chapitre 0

Modélisation

20 avril 2007

RAPPEL :

- *Programme linéaire* (PL) :

$$\begin{aligned} \max\ & c^T\ x \\ \text{scq :}\ & A_1\ x = b_1 \\ & A_2\ x \leqslant b_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & c^T\ x \\ \text{scq :}\ & A_1\ x = b_1 \\ & A_2\ x \geqslant b_2 \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

RAPPEL :

- Programme linéaire en *variables entières* (PLE) :

$$\begin{aligned} \max\ & c^T\ x \\ \text{scq :}\ & A_1\ x = b_1 \\ & A_2\ x \leqslant b_2 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & c^T\ x \\ \text{scq :}\ & A_1\ x = b_1 \\ & A_2\ x \geqslant b_2 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

- Programme linéaire en *variables mixtes* (PLM) :

$$\begin{aligned} \max\ & c_1^T\ x + c_2^T\ y \\ \text{scq :}\ & A_{11}\ x + A_{12}\ y = b_1 \\ & A_{21}\ x + A_{22}\ y \leqslant b_2 \\ & x \in \mathbb{R}^{n_1} \\ & y \in \mathbb{Z}^{n_2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & c_1^T\ x + c_2^T\ y \\ \text{scq :}\ & A_{11}\ x + A_{12}\ y = b_1 \\ & A_{21}\ x + A_{22}\ y \geqslant b_2 \\ & x \in \mathbb{R}^{n_1} \\ & y \in \mathbb{Z}^{n_2} \end{aligned}$$

Exercice 0. 1

cf : Recherche opérationnelle pour ingénieurs I (de Werra, Liebling, Hêche) ; page 33

Un fabricant doit produire 120 kg d'un alliage comportant 30 % de plomb, 30 % de zinc et 40 % d'étain. Sur le marché, on trouve les alliages suivants :

alliage	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
% plomb	10	10	40	60	30	30	30	50	20
% zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30
% étain	80	60	10	10	40	30	50	10	50
coût/kg	4.1	4.3	5.8	6.0	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3

Comment obtenir un alliage de la composition voulue dont le coût est minimum ? Formuler ce problème sous forme de programme linéaire.

Solution :

Notons p_i le pourcentage de plomb dans l'alliage i.
z_i le pourcentage de zinc dans l'alliage i.
e_i le pourcentage d'étain dans l'alliage i.
c_i le coût unitaire de production de l'alliage i.

Introduisons les variables suivantes : x_i = le nombre de kg de l'alliage i utilisés.

Alors on obtient le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{i=1}^{9} c_i \cdot x_i & & & \\
\text{s.t. :} & \sum_{i=1}^{9} p_i \cdot x_i & = & 0.30 \cdot 120 & \\
& \sum_{i=1}^{9} z_i \cdot x_i & = & 0.30 \cdot 120 & \\
& \sum_{i=1}^{9} e_i \cdot x_i & = & 0.40 \cdot 120 & \\
& x_i \geqslant 0 & & & \forall\, i = 1, \ldots, 9
\end{array}
$$

Question : Pourquoi peut-on laisser de côté la contrainte $\sum_{i=1}^{9} x_i = 120$?

Exercice 0. 2

cf : Syllabus (Geir Dahl) ex 0.1 page 8

Un étudiant veut décider quel type d'aliments manger de manière à minimiser ses dépenses, tout en conservant une nourriture équilibrée. 5 types d'aliments $F_1, \ldots, F_5$ sont disponibles, chacun contenant une quantité donnée d'énergie (kcal), de protéines (g) et de calcium (mg). L'étudiant veut que le menu à établir contienne une quantité minimum (donnée) d'énergie, une quantité minimum de protéines et une quantité minimum de calcium. Le prix par gramme de chaque type d'aliment est donné. De plus, on impose une borne supérieure sur la quantité qu'on mange de chaque aliment. Formuler le problème comme un programme linéaire.

Solution :

Notons :

- e_i = *l'énergie contenue dans l'aliment* F_i
  p_i = *les protéines contenues dans l'aliment* F_i
  c_i = *le calcium contenu dans l'aliment* F_i
- E = *quantité minimale d'énergie nécessaire*
  P = *quantité minimale de protéines nécessaire*
  C = *quantité minimale de calcium nécessaire*
- U_i *est la borne supérieure sur la quantité de l'aliment* F_i
- w_i *est le prix par gramme de l'aliment* F_i

Nous utilisons les variables suivantes :

x_i = *quantité de l'aliment* F_i *à manger*

Le programme linéaire résultant est :

$$
\begin{array}{lllll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} w_i\, x_i & & & \\
\textit{s.t. :} & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} e_i\, x_i \geqslant E & & & \textit{(besoin en énergie couvert)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{5} p_i\, x_i \geqslant P & & & \textit{(besoin en protéines couvert)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{5} c_i\, x_i \geqslant C & & & \textit{(besoin en calcium couvert)} \\
& 0 \leqslant x_i \leqslant U_i & & \forall\, i = 1, \ldots, 5 & \textit{(bornes pour chaque aliment)}
\end{array}
$$

Exercice 0. 3

On veut investir un capital K sur 4 périodes d'un an. Sur le marché il y a 3 projets d'investissements avec les taux d'intérêts suivants :

	projet		
période	A	B	C
1	0.03	0.02	0.025
2	0.01	0.04	0.03
3	0.02	0.015	0.02
4	0.025	0.01	0.01

Mais attention, chaque investissement doit se faire sur deux périodes consécutives, c'est-à-dire que si on investit 1 000 € au projet B pour la 2^e période, alors ces 1 000 € restent bloqués au projet B pour la 3^e période. Par contre les intérêts obtenus à la fin de la 2^e période peuvent être réinvestis dans n'importe quel projet lors de la 3^e période.

Donner le programme linéaire qui maximise le profit à la fin de la 4^e période.

Solution :

Utilisons les variables suivantes :

$x_{(i\,i+1)j}$ = *argent investi dans le projet j lors de la période i (et qui reste donc au projet j durant la période $i+1$)*

Notons t_{ij} le taux d'intérêt du projet j pour la période i. Alors on peut écrire le programme linéaire de la manière suivante :

$$\max \quad K + \sum_{j=A}^{C} t_{1j}\, x_{(12)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{2j}\,(x_{(12)j} + x_{(23)j}) + \sum_{j=A}^{C} t_{3j}\,(x_{(23)j} + x_{(34)j}) + \sum_{j=A}^{C} t_{4j}\,(x_{(34)j} + x_{(4)j})$$

$$\begin{aligned}
s.t: \quad \sum_{j=A}^{C} x_{(12)j} &\leqslant K \\
\sum_{j=A}^{C} x_{(23)j} &\leqslant K - \sum_{j=A}^{C} x_{(12)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{1j}\, x_{(12)j} \\
\sum_{j=A}^{C} x_{(34)j} &\leqslant K - \sum_{j=A}^{C} x_{(23)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{1j}\, x_{(12)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{2j}\,(x_{(12)j} + x_{(23)j}) \\
\sum_{j=A}^{C} x_{(4)j} &\leqslant K - \sum_{j=A}^{C} x_{(34)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{1j}\, x_{(12)j} + \sum_{j=A}^{C} t_{2j}\,(x_{(12)j} + x_{(23)j}) + \sum_{j=A}^{C} t_{3j}\,(x_{(23)j} + x_{(34)j}) \\
x_{ij} &\geqslant 0 \quad \forall\, i, j
\end{aligned}$$

Pendant chaque période i, on peut donc investir le capital initial, moins ce qu'on a investi à la période $i-1$, plus les intérêts déjà obtenus.

ou bien :

en utilisant les variables :

$$x_{ij} \quad = \quad \textit{montant total dans le projet } j \textit{ lors de la période } i$$

Alors le programme linéaire devient :

$$\max \quad K + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=A}^{C} t_{ij}\, x_{ij}$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{s.t :} & \displaystyle\sum_{j=A}^{C} x_{ij} & \leqslant & K + \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \sum_{j=A}^{C} t_{kj}\, x_{kj} & \forall\, i = 1, \ldots, 4 & \textit{(argent disponible)} \\
& x_{2j} & \geqslant & x_{1j} & \forall\, j = A, \ldots, C & \textit{(argent de la période 1 bloqué)} \\
& x_{3j} & \geqslant & x_{2j} - \big(x_{1j}\big) & \forall\, j = A, \ldots, C & \textit{(argent de la période 2 bloqué)} \\
& x_{4j} & \geqslant & x_{3j} - \big(x_{2j} - \big(x_{1j}\big)\big) & \forall\, j = A, \ldots, C & \textit{(argent de la période 3 bloqué)} \\
& x_{ij} & \geqslant & 0 & \forall\, i, \quad \forall\, j &
\end{array}$$

Exercice 0. 4

Considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot |x_2 - 10| \\ \text{s.t. :} & |x_1 + 2| + |x_2| \leqslant 15 \end{array}$$

Reformuler ce problème sous forme de programme linéaire.

Solution :

On introduit une variable auxiliaire z_1 pour remplacer la valeur absolue dans la fonction objective.

$$\min \quad 2\ x_1 + 3\ z_1$$

$$\begin{array}{lrcl} \textit{s.t. :} & z_1 & \geqslant & x_2 - 10 \\ & z_1 & \geqslant & -x_2 + 10 \\ & x_1 + 2 + x_2 & \leqslant & 15 \\ & x_1 + 2 - x_2 & \leqslant & 15 \\ & -x_1 - 2 + x_2 & \leqslant & 15 \\ & -x_1 - 2 - x_2 & \leqslant & 15 \end{array}$$

Exercice 0. 5

Une raffinerie mélange 5 types d'essence brute pour obtenir deux qualités de carburant : *normal* et *super*. Le nombre de barils disponibles par jour, le taux de performance ainsi que le prix par baril est donné pour chaque type d'essence brute dans le tableau suivant :

Type d'essence	Performance	Barils disponibles	Prix / baril ($)
1	70	2000	0.80
2	80	4000	0.90
3	85	4000	0.95
4	90	5000	1.15
5	99	5000	2.00

Le carburant *normal* doit avoir un taux de performance d'au moins 85 et le *super* d'au moins 95. Des contrats obligent la raffinerie à produire au moins 8000 barils de *super* par jour. Mais ils peuvent vendre toute leur production aux prix suivants : 2.85 $ par baril de carburant *normal* et 3.75 $ par baril de *super*. Supposons que le taux de performance est proportionnel au mélange (p.ex. un mélange $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ d'essences brutes de type 1 et 2 donne un taux de performance de 75).

Donner une formulation sous forme de programme linéaire qui maximise le profit de la raffinerie.

Solution :

Introduisons les notations suivantes :

p_i *est la performance du type* i

c_i *est le cout d'achat d'un baril de type* i

d_i *est le nombre de barils disponibles du type* i

Nous utilisons les variables suivantes :

x_{ij} = *nombre de barils de type* i *utilisés pour la production du carburant* j

$$\text{où } j = \begin{cases} 1 & \textit{pour le } \text{normal} \\ 2 & \textit{pour le } \text{super} \end{cases}$$

Alors on obtient le programme linéaire suivant :

$$\max \quad \Big(2.85 \cdot \sum_{i=1}^{5} x_{i1}\Big) + \Big(3.75 \cdot \sum_{i=1}^{5} x_{i2}\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} c_i \cdot x_{ij}\Big)$$

$$\begin{array}{llclll}
\textit{s.t. :} & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{i2} & \geqslant & 8\,000 & & \textit{(production minimale de } \text{super}\textit{)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{5} p_i\, x_{i1} & \geqslant & 85 \cdot \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{i1}\Big) & & \textit{(performance de } \text{normal}\textit{)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{5} p_i\, x_{i2} & \geqslant & 95 \cdot \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{i2}\Big) & & \textit{(performance de } \text{super}\textit{)} \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{ij} & \leqslant & d_i & \forall\, i & \textit{(disponibilités)} \\
& x_{ij} & \geqslant & 0 & \forall\, i,\ \forall\, j &
\end{array}$$

Exercice 0. 6

Considérons le problème de transport suivant : une firme dispose de m entrepôts et de n clients. Il faut livrer un certain produit des entrepôts vers les clients. Notons o_i la quantité du produit stockée dans l'entrepôt i, $\forall\ i = 1, \ldots, m$ et d_j la quantité du produit demandée par le client j, $\forall\ j = 1, \ldots, n$. Le coût unitaire de transport de l'entrepôt i vers le client j est noté c_{ij}. La firme veut minimiser le coût de transport total, en satisfaisant tous les clients.

Donner une formulation de ce problème sous forme de programme linéaire.

Solution :

On utilise les variables suivantes :

x_{ij} = *quantité livrée au client j à partir de l'entrepôt i*

Alors on peut modéliser le problème de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} & & & \\
s.t. : & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leqslant & o_i & \forall\ i = 1, \ldots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & d_j & \forall\ j = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} & \geqslant & 0 & \forall\ i = 1, \ldots, m \quad \forall\ j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Exercice 0. 7 (Cutting Stock Problem)

On dispose d'un nombre illimité de barres de longueur 10. On veut découper ces barres pour obtenir des petites barres. Ainsi on veut obtenir :

32 petites barres de longueur	7
15	5
46	4
52	3

Formuler ce problème sous forme de programme linéaire en variables entières de façon à minimiser les chutes. (Les petites barres produites en trop sont comptées comme chutes.)

Solution :

Introduisons les notations suivantes :

- $L = 10$ *(Longueur d'une barre)*
- d_i = *demande pour le type* i *de petites barres*
- l_i = *longueur d'une petite barre de type* i.

On introduit la notion de pattern, c'est-à-dire les différentes possibilités de découper une longue barre. Ainsi on énumère tous les patterns :

pattern	7 cm	5 cm	4 cm	3cm	chute
1	1	0	0	1	0 cm
2	1	0	0	0	3 cm
3	0	2	0	0	0 cm
4	0	1	1	0	1 cm
5	0	1	0	1	2 cm
6	0	1	0	0	5 cm
7	0	0	2	0	2 cm
8	0	0	1	2	0 cm
9	0	0	1	1	3 cm
10	0	0	1	0	6 cm
11	0	0	0	3	1 cm
12	0	0	0	2	4 cm
13	0	0	0	1	7 cm

Notons :

c_j = *chute pour le pattern* j

a_{ij} = *nombre de barres de type* i *qu'on obtient si on découpe selon le pattern* j

Alors on peut utiliser les variables suivantes :

x_j = *nombre de barres que l'on découpe selon le pattern* j

Et on obtient le programme linéaire le suivant :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{13} c_j\, x_j \\
\text{s.t. :} \quad & \sum_{j=1}^{13} a_{ij}\, x_j = d_i & \forall\ i = 1, \dots, 4 \\
& x_j \in \mathbb{Z}_+ & \forall\ j = 1, \dots, 13
\end{aligned}$$

ou bien :

On n'utilise que les patterns qui ne sont contenus dans aucun autre pattern, c'est-à-dire les patterns 1, 3, 4, 5, 7, 8 et 11

Et alors le programme linéaire devient :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{7} 10\, x_j - \sum_{i=1}^{4} l_i\, d_i \\
\text{s.t. :} \quad & \sum_{j=1}^{7} a_{ij}\, x_j \geqslant d_i & \forall\ i = 1, \dots, 4 \\
& x_j \in \mathbb{Z}_+ & \forall\ j = 1, \dots, 7
\end{aligned}$$

Exercice 0. 8

cf : Syllabus (Geir Dahl) ex 0.2 page 8

Soit un ensemble d'inégalités linéaires $a_i^T x \leqslant b_i$, où $i = 1, \dots, m$ (avec $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$).

Formuler un modèle (uniquement des contraintes – sans fonction objective) pour lequel un point $x \in \mathbb{R}^n$ satisfait au moins k des m contraintes ($k \leqslant m$) et, de plus, satisfait $0 \leqslant x_j \leqslant M$, pour tout $j = 1, \dots, n$.

Solution :

On introduit les variables :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ satisfait l'inégalité } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\, i = 1, \dots, m$$

Or, comme $0 \leqslant x_j \leqslant M$ pour tout $j = 1, \dots, n$, il existe un $\bar{M}$ tel que si x ne satisfait pas l'inégalité i, on a que $b_i < a_i^T x \leqslant \bar{M}$, pour tout $i = 1, \dots, m$.

On peut par exemple prendre $\bar{M} = \max_i \left\{ \sum_j \max\{0, a_{ij}\}\, M \right\}$.

Alors on peut formuler le modèle comme suit :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} y_i \geqslant k \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant b_i + (\bar{M} - b_i) \cdot (1 - y_i) && \forall\, i = 1, \dots, m \\
&0 \leqslant x_j \leqslant M && \forall\, j = 1, \dots, n \\
&y_i \in \{0, 1\} && \forall\, i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

Remarque : Si $a_i^T x \leqslant b_i$, alors y_i peut ête égale à 1 ou à 0 dans cette formulation. Mais comme $\sum_i y_i \geqslant k$, on est sûr qu'il y a au moins k différents y_i qui valent 1.

Exercice 0. 9

cf : Syllabus (Geir Dahl) ex 0.3 page 8

Soient $P_1, \ldots, P_n$ des propositions logiques, chacune étant vraie ou fausse. En introduisant des variables binaires, représenter les relations suivantes par des contraintes linéaires :

1. P_1 est vraie.
2. Toutes les propositions sont vraies.
3. Au moins k propositions sont vraies.
4. Si P_1 est vraie, alors P_2 est vraie.
5. P_1 et P_2 sont équivalentes.
6. Si P_1 ou P_2 est vraie, alors au plus deux des propositions $P_3, \ldots, P_n$ sont vraies.

Solution :

Nous utilisons les variables suivantes :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \textit{si } P_i \textit{ est vraie} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Alors les propositions logiques peuvent être modélisées comme suit :

1. $x_1 = 1$
2. $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad \ldots, \quad x_n = 1$
   ou bien : $\sum\limits_i x_i = n$
3. $\sum\limits_i x_i \geqslant k$
4. $x_1 \leqslant x_2$
5. $x_1 = x_2$
6. $\begin{cases} \sum\limits_{i=3}^{n} x_i \leqslant 2\ x_1 + (n-2)\ (1-x_1) & = & n-2-(n-4)\ x_1 \\ \sum\limits_{i=3}^{n} x_i \leqslant 2\ x_2 + (n-2)\ (1-x_2) & = & n-2-(n-4)\ x_2 \end{cases}$

Exercice 0. 10 (Problème du voyageur de commerce)

On considère un ensemble de n villes et les distances c_{ij} qui les séparent. Le problème du voyageur de commerce consiste à déterminer le tour le plus court possible passant exactement une fois par chaque ville et revenant au lieu de départ (cycle Hamiltonien). Formuler le problème comme un programme linéaire en nombres entiers.

Solution :

Il y a n villes et nous notons c_{ij} la distance entre la ville i et la ville j. Pour modéliser le problème du voyageur de commerce, nous utilisons les variables suivantes :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si le voyageur va de } i \textit{ vers } j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Alors le problème du voyageur de commerce peut être modélisé comme suit :

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\begin{array}{lrcll}
\textit{s.t. :} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \forall\, j \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \forall\, i \\
& \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} & \leqslant & |S|-1 & \forall\, S \subset \{1,\ldots,n\} \quad \textit{avec} \quad 2 \leqslant |S| \leqslant n-1 \\
& & \textit{ou} & & \\
& \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} & \geqslant & 1 & \forall\, S \subset \{1,\ldots,n\} \quad \textit{avec} \quad \emptyset \neq S \neq \{1,\ldots,n\} \\
& x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall\, i,\ \forall\, j
\end{array}$$

La première contrainte dit qu'il entre exactement 1 fois dans chaque ville, tandis que la deuxième dit qu'il sort exactement 1 fois de chaque ville.

Ceci n'est pas suffisant, car on pourrait aboutir ainsi à plusieurs petits tours, donc il reste à éliminer les sous–tours en mettant soit les troisièmes contraintes (élimination de sous-tours) soit les quatrièmes contraintes (connexité).

Exercice 0. 11

Un organisateur d'une soirée cocktails dispose des alcools suivants : 1.2 litres de whisky, 1.8 litres de vodka, 1.6 litres de vermouth blanc, 1.8 litres de vermouth rouge, 0.6 litres de cognac et de 0.5 litres de liqueur au café. Il veut offrir 5 cocktails différents, à savoir :

- *Chauncy* : 2/3 whisky, 1/3 vermouth rouge
- *Black Russian* : 3/4 vodka, 1/4 liqueur
- *Sweet Italian* : 1/2 cognac, 1/4 vermouth rouge, 1/4 vermouth blanc
- *Molotov Cocktail* : 2/3 vodka, 1/3 vermouth blanc
- *Whisky on the Rocks* : 1/1 whisky

Chaque cocktail a un contenu de 10 cl. L'organisateur veut mixer les cocktails de manière à maximiser le nombre total de cocktails servis. En plus il pense que le *Molotov Cocktail* se vend bien et il veut donc en avoir au moins deux fois le nombre de cocktails *Black Russian*.

a. Formuler ce problème sous forme de programme linéaire en variables entières.

L'organisateur aime bien le vodka et il est d'accord de diminuer le nombre de cocktails servis de 5 s'il reste au moins 0.25 litres de vodka. (c'est-à-dire : s'il reste 0.25 litres de vodka, cela est équivalent à 5 cocktails servis)

b. Comment faire pour ajouter ceci à la formulation précédente.

Solution :

a. *Les variables utilisées sont :*

x_i = *nombre de cocktails de type i servis.*

Nous utilisons les indices suivants pour les différents cocktails :

Chauncy	$\rightarrow$	*1*
Black Russian	$\rightarrow$	*2*
Sweet Italian	$\rightarrow$	*3*
Molotov Cocktail	$\rightarrow$	*4*
Whisky on the Rocks	$\rightarrow$	*5*

La modélisation est la suivante :

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i & & & & & & \\
\textit{s.t. :} & \frac{2}{3}x_1 & & & + \; x_5 & \leqslant & 12 & \textit{(whisky)} \\
 & & \frac{3}{4}x_2 & + \; \frac{2}{3}x_4 & & \leqslant & 18 & \textit{(vodka)} \\
 & & & \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{3}x_4 & & \leqslant & 16 & \textit{(vermouth blanc)} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & & + \; \frac{1}{4}x_3 & & \leqslant & 18 & \textit{(vermouth rouge)} \\
 & & & \frac{1}{2}x_3 & & \leqslant & 6 & \textit{(cognac)} \\
 & & \frac{1}{4}x_2 & & & \leqslant & 5 & \textit{(liqueur au café)} \\
 & & 2\,x_2 & - \; x_4 & & \leqslant & 0 & \textit{(Molotov} \geqslant \textit{2 B. Russians)} \\
 & & & & x_i & \in & \mathbb{N} & \forall\, i
\end{array}
$$

b. *Dans ce cas on rajoute une variable y qui nous dit si oui ou non il reste 0.25 litres de vodka.*

La fonction objective devient alors :

$$\max \quad \sum_{i=1}^{5} x_i + 5\,y$$

Et la contrainte pour le vodka devient :

$$\tfrac{3}{4}\,x_2 + \tfrac{2}{3}\,x_4 \;\leqslant\; 18 - 2.5\,y \qquad \text{(vodka)}$$

Bien sûr il faut que la variable y soit binaire :

$$y \in \{0, 1\}$$

Exercice 0. 12

Considérons le problème d'une commune en Belgique. Dans la commune, il y a I quartiers, J écoles, et G classes dans chaque école (p.ex. $1^{\text{ère}}$ – 6^{e} primaire). Chaque école $j \in J$ à une capacité de C_{jg} étudiants pour la classe $g \in G$. Dans chaque quartier $i \in I$, il y a S_{ig} étudiants qui veulent aller en classe $g \in G$. La distance entre le quartier $i \in I$ et l'école $j \in J$ est d_{ij}. Donner un programme linéaire, dont l'objectif est d'envoyer tous les étudiants à la bonne classe, tout en minimisant la distance totale parcourue par les étudiants.

Solution :

Nous utilisons les variables suivantes :

$$x_{ijg} \quad = \quad \textit{nombre d'étudiants résidant dans le quartier } i\textit{, qui vont à la classe } g \textit{ de l'école } j.$$

Alors on peut formuler le problème de la manière suivante :

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left(d_{ij} \cdot \sum_{g \in G} x_{ijg} \right) & & & \\
\textit{s.t. :} & \sum_{j} x_{ijg} & = & S_{ig} & \forall\, i,\ \forall\, g \qquad \textit{(tout étudiant du quartier } i \textit{ fréquente sa classe } g\textit{)} \\
 & \sum x_{ijg} & \leqslant & C_{jg} & \forall\, j,\ \forall\, g \qquad \textit{(dans chaque école } j\textit{, la capacité de toute classe } g \textit{ est respectée)} \\
 & x_{ijg} & \in & \mathbb{N} & \forall\, i,\ \forall\, j,\ \forall\, g
\end{array}
$$

Exercice 0. 13

Regardons le problème d'un éleveur de poules. Supposons que pendant une période de 2 semaines, une poule peut soit pondre 12 oeufs, soit en éclore 4. Supposons aussi que les poussins peuvent pondre des oeufs après une période supplémentaire de 2 semaines. Après 4 périodes, l'éleveur veut vendre les oeufs à 0.5 € la pièce et les poules / poussins à 3 € la pièce. Quelle est le meilleur plan d'élevage si au début l'éleveur possède 100 poules et s'il veut en avoir au moins 80 à la fin de la 4[e] période ? (il suffit de donner la formulation du problème)

Solution :

Définissons les variables suivantes :

$$\begin{array}{lcll} x_1 & = & \textit{nombre de poules qui pondent lors de la période } i, & i = 1, \ldots, 4 \\ y_1 & = & \textit{nombre de poules qui éclorent lors de la période } i, & i = 1, \ldots, 4 \\ z & = & \textit{nombre de poules qui sont vendus après la 4e période} & \end{array}$$

On obtient alors le programme linéaire suivant :

$$\max \quad \sum_{i=1}^{4} (12 \cdot 0.5 \cdot x_1) \; + \; 3\,z$$

$$\begin{array}{llcll} \textit{s.t. :} & x_1 + y_1 & = & 100 & \textit{(poules au début de la 1ère période)} \\ & x_2 + y_2 & = & x_1 + y_1 & \textit{(poules à la 2e période)} \\ & x_3 + y_3 & = & x_2 + y_2 + 4\,y_1 & \textit{(poules à la 3e période)} \\ & x_4 + y_4 & = & x_3 + y_3 + 4\,y_2 & \textit{(poules à la 4e période)} \\ & z & \leqslant & x_4 + y_4 + 4\,y_3 + 4\,y_4 - 80 & \textit{(garder 80 poules après la 4e période)} \\ & x_i, y_i, z & \in & \mathbb{Z}_+ & \forall\, i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

Exercice 0. 14

Considérons N clients et M localisations potentielles de centres. Le problème du p-Centre consiste à localiser p centres parmi les M localisations possibles, puis à affecter chaque client au centre qui lui est le plus proche, de façon à minimiser le rayon (c'est-à-dire la distance maximale entre un client et le centre qui le dessert). Ce problème a plusieurs applications dont les plus connues sont les problèmes de localisation de casernes de pompiers ou de dépôts d'ambulances.

Soient N le nombre de clients notés $C_1, C_2, \ldots, C_N$;
M le nombre de sites potentiels pour les centres $F_1, F_2, \ldots, F_M$;
d_{ij} la distance de C_i à F_j.

Le problème est de trouver un sous-ensemble S de $\{1, \ldots, M\}$ tel que :

- $|S| \leqslant p$
- $\text{rayon}(S) = \max_{i=1,\ldots,N} \left(\min_{j \in S} d_{ij} \right)$ est minimum

Donner une formulation de ce problème sous forme de programme linéaire (éventuellement en variables entières). Expliquer.

Solution :

Utilisons les variables suivantes :

- $y_j = 1$ *ssi le centre* F_j *est ouvert*
- $x_{ij} = 1$ *ssi le client* C_i *est affecté au centre* F_j
- $z = \max_{i=1,\ldots,N} \left(\min_{j \in S} d_{ij} \right)$

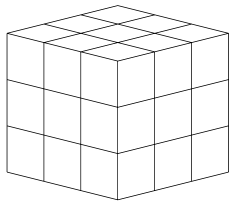
Alors on peut écrire le problème de la forme suivante :

$$
\begin{array}{lll}
\min & z & \\
\text{s.t. :} & \displaystyle\sum_{j=1}^{M} y_j \leqslant P & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 & \forall\, i = 1, \ldots, N \\
& x_{ij} \leqslant y_j & \forall\, i = 1, \ldots, N \qquad \forall\, j = 1, \ldots M \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{M} d_{ij}\, x_{ij} \leqslant z & \forall\, i \in 1, \ldots, N \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i = 1, \ldots, N \qquad \forall\, j = 1, \ldots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} & \forall\, j = 1, \ldots, M \\
& z \geqslant 0 &
\end{array}
$$

Exercice 0. 15

cf : Model Building in Mathematical Prog. (H.P. Williams) Wiley ; page 262

Considérons le cube 3 x 3 x 3 composé de 27 boîtes (voir Figure ci-dessous).



On dit que 3 boîtes sont sur une ligne s'ils se trouvent sur une même ligne horizontale, verticale ou diagonale. On considère les diagonales sur tout plan horizontal et vertical et les diagonales reliant 2 sommets opposés du cube. (En tout il y a 49 lignes !)

On dispose maintenant de 13 boules blanches et de 14 boules noires. Arranger les boules (1 par boîte) de manière à minimiser le nombre de lignes contenant que des boules de la même couleur !

Donner une formulation de ce problème sous forme de programme linéaire ! (sans le résoudre)

Solution :

On numérote toutes les boîtes du cube (de 1 à 27). Alors on associe à chaque boîte une variable binaire x_i, interprétée de la manière suivante :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boîte } i \text{ contient une boule noire} \\ 0 & \text{si} \qquad\quad i \qquad\qquad\qquad\qquad \text{blanche} \end{cases}$$

Il y a 49 lignes différentes dans le cube. A chaque ligne on associe une variable binaire y_j ayant la signification suivante :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la ligne } j \text{ contient que des boules de la même couleur} \\ 0 & \text{s'il y des boules de couleurs différentes dans la ligne } j \end{cases}$$

Commençons par modéliser la fonction objective : on veut minimiser le nombre de lignes contenant des boules de couleur identique :

$$\min \sum_{j=1}^{49} y_j$$

Ensuite on impose qu'on dispose de 14 boules noires :

$$\sum_{i=1}^{27} x_i = 14$$

Maintenant il faut encore s'assurer que si on a trois boules identiques sur la ligne j, alors la variable y_j doit prendre la valeur 1. Notons $j1, j2$ et $j3$ les 3 boîtes situées sur la ligne j. On doit donc modéliser :

$$\left.\begin{array}{c} x_{j1} + x_{j2} + x_{j3} = 0 \\ \textit{ou} \\ x_{j1} + x_{j2} + x_{j3} = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_j = 1$$

Ceci peut être fait en introduisant les contraintes suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y_j &\geqslant 1 - x_{j1} - x_{j2} - x_{j3} \\ y_j &\geqslant x_{j1} + x_{j2} + x_{j3} - 2 \end{aligned}\right. \qquad \forall\ j = 1, \ldots, 49$$

Remarque : *ces deux dernières contraintes ne garantissent pas que si $y_j = 1$ alors toutes les boules de la ligne j ont la même couleur. Mais ensemble avec la fonction objective, ceci sera garanti pour la solution optimale.*

Exercice 0. 16

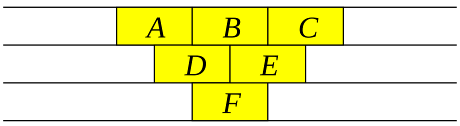
cf : La Recherche Opérationnelle (Nobert, Ouellet et Parent) Gaetan Morin ; page 88

cf : Model Building in Mathematical Prog (H.P. Williams) Wiley ; page 260

Regardons un problème de génie minier qui a fait l'objet de nombreux articles dans les revues de recherche opérationnelle.

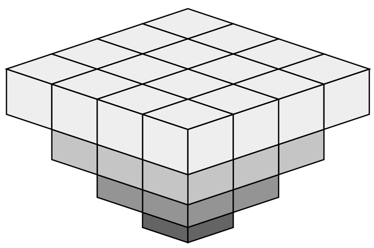
Pour juger de la rentabilité d'un projet de mine à ciel ouvert, les ingénieurs miniers découpent (de manière virtuelle) de gros blocs cubiques de taille uniforme dans le sol et le sous-sol porteurs de minerai. Ils estiment ensuite par carottage les revenus à tirer de l'extraction de chaque bloc. Pour extraire le minerai d'un bloc, il faut, dans les opérations à ciel ouvert, extraire les blocs qui le chapeautent. La taille des blocs est fixée en tenant compte du coefficient de friction de la pierraille engendrée par les opérations d'extraction : il ne faut pas que l'escalier de géant, qui s'enfonce dans le sol et est formé de banquettes et de gradins, ait une déclivité si prononcée qu'elle occasionne des éboulis, toujours périlleux.

La figure suivante illustre la coupe verticale d'une partie d'un sous-sol minéralisé dont l'exploitation n'est possible qu'à ciel ouvert.



Si on veut extraire le bloc F de la figure précédente, il faut d'abord extraire les blocs de surface A, B et C, qui peuvent ne pas contenir de minerai, et les blocs D et E, qui seront sans doute plus coûteux à extraire que les blocs situés en surface.

Imaginons un carré de 100 m de côté tracé sur la surface du sol. Il y a donc, au niveau du sol, 16 blocs de 25 m de côté. Au deuxième niveau il y en a 9, au troisième niveau 4, et au quatrième niveau il n'y en a qu'un seul. Ces blocs forment une pyramide inversée de 30 blocs, tous de 25 m d'arête (voir figure suivante).



Pour chacun des blocs les ingénieurs ont estimé la teneur en métal (pourcentage par rapport au métal pur). La vente d'un bloc de « métal pur 100 % » rapporterait 200 000 €. On a les teneurs en métal suivantes :

niveau 1 (surface)

1.50	1.50	1.50	0.75
1.50	2.00	1.50	0.75
1.00	1.00	0.75	0.50
0.75	0.75	0.50	0.25

niveau 2

4.0	4.0	2.0
3.0	3.0	1.0
2.0	2.0	0.5

niveau 3

12.0	6.0
5.0	4.0

niveau 4

6.0

Les coûts d'extraction augmentent avec la profondeur. Pour les différents niveaux, on obtient les coûts suivants pour extraire un bloc :

- niveau 1 : 3 000 €
- niveau 2 : 6 000 €
- niveau 3 : 8 000 €
- niveau 4 : 10 000 €

Trouver une modélisation sous forme de programme linéaire qui décide quels blocs il faut extraire si on veut maximiser le gain net.

Solution :

On commence par numéroter tous les blocs (de 1 à 30).

On peut alors utiliser les variables suivantes :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le bloc } i \text{ est exploité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note aussi :

$$\begin{aligned} c_i &= \text{teneur en métal du bloc } i \\ d_i &= \text{coût d'extraction du bloc } i \end{aligned}$$

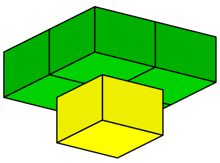
Soit alors le profit du bloc i :

$$p_i = 200\,000 \cdot c_i - d_i$$

Alors on peut formuler la fonction objective qui essaie de maximiser le profit :

$$\max \sum_{i=1}^{30} p_i\, y_i$$

Si on veut extraire un bloc, on doit être sûr qu'on extrait aussi les 4 blocs qui reposent sur le bloc en question.



Par exemple, si on veut extraire le bloc 1 (jaune) sur la figure ci-dessus, il faut aussi extraire (au moins) les blocs 2,3,4 et 5 (vert). Ainsi on doit rajouter **pour tous les blocs des niveaux 2,3 et 4** *les contraintes suivantes :*

$$\begin{cases} y_1 \leqslant y_2 \\ y_1 \leqslant y_3 \\ y_1 \leqslant y_4 \\ y_1 \leqslant y_5 \end{cases}$$

ce qui peut être remplacé par la contrainte :

$$y_i \leqslant \tfrac{1}{4} \cdot (y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

Il ne faut pas oublier de préciser que les variables y_i sont binaires :

$$y_i \in \{0, 1\}$$

Exercice 0. 17

cf : Programmation linéaire (Guéret, Prins, Sevaux) Eyrolles ; page 143

Une PME, spécialisée dans la construction de cartes à puces, désire améliorer la production de ses cartes les plus vendus. Lors de la production de ces cartes, la PME a besoin de certains composants électroniques, qu'elle produit elle-même. Un facteur de succès réside dans une bonne planification de la production de ces composants. La demande en composants est dans ce cas interne et facile à anticiper.

Les quatre composants dont la production est à planifier sur six mois sont notés sous les références X43-M1, X43-M2, Y54-N1 et Y54-N2. La production de ces composants est sensible aux variations des niveaux en production, et chaque changement entraîne un coût de vérification non négligeable. L'entreprise va alors tenter de minimiser les coûts liés à ces changements, elle prendra aussi en compte les coûts de production et les coûts de stockage.

Quand le niveau total de la production change, des réglages machines et des vérifications sont à effectuer pour le mois en cours. Le coût associé est proportionnel à la quantité totale produite en plus ou en moins par rapport au mois précédent. Le coût pour une augmentation est de 1 € alors que celui d'une diminution est seulement de 0.5 €. Notons qu'un changement de niveau de production n'est autre que la différence entre la quantité totale produite lors du mois en question et la quantité totale produite lors du mois précédent.

Les informations concernant la demande par période, les coûts de production et de stockage ainsi que le stock initial et le stock final désirés pour chacun des produits sont repris au tableau ci-dessous.

	Demandes						Coûts		Stocks	
Mois	1	2	3	4	5	6	Production	Stockage	Initial	Final
X43-M1	1 500	3 000	2 000	4 000	2 000	2 500	20	0.4	10	50
X43-M2	1 300	800	800	1 000	1 100	900	25	0.5	0	10
Y54-N1	2 200	1 500	2 900	1 800	1 200	2 100	10	0.3	50	30
Y54-N2	1 400	1 600	1 500	1 000	1 100	1 200	15	0.3	0	10

Trouver une modélisation sous forme de programme linéaire qui cherche le plan de production qui minimise la somme des coûts de changement du niveau de production, des coûts de production et des coûts de stockage ?

Solution :

Notons n le nombre de produits, m le nombre de mois et d_{ij} la demande du produit i au mois j. Soient CP_i le coût de production de chaque unité de produit i, CS_i le coût de stockage d'une unité de produit i, CA le coût unitaire d'augmentation et CB le coût unitaire de baisse des niveaux de production.

Notons encore s_{i0} le stock initial du produit i et SF_i le stock final souhaité.

Les variables x_{ij} et s_{ij} représentent la quantité produite et le niveau de stock du produit i en période j.

- *Commençons par les contraintes d'équilibre des stocks (production et stock précédent est égal à la demande et le nouveau stock) :*

$$x_{ij} + s_{i\,j-1} = d_{ij} + s_{ij} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n \qquad \forall\, j = 1, \ldots, m$$

- *Le stock final doit être respecté :*

$$s_{im} \geqslant SF_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

- *Pour calculer les changemements des niveaux de production, nous avons besoin de deux variables supplémentaires y_j et z_j qui représentent les augmentations et les diminutions des productions en période j. Rappelons qu'un changement de niveau de production n'est autre que la différence entre la quantité totale produite lors du mois j et la quantité totale produite lors du mois $j-1$. Si cette différence est positive, il s'agit alors d'une augmentation de production, sinon ce sera une baisse. Ce changement s'exprimera par la valeur de $y_j - z_j$.*

  Comme on ne peut augmenter et diminuer le niveau de production en même temps, une des deux variables sera automatiquement égale à 0, l'autre représentera soit une augmentation, soit une diminution. Ceci peut être traduit par les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{i\,j-1} \quad = \quad y_j - z_j \qquad\qquad \forall\, j = 2, \ldots, m$$

  Notons qu'il n'existe pas de valeurs pour y_1 et z_1 comme c'est le début de la planification.

- *La fonction objective est la somme des coûts de production, stockage et changement de niveau :*

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \left(cp_i \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + cs_i \cdot \sum_{j=1}^{m} s_{ij} \right) + ca \cdot \sum_{j=2}^{m} y_j + cb \cdot \sum_{j=2}^{m} z_j$$

- *Il ne faut pas oublier le domaine de définition des variables utilisées :*

$$\begin{array}{lllll} x_{ij} & \geqslant & 0 & \forall\, i = 1, \ldots, n & \forall\, j = 1, \ldots, m \\ s_{ij} & \geqslant & 0 & \forall\, i = 1, \ldots, n & \forall\, j = 1, \ldots, m \\ y_j & \geqslant & 0 & \forall\, j = 1, \ldots, m & \\ z_j & \geqslant & 0 & \forall\, j = 1, \ldots, m & \end{array}$$