

Partitions d'un entier - une vue d'ensemble

SOUFI Nazim

Table des matières

I	Présentation des partitions et des premiers problèmes	3
I.1	Introduction et histoire	3
I.2	Représentation graphique des partitions	4
I.3	Pourquoi tant d'hypothèses ? Les compositions d'un entier	4
I.4	Étude de la fonction de partition : $p(n)$	7
I.4.1	Des premiers résultats	7
I.4.2	La méthode récursive de calcul de $p(n)$ d'Euler	8
I.4.3	Un équivalent	13
I.4.4	Une formule explicite	14
I.4.5	Les congruences de Ramanujan	14
II	Sur certains types contraints de partitions	17
II.1	Les partitions avec les parts dans un ensemble fixé	18
II.2	Les partitions avec un nombres de parts contraint	18
II.3	Un exemple de partitions exotiques : les φ -partitions	19
III	En arithmétique	23
III.1	Lien avec les diviseurs d'un entier	23
III.2	Un transport - la super-norme	25
III.3	Preuve de résultats par les partitions	31
III.3.1	Minoration de la fonction π de Gauß	31
III.3.2	Le théorème des deux carrés de Fermat	33
IV	Les partitions en algèbre	36
IV.1	En algèbre linéaire	36
IV.2	En algèbre générale	38
IV.2.1	Sur le nombre de groupe abélien de cardinal n	38
IV.2.2	Concernant le groupe symétrique	38
V	En combinatoire	41
V.1	Problème de réalisation d'un graphe	41
V.2	De la géométrie combinatoire	42
V.2.1	Des triangles à côtés entiers	42
V.2.2	Des quadrilatères à côtés entiers	43
V.3	Les partitions pavables	44
VI	La physique à la rescousse de Hardy et Ramanujan	46

I Présentation des partitions et des premiers problèmes

I.1 Introduction et histoire

Avant de commencer, présentons les objets que nous allons manipuler.

Définition I.1 (Partition d'un entier)

Soit un entier n strictement positif, on appelle *partition de l'entier n* , toute famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ d'entiers vérifiant :

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 1$
- $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$

On note alors, $\lambda \vdash n$ qui se lit " λ est une partition de n " ou encore " λ partitionne n ". De plus l'ensemble des partitions d'un entier n se note $\mathcal{P}(n)$, tandis que l'ensemble des partitions est noté $\mathcal{P} := \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(n)$ avec, comme convention $\mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$.

Pour finir, dans ce papier, il nous arrivera d'utiliser une autre manière d'écrire une partition : en prenant en compte le nombre d'occurrence : en fait la partition $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, s'écrit : $< 1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots >$ où $m_i = |\{j \in [1; k], \lambda_j = i\}|$

Ce concept, est né tout d'abord en 1699 dans une lettre de **Leibniz** à **Bernoulli**, dans laquelle il demande :

"as-tu jamais étudié le nombre des partages, ou découpages, d'un nombre donné - c'est-à-dire : de combien de façons peut-on partager en deux ou trois parties ou davantage. Le calcul ne m'en paraît pas facile, mais il est intéressant..."

Mais ces deux mathématiciens ne feront pas avancer la théorie, en réalité, c'est **Euler** qui la rendra populaire, dans son livre *Introductio in analysin infinitorum* en 1748, où elle apparaît pour la première fois en dehors des discussions épistolaires des mathématiciens.

Cependant, la discussion de Leibniz et Bernoulli nous donne tout de même le chemin à suivre et nous pousse à naturellement considérer l'objet suivant.

Définition I.2 (Fonction de partition)

Pour tout entier n , on définit :

$$p(n) := |\mathcal{P}(n)|$$

Ainsi, la fonction de partition p , compte le nombre de partitions de n . Où on a pris la convention $p(k < 0) = 0$.

Partant d'un problème en apparence si simple, on peut penser que l'étude de cette fonction sera aisée, mais dès la vue des premiers termes on comprend la difficulté mentionnée par Leibniz :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30

Mais aujourd'hui, le problème du calcul de $p(n)$ est encore d'actualité, en effet il n'existe pas d'expression simple et explicite pour $p(n)$, cependant, on a quand même fait beaucoup d'avancées depuis l'époque de Leibniz, ce que nous allons voir plus tard.

I.2 Représentation graphique des partitions

Introduisons tout de suite, un objet qui nous sera utile dans la suite, pour mieux comprendre et pour faciliter quelques démonstrations : les tableaux de **Young**. Un tableau de Young, est une collection de case, arrangée en ligne de sorte que, le tableau de Young associé à la partition $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ contienne λ_1 cases sur la ligne la plus basse, λ_2 cases sur la ligne d'au dessus etc... Voici un exemple ci-dessous :

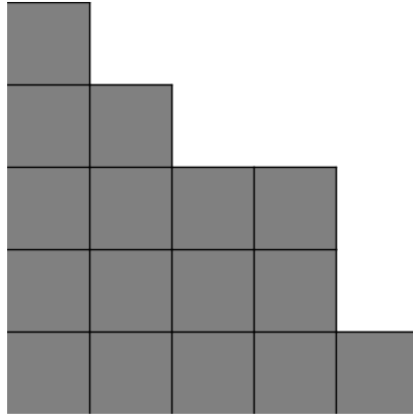


FIGURE 1 – Tableau de Young de la partition $(5, 4, 4, 2, 1)$

I.3 Pourquoi tant d'hypothèses ? Les compositions d'un entier

Il est intéressant à ce stade de noter que les deux hypothèses : les parts sont non nulles, et elles sont rangées dans l'ordre décroissant, complexifient amplement l'étude de nos objets. En effet, si nous ne les prenons pas en compte, nous définissons alors de nouveaux objets :

Définition I.3 (Composition d'un entier)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle *composition de n* , une famille finie d'entiers positifs (k_1, \dots, k_r) , tels que : $k_1 + \dots + k_r = n$

Puisque 0 à le droit d'être une part de nos compositions, on se doit désormais de prendre en compte le nombre de part d'une composition pour pouvoir les compter, car sinon, pour 2 par exemple, on aurait : $(2), (2, 0), (2, 0, 0), \dots$ qui en sont des compositions, on a donc, pour tout entier n , une infinité de compositions. Puisque l'on prend alors en compte le nombre de part de notre composition, nous noterons, dans la suite :

$$\Gamma_n^p = |\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = p\}|$$

Ainsi, Γ_n^p , est le nombre de compositions de p en n parts. Notons, à ce stade, qu'il n'y a pas de soucis de définition, en ce sens que $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = p\}$ est

toujours un ensemble fini, en effet, puisque toutes les parts sont positives, le cardinal de cet ensemble est majoré par $(p+1)^n$ (chaque part ne peut être qu'un entier compris entre 0 et p).

Proposition I.1 (Nombre de composition à nombre de part fixe)

On a, $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence, ainsi, dans un premier temps nous chercherons quelques valeurs notables de Γ_n^p pour certains n et p , ce qui nous permettra à la fois de nous familiariser à nos objets, et d'entamer notre initialisation.

— Dans un premier temps, fixons n (le nombre de part), et voyons ce qu'il se passe quand p bouge.

Pour $p = 0$, on cherche tous les n -uplets d'entiers positifs dont la somme vaut 0, on se convainc alors que $(0, \dots, 0)$ est le seul candidat. D'où :

$$\Gamma_n^0 = 1$$

Pour $p = 1$, les seules solutions sont les n -uplets qui contiennent un 1 et $n-1$ zéros, le 1 peut alors prendre n places : $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$ d'où :

$$\Gamma_n^1 = n$$

Testons un cas, un peu plus compliqué, qui ne nous servira pas dans la suite de la preuve, mais qui nous enseigne le raisonnement à adopter : celui de $p = 2$. Puisque les parts sont toutes positives, on a deux choix : soit on a deux parts qui valent toutes les deux 1, et le reste vaut 0, ou alors, on a une part qui vaut 2, et le reste est nul. Dans le premier cas, il suffit de compter le nombre d'emplacement où peuvent se trouver les 1, il y en a : $\binom{n}{2}$, dans le deuxième cas, le 2 peut prendre n places : $(2, 0, \dots, 0), (0, 2, 0, \dots, 0), \dots$ ainsi, puisque ces deux cas sont disjoints on a :

$$\Gamma_n^2 = \binom{n}{2} + n$$

Voyons maintenant ce qu'il se passe quand p est fixe, mais n se met en mouvement. Pour $n = 1$, il suffit d'écrire ce que l'on cherche : $\Gamma_1^p = |\{(x_1) \in \mathbb{N}^n, x_1 = p\}|$, pour se rendre compte que la seule solution est : $x_1 = p$. D'où :

$$\Gamma_1^p = 1$$

Pour $n = 2$, on cherche le nombre de couples (x_1, x_2) d'entiers positifs tels que $x_1 + x_2 = p$. L'idée est de partitionner en fonction de la valeur de x_1 : une fois x_1 fixé, x_2 est contraint de valoir $p - x_1$ (licite car on va prendre $x_1 \leq p$) il suffit donc de compter le nombre de valeurs que peut prendre x_1 : il peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et p , i.e. il peut en prendre $p+1$. On conclut :

$$\Gamma_2^p = p + 1$$

— Maintenant que nous nous sommes fait la main sur les premiers cas, il est temps de prouver un résultat, qui nous permettra de faire notre fameuse récurrence, et

qui surtout, nous aiguilleras sur le choix de cette dite récurrence : allons nous la faire sur n ? sur p ? sur $n + p$? ...

L'idée est de partitionner, comme pour le cas ci-dessus de $n = 2$, selon les valeurs d'une certaines part. Pour cela notons :

$$\gamma_n^p = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = p\}$$

Partons de γ_{n+1}^p , et partitionnons par rapport à x_{n+1} :

$$\gamma_{n+1}^p = \bigsqcup_{x_{n+1}=0}^p \{(x_1, \dots, x_{n+1}), (x_1, \dots, x_n) \in \gamma_n^{p-x_{n+1}}\}$$

Puisque l'union est disjointe et que, par construction : $|\gamma_n^p| = \Gamma_n^p$, le passage au cardinal donne :

$$\Gamma_{n+1}^p = \sum_{k=0}^p \Gamma_n^{p-k}$$

On se rend alors compte, que dans les termes de notre somme, le n est le même, mais p parcourt toutes les valeurs entre 0 et p , ce qui nous met la puce à l'oreille pour faire notre récurrence, sur n , et de dire que pour n fixe, le résultat est vrai pour tout p .

- Passons alors enfin à notre récurrence, nous avons donc vu pourquoi, nous allons posé notre hypothèse de récurrence sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n : \forall p \in \mathbb{N}, \Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$

(I) \rightarrow On a vu plus tôt que pour tout p , $\Gamma_1^p = 1$, or $\binom{p}{p} = 1$ d'où l'initialisation.

(H) \rightarrow On suppose H_n vraie pour un certains $n \in \mathbb{N}^*$, par le point précédent, on a :

$$\Gamma_{n+1}^p = \sum_{k=0}^p \Gamma_n^{p-k} \stackrel{H.R.}{=} \sum_{k=0}^p \binom{n+p-k-1}{p-k}$$

En sommant dans l'autre sens, on obtient :

$$\Gamma_{n+1}^p = \sum_{k=0}^p \binom{n+k-1}{k}$$

Il suffit alors de prouver que $\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{k} = \binom{n+p-1}{p}$. Faisons pour cela une récurrence sur p , en effet, l'initialisation ($p = 0$) est directe, ensuite, si on suppose le résultat à l'étape $p - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{n+k-1}{k} &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+p-1}{p} \\ &\stackrel{H.R.}{=} \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-1}{p} \end{aligned}$$

On conclut avec la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Gamma_{n+1}^p = \binom{n+p}{p}$$

d'où l'hérédité.

(C) \rightarrow Le résultat étant initialisé et héréditaire, on en déduit qu'il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$

□

On voit ainsi que le problème est sans grand intérêt, car la question est vite répondue, reprenons donc notre réel problème.

I.4 Étude de la fonction de partition : $p(n)$

I.4.1 Des premiers résultats

Dans cette courte partie, proposons nous d'étudier quelques propriétés de la fonction de partitions, afin d'avoir une vague idée de la méthode de démonstration pour les résultats concernant les partitions.

Proposition I.2 (Monotonie de $p(n)$)

La suite $(p(n))_n$ est strictement croissante.

Démonstration. À toute partition de $n - 1$, on peut associé une unique partition de n , en ajoutant seulement un 1. Inversement, on peut associer une unique partition de $n - 1$ à une partition de n qui contient une part valant 1, seulement en la retirant. Ainsi :

$$p(n) = p(n - 1) + |\{\lambda \vdash n, 1 \notin \lambda\}|$$

Et $|\{\lambda \vdash n, 1 \notin \lambda\}| > 0$ car, pour $n \geq 1$, il suffit de prendre $\lambda = (n)$ d'où, $\forall n \geq 2$, on a : $p(n) > p(n - 1)$. □

Proposition I.3 (Convexité de $p(n)$)

La suite $(p(n))_n$ est convexe, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n + 2) + p(n) \geq 2p(n + 1)$$

Démonstration. On remarque que l'inégalité se réécrit :

$$p(n + 2) - p(n + 1) \geq p(n + 1) - p(n)$$

Or, on a vu durant la démonstration précédente que $p(n) = p(n - 1) + |\{\lambda \vdash n, 1 \notin \lambda\}|$. On cherche donc seulement à montrer que :

$$|\{\lambda \vdash n + 2, 1 \notin \lambda\}| \geq |\{\lambda \vdash n + 1, 1 \notin \lambda\}|$$

Or cette inégalité est à peu près directe, il suffit de remarquer que l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \{\lambda \vdash n + 1, 1 \notin \lambda\} &\rightarrow \{\lambda \vdash n + 2, 1 \notin \lambda\} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) &\rightarrow (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_k) \end{aligned}$$

est bien définie, et est injective. □

I.4.2 La méthode récursive de calcul de $p(n)$ d'Euler

Cette méthode, est encore la méthode la plus rapide connue à ce jour pour calculer le nombre de partitions d'un entier, elle fournit en effet une méthode récursive de calcul pour $p(n)$.

Pour la comprendre, nous avons besoin d'introduire un certains type de nombre.

Définition I.4 (Les nombres pentagonaux)

our tout entier relatif k , on appel k -ième nombre pentagonal le nombre :

$$g_k := \frac{k(3k-1)}{2}$$

On comprend leurs nom, car on peut les dessiner de la manière suivante :

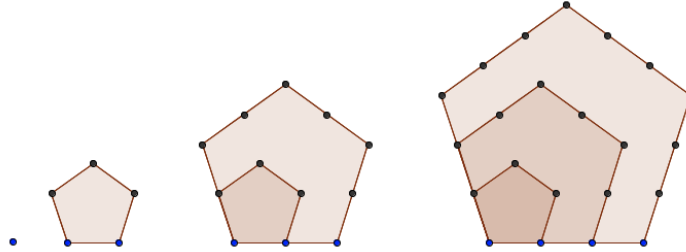


FIGURE 2 – g_1 , g_2 , g_3 et g_4

Le lien avec ces nombre se fait à travers les deux théorèmes suivant.

Proposition I.4 (Série génératrice de $p(n)$ - Euler (1748))

Pour x dans le disque ouvert complexe de rayon 1, on a :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}$$

Démonstration. Si on veut donner simplement l'idée de ce qu'il se passe sans être rigoureux, on part du produit, qu'on développe par une multitude de produit de Cauchy.

$$\forall x \in]-1; 1[$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \right) \prod_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2=i} x^{k_1+2k_2} \right) \prod_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{k_1+2k_2=i} 1 \right) \prod_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki} \right) \\ &= \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} 1 \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \end{aligned}$$

L'étude rigoureuse demande cependant plus de propreté, mais ne sera pas mentionnée ici. \square

Proposition I.5 (Théorème des nombres pentagonaux - Euler (1748))

Pour x dans le disque ouvert complexe de rayon 1, on a :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{g_k}$$

Démonstration. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} F_n &= 1 - x^{2n-1} - \sum_{i=3}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-3} (1 - x^{n+j}) \\ &= 1 - x^{2n-1} - x^{3n-1} Q \end{aligned}$$

où $Q := \sum_{i=0}^{\infty} x^{in} \prod_{j=0}^i (1 - x^{n+j})$

Dans l'espoir de trouver une relation de récurrence sur les F_n , on essaie de déterminer Q .

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{in} \prod_{j=0}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^n + \sum_{i=1}^{\infty} x^{in} (1 - x^n) \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^n + \sum_{i=1}^{\infty} x^{in} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) - \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^n + \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^{i+1} (1 - x^{n+j}) - \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^n + x^n (1 - x^{n+1}) + \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^{i+1} (1 - x^{n+j}) - \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^{2n+1} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i+1)n} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) [(1 - x^{n+i+1}) - 1] \\
&= 1 - x^{2(n+1)-1} - \sum_{i=1}^{\infty} x^{n(i+2)+1+i} \prod_{j=1}^i (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^{2(n+1)-1} - \sum_{i=3}^{\infty} x^{i(n+1)-1} \prod_{j=1}^{i-2} (1 - x^{n+j}) \\
&= 1 - x^{2(n+1)-1} - \sum_{i=3}^{\infty} x^{i(n+1)-1} \prod_{j=0}^{i-3} (1 - x^{n+1+j}) \\
&= F_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, par construction de Q , on a trouvé notre relation de récurrence :

$$F_n = 1 - x^{2n-1} - x^{3n-1} F_{n+1} \quad (\text{R})$$

Le but est donc maintenant de comprendre le lien avec les nombres pentagonaux. Pour cela, on commence par remarquer que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g_{-k} + 3k + 2 &= g_{-k-1} \\
g_{-k} + 2k + 1 &= g_{k+1}
\end{aligned}$$

On applique la relation (R) à F_{n+1} :

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= 1 - x^{2n+1} - x^{3n+2} F_{n+2} \\
\iff x^{g-n} F_{n+1} &= x^{g-n} (1 - x^{2n+1} - x^{3n+2} F_{n+2}) \\
&= x^{g-n} - x^{g-n+2n+1} - x^{g-n+3n+2} F_{n+2} \\
&= x^{g-n} - x^{g_{n+1}} - x^{g_{-n-1}} F_{n+2}
\end{aligned}$$

De plus, on remarque que $g_0 = 0$, Ainsi en appliquant la formule précédente à $n = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
x^{g^{-0}} F_1 &= F_1 \\
&= (x^{g^{-0}} - x^{g^1}) - x^{g^{-1}} F_2 \\
&= (x^{g^{-0}} - x^{g^1}) - (x^{g^{-1}} - x^{g^2}) + (x^{g^{-2}} - x^{g^3}) + \dots \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{g^k} \quad (\text{H})
\end{aligned}$$

On a donc une première expression de F_1 obtenue par notre formule de récurrence, or on connaît une autre formule, par construction de F_n :

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 - x^{2 \cdot 1 - 1} - \sum_{i=3}^{\infty} x^{i-1} \prod_{j=0}^{i-3} (1 - x^{1+j}) \\
&= 1 - x - \sum_{i=3}^{\infty} x^{i-1} \prod_{j=1}^{i-2} (1 - x^j)
\end{aligned}$$

On cherche, pour finir à faire un lien entre F_1 et le produit qui nous intéresse. En réalité, on cherche même à montrer qu'ils sont égaux, ce qui finirait notre démonstration. En effet, par distributivité, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i) &= (1 - x) - x^2(1 - x) - x^3(1 - x)(1 - x^2) - \dots \\
&= 1 - x - \sum_{i=3}^{\infty} x^{i-1} \prod_{j=1}^{i-2} (1 - x^j) \\
&= F_1
\end{aligned}$$

Ce qui clôt donc notre démonstration avec la relation (H). □

Ainsi, il a prouvé, grâce à un produit de Cauchy la fameuse relation de récursivité.

Théorème I.1 (La formule récursive d'Euler - Euler (1748))

Pour tout entier n strictement positif :

$$p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} (-1)^{k+1} p(n - g_k)$$

Démonstration. Si on couple les deux derniers résultats, on a $\forall x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} \\
&= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)} \\
&= \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{g_k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{g_k} \right) = 1 \\ &\iff \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{g_k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{g_{-k}} \right) = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, en posant les deux suites suivantes, dans l'idée de faire un produit de Cauchy.

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = g_k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = g_{-k} \\ 0, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n x^n = 1 \end{aligned}$$

où on a posé, par deux produits de Cauchy :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n a_k p(n-k) \\ &= \sum_{g_k \leq n | 0 \leq k} (-1)^k p(n-g_k) \\ C'_n &= \sum_{k=0}^n b_k p(n-k) \\ &= \sum_{0 < g_{-k} \leq n | 0 \leq k} (-1)^k p(n-g_{-k}) \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} C_n + C'_n &= \sum_{g_k \leq n} (-1)^k p(n-g_k) \\ &= p(n) + \sum_{g_k \leq n | g_k \neq 0} (-1)^k p(n-g_k) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C'_n x^n = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} (C_n + C'_n) x^n = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} \left(p(n) + \sum_{g_k \leq n | g_k \neq 0} (-1)^k p(n-g_k) \right) x^n = 1 \end{aligned}$$

Ainsi le lemme d'unicité assure, puisque nos séries sont de rayons au moins 1, nous assure que $\forall n \geq 1$

$$p(n) = \sum_{g_k \leq n | g_k \neq 0} (-1)^{k+1} p(n - g_k)$$

D'où, puisque $p(n) = 0$ si $n < 0$, quitte à rajouter des 0, on écrit :

$$p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} (-1)^{k+1} p(n - g_k)$$

Ce qui clôt notre démonstration. □

I.4.3 Un équivalent

Le calcul explicite de $p(n)$ a occupé beaucoup de mathématiciens depuis Euler, mais les premiers à avoir faits un réel pas en avant dans ce sens, sont les mathématiciens **Ramanujan** et **Hardy**, qui prouvent l'équivalent suivant :

Théorème I.2 (Équivalent de Hardy-Ramanujan - (1918))

En l'infini, on a :

$$p(n) \sim \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}}{4n\sqrt{3}}$$

Pour arriver à ce résultat, ils développent une nouvelle méthode de démonstration : la méthode du cercle. Expliquons grossièrement cette méthode :
Tout part du lemme suivant :

Lemme I.1 (Lemme des résidus - Cauchy (1825))

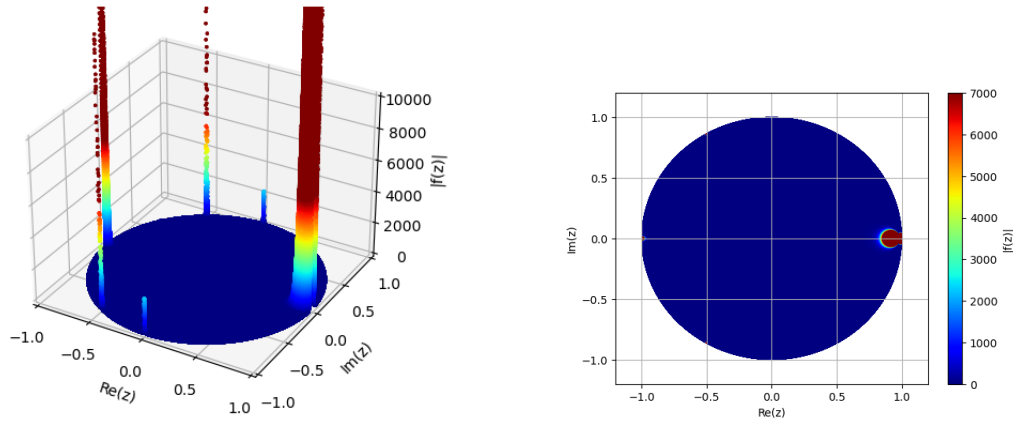
Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est convergente sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

Si $r \in [0; 1[$ et $C_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

L'idée est alors de prendre en compte seulement l'endroit du cercle C_r où la série génératrice a le plus gros module, et prend le dessus sur le reste. On comprend d'ailleurs d'où leur est venu leur idée, lorsque l'on trace informatiquement le module de la série génératrice des partitions sur le disque unité de \mathbb{C} :



L'idée qu'ils ont eu fut de ne considérer que l'influence du *pique* majeur situé en 1.

I.4.4 Une formule explicite

En reprenant les travaux de Hardy et de Ramanujan, le mathématicien **Rademecher** à finalement aboutit à une égalité exacte pour le nombre de partitions de n . En fait, son idée fut de ne plus simplement prendre en compte le pique en 1, mais de prendre en compte tous les piques situés sur chacune des racines de l'unité. Il aboutit alors à la formule suivante :

Théorème I.3 (Formule explicite de $p(n)$ - Rademecher (1937))

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right)$$

où :

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 < h < k \\ \gcd(h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$$

et s est la somme de **Dedekind** :

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right)$$

On voit bien que cette formule n'est pas utilisable dans les faits, bien qu'elle puisse être rendu utile par certaines méthodes, comme par exemple en utilisant les congruences de Ramanujan, qui ne seront pas présentées ici par soucis de simplicité.

I.4.5 Les congruences de Ramanujan

Bien que cette série soit effectivement impossible à calculer *exactement*, elle peut être rendue utilisable en la couplant à un autre résultat : les congruences de Ramanujan. En

effet, celui-ci à remarquer, en regardant les 200 premières valeurs de la suite $(p(n))_n$ certaines congruences du type $p(an + b) \equiv 0[c]$ pour tout n . Ainsi, l'idée est de calculer les premiers termes de la série, et quand l'entier le plus proche du réel que l'on a obtenu vérifie la congruence voulue, on estime que l'on a le bon résultat et on arrête de calculer d'autres termes. Proposons nous alors de nous glisser dans la peau de Ramanujan, et regardons les 100 premières valeurs de notre suite, en essayant de débusquer les congruences mentionnées.

TABLE IV*: $p(n)$.

1 ...	1	39 ...	31185	77 ...	10619863	115 ...	1064144451
2 ...	2	40 ...	37338	78 ...	12132164	116 ...	1188908248
3 ...	3	41 ...	44583	79 ...	13848650	117 ...	1327710076
4 ...	5	42 ...	53174	80 ...	15796476	118 ...	1482074143
5 ...	7	43 ...	63261	81 ...	18004327	119 ...	1653668665
6 ...	11	44 ...	75175	82 ...	20506255	120 ...	1844349560
7 ...	15	45 ...	89134	83 ...	23338469	121 ...	2056148051
8 ...	22	46 ...	105558	84 ...	26543660	122 ...	2291320912
9 ...	30	47 ...	124754	85 ...	30167357	123 ...	2552338241
10 ...	42	48 ...	147273	86 ...	34262962	124 ...	2841940500
11 ...	56	49 ...	173525	87 ...	38887673	125 ...	3163127352
12 ...	77	50 ...	204226	88 ...	44108109	126 ...	3519222692
13 ...	101	51 ...	239943	89 ...	49995925	127 ...	3913864295
14 ...	135	52 ...	281589	90 ...	56634173	128 ...	4351078600
15 ...	176	53 ...	329931	91 ...	64112359	129 ...	4835271870
16 ...	231	54 ...	386155	92 ...	72533807	130 ...	5371315400
17 ...	297	55 ...	451276	93 ...	82010177	131 ...	5964539504
18 ...	385	56 ...	526823	94 ...	92669720	132 ...	6620830889
19 ...	490	57 ...	614154	95 ...	104651419	133 ...	7346629512
20 ...	627	58 ...	715220	96 ...	118114304	134 ...	8149040695
21 ...	792	59 ...	831820	97 ...	133230930	135 ...	9035836076
22 ...	1002	60 ...	966467	98 ...	150198136	136 ...	10015581680
23 ...	1255	61 ...	1121505	99 ...	169229875	137 ...	11097645016
24 ...	1575	62 ...	1300156	100 ...	190569292	138 ...	12292341831
25 ...	1958	63 ...	1505499	101 ...	214481126	139 ...	13610949895
26 ...	2436	64 ...	1741630	102 ...	241265379	140 ...	15065878135
27 ...	3010	65 ...	2012558	103 ...	271248950	141 ...	16670689208
28 ...	3718	66 ...	2323520	104 ...	304801365	142 ...	18440293320
29 ...	4565	67 ...	2679689	105 ...	342325709	143 ...	20390982757
30 ...	5604	68 ...	3087735	106 ...	384276336	144 ...	22540654445
31 ...	6842	69 ...	3554345	107 ...	431149389	145 ...	24908858009
32 ...	8349	70 ...	4087968	108 ...	483502844	146 ...	27517052599
33 ...	10143	71 ...	4697205	109 ...	541946240	147 ...	30388671978
34 ...	12310	72 ...	5392783	110 ...	607163746	148 ...	33549419497
35 ...	14893	73 ...	6185689	111 ...	679903203	149 ...	37027355200
36 ...	17977	74 ...	7089500	112 ...	761002156	150 ...	40853235313
37 ...	21637	75 ...	8118264	113 ...	851376628	151 ...	45060624582
38 ...	26015	76 ...	9289091	114 ...	952050665	152 ...	49686288421

FIGURE 3 – Extrait de l'article de Hardy et Ramanujan où l'on voit une tabulation des valeurs de $p(n)$

En réalité, il existe beaucoup de congruences de Ramanujan, mais celles qu'il a trouvées, et démontrées, sont les suivantes :

Théorème I.4 (Congruences de Ramanujan)

Pour tout entier n , on a :

$$p(5n + 4) \equiv 0[5]$$

$$p(7n + 5) \equiv 0[7]$$

$$p(11n + 6) \equiv 0[11]$$

Démonstration. Pour simplifier l'écriture des calculs, on va utiliser le symbole de Pochhammer :

$$(z; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - zq^k)$$

Et, son extension : $(z, q)_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} (z, q)_n$. On remarque alors que :

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = (x, x)_\infty$$

On va alors calculer la quantité $q(q; q)_\infty^4 \frac{(q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty^5}$ D'un premier côté :

$$q(q; q)_\infty^4 \frac{(q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty^5} = q \frac{(q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty} = q(q^5; q^5) \sum_{n \geq 0} p(n) q^n$$

D'un autre côté, on remarque que : $(q^5; q^5)_\infty \equiv (q; q)_\infty^5 [5]$ (il suffit de faire un binôme de Newton). Ainsi :

$$q(q; q)_\infty^4 \equiv (q^5; q^5) \sum_{n \geq 0} p(n) q^n [5]$$

Ensuite, on utilise l'identité de Jacobi, qui assure :

$$(q; q)_\infty^3 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n + 1) q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Ainsi, en utilisant ce résultat et le théorème des nombres pentagonaux :

$$q(q; q)_\infty^4 = q(q; q)_\infty (q; q)_\infty^3 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{j+k} (2k + 1) q^{1 + \frac{j(3j+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2}}$$

Puis, quelques calculs prouvent, que si $1 + \frac{j(3j+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = 5n + 4$ alors $(2k + 1)$ est un multiple de 5, ce qui conclut la démonstration. □

II Sur certains types contraints de partitions

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés uniquement aux partitions dans le cadre le plus général qu'il soit, mais une grande partie de cette théorie, est celle des partitions où l'on contraint les parts à être un certains type de nombres, où encore à vérifier certaines équations etc...

II.1 Les partitions avec les parts dans un ensemble fixé

Il arrive, dans certains cas, que l'on se demande quel est le nombre de partitions, dont les parts sont toutes pair ? dont les parts sont toutes des nombres de Fibonacci ? dont les parts sont toutes premières ? etc... On notera alors, pour $E \subset \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n, E) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n, \lambda_i \in E \forall i\}$ et $p(n, E) = |\mathcal{P}(n, E)|$. Le plus gros résultat de cette section, est alors le résultat suivant, que l'on obtient facilement en reprenant la démonstration de l'expression de la série génératrice des $p(n)$:

Théorème II.1 (Série génératrice de $p(n, E)$)

Si E est un sous ensemble de \mathbb{N}^* , alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n, E) x^n = \prod_{k \in E} \frac{1}{1 - x^k}$$

Cette formule, permet d'écrire exactement ce que vaut $p(n, E)$ quand E est fini. Voyons cela sur un exemple : On prend $E = \{1, 2\}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n, E) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

Puis, on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$$

Et on redéveloppe en série entière :

$$\frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Ainsi, en regroupant les sommes, et en identifiant les deux séries que l'on a obtenue, on a le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(n, \{1, 2\}) = \frac{2n+3+(-1)^n}{4} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

(résultat que l'on aurait pu attendre par ailleurs par la simple logique). Mais cela permet d'obtenir des formules plus complexes, comme par exemple, avec le même genre de calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(n, \{1, 2, 3\}) = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{12} \right\rfloor$$

C'est par exemple avec ce genre de raisonnement que l'on répond au problème bien connu : un client à des pièces de 3, 5, et 7 euro, de combien de manière peut-il payer une somme de 100 euros ?

II.2 Les partitions avec un nombre de parts contraint

On peut s'intéresser à l'ensemble où vivent les parts, mais on peut aussi s'intéresser à leur nombre, dans plusieurs problèmes, un de ces problèmes pourrait être naïvement,

un groupe de k amis indifferenciables (étrange hypothèse je vous l'accorde) veulent payer n euros, et bien ils ont $p_k(n)$ manière de le faire, où on a noté : $\mathcal{P}_k(n) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n\}$ et $p_k(n) = |\mathcal{P}_k(n)|$. On notera aussi $\mathcal{P}_{\leq k}(n) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_j) \vdash n, j \leq k\}$ et, de manière analogue $p_{\leq k}(n) = |\mathcal{P}_{\leq k}(n)|$. C'est en fait ici que nous allons voir pour la première fois, l'utilité des tableaux de Young. Pour cela il nous faut une nouvelle notion :

Définition II.1 (Partition duale)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une partition, on lui associe une autre partition, appelée sa partition duale $\lambda^* := (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ où :

$$\lambda_i^* = |\{j, \lambda_j \geq i\}|$$

En fait, on peut interpréter cette définition à partir des tableaux de Young : la partition λ^* est la partition associée à la *transposée* du tableau de Young de λ , comme on peut le voir sur le schéma :

II.3 Un exemple de partitions exotiques : les φ -partitions

On a pour l'instant simplement restreint les partitions selon leurs nombres de parts, où les valeurs de celles ci, mais on n'a pas encore demandé aux parts de vérifier une équation, c'est ce que nous allons voir dans cette section, dans un cas assez précis, et qui, nous devons l'avouer, à bien moins d'applications.

Définition II.2 (L'indicatrice d'Euler)

Pour tout entier non nul n , on pose :

$$\varphi(n) = |\{1 \leq k \leq n, k \wedge n = 1\}|$$

C'est cette fonction, qui va conduire nos recherches dans les prochaines pages. On cherche ici, les partitions d'un entier, qui rendent la fonction φ linéaire, de tels partitions sont définies ci-dessous :

Définition II.3 (φ -partition)

oit n un entier, on dit que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ est une φ -partition de n , si $k \geq 2$, et :

$$\varphi(n) = \varphi(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) = \varphi(\lambda_1) + \dots + \varphi(\lambda_k)$$

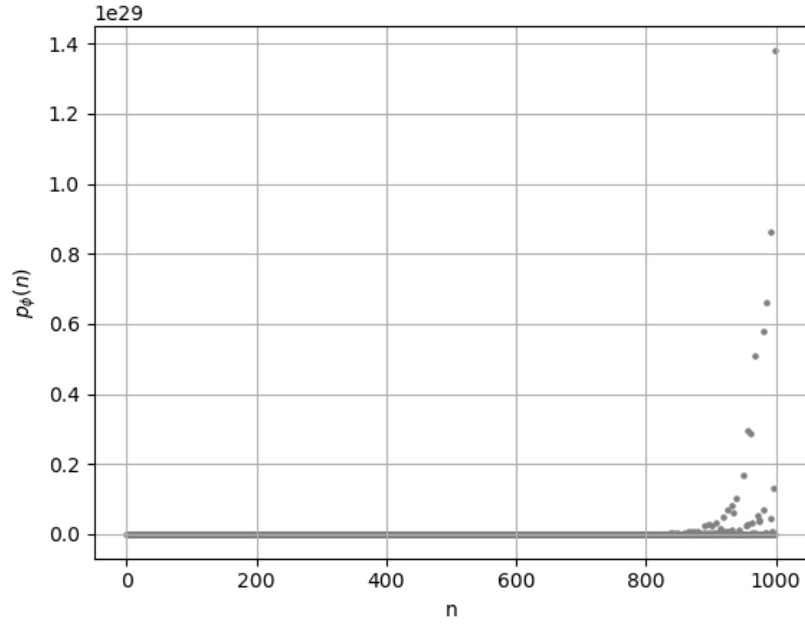
On notera $\mathcal{P}_\varphi(n)$ l'ensemble des φ -partitions de n , et $p_\varphi(n)$ son cardinal, avec, comme toujours, la convention $p_\varphi(0) = 1$

Par exemple, $\lambda = (2, 1)$ est une φ -partition de 3, car :

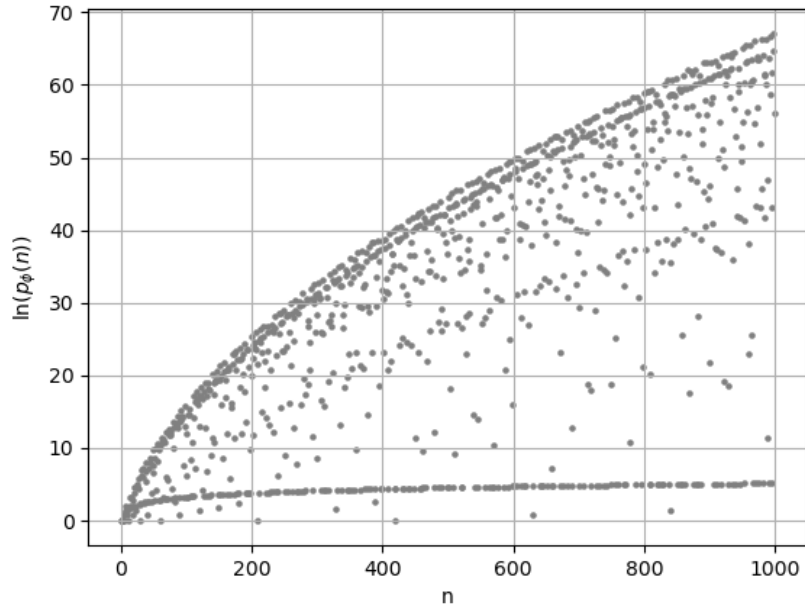
$$2 = \varphi(3) = 1 + 1 = \varphi(2) + \varphi(1)$$

En vérifiant, on voit même que c'est la seule φ -partition de 3.

Ci-dessous on voit le graphe de la fonction p_φ :



Cependant, on n'y lit pas beaucoup d'informations, c'est pourquoi on montre ci-dessous le même graphe, mais où les ordonnées sont en échelles logarithmique :



Remarquons que la condition $lk \geq 2$, permet de se débarrasser de la tentante partition (n) , qui vérifie toujours $\varphi(n) = \varphi(n)$, mais qui ne présente que peu d'intérêts. Cependant, cette définition n'est pas universelle, et on peut retrouver, dans la littérature, (n) une ϕ -partition de n .

Afin de prouver le résultat qui arrive, nous allons avoir besoin du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur (on rappelle ici qu'un entier est dit simple, s'il est le produit des n premiers nombres premiers) :

Lemme II.1 (Majoration d'une fraction de φ)

si s est un entier simple, et si n vérifie $n < 2s$ et $n \neq s$, montrer que :

$$\frac{s}{\varphi(s)} > \frac{n}{\varphi(n)}$$

En regardant les valeurs de p_φ , la première chose qu'il est naturelle de remarquer, sont les endroits où cette fonction s'annule. Et effectivement, ces annulations sont *régulières*, puisque l'on a :

Théorème II.2 (La fonction p_φ détecte les entiers simples)

pour tout entier n strictement supérieur à 1, on a :

$$(p_\varphi(n) = 0) \iff (n \text{ est simple})$$

Démonstration. Faisons donc, un entier n strictement supérieur à 1.

— **Si n n'est pas simple :**

Montrons que n admet au moins une φ -partition. En fait il y a deux manières de ne pas être un nombre simple :

— Soit il existe $(\alpha, p) \in \llbracket 2; +\infty \llbracket \times \mathbb{P}$ tels que $p^\alpha \mid n$:

Dans ce cas, on note $n = p^\alpha t$ où $(t \wedge p = 1, \text{ quitte à prendre un } \alpha \text{ plus grand})$ on a donc :

$$\varphi(n) = \varphi(p^\alpha t) = p\varphi(p^{\alpha-1}t)$$

Ainsi, la partition $\lambda = \langle (p^{\alpha-1}t)^p \rangle$ est une φ -partition de n .

— Soit n est un squarefree, son plus grand diviseur premier est p et il existe un nombre premier $q < p$ tel que q ne divise pas n :

Dans ce cas, on note $n = pj$ (où donc $p \wedge j = 1$) et $p - q = a > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(pj) \\ &\stackrel{p \wedge j = 1}{=} \varphi(p)\varphi(j) \\ &\stackrel{p \in \mathbb{P}}{=} (p-1)\varphi(j) \\ &= (a+q-1)\varphi(j) \\ &= a\varphi(j) + (q-1)\varphi(j) \\ &= a\varphi(j) + \varphi(q)\varphi(j) \\ &\stackrel{q \wedge j = 1}{=} a\varphi(j) + \varphi(qj) \end{aligned}$$

Ainsi la partition $\mu = \langle j^a, (qj)^1 \rangle$ est une φ -partition de n , car :

$$|\mu| = qj + aj = (q+a)j = pj = n$$

— **Si n est simple :**

On va cette fois montrer que n ne peut pas avoir de φ -partition. Supposons donc,

par l'absure, que n en ai une, on la note $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. D'après la définition de tels partitions, on a $k \geq 2$, ainsi, toute part λ_j vérifie $\lambda_j < n$, donc, en particulier :

$$\forall j \in [[1; k]], \lambda_j < 2n$$

Or n est simple, on utilise donc l'exercice ... pour assurer que :

$$\forall j \in [[1; k]], \frac{\lambda_j}{\varphi(\lambda_j)} < \frac{n}{\varphi(n)}$$

Ainsi, on arrive au résultat par une dernière astuce :

$$\begin{aligned} n &= \frac{n}{\varphi(n)} \varphi(n) \\ &= \frac{n}{\varphi(n)} (\varphi(\lambda_1) + \dots + \varphi(\lambda_k)) \\ &= \frac{n}{\varphi(n)} \varphi(\lambda_1) + \dots + \frac{n}{\varphi(n)} \varphi(\lambda_k) \\ &> \frac{\lambda_1}{\varphi(\lambda_1)} \varphi(\lambda_1) + \dots + \frac{\lambda_k}{\varphi(\lambda_k)} \varphi(\lambda_k) \\ &= \lambda_1 + \dots + \lambda_k = |\lambda| = n \end{aligned}$$

Ce qui est absurde

□

III En arithmétique

Les partitions d'un entier, font partie de la théorie additive des nombres, il est alors assez surprenant d'en voir des applications dans la théorie multiplicative des nombres, proposons nous d'en voir quelques unes.

III.1 Lien avec les diviseurs d'un entier

Commençons par définir les objets que nous allons relier aux partitions.

Définition III.1 (Nombre de diviseur de n)

Soit n un entier strictement positif, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n , i.e. :

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

Définition III.2 (Somme des diviseurs de n)

Pour n strictement positif, on note :

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Le lien le plus simple à démontrer, est une relation de récurrence de $p(n)$, qui se sert de σ , et que l'on démontre *facilement*, en dérivant la série entière de p :

Théorème III.1 (Relation entre p et σ)

Pour tout n strictement positif, on a :

$$np(n) = \sum_{k=1}^n p(n-k)\sigma(k)$$

Démonstration. On note :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)x^n$$

On a prouvé, plus tôt, que :

$$P(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{+\infty} (1-x^k)} \quad (1)$$

Enfin, on définit : $\psi(x) = \ln(P(x))$.

Le but est de calculer ψ' de deux manières différentes :

— D'un côté :

$$\psi(x) \stackrel{(1)}{=} - \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k)$$

Donc :

$$\psi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{1-x^k}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} dx^n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{nk} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{1-x^k}\end{aligned}$$

En somme :

$$x\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n$$

— De l'autre :

$$\psi'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$$

En somme :

$$xP'(x) = P(x) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n \right)$$

Autrement dit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} np(n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p(n)x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n)x^n \right)$$

On conclut par un produit de Cauchy, puis par le lemme d'unicité. \square

Cependant, cette relation donne plus d'informations sur p , que sur σ , elle permet par exemple de démontrer, sans avoir besoin de l'équivalent de Hardy-Ramanujan, que :

$$p(n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On retrouve cette démonstration dans [4]. Désormais, on a besoin de nouvelles définitions, pour obtenir le résultat suivant, qui donne une expression du nombre de diviseurs de n , grâce aux partitions.

Définition III.3 (Partitions en parts distinctes)

On dit qu'une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition en parts distinctes si $\lambda_1 > \dots > \lambda_k \geq 1$. On note alors $\mathcal{P}_d(n)$ l'ensemble des partitions de n en parts distinctes.

Définition III.4 (Les suites s_I et s_P)

Pour un entier $n > 0$, on pose :

- s_P : la somme des plus petite parts des partitions en parts distinctes, qui ont un nombre pair de part, i.e.

$$s_P(n) = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{P}_d(n)} \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- s_I : la somme des plus petite parts des partitions en parts distinctes, qui ont un nombre impair de part, i.e.

$$s_I(n) = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{P}_d(n)} \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut alors prouver (preuve dans [66]), à l'aide de certains polynômes : les $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(1-X^{i+1})(1-X^{i+2})\dots(1-X^n)}{1-X^{n-i}}$, le théorème suivant.

Théorème III.2 (Expression de $d(n)$ grâce aux partitions)

Pour un entier n strictement positif,

$$d(n) = s_I(n) - s_P(n)$$

III.2 Un transport - la super-norme

Comme nous l'avons déjà dit, c'est un réel challenge d'étudier des propriétés multiplicative des nombres, à partir des partitions, qui sont une part de la théorie additive des nombres. Mais **Madeline Locus Dawsey**, **Matthew Just** et **Robert Schneider** ont fait, en 2021, un grand pas en avant, en introduisant l'objet suivant :

Définition III.5 (La super-norme)

On appelle la super-norme, l'application suivante :

$$\begin{aligned} \hat{N} : P &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\rightarrow p_{\lambda_1} \times \dots \times p_{\lambda_n} \end{aligned}$$

Où on a noté l'ensemble des nombres premiers : $\mathbb{P} = \{p_1 = 2 < p_2 < \dots\}$. Et où on a prit la convention $\hat{N}(\emptyset) = 1$.

L'idée de poser une telle application peut sembler farfelue, mais en réalité, elle est assez naturelle, car elle respecte la structure des partitions. En effet, si on définit l'ordre de divisibilité sur les partitions de la manière suivante :

Définition III.6 (Relation de divisibilité dans \mathcal{P})

Soient deux partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ on dit que λ divise ν et on note $\lambda \mid \nu$, si ν contient λ au sens suivant :

$$\exists (i_1 < \dots < i_k) \in [[1; r]]^k, \forall j \in [[1; k]], \lambda_j = \nu_{i_j}$$

C'est à dire que si on enlève certaines parts à ν , on peut retrouver λ .

On a le résultat suivant :

Théorème III.3 (Caractérisation de \hat{N})

L'application \hat{N} est la seule bijection $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que pour toute paire de partitions μ et ν :

- $(\mu \mid \nu) \iff (f(\mu) \mid f(\nu))$
- $(\mu \leq_Y \nu) \iff f(\mu) \leq f(\nu)$

Démonstration. Cette démonstration se divise en deux parties : on vérifie tout d'abord que \hat{N} fonctionne, puis, nous prouverons que c'est la *seule* qui marche.

\hat{N} vérifie bien tout ce qu'il faut

— Ça se voit.

\hat{N} est la seule qui fonctionne

On se donne donc f , une application qui vérifié tout ce qu'il faut. Le travail, se décompose en 3 parties, comme nous le verrons dans la suite. Mais pour cela, il nous faut des notations : dans la suite, nous noterons :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, Q_l = \{m \in \mathbb{N}^*, \Omega(m) = l\}$$

— Ce point vise à montrer que $f(\emptyset) = 1$. En effet, $\forall \lambda \in P, \emptyset \mid \lambda$, donc puisque f vérifie le point (i), on a :

$$\forall \lambda \in P, f(\emptyset) \mid f(\lambda)$$

Or f est bijective par hypothèse, donc en particulier, elle est surjective, ce qui force, avec le point ci-dessus, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\emptyset) \mid n$$

Ce qui force, $f(\emptyset) = 1$. Mais pourquoi cela nous interesse ? En fait l'injectivité de f , nous assure que connaître une information sur \emptyset , c'est connaître une information sur tous les autres éléments de P . En effet, puisque $\forall \lambda \in P - \{\emptyset\}, f(\lambda) \neq 1$, or $f(\lambda) \in \mathbb{N}^*$, on déduit alors que :

$$\forall \lambda \in P, (\lambda \neq \emptyset) \Rightarrow (f(\lambda) > 1) \tag{1}$$

— Ensuite, montrons que pour tout entier l non nul : $\bigcup_{j=1}^l Q_j \subset \bigcup_{j=1}^l f(P_j)$.

- Commençons avec le cas $l = 1$,
On veut donc montrer que $Q_1 \subset f(P_1)$, or, par construction $Q_1 = \mathbb{P}$, donc en fait le cas $l = 1$ se traduit par : tout nombre premier est l'image par f d'une partition à une seule part.
Donnons nous donc $p \in \mathbb{P}$, par surjectivité de f , on sait qu'il existe λ une partition telle que $f(\lambda) = p$, à ce stade, remarquons que $\lambda \neq \emptyset$, car sinon $f(\lambda) = 1$, ce qui est absurde car 1 n'est pas premier. Il reste donc à montrer que λ est une partition qui ne possède qu'une seule part. Pour montrer cela, nous allons passer par l'absurde, supposons donc que λ possède $k > 1$ parts. On écrit : $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. En particulier, on a : $(\lambda_1) \mid \lambda$ donc, avec la propriété (i), $f((\lambda_1)) \mid f(\lambda) = p$, puisque p est premier, cela force : $f((\lambda_1)) \in \{1, p\}$, or $(\lambda_1) \neq \emptyset$, donc avec le résultat (1), on a $f((\lambda_1)) > 1$, donc on a : $f((\lambda_1)) = p = f(\lambda)$, donc, par injectivité de f , on a : $\lambda = (\lambda_1)$, ce qui est absurde car λ est une partition en $k > 1$ parts.
- Pour $l \geq 2$,
On va en fait montrer une inclusion des complémentaires, pour ça on utilise le fait que, puisque tout nombre premier se décompose en produit de nombre premier :

$$\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} Q_i = \mathbb{N}^* - \{1\}$$

Et l'union est disjointe par construction des Q_i .
De plus, puisque $\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} P_i = P - \{\emptyset\}$ par bijectivité de f , on a :

$$\bigsqcup_{i=1}^{+\infty} f(P_i) = \mathbb{N}^* - \{1\}$$

Ainsi, si on montre que :

$$\bigsqcup_{i=l+1}^{+\infty} f(P_i) \subset \bigsqcup_{i=l+1}^{+\infty} Q_i$$

En passant au complémentaire dans \mathbb{N}^* , on aura le résultat.
Ainsi, on se donne un entier j strictement plus grand que l , et on se donne $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ une partition en j parts. On veut montrer que $f(\lambda)$ possède strictement plus que l diviseurs premiers (comptés avec multiplicité), on se sert en fait de la chaîne de divisibilité suivante :

$$(\lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \dots \mid \lambda$$

Donc, par la propriété (i), on a :

$$f((\lambda_1)) \mid f((\lambda_1, \lambda_2)) \mid f((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \mid \dots \mid f(\lambda)$$

Et, par injectivité de f , les valeurs sont distinctes, donc à chaque étape, on ajoute au moins un diviseur premier à $f(\lambda)$, donc $f(\lambda) \in Q_k$ où $k \geq j > l$. D'où l'inclusion voulue, et on conclut en passant au complémentaire comme annoncé.

Ainsi, à ce stade, nous avons montré que

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \bigcup_{j=1}^l Q_j \subset \bigcup_{j=1}^l f(P_j) \quad (2)$$

- Poussons le travail plus loin, en montrant que $\forall l \in \mathbb{N}^*, f(P_l) = Q_l$.
Pour cela, nous allons travailler par récurrence forte sur l .

(I) \rightarrow Pour $l = 1$, on veut montrer que $Q_1 = f(P_1)$.

Or, par le résultat (2), utilisé avec $l = 1$, on a déjà $Q_1 \subset f(P_1)$. On veut donc l'inclusion réciproque, pour cela, on se donne $\lambda \in P_1$ et on note : $f(\lambda) = n$, on décompose ensuite n en produit de facteurs premiers, de sorte que $f(\lambda) = n = p_{i_1} \times \dots \times p_{i_k}$ ainsi, $n \in Q_k$, notre but est donc de montrer que $k = 1$, pour conclure quand à ce cas. Or, on utilise (2), puisque $\forall j \in [[1; k]]$, $p_{i_j} \in Q_1$, donc $\exists \lambda_j \in P_1$, telle que $f(\lambda_j) = p_{i_j}$. À ce stade on a donc :

$$f(\lambda) = f(\lambda_1) \times \dots \times f(\lambda_k)$$

Or, pour tout i dans $[[1; k]]$, on utilise de nouveau (i), pour obtenir :

$$f(\lambda_i) \mid f(\lambda) \Rightarrow \lambda_i \mid \lambda$$

Or puisque λ_i et λ sont non vide et ne possèdent qu'une part, le fait que l'une divise l'autre les force à être égales. Ainsi, $\forall i \in [[1; k]]$, $\lambda_i = \lambda$. Ainsi, l'égalité ci-dessus devient :

$$f(\lambda) = f(\lambda)^k$$

Or, λ possédant exactement une part, elle est en particulier non vide, donc, avec (1), $f(\lambda) > 1$, ce qui force $k = 1$, ce qui nous assure l'initialisation comme annoncé.

(H) \rightarrow Soit $l \geq 2$ fixé, on suppose, par récurrence forte que pour tout k inférieur à l , on a : $f(P_k) = Q_k$.

On utilise (2) appliqué à $l + 1$ pour assurer que :

$$\bigsqcup_{j=1}^{l+1} Q_j \subset \bigsqcup_{j=1}^{l+1} f(P_j)$$

Or, on a, par hypophèse de récurrence :

$$\bigsqcup_{j=1}^l Q_j = \bigsqcup_{j=1}^l f(P_j)$$

Ainsi, ces deux informations, nous assurent en fait que :

$$Q_{l+1} \subset f(P_{l+1})$$

On va, comme pour le cas $l = 1$, montrer l'inclusion réciproque. Pour cela, on suppose par l'absurde, l'existence d'une partition λ en $l + 1$ parts telle que, $f(\lambda)$ possède strictement plus que $l + 1$ diviseurs premiers (comptés avec multiplicité), ce qui se traduit : $\Omega(f(\lambda)) \stackrel{def}{=} r \geq l + 2$. On écrit alors :

$$f(\lambda) = p_{i_1} \times \dots \times p_{i_r}$$

Posons dès lors $m \stackrel{def}{=} p_{i_1} \times \dots \times p_{i_{l+1}}$. On a $m \in Q_{l+1}$, ainsi, l'inclusion ci-dessus assure l'existence d'une partition μ en $l + 1$ parts telle que $f(\mu) = m$. Or, par

construction, $f(\mu) = m \mid f(\lambda)$ donc, en utilisant encore une fois la propriété (i), on en déduit :

$$\mu \mid \lambda$$

Or μ possède strictement plus de parts que λ , cette divisibilité est alors absurde (remarquons qu'il n'était pas nécessaire ici de passer par l'absurde, nous aurions pu simplement supposer $r \geq l$, cette divisibilité aurait donné $r = l$). Donc, l'absurdité débusquée, nous assure que $\Omega(f(\lambda)) \leq l + 1$, or $\Omega(f(\lambda)) > l$, car sinon, λ aurait strictement moins de parts, par les égalités ensemblistes plus haut. Bref, nous avons obtenu l'inclusion réciproque, d'où l'hérédité.

La propriété étant initialisée et héréditaire, le principe de récurrence nous assure que :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, f(P_l) = Q_l \quad (3)$$

- Il est temps de conclure, en effet cet ultime étape vise à prouver que $f = \hat{N}$. Remarquons juste, en ce temps de transition, que jusqu'ici, on s'est servi (énormément!) de la propriété (i) pour avoir des résultats, mais encore jamais de la propriété (ii), en fait c'est cette dernière qui nous offrira la conclusion. Nous allons donc montrer que

$$\forall l \geq 1, \forall \lambda \in \bigsqcup_{j=1}^l P_j, f(\lambda) = \hat{N}(\lambda)$$

Si nous partitionnons ainsi le travail par la valeur de l , c'est pour mettre en place notre récurrence forte, qui portera justement sur l .

Cependant, avant de se presser sur la récurrence, il nous faut un lemme qui nous sera essentiel dans la suite :

Le résultat est vrai pour toute partition rectangulaire.

Prouvons donc cela. On se donne $\lambda = (k, k, \dots, k)$ partition rectangulaire de dimension $n \times k$. En fait, on sait que $\hat{N}(\lambda) = p_k^n$ donc cela va diriger notre attention vers l'antécédent de p_k^n par f (qui existe bien car f surjective). On se donne donc une partition μ telle que $f(\mu) = p_k^n$. Par l'absurde, si μ contient une part μ_i distincte de k , on sait que l'on a : $(\mu_i) \mid \mu$, donc $f((\mu_i)) \mid f(\mu)$ avec (i) or $\mu_i \neq k$, donc $f((\mu_i)) \neq p_k$ par injectivité de f , on aboutit alors à une absurdité car on a, avec (3), que $f(P_1) = \mathbb{P}$, donc $f((\mu_i)) \in \mathbb{P}$, ainsi $(f((\mu_i)) \neq p_k) \Rightarrow (\text{pgcd}(f((\mu_i)), p_k) = 1)$, or les seuls diviseurs de p_k^n sont des puissances de p_k ($f((\mu_i)) \neq 1$ avec (1) car $(\mu_i) \neq \emptyset$).

Ce raisonnement par l'absurde nous enseigne que si μ est une partition telle que $f(\mu) = p_k^n$, alors toutes les parts de μ valent k , reste à voir combien il y en a, en effet à ce stade, μ est une partition rectangulaire de dimension $j \times k$, nous voulons montrer que $j = n$. L'astuce est de remarquer que $p_k^n \in Q_n$, donc en utilisant (3), on a directement le fait que μ possède n parts.

$$\text{Pour toute partition rectangulaire } \lambda, \text{ on a : } f(\lambda) = \hat{N}(\lambda) \quad (4)$$

Il est donc grand temps de conclure, avec la récurrence forte mentionnée plus tôt.

(I) \rightarrow pour $l = 1$,

Notre but est de montrer que $\forall \lambda = (k) \in P_1$, on a $f(\lambda) = \hat{N}(\lambda) = p_k$.

En fait par récurrence immédiate :

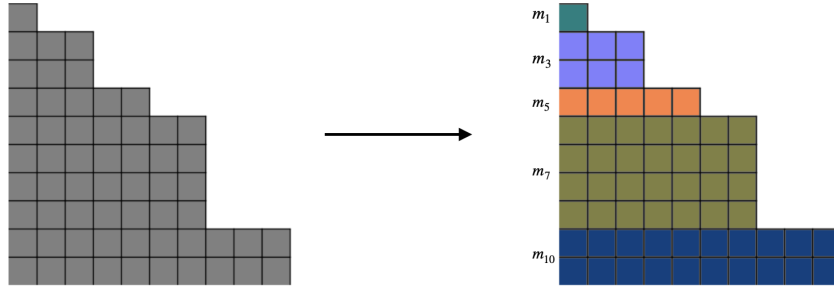
(I') \rightarrow on veut montrer que $f((1)) = p_1 = 2$, cela vient du fait, qu'avec (3), $f(P_1) = \mathbb{P}$, donc si $f((1)) \neq p_1$, alors $f((1)) > 2$, or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(1) \leq_Y (k)$ donc, avec la propriété (ii) $\forall \lambda \in P_1$, $f(\lambda) \geq f((1)) > 2$, ainsi 2 ne serait jamais atteint, ce qui empêcherait l'égalité ensembliste $f(P_1) = \mathbb{P}$.

(H') \rightarrow l'hérédité fonctionne de la même manière.

Ainsi, le principe de récurrence nous assure que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f((k)) = p_k = \hat{N}(k)$. On a donc l'initialisation.

(H) \rightarrow On suppose maintenant, que f et \hat{N} coïncident sur l'ensemble des partitions qui possèdent au plus l parts, où l est un entier strictement positif fixé.

L'idée est donc de se donner μ une partition qui admet exactement $l + 1$ parts. On va regrouper les parts selon leurs valeurs, pour obtenir une multitude de rectangle.



Pour cela, on utilise la représentation des partitions qui prend en compte le nombre d'occurrences de chaque part : $\mu = ((\mu_1, m_1), \dots, (\mu_k, m_k))$, et puisque μ admet $l + 1$ parts, on en déduit que $\sum m_i = l + 1$. On s'est donc ramené à k partitions rectangulaires. Et pour chacune on a :

$$\forall i \in [[1; k]], ((\mu_i, m_i)) \mid \mu$$

Donc, en utilisant encore une fois la propriété (i), on en déduit que :

$$\forall i \in [[1; k]], f(((\mu_i, m_i))) \mid f(\mu)$$

Or (μ_i, m_i) est une partition rectangulaire, donc $f(((\mu_i, m_i))) = \hat{N}(((\mu_i, m_i))) = p_{\mu_i}^{m_i}$. Ainsi, on a en fait :

$$\forall i \in [[1; k]], p_{\mu_i}^{m_i} \mid f(\mu)$$

Or les p_{μ_i} étant des nombres premiers distincts. $\forall i \neq j$, on a : $\text{pgcd}(p_{\mu_i}^{m_i}, p_{\mu_j}^{m_j}) = 1$. Ainsi, avec le lemme chinois, on obtient :

$$\prod_{i=1}^k p_{\mu_i}^{m_i} \mid f(\mu)$$

La clef pour conclure, est de voir que $\Omega(\prod_{i=1}^k p_{\mu_i}^{m_i}) = \sum_{i=1}^k m_i = l + 1$. Or, puisque $\mu \in P_{l+1}$, avec (3), on sait que $f(\mu) \in Q_{l+1}$, ce qui force donc :

$$f(\mu) = \prod_{i=1}^k p_{\mu_i}^{m_i} = \hat{N}(\mu)$$

Ceci étant vrai pour toute partition μ qui admet $l + 1$ parts, on a prouvé l'hérédité.

Ainsi, à ce stade, on sait que f et \hat{N} coïncident sur l'ensemble des partitions non vides. Pour avoir l'égalité, il suffit de l'avoir sur l'ensemble vide, ce que l'on a prouvé en (1), car $\hat{N}(\emptyset) = 1$. □

Cette application à par exemple été très récemment utilisée, dans [1] (en 2025), pour trouver une approximation du n -ième nombre premier, ils ont en effet trouvé, grâce aux partitions, la formule suivante :

$$p_n = 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left\lceil \frac{d(j)}{2} \right\rceil + \epsilon(n)$$

Où $\epsilon(n)$ est négligeable devant l'autre terme en $+\infty$. En fait, ils ont utilisé pour cela, que puisque \hat{N} est bijective :

$$p_{n+1} - p_n = |\{\lambda \in \mathcal{P}, p_n \leq \hat{N}(\lambda) < p_{n+1}\}|$$

Mais elle ne sert pas qu'à ça : on en verra notamment une autre utilité dans la partie suivante.

III.3 Preuve de résultats par les partitions

III.3.1 Minoration de la fonction π de Gauβ

L'objet qui nous interesse dans cette section, est la fonction suivante :

Définition III.7 (Fonction de comptage de Gauβ)

Soit x un réel strictement positif, on note :

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P}, p \leq x\}|$$

Pour un tel réel x , on note $M(x) := [[1; [x]]]$ et $\Lambda_{M(x)} := \{\hat{N}^{-1}(k), k \in M(x)\}$. On peut alors aisément prouver que :

$$\pi(x) = \max_{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_{M(x)}} \lambda_1$$

En partant de là, on peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème III.4 (Minoration de π)

Pour tout réel $x \geq 2$, on a :

$$\pi(x) \geq \frac{\ln([x])}{\ln([\log_2(x)] + 1)}$$

Démonstration. Fixons un réel positif x , on note alors :

$$M := \{1, 2, \dots, \lfloor x \rfloor\}$$

Et on note :

$$\Lambda_M := \{\hat{N}^{-1}(k), k \in M\}$$

La première part de tous les éléments λ de Λ_M , correspond à l'indice du plus grand nombre premier divisant $\hat{N}(\lambda)$. Et le plus grand de ces nombres, est, par définition $\pi(x)$, en somme :

$$\max_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_M} \lambda_1 = \pi(x) \quad (1)$$

On sait aussi, que le plus grand nombre de parts que l'on peut obtenir, correspond à des partitions composée que de 1 (ce que l'on a pu voir plus tôt). Donc :

$$\max_{\lambda \in \Lambda_M} l(\lambda) = \lfloor \log_2(x) \rfloor \quad (2)$$

On note alors, par commodité $h := \lfloor \log_2(x) \rfloor$ et $w := \pi(x)$. On introduit alors la partition :

$$\nu = < h^w >$$

Ainsi, (1) et (2) assurent :

$$\forall \lambda \in \Lambda_M, \lambda \leq_Y \nu \quad (3)$$

Où la relation d'ordre \leq_Y , est définie chapitre 3. Durant ce chapitre (page ...), nous avons d'ailleurs vu, que pour une partition rectangle, telle que ν , on connaît le nombre de partition plus petite que celle-ci au sens de \leq_Y . notons alors :

$$\mathcal{A}_\nu := \{\lambda \in \mathcal{P}, \lambda \leq_Y \nu\}$$

On a donc, d'après (3) :

$$\Lambda_M \subset \mathcal{A}_\nu$$

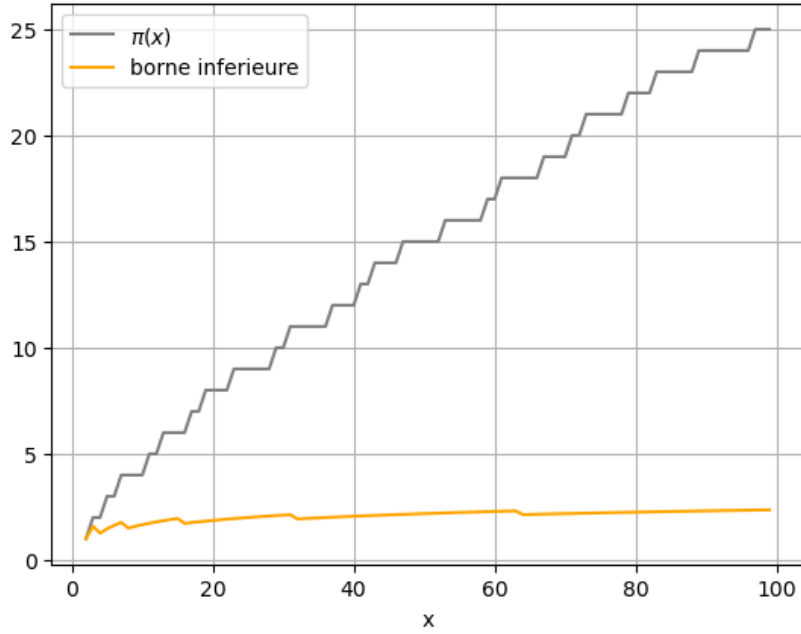
En somme :

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= |M| \\ &\stackrel{\hat{N} \text{ bijective}}{=} |\Lambda_M| \\ &\leq |\mathcal{A}_\nu| \\ &\stackrel{\text{p. ?}}{=} \binom{h+w}{w} \\ &= \frac{(h+w)!}{h!w!} \\ &= \frac{1}{w!} (h+1)(h+2)\dots(h+w) \\ &= (h+1)\left(\frac{h}{2}+1\right)\dots\left(\frac{h}{w}+1\right) \\ &\leq (h+1)^w \\ &= (\lfloor \log_2(x) \rfloor + 1)^{\pi(x)} \end{aligned}$$

En réarrangeant cette inégalité, on obtient alors :

$$\pi(x) \geq \frac{\ln(\lfloor x \rfloor)}{\ln(\lfloor \log_2(x) \rfloor + 1)}$$

□



III.3.2 Le théorème des deux carrés de Fermat

Les partitions aident, en réalité, à démontrer une seule implication de ce théorème, elle permettent de prouver :

Théorème III.5 (Le théorème des deux carrés de Fermat)

Si p est un nombre premier impair et que $p \equiv 1[4]$, alors p s'écrit comme somme de deux carrés.

Démonstration. Fixons donc un nombre premier impair p . Pour montrer le résultat voulu, nous n'allons nous intéresser qu'à un certains type de partition de p : les partitions en 2 blocs, nous noterons cet ensemble :

$$\mathcal{B}_2(p) := \{\lambda \vdash p, \lambda = \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle\}$$

La démonstration se décomposera alors en deux parties : nous commencerons par montrer que $|\mathcal{B}_2(p)|$ est impair, puis nous construirons un lien entre ce cardinal, et le nombre de manières d'écrire p comme somme de deux carrés.

- Commençons donc par montrer l'impairité de $|\mathcal{B}_2(p)|$. Pour se faire, nous allons considérer les partitions de l'ensemble $\mathcal{B}_2(p)$, et leur dual. En effet, si $\lambda \in \mathcal{B}_2(p)$, alors $\lambda = \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle$, donc : $\lambda^* = \langle (f_1 + f_2)^{\lambda_2}, f_1^{\lambda_2 - \lambda_1} \rangle$, ainsi $\lambda^* \in \mathcal{B}_2(p)$, donc $\mathcal{B}_2(p)$ est stable par conjugaison. On regroupe donc les partitions par 2 : elle, et leur dual, en ne considérant que les partitions qui ne sont pas auto-duales. Ce qui nous reste sous la main, après avoir enlevé un nombre pair d'éléments de $\mathcal{B}_2(p)$, c'est l'ensemble des partitions auto-duales de $\mathcal{B}_2(p)$, noté : $\mathcal{AD}_2(p)$, on vient donc de prouver :

$$|\mathcal{B}_2(p)| \equiv |\mathcal{AD}_2(p)|[2]$$

Nous allons maintenant prouver, que $|\mathcal{AD}_2(p)| = 1$, pour cela, on procède par analyse-synthèse : soit $\lambda = \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle \in \mathcal{AD}_2(p)$, on a déjà dit, que pour une telle partition $\lambda^* = \langle (f_1 + f_2)^{\lambda_2}, f_1^{\lambda_2 - \lambda_1} \rangle$, donc, puisque $\lambda = \lambda^*$, on obtient ces relations :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = \lambda_1 \\ f_1 = \lambda_2 \\ f_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p &= |\lambda| \\ &= f_1 \lambda_1 + f_2 \lambda_2 \\ &= \lambda_2(2\lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

Or, p est un nombre premier, donc :

$$\lambda_2 = 1 \text{ ou } 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1$$

Or, il est impossible que $2\lambda_1 - \lambda_2 = 1$, car cela forcerai $\lambda_2 = p$, or $\lambda_2 < p$, d'où l'absurdité, ainsi : $\lambda_2 = 1$ et $2\lambda_1 - \lambda_2 = p$, ce qui force :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{p+1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_2 = \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

On assure ainsi l'unicité d'une éventuelle partition de p auto-duale en deux blocs, l'existence vient en même temps, puisque l'on vient d'en exhiber une qui convient, en fait, on a prouvé :

$$\mathcal{AD}_2(p) = \langle \frac{p+1}{2}, 1^{\frac{p-1}{2}} \rangle$$

Donc, comme annoncé $|\mathcal{AD}_2(p)| = 1$, et donc :

$$|\mathcal{B}_2(p)| \equiv 1[2]$$

— Désormais, il nous reste à faire un lien entre $\mathcal{B}_2(p)$, et le nombre de manière d'écrire p comme somme de deux carrés. Pour cela, partitionnons l'ensemble en trois parties :

$$\mathcal{B}_2(p) = A \sqcup B \sqcup C$$

Où :

$$\begin{cases} A = \{ \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle \in \mathcal{B}_2(p), f_1 \neq f_2, \text{ où } f_1 \neq \lambda_1 \text{ ou } f_2 \neq \lambda_2 \} \\ B = \{ \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle \in \mathcal{B}_2(p), f_1 = f_2 \} \\ C = \{ \langle \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} \rangle \in \mathcal{B}_2(p), f_1 \neq f_2, \text{ où } f_1 = \lambda_1 \text{ et } f_2 = \lambda_2 \} \end{cases}$$

Ainsi :

$$|\mathcal{B}_2(p)| = |A| + |B| + |C|$$

occupons nous de chacun des cardinaux :

- Commençons par A , pour l'étudier, nous introduisons une application *transposée* $T : \mathcal{B}_2(p) \rightarrow \mathcal{B}_2(p)$, définie comme suit :

$$T(< \lambda_1^{f_1}, \lambda_2^{f_2} >) = \begin{cases} < f_1^{\lambda_1}, f_2^{\lambda_2} > & \text{si } f_1 > f_2 \\ < f_2^{\lambda_2}, f_1^{\lambda_1} > & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors clair que A est stable par T , que T est involutive, et qu'elle n'admet pas de points fixe sur A , cela assure :

$$|A| \equiv 0[2]$$

- Pour ce qui est de B , l'exercice précédent donne :

$$|B| = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$$

- Enfin, on remarque que le cardinal de $|C|$ donne le nombre de manière d'écrire p comme somme de deux carrés distincts
Ainsi, on a :

$$|\mathcal{B}_2(p)| = |A| + \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + |C| \equiv \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + |C|[2]$$

C'est-à-dire :

$$\left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + |C| \equiv 1[2]$$

Et, si $p \equiv 1[4]$, alors $\frac{p-1}{2} \equiv 0[2]$, donc, pour un tel p :

$$|C| \equiv 1[2]$$

Donc $|C| \geq 1$, ce qui conclut notre démonstration, par l'interprétation trouvée de $|C|$. □

□

IV Les partitions en algèbre

Maintenant que nous avons réglé les questions qui nous viennent initialement, il est temps de répondre à une question importante : à quoi les partitions peuvent servir ? Commençons ici à voir leurs applications en algèbre.

IV.1 En algèbre linéaire

On travaille ici en dimension finie notée n , nous allons nous intéresser à l'espace $M_n(\mathbf{k})$ où \mathbf{k} est un corps. Ici, tout né à partir des matrices nilpotentes. En effet, on leur associe à chacune une partition de la manière suivante :

Définition IV.1 (Partition associée à une matrice nilpotente)

Soit $N \in M_n(\mathbf{k})$ une matrice nilpotente de nilindice r . On note pour tout entier i :

- $d_i := \dim(\ker(N^i))$
- $\mu_{i+1} := d_{i+1} - d_i$

On associe alors à N la partition $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_r) \vdash n$.

On peut alors prouver que deux matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles sont associées à la même partition. Ce qui prouve le lemme suivant :

Lemme IV.1 (Nombre de classes de conjugaisons nilpotentes)

Soit n un entier strictement positif, il y a $p(n)$ classes d'équivalence (au sens de la similitude) chez les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbf{k})$.

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, il nous suffit de montrer le lemme suivant :

Soit u un endomorphisme nilpotent de E de nilindice r . Si on note $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ sa partition associée. Il existe une base β de E telle que :

$$Mat_{\beta}(u) = \begin{bmatrix} J_{\mu_1} & & & & (0) \\ & J_{\mu_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{\mu_{r-1}} & \\ (0) & & & & J_{\mu_r} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Avec les J_{μ_i} qui correspondent au bloc de jordan cités plus tôt. On notera cette matrice $J(\mu_1, \dots, \mu_r)$.

On commence la démonstration en construisant r sous espaces de E : F_1, \dots, F_r tels que :

- $\forall k \in [[1; r]], F_k$ est un supplémentaire de $\ker(u^{k-1})$ dans $\ker(u^k)$, i.e. $\ker(u^k) = \ker(u^{k-1}) \oplus F_k$
- $\forall k \in [[2; r]], u(F_k) \subset F_{k-1}$

On va les construire par récurrence :

Intitialisation :

On construit F_r comme un supplémentaire de $\ker(u^{r-1})$ dans E . $E = \ker(u^{r-1}) \oplus F_r$.

Hérédité :

On se donne $k < r$ et on suppose qu'on a déjà construit F_r, \dots, F_{r-k} qui vérifient les bonnes propriétés.

Ainsi, on a $\ker(u^{r-k-2}) \oplus u(F_{r-k}) \subset \ker(u^{r-k-1})$

En effet, si $y \in u(\ker(u^s))$, alors $\exists x \in \ker(u^s)$ tel que $y = u(x)$ et ainsi $u^{s-1}(y) = u^s(x) = 0$. Ainsi, $y \in \ker(u^{s-1})$, d'où $u(\ker(u^s)) \subset \ker(u^{s-1})$.

De plus, si $y \in u(F_{r-k}) \cap \ker(u^{r-k-2})$. Alors $\exists x \in F_{r-k}$ tel que $y = u(x)$ et $u^{r-k-2}(y) = 0$. Donc $u^{r-k-1}(x) = 0$, i.e. $x \in \ker(u^{r-k-1})$, donc $x \in F_{r-k} \cap \ker(u^{r-k-1}) \stackrel{H.R.}{=} \{0\}$. Donc $y = u(x) = 0$, donc $\ker(u^{r-k-2})$ et $u(F_{r-k})$ sont en somme directe.

Pour finir, puisque $F_{r-k} \subset \ker(u^{r-k})$, on a $u(F_{r-k}) \subset u(\ker(u^{r-k})) \subset \ker(u^{r-k-1})$ et $\ker(u^{r-k-2}) \subset \ker(u^{r-k-1})$.

Ainsi, on complète l'inclusion qu'on vient de prouver par F_{r-k-1} tel que :
 $\ker(u^{r-k-1}) = \ker(u^{r-k-2}) \oplus F_{r-k-1}$

On remarque que, par construction, on a bien $\dim(F_i) = \mu_i$.

Sur chaque sous espace F_i , u induit un endomorphisme nilpotent de nilindice μ_i . Donc en prenant x_0 tel que $u^{\mu_i-1}(x_0) \neq 0$, la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{\mu_i-1}(x_0))$ constitue une base de F_i .

En concaténant toutes ces bases, on obtient alors une base β telle que :

$$Mat_{\beta}(u) = \begin{bmatrix} J_{\mu_1} & & & & (0) \\ & J_{\mu_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{\mu_{r-1}} & \\ (0) & & & & J_{\mu_r} \end{bmatrix} = J(\mu_1, \dots, \mu_r)$$

D'où le résultat. □

On arrive enfin à un résultat plus large, en utilisant la décomposition de **Jordan** qui ne se limite plus aux matrices nilpotentes.

Théorème IV.1 (Nombre de classes partageant un polynôme)

Soit $P := (X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_k)^{m_k} \in \mathbf{k}[X]$ de degré n , avec les α_i deux à deux distincts.

Il y a $p(m_1) \times \dots \times p(m_k)$ classes d'équivalence (au sens de la similitude) sur l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{k})$ qui ont comme polynôme caractéristique P .

IV.2 En algèbre générale

IV.2.1 Sur le nombre de groupe abélien de cardinal n

On sait que l'on peut classer les groupes abéliens finis, grâce au théorème de classification, mais celui-ci offre en fait bien plus : il offre le nombre de groupe abélien d'un certains cardinal. En effet, en l'utilisant, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème IV.2 (Nombre de groupes abéliens de cardinal n)

Soit n un entier strictement positif, on se donne sa décomposition en nombre premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$. Il y a alors $g(n)$ groupes abéliens de cardinal n , où $g(n)$ est donné par :

$$g(n) = p(\alpha_1) \times \dots \times p(\alpha_k)$$

Il est intéressant ici de voir la ressemblance entre ce théorème, et le théorème précédent.

IV.2.2 Concernant le groupe symétrique

On sait qu'avec des partitions, nous allons étudier des objets finis, ainsi si on veut étudier des groupes, nous allons étudier des groupes finis. Or, tous les groupes finis s'injectent dans un sous-groupe d'un groupe symétrique fini. En étudiant ce groupe, on étudie donc en quelque sorte un large panel de groupe.

Ici, le lien avec les partitions se construit à travers la décomposition en produit de cycles à supports disjoints. En effet, si on se donne une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on sait qu'à permutation près, il existe une unique famille de cycles à supports disjoints tels que $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_k$ (ici on prend en compte, et on écrit les cycles de longueur 1).

Définition IV.2 (Partition associée à une permutation)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on se donne c_1, \dots, c_k les cycles apparaissant dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints (on fait apparaître les cycles de longueur 1). On note alors, pour i dans $[[1; k]]$, l_i la longueur de c_i , en les ordonnant de sorte à ce que $l_1 \geq \dots \geq l_k$. On associe alors à σ la partition

$$\lambda(\sigma) = (l_1, \dots, l_k) \vdash n$$

On considère alors la relation d'équivalence sur \mathfrak{S}_n : $\sigma \sim \gamma$ si et seulement si $\exists \tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma = \tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$. On peut alors montrer que pour tout couple de permutations de $[[1; n]]$ (σ, γ) , on a :

$$(\sigma \sim \gamma) \iff (\lambda(\sigma) = \lambda(\gamma))$$

On prouve alors par suite le résultat suivant.

Théorème IV.3 (Nombre de classe d'équivalence de \mathfrak{S}_n)

Pour tout entier n strictement positif, il y a $p(n)$ classes de conjugaison (au sens de \sim) dans \mathfrak{S}_n .

On peut alors montrer, grâce à ce résultat, un autre résultat amusant.

Proposition IV.1 (Probabilité de commutation dans \mathfrak{S}_n)

Dans \mathfrak{S}_n , on a, si σ et τ sont deux permutations prises uniformément au hasard :

$$\mathbb{P}(\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma) = \frac{p(n)}{n!}$$

Pour cela, on prouve le lemme suivant, bien plus large :

Lemme IV.2 (Probabilité de commutation)

Soit G un groupe fini, non abélien. On note n son cardinal, et k le nombre de classe de conjugaisons dans G .

La probabilité que deux éléments g et h pris uniformément au hasard dans G commutent $\mathbb{P}(gh = hg)$ vérifie :

$$\mathbb{P}(gh = hg) = \frac{k}{n}$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on va appliquer la formule de Burnside, avec une action bien choisie. On choisit pour cela, l'action de conjugaison :

$$\begin{aligned} \Phi : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

Les orbites pour cette action sont exactement les classes de conjugaisons. Ainsi, le $|X/G|$ qui apparaît dans la formule est en fait le nombre de classes de conjugaisons : k . Ainsi, par la formule de Burnside :

$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Et, par construction : $Fix(g) = \{h \in G, ghg^{-1} = h\} = \{h \in G, gh = hg\} \stackrel{def}{=} Z_g$. On a alors :

$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |Z_g| \tag{1}$$

Indépendamment, puisque les éléments sont choisis uniformément au hasard, on a :

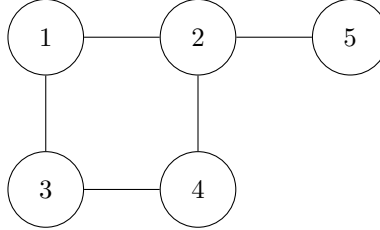
$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma) &= \frac{\text{nombre de couple d'éléments qui commutent entre eux}}{\text{nombre de couple}} \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot (\text{nombre de couple d'éléments qui commutent entre eux}) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{(g,h) \in G^2} \begin{cases} 1 & \text{si } gh = hg \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \begin{cases} 1 & \text{si } gh = hg \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} |Z_g| \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |Z_g| \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{k}{n}
 \end{aligned}$$

□

V En combinatoire

V.1 Problème de réalisation d'un graphe

Commençons par les définitions. On se donne un graphe non orienté, et on se donne la famille des degrés de ce graphe, c'est à dire, pour chaque sommet, le nombre de sommet auquel il est connecté, par exemple pour le graphe suivant :



la famille des degrés est donnée par $(2,3,2,2,1)$. Le problème est alors le suivant :

"Étant donné une famille d'entier strictement positifs, est-il possible de construire un graphe tel que la famille de ses degrés correspond"

On remarque que l'on peut réordonner la famille donnée, quitte à renuméroté les sommets, de sorte à avoir une suite de degré décroissante. On se retrouve alors avec des familles d'entiers strictement positifs décroissantes, que l'on peut identifier à des partitions. D'où la définition suivante.

Définition V.1 (Partition graphique)

On dit que la partition λ est graphique, s'il existe un graphe \mathcal{G} tel que la famille de ses degré est λ , on dit alors que \mathcal{G} réalise λ .

On peut alors reformuler le problème précédent de la manière suivante :

"On cherche à déterminer les partitions graphiques"

On pourrait par exemple se demander si la partition $(5, 4, 4, 2, 1)$ est graphique. Ce problème à été résolu de plusieurs manières, on a par exemple un algorithme en $\mathcal{O}(|\lambda|)$ pour déterminer si une partition λ est graphique, et qui fournit un graphe réalisant λ . Mais on a aussi plusieurs critères, à vrai dire 7, tous décrit dans [?], nous présenterons ici, l'un d'entre eux, qui ne demande pas de connaissance annexe sur les partitions.

Théorème V.1 (Le critère de Nash-Williams)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une partition d'un nombre pair. On note $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*)$ sa partition duale. On a :

λ est graphique
si et seulement si

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda)]], \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i^* - 1)$$

Ce critère est intéressant, il permet par exemple de prouver le résultat suivant :

Proposition V.1 (Partition duale d'une partition graphique)

oit λ une partition d'un nombre pair, on note λ^* sa partition duale, on a :

$$\lambda \text{ est graphique} \Rightarrow \lambda^* \text{ n'est pas graphique}$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe une partition λ qui soit graphique, et telle que sa partition duale λ^* soit elle aussi graphique, on a alors, par le critère de Nash-Williams appliqué à ces des partitions :

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda)]], \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i^* - 1) \quad (1)$$

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda^*)]], \sum_{i=1}^k \lambda_i^* \leq \sum_{i=1}^k ((\lambda^*)_i^* - 1) \quad (2)$$

Or, on a déjà vu que $tr(\lambda^*) = tr(\lambda)$, et on sait que l'opération $*$ est involutive, i.e. : $(\lambda^*)^* = \lambda$. On peut donc réécrire (2) :

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda)]], \sum_{i=1}^k \lambda_i^* \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1) \quad (3)$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer (1)+(3), qui nous donne :

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda)]], \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \lambda_i^*) \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \lambda_i^* - 2)$$

Autrement dit,

$$\forall k \in [[1; tr(\lambda)]], 0 \leq -2k$$

Ce qui est absurde. Donc une partition et son dual ne peuvent pas être simultanément graphique. \square

On obtient alors, sans trop d'efforts, un joli résultat :

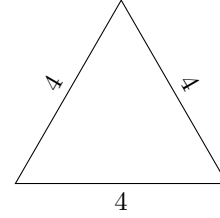
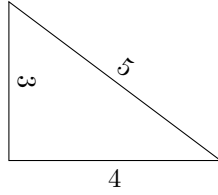
$$\mathbb{P}(\lambda \text{ est graphique}) \leq \frac{1}{2}$$

V.2 De la géométrie combinatoire

L'idée de cette section, est de déterminer le nombre de polygones, à côtés entiers, de périmètre fixé n . Qui sont non isométriques (on expliquera ce que l'on entend pas là dans la deuxième sous-section de cette partie, car elle n'intervient pas dans la première).

V.2.1 Des triangles à côtés entiers

Commençons par les triangles. On a par exemple ci-dessous 3 triangles de côtés entiers, de périmètre 12 :



On va avoir besoin de nouvelles définitions, afin de répondre à la question.

Définition V.2 (Nombre de partitions à nombre de part fixé)

On note, pour $n > 0$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$p_k(n) = |\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n\}|$$

Définition V.3 (La fonction Δ)

Pour tout entier $n > 0$, on note $\Delta(n)$, le nombre de triangles, à côté entiers de périmètre n .

On peut alors prouver le résultat suivant :

Théorème V.2 (Expression de Δ)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

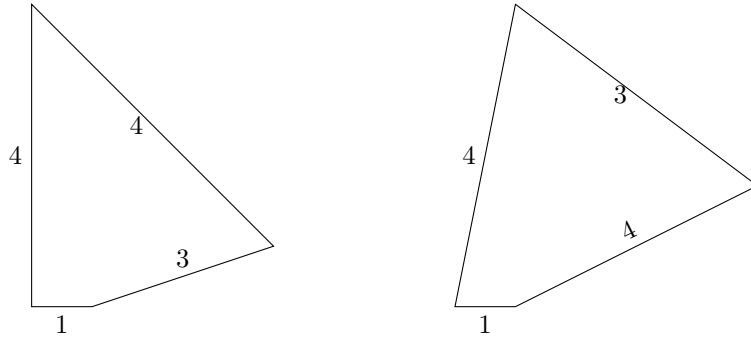
$$\Delta(n) = p_3(n) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_2(j)$$

Cela permet alors, puisque l'on peut indépendamment prouver que : $p_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $p_3(n) = \left\lceil \frac{n^2}{12} \right\rceil$, que l'on a :

$$\Delta(n) = \left\lceil \frac{n^2}{12} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

V.2.2 Des quadrilatères à côtés entiers

On se pose la même question pour des quadrilatères à côtés entiers à périmètre fixés. Mais cette fois, on doit définir ce que signifie que deux figures soient isométriques. En effet, on dira que les deux quadrilatères suivant, de périmètre 12, sont isométriques, car leurs côtés sont les mêmes à réordonnement près.



On définit cette fois :

Définition V.4 (La fonction \square)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\square(n)$ le nombre de quadrilatère non isométriques à côtés entiers, de périmètre n .

On peut alors montrer

Théorème V.3 (Expression de $\square(n)$)

Pour tout n dans \mathbb{N}^* ,

$$\square(n) = p_4(n) - \sum_{j=3}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_3(j)$$

Ainsi, un peu de travail sur $p_4(n)$ et après calculs :

$$\square(n) = \left[\frac{n(n+3)(2n+3)}{576} - \frac{(-1)^n n(n-5)}{192} \right]$$

Il est possible aussi de faire la même chose pour les pentagones, grâce aux partitions, cependant, pour le cas générale des m -gones, il est plus intéressant de passer par les actions de groupes, sur le groupe diédral, on a par exemple des résultats dans [1].

V.3 Les partitions pavables

Définition V.5 (Partition pavable)

On dit qu'une partition est pavable, si et seulement si son tableau de Young est pavable par des dominos, on note alors : $\mathcal{P}_{\text{domino}}(n)$ l'ensemble des partition pavables de n et $p_{\text{domino}}(n)$ son cardinal.

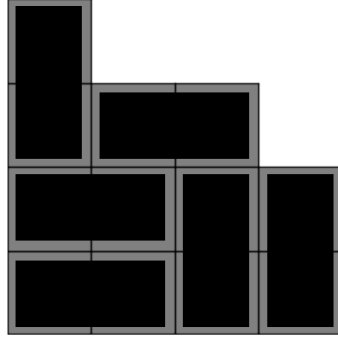


FIGURE 4 – Un pavage par des dominos du tableau de Young : $Y((4, 4, 3, 1))$

On peut alors prouver que :

Théorème V.4 (Caractérisation des partitions pavables)

Une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est pavable, si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \lambda_n = 2 \sum_{n=1}^k (-1)^n \left\lfloor \frac{\lambda_n}{2} \right\rfloor$$

Et ce résultat permet alors de prouver :

Proposition V.2 (Encadrement de $p_{\heartsuit}(n)$)

Pour tout entier $n > 0$:

$$p(n) \leq p_{\heartsuit}(2n) \leq p(2n)$$

Démonstration. Commençons par l'inégalité la plus simple : on a, par construction : $\mathcal{P}_{\heartsuit}(2n) \subset \mathcal{P}(2n)$, donc on a directement, et sans effort :

$$p_{\heartsuit}(2n) \leq p(2n)$$

Suons un peu plus pour tenter de prouver l'autre inégalité. D'après le théorème de caractérisation des partitions pavables par des dominos, λ est une partition pavable si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor} (\lambda_{2n} \mod 2) = \sum_{n=0}^{l(\lambda) - \lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor - 1} (\lambda_{2n+1} \mod 2)$$

L'idée de la démonstration est d'alors simplement partitionner les partitions pavables selon la valeur commune des sommes ci dessus. Cela nous conduit à écrire :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{\heartsuit}(2n) \\ &= \sqcup_{i=0}^n \{ \lambda \in \mathcal{P}(2n), \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor} (\lambda_{2n} \mod 2) = \sum_{n=0}^{l(\lambda) - \lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor - 1} (\lambda_{2n+1} \mod 2) = i \} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque l'union est disjointe, en passant au cardinaux, on obtient :

$$p_{\heartsuit}(2n) = \sum_{i=0}^n |\{\lambda \in \mathcal{P}(2n), \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor} (\lambda_{2n} \bmod 2) = i, \sum_{n=0}^{l(\lambda) - \lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor - 1} (\lambda_{2n+1} \bmod 2) = i\}|$$

En particulier, puisque tous les cardinaux sont positifs, on obtient, en minorant tous les termes où i est non nul par 0 :

$$p_{\heartsuit}(2n) \geq |\{\lambda \in \mathcal{P}(2n), \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor} (\lambda_{2n} \bmod 2) = 0, \sum_{n=0}^{l(\lambda) - \lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor - 1} (\lambda_{2n+1} \bmod 2) = 0\}| \quad (1)$$

Il est maintenant temps d'avluer le cardinal qu'il nous reste, pour cela caractérisons les partitions de cet ensemble. Donnons nous pour cela λ une partition telle que :

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor} (\lambda_{2n} \bmod 2) = 0, \sum_{n=0}^{l(\lambda) - \lfloor \frac{l(\lambda)}{2} \rfloor - 1} (\lambda_{2n+1} \bmod 2) = 0$$

Remarquons, que les deux sommes, sont des sommes de termes positifs, étant toutes les deux nulles, tous les termes qui composent ces deux sommes se doivent d'être nuls. On a donc :

$$\forall i \in [[1; l(\lambda)]], \lambda_i \bmod 2 = 0$$

Donc, λ est une partition de $2n$ composée uniquement de parts paires.

Réciproquement, il est facile de voir que si une partition de $2n$ n'est composée que de parts paires, alors elle vérifie l'égalité mentionnée ci-dessus.

En bref, le cardinal que l'on cherche à déterminé, est en fait celui des partitions en parts paires, de $2n$. Et les premières identités, étudiées dans le chapitre 1 de cet ouvrage, nous assure que ce nombre vaut exactement $p(n)$, on a donc conclut avec (1). \square

VI La physique à la rescousse de Hardy et Ramanujan

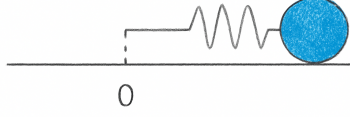
On se souvient de l'équivalent de Hardy-Ramanujan, cité dans les premières pages de ce papier, et qui assure que :

$$p(n) \sim \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}}{4n\sqrt{3}}$$

L'idée dans cette partie, est de retrouver, par de la physique, la partie en exponentielle. En fait, nous allons nous servir des lois physiques, pour obtenir :

$$\ln(p(n)) \sim 2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}$$

Toute l'idée, vient du fait, que pour un oscillateur harmonique, comme celui présenté ci-dessous, d'un point de vue de la mécanique quantique, les seuls niveaux d'énergies permis sont quantifiés et valent $E_n = n\hbar\omega$



Et, le fait que cette relation linéaire en n , nous est particulièrement utile, puisque pour obtenir une énergie E_N , on a $p(N)$ manières, composées de plusieurs diveaux d'énergies aux pulsations $n\omega$. Par exemple, pour avoir une énergie de E_3 , on a 3 ($= p(3)$) manières :

$$E_3 = E_3 = E_2 + E_1 = E_1 + E_1 + E_1$$

Ainsi, on définit un état par une partition, qui décrivent les sous-niveaux d'énergie du système. On note alors, pour une partitions $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ l'énergie de l'état correspondant :

$$E_\lambda = \lambda_1 \hbar\omega + \dots \lambda_k \hbar\omega$$

Calculons alors la probabilité p_λ d'être dans un certains état λ . D'après la loi de Boltzmann, on sait que :

$$p_\lambda \propto \exp\left(-\frac{E_\lambda}{k_B T}\right)$$

On note alors Z la constante de normalisation, i.e. :

$$p_\lambda = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_\lambda}{k_B T}\right) \quad (1)$$

Dans un premier temps, calculons Z :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \exp\left(-\frac{E_\lambda}{k_B T}\right) \\ &= \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_2=0}^{+\infty} \dots \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}(n_1 + 2n_2 + \dots)\right) \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}n_1\right)\right) \left(\sum_{n_2=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}2n_2\right)\right) \dots \\ &= \prod_{l=1}^{+\infty} \left(\sum_{n_l=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}ln_l\right)\right) \\ &= \prod_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}l\right)} \end{aligned} \quad (2)$$

Le but va être de passer par l'énergie libre, calculons donc pour se faire, l'énergie moyenne du système :

$$\langle E \rangle = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} p_\lambda E_\lambda$$

On peut donc avoir une expression de l'entropie moyenne du système :

$$S = -k_B \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} p_\lambda \ln(p_\lambda) \stackrel{(1)}{=} -k_B \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} p_\lambda \left(-\frac{E_\lambda}{k_B T} - \ln(Z) \right) = \frac{\langle E \rangle}{T} + k_B \ln(Z)$$

Ainsi, on a accès à l'énergie libre F de notre système :

$$F = \langle E \rangle - TS = -k_B T \ln(Z)$$

On se sert alors enfin de notre calcul de Z :

$$\begin{aligned} F &= -k_B T \ln(Z) \\ &= -k_B T \ln \left(\prod_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} l\right)} \right) \\ &= k_B T \sum_{l=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} l\right) \right) \end{aligned}$$

L'idée, est alors de considérer que : $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$ (i.e. limite de très haute température), ce qui revient à supposer N très grand, ce qu'on verra plus tard, et alors de pouvoir approximer la somme de F , à une intégrale, ainsi :

$$\begin{aligned} F &= k_B T \sum_{l=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} l\right) \right) \\ &\approx k_B T \int_{l=0}^{+\infty} \ln \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} l\right) \right) dl \\ &\stackrel{x=\frac{\hbar\omega}{k_B T} l}{=} \frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \int_{x=0}^{+\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= -\frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \int_{x=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} dx \\ &= -\frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} dx \\ &= -\frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{(k_B T)^2}{\hbar\omega} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer l'entropie, car on sait, par construction de F , que : $S = -\frac{dF}{dT}$ on obtient alors :

$$S = -\frac{dF}{dT} = \frac{k_B^2 T \pi^2}{\hbar\omega 3}$$

Enfin, cela nous permet de calculer d'une autre manière l'énergie moyenne :

$$\langle E \rangle = F + TS = -\frac{(k_B T)^2 \pi^2}{\hbar\omega 6} + \frac{(k_B T)^2 \pi^2}{\hbar\omega 3} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^2 \hbar\omega$$

Or, $\langle E \rangle = N\hbar\omega$, on voit donc ici, que T grand, signifie N grand, comme annoncé. Puisque l'on a calculé $\langle E \rangle$ et S , on peut faire le lien entre les deux. Les deux dernières expressions donnent en effet :

$$S = k_B \pi \sqrt{\frac{2 \langle E \rangle}{3\hbar\omega}}$$

Or, on vient de le dire, $\langle E \rangle = N\hbar\omega$, donc :

$$S = k_B 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

D'un autre côté, on peut exprimer l'entropie sous une autre forme : $S = k_B \ln(W_N)$ où W_N est le nombre d'état pour atteindre l'énergie E_N , qui est, comme on l'a déjà dit : $p(N)$.

En somme :

$$S = k_B \ln(p(N)) = k_B 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

Donc :

$$\ln(p(N)) = 2\pi \sqrt{\frac{N}{6}}$$

On obtient donc le résultat annoncé. On vient donc de prouver une partie de l'équivalent de Hardy-Ramanujan, avec un ressort, une bille et un zeste de mécanique quantique. En réalité, toutes les mathématiques se cachent dans les probabilités de Boltzmann, qui ne se servent pas de la méthode du cercle, car développées au 19ème siècle, alors que l'équivalent et la méthode du cercles sont prouvés au 20ème siècle.

Références

Ouvrages généraux sur les partitions

- [1] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748.
- [2] Herbert S. Wilf, *Lectures on Integer Partitions*, 2000.
- [3] George E. Andrews & Kimmo Eriksson, *INTEGER PARTITIONS*, 2004.
- [4] George E. Andrews, *THE THEORY OF PARTITIONS*, 2003.
- [5] Ed Sandifer, *How Euler Did It : Philip Naudé's problem*, 2005.
- [6] Benyahia-Tani Nesrine, *Autour des partitions d'un entier*, 2011.
- [7] Hossam Shoman, *Partitioning of Positive Integers*, 2013.
- [8] Jehanne Dousse, *Integer Partitions : Rogers-Ramanujan Type Identities And Asymptotics*, 2015.
- [9] Gabriel Pallier, *Deux thèmes de combinatoire*, 2016.

Étude de la fonction p

- [10] Scott Ahlgren & Ken Ono, *Addition and Counting : The Arithmetic of Partitions*, 2001.
- [11] Arnold K. Nopfmacher & M. E. Mays, *The Sum Of Distinct Parts In Compositions And Partitions*, 2003.
- [12] George E. Andrews & Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook Part III*, 2012.
- [13] Sarbajit Mazumdar & Jyotishka Ray Choudhury, *Partition Function : Some Properties & A New Bound on $p(n)$* , 2018.

Théorème des nombres pentagonaux d'Euler

- [14] Jordan Bell, *Euler And The Pentagonal Number Theorem*, 2006.
- [15] Dick Koch, *The Pentagonal Number Theorem and All That*, 2016.

La démonstration de l'équivalent de Ramanujan-Hardy

- [16] G. H. Hardy & S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, 1916.
- [17] D. J. Newman, *A simplified proof of the partition formula*, 1962.

La démonstration de la formule de Rademecher pour $p(n)$

- [18] Lambert A'Campo, *The Circle Method, Applications to the Partition Function, and Beyond*, 2017.
- [19] Joël Gay et Gabriel Lellouch sous la direction d'Olivier Benoist *Partitions de n* , 2011.

Sur des types spéciaux de partitions

Les partitions avec des parts et les multiplicités dans un ensemble

- [20] Noga Alon, *Restricted integer partition functions*, 2012.
- [21] E. Rodney Canfield & Herbert S. Wilf, *On the growth of restricted integer partition functions*, 2018.

Les partitions de Goldbach

- [22] Max See Chin Woon, *On Partitions of Goldbach's Conjecture*, 2000.
- [23] Krishnama Raju Kanchu & Subhash Kak *On Randomness of Goldbach Sequences*, 2012.
- [24] Subhash Kak *Goldbach Partitions and Sequences*, 2014.
- [25] Ganesh Reddy Pittu *Generating Primes Using Partitions*, 2015.

Les partitions de Fibonacci

- [26] L. Carlitz, Richard Scoville & V.E.Hoggatt jr. , *Fibonacci Representations*, 1972.
- [27] Sam Chow & Tom Slattery, *On Fibonacci Partitions*, 2020.
- [28] Tom Kempton, *The Dynamics of the Fibonacci Partition Function*, 2023.

Les partitions de Graham

- [29] R. L. Graham, *A Theorem On Partitions*, 1963.
- [30] Max A. Alekseyev, *On partitions into squares of distinct integers whose reciprocals sum to 1*, 2018.
- [31] Byungchan Kim, Ji Young Kim, Chong Gyu Lee, Sang June Lee, & Poo-Sung Park, *On The Existence Of Graham Partitions With Congruence Conditions* , 2021.

Les partitions binaires

- [32] Carl-Erik Fröberg, *Accurate Estimation Of The Number Of Binary Partitions* , 1977.
- [33] Bartosz Sobolewski & Maciej Ulas, *Values Of Binary Partition Function Represented By A Sum Of Three Squares* , 2022.

Les partitions hyperbinaires

- [34] Neil J. Calkin & Herbert S. Wilf, *Binary partitions of integers and Stern-Brocot-like trees* , 1997.
- [35] Neil J. Calkin & Herbert S. Wilf, *Recounting the Rationals* , 2000.

- [36] Kevin M. Courtright & James A. Sellers, *Arithmetic Properties For Hyper m -ary Partition Functions* , 2004.
- [37] Richard P. Stanley & Herbert S. Wilf, *Refining the Stern Diatomic Sequence* , 2010.
- [38] Sam Northshield, *Stern's Diatomic Sequence $0,1,1,2,1,3,2,3,1,4,\dots$* , 2010.

Les partitions premières

- [39] P. T. Bateman, & Paul Erdős, *Partitions into primes.* , 1955.
- [40] L. Moser, *On The Sum Of Consecutive Primes*, 1962.
- [41] Robert E. Dressler, *A Stronger Bertrand's Postulate With An Application To Partitions* , 1972.
- [42] S. Constantin, *Asymptotic Behavior Of The Number Of Prime Partitions,?* .

Les φ -partitions

- [43] Patricia Jones, *ϕ -Partitions.*, 1990.
- [44] Patricia Jones, *Reduced ϕ -Partitions Of Positive Integers*, 1992.
- [45] Corey Powell, *On The Uniqueness Of Reduced Phi-Partitions*, 1994.
- [46] Jun Wang & Xin Wang, *On The Set Of Reduced ϕ -Partitions Of A Positive Integer* , 2004.

Les partitions complètes

- [47] J. L. Brown *Note on Complete Sequences of Integers.*, 1961.
- [48] SeungKyung Park, *Complete Partitions*, 1996 .
- [49] HoKyu Lee, *Double perfect partitions*, 2006 .

Les partitions séquentiellement congruentes

- [50] Maxwell Schneider & Robert Schneider, *Sequentially Congruent Partitions and Related Bijections*, 2018.
- [51] Robert Schneider, James A. Sellers & Ian Wagner, *Sequentially Congruent Partitions and Partitions into Squares*, 2021.
- [52] James Sellers, *Sequentially Congruent Partitions and Partitions into Squares*, 2021.
- [53] Ezekiel Cochran, Madeline Locus Dawsey, Emma Harrell & Samuel Saunders, *Bijections, Generalizations, And Other Propperties Of Sequentially Congruent Partitions* , 2022.
- [54] Madeline Locus Dawsey, *Properties of sequentially congruent partitions* , 2024.

En algèbre

En algèbre linéaire

- [55] Igor Kortchemski , *Réduction de Jordan et tableaux de Young*, 2006.
- [56] Agrégation externe , *Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents*, 2019.
- [57] Akita , *Diagrammes de Young et réduction de Jordan*, 2013-2014.

En algèbre générale

Dénombrement sur les groupes abéliens

- [58] Gabriel LEPETIT , *Théorème de structure des groupes abéliens finis*, 2011.

En arithmétique

Les articles concernant les normes

- [59] Jeffrey C. Lagarias , *Characterizing the supernorm partition statistic*, 2023.
- [60] Madeline Locus Dawsey, Matthew Just, et Robert Schneider , *A “SUPER-NORMAL” PARTITION STATISTIC*, 2023.
- [61] Robert Schneider, sous la supervision de Ken Ono *Eulerian series, zeta functions and the arithmetic of partitions*, 2020.
- [62] Robert Schneider *Partition zeta functions*, 2016.
- [63] Robert Schneider et Andrew V. Sills *THE PRODUCT OF PARTS OR “NORM” OF A PARTITION*, 2021.
- [64] Anton Shakov, *Infinite Primes From Integer Partitions*, 2024.

Liens avec le produit de convolution de Dirichlet

- [65] Hiroshi NARUSE, *On a Formula of Morita’s Partition function $q(n)$* , 1986.

Lien entre les partitions et les diviseurs d’un nombre

- [66] Wang Zheng Bing, Robbert Fokkink & Wan Fokkink, *A relation between partitions and the number of divisors*, 1995.
- [67] Thomas J. Osler, Abdulkadir Hassen, & Tirupathi R. Chandrupatla *Surprising Connections between Partitions and Divisors*, 2007.

Une démonstration du théorème des 4 carrés de Fermat par les partitions

- [68] A. David Christopher, *A partition-theoretic proof of Fermat’s Two Squares Theorem* , 2015.

Génération des objets

Génération de $\mathcal{P}(n)$

- [69] Antoine Zoghbi *Algorithms for Generating Integer Partitions* , 1993.
- [70] Antoine Zoghbi & Ivan Stojmenovic *Fast algorithms for generating integer partitions* , 1998.

En combinatoire

Les partitions graphiques

- [71] Gerard Sierksma & Han Hoogeveen , *Seven Criteria for Integer Sequences Being Graphic*, 1991.
- [72] H. J. RYSER , *COMBINATORIAL PROPERTIES OF MATRICES OF ZEROS AND ONES*, 1957.
- [73] C. Berge , *HYPERGRAPHS, Combinatorics of Finite Sets*, 1973.

Un problème d'optimisation

- [74] Konrad Engel, Tadeusz Radzik, Jan-Christoph & Schlage-Puchta, *Optimal integer partitions*, 2013.

De la géométrie combinatoire

- [75] G. E. Andrews, *A Note On Partitions And Triangles With Integer Sides*, 1979.
- [76] R. Honsberger, *Mathematical Gems III, vol. 9*, 1985.
- [77] Shalosh B. Ekhad, *A Maple One-Line Proof of George Andrews's Formula that Says that the Number of Triangles with Integer Sides Whose Perimeter is n Equals $\{n^2/12\} - \lfloor n/4 \rfloor \lfloor (n+2)/4 \rfloor$* , 2012.
- [78] James East & Ron Niles, *Integer polygons of given perimeter*, 2018.
- [79] Sadek Bouroubi, *A closed formula for the number of ordered quadrilaterals with sides of integer length and fixed perimeter*, 2022.

En topologie

La topologie des partitions

- [80] Vladimir A. Shlyk , *Polytopes of partitions of numbers*, 2004.
- [81] Vladimir A. Shlyk , *Number of Vertices of the Polytope of Integer Partitions and Factorization of the Partitioned Number*, 2018.

Les partitions pour la topologie

- [82] Igor Pak , *Four Questions on Birkhoff Polytope*, 1999.

En analyse

Les polynômes associés aux partitions

- [83] Madeline Locus Dawsey, Tyler Russell, et Dannie Urban , *Derivatives and Integrals of Polynomials Associated with Integer Partitions*, 2022.

En physique

- [84] Jonathan Tannenhauser , *Entropy, Strings, and Partitions of Integers*, 2010.
- [85] Andrij Rovenchak , *Statistical mechanics approach in the counting of integer partitions*, 2016.