

Symétrie de jauge non-commutative et diffusions pseudo-unitaires

Nicolas Gilliers

Sorbonne Université, Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation (LPSM)

Première partie I

Champs d'holonomies non commutatifs

Champs de Yang–Mills et champ maître

Symétries



Interactions

$U(1)$



Electromagnétique

$SU(2)$



Electro-faible

$SU(3)$



Forte

géométrie

Théorie de Yang–Mills

Holonomie

- Σ plan ou variété riemannienne, P un G -fibré principal,
- $P = \Sigma \times G$, $w \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ une connexion.
- $m \in \Sigma$, $\gamma \in \text{Loops}(m)$
- Transport parallèle : $//(\gamma, \omega) : P_m \rightarrow P_m$

$$\omega(\dot{q}_t) = 0, \quad q_t \in P_{\gamma_t}, \quad //(\gamma, \omega)(q_0) = q_1$$

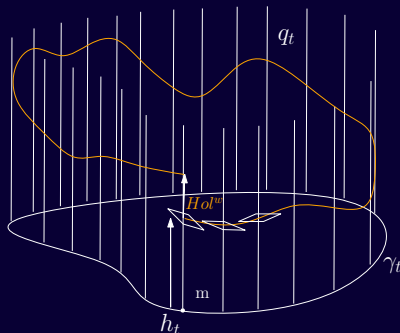
$$q_t = (\gamma_t, h_t)$$

$$\text{Hol}^w(\gamma) = h_1 h_0^{-1} \in G$$

$$\frac{d}{dt} h_t(x) = -\omega_{\gamma_t}(\dot{\gamma}_t)(h_t(x))$$

 Kobayashi–Nomizu

 Bleecker



boucle \longrightarrow élément du groupe

Que serait une connexion aléatoire ?

- L'espace affine de toutes les connexions sur le fibré P : espace des configurations de la théorie de Yang Mills,
- Quantifier \rightarrow choisir une amplitude pour chacune de ces configurations.

$$\mu^{YM}(d\omega) = \exp(S^{YM}(\omega)) d\omega = \exp\left(\int_{\Sigma} \|\Omega^{\omega}\|_m^2 dm\right) d\omega$$

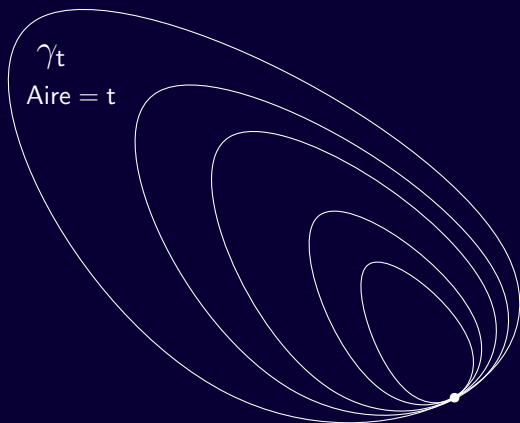
Que serait une connexion aléatoire ?

- L'espace affine de toutes les connexions sur le fibré P : espace des configurations de la théorie de Yang Mills,
- Quantifier \rightarrow choisir une amplitude pour chacune de ces configurations.

$$\mu^{YM}(d\omega) = \exp(S^{YM}(\omega)) d\omega = \exp\left(\int_{\Sigma} \|\Omega^{\omega}\|_m^2 dm\right) d\omega$$

$$\begin{aligned} \text{Courbure de } \omega : \Omega^{\omega} &= d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g}) \\ &\in \Lambda^2(\Sigma, \text{ad}(P)) \end{aligned}$$

- $\Sigma = \text{plan}$



- Le processus $(\text{Hol}(\gamma_t))_{t \geq 0}$ est un **mouvement brownien** sur le groupe, **invariant par conjugaison**.
- Si $\mathring{\ell}_1 \cap \mathring{\ell}_2 = \emptyset$, $\text{Hol}(\ell_1)$ est **indépendant** de $\text{Hol}(\ell_2)$.

Champ maître généralisé

Un champ d'holonomie, avec G pour groupe de structure, est une collection h_ℓ de variables aléatoires à valeurs dans G .

- *Multiplicativité* : $h_{\ell_1 \ell_2} = h_{\ell_1} h_{\ell_2}$
- *Invariance de jauge* : Pour tout $g \in G$, $gh_\ell g^{-1} \stackrel{d}{=} h_\ell$
- *Invariance par homeomorphismes préservant l'aire* :

$$h_\ell \stackrel{d}{=} h_{\phi(\ell)} \text{ si } \phi \text{ préserve l'aire.}$$

- *Les holonomies associées à des boucles délimitant des domaines disjoints sont indépendantes.*

Champ maître généralisé

《 Processus de Lévy indicé par des boucles 》

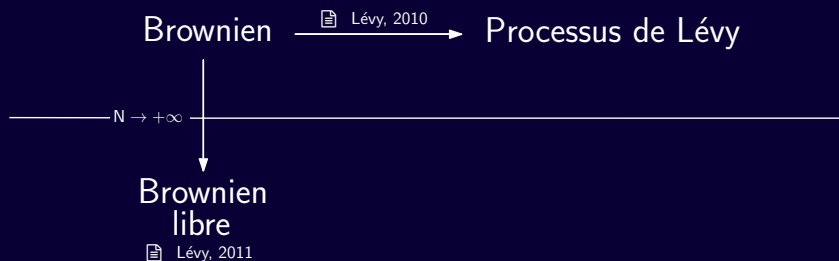
Un champ d'holonomie, avec G pour groupe de structure, est une collection h_ℓ de variables aléatoires à valeurs dans G .

- *Multiplicativité* : $h_{\ell_1 \ell_2} = h_{\ell_1} h_{\ell_2}$
- *Invariance de jauge* : Pour tout $g \in G$, $gh_\ell g^{-1} \stackrel{d}{=} h_\ell$
- *Invariance par homeomorphismes préservant l'aire* :

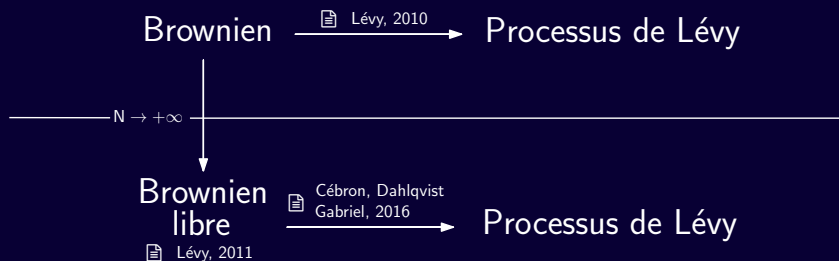
$$h_\ell \stackrel{d}{=} h_{\phi(\ell)} \text{ si } \phi \text{ préserve l'aire.}$$

- *Les holonomies associées à des boucles délimitant des domaines disjoints sont indépendantes.*

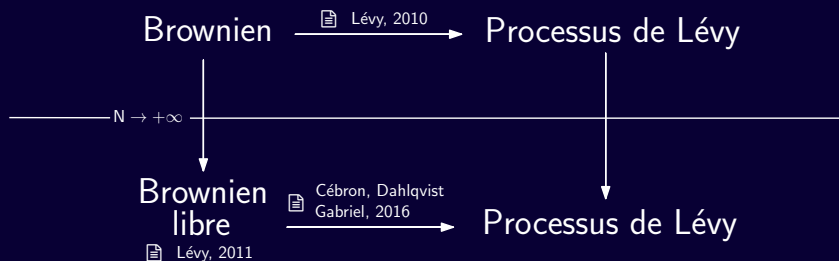
Quelle généralisation ?



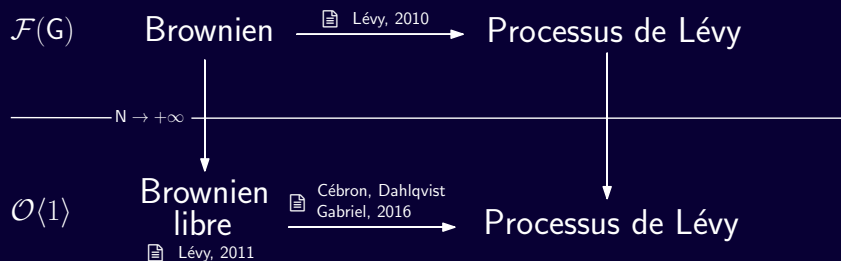
Quelle généralisation ?



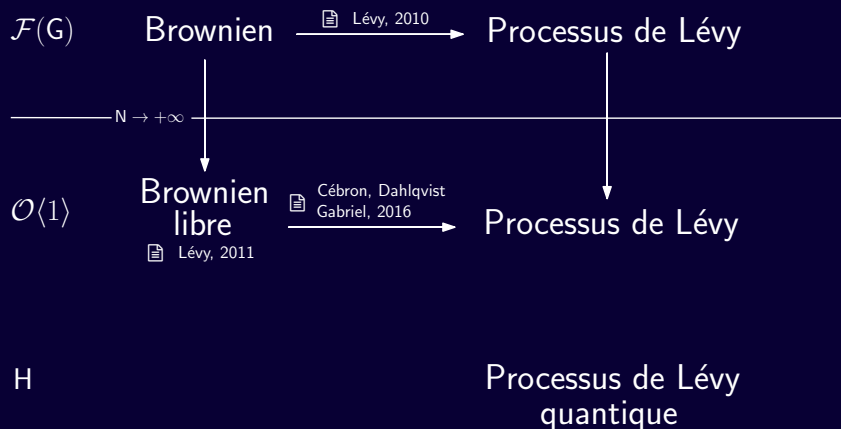
Quelle généralisation ?



Quelle généralisation ?



Quelle généralisation ?



Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.
- **Multiplicativité** : $f(h_{\ell_1 \ell_2}) = f(h_{\ell_1} h_{\ell_2})$, $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.
- **Multiplicativité** : $f(h_{\ell_1 \ell_2}) = f(h_{\ell_1} h_{\ell_2})$, $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$
- **Invariance de jauge** :

$$f(Zh_{\ell_1}Z^{-1}, \dots, Zh_{\ell_n}Z^{-1}) \stackrel{(d)}{=} f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

$$(\tau_Z \otimes \mathbb{E}) \circ (\text{id}_{\mathcal{F}(G)} \sqcup H_{\ell_1, \dots, \ell_n})) \circ \Omega_c^n = \mathbb{E} \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n}.$$

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.
- **Multiplicativité** : $f(h_{\ell_1 \ell_2}) = f(h_{\ell_1} h_{\ell_2})$, $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$
- **Invariance de jauge** :

$$f(Zh_{\ell_1}Z^{-1}, \dots, Zh_{\ell_n}Z^{-1}) \stackrel{(d)}{=} f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

$$(\tau_Z \otimes \mathbb{E}) \circ (\text{id}_{\mathcal{F}(G)} \sqcup H_{\ell_1, \dots, \ell_n})) \circ \Omega_c^n = \mathbb{E} \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n}.$$

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.
- **Multiplicativité** : $f(h_{\ell_1 \ell_2}) = f(h_{\ell_1} h_{\ell_2})$, $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$
- **Invariance de jauge** :

$$f(Zh_{\ell_1}Z^{-1}, \dots, Zh_{\ell_n}Z^{-1}) \stackrel{(d)}{=} f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

$$(\tau_Z \otimes \mathbb{E}) \circ (\text{id}_{\mathcal{F}(G)} \sqcup H_{\ell_1, \dots, \ell_n})) \circ \Omega_c^n = \mathbb{E} \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n}.$$

- **Indépendance** : Si ℓ_1 and ℓ_2 englobent des domaines disjoints, alors

H_{ℓ_1} et H_{ℓ_2} sont indépendants.

Renversement des flèches

$$H_\ell(f) = f(h_\ell), \quad H_{\ell_1, \dots, \ell_n}(f) = f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

- H_ℓ est un **homomorphisme** de $\mathcal{F}(G)$ dans un espace de variable aléatoires scalaires.
- **Multiplicativité** : $f(h_{\ell_1 \ell_2}) = f(h_{\ell_1} h_{\ell_2})$, $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$
- **Invariance de jauge** :

$$f(Zh_{\ell_1}Z^{-1}, \dots, Zh_{\ell_n}Z^{-1}) \stackrel{(d)}{=} f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$$

$$(\tau_Z \otimes \mathbb{E}) \circ (\text{id}_{\mathcal{F}(G)} \sqcup H_{\ell_1, \dots, \ell_n})) \circ \Omega_c^n = \mathbb{E} \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n}.$$

- **Indépendance** : Si ℓ_1 and ℓ_2 englobent des domaines disjoints, alors

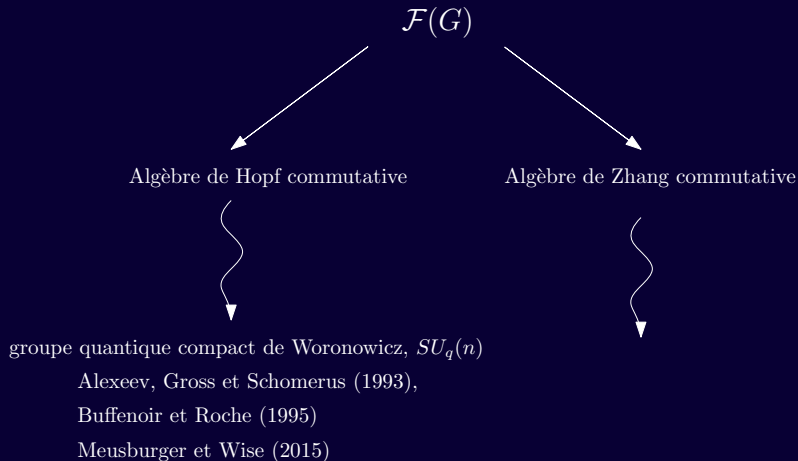
H_{ℓ_1} et H_{ℓ_2} sont indépendants.

- **Invariance par homéomorphismes préservant l'aire**

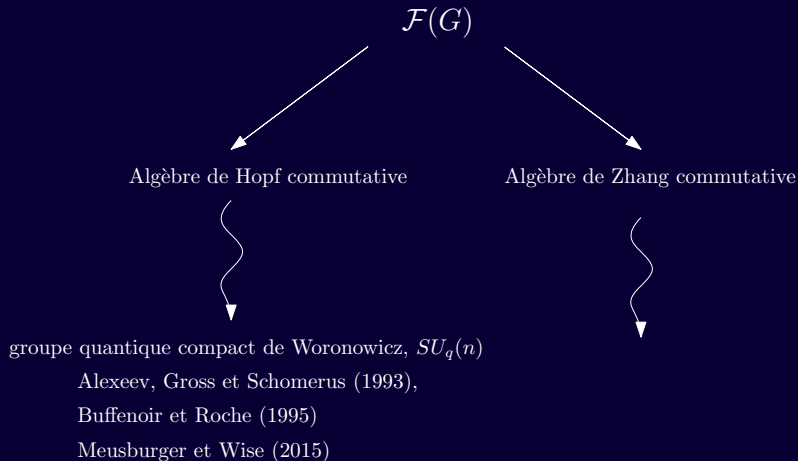
$$\mathbb{E} \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n} = \mathbb{E} \circ H_{\phi(\ell_1), \dots, \phi(\ell_n)}.$$

Symétrie de jauge et algèbres de Zhang

Algèbres de Zhang versus algèbres de Hopf



Algèbres de Zhang versus algèbres de Hopf



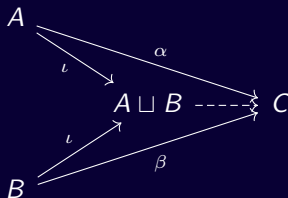
Catégories algébriques

Dans quel univers vivent les symétries ?

Une catégorie algébrique \mathcal{C} possède un **objet initial** k :

Pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\exists!$ $\eta : k \rightarrow A$.

et un **co-produit** satisfaisant à la propriété universelle :



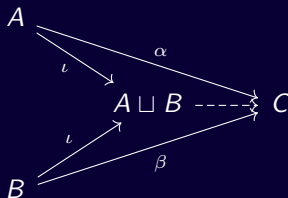
Catégories algébriques

Dans quel univers vivent les symétries ?

Une catégorie algébrique \mathcal{C} possède un **objet initial** k :

Pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\exists!$ $\eta : k \rightarrow A$.

et un **co-produit** satisfaisant à la propriété universelle :



- Set munie de l'union disjointe, $k = \emptyset$,
- ComAlg munie du produit tensoriel, $k = \mathbb{C}$,
- Alg munie du produit libre d'algèbre, $k = \mathbb{C}$.

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

1. H est un objet de \mathcal{C} ,

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

1. H est un objet de \mathcal{C} ,
2. (Coproduit) $\Delta : H \rightarrow H \sqcup H$, $(\Delta \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta = (\text{id}_H \sqcup \Delta) \circ \Delta$

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

1. H est un objet de \mathcal{C} ,
2. (Coproduct) $\Delta : H \rightarrow H \sqcup H$, $(\Delta \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta = (\text{id}_H \sqcup \Delta) \circ \Delta$
3. (Counité) $\epsilon : H \rightarrow k$, $(\epsilon \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta = \text{id}_H = (\text{id}_H \sqcup \epsilon) \circ \Delta$

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

1. H est un objet de \mathcal{C} ,
2. (Coproduct) $\Delta : H \rightarrow H \sqcup H$, $(\Delta \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta = (\text{id}_H \sqcup \Delta) \circ \Delta$
3. (Counité) $\epsilon : H \rightarrow k$, $(\epsilon \dot{\sqcup} \text{id}_H) \circ \Delta = \text{id}_H = (\text{id}_H \dot{\sqcup} \epsilon) \circ \Delta$
4. (Antipode) $S : H \rightarrow H$, $(S \dot{\sqcup} \text{id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = (\text{id}_H \dot{\sqcup} S) \circ \Delta$,

Algèbre de Zhang

Quelle est la structure algébrique des symétries?

Une algèbre de Zhang de \mathcal{C} est un quadruplet (H, Δ, ϵ, S) avec

1. H est un objet de \mathcal{C} ,
2. (Coproduit) $\Delta : H \rightarrow H \sqcup H$, $(\Delta \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta = (\text{id}_H \sqcup \Delta) \circ \Delta$
3. (Counité) $\epsilon : H \rightarrow k$, $(\epsilon \dot{\sqcup} \text{id}_H) \circ \Delta = \text{id}_H = (\text{id}_H \dot{\sqcup} \epsilon) \circ \Delta$
4. (Antipode) $S : H \rightarrow H$, $(S \dot{\sqcup} \text{id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = (\text{id}_H \dot{\sqcup} S) \circ \Delta$,

◦ L'algèbre des fonctions sur un groupe, dans ComAlg^*

$$f_1 f_2(g) = f_1(g) f_2(g), \quad \Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2), \quad S(f)(g) = f(g^{-1}).$$

◦ Les groupes duaux $\mathcal{O}\langle n \rangle$ de Voiculescu, dans Alg^* ,

$$\mathcal{O}\langle n \rangle = \langle u_{ij}, u_{ij}^*, 1 \leq i, j \leq n \mid \sum_{k=1}^n u_{ik} u_{jk}^* = \delta_{ij}, \sum_{k=1}^n u_{ik}^* u_{kj} = \delta_{ij} \rangle$$

$$\Delta(u_{ij}) = u_{ik} u_{ki}, \quad S(u_{ij}) = u_{ji}^*.$$

Calcul graphique à la Hopf

$$\Delta = \text{Y-junction with one input from the bottom and two outputs to the top-left and top-right}$$

$$\mu = \text{Y-junction with two inputs from the bottom-left and bottom-right, and one output to the top}$$

$$S = \text{vertical line with a small horizontal tick mark on the right side}$$

$$\varepsilon = \text{vertical line with a dot at the top}$$

$$\eta = \text{vertical line with a dot at the bottom}$$

Calcul graphique à la Hopf

$$\Delta = \text{Y-junction (black lines)}$$

$$\mu = \text{Y-junction (blue lines)}$$

$$S = \text{vertical line with a slash}$$

$$\varepsilon = \text{vertical line with a white dot at the top}$$

$$\eta = \text{vertical line with a blue dot at the bottom}$$

Calcul graphique à la Hopf

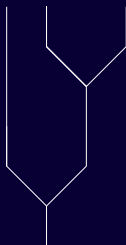
$$\Delta = \text{Y-junction}$$

$$\mu = \text{X-junction (orange)}$$

$$S = \text{vertical line with a slash}$$

$$\varepsilon = \text{vertical line with a white dot at the top}$$

$$\eta = \text{vertical line with an orange dot at the bottom}$$



Calcul graphique à la Hopf

$$\Delta = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \quad \mu = \begin{array}{c} | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad S = \begin{array}{c} | \\ \hline | \end{array} \quad \varepsilon = \begin{array}{c} \bullet \\ | \end{array} \quad \eta = \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array} \end{array}$$

Multiplication de variables aléatoires

$\alpha \times \beta = (\alpha \dot{\sqcup} \beta) \circ \Delta$ est un morphisme de la catégorie

Multiplication de variables aléatoires

$\rangle\rangle\rangle \alpha \times \beta = (\alpha \dot{\sqcup} \beta) \circ \Delta$ est un morphisme de la catégorie $\langle\langle\langle$

Multiplication de variables aléatoires

$\rangle\rangle\rangle \alpha \times \beta = (\alpha \dot{\sqcup} \beta) \circ \Delta$ est un morphisme de la catégorie $\langle\langle\langle$

$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, A), \times)$ est un groupe.

Multiplication de variables aléatoires

$\rangle\rangle\rangle \alpha \times \beta = (\alpha \dot{\sqcup} \beta) \circ \Delta$ est un morphisme de la catégorie $\langle\langle\langle$

$(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, A), \times)$ est un groupe.

$$X \rightarrow \alpha, \quad XY \rightarrow \alpha \times \beta, \quad X^{-1} \rightarrow \alpha \circ S$$

Multiplication de variables aléatoires

$\rangle\rangle\rangle \alpha \times \beta = (\alpha \dot{\sqcup} \beta) \circ \Delta$ est un morphisme de la catégorie $\langle\langle\langle$

$(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, A), \times)$ est un groupe.

$$X \rightarrow \alpha, \quad XY \rightarrow \alpha \times \beta, \quad X^{-1} \rightarrow \alpha \circ S$$

J. Zhang

Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}rp$, il existe une algèbre de Zhang tel que

$$F(\cdot) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, \cdot)$$

 J. Zhang, 1991

Comodules libres et conjugaison

Soit (\mathcal{C}, \sqcup, k) une catégorie algébrique.

Un **comodule** (M, ρ) sur une algèbre de Zhang $(H, \Delta, \varepsilon, S)$ est la donnée :

- Un objet de la catégorie \mathcal{C}
- Un morphisme $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M \sqcup H)$,

$$(\rho \sqcup \text{id}_H) \circ \rho = (\text{id}_M \dot{\sqcup} \Delta) \circ \rho, \quad (\text{id}_M \dot{\sqcup} \varepsilon) \circ \rho = \text{id}_M.$$

Comodules libres et conjugaison

Soit (\mathcal{C}, \sqcup, k) une catégorie algébrique.

Un comodule (M, ρ) sur une algèbre de Zhang $(H, \Delta, \varepsilon, S)$ est la donnée :

- Un objet de la catégorie \mathcal{C}
- Un morphisme $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M \sqcup H)$,

$$(\rho \sqcup \text{id}_H) \circ \rho = (\text{id}_M \dot{\sqcup} \Delta) \circ \rho, \quad (\text{id}_M \dot{\sqcup} \varepsilon) \circ \rho = \text{id}_M.$$

Proposition (G.2019)

La catégorie $\text{ICoMod}\mathcal{C}(H)$ est une catégorie algébrique.

Comodules libres et conjugaison

Proposition (G. 2019)

Une algèbre de Zhang est un comodule à gauche sur elle-même, pour la coaction :



$$\Omega_c = (\iota_1 \dot{\sqcup} \iota_2 \dot{\sqcup} \iota_1) \circ (\mathrm{id}_{H \sqcup H} \sqcup S) \circ (\Delta \sqcup \mathrm{id}_H) \circ \Delta.$$

Comodules libres et conjugaison

Proposition (G. 2019)

Une algèbre de Zhang est un comodule à gauche sur elle-même, pour la coaction :



$$\Omega_c = (\iota_1 \sqcup \iota_2 \sqcup \iota_1) \circ (\text{id}_{H \sqcup H} \sqcup S) \circ (\Delta \sqcup \text{id}_H) \circ \Delta.$$

L'action par conjugaison sur l'algèbre des fonctions sur un groupe,

$$\Omega_c(f)(h, g) = f(hgh^{-1}), \quad f \in \mathcal{F}(G), \quad g, h \in G.$$

sur le groupe dual de Voiculescu $\mathcal{O}\langle n \rangle$:

$$\Omega_c(u_{ij}) = \sum_{k,q=1}^n u_{ik}|_1 u_{kq}|_2 u_{kq}^*|_1$$

Indépendance catégorique et structures monoïdales

Indépendance classique et diagrammes commutatifs

X, Y deux variables aléatoires, indépendantes si et seulement si :

$$\begin{array}{ccc} & (L^\infty(\Omega, \mathcal{F}), \mathbb{E}) & \\ j_X \nearrow & & \nwarrow j_Y \\ (L^\infty(S, \mathcal{S}), \tau_X) & & (L^\infty(T, \mathcal{T}), \tau_Y) \end{array}$$

avec :

$$j_X : \begin{array}{ccc} L^\infty(S, \mathcal{S}) & \rightarrow & L(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f & \mapsto & f(X) \end{array},$$

$$\tau_X = \mathbb{E} \circ j_X.$$

Indépendance classique et diagrammes commutatifs

X, Y deux variables aléatoires, indépendantes si et seulement si :

$$\begin{array}{ccccc} & & (L^\infty(\Omega, \mathcal{F}), \mathbb{E}) & & \\ & \nearrow j_X & & \nwarrow j_Y & \\ (L^\infty(S, \mathcal{S}), \tau_X) & \xrightarrow{\iota} & (L^\infty(S, \mathcal{S}), \tau_X) \otimes (L^\infty(T, \mathcal{T}), \tau_Y) & \xleftarrow{\iota} & (L^\infty(T, \mathcal{T}), \tau_Y) \end{array}$$

avec :

$$j_X : \begin{array}{ccc} L^\infty(S, \mathcal{S}) & \rightarrow & L(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f & \mapsto & f(X) \end{array},$$

$$\tau_X = \mathbb{E} \circ j_X.$$

Indépendance classique et diagrammes commutatifs

X, Y deux variables aléatoires, indépendantes si et seulement si :

$$\begin{array}{ccccc} & & (L^\infty(\Omega, \mathcal{F}), \mathbb{E}) & & \\ & \nearrow j_X & \uparrow j & \nwarrow j_Y & \\ (L^\infty(S, \mathcal{S}), \tau_X) & \xrightarrow{\iota} & (L^\infty(S, \mathcal{S}), \tau_X) \otimes (L^\infty(T, \mathcal{T}), \tau_Y) & \xleftarrow{\iota} & (L^\infty(T, \mathcal{T}), \tau_Y) \end{array}$$

avec :

$$j_X : \begin{array}{ccc} L^\infty(S, \mathcal{S}) & \rightarrow & L(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f & \mapsto & f(X) \end{array},$$

$$\tau_X = \mathbb{E} \circ j_X.$$

Structures monoidales

- produit tensoriel d'espaces vectoriels, $V, W \in \text{Vect}$,
- produit tensoriel d'algèbres unitaires commutatives, $A, B \in \text{ComAlg}$

$$a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- produit tensoriel d'algèbres unitaires (non-commutatives).

Structures monoidales

- produit tensoriel d'espaces vectoriels, $V, W \in \text{Vect}$,
- produit tensoriel d'algèbres unitaires commutatives, $A, B \in \text{ComAlg}$

$$a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

- produit tensoriel d'algèbres unitaires (non-commutatives).

\otimes est ...

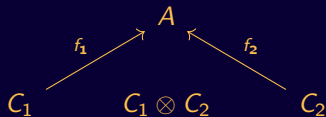
- ...associatif :

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\cong} (A \otimes B) \otimes C,$$

- ...a un objet unité $E \in \text{Obj}(\mathcal{C})$:

$$\ell_A : E \otimes A \xrightarrow{\cong} A, \quad r_A : A \otimes E \xrightarrow{\cong} A$$

Indépendance catégorique



Indépendance catégorique

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow f_1 & & \nwarrow f_2 & \\ C_1 & \xrightarrow{\iota_{C_1}} & C_1 \otimes C_2 & \xleftarrow{\iota_{C_2}} & C_2 \end{array}$$

Indépendance catégorique

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow f_1 & \uparrow f & \nwarrow f_2 & \\ C_1 & \xrightarrow{\iota_{C_1}} & C_1 \otimes C_2 & \xleftarrow{\iota_{C_2}} & C_2 \end{array}$$

Indépendance catégorique

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow f_1 & \uparrow f & \nwarrow f_2 & \\ C_1 & \xrightarrow{\iota_{C_1}} & C_1 \otimes C_2 & \xleftarrow{\iota_{C_2}} & C_2 \end{array}$$

- f n'est pas unique

Indépendance catégorique

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow f_1 & \uparrow f & \nwarrow f_2 & \\ C_1 & \xrightarrow{\iota_{C_1}} & C_1 \otimes C_2 & \xleftarrow{\iota_{C_2}} & C_2 \end{array}$$

- f n'est pas unique
- (f_1, f_2) indépendant $\not\Rightarrow (f_2, f_1)$ indépendant

Indépendance catégorique

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow f_1 & \uparrow f & \nwarrow f_2 & \\ C_1 & \xrightarrow{\iota_{C_1}} & C_1 \otimes C_2 & \xleftarrow{\iota_{C_2}} & C_2 \end{array}$$

- f n'est pas unique
- (f_1, f_2) indépendant $\not\Rightarrow (f_2, f_1)$ indépendant
- On ne définit pas ' (f_1, \dots, f_n) indépendant'.

Champs d'holonomies non commutatifs

Processus de Lévy

$\mathcal{C} = \text{Alg}^*, (\text{Prob}, \otimes).$

H une algèbre de Zhang dans Alg^*

Processus de Lévy

$\mathcal{C} = \text{Alg}^*, (\text{Prob}, \otimes).$

H une algèbre de Zhang dans Alg^*

Un processus de Lévy est une famille $j_s : H \rightarrow \mathcal{A}$ de morphismes de Alg^* .

Les accroissements $j_{s,t} = ((j_s \circ S) \sqcup j_t) \circ \Delta$ vérifient

Processus de Lévy

$\mathcal{C} = \text{Alg}^*, (\text{Prob}, \otimes)$.

H une algèbre de Zhang dans Alg^*

Un processus de Lévy est une famille $j_s : H \rightarrow \mathcal{A}$ de morphismes de Alg^* .

Les accroissements $j_{s,t} = ((j_s \circ S) \sqcup j_t) \circ \Delta$ vérifient

- Pour tout triplet de temps $u < s < t$, $j_{u,s} \times j_{s,t} = j_{u,t}$, $j_{s,s} = \varepsilon$,

Processus de Lévy

$\mathcal{C} = \text{Alg}^*, (\text{Prob}, \otimes)$.

H une algèbre de Zhang dans Alg^*

Un processus de Lévy est une famille $j_s : H \rightarrow \mathcal{A}$ de morphismes de Alg^* .

Les accroissements $j_{s,t} = ((j_s \circ S) \dot{\sqcup} j_t) \circ \Delta$ vérifient

- Pour tout triplet de temps $u < s < t$, $j_{u,s} \times j_{s,t} = j_{u,t}$, $j_{s,s} = \varepsilon$,
- Pour tout $(s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \dots \leq s_p < t_p)$,

$$\tau \circ (j_{s_1, t_1} \dot{\sqcup} \dots \dot{\sqcup} j_{s_p, t_p}) = \tau \circ j_{s_1, t_1} \otimes \dots \otimes \tau \circ j_{s_p, t_p}$$

Processus de Lévy

$\mathcal{C} = \text{Alg}^*, (\text{Prob}, \otimes)$.

H une algèbre de Zhang dans Alg^*

Un processus de Lévy est une famille $j_s : H \rightarrow \mathcal{A}$ de morphismes de Alg^* .

Les accroissements $j_{s,t} = ((j_s \circ S) \dot{\sqcup} j_t) \circ \Delta$ vérifient

- Pour tout triplet de temps $u < s < t$, $j_{u,s} \times j_{s,t} = j_{u,t}$, $j_{s,s} = \varepsilon$,
- Pour tout $(s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \dots \leq s_p < t_p)$,

$$\tau \circ (j_{s_1, t_1} \dot{\sqcup} \dots \dot{\sqcup} j_{s_p, t_p}) = \tau \circ j_{s_1, t_1} \otimes \dots \otimes \tau \circ j_{s_p, t_p}$$

- $\tau \circ j_{s,t} = \tau \circ j_{t-s}$

Champ d'holonomies

- $H_\ell, \ell \in \text{Loops}_0(\mathbb{R}^2)$, $H_\ell \in \text{Hom}_{\text{Alg}^*}(H, (\mathcal{A}, \tau))$
- $H_{\ell_1 \ell_2} = H_{\ell_1} \times H_{\ell_2}$
- Invariance de jauge :

$$((\phi_H \otimes \tau) \circ (\text{id}_H \sqcup H_{\ell_1, \dots, \ell_n})) \circ \Omega_c^n = \tau \circ H_{\ell_1, \dots, \ell_n}.$$

- Si (ℓ_1, \dots, ℓ_n) et $(\ell'_1, \dots, \ell'_n)$ sont deux familles de boucles contenues dans des domaines disjoints,

$H_{\ell_1, \dots, \ell_n}$ et $H_{\ell'_1, \dots, \ell'_n}$ sont \otimes -independant.

- Invariance par homéomorphismes préservant l'aire :

$$\tau \circ H_{\ell_1} \dot{\sqcup} \dots \dot{\sqcup} H_{\ell_n} = \tau \circ H_{\phi(\ell_1)} \dot{\sqcup} \dots \dot{\sqcup} H_{\phi(\ell_n)}.$$

Théorème (G.2019)

A tout processus de Lévy quantique sur une algèbre de Zhang (un groupe dual) vérifiant deux propriétés techniques, on peut associer un champ d'holonomies planaire.

Théorème (G.2019)

A tout processus de Lévy quantique sur une algèbre de Zhang (un groupe dual) vérifiant deux propriétés techniques, on peut associer un champ d'holonomies planaire.

⚙️ Extension à des boucles rectifiables.

Deuxième partie II

Distribution de blocs extraits de grandes matrice aléatoires

Diffusion unitaire brownienne

Diffusion unitaire brownienne

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

$$\mathbb{U}(N, \mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}), MM^* = M^*M = I_N\},$$

$$\mathfrak{u}(N, \mathbb{K}) = \{H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : H^* + H = 0\}.$$

Diffusion unitaire brownienne

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

$$\mathbb{U}(N, \mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}), MM^* = M^*M = I_N\},$$

$$\mathfrak{u}(N, \mathbb{K}) = \{H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : H^* + H = 0\}.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ groupe orthogonal | $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ groupe unitaire
 $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ groupe symplectique compact.

Diffusion unitaire brownienne

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

$$\mathbb{U}(N, \mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}), MM^* = M^*M = I_N\},$$

$$\mathfrak{u}(N, \mathbb{K}) = \{H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : H^* + H = 0\}.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ groupe orthogonal | $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ groupe unitaire
 $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ groupe symplectique compact.


$$\langle X, Y \rangle_N \propto \frac{N}{2} \operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(X^*Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{u}(N, \mathbb{K})$$

$$K(t) = \sum B_k(t) H_N^k, \quad (H_N^k, k \geq 1), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_N\text{-BON}.$$

$$dU_N^{\mathbb{K}}(t) = U_N^{\mathbb{K}}(t)dK(t) + \frac{c_{u_N(\mathbb{K})}}{2}U_N^{\mathbb{K}}(t)dt$$

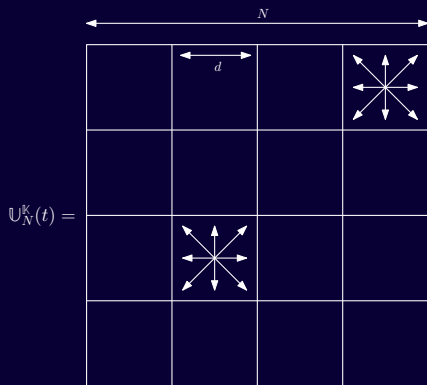
$$dU_N^{\mathbb{K}}(t) = U_N^{\mathbb{K}}(t)dK(t) + \frac{c_{u_N(\mathbb{K})}}{2}U_N^{\mathbb{K}}(t)dt$$

Quand N tend vers l'infini, $U_N^{\mathbb{K}}$ converge vers un mouvement brownien libre.

 Biane, 1997, Raines

Extractions carrées d'une matrice unitaire
brownienne.

Un entier $n \geq 1$ fixé, nombre de blocs extraits. $N = nd$.



$$\begin{aligned} \mathbb{U}_{n,d}^{\mathbb{K}}(t) : \mathcal{O}\langle n \rangle &\rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \\ u_{ij} &\mapsto \mathbb{U}_N^{\mathbb{K}}(i,j)(t) \end{aligned}$$

W matrice hermitienne de taille $n \times n$ ayant des coefficients dans (\mathcal{A}, τ) .

W matrice hermitienne de taille $n \times n$ ayant des coefficients dans (\mathcal{A}, τ) .

- browniens semi-circulaires libres sur la diagonale,
- browniens circulaires libres hors diagonale.

$$W_{ii}(t) = w_i(t), W_{ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_{ij}^1(t) + i w_{ij}^2(t)), W_{ji}(t) = (W_{ij}(t))^*,$$

W matrice hermitienne de taille $n \times n$ ayant des coefficients dans (\mathcal{A}, τ) .

- browniens semi-circulaires libres sur la diagonale,
- browniens circulaires libres hors diagonale.

$$W_{ii}(t) = w_i(t), W_{ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_{ij}^1(t) + i w_{ij}^2(t)), W_{ji}(t) = (W_{ij}(t))^*,$$

- Equation différentielle stochastique libre :

W matrice hermitienne de taille $n \times n$ ayant des coefficients dans (\mathcal{A}, τ) .

- browniens semi-circulaires libres sur la diagonale,
- browniens circulaires libres hors diagonale.

$$W_{ii}(t) = w_i(t), W_{ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_{ij}^1(t) + i w_{ij}^2(t)), W_{ji}(t) = (W_{ij}(t))^*,$$

- Equation différentielle stochastique libre :

$$dU^{\langle n \rangle}(t)(i, j) = \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (dW_t(i, k)) U^{\langle n \rangle}(t)(k, j) - \frac{1}{2} U^{\langle n \rangle}(t)(i, j) dt$$

W matrice hermitienne de taille $n \times n$ ayant des coefficients dans (\mathcal{A}, τ) .

- browniens semi-circulaires libres sur la diagonale,
- browniens circulaires libres hors diagonale.

$$W_{ii}(t) = w_i(t), W_{ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_{ij}^1(t) + i w_{ij}^2(t)), W_{ji}(t) = (W_{ij}(t))^*,$$

- Equation différentielle stochastique libre :

$$dU^{\langle n \rangle}(t)(i, j) = \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (dW_t(i, k)) U^{\langle n \rangle}(t)(k, j) - \frac{1}{2} U^{\langle n \rangle}(t)(i, j) dt$$

 Biane, Speicher, Stoch. calc. with respect to free Brownian motion...

Théorème (G. 2019)

$$U_{n,d}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\text{(d.n.c)}} U^{\langle n \rangle}.$$

Théorème (G. 2019)

$$\mathbf{U}_{n,d}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{(\text{d.n.c})} \mathbf{U}^{\langle n \rangle}.$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{d} \text{Tr}(\mathbf{U}_{n,d}^{\mathbb{K}}(w)) \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \tau(\mathbf{U}^{\langle n \rangle}(w)), \quad w \in \mathcal{O}^{\langle n \rangle}.$$

Théorème (G. 2019)

$$U_{n,d}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\text{(d.n.c)}} U^{\langle n \rangle}.$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{d} \text{Tr}(U_{n,d}^{\mathbb{K}}(w)) \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \tau(U^{\langle n \rangle}(w)), \quad w \in \mathcal{O}^{\langle n \rangle}.$$

➤ Il existe un champ d'holonomie associé à $U^{\langle n \rangle}$.

Théorème (G. 2019)

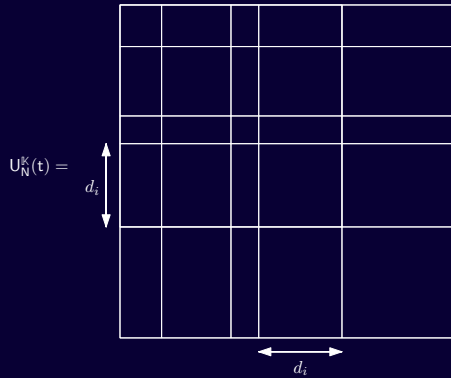
$$U_{n,d}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{(d.n.c)} U^{\langle n \rangle}.$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{d} \text{Tr}(U_{n,d}^{\mathbb{K}}(w)) \right] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \tau(U^{\langle n \rangle}(w)), \quad w \in \mathcal{O}^{\langle n \rangle}.$$

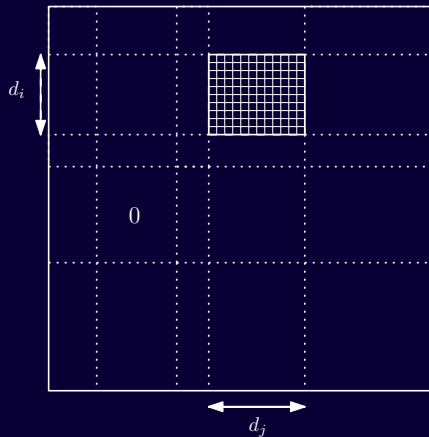
➤ Il existe un champ d'holonomie associé à $U^{\langle n \rangle}$.

⚙ Convergence de matrices avec entrées dans une algèbre de Clifford, diffusion sur le groupe Spin.

Extraction de blocs rectangulaires d'un mouvement brownien unitaire



Probabilité amalgamée

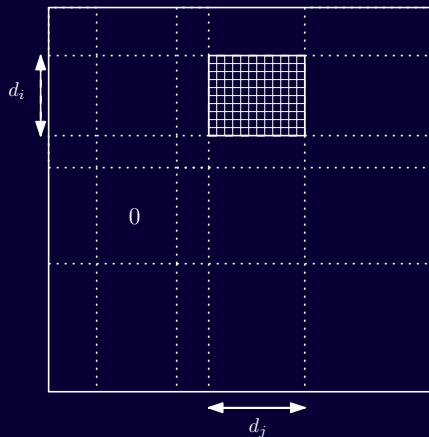


$$= U_N^{\mathbb{K}}(t)(i, j) \in \mathcal{M}_{N, N}(\mathbb{K})$$

$$= U_{d_n}^{\mathbb{K}}(t)(u_{ij})$$

$$\text{avec } u_{ij} = p_i u p_j$$

Probabilité amalgamée



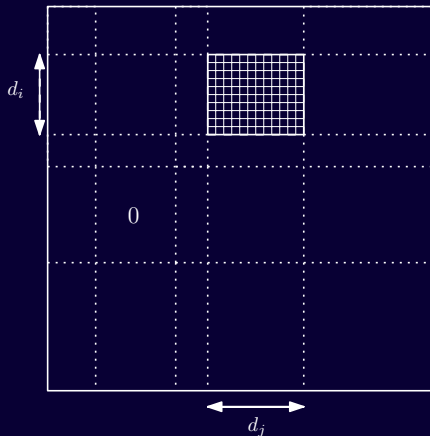
$$= U_N^{\mathbb{K}}(t)(i, j) \in \mathcal{M}_{N, N}(\mathbb{K})$$

$$= U_{d_n}^{\mathbb{K}}(t)(u_{ij})$$

$$\text{avec } u_{ij} = p_i u p_j$$

$$\begin{aligned} \mathcal{RO}\langle n \rangle &= \langle u, p_i, 1 \leq i \leq n \\ &\quad | p_i^2 = p_i, p_i p_j = 0, i \neq j \rangle \end{aligned}$$

Probabilité amalgamée



$$= U_N^{\mathbb{K}}(t)(i, j) \in \mathcal{M}_{N, N}(\mathbb{K})$$

$$= U_{d_n}^{\mathbb{K}}(t)(u_{ij})$$

$$\text{avec } u_{ij} = p_i u p_j$$

$$\begin{aligned} \mathcal{RO}\langle n \rangle &= \langle u, p_i, 1 \leq i \leq n \\ &\quad | p_i^2 = p_i, p_i p_j = 0, i \neq j \rangle \end{aligned}$$

$$\sum_i \mathbb{E} \left[\frac{1}{d_i} \text{Tr}(p_i U_{d_N}^{\mathbb{K}}(t)(w) p_i) \right] p_i$$

Convergence du processus d'extraction rectangulaire

Théorème (G. 2019)

Pour tout entier N , on choisit une partition d_N de N en n parts. On suppose que la limite de chaque ratio

$$\frac{d_N(i)}{N}$$

existe et est non nulle. Alors, quand N tend vers l'infini, le processus $U_{d_N}^{\mathbb{K}}$ converge, vers un processus de Lévy libre avec amalgamation.

Convergence du processus d'extraction rectangulaire

Théorème (G. 2019)

Pour tout entier N , on choisit une partition d_N de N en n parts. On suppose que la limite de chaque ratio

$$\frac{d_N(i)}{N}$$

existe et est non nulle. Alors, quand N tend vers l'infini, le processus $U_{d_N}^{\mathbb{K}}$ converge, vers un processus de Lévy libre avec amalgamation.

Convergence du processus d'extraction rectangulaire

Théorème (G. 2019)

Pour tout entier N , on choisit une partition d_N de N en n parts. On suppose que la **limite** de chaque ratio

$$\frac{d_N(i)}{N}$$

existe et est non nulle. Alors, quand N tend vers l'infini, le processus $U_{d_N}^{\mathbb{K}}$ converge, vers un **processus de Lévy libre avec amalgamation**.

➤ Il existe un champ d'holonomie associé au processus limite.

Convergence du processus d'extraction rectangulaire

Théorème (G. 2019)

Pour tout entier N , on choisit une partition d_N de N en n parts. On suppose que la **limite** de chaque ratio

$$\frac{d_N(i)}{N}$$

existe et est non nulle. Alors, quand N tend vers l'infini, le processus $U_{d_N}^{\mathbb{K}}$ converge, vers un **processus de Lévy libre avec amalgamation**.

- Il existe un champ d'holonomie associé au processus limite.
- ⚙ Une réalisation du processus limite.
- ⚙ La limite de l'un des ratios est nulle?

Convergence en grande dimension de diffusions pseudo-unitaires

Diffusions browniennes pseudo-unitaires

- Matrices pseudo-unitaires : $\{U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : U^* I_{p,q} U = I_{p,q}\}$.

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

Diffusions browniennes pseudo-unitaires

- Matrices pseudo-unitaires : $\{U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : U^* I_{p,q} U = I_{p,q}\}.$

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

- signature = (p, q) , signature normalisée = $(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})$

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

Diffusions browniennes pseudo-unitaires

- Matrices pseudo-unitaires : $\{U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : U^* I_{p,q} U = I_{p,q}\}.$

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

- signature = (p, q) , signature normalisée = $(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})$

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

- Pas de choix canonique pour un produit scalaire sur $\mathfrak{u}(p, q, \mathbb{K})$!

1. Choisir une base,
2. Choisir un sous-groupe compact maximal,
3. Introduire des paramètres.

Diffusions browniennes pseudo-unitaires

- Matrices pseudo-unitaires : $\{U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : U^* I_{p,q} U = I_{p,q}\}.$

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

- signature = (p, q) , signature normalisée = $(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})$

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

- Pas de choix canonique pour un produit scalaire sur $\mathfrak{u}(p, q, \mathbb{K})$!

1. Choisir une base,
2. Choisir un sous-groupe compact maximal,
3. Introduire des paramètres.

- Un ensemble de diffusions pseudo-unitaires :

$$d\Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) = \Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) dW_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) + \frac{1}{2} \Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) (v\alpha_{p,q} + c\beta_{p+q}^{\mathbb{K}}) dt.$$

Diffusions browniennes pseudo-unitaires

- Matrices pseudo-unitaires : $\{U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : U^* I_{p,q} U = I_{p,q}\}.$

$$I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

- signature = (p, q) , signature normalisée = $(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q})$

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

- Pas de choix canonique pour un produit scalaire sur $\mathfrak{u}(p, q, \mathbb{K})$!

1. Choisir une base,
2. Choisir un sous-groupe compact maximal,
3. Introduire des paramètres.

- Un ensemble de diffusions pseudo-unitaires :

$$d\Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) = \Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) dW_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) + \frac{1}{2} \Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}}(t) (v\alpha_{p,q} + c\beta_{p+q}^{\mathbb{K}}) dt.$$

$$\Lambda_{p,p}^{\mathbb{K}}(t) = \begin{array}{|c|c|} \hline V_p^{\mathbb{K}}(o_{++}) & V_p^{\mathbb{K}}(o_{+-}) \\ \hline V_p^{\mathbb{K}}(o_{-+}) & V_p^{\mathbb{K}}(o_{--}) \\ \hline \end{array}$$

Diffusions pseudo-unitaires déployées libres

$$d\Lambda^{+-}(t) = \Lambda^{+-}(t)d\mathbb{W}^{+-}(t) + \frac{1}{2}(\nu - c)\Lambda^{+-}(t)dt$$

$$\mathbb{W}^{+-} = \begin{array}{|c|c|} \hline s_c^1 & s_c^3 + is_c^4 \\ \hline s_c^3 - is_c^4 & s_c^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Lambda^{+-}(t) = \begin{array}{|c|c|} \hline ++ & +- \\ \hline -+ & -- \\ \hline \end{array}$$

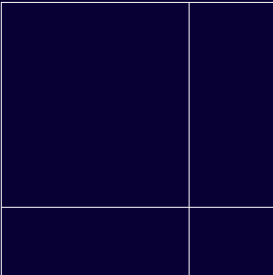
$$V : \mathcal{O}\langle -+ \rangle \longrightarrow (\mathcal{A}, \tau)$$

Théorème (G. 2019)

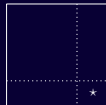
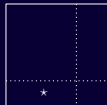
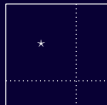
$$V_p^{\mathbb{K}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} V.$$

Théorème (G. 2019)

Si la signature normalisée converge, la distribution de la variable aléatoire $V_{p,q}^{\mathbb{K}}$ converge vers un semi-groupe libre avec amalgamation.

$$\Lambda_{p,q}^{\mathbb{K}} =$$


$$V_{p,q}^{\mathbb{K}} =$$



Spectre d'une matrice pseudo-hermitienne gaussienne

$H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice pseudo-hermitienne si :

$$H I_{p,q} + I_{p,q} H^* = 0, \quad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

$H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice pseudo-hermitienne si :

$$HI_{p,q} + I_{p,q}H^* = 0, \quad I_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} X_{p,q}^{++} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q}} X_{p,q}^{+-} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q}} X_{p,q}^{-+} & X_{p,q}^{--} \end{bmatrix}$$

avec $X_{p,q}^{++} \sim GUE(p)$, $X_{p,q}^{--} \sim GUE(q)$ et $X_{p,q} \sim Ginibre(p+q)$.

$H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice pseudo-hermitienne si :

$$Hl_{p,q} + l_{p,q}H^* = 0, \quad l_{p,q} = \begin{bmatrix} l_p & 0 \\ 0 & -l_q \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} X_{p,q}^{++} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q}} X_{p,q}^{+-} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p+q}} X_{p,q}^{-+} & X_{p,q}^{--} \end{bmatrix}$$

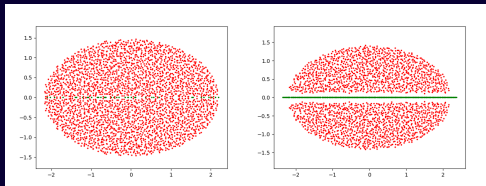
avec $X_{p,q}^{++} \sim GUE(p)$, $X_{p,q}^{--} \sim GUE(q)$ et $X_{p,q} \sim Ginibre(p+q)$.

Mesure spectrale empirique δ_H de H :

$$\delta_H(dz d\bar{z}) = \frac{1}{n} \sum_{\lambda \in \text{Spec}(H)} \delta_\lambda(dz d\bar{z}).$$

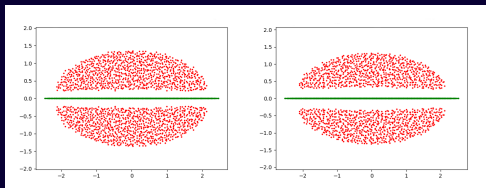
 Bender, PT-Symmetry, 2019

Spectre d'une matrice pseudo-hermitienne gaussienne



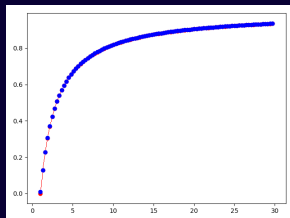
$$\frac{p}{q}=1$$

$$\frac{p}{q}=1.3$$



$$\frac{p}{q}=1.6$$

$$\frac{p}{q}=1.9$$



⚙️ Résolvante quaternionique, 📄 Bordenave, Chafai, 2011



Merci de votre attention !