Préambule

Le paradigme d'optimisation mathématique permet une modélisation adéquate d'un bon nombre de problèmes physiques ou économiques, en conséquence, une étude systématique du problème qui peut aboutir à une solution complète. Dans cette UE, nous nous sommes occupé des cas particuliers d'optimisation d'une fonction linéaire face à des contraintes linéaires. L'algorithme du simplexe permet de calculer efficacement la solution optimale. Mieux encore, des techniques complémentaires en programmation linéaire rendent possible une étude approfondie de la sensibilité de la solution trouvée face aux problèmes possibles.

Dans le cas général des problèmes modélisés, suivant leur complexité de résolution, ceux-ci peuvent être divisés en deux catégories : Celle des problèmes faciles et celle de problèmes difficiles. Un problème de programmation linéaire fait partie de la première catégorie. La mise en équation d'un problème d'optimisation peut aussi poser des difficultés supplémentaires. En effet, le problème initial est décrit en langage usuel et sa mathématisation sous une forme simple peut s'avérer ardue.

L'objectif de cette étude n'est pas d'aborder ces difficultés dans leurs généralités, pour lesquelles il n'existe pas de recette universelle, mais de faciliter quelques exemples isotypes. Les exemples suivants sont choisis parmi les plus simples et ont pour but de donner quelque entraînement au lecteur. Ils sont empruntés aux ouvrages suivants :

1. Roseaux, « Exercices et Problèmes Résolus de Recherche opérationnelle », Tome 3, Masson 1985.
2. M. Sakarovitch, « Optimisation Combinatoire, Graphes et Programmation Linéaires », Hermann, 1984.

Exemple 1 : Problème de Production

1. Une usine fabrique deux produits P1 et P2.

   Chacun de ces produits demande, pour son usinage, des heures de fabrication unitaires sur les machines (ou dans les ateliers) A B C D E comme indiqué dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
P1	0	1h,5	2	3	3
P2	3	4	3	2	0
Disponibilité totale de chaque machine	39h	60h	57h	70h	57h

   Les marges brutes de chaque produit sont respectivement :
   M1 = 1 700 F
   M2 = 3 200 F

   Ecrire un programme linéaire correspondant.

2. Les produits utilisent trois fournitures F1, F2 et F3 dans les conditions indiquées ci-dessous :

	F1	F2	F3
P1	0	12	8
P2	5	36	0
Unités	Kg	M³	M²
Stock disponible	55	432	126

   Réécrire sous forme algébrique seulement, le nouveau programme linéaire ainsi créé. Eliminer les contraintes redondantes.

Cliquez pour afficher la réponse correspondante (réponse).

Exemple 2 :Composition d'Aliments pour le Bétail.

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3,6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1 ORGE	2 ARACHIDES	3 SESAME	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12%	52%	42%	22%
Pourcentage de graisses	2%	2%	10%	3,6%
coût par tonne	25	41	39	

1. On notera Xj (j = 1, 2, 3) la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème algébrique.
2. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème.

Cliquez pour afficher la réponse correspondante (réponse).

Exemple 3 : Crème Glacée

Un fabricant désire produire 100 Kg d'une préparation de base pour crème glacée. Cette préparation doit contenir 21,5 Kg de matières grasses, 21 Kg de sucre, 1,2 Kg d'œuf et 53 Kg d'eau. Les ingrédients dont il dispose figurent en tête des colonnes du tableau ci-dessous ; les constituants figurent en ligne. Ce tableau précise également les pourcentages (en poids) de chaque constituant dans chaque ingrédient ainsi que le coût, au Kg, de chaque ingrédient.

		Ingrédients					
		Crème	Jaune d'oeuf frais	Lait entier en poudre	Jaune d'oeuf surgelé et sucré	Sirop de sucre de canne	eau
Constituants	Matières grasses	40	50	12	30		
	Sucre				14	70	
	Oeuf		40		40		
	Eau	60	10	88	16	30	100
	Coût en Kg	3 F	4 F	1 F	2 F	0,80 F	0,00 F

1. Le fabricant désire déterminer la composition du mélange de coût minimal. Ecrire le programme linéaire correspondant à ce problème, sans le résoudre.
2. Jusqu'à présent, le fabricant produisait le mélange suivant :

CREME	50 Kg
JAUNE D'OEUF FRAIS	3 Kg
SIROP	30 Kg
EAU	17 Kg

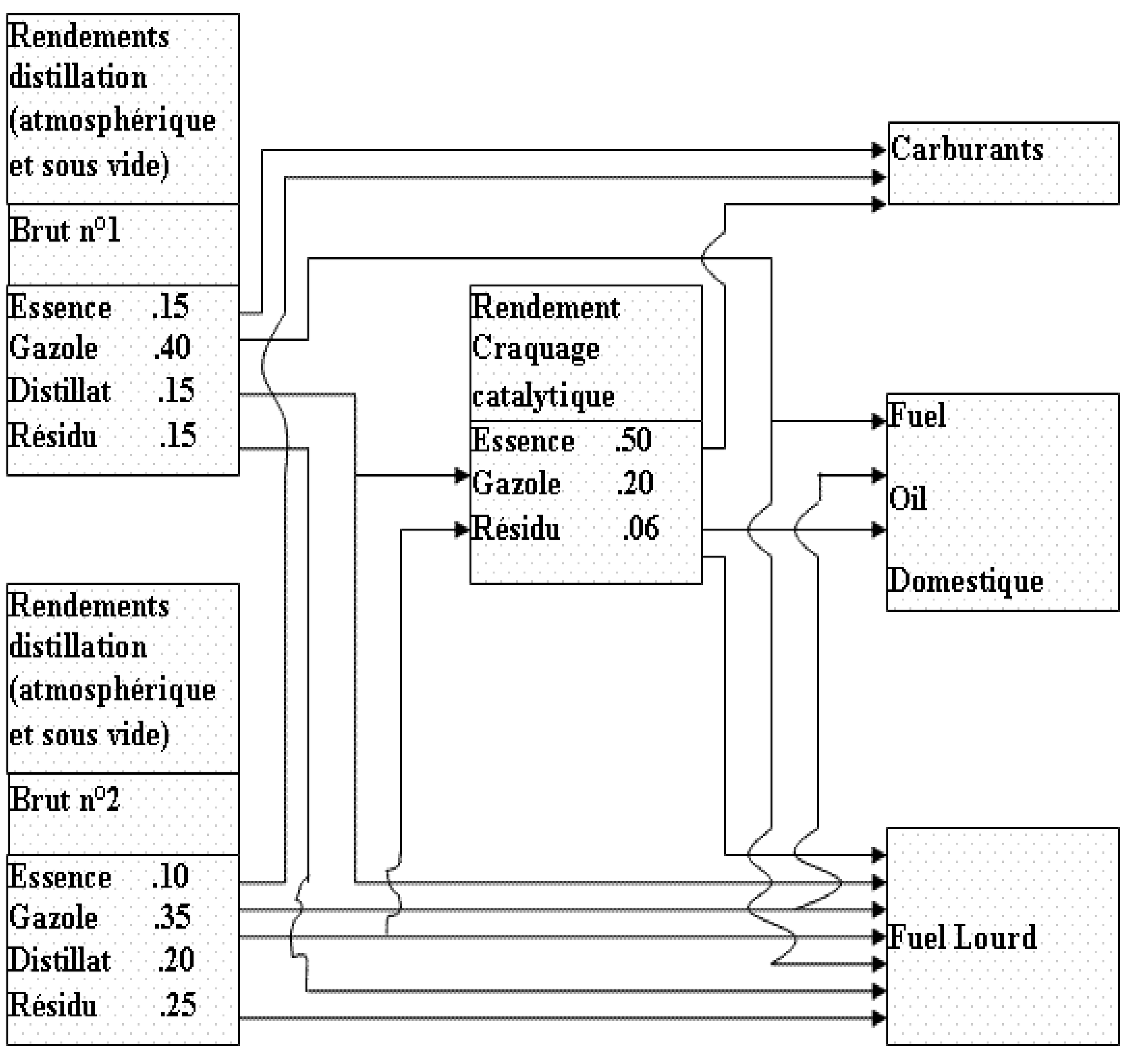
   Quel est le coût de ce mélange ? Peut-on dresser le tableau du simplexe associé à cette solution ? Pourquoi ? Si oui, le faire.
3. Quelle est la composition du mélange de coût minimal ?
4. Par suite de fluctuations économiques, les prix de la crème et du jaune d'œuf frais passent respectivement à 4 et 7 F.
   Le mélange déterminé à la question 3 est-il toujours de coût minimal ?

Cliquez pour afficher la réponse correspondante (réponse).

Exemple 4 :Schématisation d'une Raffinerie

Une raffinerie, représentée sur le schéma ci-dessous, dispose d'une unité de distillation (permettant d'obtenir quatre produits : carburants, gazole, distillat lourd, résidu), une unité de reformage et une unité de craquage catalytique (pouvant traiter les distillats lourds).

Pendant une période donnée, la raffinerie peut traiter deux pétroles bruts B1 et B2 dont les rendements sont indiqués sur le schéma (pour les carburants de rendements indiqués correspondent aux produits finis après passage par l'unité de reformage). Les prix de B1 et B2 sont respectivement de 1 300 F/t et de 1 500 F/t. Les frais de distillation sont estimés à 10 F/t. Les frais de traitement du distillat sous vide au craquage catalytique est de 20 F/t. On distingue seulement 3 types de produits : la raffinerie doit fabriquer pendant la période considérée, au moins, 200 000 t de carburants ; 400 000 t de fuel-oil domestique et 250 000 t de fuel lourd ; elle cherche à minimiser son coût de production.



Par ailleurs, les produits finis doivent satisfaire certaines contraintes de qualités :
- la teneur en soufre du fuel-oil domestique doit être inférieure à 0,5%, la teneur en soufre du gasoil issu de la distillation du brut n°1 étant de 0,2% en poids et de 1,2% pour le brut n°2, la teneur de gasoil de craquage étant de 0,3% en poids pour le brut n°1 et de 2,5% en poids pour le brut n°2.
Enfin le raffineur doit traiter au moins 550 000 t de brut n°1 et la capacité du craquage est de 200 000 t pour la période considérée.

Formuler le problème en terme de programmation linéaire ; on pourra donner un nom mnémonique aux variables.

Cliquez pour afficher la réponse correspondante (réponse).

Exemple 5 :

Un physicien ayant fait n expériences, s'est rendu compte qu'une certaine quantité Q est fonction de la variable t. Il a de bonnes raisons de penser que la loi reliant Q à t est de la forme :
Q(t) = a sin(t) + b tg(t) + c
, où les paramètres a et b sont à choisir numériquement « au ieux » à partir des n expériences réalisées : celles –ci, pour n valeurs différentes de t: t_1, t_2,..., et t_n ont donné pour Q, les valeurs Q_1, Q_2,..., Q_n.

Tenant compte du fait que ces n expériences sont entachées d'erreur et que la loi prévue n'est peut-être qu'approximative, le physicien n'espère pas trouver un ajustement parfait (le système d'équations a sin(t_i) + b tg(t_i) + c = Q_i (i = 1, 2, …, n) aux inconnues a, b et c n'admet pas de solution). Le physicien a deux idées différentes de ce qu'un meilleur ajustement peut signifier :
(1) la première idée consiste à chercher a, b, c minimisant
$\sum_{i=1}^{n} |a\ sin(t_i) + b\ tg(t_i) + c - Q_i|$

(2) La seconde idée consiste à chercher a, b, c minimisant :
$Max_{i=1,2,\ldots,n}[|a\ sin(t_i) + b\ tg(t_i) + c - Q_i|]$

Par ailleurs, et pour des raisons physiques, les coefficients a, b, c doivent être supérieurs ou égaux à zéro.
Montrer que dans chacun des cas (1) et (2) on peut formuler le problème comme un programme linéaire qu'on explicitera.

Cliquez pour afficher la réponse correspondante (réponse).
