Équations différentielles

Le corps des scalaires, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est noté K.
L'espace vectoriel des n-uplets K^n est canoniquement assimilé à l'espace vectoriel des matrices colonnes $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.

0. Pré-requis p.1
Théorème fondamental de l'analyse.
Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.
1. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2. .... p.10
Théorème de Cauchy linéaire.
Équation différentielle avec second membre. Principe de superposition.
Résolution dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.
2. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants. p.12
Écriture matricielle d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
Structure de l'ensemble des solutions.
Comportement asymptotique des solutions.
Équivalence entre une équation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre n et un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1.

----

0. Pré-requis

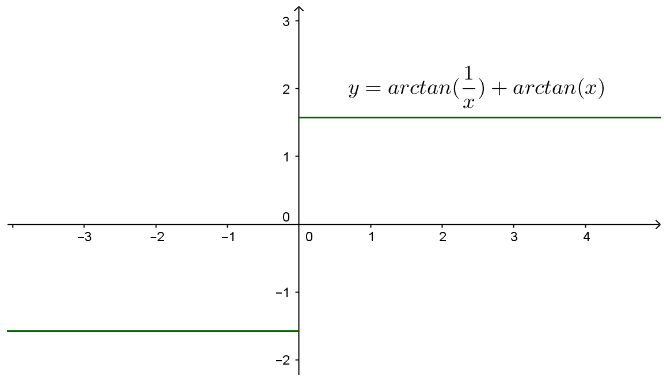
Théorème de « la dérivée nulle sur un intervalle »

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x)=0$ alors il existe un scalaire $k \in \mathrm{K}$ tel que $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x)=k$.

Démonstration : d'après l'inégalité des accroissements finis (le théorème des accroissements finis n'étant pas valide pour les fonctions à valeurs complexes), $\forall (a;b) \in \mathrm{I}^2$, $|f(b)-f(a)| \leqslant \left(\sup_{x\in \mathrm{I}} |f'(x)|\right)|b-a|$

Or ici $\sup_{x \in \mathrm{I}} |f'(x)|=0$ donc $\forall (a;b) \in \mathrm{I}^2$, $f(b)=f(a)$. □

⚠ Ce théorème est faux si I n'est pas un intervalle.
Exemple : pour $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)+\arctan(x)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)=0$
Et pourtant f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$!



Corollaire : sur les primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Deux primitives, sur un intervalle I, d'une même fonction continue sur I diffèrent d'une constante.

Démonstration : soient $f : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ telles que $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x)=g'(x)$ alors $\forall x \in \mathrm{I}$, $(f-g)'(x)=0$
Donc $\exists k \in \mathrm{K}$ tel que $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x)-g(x)=k$. □

Théorème fondamental de l'analyse

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathrm{K}$.
Si f est continue sur l'intervalle I alors
l'unique primitive de f sur I, valant y_0 en x_0 est la fonction F définie sur I par : $\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+y_0}$

Démonstration : soit f une fonction continue sur I, $x \in \mathrm{I}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathrm{I}$ alors :

$F(x+h)-F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt=\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$ et $\int_{x}^{x+h} f(x)\,dt=h f(x)$

Ainsi, $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\dfrac{1}{h}\left(\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt+\int_{x}^{x+h} f(x)\,dt\right)\right|=\dfrac{1}{|h|}\left|\int_{x}^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right|$

Pour $h>0$, on a donc : $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$

Pour $h<0$, on a donc : $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{-h}\int_{x+h}^{x}|f(t)-f(x)|\,dt=\dfrac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$

Or f étant continue en x, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ tel que $|x-t|<\eta\Rightarrow|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

Donc $\forall\varepsilon>0$, $\exists h\in\mathbb{R}^*$ tel que $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{h}{h}\varepsilon=\varepsilon$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ donc $F'(x)=f(x)$ □

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Soient I un intervalle, $x_0\in I$, deux fonctions $a:I\to K$ et $f:I\to K$ continues sur l'intervalle I et l'équation différentielle (E) : $y'+a(x)\times y=f(x)$.

► Caractérisation des solutions de (E) sur l'intervalle I :

g est solution de (E) sur I si et seulement si $g\in C^1(I;K)$ et $\forall x\in I$, $g'(x)+a(x)\times g(x)=f(x)$

► L'équation différentielle homogène associée à (E) est $(H): y'+a(x)y=0$

L'ensemble des solutions de (H) sur l'intervalle I est la droite vectorielle de $C^1(I;K)$: D= $\mathrm{Vect}_K\begin{pmatrix} I & \to & K \\ x & \mapsto & e^{-\int_{x_0}^{x} a(u)\,du}\end{pmatrix}$

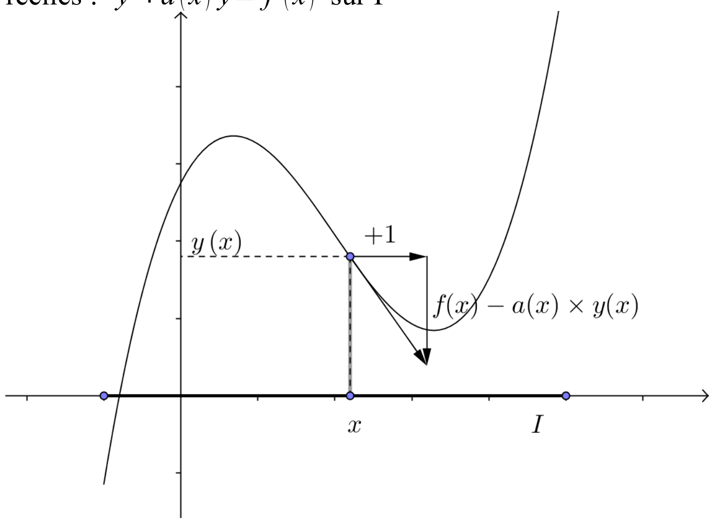
► Soit g <u>une</u> solution (appelée « particulière ») de (E) sur I, et h une solution de (H) sur I alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est le sous-ensemble de $C^1(I;K)$ (K_sous-espace affine de direction D) :

$$\left\{\begin{matrix} I & \to & K \\ x & \mapsto & g(x)+\lambda\times h(x)\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\in K\right\}$$

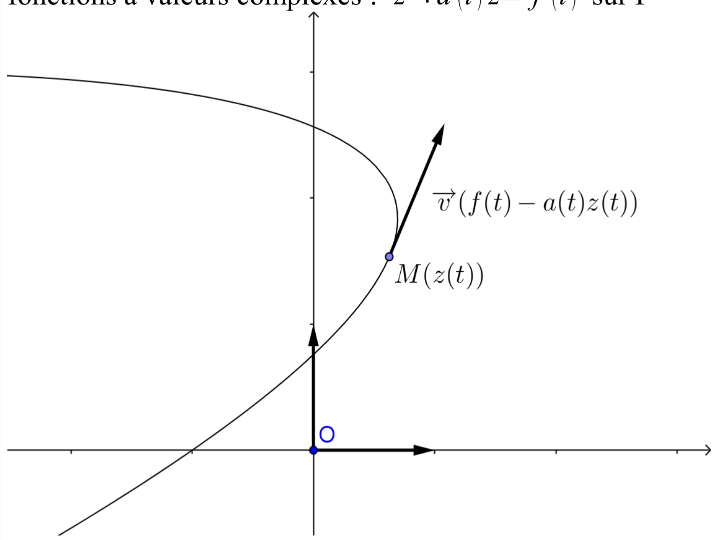
► Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy :

Soit $y_0\in K$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'+a(x)y=f(x) \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ admet une unique solution sur l'intervalle I : la condition initiale permet de fixer le paramètre libre pour les solutions de $y'+a(x)y=f(x)$ sur I.

Représentation graphique pour des fonctions à valeurs réelles : $y'+a(x)y=f(x)$ sur I



Représentation graphique dans le plan complexe pour des fonctions à valeurs complexes : $z'+a(t)z=f(t)$ sur I



Remarque : Soit ϕ l'application linéaire définie par : $\begin{cases}\phi: C^1(I;K)\to C^0(I;K) \\ \quad y\mapsto y'+a\times y\end{cases}$ L'équation $\phi(y)=f$ est une équation linéaire : si $f\in\mathrm{Im}\,\phi$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $\phi(y)=f$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\phi$.

Application n°1 : Soit $I=]0;1[$, (E) : $y'+\frac{1}{x(x-1)}y=\frac{1}{x}$ et la condition initiale $y\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

1) <u>Vérification des hypothèses</u> : I est un intervalle et $x\mapsto\frac{1}{x(x-1)}$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ sont continues sur $]0;1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) <u>Résolution sur $]0;1[$ de l'équation différentielle homogène</u> $(\text{EH}):y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$

$\forall x\in]0;1[\,,\ \frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{x}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t=[-\ln(t)+\ln(1-t)]_{t=\frac{1}{2}}^{t=x}=-\ln(x)+\ln(1-x)$

De plus $e^{\ln(x)-\ln(1-x)}=\frac{x}{1-x}$ donc l'ensemble des solutions de (EH) sur $]0;1[$ est $\underset{\mathbb{R}}{Vect}\begin{pmatrix}]0;1[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x}\end{pmatrix}$

3) <u>Recherche d'une solution particulière de (E) sur $]0;1[$ à l'aide de la méthode de « variation de la constante ».</u>

Soit $\lambda\in C^1(]0;1[;\mathbb{R})$ et g définie par $\forall x\in]0;1[\,,\ g(x)=\lambda(x)\frac{x}{1-x}$

Alors g est dérivable sur $]0;1[$ et $\forall x\in]0;1[\ \ g'(x)=\lambda'(x)\frac{x}{1-x}+\lambda(x)\frac{1}{(1-x)^2}$

Donc $\forall x\in]0;1[\,,\ g'(x)+\frac{1}{x(x-1)}\times g(x)=\lambda'(x)\frac{x}{1-x}+\lambda(x)\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{x(x-1)}\times\lambda(x)\frac{x}{1-x}=\lambda'(x)\frac{x}{1-x}$

$x\mapsto\lambda(x)\frac{x}{1-x}$ est solution de (E) sur $]0;1[$ $\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0;1[\,,\ \lambda'(x)\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0;1[\,,\ \lambda'(x)=\frac{1-x}{x^2}$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0;1[\,,\ \lambda'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in]0;1[\,,\ \lambda(x)=-\frac{1}{x}-\ln(x)+k$

Par exemple la fonction $x\mapsto\left(-\frac{1}{x}-\ln(x)\right)\frac{x}{1-x}$ est solution de (E) sur I.

4) <u>Résolution du problème de Cauchy.</u>

g est solution de (E) sur $]0;1[$ si et seulement s'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in]0;1[\,,\ g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{x\ln(x)}{x-1}+C\frac{x}{1-x}$

Or $\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-1}+C\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-2+\ln(2)-C$ et $-2+\ln(2)+C=0$ $\Leftrightarrow$ $C=2-\ln(2)$

Ainsi : g est solution de (E) sur $]0;1[$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ $\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0;1[\,,\ g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{x\ln(x)}{x-1}+(2-\ln(2))\frac{x}{1-x}$

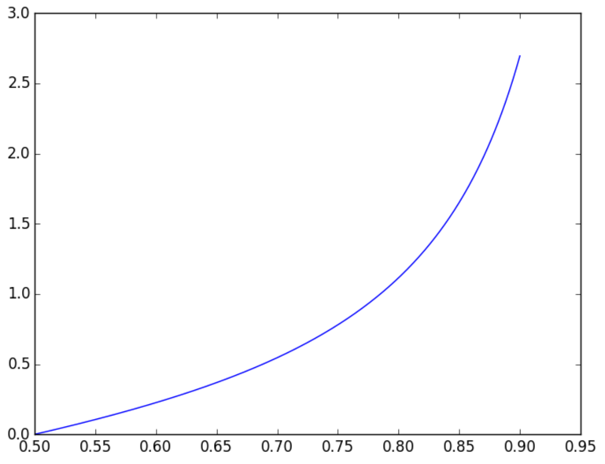
Exemples de codes Python permettant l'approximation d'un problème de Cauchy :

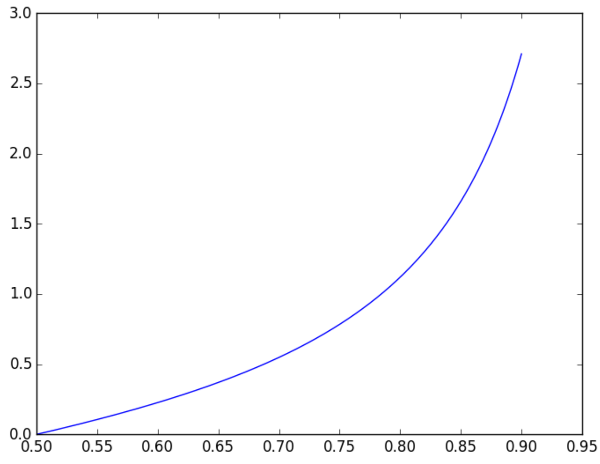
En implémentant la méthode d'Euler explicite utilisant la relation : $y(x+\varepsilon)=y(x)+\varepsilon\,y'(x)+o(\varepsilon)$

```python
a=lambda x: 1/(x*(x-1))
f=lambda x: 1/x

x,y=1/2,0
X,Y=[x],[y]
ep=0.001
for k in range(400):
    y=y+ep*(-a(x)*y+f(x))
    x=x+ep
    X.append(x)
    Y.append(y)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

En utilisant odeint (« <u>fonction</u> donnant $y'(x)$ à l'aide de x et y », $y(x_0)$, [x_0 ;....])

```python
def y_prime_de_x(y,x):
    return -1/(x*(x-1))*y+1/x

import numpy as np
X = np.linspace(0.5, 0.9, 1000)

from scipy.integrate import odeint
Y=odeint(y_prime_de_x,0,X)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

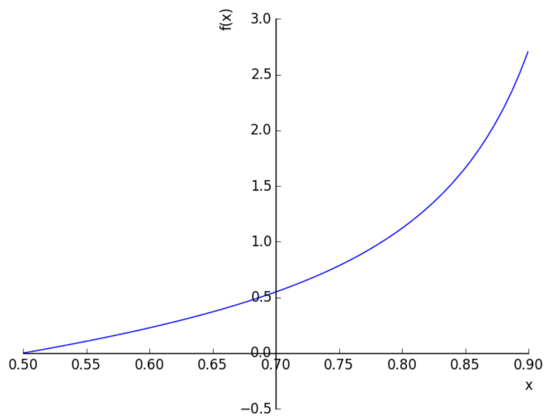




Pour obtenir des solutions formelles en manipulant des relations sympy :

```python
from sympy import *
x=symbols('x')
y=Function('y')
a=1/(x*(x-1))
f=1/x
print("Résolution de l'équation différentielle homogène")
h=dsolve(diff(y(x),x)+a*y(x),y(x))
pprint(Eq(diff(y(x),x)+a*y(x),0))
print("si et seulement si")
pprint(h)
print("Résolution de l'équation différentielle avec second membre")
g=dsolve(diff(y(x),x)+a*y(x)-f,y(x))
pprint(Eq(diff(y(x),x)+a*y(x),f))
print("si et seulement si")
pprint(g)
x0=1/2
y0=0
eq=g.subs(y(x),y0)
eq=eq.subs(x,x0)
k=solve(eq)[0]
C1=symbols('C1')
u=g.subs(C1,k)
print("L'unique solution valant "+str(y0)+" en "+str(x0)+" est :")
pprint(u)
plot(u.rhs,(x,0.5,0.9))
```

```
Résolution de l'équation différentielle homogène
d              y(x)
──(y(x)) + ─────────── = 0
dx         x·(x - 1)
si et seulement si
       C₁·x
y(x) = ─────
       x - 1
Résolution de l'équation différentielle avec second membre
d              y(x)        1
──(y(x)) + ─────────── = ─
dx         x·(x - 1)     x
si et seulement si
       C₁·x + x·log(x) + 1
y(x) = ───────────────────
              x - 1
L'unique solution valant 0 en 0.5 est :
       x·log(x) - -1.30685281944005·(-1)·x + 1
y(x) = ───────────────────────────────────────
                        x - 1
```



Application n°2 : Soit $I=\mathbb{R}$, (E) : $z'+(1-2it)z=0$ et $z(\sqrt{\pi})=1$

<u>1) Vérification des hypothèses</u> : $\mathbb{R}$ est un intervalle et $t\mapsto -1+2it$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes.

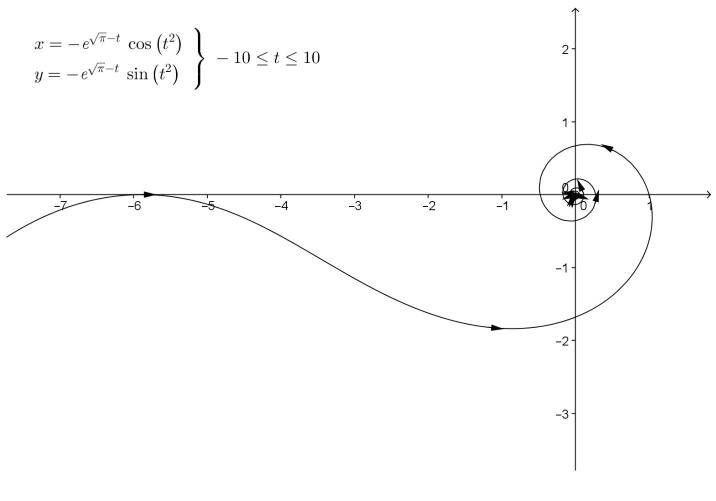
<u>2) Résolution sur $\mathbb{R}$ de (E)</u> : l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est la droite vectorielle $\underset{\mathbb{C}}{Vect}\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & e^{-t+it^2}\end{pmatrix}$

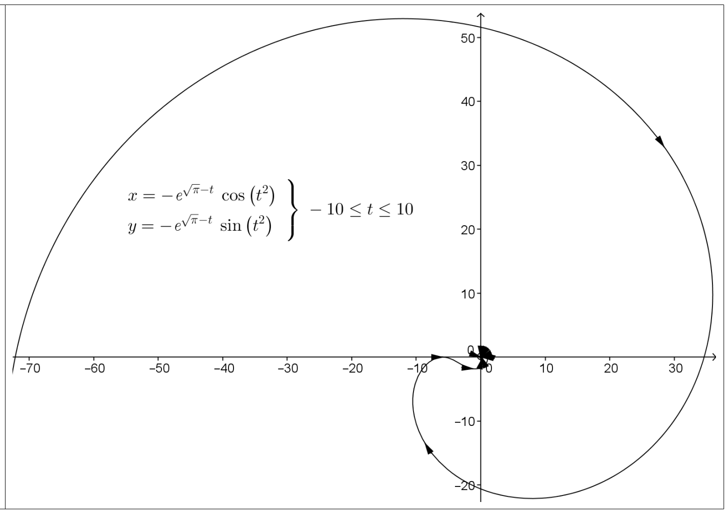
<u>3) Résolution du problème de Cauchy .</u>

g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\lambda e^{-t+it^2}$

or $e^{-\sqrt{\pi}+i(\sqrt{\pi})^2}=e^{-\sqrt{\pi}}\times e^{i\pi}=-e^{-\sqrt{\pi}}$ ainsi $\lambda(-e^{-\sqrt{\pi}})=1\Leftrightarrow\lambda=-e^{\sqrt{\pi}}$

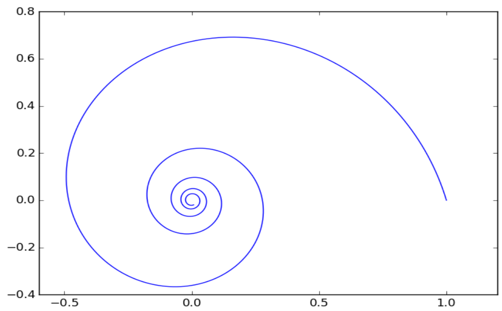
Donc : g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et $g(\sqrt{\pi})=1 \quad\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathbb{R}$, $g(t)=-e^{\sqrt{\pi}-t+it^2}=-e^{\sqrt{\pi}-t}(\cos(t^2)+i\sin(t^2))$



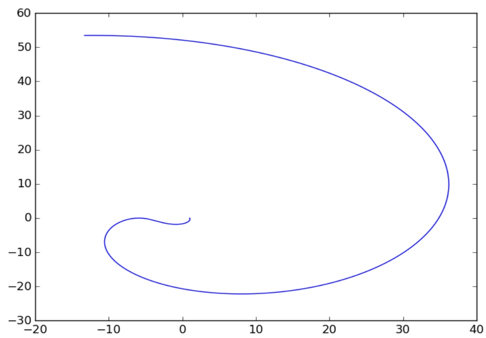


Exemples de code Python implémentant la méthode d'Euler pour les fonctions à valeurs complexes :

```
1     a=lambda t: 1-2j*t
2     f=lambda t: 0
3
4     from numpy import pi
5     t,z=pi**0.5,1+0j
6     X,Y=[z.real],[z.imag]
7     ep=0.001
8     for k in range(4000):
9         z=z+ep*(-a(t)*z+f(t))
10        t=t+ep
11        X.append(z.real)
12        Y.append(z.imag)
13
14    import matplotlib.pyplot as plt
15    plt.plot(X,Y)
16    plt.show()
```



En modifiant la ligne 7 par « ep=-0.001 » on obtient :



Rappels sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

Soient a et b deux nombres complexes, I un intervalle et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I.

L'application : $\begin{array}{l}\Phi:C^2(\mathrm{I},\mathbb{C})\to C^0(\mathrm{I};\mathbb{C})\\ \qquad\qquad y\mapsto y''+a\,y'+b\,y\end{array}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire donc l'équation $\Phi(y)=f$ est une équation linéaire, ainsi l'ensemble de ses solutions est un $\mathbb{C}$ _espace affine de direction $\operatorname{Ker}\Phi$.

De plus $y''+ay'+by=0 \iff \begin{pmatrix}y'\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-b&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix} \iff \mathrm{Y}'=\mathrm{AY}$ avec $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}y\\y'\end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-b&-a\end{pmatrix}$

Or le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\begin{vmatrix}\mathrm{X}&-1\\b&\mathrm{X}+a\end{vmatrix}=\mathrm{X}(\mathrm{X}+a)+b=\mathrm{X}^2+a\,\mathrm{X}+b$

Alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ à racines simples si et seulement si...

Dans ce cas A est semblable à une matrice ….

La méthode de résolution de ce système d'équations différentielles sera exposée dans la partie II de ce cours.

Si $\Delta=0$ alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et admet une seule racine double donc la matrice A est...

De plus la matrice A n'est pas diagonalisable sinon elle serait semble à une matrice scalaire $(\lambda \mathrm{I}_2)$ et serait donc elle même une matrice scalaire ce qui est absurde. Ainsi la matrice A est semblable à une matrice …

Solutions complexes des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et réels

Soient a et b deux réels et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant (E) : $z''+az'+bz=f(t)$
a pour équation différentielle homogène l'équation différentielle (H) : $z''+az'+bz=0$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $r^2+ar+b=0$.

► Solutions de l'équation différentielle homogène :
Si $\Delta \neq 0$ alors en notant z_1 et z_2 <u>les racines complexes</u> distinctes de l'équation caractéristique (C),
l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I est le $\mathbb{C}$ _espace vectoriel de dimension 2 :

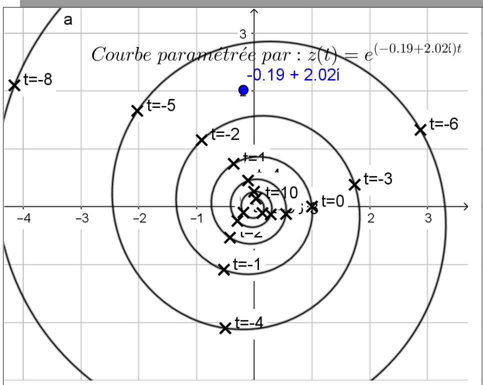
$$\underset{\mathbb{C}}{Vect}\begin{pmatrix} \mathrm{I} \to \mathbb{C} & ; & \mathrm{I} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{z_1 t} & & t \mapsto \mathrm{e}^{z_2 t} \end{pmatrix}$$

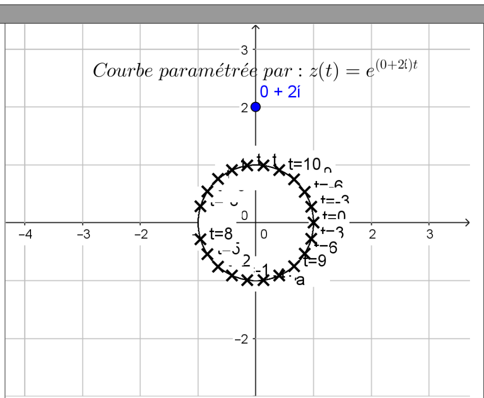
Si $\Delta = 0$ alors en notant z_0 <u>la racine complexe double</u> de l'équation caractéristique (C),
l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I est le $\mathbb{C}$ _espace vectoriel de dimension 2 :

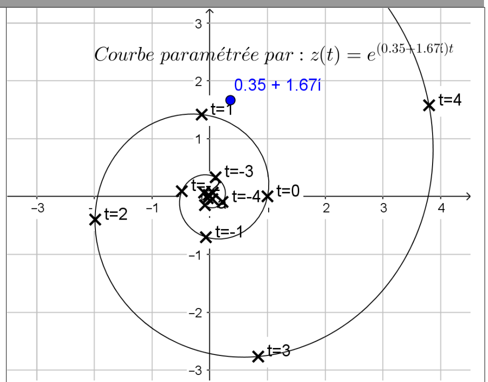
$$\underset{\mathbb{C}}{Vect}\begin{pmatrix} \mathrm{I} \to \mathbb{C} & ; & \mathrm{I} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{z_0 t} & & t \mapsto t\,\mathrm{e}^{z_0 t} \end{pmatrix}$$

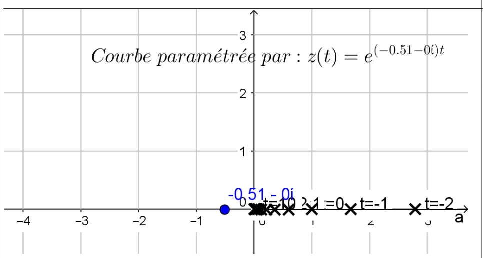
► Solutions de l'équation différentielle avec second membre :
En notant $g : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une solution particulière de l'équation différentielle (E) et $(h_1 ; h_2)$ une base de l'ensemble des solutions de (H) sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I est le $\mathbb{C}$ _espace affine de dimension 2 : $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{I} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & g(t)+\lambda \times h_1(t)+\mu \times h_2(t) \end{matrix} \middle| (\lambda ; \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

► Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy .
Soient $t_0 \in \mathrm{I}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_1 \in \mathbb{C}$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} z''+az'+bz=f(t) \\ z(t_0)=z_0 \\ z'(t_0)=z_1 \end{cases}$ admet une unique solution sur I : les deux conditions dites initiales permettent de fixer les deux paramètres pour les solutions de $z''+az'+bz=f(t)$ sur I.





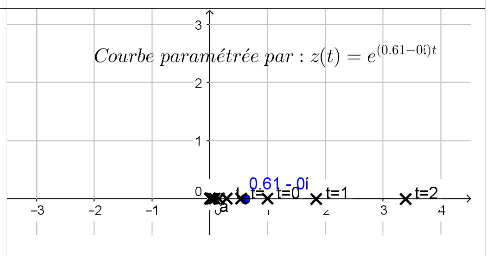


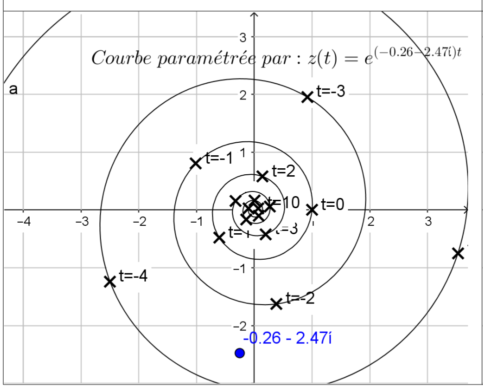


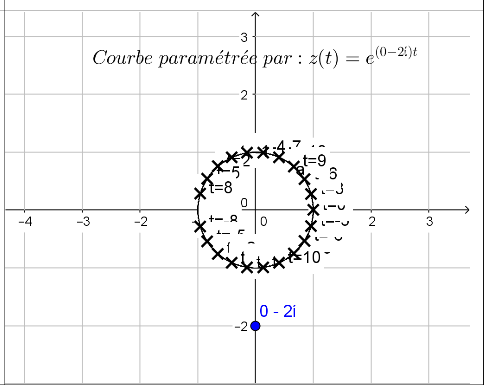
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et Γ la courbe paramétrée par e^{zt} pour $t \in \mathbb{R}$.

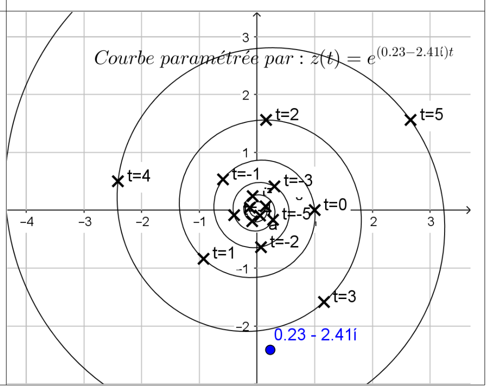
Le signe de $\mathrm{Re}(z)$ contrôle...

Le signe de $\mathrm{Im}(z)$ contrôle...









Remarque : $|e^{z_1 t}|=e^{\mathrm{Re}(z_1)t}$ ainsi $\begin{cases} \text{si } \mathrm{Re}(z_1)>0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to+\infty}|e^{z_1 t}|=+\infty \\ \text{si } \mathrm{Re}(z_1)=0 \text{ alors } \forall t\in \mathrm{I},\ |e^{z_1 t}|=1 \\ \text{si } \mathrm{Re}(z_1)<0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to+\infty} e^{z_1 t}=0 \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} z''-2z'+5z=i \\ z(0)=0 \\ z'(0)=0 \end{cases}$

Soient a et b deux réels et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.

L'application : $\begin{array}{l}\Phi:C^2(\mathrm{I},\mathbb{R})\to C^0(\mathrm{I};\mathbb{R}) \\ \quad y\mapsto y''+a\,y'+b\,y\end{array}$ est linéaire donc l'équation $\Phi(y)=f$ est une équation $\mathbb{R}$ -linéaire, ainsi l'ensemble de ses solutions est un $\mathbb{R}$ -espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\Phi$.

Si $\Delta\geqslant 0$ les solutions précédentes sont des fonctions à valeurs réelles. En revanche si $\Delta<0$, puisque $\chi_A(X)\in\mathbb{R}[X]$, ces racines sont des complexes conjugués. En notant $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ l'écriture algébrique ses racines, on cherche $(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2$ tels que $\forall t\in \mathrm{I}$, $\lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\mu e^{(\alpha-i\beta)t}\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall t\in \mathrm{I},\ \lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\mu e^{(\alpha-i\beta)t}=\overline{\lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\mu e^{(\alpha-i\beta)t}} \\ &\Leftrightarrow \forall t\in \mathrm{I},\ \lambda e^{i\beta t}+\mu e^{-i\beta t}=\overline{\lambda}e^{-i\beta t}+\overline{\mu}e^{i\beta t} \\ &\Leftrightarrow \forall t\in \mathrm{I},\ (\lambda-\overline{\mu})e^{i\beta t}+(\mu-\overline{\lambda})e^{i\beta t}=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=\overline{\mu} \text{ car } (e^{i\beta t};e^{-i\beta t}) \text{ est une famille libre de } C^2(\mathrm{I};\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Enfin, pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\overline{\lambda}e^{(\alpha-i\beta)t}=2e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(\lambda)\cos(\beta t)+\mathrm{Im}(\lambda)\sin(\beta t))$

Solutions réelles des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et réels

Soient a et b deux réels et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.

L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant (E) : $y''+ay'+by=f(x)$

a pour équation différentielle homogène l'équation différentielle (H) : $y''+ay'+by=0$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $r^2+ar+b=0$.

► Solutions de l'équation différentielle homogène :

Si $\Delta>0$ alors en notant r_1 et r_2 <u>les racines réelles</u> distinctes de l'équation caractéristique (C) , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I est le $\mathbb{R}$ _espace vectoriel de dimension 2 :

$$\underset{\mathbb{R}}{Vect}\left(\begin{array}{c}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{r_1 x}\end{array};\begin{array}{c}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{r_2 x}\end{array}\right).$$

Si $\Delta=0$ alors en notant r <u>la racine réelle double</u> de l'équation caractéristique (C) , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I est le $\mathbb{R}$ _espace vectoriel de dimension 2 :

$$\underset{\mathbb{R}}{Vect}\left(\begin{array}{c}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{rx}\end{array};\begin{array}{c}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\,e^{rx}\end{array}\right)$$

Si $\Delta<0$ alors $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ étant <u>les racines complexes conjuguées</u> de l'équation caractéristique (C) , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I est le $\mathbb{R}$ _espace vectoriel de dimension 2 :

$$\underset{\mathbb{R}}{Vect}\left(\begin{array}{l}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)\end{array};\begin{array}{l}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{array}\right)$$

Rappel $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=\mathrm{Re}((a-ib)e^{i\theta})=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\arg(a+ib))$

► Solutions de l'équation différentielle avec second membre :

En notant $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation différentielle (E) et $(h_1;h_2)$ une base de l'ensemble des solutions de (H) sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I est le $\mathbb{R}$ _espace affine de dimension 2 : $\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{I} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & g(x)+\lambda\times h_1(x)+\mu\times h_2(x)\end{array}\Big|(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$

► Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy .

Soient $x_0\in\mathrm{I}$, $y_0\in\mathbb{R}$ et $y_1\in\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y''+ay'+by=f(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}$ admet une unique solution sur I : les deux conditions dites initiales permettent de fixer les deux paramètres pour les solutions de $y''+ay'+by=f(x)$ sur I.

Remarque : soit $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos(\beta x)=\dfrac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}+\dfrac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x} \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)=\dfrac{1}{2i}e^{(\alpha+i\beta)x}-\dfrac{1}{2i}e^{(\alpha-i\beta)x} \end{cases} \Rightarrow \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{matrix}\right) \subset \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos(\beta x)+i\,e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos(\beta x)-i\,e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases} \Rightarrow \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix}\right) \subset \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{matrix}\right)$$

Ainsi : $\underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{C} \\ x\mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}\end{matrix}\right) = \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)\end{matrix};\begin{matrix} I\to\mathbb{R} \\ x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{matrix}\right)$

Exemple : $\begin{cases} y''+2y'+3y=x \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$ ...

Exemples de codes Python permettant l'approximation d'un problème de Cauchy :

On a : $y''+ay'+by=f(x) \Leftrightarrow y''=f(x)-ay'-by \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

Ainsi en notant $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ on a (E) : $Y'=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}+AY$ et $Y(0)=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$

En implémentant la méthode d'Euler utilisant la relation :
$Y(x+\varepsilon)=Y(x)+\varepsilon\, Y'(x)+o(\varepsilon)$

```
import numpy as np
x,Y=0,np.array([[1],[-1]])
Lx,Ly=[x],[Y[0]]
ep=0.001
A=np.array([[0,1],[-3,-2]])
f=lambda t: t
for k in range(10000):
    Y=Y+ep*(np.array([[0],[f(x)]])+np.dot(A,Y))
    x=x+ep
    Lx.append(x)
    Ly.append(Y[0])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(Lx,Ly)
plt.show()
```

En utilisant odeint (« fonction donnant $Y'(x)$ à l'aide de x et Y », $Y(x_0)$, [x_0 ;....])

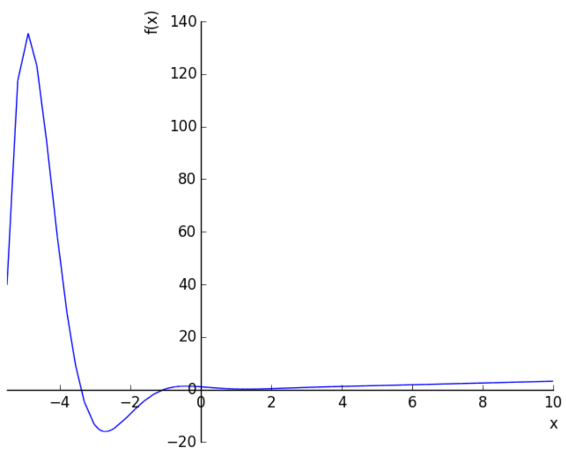
```
import numpy as np

def Y_prime_de_x(Y,x):
    return np.array([Y[1],x-3*Y[0]-2*Y[1]])

Lx = np.linspace(0, 10, 10000)

from scipy.integrate import odeint
Ly=odeint(Y_prime_de_x,np.array([1,-1]),Lx)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(Lx,Ly[:,0])
plt.show()
```

⚠ odeint() utilise une premier argument de type array correspondant à une matrice ligne.

Pour des solutions formelles en utilisant sympy :

```python
from sympy import *
from sympy.abc import x
y=Function('y')
a=2
b=3
f=x
print("Résolution de l'équation différentielle homogène")
h=dsolve(diff(y(x),x,x)+a*diff(y(x),x)+b*y(x),y(x))
pprint(Eq(diff(y(x),x,x)+a*diff(y(x),x)+b*y(x),0))
print("si et seulement si")
pprint(h)
print("Résolution de l'équation différentielle avec second membre")
g=dsolve(diff(y(x),x,x)+a*diff(y(x),x)+b*y(x)-f,y(x))
pprint(Eq(diff(y(x),x,x)+a*diff(y(x),x)+b*y(x),f))
print("si et seulement si")
pprint(g)
x0=0
y0=1
y1=-1
print("L'unique solution valant "+str(y0)+" en "+str(x0)+" et dont la dérivée vaut "+str(y1)+" en "+str(x0)+" est :")
eq1=(g.rhs).subs(x,x0)-y0
eq2=diff(g.rhs,x).subs(x,x0)-y1
S=solve([eq1,eq2])
G=g.subs(S)
pprint(G)
```

```
Résolution de l'équation différentielle homogène
                          2
          d              d
3⋅y(x) + 2⋅──(y(x)) + ───(y(x)) = 0
          dx              2
                        dx
si et seulement si
        ⎛        ⎛√2 ⋅x⎞         ⎛√2 ⋅x⎞⎞  -x
y(x) = ⎝C₁⋅sin⎝      ⎠ + C₂⋅cos⎝      ⎠⎠⋅□
Résolution de l'équation différentielle avec second membre
                          2
          d              d
3⋅y(x) + 2⋅──(y(x)) + ───(y(x)) = x
          dx              2
                        dx
si et seulement si
         x   ⎛        ⎛√2 ⋅x⎞         ⎛√2 ⋅x⎞⎞  -x   2
y(x) = ─ + ⎝C₁⋅sin⎝      ⎠ + C₂⋅cos⎝      ⎠⎠⋅□   - ─
         3                                           9
L'unique solution valant 1 en 0 et dont la dérivée vaut -1 en 0 est :
         x   ⎛  √2 ⋅sin⎛√2 ⋅x⎞     11⋅cos⎛√2 ⋅x⎞⎞  -x   2
y(x) = ─ + ⎜- ─────────────── + ─────────────⎟⋅□   - ─
         3   ⎝        18                 9      ⎠         9
```



Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre de la forme $k\,e^{\omega t}$

Soient $a\neq 0$, b et c trois complexes, $k\in\mathbb{C}$ et $\omega\in\mathbb{C}$ l'équation différentielle (E) : $ay''+by'+cy=k\,e^{\omega t}$

Soit l'équation caractéristique (C) : $ar^2+br+c=0$.

Si ω n'est pas racine de l'équation (C) alors il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\lambda\,e^{\omega t}\end{array}$ soit solution de (E).

Si ω est racine simple de (C) alors il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\lambda\,t\,e^{\omega t}\end{array}$ soit solution de (E).

Si ω est racine double de (C) alors il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\lambda\,t^2\,e^{\omega t}\end{array}$ soit solution de (E).

Exemple : $y''+2\,y'+y=2\,e^{-t}$

1. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Théorème de Cauchy linéaire

Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathrm{K}$, $y_1 \in \mathrm{K}$ et trois fonctions $a:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$, $b:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$ et $c:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$.

Si les fonctions a , b et c sont continues sur I

alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=c(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

Théorème admis.

Remarque : $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x) \Leftrightarrow y''=c(x)-a(x)y'-b(x)y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

Ainsi en notant $\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$ on a (E) : $\mathrm{Y}'=\begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}+\mathrm{A}(x)\times\mathrm{Y}$ et $\mathrm{Y}(0)=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$

Il suffit donc d'adapter les codes Python précédents valides pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

Soient I un intervalle et trois fonctions $a:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$, $b:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$ et $c:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$.
Soit l'équation différentielle (E) : $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$
et l'équation différentielle homogène (H) : $y''+a(x)y'+b(x)y=0$
Si les fonctions a , b et c sont continues sur I alors :

► Solutions de l'équation différentielle homogène :
L'ensemble des solutions de (H) est un K_sous-espace vectoriel des fonctions $\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})$ de dimension 2.
En conséquence, si h_1 et h_2 sont deux solutions de (H) sur I et ne sont pas proportionnelles alors l'ensemble des solutions de (H) sur I est $Vect(h_1;h_2)$.

► Solutions de l'équation différentielle avec second membre :
Soit $g:\mathrm{I} \to \mathrm{K}$ une solution de (E) sur I et $(h_1;h_2)$ une base de l'ensemble des solutions de (H) alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est le sous-ensemble (sous-espace affine de dimension 2) de $\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})$:

$$\left\{ \begin{matrix} \mathrm{I} & \to & K \\ t & \mapsto & g(t)+\lambda\times h_1(t)+\mu\times h_2(t) \end{matrix} \middle| (\lambda;\mu)\in K^2 \right\}$$

► Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy :
Soit $x_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathrm{K}$ et $y_1 \in \mathrm{K}$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=c(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}$ admet une unique solution sur I :
les deux conditions dites initiales fixent les deux paramètres libres des solutions de $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$ sur I.

Démonstration : si f est solution de (E) sur I alors f est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}$,
$f''(x)=-a(x)y'(x)-b(x)\,y(x)-c(x)$ donc f'' est continue sur I. Ainsi $f \in \mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})$.

Soit $\varphi : \begin{matrix} \mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K}) & \to & \mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathrm{K}) \\ f & \mapsto & f''+af'+bf \end{matrix}$. Alors φ est linéaire et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est l'ensemble des solutions de (H) sur I, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})$. Sa dimension est donnée par le théorème de Cauchy linéaire précédent.

Si $\varphi(g)=c$ alors

f est solution de (E) sur I $\Leftrightarrow \varphi(f)=c$
$\Leftrightarrow \varphi(f)=\varphi(g)$
$\Leftrightarrow \varphi(f)-\varphi(g)=0_{\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})}$
$\Leftrightarrow \varphi(f-g)=0_{\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathrm{K})}$
$\Leftrightarrow f-g \in Ker(\varphi)$
$\Leftrightarrow$ $f-g$ est solution de (H) sur I □

Exemple : $x^2\,y''-2\,y=x$

Principe de superposition des solutions des deux équations différentielles linéaires

Soient I un intervalle et quatre fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$, $b:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ et $c:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$; $d:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$.
On considère les équations différentielles
$$(\mathrm{E}): y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)+d(x)$$
$$(\mathrm{E}_1): y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$$
$$(\mathrm{E}_2): y''+a(x)y'+b(x)y=d(x)$$
L'ensemble des solutions de (E) sur I est $\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{I} & \to & \mathbb{K}\\ x & \mapsto & f(x)+g(x)\end{array}\middle| f \text{ solution de } (\mathrm{E}_1) \text{ sur I et } g \text{ solution de } (\mathrm{E}_2) \text{ sur I}\right\}$

Démonstration : soit f solution de (E_1) sur I et g solution de (E_2) sur I
Alors $\forall x\in\mathrm{I}$, $(f+g)''(x)+a(x)(f+g)'(x)+b(x)(f+g)(x)=\ldots$

Donc $f+g$ est solution de (E) sur I.

Soit f solution de (E_1) sur I :

y est solution de (E) sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\mathrm{I}$, $y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=\overbrace{f''(x)+a(x)f'(x)+b(x)f(x)}^{=c(x)}+d(x)$
$\Leftrightarrow$ $\forall x\in\mathrm{I}$, $(y-f)''(x)+a(x)(y-f)'(x)+b(x)(y-f)(x)=d(x)$
$\Leftrightarrow$ $y-f$ est solution de (E_2) sur I
$\Leftrightarrow$ $\exists g$ solution de (E_2) sur I telle que $y-f=g$
$\Leftrightarrow$ $\exists g$ solution de (E_2) sur I telle que $y=f+g$ □

Techniques classiques de résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2

► Expression des solutions de l'équation complète lorsqu'une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I est connue (ou « variation de la constante ») :
Soit I un intervalle, trois fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$; $b:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ et $c:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ continues sur l'intervalle I et l'équation différentielle :
$$(\mathrm{E}):\ x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$$
Soit f une solution solution (dite particulière) de l'équation homogène (H) sur I : $x''+a(t)x'+b(t)x=0$
Si $f(t)$ se s'annule pas sur l'intervalle I, i.e. : $\forall t\in\mathrm{I}$, $f(t)\neq 0$.
Alors , en posant $x=f\times y$ (variation de la constante y) on a $y\overset{\text{def}}{=}\dfrac{x}{f}$ et : $\boxed{x\in\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{K})\Leftrightarrow y\in\mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{K})}$
Ainsi, pour tout réel $t\in\mathrm{I}$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{llllr}
 & & f(t)\times y(t)= & x(t) & \mathrm{L}_0\\
 & f(t)\times y'(t)+ & f'(t)\times y(t)= & x'(t) & \mathrm{L}_1\\
f(t)\times y''(t)+ & 2f'(t)\times y'(t)+ & f''(t)\times y(t)= & x''(t) & \mathrm{L}_2\\
\hline
f(t)y''(t)+ & (a(t)f(t)+2f'(t))y'(t)+ & \underbrace{(f''(t)+a(t)f'(t)+b(t)f(t))}_{=0}y(t)= & x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t) & \mathrm{L}_2+a(t)\mathrm{L}_1+b(t)\mathrm{L}_0
\end{array}$$

$$x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)\Leftrightarrow\begin{cases}x=fy\\ f(t)y''+(a(t)f(t)+2f'(t))y'=c(t)\end{cases}$$
Ainsi l'équation différentielle (E) se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre car en posant $z=y'$ on a l'équation différentielle : $f(t)z'+(a(t)f(t)+2f'(t))z=c(t)$

Autres « classiques » pour la résolution de : (E) : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)$
►Si les fonctions a , b , c et d sont polynomiales rechercher une (ou des) solutions polynomiales
►Si les fonctions a , b et c sont polynomiales et d est développables en série entière, rechercher des solutions développables en séries entières en utilisant l'unicité du développement en série entière.
►Utiliser un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle plus simple.
En posant $\forall t\in\mathrm{I}$, $\boxed{y(t)\overset{\text{def}}{=}\varphi(x(t);t)}$, on cherche à exprimer $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)$ en fonction de $y(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$. On veillera à s'assurer que toute fonction x solution de (E) puisse définir une fonction y deux fois dérivable sur I.
⚠ En général, $y'(t)\neq\varphi(x'(t);t)$
$y''(t)\neq\varphi(x''(t);t)$
Après avoir déterminé $y'(t)$ et $y''(t)$, on détermine trois fonctions A, B et C définies sur I telles que :
$\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=\mathrm{A}(t)y''(t)+\mathrm{B}(t)y'(t)+\mathrm{C}(t)y(t)$

$a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t) \quad (\mathrm{E})$ $\qquad$ $\mathrm{A}(t)y''(t)+\mathrm{B}(t)y'(t)+\mathrm{C}(t)y(t)=\mathrm{D}(t) \quad (\mathrm{E}')$

f est solution de (E) sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $g:t\mapsto\varphi(f(t);t)$ est solution de (E') sur l'intervalle I

$\Leftrightarrow$ $\forall t\in\mathrm{I}\ ,\ g(t)=\dots$

$\forall t\in\mathrm{I}\ ,\ f(t)=\dots$ $\Leftrightarrow$

►Utiliser un changement de variable pour se ramener à une équation différentielle plus simple (si possible à coefficients constants).

Exemple : en posant $t=\varphi(u)$, où $\varphi:\mathrm{I}'\to\mathrm{I}$ est un C^2 difféomorphisme de l'intervalle I' dans l'intervalle I : $\begin{array}{c}\mathrm{I}'\to\mathrm{I}\\ u\mapsto\varphi(u)\\ \varphi^{-1}(t)\leftarrow t\end{array}$

$\forall t\in\mathrm{I}\ ,\ a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=d(t) \quad\Leftrightarrow\quad \forall u\in\mathrm{I}'\ ,\ a(\varphi(u))x''(\varphi(u))+b(\varphi(u))x'(\varphi(u))+c(\varphi(u))x(\varphi(u))=d(\varphi(u))$

⚠ En général, $(x(\varphi(u)))'\neq x'(\varphi(u))$
$(x(\varphi(u)))''\neq x''(\varphi(u))$

$\forall u\in\mathrm{I}'$, en posant $\boxed{y(u)\overset{\mathrm{def}}{=}x(\varphi(u))=x(t)}$ on a : $y'(u)=(x(\varphi(u)))'=\varphi'(u)\times x'(\varphi(u))$

$y''(u)=(x(\varphi(u)))''=\varphi''(u)\times x'(\varphi(u))+(\varphi'(u))^2\times x''(\varphi(u))$

En utilisant ces relations, on détermine trois fonctions A, B et C telles que :
$\forall u\in\mathrm{I}'\ ,\ a(\varphi(u))x''(\varphi(u))+b(\varphi(u))x'(\varphi(u))+c(\varphi(u))x(\varphi(u))=\mathrm{A}(u)y''(u)+\mathrm{B}(u)y'(u)+\mathrm{C}(u)y(u)$

$a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t) \quad (\mathrm{E})$ $\qquad$ $\mathrm{A}(u)y''+\mathrm{B}(u)y'+\mathrm{C}(u)y=d(\varphi(u)) \quad (\mathrm{E}')$

f est solution de (E) sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $g\overset{\mathrm{def}}{=}f\circ\varphi$ est solution de (E') sur l'intervalle I'

$\Leftrightarrow$ $\forall u\in\mathrm{I}'\ ,\ g(u)=\dots$

$\forall t\in\mathrm{I}\ ,\ f(t)=\dots$ $\Leftrightarrow$

⚠ L'équation différentielle (E) n'est résolue que lorsque $x(t)$ est déterminée. Ainsi il est nécessaire d'utiliser la relation $\varphi^{-1}(t)=u$ car : $g(u)=f(\varphi(u)) \quad\Leftrightarrow\quad g(\varphi^{-1}(t))=f(t)$

2. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Définition d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

Soit une matrice $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$,
Le système différentiel linéaire (S) : $\mathrm{X}'=\mathrm{AX}$ est un système de n équations différentielles scalaires.

En effet, pour $\mathrm{X}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$, on a : (S) : $\begin{pmatrix}x'_1(t)\\ \vdots\\ x'_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x'_1(t)=a_{1,1}x_1(t)+\dots+a_{1,n}x_n(t)\\ \vdots\\ x'_n(t)=a_{n,1}x_1(t)+\dots+a_{n,n}x_n(t)\end{cases}$

Une solution du système différentiel (S) <u>sur un intervalle I</u> est une fonction vectorielle $\begin{array}{rccc}f: & \mathrm{I} & \to & \mathrm{K}^n\\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}\end{array}$ dérivable sur l'intervalle I telle que : $\forall t\in\mathrm{I}\ ,\ f'(t)=\mathrm{A}\times f(t)$.

Résoudre le système différentiel (S) sur I consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de (S) sur I.

L'espace affine E étant muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{i}_1;\dots;\vec{i}_n)$, et f étant une solution de (S), la courbe Γ paramétrée par $\begin{cases}x_1=x_1(t)\\ \vdots\\ x_n=x_n(t)\end{cases}$ est appelée courbe intégrale du système (S) : $\Gamma=\{\mathrm{M}\in\mathrm{E}|\exists\, t\in\mathrm{I} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)=x_1(t)\vec{i}_1+\dots+x_n(t)\vec{i}_n\}$

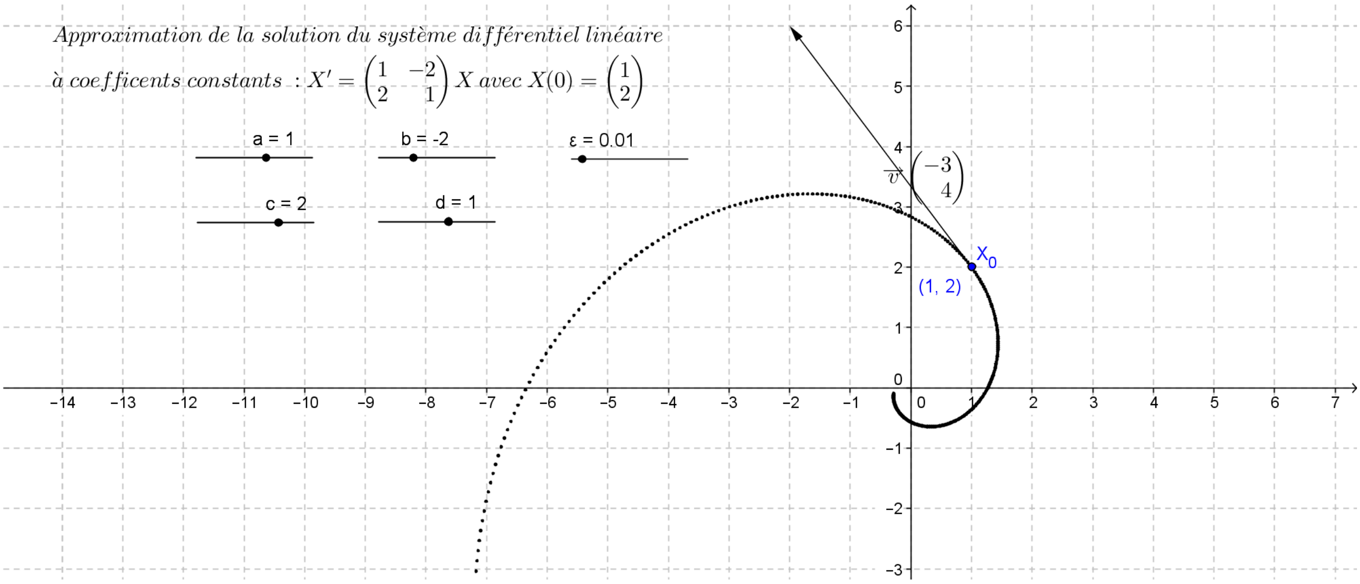
Exemple : Si $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ alors le système différentiel $\mathrm{X}'=\mathrm{AX}$ est $\begin{cases}x'_1=\dots\\ x'_2=\dots\end{cases}$

Théorème de Cauchy linéaire : existence et d'unicité de la solution d'un système différentiel linéaire homogène avec condition initiale

Soient I un intervalle réel, $t_o \in \mathrm{I}$, un vecteur $\mathrm{X}_0 \in \mathrm{K}^n$, et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

Théorème admis.



Remarque la méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation numérique de cette solution par un calcul itératif. Pour ε suffisamment petit, on obtient a une approximation $\mathrm{X}(n\varepsilon) \approx \mathrm{X}_n$

en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{X}_n + \varepsilon\,\mathrm{A} \times \mathrm{X}_n$

Exemples de codes Python implémentant la méthode d'Euler pour un système différentiel pour la résolution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

```python
import numpy as np
X=np.array([[1],[2]])
LX1=[X[0]]
LX2=[X[1]]
ep=0.001
A=np.array([[1,-2],[2,1]])
for k in range(10000):
    X=X+ep*np.dot(A,X)
    LX1.append(X[0])
    LX2.append(X[1])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(LX1,LX2)
plt.show()
```

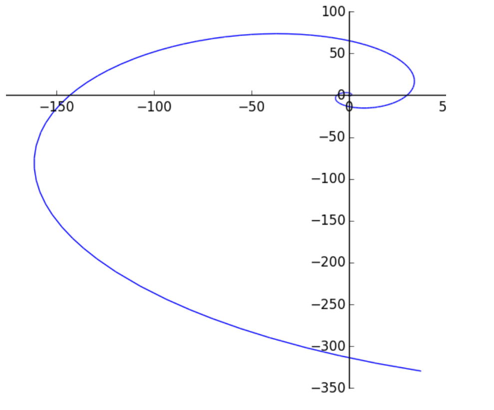
```python
import numpy as np

def X_prime_de_t(X,t):
    return np.array([X[0]-2*X[1],2*X[0]+X[1]])

Lt = np.linspace(0, 10, 10000)

from scipy.integrate import odeint
LX=odeint(X_prime_de_t,np.array([1,2]),Lt)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(LX[:,0],LX[:,1])
plt.show()
```

⚠ Bien que dans ce cas A soit constante, la fonction X_prime_de_t() doit comporter deux paramètres.

Solution formelle en utilisant le module sympy :

```python
from sympy import *
t=symbols('t')
x, y = symbols('x y',cls=Function)
eq=(Eq(diff(x(t),t),(x(t)-2*y(t))),Eq(diff(y(t),t),(2*x(t)+y(t))))
pprint(eq)
h=dsolve(eq)
pprint("si et seulement si")
pprint(h)
t0=0
x0=1
y0=2
init1=h[0].rhs.subs(t,t0)-x0
init2=h[1].rhs.subs(t,t0)-y0
S=solve((init1,init2))
print("L'unique solution sur R telle que x("+str(t0)+")="+str(x0)+" et y("+str(t0)+")="+str(y0)+" est :")
h0=[h[0].subs(S),h[1].subs(S)]
pprint(h0)
plotting.plot_parametric((h0[0].rhs,h0[1].rhs),(t,-5,5))
```

```
⎛d                               d                           ⎞
⎜──(x(t)) = x(t) - 2⋅y(t),  ──(y(t)) = 2⋅x(t) + y(t)⎟
⎝dt                              dt                          ⎠
si et seulement si
⎡                                      t                                        t⎤
⎣x(t) = -2⋅(C₁⋅sin(2⋅t) + C₂⋅cos(2⋅t))⋅□ , y(t) = (2⋅C₁⋅cos(2⋅t) - 2⋅C₂⋅sin(2⋅t))⋅□ ⎦
L'unique solution sur R telle que x(0)=1 et y(0)=2 est :
⎡          ⎛           cos(2⋅t)⎞  t                                 t⎤
⎢x(t) = -2⋅⎜sin(2⋅t) - ────────⎟⋅□ , y(t) = (sin(2⋅t) + 2⋅cos(2⋅t))⋅□ ⎥
⎣          ⎝              2    ⎠                                     ⎦
```



Structure de l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

Soit I un intervalle réel et $A \in M_n(K)$.
L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ sur I est un K_sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;K^n)$ de dimension n .

Démonstration : soit $f : I \to K^n$ une solution d'un système différentielle X'=AX alors f est dérivable (donc continue) et $\forall t \in I$, $f'(t) = A f(t)$ donc f est de classe C^1 sur I. On démontre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $f^{(k)}(t) = A^k f(t)$ donc f est de classe C^k sur I. Ainsi f est de classe C^∞ sur I.

Soit $\phi : \begin{array}{l} C^\infty(I;K^n) \to C^\infty(I;K^n) \\ f \mapsto f' - Af \end{array}$, l'application ϕ est un endomorphisme et l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est $Ker\,\phi$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;K^n)$.

Soit $B = (e_1;\ldots;e_n)$ la base canonique de K^n . En notant, pour $i \in [\![1;n]\!]$, f_i les solutions sur I des systèmes de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = e_i \end{cases}$, la famille $(f_1;\ldots;f_n)$ est une base de $Ker\,\phi$ … □

Lien entre solutions à valeurs complexes et solutions à valeurs réelles

Soient $A\in M_n(\mathbb{R})$, le système différentiel $(S): X'=AX$ et I un intervalle.

Si la fonction vectorielle $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C}^n \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}\end{array}$ est une solution de (S) sur I alors les fonctions vectorielles

$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C}^n \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_n(t)}\end{pmatrix}\end{array}$, $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(x_1(t)) \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(x_n(t))\end{pmatrix}\end{array}$ et $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(x_1(t)) \\ \vdots \\ \mathrm{Im}(x_n(t))\end{pmatrix}\end{array}$ sont aussi des solutions de (S) sur I.

Démonstration : Si $\forall t\in I$, $\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} \overline{x'_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x'_n(t)}\end{pmatrix}=\overline{A}\begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_n(t)}\end{pmatrix}$ or …

Par stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de (S), $t\mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_n(t)}\end{pmatrix}$ est solution de (S) sur I et de même $t\mapsto -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}+\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_n(t)}\end{pmatrix}$ est solution de (S) sur I. □

<u>Méthode de résolution d'un système différentiel linéaire homogène</u> : soit $A\in M_n(K)$ et $(S): X'=AX$

► <u>Si la matrice A est diagonalisable</u>, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres de A, et D la matrice diagonale on a : $A=PDP^{-1}$

Alors : $(S) \Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X$

Or $P^{-1}X'=(P^{-1}X)'$ donc en posant $Y=P^{-1}X$, on obtient : $\boxed{X'=AX\Leftrightarrow\begin{cases} Y'=DY \\ X=PY\end{cases}}$ (inutile de calculer P^{-1})

En notant $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t)\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$ on obtient $\boxed{Y'=DY\Leftrightarrow\begin{cases} y'_1=\lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y'_n=\lambda_n y_n\end{cases}}$

Il s'agit donc de résoudre n équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

$$\boxed{Y'=DY \Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1;\dots;\alpha_n)\in K^n : \forall t\in I,\ \begin{cases} y_1(t)=\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t)=\alpha_n e^{\lambda_n t}\end{cases}}$$

En conclusion, par multiplication matricielle PY, $\forall t\in I$, $X(t)$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de P :

$$\boxed{X'=AX\Leftrightarrow\exists(\alpha_1;\dots;\alpha_n)\in K^n : \forall t\in I,\ X(t)=P\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\underbrace{P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{première colonne de P} \\ \in E_{\lambda_1}(A)}}+\dots+\alpha_n e^{\lambda_n t}\underbrace{P\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{dernière colonne de P} \\ \in E_{\lambda_n}(A)}}}$$

Étude du comportement asymptotique des solutions

Rappel sur les exponentielles complexes : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left|e^{\lambda_k t}\right|=e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}$ ainsi :

$$\begin{cases} \text{si } \mathrm{Re}(\lambda_k)>0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to-\infty}\left|e^{\lambda_k t}\right|=0 \text{ et } \lim\limits_{t\to+\infty}\left|e^{\lambda_k t}\right|=+\infty \\ \text{si } \mathrm{Re}(\lambda_k)=0 \text{ alors } \forall t\in\mathrm{I},\ \left|e^{\lambda_k t}\right|=1 \\ \text{si } \mathrm{Re}(\lambda_k)<0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to-\infty}\left|e^{\lambda_k t}\right|=+\infty \text{ et } \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\lambda_k t}=0 \end{cases}$$

Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ diagonalisable, $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathrm{K}^n \\ t & \mapsto & f(t)\end{array}$ une solution du système différentiel $\mathrm{X}'=\mathrm{AX}$ et $t_0\in\mathbb{R}$.

En notant $Sp(\mathrm{A})=\{\lambda_1;\ldots;\lambda_p\}$ avec $\forall i\in[\![1;p-1]\!]$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_{i+1})$ (i.e. parties réelles croissantes)

En décomposant $f(t_0)$ selon les sous-espaces propres de A : $f(t_0)=u_1+\ldots+u_p$ avec $\forall i\in[\![1;p]\!]$, $u_i\in\mathrm{Ker}(\lambda_i\mathrm{I}_n-\mathrm{A})$

On a : $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=u_1e^{\lambda_1(t-t_0)}+\ldots+u_pe^{\lambda_p(t-t_0)}$

Le comportement asymptotique de la solution du problème du Cauchy dépend de la (ou des) valeur(s) propre(s) dont la partie réelle domine dans la décomposition de la condition initiale $f(t_0)$: soit $k=\max\limits_{u_i\neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}}(\mathrm{K})}(i)$ et $\mathrm{M}=\mathrm{Re}(\lambda_k)$

► si $\mathrm{M}<0$ alors $f(t)=u_1\underbrace{e^{\lambda_1(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0}+\ldots+u_k\underbrace{e^{\lambda_k(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0}\ \underset{t\to+\infty}{\to}\ 0_{\mathrm{M}_{n,1}}(\mathrm{K})$

► si M=0 alors pour $j=\max\limits_{\mathrm{Re}(\lambda_i)<0}(i)$ on a :

$$f(t)=\underbrace{u_1\underbrace{e^{\lambda_1(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0}+\ldots+u_j\underbrace{e^{\lambda_j(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})}}+\underbrace{u_{j+i}\underbrace{e^{\lambda_{j+1}(t-t_0)}}_{|\,.\,|=1}+\ldots+u_k\underbrace{e^{\lambda_k(t-t_0)}}_{|\,.\,|=1}}_{\substack{\neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})} \\ \text{car les sous-espaces propres sont en somme directe}}}\quad \text{borné quand } t\to+\infty$$

► si $\mathrm{M}>0$ alors pour $j=\max\limits_{\mathrm{Re}(\lambda_i)<\mathrm{M}}(i)$ on a :

$$f(t)=\underbrace{e^{\mathrm{M}(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}+\infty}\left(\underbrace{u_1e^{(\lambda_1-\mathrm{M})(t-t_0)}+\ldots+u_je^{(\lambda_j-\mathrm{M})(t-t_0)}}_{\underset{t\to+\infty}{\to}0_{M_{n,1}(K)}}+\underbrace{u_{j+1}\underbrace{e^{(\lambda_{j+1}-\mathrm{M})(t-t_0)}}_{|\,.\,|=1}+\ldots+u_k\underbrace{e^{(\lambda_k-\mathrm{M})(t-t_0)}}_{|\,.\,|=1}}_{\substack{\neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})} \\ \text{car les sous-espaces propres sont en somme directe}}}\right)\quad \text{non borné quand } t\to+\infty$$

Remarques : selon le signe des valeurs propres et les conditions initiales du problème de Cauchy, les courbes intégrales peuvent admettre des asymptotes dirigées par les vecteurs dont les coordonnées sont vecteurs propres de A.
Le comportement asymptotique quand $t\to-\infty$ peut être étudié de façon analogue.

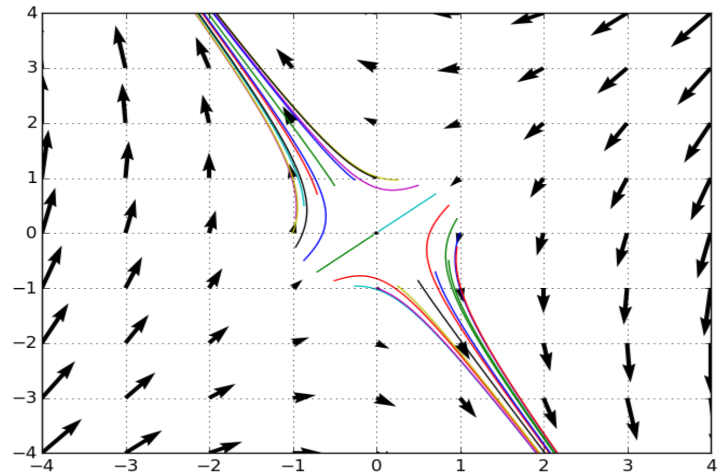
Exemple : Soit $\begin{cases} x'=-0{,}1\,x-0{,}2\,y \\ y'=-0{,}4\,x+0{,}1\,y\end{cases}$

```python
from sympy import *

M = Matrix([[-0.1,-0.2],
            [-0.4,0.1]])
pprint(M.eigenvects())
```

$$\left[\left(-0.3,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}1.0\\1.0\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(0.3,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-0.5\\1.0\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Ainsi en notant $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ on a : ...

```python
import numpy as np

def X_prime_de_t(X,t):
    return np.array([-0.1*X[0]-0.2*X[1],-0.4*X[0]+0.1*X[1]])

Lt = np.linspace(0, 10, 1000)

from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
for k in range(24):
    LX=odeint(X_prime_de_t,np.array([np.cos(k*np.pi/12),np.sin(k*np.pi/12)]),Lt)
    plt.plot(LX[:,0],LX[:,1])
xmin=-4
xmax=4
ymin=-4
ymax=4
plt.axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
X_Y=np.meshgrid(np.linspace(xmin,xmax,9),np.linspace(ymin,ymax,9)) # maillage
DX_Y=X_prime_de_t(X_Y,0) # coordonnées du vecteur sur chaque noeud du maillage
plt.quiver(X_Y[0],X_Y[1],DX_Y[0],DX_Y[1]) # champ de vecteurs
plt.grid()
plt.show()
```



► Si la matrice A n'est pas diagonalisable, alors elle est trigonalisable (quitte à se placer dans $\mathbb{C}$) en notant T une matrice triangulaire semblable à A et P la matrice de passage de la base canonique à la base de trigonalisation, on a :

$$\boxed{X'=AX \Leftrightarrow \begin{cases} Y'=TY \\ X=PY \end{cases}}$$

En notant $Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1;n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a : $Y'=TY \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1=\lambda_1 y_1+t_{1,2}y_2+\dots+t_{1;n}y_n \\ \vdots \\ y'_{n-1}=\lambda_{n-1}y_{n-1}+t_{n-1;n}y_n \\ y'_n=\lambda_n y_n \end{cases}$

Dans ce cas le système linéaire $Y'=TY$ est un système de n équations différentielles linéaires à coefficients constants.
Ce système peut être résolu par remontée :

on résout la dernière qui est une équation différentielle linéaire homogène
l'avant dernière est une équation différentielle dont le second membre a été déterminé précédemment
etc...

► Si $A\in M_n(\mathbb{R})$ ne peut pas être réduite dans $M_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire si son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$) alors les valeurs propres non-réelles sont conjuguées deux-à-deux.
En effet $P_A(X)\in\mathbb{R}[X]$, donc, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\overline{P_A(\lambda)}=P_A(\overline{\lambda})$
Ainsi, si $\lambda\in sp(A)$ alors $P_A(\overline{\lambda})=\overline{P_A(\lambda)}=\overline{0}=0$ donc $\overline{\lambda}\in sp(A)$

De plus le conjugué d'un vecteur propre associé à λ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
En effet : si $V\in E_\lambda(A)$ alors $AV=\lambda V$ donc $\overline{AV}=\overline{\lambda V}$ et comme $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A\,\overline{V}=\overline{\lambda}\,\overline{V}$ donc $\overline{V}\in E_{\overline{\lambda}}(A)$

En notant $\lambda=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\overline{\lambda}t}=e^{at}\left(\alpha e^{ibt}+\beta e^{-ibt}\right)=e^{at}\left((\alpha+\beta)\cos(bt)+i(\alpha-\beta)\sin(bt)\right)$$

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}\quad \alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\bar{\lambda} t}\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\;$ pour $t=0$, $\alpha+\beta\in\mathbb{R}$ et pour $bt=\dfrac{\pi}{2}$, $i(\alpha-\beta)\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overline{\alpha+\beta}=\alpha+\beta\\ \overline{\alpha-\beta}=\beta-\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\alpha+\beta\\ \bar{\alpha}-\bar{\beta}=\beta-\alpha\end{cases} \Rightarrow \bar{\alpha}=\beta \qquad L_1+L_2 \text{ ou } L_1-L_2$$

Réciproquement, si $\bar{\alpha}=\beta$ alors $\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\bar{\lambda} t}=e^{at}(2\mathrm{Re}(\alpha)\times\cos(bt)-2\,\mathrm{Im}(\alpha)\times\sin(bt))$
Ce calcul permet alors d'exprimer les fonctions coordonnées des solutions du système différentiel à l'aide des fonctions exponentielle, sinus et cosinus.

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ et le problème de Cauchy (P) : $\begin{cases}X'=AX\\ X(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{cases}$

Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(X)=X^2-2X+5=(X-1+2i)(X-1-2i)$.
χ_A étant scindé et à racines simples, la matrice A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.
$\mathit{dim}(E_{1+2i}(A))=1$ et $(A-(1+2i)I_2)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ donc $E_{1+2i}(A)=\mathit{Vect}\left(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right)$
$\mathit{dim}(E_{1-2i}(A))=1$ et $E_{1-2i}(A)=\mathit{Vect}\left(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right)$

Ainsi en notant $P=\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ on a : $A=P\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix}P^{-1}$

D'où : $X'=AX \Leftrightarrow \begin{cases}Y'=\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix}Y\\ X=PY\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tel que : } Y: t\mapsto\begin{pmatrix}\lambda e^{(1+2i)t}\\ \mu e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}\\ X=PY\end{cases}$

Les solutions complexes définies sur $\mathbb{R}$ de X'=AX sont donc les fonctions de la forme :
$t\mapsto\lambda\begin{pmatrix}i e^{(1+2i)t}\\ e^{(1+2i)t}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-i e^{(1-2i)t}\\ e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}$ avec $(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2$ c'est-à-dire : $t\mapsto e^t\begin{pmatrix}\lambda i e^{2it}-i\mu e^{-2it}\\ \lambda e^{2it}+\mu e^{-2it}\end{pmatrix}$

Pour déterminer deux solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ il faut et il suffit de fixer $\bar{\lambda}=\mu$

Par exemple : si $\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=1\end{cases}$ alors $t\mapsto e^t\begin{pmatrix}-2\sin(2t)\\ 2\cos(2t)\end{pmatrix}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ réelle de $X'=AX$.

Si $\begin{cases}\lambda=i\\ \mu=-i\end{cases}$ alors $t\mapsto e^t\begin{pmatrix}-2\cos(2t)\\ -\sin(2t)\end{pmatrix}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ réelle de $X'=AX$.

La famille $\left\{t\mapsto e^t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}; t\mapsto e^t\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}\right\}$ est libre car, par exemple pour $t=0$ on a :

$$\alpha e^0\begin{pmatrix}\cos(2\times0)\\ \sin(2\times0)\end{pmatrix}+\beta e^0\begin{pmatrix}-\sin(2\times0)\\ \cos(2\times0)\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

Conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ réelles de $X'=AX$ sont $\mathit{Vect}\left(t\mapsto e^t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}; t\mapsto e^t\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}\right)$

Le problème de Cauchy (P) a donc pour unique solution sur $\mathbb{R}$ réelle la fonction $t\mapsto e^t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}+2e^t\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$.

Équivalence entre une équation différentielle scalaire linéaire homogène d'ordre n et un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.

Soient I un intervalle réel, n scalaires $(a_0;\ldots;a_{n-1})\in K^n$ et l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n :

$$(E): y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0 .$$

$$f: I\to K \text{ est solution de (E) sur I} \Leftrightarrow F=\begin{pmatrix}f\\ f'\\ \vdots\\ f^{(n-1)}\end{pmatrix}: I\to K^n \text{ est solution de } Y'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}\end{pmatrix}Y \text{ sur I}$$

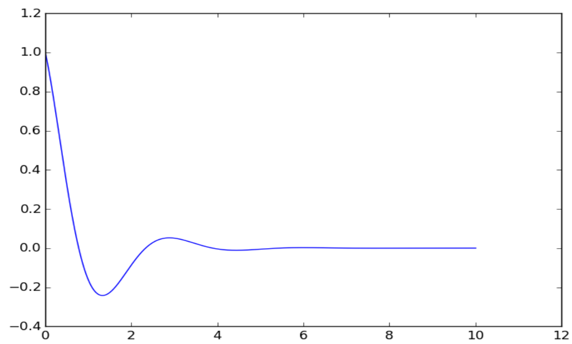
Ainsi pour $x_0\in I$, la donnée du vecteur $F(x_0)$ assure l'unicité de la solution de (E) sur I.
L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;K)$ de dimension n .

Démonstration : $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1\\ -a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f\\ f'\\ \vdots\\ f^{(n-1)}\end{pmatrix}=\ldots$

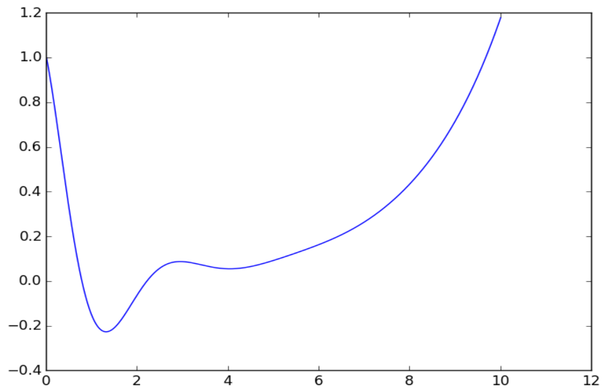
Exemple : pour résoudre $(E): y'''+\frac{3}{2}y''+4y'-\frac{5}{2}y=0$ avec pour conditions initiales $(I);\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \\ y''(0)=-3 \end{cases}$

Exemple de code Python implémentant la méthode d'Euler pour la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque à coefficients constants :

```
import numpy as np

def Euler_coef_cst(coef,Y0,x0,pas,xfinal):
    n=len(coef)
    A=np.zeros([n,n])
    Y=np.array([[Y0[j]] for j in range(n)])
    for i in range(n-1):
        A[i,i+1]=1
    A[n-1,:]=coef
    Lx=[x0]
    Ly=[Y[0,0]]
    while Lx[-1]<xfinal:
        Lx.append(Lx[-1]+pas)
        Y=Y+pas*np.dot(A,Y)
        Ly.append(Y[0,0])
    return Lx,Ly

import matplotlib.pyplot as plt
X,Y=Euler_coef_cst([5/2,-4,-3/2],[1,-1,-3],0,0.01,10)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



⚠ Des conditions initiales légèrement différentes peuvent modifier le comportement asymptotique de la solution.
Exemple pour $y(0)=1,01$, $y'(0)=-1$ et $y''(0)=-3$



Méthode de résolution d'un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.

Soient $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0$

Si $\lambda\in Sp(A)$ alors $E_\lambda(A)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{pmatrix}$

or les $n-1$ premières lignes étant déjà échelonnées, $dim(E_\lambda(A))=1$

Ainsi, dans ce cas particulier, A est diagonalisable si et seulement si $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples.

► Si A est diagonalisable alors en notant $A=PDP^{-1}$ avec D diagonale, on obtient : $Y'=AY \Leftrightarrow \begin{cases} Y=PZ \\ Z'=DZ \end{cases}$

Or, seule la première composante de Y est recherchée. Par multiplication matricielle PZ, la fonction y est donc une combinaison linéaire des composantes du vecteur Z. Il est donc inutile de calculer P.

En particulier, puisque $\chi_A(X)$ est scindé et à racines simples alors, en notant $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $i\neq j \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j$ et on obtient :

$$\boxed{y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists(\alpha_1;\dots;\alpha_n)\in K^n \text{ tel que } \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\dots+\alpha_n e^{\lambda_n t}}$$

► Si A n'est pas diagonalisable alors elle est trigonalisable (quitte à se placer dans $M_n(\mathbb{C})$) alors en notant $A=PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, on obtient : $Y'=AY \Leftrightarrow \begin{cases} Y=PZ \\ Z'=TZ \end{cases}$

Il est encore ici <u>inutile de calculer P</u>. Cependant la phase de remontée dans la résolution de Z'=TZ fait apparaître des composantes de Z produits de polynômes par $t \mapsto e^{\lambda t}$ pour $\lambda \in Sp(A)$. On obtient ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c} y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 y'+a_0 y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (P_\lambda)_{\lambda\in Sp(A)} \in (K[X])^{Card(Sp(A))} \text{ tel que } deg(P_\lambda)=m_\lambda(A)-1 \text{ et} \\ \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\displaystyle\sum_{\lambda\in Sp(A)} P_\lambda(t)e^{\lambda t} \end{array}}$$

<u>Le cas des équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants</u> : soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$y''+ay'+by=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Y'=AY$ avec $Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$

Or le polynôme caractéristique $\chi_A(X)=\begin{vmatrix} X & -1 \\ b & X+a \end{vmatrix}=X(X+a)+b=X^2+aX+b$

Soit Δ le discriminant de l'équation $X^2+aX+b=0$

$\chi_A(X)$ est nécessairement scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$: A est-elle diagonalisable ?

►Si $\Delta\neq 0$ alors $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racines simples, notées r_1 et r_2, donc A est diagonalisable :

$$\exists P\in GL_2(\mathbb{C}) \text{ tel que } A=P\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$Y'=AY \Leftrightarrow Y'=P\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}P^{-1}Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Z'=\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}Z \\ Y=PZ \end{cases}$$

En notant $Z(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$, on a : $Y'=AY \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1)'=r_1 z_1 \\ (z_2)'=r_2 z_2 \\ Y=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists(\alpha_1;\alpha)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} z_1(t)=\alpha_1 e^{r_1 t} \\ z_2(t)=\alpha_2 e^{r_2 t} \\ Y=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

En notant $P=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y=p_{1,1}z_1+p_{1,2}z_2$

$y''+ay'+by=0 \quad \Rightarrow \quad \exists(\alpha_1;\alpha)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=p_{1,1}\alpha_1 e^{r_1 t}+p_{1,2}\alpha_2 e^{r_2 t}$ d'où y $\in \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{r_1 t} \end{cases};\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{r_2 t} \end{cases}\right)$

Réciproquement, si $y\in \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{r_1 t} \end{cases};\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{r_2 t} \end{cases}\right)$ ….

►Si $\Delta=0$, soit r la racine double de $\chi_A(X)$. Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice scalaire $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=rI_2$ donc A serait une matrice diagonale ce qui est absurde par définition de A.

Ainsi $\exists\lambda\in\mathbb{C}^*$ et $\exists P\in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A=P\begin{pmatrix} r & \lambda \\ 0 & r \end{pmatrix}P^{-1}$

$$Y'=AY \Leftrightarrow Y'=P\begin{pmatrix} r & \lambda \\ 0 & r \end{pmatrix}P^{-1}Y \quad \Leftrightarrow \begin{cases} Z'=\begin{pmatrix} r & \lambda \\ 0 & r \end{pmatrix}Z \\ Y=PZ \end{cases}$$

En notant $Z(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$, on a : $Y'=AY \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1)'=rz_1+\lambda z_2 \\ (z_2)'=rz_2 \\ Y=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\alpha_2\in\mathbb{C}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} (z_1)'(t)=rz_1(t)+\lambda\alpha_2 e^{rt} \\ z_2(t)=\alpha_2 e^{rt} \\ Y=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

or l'équation différentielle linéaire $(z_1)'-rz_1=\lambda\alpha_2 e^{rt}$ admet pour solution particulière sur $\mathbb{R}$ la fonction $t\mapsto\lambda\alpha_2 t e^{rt}$

et $(z_1)'-rz_1=0$ sur $\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\alpha_1\in\mathbb{C}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ z_1(t)=\alpha_1 e^{rt}$

Donc $(z_1)'-rz_1=\alpha_2 e^{rt}$ sur $\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\alpha_1\in\mathbb{C}$ tel que $\forall t\in\mathbb{R},\ z_1(t)=\alpha_1 e^{rt}+\lambda\alpha_2 t e^{rt}$.

Ainsi $Y'=AY \Leftrightarrow \quad \exists(\alpha_1;\alpha_2)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} z_1(t)=\alpha_1 e^{rt}+\lambda\alpha_2 t\, e^{rt} \\ z_2(t)=\alpha_2 e^{rt} \\ Y=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

En notant $P=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y=p_{1,1}z_1+p_{1,2}z_2$

$y''+ay'+by=0 \ \Rightarrow \ \exists(\alpha_1;\alpha)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$, $y(t)=(p_{1,1}\alpha_1+p_{1,2}\alpha_2)e^{rt}+p_{1,1}\lambda\alpha_2 t e^{rt}$

d'où $y\in \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{rt} \end{cases};\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto t\,e^{rt} \end{cases}\right)$

Réciproquement, si $y\in \underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto e^{rt} \end{cases};\begin{cases} I\to\mathbb{C} \\ t\mapsto t\,e^{rt} \end{cases}\right)$ ...