

# **Projet de mathématiques de 3<sup>e</sup> année**

Courbes de Bézier

Anindo MOUSSARD

Nicolas TOURRETTE

Version du 23 janvier 2019

## Résumé

*Ce projet de mathématiques avait pour objectif de nous ouvrir à un grand domaine des mathématiques appliqués à l'industrie et à l'informatique : les courbes de Bézier, ou comment représenter une fonction par ces courbes définies par des points associés à des poids.*

*Dans ce rapport, nous présenterons tout d'abord les diverses notions théoriques concernant les courbes de Bézier ainsi que leurs applications concrètes dans le milieu professionnel. Ensuite, nous développerons les calculs qui nous ont permis d'aboutir au programme présenté avec ce rapport. Enfin, nous présenterons rapidement dans un dernier chapitre les résultats obtenus par la programmation du traceur de courbes de Bézier rationnelles que nous avons implémenté en C++.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Recherches bibliographiques</b>	<b>2</b>
1.1	Courbes de Bézier . . . . .	2
1.1.1	Histoire et utilisation . . . . .	2
1.1.2	Principes généraux utilisés . . . . .	2
1.1.3	Définition générale . . . . .	2
1.1.4	Courbes de Bézier rationnelles . . . . .	3
1.1.5	Algorithme de Casteljau . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Théorie mathématique</b>	<b>5</b>
2.1	Détermination des asymptotes . . . . .	5
2.1.1	Asymptote horizontale . . . . .	5
2.1.2	Asymptote verticale . . . . .	5
2.1.3	Asymptote oblique . . . . .	5
2.2	Détermination des points de contrôle et de leur poids . . . . .	6
2.2.1	Degré 3 . . . . .	6
2.2.2	Degré 2 . . . . .	7
2.2.3	Degré 1 . . . . .	8
2.3	Changement de paramètres homographiques . . . . .	9
	<b>Bibliographie</b>	<b>10</b>

# Recherches bibliographiques

## 1.1. Courbes de Bézier

### 1.1.1. Histoire et utilisation

Ces courbes ont été découvertes par l'ingénieur Pierre Bézier vers la fin des années 1950 alors qu'il travaillait sur la forme des carrosseries chez Renault. Il souhaitait pouvoir atteindre une très grande précision dans leur découpe, notamment par les machines à commande numérique, pilotées par des logiciels de CAO<sup>1</sup>. L'objectif était de pouvoir faire tracer à un ordinateur une courbe "à main levée", chose extrêmement difficile sur une matrice de pixels carrés.

Ces courbes sont maintenant utilisées dans de très nombreux domaines : 3D, CAO pour l'industrie, le dessin vectoriel et l'imagerie, les polices typographiques, en conception graphique (degré 3 principalement) etc.

### 1.1.2. Principes généraux utilisés

Les courbes de Bézier sont des courbes définies par  $n$  points, nommés *points de contrôle*, généralement au nombre de quatre (d'où  $n = 3$ ). On obtient alors une courbe de Bézier d'ordre  $n - 1$ . Pierre Bézier a également utilisé les polynômes de BERNSTEIN et le théorème sous-jacent qui est le théorème d'approximation de WEIERSTRASS. Il utilise également la notion géométrique de barycentre pour réaliser ses courbes.

### 1.1.3. Définition générale

Une courbe de Bézier d'ordre  $n$  est définie par les  $n + 1$  points de contrôle distincts notés  $A_0, A_1, \dots, A_n$  (du plan  $\mathbb{R}^2$ ) et par une courbe paramétrée  $M(t)$  définie sur  $t \in [0, 1]$  associée à ces points. Cette courbe paramétrée s'exprime :

$$M(t) = B_0(t)A_0 + B_1(t)A_1 + \dots + B_n(t)A_n \quad (1.1)$$

Les coefficients  $B_i(t)$  doivent être positifs ou nuls et leur somme égale à 1. Pierre Bézier a utilisé les polynômes de BERNSTEIN pour les  $B_i(t)$ .

Finalement, on a la courbe de Bézier d'ordre  $n$  définie par

$$M(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)A_i \quad (1.2)$$

pour  $t \in [0, 1]$  et  $B_i(t)$  le polynôme de BERNSTEIN d'ordre  $n$ . Elle est notée  $\mathcal{B}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ .

---

1. Conception Assistée par Ordinateur.

Si le point  $A_i$  est de coordonnées  $x$  et  $y$ , on a alors que le point  $M(t)$  de la courbe de Bézier a des coordonnées telles que

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)y_i \end{cases}$$

Cette courbe passe par les points  $A_0$  et  $A_n$  qui sont les points de départ et d'arrivée de la courbe, mais ne passe pas par les autres points qui servent uniquement à définir la trajectoire de la courbe de Bézier.

**Polynôme de Bernstein** Le polynôme de BERNSTEIN d'ordre  $n$  est le polynôme de la forme

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (1.3)$$

*Exemple* On prend par exemple les courbes de Bézier de degrés 1, 2 et 3, et on obtient leurs équation :

$$M1(t) = A_0(1-t) + A_1t \quad (1.4)$$

$$M3(t) = A_0(1-t)^2 + 2A_1t(1-t) + A_2t^2 \quad (1.5)$$

$$M3(t) = A_0(1-t)^3 + 3A_1t(1-t)^2 + 3A_2t^2(t-1) + A_3t^3 \quad (1.6)$$

#### 1.1.4. Courbes de Bézier rationnelles

Un point  $M(t)$  (avec  $t \in [0, 1]$ ) appartient à la courbe de Bézier rationnelle, définie par les points de contrôle  $A_i$  et leur poids associé  $\omega_i > 0$ , si, et seulement si, le point  $M(t)$  vérifie l'équation suivante :

$$M(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i(t) A_i \omega_i}{\sum_{i=0}^n B_i(t) \omega_i} \quad (1.7)$$

#### 1.1.5. Algorithme de Casteljau

L'algorithme de Casteljau permet de tracer une courbe de Bézier en prenant le milieu de chaque segment formé par les points de contrôle  $n$  et  $n+1$ . On utilise la figure 1.1 pour expliciter l'algorithme :

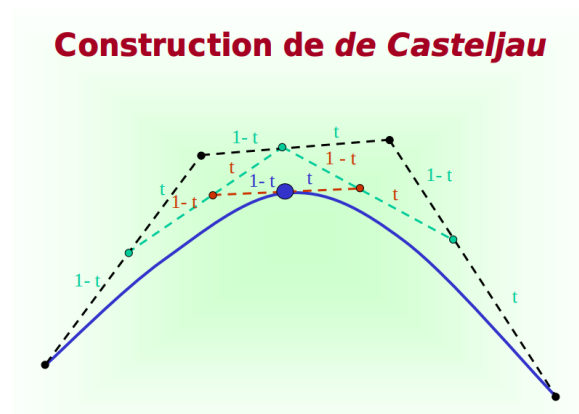


FIGURE 1.1 – Représentation de l'algorithme de Casteljau

# Théorie mathématique

## 2.1. Détermination des asymptotes

Soit  $f(x)$  la fonction associée à  $x$ . On peut distinguer différents types d'asymptotes comme suit.

### 2.1.1. Asymptote horizontale

On a une asymptote horizontale lorsque la droite est parallèle à l'axe des abscisses. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

### 2.1.2. Asymptote verticale

On a une asymptote verticale lorsque la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\lim_{x \rightarrow l} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow l} f(x) = -\infty$$

Pour cela, dans le cas de notre fonction rationnelle, on calcule les racines du dénominateur, et on aura donc les équations des asymptotes verticales en  $x = r_1$  et  $x = r_2$  si le polynôme du second degré admet deux racines, sinon  $x = r$  s'il admet une racine double, ou bien pas d'asymptote verticale s'il ne s'annule jamais.

### 2.1.3. Asymptote oblique

On a une asymptote oblique lorsque la droite est d'équation  $y = mx + p$ . On détermine les valeurs de  $m$  et  $p$  comme suit :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)$$

$$p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

Pour la programmation, on va effectuer des divisions polynômiales pour trouver la partie affine de la fonction. Ainsi, on obtient les formules suivantes pour les asymptotes obliques :

— pour  $\frac{\deg(3)}{\deg(2)}$ , on a une asymptote oblique d'équation

$$y = \frac{a}{e}x - \frac{b - \frac{af}{e}}{e}$$

— pour  $\frac{\deg(2)}{\deg(1)}$ , on a une asymptote oblique d'équation

$$y = \frac{b}{f}x + \frac{c - \frac{bg}{f}}{f}$$

— pour  $\frac{\deg(1)}{\deg(0)}$ , on a une asymptote oblique d'équation

$$y = \frac{g}{c}x$$

## 2.2. Détermination des points de contrôle et de leur poids

### 2.2.1. Degré 3

On exprime les polynômes de BERNSTEIN dans la base  $(1, t, t^2, t^3)$ . Pour cela, on note les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ \vec{e}_2 &= 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ \vec{e}_3 &= 3t^2 - 3t^3 \\ \vec{e}_4 &= t^3 \end{cases} \quad (2.1)$$

D'où :

$$\begin{cases} t^3 &= \vec{e}_4 \\ t^2 &= \frac{1}{3}\vec{e}_3 + \vec{e}_4 \\ t &= \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 + \vec{e}_4 \\ 1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \quad (2.2)$$

Ensuite, on exprime les équations paramétriques  $x(t) = t$  et  $y(t) = f(t)$  avec  $f$  la fonction rationnelle à dessiner avec les courbes de Bézier.

### Détermination pour les ordonnées

On procède par identification pour

$$y(t) = \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{et^2 + ft + g}$$

$$y(t) = \frac{a\vec{e}_4 + \frac{b}{3}\vec{e}_3 + b\vec{e}_4 + \frac{c}{3}\vec{e}_2 + \frac{2c}{3}\vec{e}_3 + c\vec{e}_4 + d(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)}{\frac{e}{3}\vec{e}_3 + e\vec{e}_4 + \frac{f}{3}\vec{e}_2 + \frac{2f}{3}\vec{e}_3 + f\vec{e}_4 + g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)}$$

D'où, par identification avec le dénominateur :

$$\begin{cases} \omega_1 &= g \\ \omega_2 &= \frac{f}{3} + g \\ \omega_3 &= \frac{e}{3} + \frac{2f}{3} + g \\ \omega_4 &= e + f + g \end{cases} \quad (2.3)$$



D'où :

$$\begin{cases} y_1\omega_1 = d \\ y_2\omega_2 = \frac{c}{3} + d \\ y_3\omega_3 = \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + d \\ y_4\omega_4 = a + b + c + d \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = \frac{d}{g} \\ y_2 = \frac{c+3d}{f+3g} \\ y_3 = \frac{b+2c+3d}{e+2f+3g} \\ y_4 = \frac{a+b+c+d}{e+f+g} \end{cases} \quad (2.4)$$

### Détermination pour les abscisses

Maintenant qu'on a déterminé les poids, il faut déterminer les abscisses de points de contrôle. Pour ce faire, on va utiliser l'équation

$$x(t) = \frac{t(et^2 + ft + g)}{et^2 + ft + g} = \frac{e\vec{e}_4 + \frac{f}{3}\vec{e}_3 + f\vec{e}_4 + \frac{g}{3}\vec{e}_2 + \frac{2g}{3}\vec{e}_3 + g\vec{e}_4}{\frac{e}{3}\vec{e}_3 + e\vec{e}_4 + \frac{f}{3}\vec{e}_2 + \frac{2f}{3}\vec{e}_3 + f\vec{e}_4 + g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)} \quad (2.5)$$

On procède par identification avec les éléments trouvés à l'équation (2.3) :

$$\begin{cases} x_1\omega_1 = 0 \\ x_2\omega_2 = \frac{g}{3} \\ x_3\omega_3 = \frac{f}{3} + \frac{2g}{3} \\ x_4\omega_4 = e + f + g \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{g}{f+3g} \\ x_3 = \frac{f+2g}{e+2f+3g} \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

### Coordonnées des points de contrôle

D'où on obtient les coordonnées des points de contrôle :

$$M_1\left(0; \frac{d}{g}\right) \quad M_2\left(\frac{g}{f+3g}; \frac{c+3d}{f+3g}\right) \quad M_3\left(\frac{f+2g}{e+2f+3g}; \frac{b+2c+3d}{e+2f+3g}\right) \quad M_4\left(1; \frac{a+b+c+d}{e+f+g}\right) \quad (2.7)$$

Les poids associés sont présentés dans l'équation (2.3).

#### 2.2.2. Degré 2

##### Détermination pour les ordonnées

On a la fonction

$$y = \frac{bt^2 + ct + d}{ft + g}$$

On exprime les polynômes de BERNSTEIN dans la base de vecteurs suivante :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = 1 - 2t + t^2 \\ \vec{e}_2 = 2t - 2t^2 \\ \vec{e}_3 = t^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

D'où :

$$\begin{cases} t^2 = \vec{e}_3 \\ t = \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ 1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \quad (2.9)$$

D'où on peut remplacer dans l'équation de  $y$  :

$$y = \frac{b\vec{e}_3 + c(\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + d(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{f(\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)} = \frac{\vec{e}_1 d + \vec{e}_2(\frac{c}{2} + d) + \vec{e}_3(b + c + d)}{\vec{e}_1 g + \vec{e}_2(\frac{f}{2} + g) + \vec{e}_3(f + g)} \quad (2.10)$$

On obtient ainsi les poids

$$\begin{cases} \omega_0 &= g \\ \omega_1 &= \frac{f}{2} + g \\ \omega_2 &= f + g \end{cases} \quad (2.11)$$

D'où :

$$\begin{cases} y_0\omega_0 &= d \\ y_1\omega_1 &= \frac{c}{2} + d \\ y_2\omega_2 &= b + c + d \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 &= \frac{d}{g} \\ y_1 &= \frac{\frac{c}{2} + d}{\frac{f}{2} + g} \\ y_2 &= \frac{b + c + d}{f + g} \end{cases} \quad (2.12)$$

### Détermination pour les abscisses

On a la fonction

$$x = \frac{t(ft + g)}{ft + g} = \frac{ft^2 + gt}{ft + g}$$

On remplace avec les vecteurs exprimés précédemment et on obtient que

$$x = \frac{f\vec{e}_3 + g(\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3)}{f(\frac{1}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)} = \frac{\frac{g}{2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3(f + g)}{\vec{e}_1 g + \vec{e}_2(\frac{f}{2} + g) + \vec{e}_3(f + g)} \quad (2.13)$$

D'où on a que

$$\begin{cases} x_0\omega_0 &= 0 \\ x_1\omega_1 &= \frac{g}{2} \\ x_2\omega_2 &= f + g \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{\frac{g}{2} + d}{\frac{f}{2} + g} \\ x_2 &= 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

### 2.2.3. Degré 1

#### Détermination pour les ordonnées

On a la fonction

$$y = \frac{ct + d}{g}$$

On exprime les polynômes de BERNSTEIN dans la base de vecteurs suivante :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 &= 1 - t \\ \vec{e}_2 &= t \end{cases} \quad (2.15)$$

Ainsi, on a que

$$y = \frac{c\vec{e}_2 + d(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} = \frac{\vec{e}_1 d + \vec{e}_2(c + d)}{\vec{e}_1 g + \vec{e}_2 g} \quad (2.16)$$

On obtient ainsi que

$$\omega_0 = \omega_1 = g$$

D'où on a que

$$1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

d'où on a que

$$y_0 = \frac{d}{g} \quad y_1 = \frac{c+d}{g}$$

### Détermination pour les abscisses

On a la fonction

$$x = \frac{tg}{g}$$

On remplace avec les vecteurs exprimés précédemment et on obtient que

$$x = \frac{\vec{e_2}g}{\vec{e_1}g + \vec{e_2}g} \quad (2.17)$$

On obtient ainsi que

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

### Coordonnées des points de contrôle

On a deux points de contrôle donc les coordonnées sont

$$M_0 \left( 0, \frac{d}{g} \right) \quad M_1 \left( 1, \frac{c+d}{g} \right) \quad (2.18)$$

de poids égaux  $\omega = g$ .

## 2.3. Changement de paramètres homographiques

On prend la fonction rationnelle homographique

$$h(t) = \frac{a(1-t) + bt}{c(1-t) + dt} \quad (2.19)$$

avec  $t \in [0, 1]$  et  $h(t) \in [m, n]$ , avec  $m$  et  $n$  les bornes de l'arc connexe.

$$h(t) = m \iff t = 0 \iff \frac{a}{c} = m$$

$$h(t) = n \iff t = 1 \iff \frac{b}{d} = n$$

On fixe  $c$  et  $d$  à 1 d'où :

$$h(t) = \frac{a(1-t) + bt}{(1-t) + t} \quad (2.20)$$

donc on va faire varier  $h(t)$  entre  $a$  et  $b$ , entre  $m$  et  $n$ , 2 bornes finies.

Pour les arcs dont l'une des bornes est à l'infini :

Si  $h(t) \rightarrow -\infty$ , alors  $t \rightarrow 0$ . On met  $c$  à 0 et  $d$  à 1 donc on a  $h(t) \rightarrow \frac{a}{0^+}$  car  $t$  augmente donc tend vers 0. Pour avoir  $-\infty$ ,  $a = -1$ .

Si  $h(t) \rightarrow +\infty$ , alors  $t \rightarrow 1$ . On met  $c$  à 1 et  $d$  à 0 donc on a  $h(t) \rightarrow \frac{b}{0^+}$  car  $1-t$  diminue donc tend vers 1. Pour avoir  $+\infty$  on a  $b = 1$ .

Donc  $h(t)$  varie entre  $-1$  et  $b$  entre  $-\infty$  et  $m$ , et entre  $a$  et 1 entre  $n$  et  $+\infty$ .

# Bibliographie

- [1] Clermont DUPUIS. *Courbes de Bézier*. Département d'informatique et de génie logiciel de la Faculté des sciences et de génie de l'Université de Laval.
- [2] Lionel GARNIER, Sebti FOUFOU, and Marc NEVEU. *Conversion d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique en un carreau de cyclide de Dupin quartique*. Laboratoire LE2i de l'Université de Bourgogne (CNRS UMR 6306), 2005.
- [3] Claudia NEGULESCU. *Interpolation et approximation : courbes de Bézier*. Institut de Mathématiques de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, 2007.
- [4] Daniel PERRIN. *Les courbes de Bézier*. Faculté des Sciences d'Orsay de l'Université Paris-Sud.