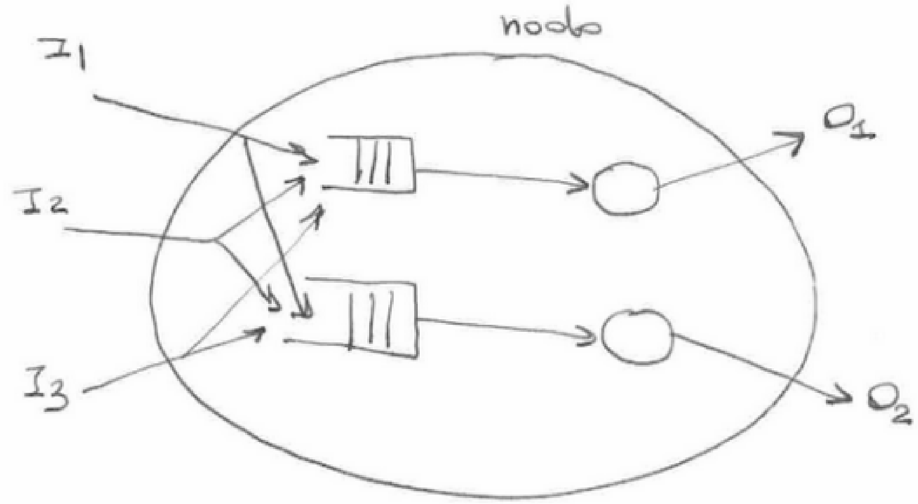
SISTEMI A CODA
La teoria delle code trova applicazione in vari ambiti ed e' fondamentale per il progetto e l'analisi delle reti di comunicazione



I nodi di una rete sono un sistema con piu' ingressi e piu' uscite. Sono dotati di:

- un certo numero di **servitori**
- dei **buffer** in cui vengono immagazzinati in attesa di essere serviti e smaltiti

Un utente o un pacchetto arriva nel sistema per ottenere un servizio, eventualmente aspetta in cosa e quando viene servito parte.
Arrivi e servizi sono aleatori (non deterministici) e seguono una certa distribuzione; sono quindi aleatori anche i tempi di interarrivo, i tempi di permanenza in coda/sistema e i tempi di latenza.
I sistemi a coda sono modellabili come **catene di Markov** con stato al tempo *t X(t) = j* e la **probabilita' di transizione** dello stato *i* allo stato *j* si indica con:

$$p_{ij}(s, t) = P\{X(t) = j \mid X(s) = i\};\ t > s$$

Lo stato rappresenta la situazione in cui si trova il sistema rispetto a variabili prese come riferimento (e.g: numero di pacchetti nel sistema) e la sua evoluzione descritta con una sequenza di salti fra gli stessi.

In una catena di Markov (tempo continuo) i tempi di permanenza nei singoli stati seguono una distribuzione esponenziale.

PDF: $f_{\tau i}(t) = f_{\tau i}(0)e^{-f_{\tau i}(0)t}$

CDF: $F_{\tau i}(t) = 1 - e^{-f_{\tau i}(0)t}$

dove t_i e' il tempo di permanenza nello stato *i*.

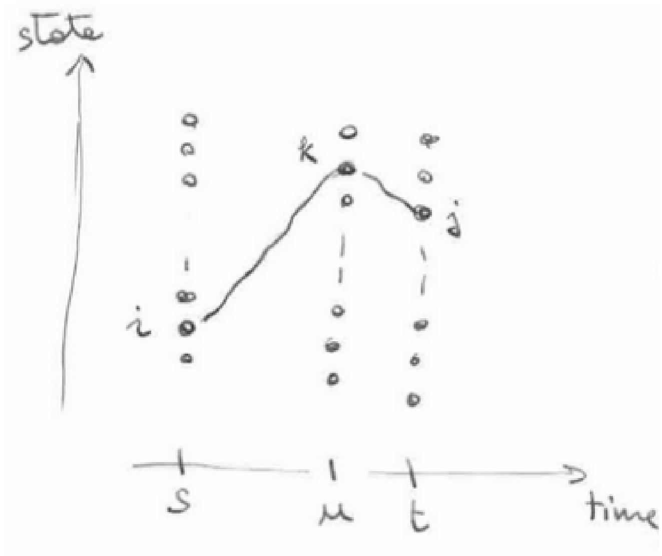
Evoluzione dello stato

Per comprendere l'evoluzione dello stato dal tempo *s* al tempo *t* > *s* bisogna considerare la probabilita' di transizione fra gli stati gia' definita:

$$p_{ij}(s,\ t)\ =\ P\{X(t)\ =\ j\mid X(s)\ =\ i\};\ \ t\ >\ s$$

Consideriamo un istante di tempo intermedio *u*, compreso tra *s* e *t*, e valutiamo come puo' evolvere lo stato passando per *u*; considerando anche lo stato *k* come lo stato all'istante *u*. La nuova probabilita' di transizione e':

$$p_{ij}(s,\ t)\ = \Sigma_k P\{X(t)\ =\ j,\ X(u)\ =\ k\mid X(s)\ =\ i\}$$



Da

$$P\{A,\ B\mid C\}\ =\ P\{A\mid B,\ C\}\, P\{B\mid D\}$$

si ha che:

$$p_{ij}(s,\ t)\ = \Sigma_k P\{X(t)\ =\ j\mid X(u)\ =\ k\ ,\ X(s)\ =\ i\}\, P\{X(u)\ =\ k\mid X(s)\ =\ i\}$$

Dato che si parla di una catena di Markov, cioe’ di un sistema senza memoria, lo stato dipende dal tempo precedente, non da quelli ancora piu’ antecedenti, percio’:

$$p_{ij}(s,\ t)\ = \Sigma_k P\{X(t)\ =\ j\mid X(u)\ =\ k\}\, P\{X(u)\ =\ k\mid X(s)\ =\ i\}$$

A questo punto si puo’ esprimere questa equazione in termini di probabilita’ di transizione:

$$p_{ij}(s,\ t)\ =\ \Sigma_k\, p_{ij}(s,\ u)\, p_{kj}(u,\ t)$$

Questa equazione prende il nome di **equazione di Chapman-Kolmoogorov (C-K)** e da essa si puo’ dare una descrizione matriciale definendo per ogni coppia di istanti (s, t) la **matrice di probabilita’ di transizione**:

$$M(s,\ t)\ =\ M(s,\ u)\, M(u,\ t)$$

Nel caso tempo discreto, gli istanti temporali sono multipli di Δt. Al fine di valutare la velocita’ di transizione fra stati si considera il caso in cui *u* sia un Δt successivo a *s* (equazione di C-K all’indietro)

CATENE DI MARKOV OMOGENEE

Una catena di Markov si dice **omogenea** quando le probabilità di transizione da uno stato all'altro non dipendono dal tempo.

$$p_{ij}(s, s + t) = p'_{ij}(t) \;->\; M(s, s + t) = M'(t)$$

$$q_{ij}(t) = q'_{ij} \;->\; Q(t) = Q'$$

L'equazione differenziale sulla probabilita' di stato diventa:

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q'$$

PROCESSI DI NASCITA E MORTE

Consideriamo un sistema a coda omogeneo in cui lo stato rappresenta, ad esempio, un numero di pacchetti. Vale la **condizione di adiacenza**, ovvero che non ci possono essere due nascite o due morti contemporaneamente ($q_{kj} = 0 \; \forall |k - j| > 1$). In particolare lo stato *k* puo' variare in questo modo:

- **nascita**: $k + 1$
- **permanenza**: k
- **morte**: $k - 1$

La matrice dei tassi di transizione permette di descrivere il:

- **tasso di nascita**: $\lambda_k = q_{k, k+1}$
- **tasso di morte**: $\mu_k = q_{k, k-1}$

Processi di sole nascite (POISSON)

Dati $\lambda_k = \lambda$ e $\mu_k = 0 \; \forall k$, si ottiene una **poissoniana**:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

STEADY STATE

Le equazioni C-K consentono di studiare i transitori, ma puo' essere complicato risolvere. Se $P_k(t)$ tende a stabilizzarsi all'aumentare di *t* allora si individuano le **soluzioni in equilibrio** in regime asintotico ($t \to +\infty$)

NOTAZIONE DI KENDALL

La notazione di Kendall denota le principali caratteristiche dei sistemi a coda. Formato (campi tra parentesi opzionali):

$$A/B/C \; [/Y/N/Z]$$

A: distribuzione dei tempi di interarrivo
B: disciplina del servizio
C: numero di servitori
Y: capacita' di sistema (i.i. numero massimo di utenti)
N: cardinalita' potenziale della popolazione
Z: disciplina della coda

A e B vengono specificati nelle lettere

- **M** (Markoviano): se la distribuzione e' esponenziale

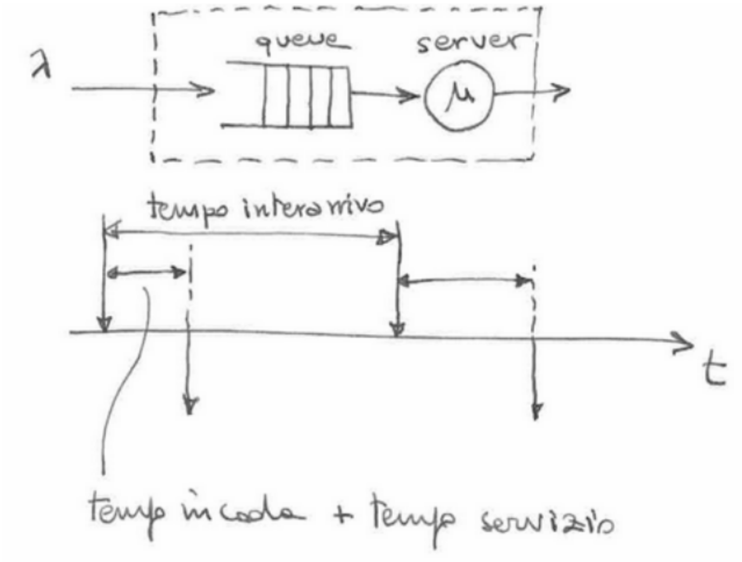
- **G** (generale): e si specifica la PDF
- **D** (deterministico): se il sistema non e' aleatoria

Se non specificati:
- **Y** → +∞
- **N** → +∞
- **Z** → FIFO

esempio: M/M/1 → Markoviano/Markoviano/1 servitore

STUDIO DEI SISTEMI A CODA

Durante lo studio e la caratterizzazione dei sistemi a coda ci focalizzeremo su quelli con popolazione infinita, in cui il servitore può essere singolo o multiplo e in cui la lunghezza della coda e' finita o infinita.



Un parametro fondamentale per la progettazione dei sistemi a coda e' il **fattore di utilizzo** ρ

$$\rho = \frac{tasso\ ingresso}{massimo\ tasso\ smaltimento}$$

A regime stazionario (steady state):

$$\rho = \underbrace{E\{\lambda\}}_{ritmo\ arrivi} \underbrace{E\{Tx\}}_{tempo\ servizio}$$

Ci dobbiamo aspettare che $\rho \leq 1$ perché in caso contrario il sistema a coda non riuscirebbe a smaltire tutte le richieste arrivate.

Se la disciplina di servizio e' Markoviana significa che il tempo fra due servizi ha distribuzione esponenziale con parametro μ:

$$fT_x(\xi) = \mu e^{-\mu\xi}$$

I parametri caratteristici di un sistema a coda sono:
- **descrizione degli arrivi** (distribuzione, λ)

- **descrizione servizi** (distribuzione, μ)
- **numero di servitori** (c)

Da questi parametri si analizzano una serie di altri elementi caratteristici a regime:
- **probabilita' di stato** P_k
- **numero medio di pacchetti nel sistema** $L_s = E\{k\}$
- **numero medio di pacchetti in coda** $L_q = E\{q\}$
- **tempo medio di attesa nel sistema** $W_s = E\{T_s\}$
- **tempo medio attesa in coda** $W_q = E\{T_q\}$

che a loro volta, in base al loro valore minimo/massimo determinato, serviranno per progettare io parametri caratteristici.

SISTEMA M/M/C
Il numero dei servitori e' *c* per cui il tasso di servizio puo' arrivare fino a $c\mu$.

$$\lambda_k = \lambda$$
$$\mu k = min\{k\mu, c\mu\}$$