\Re\Big[C(j\omega_a)\Big] = a\cos\theta = K_P \tag{33}$$

$$\Im\Big[C(j\omega_a)\Big] = a\sin\theta = \omega_a K_D - \frac{K_I}{\omega_a} \tag{34}$$

L'equazione 34 mi fornisce un grado di libertà nella scelta dei parametri $K_P$ e $K_D$, tenendo però conto di soddisfare $\tau_I >> \tau_D$. Solitamente si sceglie

$$\tau_I = b\tau_D \quad , \qquad b \geq 4 \tag{35}$$

stando attenti a non scegliere $b$ troppo grande, altrimenti avrei tempi di reiezione del disturbo troppo lunghi. Rimane solo da ricavare $K_I$, per fare ciò basta risolvere l'equazione

$$K_I a\sin\theta = \omega_a\frac{K_P^2}{b} - \frac{K_I^2}{\omega_a} \tag{36}$$

con $K_I$ incognita. Risolvendola si otterranno due valori, ma a noi interessa solo quello positivo e quindi

$$K_I = \frac{a\omega_a}{2}\left[\sqrt{\sin^2\theta + \frac{4}{b}\cos^2\theta} - \sin\theta\right] \tag{37}$$

e allora

$$K_D = \frac{K_P^2}{bK_I} \tag{38}$$

In questo caso però, le specifiche richieste non sono fornite in frequenza, ma in termini temporali.

$$t_s \leq 30 \;\; \text{[s] rispetto a } \pm 1 \text{ [gradi] dal valore a regime} \tag{39}$$

$$S \leq 5 \;\; \text{[gradi]} \tag{40}$$

Il tempo di assestamento viene trasformato in un limite alla banda passante minima che il sistema deve garantire. Visto che si considera un sistema del secondo ordine, è possibile approssimare la banda passante con la frequenza di taglio $\omega_a$ e ottenere:

$$\omega_a^{min} = \frac{3}{\xi t_{s,max}} \tag{41}$$

[2] Anche questa ipotesi è lecita, visto che il polo si cerca di metterlo più in alta frequenza possibile.

dove $\xi$ rappresenta il coefficiente di smorzamento. Il vincolo sul massima sovraelongazione invece può essere convertito in una richiesta sul minimo margine di fase $m_\phi$ ammissibile. Per la conversione si possono allora utilizzare i due grafici riportati in figura 9. Per una spiegazione dettagliata su come si possono ricavare i due grafici è possibile consultare l'appendice A.

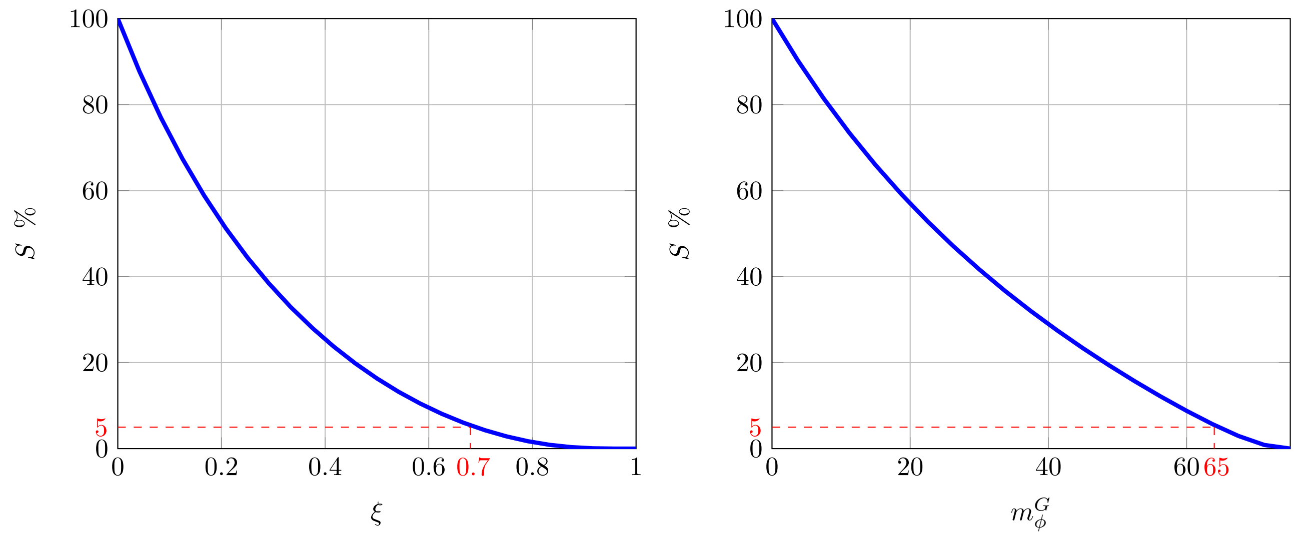



Figura 9: Relazione tra $m_\phi$ e $S$ e tra $\xi$ e $S$.

### 4.3 Progetto del controllore PID con desaturatore

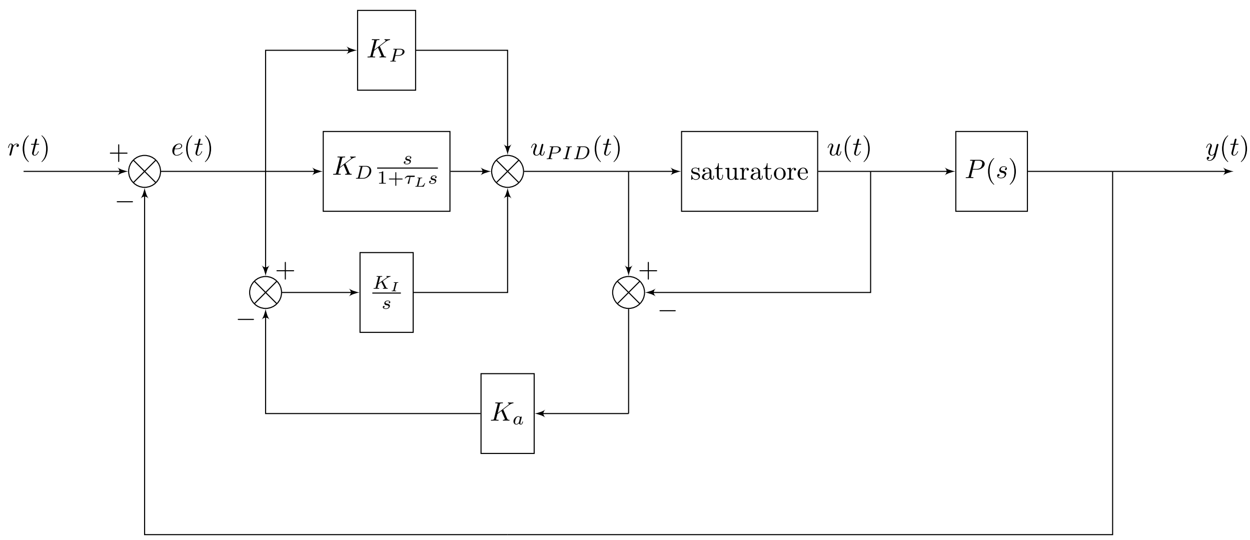



Figura 10: Schema a blocchi di un controllore PID con desaturatore

Il motore utilizzato in laboratorio è comandato con un segnale di tensione, tale segnale deve essere compreso tra un intervallo di valori pari a $[-5, 5]$ Volt. Ciò significa che è necessario saturare il segnale di controllo con un dispositivo denominato saturatore. Saturando l'ingresso al motore, l'errore $e(t)$ che comanda il controllore tende a diminuire più lentamente e il suo integrale sarà allora maggiore. Questo vuol dire che amplifica l'azione integrale durante la saturazione, rendendo il sistema più instabile. Per ovviare a questo introduco un secondo controllo in retroazione che interviene solo in caso di saturazione, lo schema di tale controllo è presente in Figura 10. Questa retroazione diminuisce il termine integrale per un fattore proporzionale alla differenza tra l'uscita del controllore e la vera uscita che riceve il motore. Rimane quindi da scegliere la variabile $K_a$. Con qualche passaggio algebrico è possibile scrivere la funzione di trasferimento tra l'uscita del controllore $U_{PID}(s)$ e l'errore $E(s)$ in presenza di saturazione come

$$U_{PID}(s) = \frac{K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}}{1 + \frac{K_a K_I}{s}} E(s) \tag{42}$$

Si vede dall'equazione 42 che il parametro $K_a$ introduce un filtro passa basso che tende a rallentare il controllo. Allora si definisce la costante temporale del desaturatore $\tau_a = K_a K_I$ e quello che si vuole è che $\tau_a < t_s$. Tipicamente si sceglie

$$\boxed{\tau_a \approx \frac{1}{3} t_s \qquad \Rightarrow \qquad K_a \approx \frac{1}{3 t_s K_I}} \tag{43}$$

# 5 Progettazione controllori in spazio di stato

In questa sessione si procede alla realizzazione di due tipi di controllori in spazio di stato.

## 5.1 Controllo in feedforward

La rappresentazione in spazio di stato permette di fare una retroazione di stato invece che una retroazione dell'uscita, ed è proprio quello che si fa nel *controllo in feedforward*.

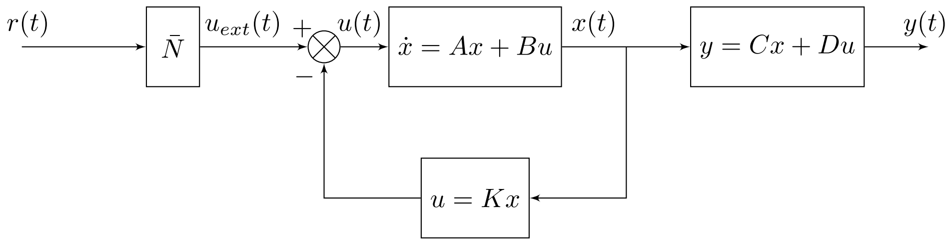



Figura 11: Schema a blocchi di un controllo in feedforward.

Con una retroazione dallo stato, il controllo, e quindi la matrice $K$, viene scelta piazzando i poli in catena chiusa del sistema. Ricordando che un processo può essere scritto in forma di stato come $P(s) = C(sI - A)^{-1}B$, si nota immediatamente che i poli corrispondono agli autovalori di $sI - A$. Nel sistema complessivo retroazionato, tali autovalori sono di $sI - A + BK$. Il controllo in feedforward, oltre al piazzamento dei poli permette di modificare anche un parametro scalare $\bar{N}$. Per comprendere lo scopo del parametro $\bar{N}$, si pensi di voler riuscire ad inseguire perfettamente un segnale di ingresso costante:

$$r(t) = cost \implies y_{DC} = cost$$
$$y_{DC} = P_{CC}(0)r = -C(A - BK)^{-1}Br$$

Per sistemi *SISO* $-C(A - BK)^{-1}B$ si riduce ad uno scalare $c$ per cui $y = cr$ e quindi per poter inseguire il riferimento si usa in blocco $\bar{N}$ che cancella il termine $c$. $\bar{N}$ sarà allora scelto nel seguente modo

$$\bar{N} = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1}B} \tag{44}$$

Un possibile problema di questo tipo di controllo è che se non si conoscono perfettamente i valori nominali delle matrici $(A, B, C, D)$, a regime non si riesce ad inseguire perfettamente il riferimento, perchè

$$y_{DC} = \bar{N}[-C(A - BK)^{-1}B]r_{DC} = \frac{C(A - BK)^{-1}B}{C_{nom}(A_{nom} - B_{nom}K)^{-1}B_{nom}} r_{DC} \neq r_{DC} \tag{45}$$

Un altro problema è se è presente un disturbo additivo $d(t)$ in ingresso al controllo, infatti risulterebbe

$$y_{DC} = \alpha r_{DC} + \beta d_{DC} \tag{46}$$

## 5.2 Controllo integrale

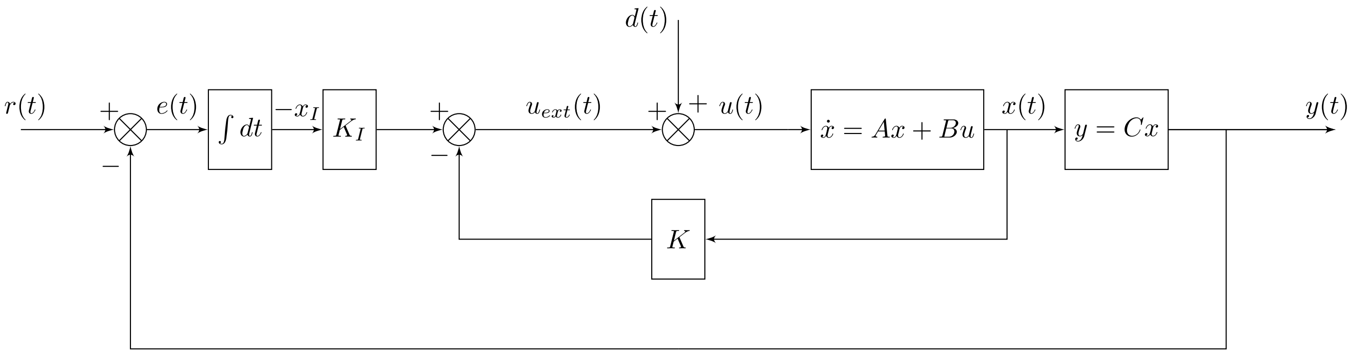



Figura 12: Schema a blocchi di un controllo integrale con rumore additivo $d(t)$

Il controllo integrale è un altro esempio di controllore che sfrutta la retroazione di stato. Prendiamo in considerazione un sistema scritto in forma di stato, dove per semplicità si considera nulla la matrice $D$ [3]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{47}$$

Al sistema viene aggiunto un nuovo stato

$$\dot{x}_I = e = y - r = Cx - r \tag{48}$$

ottenendo ancora un sistema dinamico. Si definisce allora un nuovo *stato aumentato* $z \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$z = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \tag{49}$$

e supposto che l'ingresso sia composto da un ingresso di controllo e un disturbo, come in figura 12, $u = u_{ext} + d$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u_z \\ y = C_z z \end{cases} \tag{50}$$

dove $u_z = \begin{bmatrix} u_{ext} \\ d \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $y_z = y$. Quindi esplicitando l'equazione 50 si ricava

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ B & B & 0 \end{bmatrix}}_{B_z} \begin{bmatrix} u_{ext} \\ d \\ r \end{bmatrix} \\ \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \end{cases} \tag{51}$$

Se si definisce $B_z = \begin{bmatrix} B_{ext} & B_{ext} & B_r \end{bmatrix}$ e si sostituisce $u_{ext} = -K_z z$ in 51 si ottiene

$$\dot{z} = (A_z - B_{ext} K_z) z = \begin{bmatrix} B_{ext} | B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ r \end{bmatrix}$$

Quindi, se $A_z - B_{ext} K_z$ è strettamente stabile e gli ingressi sono costanti, $r(t) = r_{DC}$ e $d(t) = d_{DC}$, si rileva che il sistema $z \to z_{cost}$ a $t \to \infty$.
Di conseguenza $\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} \to 0$ che implica $\dot{x}_I \to 0$. Ricordando che $\dot{x}_I = Cx - r = y - r$ si trova che $y \to r$ ottenendo, quindi, un inseguimento perfetto a regime $y \to r \to r_{DC}$. Se anche $A_z$ e $B_{ext}$ non sono note a priori la matrice $A_z - B_{ext} K_z$ rimane stabile per piccole incertezze, grazie alla *proprietà di continuità* degli autovalori di $A$ rispetto gli elementi di $A$.
Rimane ora da verificare che $A_z - B_{ext} K_z$ sia strettamente stabile, questo avviene quando la coppia $(A_z, B_{ext})$ è raggiungibile e quindi con il *criterio PBH* quando $\text{rank}[sI - A_z | B_{ext}] = n + 1$. Esplicitando

$$\begin{bmatrix} sI - A_z | B_{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -C & 0 \\ 0 & sI - A & B \end{bmatrix} \tag{52}$$

si divide la dimostrazione in due parti:

- Se $s \neq 0$, $\text{rank}[sI - A_z | B_{ext}] = n + 1 \iff \text{rank}[sI - A | B] = n \iff$ la coppia $(A, B)$ è raggiungibile [4].
- Se $s = 0$, la prima colonna è ininfluente al calcolo e può essere rimossa. Inoltre una eventuale moltiplicazione di righe o colonne per $-1$ così come lo scambio di righe, non cambia il rango, quindi la raggiungibilità per $s = 0$ è equivalente a verificare

  $$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}_{s=0} = n + 1$$

  Il rango di questa matrice è $n + 1$ se e solo se $s = 0$ non è uno zero di $P(s) = C(sI - A)^{-1} B$ [5]

[3] del tutto lecito visto che il sistema del motore ha appunto $D = 0$
[4] questa è una ipotesi necessaria per fare il controllo integrale.
[5] ulteriore ipotesi necessaria per il controllo integrale.

Per quanto riguarda la matrice di retroazione $K$, se le due ipotesi sono verificate, esiste tale che $A_z - B_z K_z$ ha autovalori arbitrari e quindi

$$u_{ext}(t) = -K_z z(t) = -\begin{bmatrix} K_I | K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = -K_I x_I(t) - Kx(t) \tag{53}$$

Si fa notare che il termine $-K_I x_I$ può essere scritto come $-K_I x_I(t) = -K_I \int y(t) - r(t)dt = K_I \int r(t) - y(t)dt$ e rappresentato graficamente in figura 12.
Questo modello risulta più lento rispetto al feed-forward perché l'errore integrale richiede un certo tempo prima che l'effeto sul controllo sia evidente.

# 6 Simulazione e esperienza in laboratorio

In questa sezione si confrontano i dati ottenuti con le simulazioni sul modello del motore e quelli raccolti nell'esperienza di laboratorio, con quanto previsto dalla teoria. In particolare si vogliono testare le differenze prima tra l'uso di un controllore PID con desaturatore, controllo in feed-forward e controllo integrale.

## 6.1 Simulazione controllore PID con desaturatore

Si verificano le prestazioni di un controllo PID con desaturazione in simulazione, utilizzando il modello del motore ricavato nella sezione 3.2; in particolare si utilizzano il codice *MATLAB* e i modelli *SIMULINK* riportati rispettivamente nelle appendici B.1 e C.1.
Le specifiche da rispettare sono:

$$
\begin{aligned}
&t_s \leq 0.30 \ \ [s] \qquad \text{rispetto a } \pm 1[gradi] \text{ del valore a regime} \\
&S \leq 5 \ \ [gradi] \\
&r = 10, 50, 120 \ \ [gradi] \\
&d = \pm 0.5 \ \ [Volt]
\end{aligned}
$$

dove $t_s$ è il tempo di assestamento, $S$ è la sovraelongazione in termini assoluti rispetto al valore di riferimento, e $r$ è l'ampiezza del gradino di ingresso. Si utilizza allora la progettazione in frequenza, come nella sezione 4.2 per il calcolo dei parametri PID e 4.3 per il calcolo del parametro di desaturazione. Ovviamente tale metodologia di progettazione prevede diversi gradi di libertà (la scelta di $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{10}]$ e $b \in [4, \infty)$) e introduce delle approssimazioni che rendono quindi necessaria ua taratura dei parametri. Infatti scegliendo $\alpha = 0.1$ e $b = 4$ si ottiene un tempo di salita $t_s = 0.022 \ \ [s]$ molto basso ma una sovraelongazione $S = 12\%$ per $r = 10$ e $d = 0.5$, ciò significa che il sistema è troppo veloce. Se invece il disturbo è pari a $d = -0.5$ si ha un tempo di salita $t_s = 1.08 \ \ [s]$ troppo lento e una sovraelongazione $S = 0.3\%$ sempre con $r = 10$.

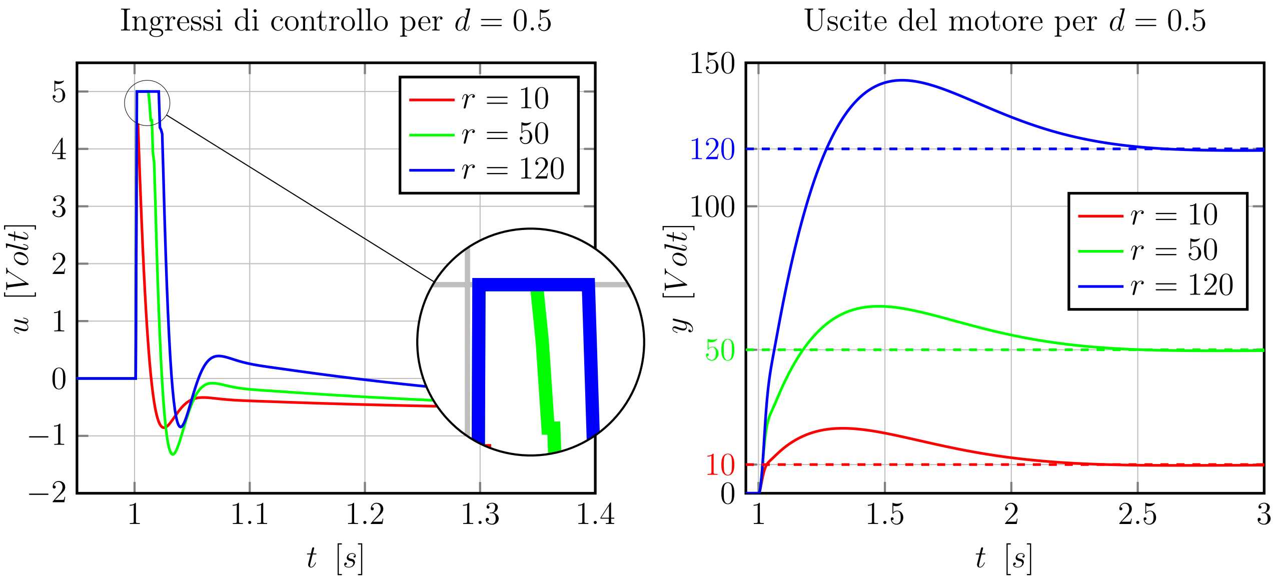



Figura 13: Ingressi di controllo e uscite del motore con controllore PID con desaturatore e rumore additivo $d = 0.5$.

In figura 13 sono riportati gli ingressi e le uscite del motore per $d = 0.5$, si nota che l'unico ingresso che non satura è quello per $r = 10$, mentre gli altri raggiungono la saturazione praticamente subito e per $r = 120$ vi rimane abbastanza allungo. Le uscite risultano comunque molto veloci ma con una sovraelongazione troppo elevata.

# A Progettazione in frequenza per un sistema del secondo ordine

Una funzione di trasferimento del secondo ordine, può essere scritta in maniera del tutto generale come

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{54}$$

dove il parametro $\xi$ è il *coefficiente si smorzamento* e $\omega_n$ è la *pulsazione naturale non smorzata*. I poli di tale funzione di trasferimento sono una coppia complessa coniugata e si trovano ad una distanza dall'origine pari a $\omega_n$ e a un angolo $\theta = \arcsin \xi$. Una specifica naturale per le prestazione del sistema in termini di risposta in frequenza è la *larghezza di banda*, definita come la frequenza massima alla quale il sistema segue un ingresso sinusoidale in modo soddisfacente. Altro parametro importante è il valore massimo del modulo della risposta in frequenza, denominato come picco di risonanza $S$. La larghezza di banda è una misura della prontezza di risposta e come tale corrisponde ad altri parametri, quali il tempo di salita e il tempo al picco nel dominio del tempo.

## A.1 Sovraelongazione e tempo al picco

La massima sovraelongazione corrisponde al punto dove la derivata della risposta in frequenza del modulo si annulla. L'andamento nel tempo della risposta al gradino $H(s)/s$ si ottiene grazie alla trasformata di Laplace inversa

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t}\Big(\cos\omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t\Big) \tag{55}$$

dove $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}$ e $\sigma = \xi\omega_n$. Utilizzando delle identità geometriche è possibile riscrivere l'equazione 55 in maniera più compatta

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t}\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega_d^2}}\cos(\omega_d t + \beta) \tag{56}$$

con $\beta = \arctan(\frac{\sigma}{\omega_d})$. Resta quindi da calcolare la sua derivata e porla pari a zero.

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \sigma e^{-\sigma t}\Big(\cos\omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t\Big) - e^{-\sigma t}(-\omega_d\sin\omega_d t + \sigma\cos\omega_d t) = 0\\ &= e^{-\sigma t}\Big(\frac{\sigma^2}{\omega_d}\sin\omega_d t + \omega_d\sin\omega_d t\Big) = 0\end{aligned}$$

Questo si verifica quando $\sin\omega_d t = 0$, dunque il tempo al picco $t_p$ risulta

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{57}$$

Sostituendo 57 dentro l'espressione di $y(t)$ si ottiene allora

$$t(t_p) = 1 + S = 1 - e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}\Big(\cos\pi + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\pi\Big) = 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}}$$

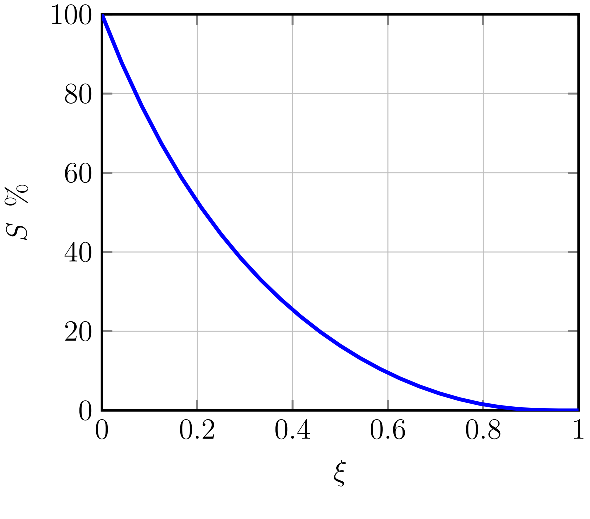



Figura 14: Relazione tra massima sovraelongazione $S$ e coefficiente di smorzamento $\xi$.

Si ha dunque la seguente relazione, che lega la massima sovraelongazione al parametro $\xi$, a qui corrisponde il grafico di figura 14.

$$\boxed{S = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \qquad 0 \leq \xi < 1} \tag{58}$$

## A.2 Sovraelongazione e margine di fase

Tenendo sempre in considerazione la funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine, descritta nell'equazione 54, è possibile mostrare che la relazione tra il margine di fase $m_\phi^G$ e il coefficiente di smorzamento $\xi$ è

$$m_\phi^G = \arctan\left[\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}}\right] \tag{59}$$

A questo punto è sufficiente invertire l'equazione 59 e esplicitare la massima sovraelongazione $S$ in funzione del margine di fase $m_\phi^G$ utilizzando il risultato ottenuto prima, nella formula 58, ottenendo quindi il seguente risultato, qui proposto solo in via grafica.

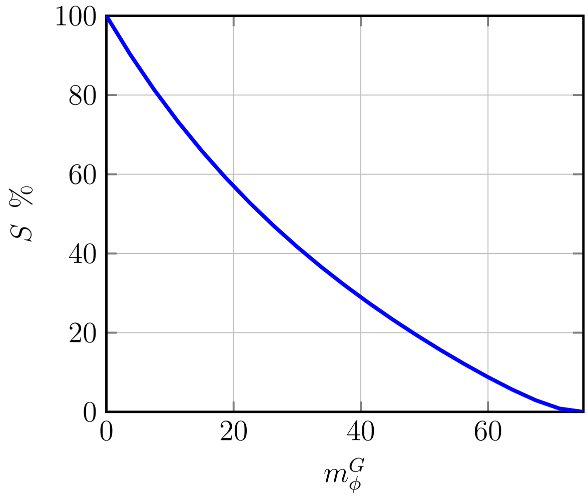



Figura 15: Relazione tra massima sovraelongazione $S$ e margine di fase $m_\phi$.

# B Codice MATLAB utilizzato

## B.1 controllore_PID.m

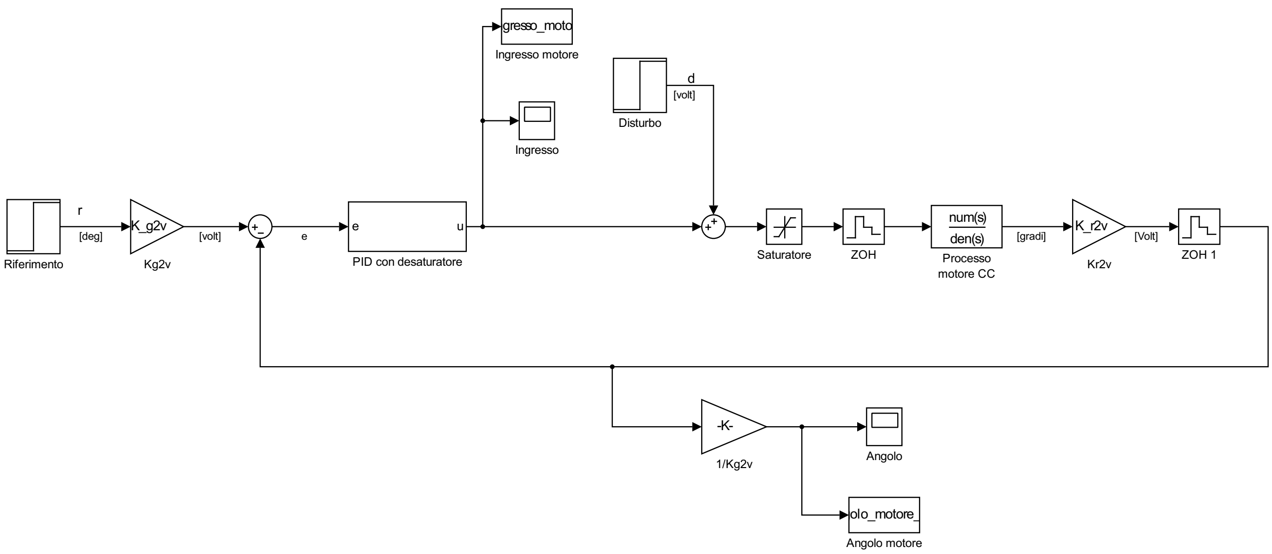
```
%% pulisci workspace
clc; clear all; close all;

%% specifiche progetto
t_s_max = 0.3;                % [s] rispetto a +-1%r
S = 5;                        % percento

%% funzione di trasferimento del motoriduttore
P = tf(375, [1 40 0]);        % processo P
[numP, denP] = tfdata(P, 'v'); % estrae numeratore e denominatore

%% calcolo parametri PID con desaturatore
xi = 0.7;                     % da figura 9 con S=5%
m_phi_G = 65;                 % da figura 9 con S=5%

alpha = 0.1;                  % alpha appartiene a [1/3 , 1/10]
b = 4;                        % b appartiene a [4, inf)

w_a_min = 3 / (xi * t_s_max); % pulsazione di attraversamento minima
tau_L = alpha / w_a_min;      % termine non idealita' parte derivativa
[mag_w_a, angle_w_a] = bode(P, w_a_min); % modulo e fase del processo alla
                                         % minima pulsazione di
                                         % attraversamento
a = 1 / mag_w_a;
theta = m_phi_G - 180 - angle_w_a;

K_p = a * cos(theta);         % guadagno proporzionale
K_i = ((a * w_a_min) / 2) * (sqrt((sin(theta))^2 + ...
    (4/b)*(cos(theta))^2) - sin(theta)); % guadagno integrale
K_d = K_p^2 / (b * K_i);      % guadagno derivativo
K_a = 1 / (3 * t_s_max * K_i); % guadagno desaturatore

%% ritaratura parametri PID
K_p = K_p * 9
K_i = K_i * 10
K_d = K_d * 4.5

%% simulazione
step_time_input = 1;          % [s] step time dell'ingresso a gradino
simulation_time = 5;          % [s] tempo di simulazione
K_g2v = 0.0284;               % costante di conversione da gradi a volt
K_r2v = 1.63;                 % costante di conversione da gradi a volt
                              % all'uscita del motore
r = 10;                       % ampiezza segnale di riferimento
d = 0.5;                      % ampiezza disturbo in ingresso

sim('modello_motore_PID_desaturatore'); % simulazione SIMULINK

%% verifica prestazioni
% calcolo tempo di salita
numero_campioni = simulation_time * (1 / 0.001);
for i = 1 : 1 : numero_campioni
    if angolo_motore_PID(i) >= 0.1 * r
        t10 = i;
        break;
    end
end
for i = 1 : 1 : numero_campioni
    if angolo_motore_PID(i) >= 0.9 * r
        t90 = i;
        break;
    end
end
tr = (t90 - t10) * 0.001

% massima sovraelongazione
S = 100 * ((max(angolo_motore_PID(:)) - r) / r);
S = r * (S / 100)

% tempo di assestamento
ts = -1;
for i = 1 : 1 : numero_campioni
    if ((angolo_motore_PID(i) >= (r + 1)) || ...
            (angolo_motore_PID(i) <= (r - 1)))
        ts = i;
    end
end
ts = ts * 0.001 - step_time_input
```

# C Modelli SIMULINK utilizzati

In questa appendice si riportano gli schemi *SIMULINK* utilizzati, compresi dei relativi sottosistemi.

## C.1 modello_PID.m

Questa schema rappresenta la simulazione del motore elettrico CC controllato da un PID con desaturatore; lo schema del PID è riportato sotto.




### PID con desaturatore