# Crowd-Sourcing

Pralon, Thiriet

Décembre 2022

# Présentation générale

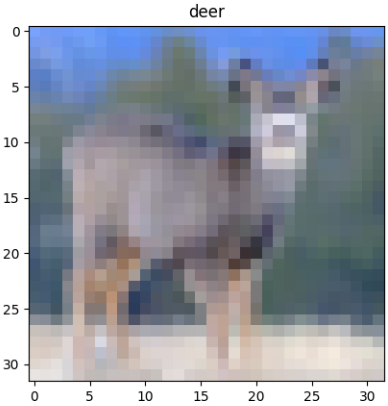
## Crowd-Sourcing

- *Problématique :* Attribution de labels à une image/patient
- *Approche intuitive :* vote majoritaire
- *Approche de cette présentation :* algorithme EM

# Plan

https://github.com/Aurelien2021/Projet_Crowd_Sourcing

# Enjeu



| | |
|---|---|
| 0 | airplane |
| 1 | automobile |
| 2 | bird |
| 3 | cat |
| 4 | deer |
| 5 | dog |
| 6 | frog |
| 7 | horse |
| 8 | ship |
| 9 | truck |

Table 1: $J = 10$ labels

$K$ annotateurs
$I$ images
$J$ labels

# Modélisation du problème

- $(X_i)_{i\in\{1,\cdots,I\}}$, tel que $\forall i$, $X_i$ à valeur dans $\{1,\cdots,J\}$ correspond à l'objet illustré sur l'image $i$
- $Y_i^k$ à valeur dans $\{0,1\}^J$, la labélisation du participant $k$ à l'image $i$

Nous supposons que, $\forall j, k \in [\![1, J]\!] \times [\![1, K]\!]$ :

$$Y_i^k | X_i = \alpha_i \sim \mathit{Multinomiale}(n, (\pi^k_{\alpha_i, j})_{j \in [\![1, J]\!]})$$

où $(\pi^k_{\alpha_i, j})_{j \in [\![1, J]\!]}$ proba que $k$ attribue $j$ à l'image $i$ sachant que le label correct est $\alpha_i$.

$$\mathbb{P}_{Y_i^k|X_i=\alpha_i} = \sum_{(n_{i,1}^k,\cdots,n_{i,J}^k)} \underbrace{\frac{\left(\sum_{j=1}^{J} n_{i,j}^k\right)!}{\prod_{j=1}^{J}(n_{i,j}^k)!} \prod_{j=1}^{J} \left(\pi_{\alpha_i,j}^k\right)^{n_{i,j}^k}}_{\textit{densité suivant} \sum \delta_{(n_{i,1}^k,\cdots,n_{i,J}^k)}} \delta_{(n_{i,1}^k,\cdots,n_{i,J}^k)}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{K} Y_i^k | X_i = \alpha_i\right) = \prod_{k=1}^{K} \mathbb{P}\left(Y_i^k | X_i = \alpha_i\right), \textit{ car } (Y_i^k)_k \textit{indep}$$

$$\propto \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{J} \left(\pi_{\alpha_i,j}^k\right)^{n_{i,j}^k}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_k Y_i^k\right)\bigcap(X_i=\alpha_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{K} Y_i^k | X_i=\alpha_i\right)\times\mathbb{P}(X_i=\alpha_i)\\
&\propto p_{\alpha_i}\times\prod_{k=1}^{K}\prod_{j=1}^{J}\left(\pi_{\alpha_i,j}^k\right)^{n_{i,j}^k}
\end{aligned}
$$

Plus généralement, en définissant $T_{i,l}$ la variable aléatoire telle que $T_{i,l} = 1$, si le label de l'image $i$ est $l$ et $T_{i,l} = 0$ sinon, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_k Y_i^k\right) \bigcap (X_i = \alpha_i)\right) \propto \prod_{l=1}^{J} \left(p_l \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{J} \left(\pi_{l,j}^k\right)^{n_{i,j}^k}\right)^{T_{i,l}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_i \bigcap_k Y_i^k\right) \cap \left(\bigcap_i Xi = \alpha_i\right)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_i \left[\left(\bigcap_k Y_i^k\right) \cap (X_i = \alpha_i)\right]\right) \\
&= \prod_i \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_k Y_i^k\right) \cap (X_i = \alpha_i)\right) \\
&\propto \prod_{i=1}^{I} \prod_{l=1}^{J} \left(p_l \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{J} \left(\pi_{l,j}^k\right)^{n_{i,j}^k}\right)^{T_{i,l}}
\end{aligned}
$$

# Algorithme de Dawid et Skene (Algo EM)

Soit l'image $i$, on décide que le label de cette image est $l$ si :

$$l = \mathrm{argmax}_l(T_{i,l})$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{i,l}|(Y_i^k)_k] &= \mathbb{E}[0 \times \mathbb{1}_{\{T_{i,l}=0\}} + 1 \times \mathbb{1}_{\{T_{i,l}=1\}}|(Y_i^k)_k] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{i,l}=1\}}|(Y_i^k)_k] \\
&= \mathbb{P}\left(T_{i,l} = 1|(Y_i^k)_k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_{i,l}=1|(Y_i^k)_k\right) &= \frac{\mathbb{P}\left((T_{i,l}=1)\cap\left(Y_i^k\right)_k\right)}{\mathbb{P}\left(\left(Y_i^k\right)_k\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left(Y_i^k\right)_k|\,(T_{i,l}=1)\right)\times\mathbb{P}(T_{i,l}=1)}{\sum_{l}^{J}\mathbb{P}\left(\left(Y_i^k\right)_k|\,(X_i=l)\right)\times\mathbb{P}(X_i=l)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left(Y_i^k\right)_k|\,(X_i=l)\right)\times\mathbb{P}(X_i=l)}{\sum_{l}^{J}\mathbb{P}\left(\left(Y_i^k\right)_k|\,(X_i=l)\right)\times\mathbb{P}(X_i=l)}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{P}\left(T_{i,l} = 1 | (Y_i^k)_k\right) = \frac{p_l \prod_k^K \prod_j^J (\pi_{l,j}^k)^{n_{i,j}^k}}{\sum_l^J p_l \prod_k^K \prod_j^J (\pi_{l,j}^k)^{n_{i,j}^k}}$$

Or $(\pi_{l,j}^k)_{k,l,j}$ et $p_l$ inconnus.
$\Longrightarrow$ Algo EM

En effectuant la maximisation du Lagrangien de la fonction de vraisemblance:

$$\left(\left(\pi_{l,j}^{k}\right)_{l,j,k},(p_j)_j\right) \longmapsto \prod_{i}^{I}\prod_{l=1}^{J}\left(p_l\prod_{k=1}^{K}\prod_{j=1}^{J}\left(\pi_{l,j}^{k}\right)^{n_{i,j}^{k}}\right)^{T_{i,l}}$$

Sous la contrainte $\forall l, k \in [\![1, J]\!] \times [\![1, K]\!], \left(\sum_{j=1}^{J}\pi_{l,j}^{k} = 1\right)$

On obtient les estimateurs du maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\pi_{l,j}^{k}} = \frac{\sum_{i} T_{i,l} n_{i,j}^{k}}{\sum_{l} \sum_{i} T_{i,l} n_{i,j}^{k}}$$

$$\widehat{p_l} = \frac{\sum_{i} T_{i,l}}{I}$$

# Algo EM

La phase *expectation* consiste à calculer l'estimation des $T_{i,l}$ par $\mathbb{E}[T_{i,l}|(Y_i^k)_k]$ dont nous avons une forme analytique.

La phase *maximization* consiste à maximiser la vraisemblance du modèle. Ce maximum est atteint en les paramètres $\left(\widehat{\pi_{l,j}^k}, \widehat{p_l}\right)$ établis précédemment.

Initialisation des $T_{i,l}$ :

$$T_{i,l} = \frac{\sum_k n_{i,l}^k}{\sum_k \sum_j n_{i,j}^k}$$

Initialisation des $(T_{i,l})_{i,l} = (T_{i,l})_0$, les observations $\left(Y_i^k\right)_{k,i}$, $(n_{i,l}^k)_{k,i,l}$ et $N \in \mathbb{N}$ le nombre d'intération; $n$ allant de 1 à $N$

**ETAPE M :** *Calculer les* $\left(\widehat{\pi_{l,j}^k}\right)_n = \dfrac{\displaystyle\sum_i \left(T_{i,l}\right)_{n-1} n_{i,j}^k}{\displaystyle\sum_l \sum_i \left(T_{i,l}\right)_{n-1} n_{i,j}^k}$,

$$\left(\widehat{p_l}\right)_n = \frac{\displaystyle\sum_i \left(T_{i,l}\right)_{n-1}}{I}$$

**ETAPE E :** *Calculer* $\left(\widehat{T_{i,l}}\right)_n = \dfrac{\left(\widehat{p_l}\right)_n \displaystyle\prod_k^K \prod_j^J \left(\widehat{\pi_{l,j}^k}\right)_n^{n_{i,j}^k}}{\displaystyle\sum_l^J \left(\widehat{p_l}\right)_n \prod_k^K \prod_j^J \left(\widehat{\pi_{l,j}^k}\right)_n^{n_{i,j}^k}}$;

**RETURN** $max_l \left(\widehat{T_{i,l}}\right)_N$