Processus stochastiques

M2 Mathématiques

Jean-Christophe Breton
Université de Rennes 1

Septembre–Octobre 2019

Version du 20 octobre 2019

Table des matières

I Processus stochastiques **1**

1 Processus stochastiques **3**
1.1 Loi d'un processus . . . 3
1.2 Régularité des trajectoires . . . 7
1.3 Convergence faible des lois de processus . . . 10
1.3.1 Rappels sur la convergence faible . . . 11
1.3.2 Équitension . . . 15

2 Processus gaussiens **17**
2.1 Lois des processus gaussiens . . . 17
2.2 Régularité gaussienne . . . 20
2.3 Espace gaussien . . . 21
2.4 Exemples de processus gaussiens . . . 23

3 Mouvement brownien **29**
3.1 Historique . . . 29
3.2 Définition, premières propriétés . . . 31
3.2.1 Propriétés immédiates . . . 31
3.3 Propriétés en loi du mouvement brownien . . . 33
3.4 Propriétés trajectorielles du mouvement brownien . . . 35
3.4.1 Loi du 0/1 de Blumenthal . . . 35
3.4.2 Conséquences trajectorielles de la loi du 0/1 de Blumenthal . . . 39
3.4.3 Régularité trajectorielle brownienne . . . 40
3.5 Variation quadratique . . . 42
3.6 Propriété de Markov forte . . . 44
3.6.1 Temps d'arrêt . . . 44
3.6.2 Propriété de Markov . . . 47
3.6.3 Principe de réflexion . . . 49
3.7 Équation de la chaleur . . . 50
3.7.1 Origine physique . . . 50
3.7.2 Origine mathématique . . . 51

II Martingales 55

4 Martingales en temps continu 57

4.1 Filtration et processus . . . 57
4.2 Filtrations et temps d'arrêt . . . 60
4.3 Martingales en temps continu . . . 64
4.3.1 Définition, exemples . . . 64
4.3.2 Inégalités pour martingales en temps continu . . . 65
4.3.3 Régularisation de trajectoires . . . 67
4.3.4 Théorèmes de convergence . . . 69
4.3.5 Théorème d'arrêt . . . 72
4.4 Processus de Poisson . . . 75

5 Semimartingales continues 77

5.1 Processus à variation bornée . . . 77
5.1.1 Fonctions à variation finie . . . 77
5.1.2 Intégrale de Stieltjes . . . 80
5.1.3 Extension de l'intégration de Stieltjes à $\mathbb{R}_+$ . . . 81
5.1.4 Processus à variation finie . . . 81
5.2 Martingales locales . . . 83
5.3 Variation quadratique d'une martingale locale . . . 87
5.4 Semimartingales continues . . . 101

III Intégration stochastique 103

6 Intégration stochastique 105

6.1 Par rapport à une martingale bornée dans L^2 . . . 105
6.2 Par rapport à une martingale locale . . . 112
6.3 Par rapport à une semimartingale . . . 117
6.4 Cas non continu . . . 119

7 Formule d'Itô et conséquences 121

7.1 Formule d'Itô . . . 121
7.2 Théorème de Lévy . . . 131
7.3 Dubins-Schwarz . . . 132
7.4 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy . . . 134
7.5 Représentation des martingales (browniennes) . . . 140
7.6 Formule de Tanaka . . . 143

Introduction

Ces notes de cours ont pour but de présenter le mouvement brownien et l'intégration stochastique. Elles sont principalement destinées aux étudiants du Master 2 ″ Mathématiques et applications″ de l'Université de Rennes 1. Ces notes ont plusieurs sources d'inspiration, dont principalement [LG1] mais aussi les notes de cours [Gué], [EGK], [CM], [Mal]. Par ailleurs, des références standards conseillées sur le sujet sont les livres [KS], [RY] (en anglais) et [Gal], [CM] (en français).

Le contenu de ces notes est le suivant :

On commence par quelques rappels gaussiens en introduction. La notion générale de processus stochastique est présentée au Chapitre 1. Le Chapitre 2 introduit la classe des processus gaussiens. Ces chapitres s'inspirent de [Dav] et des références classiques sont [Bil2], [Kal].
Au Chapitre 3, on présente le mouvement brownien, processus stochastique central, dont on discute de nombreuses propriétés.
Au Chapitre 4, on introduit la notion de martingale en temps continu. On revisite les principales propriétés connues dans le cas des martingales discrètes.
La notion de semimartingale, essentielle dans la théorie de l'intégration stochastique, est présentée au Chapitre 5.
Le Chapitre 6 est consacré à la construction des intégrales stochastiques et à ses principales propriétés.

Des références valables pour tous les chapitres sont [LG1], [Gué], [EGK], [KS], [RY], [CM] et [Mal].

Les prérequis de ce cours sont des probabilités de base (des fondements des probabilités aux conséquences de la LGN et du TCL – niveau L3), les martingales en temps discret (niveau M1).

Rappels gaussiens

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats sur les variables aléatoires gaussiennes et sur les vecteurs aléatoires gaussiens. Ces rappels seront utiles pour généraliser le cadre gaussien aux processus au Chapitre 2 et présenter la notion de processus gaussien.

Variables gaussiennes

Définition 0.1 *Une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-t^2/2\big).$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$) si elle admet pour densité

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Si $\sigma^2 = 0$, la loi est dégénérée, la variable aléatoire X est constante égale à m. Sa loi est une mesure de Dirac en m : $\mathbb{P}_X = \delta_m$.

Proposition 0.1 *Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ peut se voir comme la translatée et la dilatée de $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ par $X = m + \sigma X_0$.*

Autrement dit si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, on définit la variable aléatoire centrée réduite $\widetilde{X} = {}^{(X-m)}/_{\sigma}$. Elle suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Cette action s'appelle ″centrer, réduire″.

Proposition 0.2 *Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ a pour*

- *espérance : $\mathbb{E}[X] = m$;*
- *variance : $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$;*
- *fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \exp\big(imt - \sigma^2 t^2/2\big)$.*

Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors les moments de X sont donnés pas

$$\mathbb{E}\big[X^{2n}\big] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\big[X^{2n+1}\big] = 0. \tag{1}$$

Démonstration :[Esquisse] Centrer, réduire pour se ramener à $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculs simples pour $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$. Pour la fonction caractéristique, identifier les fonctions holomorphes $\mathbb{E}[e^{zX}]$ et $e^{z^2/2}$ pour $z \in \mathbb{R}$ et considérer $z = ix$. Pour les moments de tous ordres faire des intégrations par parties successives. □

L'estimation de la queue normale suivante s'avère utile : pour $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $x \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(N \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \qquad (2)$$

En fait, on a une estimation valable pour tout $x > 0$ et meilleure si $x \geq 1$:

Proposition 0.3 *Soit $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $x > 0$ alors*

$$\mathbb{P}(N \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2}} \exp(-x^2/2).$$

Démonstration : En notant $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, on a

$$f'(x) = -\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{x^2} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \leq -\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(N \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2) du \leq -\int_x^{+\infty} f'(u) du = -\big[f(u)\big]_x^{+\infty} = f(x).$$

□

Proposition 0.4 *Soient $N_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $N_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indépendantes. Alors $N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Démonstration : Par les fonctions caractéristiques, avec l'indépendance, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{N_1+N_2}(t) &= \varphi_{N_1}(t)\varphi_{N_2}(t) = \exp\big(im_1 t - \sigma_1^2 t^2/2\big) \exp\big(im_2 t - \sigma_2^2 t^2/2\big) \\ &= \exp\big(i(m_1+m_2)t - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2\big) = \varphi_{\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. □

Proposition 0.5 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables normales de loi $\mathcal{N}\big(m_n, \sigma_n^2\big)$.*

1. *La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ssi $m_n \to m \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. La loi limite est alors $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*
2. *Si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X, la convergence a lieu dans tous les espaces L^p, $p < +\infty$.*

Démonstration : 1) D'après le théorème de Paul Lévy, la convergence en loi $X_n \Longrightarrow X$ est équivalente à avoir pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{X_n}(t) = \exp\left(im_n t - \frac{\sigma_n^2}{2}t^2\right) \to \varphi_X(t), \quad n \to +\infty. \tag{3}$$

Comme φ_X est continue et $\varphi_X(0) = 1$, il existe $t \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t)| \neq 0$. Pour ce t, en prenant le module dans (3), on a $\exp(-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2) \to |\varphi_X(t)|$. On déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = -\frac{2}{t^2} \ln|\varphi_X(t)| := \sigma^2$ existe. Par suite, on a aussi

$$\exp\big(im_n t\big) \to \exp\big(\sigma^2 t^2/2\big)\varphi_X(t).$$

Supposons que $(m_n)_{n\geq1}$ est non bornée. On construit alors une sous-suite $m_{n_k} \to +\infty$, $k \to +\infty$ (ou $-\infty$ ce qui mène à un raisonnement analogue). Alors pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \eta) \geq \limsup_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_{n_k} \geq \eta) \geq \frac{1}{2}$$

puisque, pour k assez grand, $\mathbb{P}(X_{n_k} \geq \eta) \geq \mathbb{P}(X_{n_k} \geq m_k) = 1/2$ (la moyenne m_k étant aussi la médiane). En faisant $\eta \to +\infty$, on a $\mathbb{P}(X = +\infty) \geq 1/2$, ce qui est absurde car $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in \mathbb{R}) = 1$.

On a donc $(m_n)_{n\geq1}$ bornée. Dès lors, si m et m' sont deux valeurs d'adhérence de $(m_n)_{n\geq1}$, en passant à la limite sur les bonnes sous-suites, on doit avoir $e^{imt} = e^{im't}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui exige $m = m'$. Il y a donc unicité de la valeur d'adhérence, c'est à dire existence de la limite m de m_n.

Finalement, $m_n \to m$ et $\sigma_n \to \sigma$ $(n \to +\infty)$ et en passant à la limite dans (3), on a :

$$\varphi_X(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$$

ce qui assure $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

2) On écrit $X_n = \sigma_n N_n + m_n$ avec $N_n \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme X_n converge en loi, les suites $(m_n)_{n\geq1}$ et $(\sigma_n)_{n\geq1}$ sont bornées d'après la partie 1). Par convexité pour $q \geq 1$

$$|\sigma_n N + m_n|^q \leq 2^{q-1}(|\sigma_n|^q|N|^q + |m_n|^q)$$

et l'expression des moments de N_n, donnée en (1) assure alors

$$\sup_{n\geq1} \mathbb{E}\big[|X_n|^q\big] < +\infty \quad \forall q \geq 1.$$

Comme la convergence en probabilité donne la convergence ps d'une sous-suite X_{n_k}, par le lemme de Fatou, on a :

$$\mathbb{E}\big[|X|^q\big] = \mathbb{E}\Big[\lim_{k\to+\infty} |X_{n_k}|^q\Big] \leq \liminf_{k\to+\infty} \mathbb{E}[X_{n_k}|^q] \leq \sup_{k\geq1} \mathbb{E}\big[|X_{n_k}|^q\big] \leq \sup_{n\geq1} \mathbb{E}\big[|X_n|^q\big] < +\infty.$$

Soit $p \geq 1$, la suite $|X_n - X|^p$ converge vers 0 en probabilité et est uniformément intégrable car bornée dans L^2 (d'après ce qui précède avec $q = 2p$). Elle converge donc dans L^1 vers 0, ce qui prouve 2) dans la Prop. 0.5. □

Le caractère universel de la loi normale est illustré par le résultat suivant. Il montre que la loi normale standard contrôle les fluctuations par rapport à leur moyenne des effets cumulés d'un phénomène aléatoire répété avec des répétitions indépendantes.
Dans la suite, *iid* signifiera indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s, c'est à dire de même loi. Souvent, on notera aussi *vaiid* pour variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Théorème 0.1 (TCL) *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid, d'espérance m et de variance finie $\sigma^2 > 0$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la somme partielle. Alors*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{\sigma^2 n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad n \to +\infty.$$

Remarque 0.1 — Le TCL complète la loi des grands nombres : en effet, la LGN donne $S_n/n \to m$, c'est à dire $S_n - nm \approx 0$. Le TCL donne la vitesse de cette convergence (en loi) : elle est en $\sqrt{n}$. Noter que la convergence est presque sûre dans la LGN et en loi (donc beaucoup plus faible) dans le TCL.
— La loi $\mathcal{N}(0,1)$ apparaît à la limite dans le TCL alors que les variables aléatoires X_i sont de lois arbitraires (de carré intégrable) : ce résultat justifie le rôle universel de la loi normale. Elle modélise les petites variations de n'importe quelle loi (avec un moment d'ordre 2) par rapport à sa moyenne.

Démonstration : D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de montrer la convergence des fonctions caractéristiques. Posons $Y_i = (X_i - m)/\sigma$, si bien que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes de même loi avec $\mathbb{E}[Y_i] = 0$, $\mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{Var}(X_i)/\sigma^2 = 1$. Notons $S'_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{S'_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}S'_n\right)\right] = \varphi_{S'_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\dots\varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

en utilisant $\varphi_{Y_1+\dots+Y_n} = \varphi_{Y_1}\dots\varphi_{Y_n} = \varphi_{Y_1}^n$ par indépendance et identique distribution des variables aléatoires Y_i.
Comme Y_1 a un moment d'ordre 2, φ_{Y_1} est dérivable 2 fois avec $\varphi_{Y_1}(0) = 1$, $\varphi'_{Y_1}(0) = i\mathbb{E}[Y_1] = 0$ et $\varphi''_{Y_1}(0) = i^2\mathbb{E}[Y_1^2] = -1$. La formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne alors

$$\varphi_{Y_1}(x) = \varphi_{Y_1}(0) + x\varphi'_{Y_1}(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''_{Y_1}(0) + x^2\epsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

où la fonction ϵ vérifie $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$. On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= \left(\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1-\frac{t^2}{2\sqrt{n}^2}+\frac{t}{\sqrt{n}^2}\epsilon(t/\sqrt{n})\right)^n = \left(1-\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(1/\sqrt{n})\right)^n \\
&= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(1/\sqrt{n})\right)\right) = \exp\left(n\Big(-\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{n}\epsilon(1/\sqrt{n})\Big)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{t^2}{2}+\epsilon(1/\sqrt{n})\right).
\end{aligned}$$

(Noter que la fonction reste $\epsilon(\cdot)$ dans φ_{Y_1} est à valeurs complexes si bien qu'il est un peu rapide de prendre directement le logarithme comme précédemment. Cependant l'argument peut être précisé sans passer par la forme exponentielle avec les logarithmes ; on renvoie à un (bon) cours de L3 ou de M1.) On a donc pour chaque $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Z_n}(t)=\exp\big(-t^2/2\big)=\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t).$$

Le théorème de Paul Lévy donne alors la convergence en loi de Z_n vers $\mathcal{N}(0,1)$, ce qui prouve le TCL. □

Remarque 0.2 En général, lorsque n est grand, on approxime la loi d'une somme de variables aléatoires *iid* de $L^2(\Omega)$ par une loi normale grâce au TCL de la façon suivante : Soit $S_n=X_1+\cdots+X_n$ la somme de variables aléatoires *iid* X_i avec $\sigma^2<+\infty$, on a d'après le TCL

$$\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}}\Longrightarrow\mathcal{N}(0,1).$$

Quand n est grand, on approxime alors la loi de $\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}}$ par celle de $N\sim\mathcal{N}(0,1)$. Si bien que la loi de la somme $S_n=X_1+\cdots+X_n$ est approximée par celle de

$$n\mathbb{E}[X_1]+\sigma\sqrt{n}N\sim\mathcal{N}\big(n\mathbb{E}[X_1],\sigma^2 n\big).$$

Règle d'approximation : *La somme S_n d'une suite de vaiid L^2 de moyenne m et de variance σ^2 s'approxime par $S_n\approx\mathcal{N}(nm,n\sigma^2)$.*

Application (Moivre-Laplace). Comme une variable aléatoire X_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut se voir comme la somme de n variables aléatoires ϵ_i $1\leq i\leq n$, indépendantes de loi de Bernoulli $b(p)$, $X_n=\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n$, la remarque précédente montre qu'on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\big(np,np(1-p)\big)$.

Vecteurs gaussiens

On considère des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^n$. Muni de son produit scalaire canonique, $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien. Pour deux vecteurs $a=(a_1,\dots,a_n), b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, on note $\langle a,b\rangle=\sum_{i=1}^n a_ib_i$ leur produit scalaire. On peut généraliser cette section à un espace E euclidien (si $\dim(E)=n$ alors $E\sim\mathbb{R}^n$).

Définition 0.2 (Vecteur gaussien) *Un vecteur aléatoire $X=(X_1,\dots,X_n)$ est gaussien si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées $\langle a,X\rangle=a_1X_1+\dots+a_nX_n$ suivent une loi gaussienne dans $\mathbb{R}$ (pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$).*
Dans un cadre euclidien E, X vecteur à valeurs dans E est gaussien ssi pour tout $a\in E$, $\langle a,X\rangle$ suit une loi gaussienne.

En particulier, chaque marginale X_i suit une loi normale et a donc un moment d'ordre 2 fini. Les moments joints $\mathbb{E}[X_iX_j]$, $1\le i,j\le n$, sont donc bien définis (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et on peut définir licitement la matrice de covariance :

Définition 0.3 *La* **matrice de covariance** *d'un vecteur gaussien $X=(X_1,\dots,X_n)$ est la matrice carrée symétrique, positive*

$$K=\big(\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\big)_{1\le i,j\le n}.$$

Si $\det K=0$, le vecteur est dit dégénéré.
*L'***espérance** *de $X=(X_1,\dots,X_n)$ est le vecteur des espérances de ses marginales*

$$\mathbb{E}[X]=\big(\mathbb{E}[X_1],\dots,\mathbb{E}[X_n]\big).$$

Si $\mathbb{E}[X]=0$, le vecteur X est dit **centré**.

Fonction caractéristique gaussienne en dimension n

Si $X=(X_1,\dots,X_n)$ est un vecteur gaussien alors $\langle a,X\rangle=\sum_{i=1}^n a_iX_i$ suit une loi normale de paramètres

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\langle a,X\rangle\big] &= \mathbb{E}[a_1X_1+\dots+a_nX_n]=a_1\mathbb{E}[X_1]+\dots+a_n\mathbb{E}[X_n]=\langle a,\mathbb{E}[X]\rangle,\\
\operatorname{Var}\big(\langle a,X\rangle\big) &= \operatorname{Var}(a_1X_1+\dots+a_nX_n)=\sum_{i,j=1}^n a_ia_j\operatorname{Cov}(X_i,X_j)=a^t\operatorname{Cov}(X)a.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire $\langle a,X\rangle$ suit donc la loi $\mathcal{N}\big(\langle a,\mathbb{E}[X]\rangle, a^t\operatorname{Cov}(X)a\big)$, sa fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi_{\langle a,X\rangle}(x)=\exp\left(ix\langle a,\mathbb{E}[X]\rangle-\frac{1}{2}\big(a^t\operatorname{Cov}(X)a\big)x^2\right).$$

D'après la définition des fonctions caractéristiques d'une variable aléatoire et d'un vecteur aléatoire

$$\varphi_X(x) = \mathbb{E}\big[e^{i\langle x,X\rangle}\big] = \varphi_{\langle x,X\rangle}(1).$$

On en déduit :

Proposition 0.6 *La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\varphi_X(x) &= \exp\left(i\langle x, \mathbb{E}[X]\rangle - \frac{1}{2}(x^t \operatorname{Cov}(X)x)\right) \\ &= \exp\left(i\langle x, \mathbb{E}[X]\rangle - \frac{1}{2}\langle x, \operatorname{Cov}(X)x\rangle\right). \qquad (4)\end{aligned}$$

Remarque 0.3 — La loi d'un vecteur gaussien est connue dès qu'on a le vecteur moyenne $\mathbb{E}[X]$ et la matrice de covariance $\operatorname{Cov}(X)$.

— On parle du vecteur gaussien standard en dimension n lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\operatorname{Cov}(X) = I_n$. Sa fonction caractéristique se simplifie en

$$\varphi_X(x) = \exp\big(-\langle x, x\rangle/2\big) = \exp\big(-\|x\|^2/2\big).$$

— Pour un vecteur gaussien centré, on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et on montre que

$$\langle x, \operatorname{Cov}(X)x\rangle = \mathbb{E}[\langle x, X\rangle^2],$$

si bien que dans le cas centré la fonction caractéristique se réécrit :

$$\varphi_X(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, \operatorname{Cov}(X)x\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\langle x, X\rangle^2\big]\right).$$

— En prenant $x = (x_1, 0, \dots, 0)$, on a

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \varphi_X(x) = \exp\big(i\mathbb{E}[X_1]x_1 - \operatorname{Var}(X_1)x_1^2/2\big).$$

On retrouve que $X_1 \sim \mathcal{N}\big(\mathbb{E}[X_1], \operatorname{Var}(X_1)\big)$. Plus généralement, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $X_i \sim \mathcal{N}\big(\mathbb{E}[X_i], \operatorname{Var}(X_i)\big)$.

Comme pour les variables aléatoires gaussiennes, on peut se ramener à un vecteur gaussien standard en centrant et en réduisant un vecteur gaussien quelconque non dégénéré. On a en effet :

Proposition 0.7 *Soit $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ un vecteur gaussien non dégénéré (ie. $\det K \neq 0$) avec $m \in \mathbb{R}^n$ et K sa matrice de covariance. Alors*

$$\sqrt{K}^{-1}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_n). \qquad (5)$$

Si $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ est dégénéré, c'est que le vecteur X vit dans un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^n$. Il faut l'étudier dans ce sous-espace vectoriel.

Démonstration : Comme le vecteur X est non dégénéré, sa matrice de covariance K est définie (c'est à dire inversible). Il existe donc une matrice $A = \sqrt{K}$ inversible telle que $K = AA^t$. (Par la méthode de Cholesky, A peut être choisie triangulaire inférieure.) Il est donc légitime d'utiliser $\sqrt{K}^{-1}$ dans (5).
On montre maintenant que $\widetilde{X} = \sqrt{K}^{-1}(X - m)$ est gaussien, standard :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\widetilde{X}}(x) &= \mathbb{E}\left[\exp(i\langle x, \widetilde{X}\rangle)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp(i\langle x, \sqrt{K}^{-1}(X-m)\rangle)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp(i\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, X-m\rangle)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp(i\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, X\rangle)\right] \times \exp\left(-i\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, m\rangle\right) \\
&= \varphi_X\left((\sqrt{K}^{-1})^t x\right) \times \exp\left(-i\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, m\rangle\right) \\
&= \exp\left(i\langle m, (\sqrt{K}^{-1})^t x\rangle - \frac{1}{2}\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, K(\sqrt{K}^{-1})^t x\rangle\right) \times \exp\left(-i\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, m\rangle\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle(\sqrt{K}^{-1})^t x, K(\sqrt{K}^{-1})^t x\rangle\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, \sqrt{K}^{-1}K(\sqrt{K}^{-1})^t x\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, \sqrt{K}^{-1}\sqrt{K}(\sqrt{K})^t(\sqrt{K}^{-1})^t x\rangle\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right).
\end{aligned}$$

On a donc bien $\widetilde{X} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. □

Remarque 0.4 Comme pour les variables aléatoires normales, un vecteur aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ avec K inversible peut se voir comme la translatée et dilatée du vecteur gaussien standard $N \sim \mathcal{N}(0, I_n)$:

$$X \sim \sqrt{K}N + m.$$

Indépendance de variables gaussiennes

Proposition 0.8 *Soient* (X, Y) *un couple gaussien. Alors* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration : Le sens direct est vrai quelque soit la loi de X et de Y et suit de $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ lorsque $X \perp\!\!\!\perp Y$. Pour la réciproque, on sait que, lorsque (X, Y)

est un coupluie gaussien, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$. Supposons le couple centré pour simplifier. Le vecteur gaussien (X,Y) a une matrice de covariance diagonale :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

car les termes diagonaux sont $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) = 0$. On déduit de l'expression (4) de la fonction caractéristique de (X,Y) que, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(t_1^2\sigma_X^2 + t_2\sigma_Y^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}t_1^2\sigma_X^2\Big) \times \exp\Big(-\frac{1}{2}t_2^2\sigma_Y^2\Big) \\ &= \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2), \end{aligned}$$

ce qui justifie l'indépendance de X et de Y et prouve la Prop. 0.8. □

Il est aisé de généraliser de la même façon le résultat pour des vecteurs. Attention, il faut bien veiller à ce que, considérés *ensemble*, les vecteurs forment encore un vecteur gaussien, sinon l'exemple ci-dessous montre que le résultat est faux (cf. aussi un autre exemple ci-dessous).

Exemple 0.1 On considére une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et une seconde variable aléatoire ε indépendante de X et telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Alors $X_1 = X$, $X_2 = \varepsilon X$ sont deux variables aléatoire $\mathcal{N}(0,1)$. De plus, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[\varepsilon]\mathbb{E}[X^2] = 0$. Cependant X_1 et X_2 ne sont évidemment pas indépendantes (par exemple parce que $|X_1| = |X_2|$). Dans cet exemple, le couple (X_1,X_2) n'est pas un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$ bien que ses coordonnées soient des variables gaussiennes.

Proposition 0.9 *Soit* $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_p)$ *un vecteur gaussien de dimension* $n+p$. *Les deux vecteurs aléatoires* $X = (X_1,\dots,X_n)$ *et* $Y = (Y_1,\dots,Y_p)$ *sont indépendants si et seulement si toutes les covariances* $\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le p$ *sont nulles.*

Densité gaussienne en dimension n

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ un vecteur gaussien standard en dimension n. Comme $\mathrm{Cov}(X) = I_n$, les marginales $X_1,\dots,X_n$ sont toutes indépendantes. La loi du vecteur $X = (X_1,\dots,X_n)$ est donc la loi produit de ses marginales $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$. En terme de densité, la densité de X est alors donnée par le produit tensoriel des densités marginales

$$\begin{aligned} f_X(x_1,\dots,x_n) &= f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_n}(x_n) \\ &= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x_1^2/2)\Big) \times \cdots \times \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x_n^2/2)\Big) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\big(-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2\big). \end{aligned}$$

On a justifié :

Proposition 0.10 *La densité d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ standard en dimension n est*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\big(- 1/2(x_1^2 + \dots + x_n^2)\big).$$

Pour passer au cas général d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ non dégénéré (ie. $K = \mathrm{Cov}(X)$ inversible), on utilise la représentation donnée en (5) avec le vecteur gaussien réduit $N \sim \mathcal{N}(0, I_n)$: $X \sim \sqrt{K}X_0 + m$. Cela permet d'utiliser la densité déjà justifiée dans la proposition précédente : Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}\big(\sqrt{K}X_0 + m \in A\big) \\
&= \mathbb{P}\big(X_0 \in \sqrt{K}^{-1}(A - m)\big) \\
&= \int_{\sqrt{K}^{-1}(A-m)} \frac{\exp(-\|x\|^2/2)}{(2\pi)^{n/2}}\, dx \\
&= \int_A \frac{\exp(-\|\sqrt{K}^{-1}(y-m)\|^2/2)}{(2\pi)^{n/2}} \frac{dy}{\det \sqrt{K}} \\
&\quad \text{(avec le changement de variable } y = \sqrt{K}x + m) \\
&= \int_A \frac{\exp\big(-\langle (x-m), K^{-1}(x-m)\rangle/2\big)}{((2\pi)^n \det K)^{1/2}}\, dx.
\end{aligned}$$

On a obtenu la forme générale de la densité d'un vecteur gaussien non dégénéré :

Proposition 0.11 *La densité d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ non dégénéré est*

$$f_X(x) = \frac{\exp\big(-\langle (x-m), K^{-1}(x-m)\rangle/2\big)}{((2\pi)^n \det K)^{1/2}}.$$

Variables gaussiennes et vecteurs non gaussiens

On a déjà vu que si un vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est gaussien alors ses marginales X_i le sont aussi, de même les combinaisons linéaires de ses marginales le sont. **La réciproque est fausse :** si des variables aléatoires sont gaussiennes alors le vecteur formé par ces variables n'est pas nécessairement gaussien. En effet, prenons X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y de loi donnée, pour $a > 0$ fixé, par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \le a, \\ -X & \text{si } |X| > a. \end{cases}$$

Alors Y est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ en effet

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}\mathbf{1}_{|X|\le a}] + \mathbb{E}[e^{-itX}\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{itX}\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}}] + \mathbb{E}[e^{itX}\mathbf{1}_{\{|-X|>a\}}] = \mathbb{E}[e^{itX}\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}}] + \mathbb{E}[e^{itX}\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] \\
&= \mathbb{E}[e^{itX}(\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}} + \mathbf{1}_{\{|X|>a\}})] = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-t^2/2}
\end{aligned}$$

car la loi de X est symétrique : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$. Puis, la variable $X+Y$ est donnée par

$$\begin{aligned} X+Y &= \begin{cases} X+X=2X & \text{si} \quad |X| \le a \\ X-X=0 & \text{si} \quad |X| > a \end{cases} \\ &= 2X\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}}. \end{aligned}$$

La combinaison linéaire $X+Y$ a un atome en 0 car $\mathbb{P}(X+Y=0) \ge \mathbb{P}(|X|>a) > 0$. Elle ne suit donc pas une loi gaussienne. Le couple aléatoire (X,Y) n'est donc pas gaussien (sinon on devrait avoir $X+Y$ de loi gaussienne !).

De plus, cet exemple montre aussi que dans la Proposition 0.8, l'hypothèse (X,Y) gaussien est nécessaire et il ne suffit pas de supposer que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes. En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{|X|\le a}] - \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] - \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] \\ &= 1 - 2\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}]. \end{aligned}$$

La fonction $u(a) = \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}]$ tend vers 0 en $+\infty$ par convergence dominée, est continue et vaut $\mathbb{E}[X^2] = 1$ en 0. Par le théorème des varleurs intermédiaires, il existe donc $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $u(a) = 1/2$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Pourtant, X et Y sont non indépendantes sinon la loi du couple (X,Y) serait

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y = \mathcal{N}(0,1) \otimes \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

qui est gaussienne, ce qui est faux. On a donc des variables aléatoires gaussiennes X et Y non corrélées mais non indépendantes.

Première partie

Processus stochastiques

Chapitre 1

Processus stochastiques

Ce chapitre présente la notion générale de processus stochastique. On décrit d'abord les lois des processus, leurs propriétés (Section 1.1), les trajectoires des processus (Section 1.2) et la notion de convergence faible des processus (Section 1.3).

Définition 1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.*

En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.
Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

— Pout $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

— Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $T = \mathbb{R}_+$ ou $[0, 1]$.

1.1 Loi d'un processus

Définition 1.2 (Lois fini-dimensionnelles) *On appelle lois fini-dimensionnelles d'un processus l'ensemble des lois*

$$\big\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) \ : t_1, \dots, t_p \in T,\ p \in \mathbb{N}^*\big\}. \tag{1.1}$$

Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^T$. On munit $\mathbb{R}^T$ de la tribu cylindrique $\sigma(\mathrm{Cyl})$ engendrée par la famille des cylindres :

$$\mathrm{Cyl} = \big\{\{x : T \to \mathbb{R} \ :\ x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_p) \in A_p\},\ A_1, \dots, A_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), p \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

Il s'agit de la tribu sur $\mathbb{R}^T$ rendant mesurables les applications coordonnées $\Pi_t : x \in \mathbb{R}^T \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$. Il est légitime de regarder un processus X comme une fonction aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl}))$:

$$X : \left\{ \begin{array}{rcl} (\Omega, \mathcal{F}) & \to & \big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big) \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = \big(X_t(\omega)\big)_{t\in T}. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

On définit bien une variable aléatoire à valeurs dans $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$. En effet pour tout cylindre $C = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_p) \in A_p\}$, on a $X^{-1}(C) = \bigcap_{i=1}^p X_{t_i}^{-1}(A_i)$. Mais chaque X_{t_i} étant une variable aléatoire, on a $X_{t_i}^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$ et $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$. Comme Cyl engendre $\sigma(\mathrm{Cyl})$, on a bien la $\big(\mathcal{F}, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$-mesurabilité de (1.2).

On peut alors considérer la loi $\mathbb{P}_X$ du processus sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$ comme mesure image $\mathbb{P}$ par la variable aléatoire (1.2). En fait les lois fini-dimensionnelles (1.1) de X définissent une loi sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$ par extension :

Théorème 1.1 (Extension de Kolmogorov) *Soit $\mathcal{Q} = \{Q_{t_1,\dots,t_p} : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de lois fini-dimensionnelles vérifiant les* **conditions de compatibilité** *:*

- *si $\mathbf{s} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_p})$ est une permutation de $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$ alors pour tout $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, p$, on a*

$$Q_{\mathbf{t}}(A_1 \times \cdots \times A_p) = Q_{\mathbf{s}}(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_p});$$

- *si $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$ avec $p \geq 1$, $\mathbf{s} = (t_1, \dots, t_{p-1})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p-1})$ alors*

$$Q_{\mathbf{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\mathbf{s}}(A).$$

Alors il existe une mesure de probabilité P sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(Cyl)\big)$ qui admet $\mathcal{Q} = \{Q_{t_1,\dots,t_p} : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$ pour famille de lois fini-dimensionnelles.

Démonstration : Admis, cf. [Kal] ou [KS]. □

Comme les lois fini-dimensionnelles d'un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ satisfont immédiatement les relations de compatibilité, le théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.1) permet effectivement de considérer la loi $\mathbb{P}_X$ d'un processus X sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$. De plus :

Proposition 1.1 *La loi $\mathbb{P}_X$ d'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est entièrement caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles $\big\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) : t_1, \dots, t_p \in T,\, p \in \mathbb{N}^*\big\}$.*

Démonstration : Considérons deux processus $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ partageant les mêmes lois fini-dimensionnelles. Nous montrons que leur loi $P_1 := \mathbb{P}_{X^{(1)}}$ et $P_2 := \mathbb{P}_{X^{(2)}}$ sont égales sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$.
Remarquons que l'ensemble Cyl des cylindres est un π-système (stable par intersection finie : l'intersection de deux cylindres est encore un cylindre). Notons $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathrm{Cyl}) : P_1(A) = P_2(A)\}$. Il s'agit d'une classe monotone ($\mathbb{R}^T \in \mathcal{M}$; $\mathcal{M}$ est stable par différence

ensembliste, $\mathcal{M}$ est stable par réunion croissante) et $\mathcal{M}$ contient Cyl (puisque $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ ont mêmes lois fini-dimensionnelles) : pour un cylindre C,

$$P_1(C) = \mathbb{P}\big(X^{(1)}_{t_1} \in A_1, \dots, X^{(1)}_{t_p} \in A_p\big) = \mathbb{P}\big(X^{(2)}_{t_1} \in A_1, \dots, X^{(2)}_{t_p} \in A_p\big) = P_2(C).$$

Le théorème de classe monotone assure alors que $\sigma(\mathrm{Cyl}) \subset \mathcal{M}$, ce qui prouve la Prop. 1.1. □

Il y a plusieurs façons pour des processus stochastiques X et Y d'être égaux :

Définition 1.3 (Égalités de processus)

— *Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in T$,*

$$\big(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}\big) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \big(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_p}\big).$$

On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

— *On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*

— *Deux processus X et Y sont dit indistinguables s'il existe $N \in \mathcal{F}$ négligeable tels que, pour tout $\omega \notin N$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in T$; de façon un peu abusive (parce que $\{X_t = Y_t : \forall t \in T\}$ n'est pas nécessairent un évènement), on écrit : $\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall t \in T) = 1$.*

Il est facile de voir que pour deux processus stochastiques X et Y, les notions d'égalité des lois de processus s'ordonnent logiquement de la façon suivante :

Proposition 1.2 *indistinguable $\Rightarrow$ modification $\Rightarrow$ même lois fini-dimensionnelles.*

Les implications sont strictes, comme indiqué dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1.1

1. Soit $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et pour tout t : $X_t = N$, $Y_t = -N$. Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont même lois fini-dimensionnelles tandis que $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(2N = 0) = 0$, ie. X, Y ne sont pas version l'un de l'autre.

2. Soit l'espace de probabilité $\big([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda\big)$ et $T = [0, 1]$. Considérons D la diagonale de $[0, 1] \times [0, 1]$ et définissons

$$X(t, \omega) = 0 \ \ \forall (t, \omega), \quad Y(t, \omega) = \mathbf{1}_D(t, \omega).$$

Pour t fixé, on a $X(t, \omega) = 0$ et $Y(t, \omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$. On a donc $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ pour tout $\omega \neq t$, c'est à dire presque sûrement : les processus X, Y sont versions l'un de l'autre. Pourtant, $\mathbb{P}\big(\{\omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega), \forall t \in [0, 1]\}\big) = 0$: les processus X et Y ne sont pas indistinguables.

Dans l'exemple 2) ci-dessus, on observe que les trajectoires de X sont continues tandis que celles de Y ne le sont pas. En fait, c'est ce qu'il manque pour avoir une réciproque :

Proposition 1.3 *Soient T séparable (ie. T contient une partie dense dénombrable) et X, Y modifications avec des trajectoires continues presque sûrement alors ils sont indistinguables.*

Remarque 1.1 Si $T \subset \mathbb{R}$ alors on peut supposer seulement la continuité à droite ou à gauche des trajectoires.

Démonstration : On choisit D une partie dénombrable dense dans T. Pour tout $t \in D$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ et par dénombrabilité de D, l'ensemble $A = \{X_t = Y_t \,:\, t \in D\} \in \mathcal{F}$ est de probabilité 1. L'ensemble $B = \{X \text{ et } Y \text{ sont à trajectoires continues}\}$ est aussi de probabilité 1. Soit $\omega \in A \cap B$ tel que $t \mapsto X_t(\omega)$, $t \mapsto Y_t(\omega)$ sont continues. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ et pour $\omega \in A \cap B$:

— si $t \in D$, on a $X_t = Y_t$;

— si $t \notin D$, il existe $t_n \in D$ avec $t_n \to t$, $n \to +\infty$. On a $X_{t_n} = Y_{t_n}$ $(t_n \in D, \omega \in A)$ et $X_{t_n} \to X_t$, $Y_{t_n} \to Y_t$ (continuité des deux trajectoires pour $\omega \in B$). On a donc $X_t = Y_t$ sur $A \cap B$.

Finalement pour $\omega \in A \cap B$: $X_t = Y_t$ pour tout $t \in T$; ce qui signifie que X, Y sont des processus indistinguables. □

Exemples de propriétés en loi des processus

Il existe de nombreuses classes de processus particuliers : les processus de Markov (en particulier les chaînes de Markov quand $T = \mathbb{N}$), les martingales, les processus gaussiens, les processus de Poisson, les processus stables ou encore les processus de Lévy (qui contiennent les trois exemples précédents). Ces types de processus sont caractérisés par des propriétés remarquables de leurs lois fini-dimensionnelles. Nous donnons ici quelques exemples de telles propriétés en loi des processus. Ces propriétés sont souvent fort utiles pour modéliser des phénomènes réels.

Définition 1.4 *Un processus est dit (strict)* **stationnaire** *si pour tout $h \geq 0$, $(X_{t+h})_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_t)_{t\geq 0}$ ne dépend pas de $h > 0$, c'est à dire pour tout $h > 0$ et tout $t_1, \dots, t_p \geq 0$, on a $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_p+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$.*
Un processus est dit à **accroissements stationnaires** *si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t > 0$, ie. $X_{t+h} - X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_h$.*
Un processus X est dit à **accroissements indépendants** *si pour tout $p \geq 1$ et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$, les variables aléatoires X_{t_1}, $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.*

Exemple 1.2 ($T = \mathbb{N}$) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ le processus discret des sommes partielles. On parle de marche aléatoire. Alors $(S_n)_{n\geq 1}$ est un processus à accroissements indépendants. Si en plus les variables aléatoires X_n, $n \geq 1$, sont de même loi (les variables aléatoires sont *iid*), le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

1.2 Régularité des trajectoires

D'après l'Exemple 1.1, les versions d'un processus stochastiques n'ont pas toujours la même régularité de leurs trajectoires. Aussi, il est intéressant de chercher si un processus X admet des versions $\widetilde{X}$ dont les trajectoires ont de bonnes propriétés de régularité et d'avoir des conditions le garantissant. Dans cette section, on s'attache à trouver des versions à trajectoires continues d'un processus.

Théorème 1.2 (Kolmogorov-Čentsov) *Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus indexé par un intervalle T de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans (E,d) espace métrique complet. On suppose qu'il existe $a,b,C>0$ vérifiant pour tout $s,t\in T$:*

$$\mathbb{E}\big[d(X_t,X_s)^a\big]\leq C|t-s|^{1+b}. \tag{1.3}$$

Alors il existe une version $\widetilde{X}$ de X dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant γ pour tout $\gamma\in]0,b/a[$, ie. pour tout $s,t\in T$: $d\big(\widetilde{X}_s(\omega),\widetilde{X}_s(\omega)\big)\leq C_\gamma(\omega)|t-s|^\gamma$. En particulier, $\widetilde{X}$ est une version continue de X.

Remarque 1.2 — La condition du théorème porte sur les lois de dimension 2 :

$$\mathbb{E}\big[d(X_t,X_s)^a\big]=\int_{\mathbb{R}^2}|x-y|^a\ \mathbb{P}_{(X_t,X_s)}(dx,dy),$$

ce qui est une condition légère sur la loi, caractérisée par toutes les loi fini-dimensionnelles. En pratique, pour vérifier (1.3), il faut donc calculer des moments pour des vecteurs de dimension 2.

— Quand $(E,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$, a priori, dans le théorème, a et b sont non liés. En réalité, on peut toujours prendre $a\geq 1+b$. En effet, si $a<1+b$, alors (1.3) se réécrit

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{d(X_t,X_s)}{t-s}\right|^a\right]\leq c|t-s|^{1+b-a}$$

avec $1+b-a>0$. En faisant $s\to t$, la dérivée dans le sens L^a de $(X_t)_{t\in T}$ est nulle et $(X_t)_{t\in T}$ est donc constant. Ce n'est donc pas très intéressant d'utiliser le Théorème 1.2 dans un tel cas : puisque le processus initial est en fait constant, il est évident qu'il est aussi continu.

— La condition $b>0$ est essentielle : le processus de Poisson compensé $(\Pi_t-t)_{t\geq 0}$ fournit un contre-exemple quand $b=0$. Soit $X_t=\Pi_t-t$ où $(\Pi_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson (processus à accroissements indépendants, stationnaires avec des marginales de loi de Poisson, cf. Section 4.4). On a

$$\Pi_t\sim\mathcal{P}(t),\quad \mathbb{E}[\Pi_t]=t,\quad \mathrm{Var}(\Pi_t)=t,$$

soit pour X :

$$\mathbb{E}\big[|X_t-X_s|^2\big]=\mathrm{Var}\left(\Pi_t-\Pi_s\right)=\mathrm{Var}\left(\Pi_{t-s}\right)=t-s.$$

On a donc (1.3) avec $a = 2$, $b = 0$ et $C = 1$. Or les trajectoires du processus de Poisson sont *càdlàg* (et même constantes par morceaux avec des sauts $+1$) or d'après la Prop. 1.3 et la Rem. 1.1, il devrait coïncider avec sa version continue !

Démonstration : (Th. 1.2, Kolmogorov-Čenstov) Nous supposons que T est l'intervalle borné $[0,1]$. Si l'intervalle T est non borné (par exemple si $T = \mathbb{R}_+$), on peut appliquer le cas borné à $T = [0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ etc et on trouve encore que X a une modification continue définie sur T, qui est localement höldérienne d'exposant γ pour tout $\gamma \in]0, b/a[$.

Pour simplifier la présentation, on prend dans la suite $T = [0,1]$.

Il suffit de montrer que pour $\gamma \in]0, b/a[$ fixé, X a une modification dont les trajectoires sont höldériennes d'exposant γ. En effet, on appliquera alors ce résultat à une suite $\gamma_n \nearrow b/a$ en observant que les processus obtenus sont des versions continues du même processus X donc indistinguables par la Prop. 1.3.

On note D l'ensemble (dénombrable) des nombres dyadiques $t \in [0,1[$ qui s'écrivent sous la forme

$$t = \sum_{k=1}^{p} \epsilon_k 2^{-k} \quad \text{avec } \epsilon_k \in \{0,1\},\ 1 \le k \le p.$$

Le point clef est le résultat suivant dû au lemme de Borel-Cantelli :

Lemme 1.1 *Pour tout $\gamma \in]0, b/a[$, ps il existe une constante $C_\gamma(\omega) < +\infty$ telle que pour tout $s, t \in D$:*

$$d\big(X_s, X_t\big) \le C_\gamma(\omega)|t-s|^\gamma.$$

Preuve du lemme. Avec l'inégalité de Markov, l'hypothèse (1.3) du Théorème 1.2 entraîne que, pour $a > 0$ et $s, t \in T$, $u > 0$

$$\mathbb{P}\big(d(X_s, X_t) \ge u\big) \le u^{-a}\mathbb{E}\big[d(X_s, X_t)^a\big] \le Cu^{-a}|t-s|^{1+b}.$$

En appliquant cette inégalité avec $s = (i-1)2^{-n}$, $t = i2^{-n}$ (pour $i = 1, \dots, 2^n$) et $u = 2^{-n\gamma}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}\big) \ge 2^{-n\gamma}) \le C2^{na\gamma}2^{-(1+b)n}.$$

En sommant sur $i \in [1, 2^n]$, on trouve

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{2^n}\{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \ge 2^{-n\gamma}\}\Big) \le 2^n C 2^{na\gamma-(1+b)n} = C2^{-n(b-a\gamma)}.$$

Comme $b - a\gamma > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{2^n}\Big\{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \ge 2^{-n\gamma}\Big\}\Big) < +\infty$$

et le lemme de Borel-Cantelli assure que presque sûrement il existe $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que dès que $n \geq n_0(\omega)$ pour tout $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, on a

$$d\big(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}\big) \leq 2^{-n\gamma}. \tag{1.4}$$

A fortiori, ps

$$K_\gamma(\omega) := \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}})}{2^{-n\gamma}} \right) < +\infty$$

(pour $n \geq n_0(\omega)$, le terme entre parenthèses est majoré par 1 par (1.4), et il y a un nombre fini de terme $n \leq n_0(\omega)$: le $\sup_{n \geq 1}$ ci-dessus est bien fini !).

On obtient alors le résultat du Lemme 1.1 avec

$$C_\gamma(\omega) = 2^{\gamma+1} \frac{1 - 2^{-\gamma} + 2^{1-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} K_\gamma(\omega).$$

En effet, considérons $s, t \in D$ avec $s < t$. Soit $p \geq 1$ tel que $2^{-p-1} < t - s \leq 2^{-p}$. Il existe $m \geq 1$ tel qu'on puisse écrire $s, t \in D$ sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} s & = & k2^{-p} + \epsilon_0 2^{-p} + \epsilon_1 2^{-p-1} + \cdots + \epsilon_m 2^{-p-m} \\ t & = & k2^{-p} + \epsilon'_0 2^{-p} + \epsilon'_1 2^{-p-1} + \cdots + \epsilon'_m 2^{-p-m} \end{array}$$

où $\epsilon_j, \epsilon'_j \in \{0, 1\}$. On note pour $j = 0, \dots, m$

$$\begin{array}{rcl} s_j & = & k2^{-p} + \epsilon_0 2^{-p} + \epsilon_1 2^{-p-1} + \cdots + \epsilon_j 2^{-p-j} \\ t_j & = & k2^{-p} + \epsilon'_0 2^{-p} + \epsilon'_1 2^{-p-1} + \cdots + \epsilon'_j 2^{-p-j} \end{array}$$

de sorte que $s = s_m$ et $t = t_m$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{array}{rcl} d(X_s, X_t) & = & d(X_{s_m}, X_{t_m}) \\ & \leq & d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \displaystyle\sum_{j=1}^m d(X_{s_{j-1}}, X_{s_j}) + \sum_{j=1}^m d(X_{t_{j-1}}, X_{t_j}) \\ & \leq & K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} + \displaystyle\sum_{j=1}^m K_\gamma(\omega) 2^{-(p+j)\gamma} + \sum_{j=1}^m K_\gamma(\omega) 2^{-(p+j)\gamma} \\ & \leq & K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} + K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} \dfrac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} + K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} \dfrac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \\ & & \left(\text{car } \displaystyle\sum_{j=1}^m 2^{-(p+j)\gamma} \leq 2^{-p\gamma} 2^{-\gamma}/(1 - 2^{-\gamma})\right) \\ & \leq & K_\gamma(\omega) \dfrac{2^{1-\gamma} + 1 - 2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-p\gamma} \\ & \leq & C_\gamma(\omega)(t - s)^\gamma \end{array}$$

où la dernière ligne vient de $2^{-p} \leq 2(t-s)$ et prouve le Lemme 1.1. □

On termine la preuve du Théorème 1.2 de la façon suivante : d'après le Lemme 1.1, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est ps γ-höldérienne sur D, donc uniformément continue sur D. Comme (E,d) est complet, il existe ps un unique prolongement continu de cette fonction à $T=[0,1]$. Le prolongement reste γ-höldérien. Plus précisément, on pose pour tout $t \in [0,1]$:

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in D}} X_s(\omega)$$

sur l'ensemble presque sûr $\{\omega \in \Omega : K_\gamma(\omega) < +\infty\}$ où $s \mapsto X_s(\omega)$ est γ-höldérienne sur D et on pose $\widetilde{X}_t(\omega) = x_0$ sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega : K(\omega) = +\infty\}$ négligeable où x_0 est un point fixé quelconque de E. Par construction, le processus $\widetilde{X}$ a alors des trajectoires höldériennes d'exposant γ sur $[0,1]$.

Il reste à voir que $\widetilde{X}$ est bien une version de X. Or l'hypothèse (1.3) assure avec l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}\big(d(X_s, X_t) \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big[d(X_s, X_t)^a\big]}{\varepsilon^a} \leq \frac{|t-s|^{1+b}}{\varepsilon^a}. \tag{1.5}$$

Ainsi, pour tout $t \in T$ fixé,

$$X_s \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t, \quad s \to t.$$

Comme par construction $X_s \to \widetilde{X}_t$ ps quand $s \to t$, $s \in D$, on conclut que $X_t = \widetilde{X}_t$ ps par unicité ps de la limite en probabilité. □

1.3 Convergence faible des lois de processus

On a vu qu'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ définit en (1.2) une variable aléatoire sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$. Cependant avec de bonnes propriétés trajectorielles, on peut améliorer l'espace d'arrivée $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$, typiquement si X est à trajectoires continues alors X est à valeurs dans $C(T,\mathbb{R})$ (ou si ce n'est X, une de ses versions en utilisant le Théorème 1.2). Quand $T=[0,1]$ (ou T borné), $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ est normé par

$$\|x-y\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t)-y(t)|, \quad x, y \in \mathcal{C}(T,\mathbb{R}), \tag{1.6}$$

qui définit la topologie de la convergence uniforme. Il s'agit alors d'un espace de Banach.

Quand $T = \mathbb{R}_+$ (ou T borné), $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ admet pour distance

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min\big(\|x-y\|_{\infty,n}, 1\big), \tag{1.7}$$

où on note $\|x-y\|_{\infty,n} = \sup_{t \in [0,n]} |x(t)-y(t)|, \quad x, y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),$

qui métrise la convergence uniforme sur tous les compacts.

L'intérêt de considérer X à valeurs dans $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ (ou un autre espace fontionnel, souvent $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions *càdlàg* –continue à droite avec des limites à gauche– dit espace de Skorohod, cf. [Bil2]) est alors que X est à valeurs dans un espace métrique (et même souvent un espace métrique complet, séparable, dit espace polonais) et que dans ce cadre la notion de convergence faible est bien développée, cf. Section 1.3.1.

On commence par s'assurer que le processus $X = (X_t)_{t\in T}$ reste bien une variable aléatoire sur $C(T,\mathbb{R})$:

$$X : \begin{cases} (\Omega,\mathcal{F}) & \to & \big(\mathcal{C}(T,\mathbb{R}),\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(T,\mathbb{R})\big)\big) \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = \big(X_t(\omega)\big)_{t\in T}. \end{cases} \tag{1.8}$$

L'espace $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ est muni de deux tribus naturelles : la trace de la tribu cylindrique $\sigma(\mathrm{Cyl})\cap \mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ et sa propre tribu borélienne $\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(T,\mathbb{R})\big)$. En fait ces deux tribus coïncident :

Proposition 1.4 *Sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, la tribu cylindrique trace coïncide avec la tribu borélienne :*

$$\sigma(\mathit{Cyl})\cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = \mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big).$$

Démonstration : D'abord, Π_{t_0} est continue sur $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),d)$ pour d en (1.7) puisque

$$|\Pi_{t_0}(x)-\Pi_{t_0}(y)| = |x(t_0)-y(t_0)| \le \|x-y\|_{\infty,n}$$

pour tout $n\ge t_0$ dont on déduit aisément la continuité pour d. Dès lors Π_{t_0} est mesurable sur $\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)\big)$. Comme tout cylindre s'écrit $C=\bigcap_{i=1}^p \Pi_{t_i}^{-1}(A_i)$, $A_i\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a bien $C\in\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)$ et donc $\mathrm{Cyl}\subset\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)$ puis $\sigma(\mathrm{Cyl})\subset\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)$.

Réciproquement, si $A=\{y\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) : \|x-y\|_{[0,n]}<\eta\}$ est ouvert pour la convergence uniforme sur les compacts, on a $A=\bigcap_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}}\Pi_t^{-1}(]x(t)-\eta,x(t)+\eta[)$ car la condition $|y(t)-x(t)|<\eta$ pour tout $t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}$ est complétée pour tout $t\in[0,n]$ par continuité. L'ouvert A s'écrit alors comme une intersection (dénombrable) de cylindres, ie. $A\in\sigma(\mathrm{Cyl})$. Puisque de tels A engendrent $\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)$, on a $\mathcal{B}\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\big)\subset\sigma(\mathrm{Cyl})$. □

Finalement d'après la Prop. 1.4, le processus X vu comme en (1.8) définit bien une variable alátoire sur $C(T,\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_X$ est alors une loi sur $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$.

1.3.1 Rappels sur la convergence faible

On rappelle la notion de convergence faible de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S. Quand S est un espace fonctionnel, typiquement $C(T,\mathbb{R})$, la variable aléatoire est en fait un processus stochastique à trajectoires continues.

Définition 1.5 (Convergence faible) *Soit $(X_n)_{n\ge1}$ et X à valeurs dans S espace métrique de lois P_n et P, on a $X_n\Rightarrow X$ (ou $P_n\Rightarrow P$) ssi pour toute fonction $f:S\to\mathbb{R}$ continue et bornée*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\big[f(X_n)\big]=\mathbb{E}\big[f(X)\big].$$

Nous utiliserons les formulations équivalentes suivantes de la convergence faible. Pour plus de détails on renvoie à [Bil2].

Théorème 1.3 (Porte-manteau) *Les assertions suivantes sont équivalentes quand $n \to +\infty$ pour des variables aléatoires X_n à valeurs dans un espace métrique S.*

1. *$X_n \Rightarrow X$, ie. pour toute fonction $f : S \to \mathbb{R}$ continue et bornée*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[f(X_n)\big] = \mathbb{E}\big[f(X)\big].$$
2. *Pour toute fonction $f : S \to \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[f(X_n)\big] = \mathbb{E}\big[f(X)\big];$$
3. *Pour tout fermé F, $\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$;*
4. *Pour tout ouvert G, $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$;*
5. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$ tel que $\mathbb{P}\big(X \in \overline{A} \setminus A^\circ\big) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$.*

Démonstration : 1)$\Rightarrow$ 2) est évident.

2)$\Rightarrow$ 3). On considère F fermé et $\delta > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $G_\varepsilon = \{x : d(x, F) < \varepsilon\}$ vérifie $\mathbb{P}(X \in G_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta$ puisque (comme F est fermé) $\bigcap_{\varepsilon>0} G_\varepsilon = F$. On considère $f(x) = \varphi(d(x, F)/\varepsilon)$ avec

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 - t & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq t \end{cases}$$

Alors, on montre que f est uniformément continue sur S, $f(x) = 1$ si $x \in F$ et $f(x) = 0$ si $x \in G_\varepsilon^c$. De plus, $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in S$. D'après 2), on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$, $n \to +\infty$. Puis comme $\mathbf{1}_F(x) = f(x)\mathbf{1}_F(x)$ et $f(x) = f(x)\mathbf{1}_{G_\varepsilon}(x)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \in F) &= \mathbb{E}[f(X_n)\mathbf{1}_F(X_n)] \leq \mathbb{E}[f(X_n)] \\ \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_{G_\varepsilon}(X)] \leq \mathbb{P}(X \in G_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, cela établit 3).

3)$\Leftrightarrow$ 4) s'obtient facilement par passage au complémentaire.

3), 4) $\Rightarrow$ 5). Soit A tel que $X \notin \overline{A} \setminus A^\circ$ ps. On a $\mathbb{P}\big(X \in \overline{A}\big) = \mathbb{P}(X \in A^\circ)$. Avec 3) et 4) on déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(X_n \in \overline{A}\big) \leq \mathbb{P}\big(X \in \overline{A}\big) = \mathbb{P}(X \in A^\circ) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in A^\circ).$$

Finalement $\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n\in A)=\mathbb{P}(X\in A)=\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n\in A)$ ce qui montre $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n\in A)=\mathbb{P}(X\in A)$.

5)⇒ 3). Soit F fermé et $F_\varepsilon=\{x\in S: d(x,F)\le\varepsilon\}$. Comme les ensembles $\partial F_\varepsilon=\{x\in S: d(X,F)=\varepsilon\}$ sont disjoints, on a $X\notin\partial F_\varepsilon$ pour presque tout $\varepsilon>0$. Pour un tel $\varepsilon>0$, d'après 5) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n\in F) &\le \mathbb{P}(X_n\in F_\varepsilon)\\ \limsup_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n\in F) &\le \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n\in F_\varepsilon)=\mathbb{P}(X\in F_\varepsilon)\end{aligned}$$

ce qui prouve 3) car $F=\bigcap_{\varepsilon>0}F_\varepsilon$ et $\mathbb{P}(X\in F_\varepsilon)\to\mathbb{P}(X\in F)$, $\varepsilon\to 0$ (convergence monotone).

4)⇒ 1). Soit $f\ge 0$ une fonction continue. Avec le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(f(X)>t)dt\le\int_0^{+\infty}\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{P}(f(X_n)>t)dt\\ &\le \liminf_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(f(X_n)>t)dt=\liminf_{n\to+\infty}\mathbb{E}[f(X_n)].\end{aligned}\tag{1.9}$$

Pour f continue et bornée par M, on applique (1.9) à $M+f$ et $M-f$ pour obtenir $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[f(X_n)]=\mathbb{E}[f(X)]$, ce qui prouve 1). □

Proposition 1.5 *Soient X et X_n, $n\ge 1$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S. Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :*

1. *La convergence en proba $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ implique la convergence faible $X_n\Rightarrow X$.*
2. **(Continuous mapping theorem)** *Soit $f:S\to S'$ une application entre espaces métriques. Alors si $X_n\Rightarrow X$ et f est continue $\mathbb{P}_X$-ps, on a aussi $f(X_n)\Longrightarrow f(X)$.*
3. *Si X_n, X sont des processus à trajectoires continues (ie. $S=\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ avec $X_n\Rightarrow X$, on a la convergence faible des lois fini-dimensionnelles : pour tout $p\ge 1$ et $t_1,\dots,t_p$*

$$\big(X_n(t_1),\dots,X_n(t_p)\big)\Longrightarrow\big(X(t_1),\dots,X(t_p)\big),\quad n\to+\infty.$$

Le continuous mapping theorem montre que la convergence en loi se conserve par les applications continues : de la même façon que si $x_n\to x$ alors $f(x_n)\to f(x)$ quand f est continue, le résultat reste vrai pour des variables (ou processus aléatoires) qui convergent faiblement.

Démonstration : 1) Le premier point se justifie comme pour les variables aléatoires.

2) Le deuxième point est une conséquence facile du théorème porte-manteau (Th. 1.3) : Soit F un ensemble fermé de S. Observons que $\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}(F)\cup D_f$ où D_f désigne l'ensemble des points de discontinuité de f. En effet, soit $x\in\overline{f^{-1}(F)}$ limite d'une suite $(x_n)_{n\ge1}$ de $f^{-1}(F)$. Alors si f est continue en x, on a $f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)\in F$ car F

est fermé et $f(x_n) \in F$, sinon c'est que $x \in D_f$. Par le théorème porte-manteau (Th. 1.3) pour $X_n \Rightarrow X$, on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(f(X_n) \in F) &\leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \in f^{-1}(F)) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(X_n \in \overline{f^{-1}(F)}\big) \\
&\leq \mathbb{P}\big(X \in \overline{f^{-1}(F)}\big) \leq \mathbb{P}\big(X \in f^{-1}(F)\big) + \mathbb{P}(X \in D_f) \\
&= \mathbb{P}\big(X \in f^{-1}(F)\big)
\end{aligned}$$

c'est à dire, encore par le théorème porte-manteau (Th. 1.3) : $f(X_n) \Longrightarrow f(X)$.

3) Le troisième point est une conséquence du deuxième point avec l'application continue $\Pi_{t_1\dots,t_p} : C(T,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^p$ définie par $\Pi_{t_1\dots,t_p}(x) = (x(t_1),\dots,x(t_p))$. □

La convergence faible de processus à trajectoires continues entraîne la convergence des lois fini-dimensionnelles. La réciproque est fausse : la convergence des lois fini-dimensionnelles n'entraîne pas la convergence faible des processus. Il peut y avoir un phénomène de perte de masse vers l'infini comme illustré dans l'exemple suivant pour des variables aléatoires réelles. De plus l'affirmation est fausse pour des processus qui ne sont pas à valeurs dans $C(T,\mathbb{R})$: par exemple pour des processus *càdlàg*, $X_n \Rightarrow X$ entraîne $X(t) \Rightarrow X(t)$ seulement si X est continu en t.

Exemple 1.3 Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère les fonctions

$$x_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{si } t \in [0, 1/2n] \\ 2-2nt & \text{si } t \in [1/2n, 1/n]. \end{cases}$$

La suite de fonction x_n converge simplement vers $x = 0$. On considère alors la suite de loi $P_n = \delta_{x_n}$ et $P = \delta_x$ et on observe que

— On n'a pas $P_n \Rightarrow P$ car pour la fonction continue bornée $f(y) = \sup_{t\in[0,1]} y(t)$, on a $f(x_n) = 1$, $f(x) = 0$, soit

$$\int f dP_n = f(x_n) = 1 \not\to 0 = f(x) = \int f dP, \quad n \to +\infty;$$

— Pour tout $0 < t_1 < \dots < t_p$, avec $\Pi_{t_1,\dots,t_p}(y) = (y(t_1),\dots,y(t_p))$ on a $\Pi_{t_1,\dots,t_p}(x) = (0,\dots,0)$ et pour $n > 1/t_1$ aussi $\Pi_{t_1,\dots,t_p}(x_n) = (0,\dots 0)$, c'est à dire la convergence des lois fini-dimensionnelles

$$P_n\Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_p} \Rightarrow P\Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_p}, \quad n \to +\infty.$$

La convergence des lois fini-dimensionnelles n'entraîne donc pas la convergence en loi de tout le processus.

Pour éviter une telle pathologie, il faut une condition supplémentaire, c'est l'objet de la section suivante.

1.3.2 Équitension

L'équitension est la condition qui empêche la perte de masse probabiliste. C'est la condition qui avec la convergence des lois fini-dimensionnelles donnera la convergence faible, cf. Théorème 1.6. On renvoie à [Bil2] pour plus de détails sur cette notion.

Définition 1.6 (Équitension) *Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace métrique. La suite est dite équitendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que pour tout $n \geq 1$ on a $P_n(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$.*

En fait, l'équitension s'exprime aussi par une propriété de relative compacité (dans les bons espaces métriques : ceux qui sont séparables et complets, ie. polonais).

Définition 1.7 (Relative compacité) *Une suite de mesures $(P_n)_{n\geq 1}$ est dite relativement compacte si pour toute sous suite $(n') \subset \mathbb{N}$, il existe $(n'') \subset (n')$ telle que $P_{n''}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité.*

Théorème 1.4 (Prohorov) *Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures dans un espace métrique séparable complet. Alors $(P_n)_{n\geq 1}$ est équitendue si et seulement si $(P_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte.*

Démonstration : Admis, cf. [Bil2]. □

En général–dans ce cours–, les processus qu'on considère sont à trajectoires continues et leurs lois sont donc des mesures de probabilité sur l'espace des fonctions continues $C(T,\mathbb{R})$, complet et séparable pour la topologie uniforme associée à la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in T}|f(x)|$, donc polonais. Dans ce cas, on a un critère d'équitension plus explicite :

Théorème 1.5 *Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ la suite des lois de processus X_n à trajectoires continues. On suppose qu'il existe $a, b, C > 0$ tels que pour tout $s, t \in [0,1]$,*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\big[|X_n(t) - X_n(s)|^a\big] \leq C|t-s|^{1+b}.$$

Alors la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est équitendue.

Noter la ressemblance avec le Th. 1.2 (Kolmogorov-Čentsov).

Démonstration : Admis, cf. [Bil2]. □

Théorème 1.6 *Soit $\big(P^{(n)}\big)_{n\geq 1}$ une suite équitendue dans $\mathcal{C}(T,\mathbb{R})$ telle que les lois fini-dimensionnelles $P^{(n)}_{t_1,\dots,t_m}$ convergent faiblement pour tout $t_1,\dots,t_p \in T$: $P^{(n)}_{t_1,\dots,t_p} \Longrightarrow P_{t_1,\dots,t_p}$. Alors il existe P de lois fini-dimensionnelles $\big\{P_{t_1,\dots,t_p} : t_1,\dots,t_p \in T,\ p \in \mathbb{N}^*\big\}$ telle que $P^{(n)} \Rightarrow P$.*

En fait, la vraie condition supplémentaire nécessaire dans le Th. 1.6 est la relative compacité de la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ mais d'après le théorème de Prohorov (Th. 1.4), c'est équivalent à l'équitension de la suite pour laquelle on dispose de critères explicites.

Démonstration : Pour montrer que $P^{(n)} \Rightarrow P$, il suffit de voir que pour toute $(n') \subset \mathbb{N}$, il existe $(n'') \subset (n')$ tel que $P^{(n'')} \Rightarrow P$.
En effet, on montre qu'alors pour f continue bornée, on a $\int f dP^{(n)} \to \int f dP$. Si ce n'était pas le cas, il existerait f continue bornée telle que $\int f dP^{(n)} \not\to \int f dP$, ie. il existerait $\varepsilon > 0$ et $(n') \subset (n)$ tels que

$$\left| \int f\, dP^{(n')} - \int f\, dP \right| > \varepsilon. \tag{1.10}$$

Or par l'équitension (en fait par relative compacité mais d'après le le théorème de Prohorov (Th. 1.4), c'est équivalent), il existe $(n'') \subset (n')$ tel que $P^{(n'')} \Rightarrow P$. En particulier, d'après le théorème porte-manteau (Th. 1.3) $\int f dP^{(n'')} \to \int f dP$. Comme $\big(\int f dP^{(n'')}\big)_{n''}$ est une suite extraite de $\big(\int f dP^{(n')}\big)_{n'}$, il y a une contradiction avec (1.10). La contradiction justifie finalement la convergence cherchée.

Soit donc $(n') \subset (n)$ une sous-suite. Par équitension (relative compacité), il existe $(n'') \subset (n')$ et Q tels que $P^{(n'')} \Rightarrow Q$. En particulier, la convergence des lois fini-dimensionnelles exige que $P^{(n'')}_{t_1,\dots,t_p} \Rightarrow Q_{t_1,\dots,t_p}$. Mais par hypothèse $P^{(n)}_{t_1,\dots,t_p} \Rightarrow P_{t_1,\dots,t_p}$ et donc en particulier $P^{(n'')}_{t_1,\dots,t_p} \Rightarrow P_{t_1,\dots,t_p}$. On doit donc avoir $Q_{t_1,\dots,t_p} = P_{t_1,\dots,t_p}$, pour tout $t_1, \dots, t_p \in T$. La Prop. 1.1 assure alors $P = Q$. Finalement, $P^{(n'')} \Rightarrow P = Q$ ce qui conclut car la première partie de la preuve. □

Chapitre 2

Processus gaussiens

Dans ce chapitre, on commence par présenter la classe des processus gaussiens dont on introduit d'abord la loi en Section 2.1. La régularité des trajectoires est considérée en Section 2.2. La notion d'espace gaussien est décrite en Section 2.3. Enfin, on donne plusieurs exemples de processus gaussiens en Section 2.4.

2.1 Lois des processus gaussiens

Définition 2.1 (Processus gaussien) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_p})$ sont gaussiennes (pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\dots,t_p\in T$).*
Autrement dit $X=(X_t)_{t\in T}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1X_{t_1}+\dots+a_pX_{t_p}$ suit une loi gaussienne (pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $t_1,\dots,t_p\in T$ et $a_1,\dots,a_p\in\mathbb{R}$).

Remarque 2.1 Les conséquences suivantes sont immédiates :
- Toutes les marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes.
- Toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est encore gaussienne.

Il est connu que la loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1},\dots,X_{t_p})$ est déterminée (par exemple via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne $m_X=\big(\mathbb{E}[X_{t_1}],\dots,\mathbb{E}[X_{t_p}]\big)$ et la matrice de covariance $\Sigma_X=\big(\mathrm{Cov}(X_{t_i},X_{t_j})\big)_{1\le i,j\le p}$). On comprend dès lors que toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus gaussien (donc la loi du processus, cf. Prop. 1.1) est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne $m(t)=\mathbb{E}[X_t]$ et l'opérateur de covariance $K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$. En effet, la loi fini-dimensionnelle de $(X_{t_1},\dots,X_{t_p})$ est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m_p,K_p)$ de dimension p avec $m_p=(m(t_1),\dots,m(t_p))$ et $K_p=(K(t_i,t_j))_{1\le i,j\le p}$. Les fonctions m et K définissent donc toutes les lois fini-dimensionnelles de X et donc aussi sa loi en tant que processus, cf. Prop. 1.1. Observons en plus que
- K est symétrique : $K(s,t)=K(t,s)$;

— K est de type positif, ie. si $c : T \to \mathbb{R}$ est une fonction à support fini alors :

$$\sum_{s,t\in T} c(s)c(t)K(s,t) = \mathrm{Var}\left(\left(\sum_{s\in T} c(s)X_s\right)^2\right) \geq 0. \tag{2.1}$$

Réciproquement, étant donnés une fonction m sur T et un opérateur K sur $T \times T$, existe-t-il un processus gaussien X admettant m pour fonction moyenne et K pour opérateur de covariance ? La réponse est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soit K une fonction symétrique de type positif sur $T \times T$. Il existe alors un processus gaussien (centré) dont la fonction de covariance est K.*

Démonstration : Quitte à considérer ensuite le processus $X(t) + m(t)$, on considère pour simplifier le cas d'un processus centré ($m = 0$). Il s'agit alors d'une application simple du théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.1). On construit une probabilité $P^{(K)}$ sur l'espace mesurable $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$ de telle sorte que sous $P^{(K)}$ le processus des coordonnées $X_t(\omega) = \omega(t)$ (dit processus canonique) est un processus gaussien de fonction de covariance K.

Pour cela, si $\{t_1, \dots, t_p\}$ est une partie finie de T, on construit d'abord une probabilité $P^{(K)}_{\{t_1,\dots,t_p\}}$ sur $\mathbb{R}^{\{t_1,\dots,t_p\}} \sim \mathbb{R}^p$ comme la loi du vecteur gaussien de matrice de covariance $(K(t_i,t_j))_{1\leq i,j\leq p}$ (qui existe d'après les rappels gaussiens puisque la matrice est symétrique positive).

On vérifie aisément que les lois $P^{(K)}_{\{t_1,\dots,t_p\}}$ satisfont les propriétés de compatibilité du théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.1) qui s'applique donc.

La loi $P^{(K)}$ ainsi construite sur $\big(\mathbb{R}^T, \sigma(\mathrm{Cyl})\big)$ est bien celle d'un processus gaussien puisque par construction toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes avec pour fonction de covariance K. □

Exemple 2.1 (Processus stationnaire) On considère le cas $T = \mathbb{R}$ et on se donne une mesure finie symétrique (ie. $\nu(-A) = \nu(A)$) sur $\mathbb{R}$. On pose alors

$$K(s,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iu(t-s)}\ \nu(du). \tag{2.2}$$

On vérifie aisément que K est un opérateur réel symétrique $K(t,s) = K(s,t)$ (car ν est symétrique) et de type positif :

$$\sum_{s,t\in T} c(s)c(t)K(s,t) = \int \Big|\sum_{s\in T} c(s)e^{ius}\Big|^2 \nu(du) \geq 0.$$

La fonction K possède la propriété supplémentaire de dépendre seulement de la différence $t-s$. On parle de **stationnarité faible** (ou de deuxième ordre) et on écrit alors $K(t,s) =$

$K(|t-s|)$. On en déduit aussitôt que le processus (centré) X associé à K par le théorème précédent est stationnaire (au sens strict), c'est à dire pour tout choix de $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_p+h}\big) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \big(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}\big).$$

Réciproquement, il est vrai aussi que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire, continu dans L^2 (ie. $\lim_{s\to t} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = 0$) la fonction de covariance de X est de la forme (2.2) (théorème de Bochner). La mesure ν s'appelle la **mesure spectrale** du processus. Elle véhicule beaucoup d'informations décrivant le processus. Par exemple, on a $K(0) = \mathrm{Var}(X_t) = \nu(\mathbb{R})$.

De façon générale pour un processus stationnaire, on a

Proposition 2.1 (Processus stationnaire) *Soit X processus stationnaire L^2 centré et de fonction de covariance K. On a équivalence entre :*

1. *la fonction K continue en 0 ;*
2. *le processus X est L^2-continu : $\lim_{s\to t} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = 0$;*
3. *la fonction K est continue partout.*

Démonstration : 1) $\Leftrightarrow$ 2) Comme X est centré, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^2\big] &= \mathbb{E}\big[X_t^2\big] + \mathbb{E}\big[X_s^2\big] - 2\mathbb{E}\big[X_t X_s\big] \\
&= K(t,t) + K(s,s) - 2K(t,s) \\
&= 2K(0) - 2K(|t-s|),
\end{aligned}$$

ce qui justifie l'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2). Comme **3) $\Rightarrow$ 1)** est clair, on conclut avec **2) $\Rightarrow$ 3)** qui vient de

$$K(t+h) = \mathbb{E}\big[X_{t+h}X_0\big] = \mathbb{E}\big[(X_{t+h} - X_t)X_0\big] + K(t)$$

avec par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big|\mathbb{E}\big[(X_{t+h} - X_t)X_0\big]\Big| \leq \sqrt{\mathbb{E}\big[(X_{t+h} - X_t)^2\big]\mathbb{E}[X_0^2]} = K(0)^{1/2}\|X_{t+h} - X_t\|_2.$$

□

Au passage, on a utilisé que la stricte stationnarité d'un processus gaussien est équivalente à la stationnarité faible :

Proposition 2.2 *Un processus gaussien X est stationnaire ssi $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est constante et $K(s,t) = K(s-t)$ (on parle de stationnarité faible).*

Démonstration : Il est clair que ces conditions sont nécessaires, que le processus soit gaussien ou pas : comme par stationnarité, on a $\mathcal{L}(X_t) = \mathcal{L}(X_s)$ pour tout t, s, on a $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s]$ et donc la fonction moyenne est constante ; de même $\mathcal{L}(X_t, X_s) = \mathcal{L}(X_{t+h}, X_{s+h})$ pour tout t, s, h, alors on a $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_{s+h})$ et donc la covariance ne dépend que de la différence $t - s$.

Elles sont suffisantes seulement dans le cas gaussien puisque dans ce cas, la loi est caractérisée par $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ et par $K(s, t)$. Il est facile alors de voir dans ce cas qu'une translation dans les paramètres de temps ne modifie pas ces fonctions sous les hypothèses de la proposition donc pas non plus la loi. □

2.2 Régularité gaussienne

Des bonnes conditions pour avoir une version assez régulière d'un processus gaussien sont données dans le résultat suivant, conséquence facile du Théorème 1.2 (Kolmogorov-Čentsov) dans le cadre gaussien.

Théorème 2.2 (Kolmogorov-Čentsov gaussien) *Soit X un processus gaussien centré ($\mathbb{E}[X_t] = 0$), de fonction de covariance $K(s, t)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < C < +\infty$ tels que pour tout $s, t \geq 0$:*

$$K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \leq C|t - s|^\alpha.$$

Alors il existe une version continue $\widetilde{X}$ de X. De plus, pour tout $0 < \gamma < \alpha/2$, les trajectoires de $\widetilde{X}$ sont ps höldériennes de coefficient γ.

Démonstration : À partir de $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] = \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}[X_t X_s] \leq C|t - s|^\alpha$, on ne peut pas appliquer directement le Théorème 1.2 (Kolmogorov-Čentsov) car $\alpha > 1$ n'est pas garanti alors que c'est requis pour le Th. 1.2. On s'intéresse plutôt à $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2m}]$. On rappelle que d'après la Prop. 0.2, pour X variable aléatoire normale centrée, on a : $\mathbb{E}[X^{2m}] = \frac{(2m)!}{2^m m!} \mathrm{Var}(X)^m$. Il vient alors pour tout $m \geq 1$:

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^{2m}\big] \leq C^m \frac{(2m)!}{2^m m!} |t - s|^{m\alpha}.$$

Comme cela est valable pour tout $m \geq 1$, on choisit l'entier m tel que $m\alpha > 1$. D'après le Théorème 1.2 (Kolmogorov-Čentsov) avec

$$b = m\alpha - 1, \quad a = 2m, \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{m\alpha - 1}{2m},$$

il existe une version $\frac{m\alpha-1}{2m}$-höldérienne de X, pour tout $m > 1/\alpha$. Comme $\lim_{m \to +\infty} \frac{m\alpha-1}{2m} = \frac{\alpha}{2}$, il existe une version γ-höldérienne de X pour tout $\gamma < \alpha/2$.

Finalement, les versions höldériennes pour des exposants $\gamma \neq \gamma'$ coïncident nécessairement par indistinguabilité (Prop. 1.3). □

2.3 Espace gaussien

On rappelle que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$.

Définition 2.2 (Espace gaussien) *Un espace gaussien (centré) est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formé de variables gaussiennes centrées.*

Par exemple, si $X = (X_1, \dots, X_p)$ est un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R}^p$, alors $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ est un espace gaussien. ($\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ est constitué des combinaisons linéaires d'un vecteur gaussien, elles sont donc gaussiennes).

Proposition 2.3 *Si $X = (X_t)_{t\in T}$ est un processus gaussien, le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par les variables aléatoires X_t, $t \in T$, est un espace gaussien, appelé espace gaussien engendré par le processus X.*

Démonstration : Le sous-espace vectoriel fermé $\overline{\mathrm{Vect}}^{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}(X_t : t \in T)$ est formé des limites dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des combinaisons linéaires finies de marginales X_{t_i} de $(X_t)_{t\in T}$. Ces limites sont gaussiennes car

- comme $(X_t)_{t\in T}$ est gaussien, les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ le sont aussi ;
- les limites L^2 de variables gaussiennes sont gaussiennes, cf. Prop. 0.5.

□

Si H est un sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note $\sigma(H)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $Y \in H$.

Théorème 2.3 *Soit H un espace gaussien et soit $\{H_i, i \in I\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de H. Alors les sous-espaces H_i, $i \in I$, sont orthogonaux dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si les tribus $\sigma(H_i)$, $i \in I$, sont indépendantes.*

Ce résultat est une généralisation des Prop. 0.8 et 0.9 pour les variables et vecteurs gaussiens. Comme dans ces cas, il est crucial que les espaces H_i soient contenus tous dans un même espace gaussien.

Démonstration : Si on suppose les tribus $\sigma(H_i)$, $i \in I$, indépendantes, alors pour $i \neq j$ et $X \in H_i$, $Y \in H_j$, on a

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0,$$

ce qui signifie que les espaces H_i sont deux à deux orthogonaux (le produit scalaire étant donné dans ce contexte par la covariance : $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$).

Réciproquement, supposons les espaces H_i, $i \in I$, deux à deux orthogonaux. Par définition de l'indépendance d'une famille infinie de tribus, il suffit de montrer que pour tous indices distincts $i_1, \dots, i_p \in I$, les tribus $\sigma(H_{i_1}), \dots, \sigma(H_{i_p})$ sont indépendantes. Pour cela, il suffit de montrer que, si $Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1 \in H_{i_1}, \dots, Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p \in H_{i_p}$ les vecteurs $(Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1), \dots, (Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p)$ sont indépendants. En effet, pour chaque j, les ensembles

de la forme $\{Y_1^j \in A_1, \dots, Y_{n_j}^j \in A_{n_j}\}$ forment une classe stable par intersection finie qui engendre la tribu $\sigma(H_j)$, et on peut ensuite utiliser un argument classique de classe monotone.
Pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$, on considère $Z_1^j, \dots, Z_{m_j}^j$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(Y_1^j, \dots, Y_{n_j}^j)$.
La matrice de covariance du vecteur

$$\big(Z_1^1, \dots, Z_{m_1}^1, Z_1^2, \dots, Z_{m_2}^2, \dots, Z_1^p, \dots, Z_{m_p}^p\big)$$

est alors la matrice identité (car pour $i \neq j$ $\mathbb{E}[Z_l^i Z_k^j] = 0$ à cause de l'orthogonalité de H_i et H_j, et pour $i = j$, c'est dû au choix de Z_l^i, $1 \leq l \leq m_i$, base orthonormée de H_i). Ce vecteur est gaussien car ses composantes sont dans H, espace gaussien. D'après la Proposition 0.9, les composantes sont indépendantes. On conclut alors que les vecteurs

$$\big(Z_1^1, \dots, Z_{m_1}^1\big), \dots, \big(Z_1^p, \dots, Z_{m_p}^p\big)$$

sont indépendants. Comme pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$ le vecteur $(Y_1^j, \dots, Y_{n_1}^j)$ est une combinaison linéaire des coordonnées de $(Z_1^j, \dots, Z_{m_1}^j)$, de manière équivalente les vecteurs

$$\big(Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1\big), \dots, \big(Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p\big)$$

sont indépendants, ce qui prouve le Théorème 2.3. □

Corollaire 2.1 *Soient H un espace gaussien et K un sous-espace vectoriel fermé de K. On note p_K la projection orthogonale sur K. Soit $X \in H$.*

1. *On a*
$$\mathbb{E}\big[X|\sigma(K)\big] = p_K(X).$$
2. *Soit $\sigma^2 = \mathbb{E}\big[(X - p_K(X))^2\big]$. Alors, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$,*
$$\mathbb{P}\big(X \in B|\sigma(K)\big) = Q(\omega, B),$$
où $Q(\omega, \cdot)$ est la loi $\mathcal{N}\big(p_K(X)(\omega), \sigma^2\big)$, ie.
$$Q(\omega, B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_B \exp\Big(-\frac{(y - p_K(X)^2)}{2\sigma^2}\Big)\, dy$$
(et avec $Q(\omega, B) = \mathbf{1}_B(p_K(X))$ si $\sigma = 0$).

Remarque 2.2 1. D'une manière générale, la loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle X sachant une sous-tribu $\mathcal{G}$ est un noyau $Q(\omega, \cdot)$ $\mathcal{G}$-mesurable, ie. une application $Q : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ telle que
— pour tout ω, $B \mapsto Q(\omega, B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
— pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\omega \mapsto Q(\omega, B)$ est $\mathcal{G}$-mesurable,

avec la propriété

$$\mathbb{P}(X \in B|\mathcal{G}) = Q(\omega, B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

et plus généralement $\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] = \int f(y)\, Q(\omega, dy)$. La partie 2) du corollaire explique alors que dans le cas gaussien, la loi conditionnelle de X sachant la tribu $\sigma(K)$ est explicite, il s'agit de la loi $\mathcal{N}\big(p_K(X), \sigma^2\big)$.

2. En général, pour une variable aléatoire X dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle est donné par une projection orthogonale, ie. $\mathbb{E}[X|\sigma(K)] = p_{L^2(\Omega,\sigma(K),\mathbb{P})}(X)$. Dans le cadre gaussien, l'assertion 1) du corollaire montre que la projection orthogonale est à faire directement sur l'espace K, bien plus petit que $L^2(\Omega, \sigma(K), \mathbb{P})$ où il faut en général projeter.
3. L'assertion 1) porte aussi le principe de la régression linéaire. Par exemple, si (X_1, X_2, X_3) est un vecteur gaussien, la meilleure approximation de X_3 connaissant X_1 et X_2 s'écrit $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ où λ_1 et λ_2 sont déterminés en disant que $X_3 - (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.

Démonstration : 1) Soit $Y = X - p_K(X)$. Alors Y est orthogonal à K et d'après le Théorème 2.3, Y est indépendante de $\sigma(K)$. On a donc

$$\mathbb{E}\big[X|\sigma(K)\big] = \mathbb{E}\big[p_K(X)|\sigma(K)\big] + \mathbb{E}[Y|\sigma(K)] = p_K(X) + \mathbb{E}[Y] = p_K(X).$$

2) On écrit, pour toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\big[f(X)|\sigma(K)\big] = \mathbb{E}\big[f(p_K(X) + Y)|\sigma(K)\big] = \int f(p_K(X) + y)\mathbb{P}_Y(dy)$$

où $\mathbb{P}_Y$ est la loi de Y qui est une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ puisque Y est une variable gaussienne (centrée) de variance σ^2. (On a utilisé le fait général suivant : si Z est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable et si Y est indépendante de $\mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}[g(Y, Z)|\mathcal{G}] = \int g(y, Z)\mathbb{P}_Y(dy)$.) Le résultat annoncé en 2) découle aussitôt de la formule précédente. $\square$

2.4 Exemples de processus gaussiens

Avant d'étudier en détails le mouvement brownien au Chapitre 3, on décrit brièvement ce processus ainsi que quelques autres processus qui lui sont associés.

Mouvement brownien

Soit $T = \mathbb{R}_+$, le mouvement brownien (standard) $(B_t)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien défini par $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t)$ (et à trajectoires presque sûrement continues). On l'appelle aussi processus de Wiener. Noter que $K(t, s) = \min(t, s)$ est bien de type positif au sens de (2.1) puisqu'en écrivant $K(t, s) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,t]}(x)\mathbf{1}_{[0,s]}(x)\, dx$, on a

$$\sum_{s,t\in T} c(s)c(t)K(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{s,t\in T} c(s)\mathbf{1}_{[0,s]}(x)c(t)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{t\in T} c(t)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\Big)^2\, dx \geq 0.$$

Propriétés immédiates

1) $B_0 = 0$ car la loi de B_0 est $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$, la loi dégénérée en 0.

2) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet soit $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}) &= \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})(B_{t_4} - B_{t_3})] \\
&= \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_4}] - \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_3}] - \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_4}] + \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_3}] \\
&= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $B_{t_2} - B_{t_1}$ et $B_{t_4} - B_{t_3}$ sont donc non corrélées. Comme elles sont gaussiennes, elles sont indépendantes. On justifie de même l'indépendance de n accroissements.

3) $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ car $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\mathrm{Var}(B_t) = K(t,t) = t$.

4) Si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \sim B_{t-s}$. En effet $\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(B_t - B_s) &= \mathrm{Cov}(B_t - B_s, B_t - B_s) \\
&= \mathrm{Cov}(B_t, B_t) - 2\,\mathrm{Cov}(B_t, B_s) + \mathrm{Cov}(B_s, B_s) \\
&= t - 2s + s = t - s.
\end{aligned}$$

Comme $B_t - B_s$ est de loi normale (combinaison linéaire des marginales d'un processus gaussien), on a $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \sim B_{t-s}$.

5) Autosimilarité : $\widetilde{B}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$, $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien (standard).

6) Comportement analogue en 0 et en $+\infty$: $\tilde{B}_t = tB_{1/t}$ $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien standard.
Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ a donc des comportements liés au voisinage de 0 et en $+\infty$

7) Localisation : pour tout $t_0 > 0$, $\tilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$, $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien standard.
Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ a donc le même comportement en 0 et en tout $t_0 > 0$.

8) $(B_t)_{t\geq 0}$ a des trajectoires ps holdériennes d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$ mais ps non dérivables.
En effet, $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^2] = |t - s|$, donc la continuité höldérienne suit du Théorème 2.2. On admet la non-dérivabilité des trajectoires, cf. Chapitre 3 et théorème de Kolmogorov-Čentsov (Th. 2.2).

[Graphe typique des trajectoires.]

Pont Brownien

Soit $T = [0,1]$, le pont brownien $(B_t^\circ)_{t\in[0,1]}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance $K(s,t) = \min(s,t) - st$.

[Graphe typique des trajectoires.]

Proposition 2.4 *On peut définir directement un pont brownien B° à partir d'un mouvement brownien B par*

$$B_t^\circ = B_t - tB_1, \quad t \geq 0.$$

Démonstration : En effet, d'abord $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ est gaussien, centré puis pour $s, t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(B_t - tB_1, B_s - sB_1)\\
&= \mathrm{Cov}(B_t, B_s) - t\,\mathrm{Cov}(B_1, B_s) - t\,\mathrm{Cov}(B_s, B_1) + ts\,\mathrm{Cov}(B_1, B_1)\\
&= \min(t, s) - ts - st + ts\\
&= \min(t, s) - ts.
\end{aligned}$$

Comme le processus $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ est gaussien, centré avec la bonne covariance, il s'agit d'un pont brownien. □

Réciproquement, on peut construire le mouvement brownien B sur $T = [0, 1]$ à partir du pont brownien B° et d'une loi normale $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de B° par

$$B_t = B_t^\circ + tN.$$

Exercice 2.1 Vérifier par un calcul de covariance qu'on définit ainsi un mouvement brownien.

Propriétés immédiates

1. $\widetilde{B}_t^\circ = B_{1-t}^\circ$, $t \geq 0$, définit encore un pont brownien. Le pont brownien est donc symétrique en 0 et en 1 par retournement du temps.
2. $(B_t^\circ)_{t\geq 0}$ a des trajectoires ps holdériennes d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$ mais ps non dérivables.
   L'argument est le même que pour le mouvement brownien avec $\mathbb{E}[(B_t^\circ)^2] = t - t^2$.
3. Un pont brownien B° est un mouvement brownien B conditionné à valoir 0 à la date $t = 1$ (conditionnement singulier).

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $T = \mathbb{R}$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est le processus gaussien centré défini par

$$U_t = e^{-t/2}B(e^t)$$

où B est un mouvement brownien. On montre facilement que $U_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ car $\mathrm{Var}(U_t) = 1$, ce processus est donc stationnaire. Sa fonction de covariance est donnée par

$$K(s, t) = \exp\big(-|t - s|/2\big).$$

Elle ne dépend que de la différence $(t-s)$, il s'agit bien d'un processus stationnaire de fonction de covariance plus simplement donnée par $K(t) = e^{-|t|/2}$ (exercice). Elle est donnée sous forme intégrale (2.2) avec la mesure spectrale $\nu(du) = \frac{du}{\pi(1+u^2)}$.

Brownien géométrique

Ce n'est pas un processus gaussien mais l'exponentiel d'un processus gaussien. Il s'agit de

$$S_t = x \exp\big(\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2\big), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Un tel processus modélise le cours d'un actif S_t soumis à un taux d'intérêt $\mu \geq 0$ et à une volatilité $\sigma > 0$ et qui vaut x au temps 0.

On le trouve en supposant comme Samuelson qui l'a introduit que les rendements entre deux périodes sont mesurés par les logarithmes des cours S_t.

On suppose de plus que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement brownien de tendance (drift) $\mu - \sigma^2/2$ et de coefficient de diffusion (volatilité) σ. Cela se traduit par les propriétés suivantes sur les prix $(S_t)_{t\geq 0}$:
- $S_0 = x$.
- Les rendements $\log S_t - \log S_s$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \sigma^2/2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$.
- Pour tout $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_p$, les accroissements relatifs $S_{t_{i+1}}/S_{t_i}$, $0 \leq i \leq p-1$, sont indépendants.

On en déduit qu'il existe un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ tel que en t, $S_t = x\exp(\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2)$.

Bruit blanc gaussien

Soit $(\mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < +\infty\}$.

Le bruit blanc est un processus gaussien $(X_A)_{A\in\mathcal{A}}$ indexé par l'ensemble des mesurables $\mathcal{A}$ défini par $\mathbb{E}[X_A] = 0$ et $\mathrm{Cov}(X_A, X_B) = \mu(A \cap B)$.

Il faut appréhender le buit blanc comme une mesure aléatoire $A \mapsto X_A(\omega)$. Elle est aléatoire car X_A dépend de ω. On connaît quand même la loi de $X(A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$.

Attention cependant, un bruit blanc n'est pas une vraie mesure car $A \mapsto X_A$ n'est pas σ-additif.

Mouvement brownien fractionnaire

Soit $T = \mathbb{R}_+$. Le mouvement brownien fractionnaire (mBf) $(B^H(t))_{t\geq 0}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance

$$K(s,t) = \frac{1}{2}\big(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\big).$$

Le paramètre H s'appelle indice de Hurst.

Propriétés immédiates

1. Pour $H = 1/2$, le mBf devient le mouvement brownien standard.
2. On a $\mathbb{E}\big[|B^H(t) - B^H(s)|^2\big] = |t-s|^{2H}$.
3. Autosimilarité : $B^H(t) = c^{-H} B^H(ct)$, $t \geq 0$, définit encore un mBf d'indice H.
4. Les accroissements du mBf ne sont indépendants que lorsque $H = 1/2$ (c'est à dire dans le cas du mouvement brownien).

Cas $H = 1$. On a $\mathbb{E}\big[B^H(t)B^H(s)\big] = st$. On montre alors qu'il s'agit d'un processus dégénéré de la forme $B^H(t) = tB^H(1)$. Il s'agit en fait d'une droite aléatoire. (Dans ce cas, la dépendance est très forte dans la trajectoire !)

Cas $H = 0$. On a

$$\mathbb{E}\big[B^H(t)B^H(s)\big] = \frac{1}{2}\big(|s|^0 + |t|^0 - |s-t|^0\big) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } s \neq t \\ 1 & \text{si } s = t. \end{cases}$$

Dans le cas $H = 0$, on peut construire le mBf de la façon suivante : soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépdendantes et Z une variable aléatoire indépendante de $(Y_t)_{t\geq 0}$. On les prend de loi $Y_t \sim Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Considérons alors $X_t = {}^{(Y_t+Z)}/_{\sqrt{2}}$. On montre facilement que X_t a bien la covariance cherchée. On constate alors que les trajectoires de $(X_t)_{t\geq 0}$ sont complètement discontinues.

[Graphe typique des trajectoires.]

De façon générale, pour $0 < H < 1$, les trajectoires du mBf $(B^H(t))_{t\geq 0}$ sont β-höldériennes pour tout ordre $\beta \in]0, H[$. Cela est dû au Théorème 2.2 de régularité des processus gaussiens (Kolmogorov-Čentsov).

Chapitre 3

Mouvement brownien

Dans ce chapitre, on présente le mouvement brownien (mB). Nous renvoyons à [LG0] pour une introduction générale de ce processus, à [KS], [RY] pour une description détaillée des principales propriétés du mouvement brownien.
On commence par quelques dates marquantes de l'histoire du mouvement brownien en Section 3.1 avant de définir le mouvement brownien en Section 3.2. On en étudie les propriétés en loi en Section 3.3, propriétés des trajectoires en Section 3.4, la variation quadratique en Section 3.5. On étudie enfin la propriété de Markov forte en Section 3.6 avec notamment le principe de réflexion. On revient à l'équation de la chaleur en Section 3.7.

Historiquement, le mouvement brownien a été exhibé pour représenter des mouvements qui évoluent au cours du temps de façon particulièrement désordonnée, par exemple en physique pour représenter des particules microscopiques soumises aux multiples chocs de leur environnement ou en finance pour représenter des cours de bourses très volatiles. Le mouvement brownien joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques (comme la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ pour les lois de probabilités sur $\mathbb{R}$). Il apparaît dans de nombreuses situations aussi bien théoriques qu'appliquées et il offre un cadre assez simple où de nombreux calculs peuvent être menés.

3.1 Historique

En **1827**, la première description (heuristique) du mouvement brownien est due au botaniste écossais Robert Brown (qui lui a donc donné son nom). Il observe de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide et en décrit les mouvements particulièrement erratiques, au point que plusieurs physiciens estiment ensuite pendant le 19ème siècle que ce mouvement ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de vitesse, ni lui appliquer les lois classiques de la mécanique !
En **1900**, la première approche mathématique du mouvement brownien est due au français Louis Bachelier (dans sa *Théorie de la spéculation*). Il l'introduit pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse. Sa démarche sera cependant oubliée jusque vers les années 1960.

En **1905**, l'allemand Albert Einstein (dans sa *Théorie de la relativité restreinte*) construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il montre notamment que la loi de la position à l'instant t de la particule, sachant que l'état initial est x, admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. Davantage d'explications sur les relations entre mouvement brownien et équation de la chaleur sont données en Section 3.7.
La même année qu'Einstein, le physicien polonais Marian von Smoluchowki utilise des promenades aléatoires pour décrire le mouvement brownien dont il en est les limites.
En **1923**, l'américain Norbert Wiener donne une première construction mathématique rigoureuse du mouvement brownien en tant que processus stochastique. Il établit en particulier la continuité de ses trajectoires.
Dans la période **1930–1960**, de nombreuses propriétés du mouvement brownien sont ensuite établies notamment par le français Paul Lévy. La notion d'équation différentielle stochastique est introduite. Le japonais Kiyoshi Itô les généralisera et les analysera avec son traité de **1948**. Cette démarche très féconde établit des liens importants entre analyse et probabilité et fonde l'analyse et le calcul stochastiques.
Les relations entre probabilités et physique sont, elles, explorées via le mouvement brownien et ses généralisations dès **1930** par les néerlandais Leonard Ornstein et George Eugene Uhlenbeck en suivant une idée du français Paul Langevin. Ils montrent que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck décrit la situation d'équilibre d'un modèle dirigé par le mouvement brownien.
Depuis, de nombreux tavaux sont consacrés au mouvement brownien, à ses généralisations et au calcul stochastique. Citons pour terminer Wolfgang Döblin, mathématicien franco-allemand dont les travaux précurseurs en analyse stochastique (**fin des années 30**) sont restés méconnus jusqu'à l'ouverture de son célèbre pli cacheté en 2000 à l'académie des sciences de Paris (Döblin, mobilisé pendant la deuxième guerre mondiale avait envoyé ses travaux depuis le front, par crainte de ne pas revenir de la guerre. Il n'en est pas revenu. Son courrier est resté oublié jusqu'en 2000).

Dans le cadre déterministe, de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles (ou équations aux dérivées partielles). Pour les phénomènes modélisés par un mouvement brownien, on s'attend à avoir des équations différentielles faisant intervenir le mouvement brownien. Malheureusement, ce processus a des trajectoires nulle part dérivables (cf. Prop. 3.6 et Th. 3.1) et il n'est pas possible de considérer des équations différentielles le faisant vraiment intervenir. Plutôt que de le dériver, on cherchera dans la suite, à intégrer contre ce processus, ce qui permettra de contourner le problème en considérant des équations intégrales (il est d'usage de se ramener à l'écriture symbolique de dérivées et on parlera alors d'*équation différentielle stochastique*). Dans les prochains chapitres (cf. Chapitre 6), on définit l'intégrale stochastique pour une large classe de processus (les semi-martingales, cf. Chapitre 5). Si on se contente du cadre brownien (intégrale et équation différentielle stochastique pour le mouvement brownien), on parle de calcul d'Itô. Dans ce cadre simplifié, la contruction est plus directe. On pourra consulter les notes cours [Tud] ou le livre [Gal] pour cette approche réservée au mouvement brownien.

Dans ce chapitre, nous en donnons les principales propriétés (en loi en Section 3.3, trajectorielles en Section 3.4, variation quadratique en Section 3.5) notamment les propriétés de Markov faible et forte (Section 3.6). À la fin du chapitre en Section 3.7, nous explorons les liens entre le mouvement brownien et l'équation de la chaleur, ce qui correspond à la démarche d'Einstein pour appréhender le mouvement brownien.

3.2 Définition, premières propriétés

Le caractère très erratique des trajectoires qui caractérise le mouvement brownien est en général associé à l'observation que le phénomène, bien que très désordonné, présente une certaine homogénéité dans le temps, au sens où la date d'origine des observations n'a pas d'importance. Ces propriétés sont reprises dans la définition qui suit.

Définition 3.1 (Mouvement brownien) *Un mouvement brownien (standard) réel est un processus gaussien centré $(B_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \min(s,t) := s \wedge t.$$

On l'appelle aussi processus de Wiener.

L'opérateur $K(s,t) = \min(s,t)$ est symétrique et de type positif. En effet si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à support borné alors

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t\in\mathbb{R}} c(s)c(t)K(s,t) &= \sum_{s,t\in\mathbb{R}} c(s)c(t)(s\wedge t) \\
&= \sum_{s,t\in\mathbb{R}} c(s)c(t) \int \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\,dx \\
&= \int \sum_{s,t\in\mathbb{R}} c(s)c(t)\mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\,dx \\
&= \int \left(\sum_{t\in\mathbb{R}} c(t)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\right)^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Par le Théorème 2.1, il existe alors un processus gaussien centré de covariance K. Par contre, il n'est pas immédiat que ce processus admette une version à trajectoires continues ps. Mais cela sera justifié en début de Section **??** avec le théorème de régularité de Kolmogorov-Čentsov pour les processus gaussiens (Th. 2.2).

3.2.1 Propriétés immédiates

1) $B_0 = 0$ car la loi de B_0 est $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$, la loi dégénérée en 0.

2) $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ car $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\mathrm{Var}(B_t) = K(t,t) = t$.

3) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet soit $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\big(B_{t_2}-B_{t_1}, B_{t_4}-B_{t_3}\big) &= \mathbb{E}\big[(B_{t_2}-B_{t_1})(B_{t_4}-B_{t_3})\big] \\
&= \mathbb{E}\big[B_{t_2}B_{t_4}\big]-\mathbb{E}\big[B_{t_2}B_{t_3}\big]-\mathbb{E}\big[B_{t_1}B_{t_4}\big]+\mathbb{E}\big[B_{t_1}B_{t_3}\big] \\
&= t_2-t_2-t_1+t_1=0.
\end{aligned}$$

Les variables $B_{t_2}-B_{t_1}$ et $B_{t_4}-B_{t_3}$ sont donc non corrélées. Comme le vecteur $(B_{t_2}-B_{t_1}, B_{t_4}-B_{t_3})$ est gaussien, $B_{t_2}-B_{t_1}$ et $B_{t_4}-B_{t_3}$ sont indépendantes. On justifie de même l'indépendance mutuelle de n accroissements, $n \geq 1$.

4) Si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \sim B_{t-s}$. En effet $\mathbb{E}[B_t-B_s] = \mathbb{E}[B_t]-\mathbb{E}[B_s]=0$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(B_t-B_s) &= \mathrm{Cov}(B_t-B_s, B_t-B_s) \\
&= \mathrm{Cov}(B_t,B_t)-2\,\mathrm{Cov}(B_t,B_s)+\mathrm{Cov}(B_s,B_s) \\
&= t-2s+s=t-s.
\end{aligned}$$

Donc $B_t-B_s \sim \mathcal{N}(0,t-s) \sim B_{t-s}$.

Remarque 3.1 Les propriétes **3)** et **4)** s'énoncent comme suit : le mouvement brownien a des accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 3.2 (Définition équivalente du mouvement brownien) *Soit $B=(B_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires indéxées par le temps. On dit que B est un mouvement brownien si c'est un processus à trajectoires continues tel que*

i) pour tout $t \geq 0$: $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

ii) pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Preuve de l'équivalence. On sait déjà qu'un mB ̧efini par la Déf. 3.1 vérifie i) et ii) donc la déf. 3.2. Il reste à prouver la réciproque. En écrivant $B_t = B_s + B_t - B_s$ pour $s \leq t$, par indépendance des accroissements, en utilisant la fonction caractéristique, on a : $\varphi_{B_t} = \varphi_{B_s}\varphi_{B_t-B_s}$. D'où

$$\varphi_{B_t-B_s}(x) = \varphi_{B_t}(x)\varphi_{B_s}(x)^{-1} = \exp(-tx^2/2)\exp(sx^2/2) = \exp(-(t-s)x^2/2) = \varphi_{B_{t-s}}(x).$$

Les accroissements sont donc stationnaires, en particulier ils sont gaussiens. Comme les accroissements sont indépendants, un vecteur d'accroissements $(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ a pour loi la loi produit de ses lois marginales qui sont gaussiennes. Un vecteur d'accroissements est donc gaussien. Mais comme $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ est une transformation linéaire de $(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ cela reste gaussien. Les lois fini-dimensionnelles étant gaussiennes, le processus est gaussien. Puis pour $s \leq t$, on a

$$\mathrm{Cov}(B_t,B_s) = \mathbb{E}[B_tB_s] = \mathbb{E}[(B_t-B_s+B_s)B_s] = \mathbb{E}[B_t-B_s]\mathbb{E}[B_s]+\mathbb{E}[B_s^2] = 0+s=s,$$

ce qui confirme que le processus défini par la définition alternative Déf. 3.2 est bien le mouvement brownien (Déf. 3.1) □

[Graphe des trajectoires typiques du MB]

La probabilité que B_t appartienne à un petit intervalle $[x, x + dx]$ est donc donnée par la densité gaussienne centrée de variance t

$$\mathbb{P}\big(B_t \in [x, x + dx]\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\big(-x^2/2t\big)\, dx.$$

En particulier, la variable aléatoire B_t qui est une variable aléatoire gaussienne de variance t est comprise entre les nombres $f_1(t) = 2\sqrt{t}$ et $f_2(t) = -2\sqrt{t}$ avec une probabilité (d'à peu près) 95% (cf. table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$).

On peut montrer que cette propriété est vraie pour toute la trajectoire brownienne qui est donc comprise entre les deux courbes de f_1 et de f_2 avec une probabilité comparable (c'est vrai globalement et pas seulement $''t$ par t'').

Mais en général, les phénomènes observés ne sont pas aussi bien normalisés.

Définition 3.3 (Mouvement brownien avec dérive) *On appelle encore mouvement brownien issu de x, de dérive (ou drift) b et de coefficient de diffusion σ, le processus $X_t = x + \sigma B_t + \mu t$ (où B est un mouvement brownien standard).*

Proposition 3.1 *Le mouvement brownien (général) X est encore un processus à accroissements indépendants stationnaires et gaussiens. Il est non centré et tel que $X_0 = x$. De plus $X_t \sim \mathcal{N}\big(x + \mu t, \sigma^2 t\big)$.*

Sauf mention contraire, par défaut, quand on parlera du mouvement brownien, il s'agira du mouvement brownien standard B.

3.3 Propriétés en loi du mouvement brownien

On se fixe dans cette section un mouvement brownien standard B. Systématiquement, pour vérifier qu'on a un mouvement brownien, il s'agit de vérifier qu'on a un processus gaussien, centré, à trajectoires continues et avec la bonne fonction de covariance. Dans les propriétés qui suivent, il est facile (et omis) de constater que le processus est gaussien, centré et à trajectoires continues ; on se contente de calculer l'opérateur de covariance.

1) Symétrie. $-B$ est un mouvement brownien.

2) Autosimilarité (propriété d'échelle). Pour tout $c > 0$, $B_t^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ définit un mouvement brownien (standard).

En effet : $B_t^{(c)}$ est un processus gaussien car ses lois fini-dimensionnelles en sont de B ; le processus est centré, à trajectoires continues (car B l'est) et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}\big[B_t^{(c)}B_s^{(c)}\big] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}\frac{1}{\sqrt{c}}B_{cs}\Big] = \frac{1}{c}\min(ct, cs) = \min(t, s).$$

Conséquence : Cette propriété montre que c fois B_t se comporte comme un mouvement brownien lu en c^2t : le changement de temps se lit en espace (et réciproquement).

3) Inversion du temps. Le processus $\widetilde{B}$ défini par $\widetilde{B}_t = tB_{1/t}$ si $t \neq 0$ et $\widetilde{B}_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.
En effet, $\widetilde{B}$ est gaussien car à nouveau ses lois fini-dimensionnelles sont des transformations linéaires de celles de B ; le processus est centré et de covariance,

$$\mathrm{Cov}\left(\widetilde{B}_t, \widetilde{B}_s\right) = ts\,\mathrm{Cov}\left(B_{1/t}, B_{1/s}\right) = ts\min(1/t, 1/s) = \min(t, s).$$

De plus, ses trajectoires sont continues sur $]0, +\infty[$ car celles de B le sont sur $\mathbb{R}_+$. Il reste s'assurer de la continuité des trajectoires de $\widetilde{B}$ en 0 et cela vient de

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\lim_{t\to 0}\widetilde{B}_t = 0\Big) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{t\in]0,1/p]\cap\mathbb{Q}}\big\{|\widetilde{B}_t| \leq 1/n\big\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{t\in]0,1/p]\cap\mathbb{Q}}\big\{|B_t| \leq 1/n\big\}\right) \qquad \text{car } (\widetilde{B}_t)_{t>0} \stackrel{fdd}{=} (B_t)_{t>0}\\
&= \mathbb{P}\Big(\lim_{t\to 0}B_t = 0\Big) = 1.
\end{aligned}$$

Conséquence : le processus B a donc le même type de comportement en 0 et en $+\infty$

4) Retournement du temps. Le processus retourné à l'instant T, $\widehat{B}_t^{(T)} = B_T - B_{T-t}$ est encore un mouvement brownien sur $[0, T]$.
Il est clair que $\widehat{B}^{(T)}$ est un processus gaussien, centré à trajectoires continues et sa covariance est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\widehat{B}_t^{(T)}, \widehat{B}_s^{(T)}\right) &= \mathrm{Cov}(B_T - B_{T-t}, B_T - B_{T-s})\\
&= \mathrm{Cov}(B_T, B_T) - \mathrm{Cov}(B_T, B_{T-s}) - \mathrm{Cov}(B_{T-t}, B_T) + \mathrm{Cov}(B_{T-t}, B_{T-s})\\
&= T - (T-s) - (T-t) + T - \max(t, s) = \min(t, s).
\end{aligned}$$

5) Propriété de Markov faible (ou invariance par translation). Le mouvement brownien translaté de $t_0 > 0$ $\overline{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ est encore un mouvement brownien standard ; de plus, il est indépendant du mouvement brownien arrêté en t_0 $(B_t)_{0\leq t\leq t_0}$, ie. $\overline{B}^{(t_0)} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_0}^B := \sigma(B_s : s \leq t_0)$.
En effet, pour $t_0 \leq s \leq t$:

$$\mathrm{Cov}\left(\overline{B}_t^{(t_0)}, \overline{B}_s^{(t_0)}\right) = \mathrm{Cov}\left(B_{t+t_0} - B_{t_0}, B_{s+t_0} - B_{t_0}\right)$$

$$\begin{aligned} &= K(t+t_0, s+t_0) - K(t+t_0, t_0) - K(t_0, s+t_0) + K(t_0, t_0) \\ &= s + t_0 - t_0 - t_0 + t_0 = s = \min(s,t). \end{aligned}$$

La deuxième partie est due à l'indépendance des accroissements de B : Soit $0 \le s_1 < \cdots < s_n \le t_0$, par indépendance des accroissements de B, $\overline{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ est indépendant de $(B_{s_1}, B_{s_2} - B_{s_1}, \ldots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}})$, donc par transformation linéaire de $(B_{s_1}, \ldots, B_{s_n})$. Cela est encore vrai pour tout vecteur de marginales de $\overline{B}^{(t_0)}$. On a donc $\overline{B}^{(t_0)}$ indépendant de $\{B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{s_n} \in A_n\}$, $0 \le s_1 < \cdots < s_n \le t_0$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme il s'agit d'un mesurable typique de $\mathcal{F}_{t_0}^B$, on a $\overline{B}_t^{(t_0)} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_0}^B = \sigma(B_t : t \le t_0)$.
De la même façon, on montre que pour $t_1 < t_2$, $\big(B_{t_1+t_0} - B_{t_0}, B_{t_2+t_0} - B_{t_1+t_0}\big)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_0}^B$. Mais comme

$$\big(\overline{B}_{t_1}^{(t_0)}, \overline{B}_{t_2}^{(t_0)}\big) = \big(B_{t_1+t_0} - B_{t_0}, B_{t_2+t_0} - B_{t_0}\big)$$

en est une image linéaire, cela reste donc vrai pour $\big(\overline{B}_{t_1}^{(t_0)}, \overline{B}_{t_2}^{(t_0)}\big)$ et plus généralement pour toutes les lois fini-dimensionnelles de $\overline{B}^{(t_0)}$: $\big(\overline{B}_t^{(t_0)}\big)_{t \ge 0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_0}^B$.
Conséquence : le processus $(B_t)_{t\ge 0}$ a donc le même comportement localement en 0 et en t_0, donc en tout point.

Cette propriété se réécrit dans le cadre classique de la théorie de Markov : indépendance du futur et du passé conditionnellement au présent : en notant $\mathbb{W}_x$ la loi du mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$, ie. de $x + B$ où B est un mouvement brownien habituel, on réécrit :

Proposition 3.2 (Propriété de Markov faible) *Soit $t \ge 0$ fixé. Posons $B'_s = B_{t+s}$, $x \in \mathbb{R}$. Alors conditionnellement à $B_t = x$, le processus B' est indépendant de $\sigma(B_u : u \le t) = \mathcal{F}_t^B$ et a pour loi $\mathbb{W}_x$.*

Démonstration : Pour cela, il suffit de remarquer que $B'_s = \overline{B}_s^{(t)} + B_t$ où $\overline{B}_s^{(t)} = B_{t+s} - B_t$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_t^B$ et B_t est une variable $\mathcal{F}_t^B$-mesurable. $\square$

3.4 Propriétés trajectorielles du mouvement brownien

3.4.1 Loi du 0/1 de Blumenthal

On définit d'abord la notion de filtration en temps continu qui sera essentielle pour considérer les martingales au Chapitre 4.

Définition 3.4 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \le t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Si on considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, on considère souvent la filtration qu'il engendre : $\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s : s\leq t)$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible jusqu'à une date donnée : $\mathcal{F}_t^X$ représente ainsi l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t.
Une filtration est $\mathbb{P}$-**complète** pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements de mesure nulle, ie. $\mathcal{N}=\{N\in\mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(N)=0\}\subset\mathcal{F}_0$.
À une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on associe

$$\mathcal{F}_{t^+}=\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}\quad\text{ et }\quad\mathcal{F}_{t^-}=\bigvee_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t-\varepsilon}.$$

(On rappelle que $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$.) La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est dite **continue à droite** (resp. **continue à gauche**) si pour tout t, on a $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t^+}$ (resp. $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t^-}$).
Dans la suite, on dira qu'une filtration satisfait les **conditions habituelles** si elle est complète et continue à droite.

Proposition 3.3 *La filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ est continue à droite.*

Corollaire 3.1 (Loi du $0/1$ de Blumenthal) *La tribu $\mathcal{F}_{0^+}^B$ est triviale, ie. pour tout $A\in\mathcal{F}_{0^+}^B$, on a $\mathbb{P}(A)=0$ ou 1.*

Remarque 3.2
— En fait, la filtration brownienne est aussi continue à gauche : $\mathcal{F}_t^B=\bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s^B$.
C'est le cas de toute filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ engendrée par un processus à trajectoires continues à gauche. En effet, $\mathcal{F}_t^X$ est engendrée par les ensembles $A=\{(X_{t_1},\dots,X_{t_p})\in\Gamma\}$ avec $0=t_1<\dots<t_p\leq t$ et $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$. Lorsque $t_p<t$ alors $A\in\mathcal{F}_{t_p}^X\subset\mathcal{F}_{t^-}^X$. Lorsque $t_p=t$, comme $X_t=\lim_{m\to+\infty}X_{s_m}$ pour toute suite $s_m\in[0,t)$ avec $s_m\nearrow t$, on a $A\in\mathcal{F}_{t^-}^X$. Finalement, $\mathcal{F}_{t^-}^X=\mathcal{F}_t^X$.
— Une filtration $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ est toujours continue à droite.
— Attention : si X est à trajectoires continues, $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ peut ne pas être continue à droite, ni $(\mathcal{F}_{t^+}^X)_{t\geq 0}$ à gauche, cf. contre-exemples p. 89 et 122 dans [KS].

Preuve de la continuité à droite de la filtration brownienne.

i) La tribu $\mathcal{F}_{0^+}^B$ est triviale (ie. Blumenthal).
On considère le processus X_n défini sur $[0,2^{-n}]$ par $X_n=\big(B_{2^{-n}+t}-B_{2^{-n}},0\leq t\leq 2^{-n}\big)$. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de processus indépendants (par l'indépendance des accroissements du mouvement brownien). On remarque que l'on peut retrouver la trajectoire brownienne à partir des X_k, $k\geq n$, par

$$B_{2^{-n}+t}=X_n(t)+\sum_{k=1}^{+\infty}X_{n+k}(2^{-n-k}),\quad 0\leq t\leq 2^n$$

car $B_{2^{-n}} \to 0$, $n \to +\infty$. Soit pour $t > 0$ et $2^{-p} \le t < 2^{-p+1}$, en écrivant $t = 2^{-p} + s$, $s \in [0, 2^{-p}]$ (ie. $p = [-t/\ln 2] + 1$) :

$$B_t = B_{2^{-p}+s} = X_p(t - 2^{-p}) + \sum_{k>p} X_k(2^{-k})$$

En particulier pour $0 < t \le 2^{-n}$, on a $p \ge n$ et $B_t \in \sigma\big(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}, \dots\big)$. On en déduit

$$\mathcal{F}^B_{2^{-n}} = \sigma\big(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}, \dots\big)$$

et comme $\mathcal{F}^B_{0^+} = \bigcap_{n\ge 0} \mathcal{F}^B_{2^{-n}}$, $\mathcal{F}^B_{0^+}$ est la tribu asymptotique engendrée par les processus indépendants X_n. D'après la loi du 0/1 (classique) de Kolmogorov, $\mathcal{F}^B_{0^+}$ est alors triviale.

i') Autre preuve de la loi de Blumenthal. Soient $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et aussi $A \in \mathcal{F}^B_{0^+}$. Par continuité et convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})\big] = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)\big].$$

Mais dès que $\varepsilon < t_1$, les variables aléatoires $B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon$ sont indépendantes de $\mathcal{F}^B_\varepsilon$ (par la propriété de Markov simple) et donc aussi de la tribu $\mathcal{F}^B_{0^+} (= \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^B_\varepsilon)$. Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})\big] &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\big[g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)\big] \\
&= \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})].
\end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{F}^B_{0^+} \perp\!\!\!\perp \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$. Comme c'est vrai pour tout $0 < t_1 < \dots < t_k$, on a aussi $\mathcal{F}^B_{0^+} \perp\!\!\!\perp \sigma(B_t, t > 0)$. Puis B_0 étant la limite simple de B_t (continuité de $t \mapsto B_t$ en 0), on a $\sigma(B_t, t \ge 0) = \sigma(B_t, t > 0)$ et $\mathcal{F}^B_{0^+} \subset \sigma(B_t, t \ge 0)$, si bien que $\mathcal{F}^B_{0^+} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^B_{0^+}$, ce qui assure que $\mathcal{F}^B_{0^+}$ est triviale.

ii) Continuité à droite de la filtration brownienne (Prop. 3.3).

Pour $t \ge 0$ fixé, on montre $\mathcal{F}^{(B)}_{t^+} = \mathcal{F}^{(B)}_t$ en prouvant que toute variable aléatoire $\mathcal{F}^{(B)}_{t^+}$-mesurable est $\mathcal{F}^{(B)}_t$-mesurable. Pour cela, nous utilisons le théorème de classe monotone (version fonctionnelle)

Lemme 3.1 (Théorème de classe monotone fonctionnel) *Soit E un espace vectoriel fonctionnel monotone (ie. $f \in E$ est bornée, les constantes sont dans E, si $f_n \in E$ et $f_n \nearrow f$ bornée alors $f \in E$). On suppose que $C \subset E$ où C est un ensemble de fonctions stable par multiplication. Alors E contient toutes les fonctions $\sigma(C)$-mesurables.*

On rappelle que $t \ge 0$ est fixé. On considère la tribu

$$\mathcal{G}_t = \sigma\big(B_{t+s} - B_t : s \ge 0\big).$$

On commence par prouver que $\mathcal{G}_t$ est indépendante de $\mathcal{F}^B_{t^+}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, par la propriété de Markov (faible), $\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$ est indépendante de $\mathcal{F}^B_{t+\varepsilon}$ et donc indépendante de $\mathcal{F}^B_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^B_{t+\varepsilon}$:

$$\mathcal{G}_{t+\varepsilon} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^B_{t^+}. \tag{3.1}$$

Si $t_1 \leq t_2$, on observe que $\mathcal{G}_{t_2} \subset \mathcal{G}_{t_1}$ car

$$B_{t_2+s} - B_{t_2} = B_{t_1+(t_2+s-t_1)} - B_{t_1} - (B_{t_1+(t_2-t_1)} - B_{t_1})$$

s'exprime en fonction de deux variables $\mathcal{G}_{t_1}$-mesurables. La famille $\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, est donc croissante quand ε décroit, de limite $\bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_{t+\varepsilon}$.

Par ailleurs, par continuité des trajectoires de B, pour tout $s \geq 0$, $B_{t+s} - B_t = \lim_{\varepsilon \to 0} B_{t+s+\varepsilon} - B_t$, donc $B_{t+s} - B_t$ est limite de $\mathcal{G}_{t+\varepsilon}$-mesurable donc aussi mesurable par rapport à $\bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_{t+\varepsilon}$. Il vient $\mathcal{G}_t = \bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{G}_{t+\varepsilon}$ et (3.1) assure

$$\mathcal{G}_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^B_{t^+}. \tag{3.2}$$

Considérons une variable aléatoire Y positive, $\mathcal{G}_t$-mesurable. On va appliquer le Théorème de classe monotone fonctionnel (Lemme 3.1) avec E l'espace des variables aléatoires bornées $Z \in L^\infty(\mathcal{F})$ qui vérifie

$$\mathbb{E}\big[ZY\big] = \mathbb{E}\big[Z\mathbb{E}[Y\,|\mathcal{F}_t^{(B)}]\big].$$

Par le théorème de convergence monotone (avec $Y \geq 0$), on s'assure aisément que E est un espace vectoriel fonctionnel monotone.

Notons

$$\mathcal{M} = \big\{XZ \,:\, X \in L^\infty(\mathcal{F}_t^B) \text{ et } Z \in L^\infty(\mathcal{G}_t)\big\}.$$

On vérifie aisément que $\mathcal{M}$ est une classe multiplicative. De plus $\mathcal{M} \subset E$ car avec (3.2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[XZY\big] &= \mathbb{E}\big[XY\big]\,\mathbb{E}[Z] \quad (\text{car } \mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_{t^+}^B \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t)\\
&= \mathbb{E}\big[X\mathbb{E}[Y\,|\mathcal{F}_t^B]\big]\,\mathbb{E}[Z]\\
&= \mathbb{E}\big[XZ\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t^B]\big] \quad (\text{car } \mathcal{F}_t^B \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.1 (théorème fonctionnel de classe monotone), l'espace vectoriel E contient toutes les variables aléatoires bornées et mesurables par rapport à $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}^B$ où $\mathcal{F}^B$ est la tribu engendrée par tout le mouvement brownien.

Par conséquent, pour tout $W \in L^\infty(\mathcal{F}^B)$ on a

$$\mathbb{E}[WY] = \mathbb{E}\big[W\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t^B]\big].$$

En particulier, cela exige $Y = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t^B]$ ps. Comme la tribu est complète, Y coïncide avec une variable $\mathcal{F}_t^B$-mesurable.

Finalement, on peut faire de même pour Y de signe quelconque en écrivant $Y = Y^+ - Y^-$. Ainsi toute les fonctions bornées $\mathcal{F}_{t^+}^B$ sont $\mathcal{F}_t^B$-mesurables et cela prouve $\mathcal{F}_{t^+}^B = \mathcal{F}_t^B$. $\square$

3.4.2 Conséquences trajectorielles de la loi du $0/1$ de Blumenthal

Proposition 3.4 (sup et inf browniens)

(1) On a ps pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0\le s\le\varepsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0\le s\le\varepsilon} B_s < 0.$$

(2) Pour tout $\eta > 0$, on a ps

$$\sup_{t\ge 0} B_t \ge \eta, \quad \inf_{t\ge 0} B_t \le -\eta.$$

(3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a = \inf\big(t \ge 0 : B_t = a\big)$ (avec $\inf\emptyset = +\infty$). Alors ps $T_a < +\infty$.

(4) Par conséquent, presque sûrement

$$\limsup_{t\to+\infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t\to+\infty} B_t = -\infty, \tag{3.3}$$

Remarque 3.3 — La mesurabilité de sup/inf est assurée par la continuité du mouvement brownien (si bien que le sup est un max, l'inf un min, donc sont mesurables).

- — Comme les trajectoires du mouvement brownien sont continues et $\inf_{0<t\le\varepsilon} B_t < 0 < \sup_{0<t\le\varepsilon} B_t$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un zero $t_\varepsilon \in]0,\varepsilon[$ de B. On en déduit que ps $\{t \ge 0 : B_t = 0\}$ admet 0 comme point d'accumulation.
- — Par translation (Markov simple), toute valeur du mouvement brownien est un point d'accumulation de sa trajectoire ps.
- — En utilisant la propriété de Markov simple, on constate aussi facilement que ps la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.

Démonstration : 1) Soit $(\varepsilon_p)_{p\ge1}$ une suite de réels strictement positifs décroissants vers 0 et soit

$$A = \bigcap_{p\ge1} \left\{ \sup_{0\le s\le\varepsilon_p} B_s > 0 \right\}.$$

Comme $\sup_{0\le s\le\varepsilon_p} B_s$ est $\mathcal{F}^B_{\varepsilon_p}$-mesurable, on a $A \in \bigcap_{p\ge1} \mathcal{F}^B_{\varepsilon_p} = \mathcal{F}^B_{0^+}$. Puis, comme l'intersection définissant A est décroissante, on a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le\varepsilon_p} B_s > 0\Big)$$

mais comme

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le\varepsilon_p} B_s > 0\Big) \ge \mathbb{P}(B_{\varepsilon_p} > 0) = \frac{1}{2},$$

on a $\mathbb{P}(A) \ge 1/2$ et la loi de Blumenthal exige alors $\mathbb{P}(A) = 1$. Comme $A \subset \{\sup_{0\le t\le\varepsilon} B_t > 0\}$, on a le résultat pour le sup. L'assertion concernant $\inf_{0\le s\le\varepsilon} B_s$ est obtenue par symétrie en loi en remplaçant B par $-B$.

2) Par convergence monotone des probabilités, on a

$$1 = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > 0\Big) = \lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\Big).$$

Avec le changement $s = t\delta^2$, puis comme par autosimilarité $B_{\delta^2 t}/\delta$ définit encore un mouvement brownien,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le 1/\delta^2} (B_{\delta^2 t}/\delta) > 1\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 1/\delta^2} B_s > 1\Big).$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, par convergence monotone des probabilités, on obtient ainsi $\mathbb{P}\big(\sup_{s\ge 0} B_s > 1\big) = 1$. Puis, à nouveau, comme par autosimilarité, $B_{\eta^2 u}/\eta$ définit un mouvement brownien standard, pour tout $\eta > 0$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\ge 0} B_s > \eta\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{u\ge 0}(B_{\eta^2 u}/\eta) > 1\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{u\ge 0} B_u > 1\Big) = 1.$$

Avec le changement $B \to -B$, on a aussi $\mathbb{P}\big(\inf_{s\ge 0} B_s < -\eta\big) = 1$.

3) Comme $\{T_a > t\} = \{\sup_{s\le t} B_s < a\}$, avec $t_p \nearrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\ge 1}\{T_a > t_p\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(T_a > t_p) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{s\le t_p} B_s < a\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\ge 1}\Big\{\sup_{s\le t_p} B_s < a\Big\}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\ge 0} B_s < a\right) = 0
\end{aligned}$$

d'après **2)**, si bien que $T_a < +\infty$ ps.

4) Puis la dernière assertion est une conséquence du fait qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ne peut visiter tous les réels que si $\limsup_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. □

Remarque 3.4 Le mouvement brownien oscille ps entre $+\infty$ et $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$ mais avec une vitesse d'oscillation sous-linéaire puisque $|B_t/t| \to 0$, quand $t \to +\infty$.
En effet, il suffit de se rappeler par inversion du temps que $\widetilde{B}_t = tB_{1/t}$ est encore un mouvement brownien. Si bien que $B_t/t = \widetilde{B}_{1/t} \to \tilde{B}_0 = 0$ quand $t \to +\infty$ (on peut aussi jusifier ce fait par la LGN).

3.4.3 Régularité trajectorielle brownienne

Proposition 3.5 *Le mouvement brownien $(B_t)_{t\ge 0}$ a des trajectoires ps localement holdériennes de tout ordre $\gamma \in]0, 1/2[$.*

En particulier, on montre qu'un processus gaussien centré de covariance $t \wedge s$ admet donc une modification à trajectoires continues, c'est à dire une version est un mouvement brownien.

Démonstration : En effet, on a

$$K(t,t) + K(s,s) - 2K(s,t) = t + s - 2\min(t,s) = |t-s|.$$

Donc le Théorème 2.2 (Kolmogorov-Čentsov dans le cas gaussien) s'applique avec $\alpha = C = 1$ pour B sur $[0,1]$. Il donne l'existence de version avec la continuité höldérienne pour tout $\gamma < \alpha/2 = 1/2$. Comme le mouvement brownien et ces versions sont continues, elles sont toutes indistinguables. C'est bien le mouvement brownien qui a ces propriétés de régularité. Le résultat reste vrai pour B sur tout intervalle $[0,T]$ borné et on a donc la locale Hölder-régularité sur $\mathbb{R}_+$. □

Proposition 3.6 *En chaque $t \geq 0$, les trajectoires du mouvement brownien sont ps non dérivables.*

Démonstration : Par la propriété de translation (Markov simple), il suffit de montrer la non dérivabilité en 0, c'est à dire montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{B_t - B_0}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{B_t}{t}$$

n'existe pas. Or par inversion du temps $B_t/t = \widetilde{B}_{1/t}$ où $\widetilde{B}$ est encore un mouvement brownien. Mais d'après la Prop. 3.4 pour le mouvement brownien $\widetilde{B}$ (cf. (3.3)), on a

$$\limsup_{s\to+\infty} \widetilde{B}_s = +\infty, \quad \liminf_{s\to+\infty} \widetilde{B}_s = -\infty$$

avec $s = 1/t$, ce qui montre que la limite cherchée n'existe pas. □

En fait, on a bien mieux : le résultat suivant montre que : *ps, les trajectoires browniennes sont nulle part dérivables.*

Théorème 3.1 (Dvoretsky, 1963) *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbb{P}\left(\exists t > 0 : \limsup_{s\to t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} < C\right) = 0. \tag{3.4}$$

Avant la preuve, on mentionne la conséquence concrète pour les trajevtoires browniennes :

Corollaire 3.2 (Dvoretsky) *Presque sûrement, $t \mapsto B_t$ est dérivable nulle part.*

Démonstration : D'après le Th. 3.1, ps $\forall t \in [0,1]$, $\limsup_{s\to t^+} \frac{|B_s-B_t|}{\sqrt{s-t}} \geq C > 0$. Soit t arbitrairement fixé. Si B était dérivable en t de dérivée ℓ, on aurait quand $s \searrow t$

$$\frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} = \frac{|B_s - B_t|}{s-t} \times \sqrt{s-t} \sim \ell\sqrt{s-t} \to 0,$$

ce qui contredit (3.4) donc B n'est pas dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$. □

3.5 Variation quadratique

Définition 3.5 (Variation) *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On définit la α-variation de f par*

$$Var(f,\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\{t_k\}:\rho(\{t_k\})\le\varepsilon} \sum_k \big|f(t_{k+1}) - f(t_k)\big|^\alpha$$

où $\rho(\{t_k\}) = \max_{1\le k\le p} |t_k - t_{k-1}|$ est le pas de la subdivision de $[0,1]$ et le sup est pris sur l'ensemble de ces subdivisions.
Pour $\alpha = 1$, on parle de la variation. On dit que f est à variations bornées si $Var(f,1) < +\infty$. Pour $\alpha = 2$, on parle de la variation quadratique.

Remarque 3.5 Pour une fonction f de classe C^1, la variation quadratique tend vers 0 sur tout intervalle $[0,t]$, en effet, avec une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$, on a avec le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} V_f(t_0,t_1,\dots,t_p) &:= \sum_{j=1}^p (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 = \sum_{j=1}^p (f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2 \\ &\le \delta\|f'\|_\infty^2 \sum_{j=1}^p |t_i - t_{i-1}| = \delta\|f'\|_\infty^2 t \end{aligned}$$

où $t_i^* \in]t_i, t_{i+1}[$ est donné par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable f.

Proposition 3.7 (Variation quadratique brownienne) *Soit $t > 0$ et $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t\}$ une subdivision de $[0,t]$, notons $V_B(t_0,t_1,\dots,t_p) = \sum_{j=1}^p (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$. Alors*

(1) $V_B(t_0,t_1,\dots,t_p)$ converge dans L^2 vers t lorsque le pas de la subdivision $\delta := \max_{1\le j\le p}(t_j - t_{j-1})$ tend vers 0.

(2) De plus, si la subdivision est uniforme, la convergence est presque sûre.

Heuristiquement : la variation quadratique du mouvement brownien sur $[0,t]$ est donc t.

Démonstration : Notons d'abord que le carré d'une variable gaussienne X centrée de variance σ^2 est une variable aléatoire d'espérance σ^2 et de variance $\mathrm{Var}(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$ (calculs par ipp).

1) On a pour la convergence dans L^2 :

$$\mathbb{E}\big[(V_B(t_0,t_1,\dots,t_n) - t)^2\big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\Big)^2\Big] = \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\left((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right)$$

car les variables $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})$ sont centrées et indépendantes. On a donc

$$\mathbb{E}\big[(V_B(t_0,t_1,\dots,t_n) - t)^2\big] = 2\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2 \le 2t\delta \to 0, \quad \delta \to 0.$$

2) Notons $V_n = V_B\left(0, \frac{t}{n}, \dots, \frac{nt}{n}\right)$. On a $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(B)^2$ avec $\Delta_k(B) = B\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) - B\left(\frac{kt}{n}\right)$. On a $V_n - t = \sum_{k=0}^{n} Y_{n,k}$ avec $Y_{n,k} = \Delta_k(B)^2 - \frac{t}{n}$.
Notons $Z = B_1^2 - 1$. On a $\mathbb{E}[Z] = 0$ et

$$Y_{n,0} = \Delta_0(B)^2 - \frac{t}{n} = B\left(\frac{t}{n}\right)^2 - \frac{t}{n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t}{n}\big(B_1\big)^2 - \frac{t}{n} = \frac{t}{n}Z.$$

On a

- Pour $k = 0, \dots, n$, les variables aléatoires $Y_{n,k}$ sont *iid* (indépendance et stationnarité des accroissements de B) ;
- $\mathbb{E}\big[Y_{n,k}\big] = \mathbb{E}\big[Y_{n,0}\big] = \mathbb{E}\big[tZ/n\big] = 0$;
- $\mathbb{E}\big[Y_{n,k}^2\big] = \mathbb{E}\big[Y_{n,0}^2\big] = \mathbb{E}\big[t^2Z^2/n^2\big] = (t^2/n^2)\ \mathbb{E}\big[Z^2\big]$;
- $\mathbb{E}\big[Y_{n,k}^4\big] = \mathbb{E}\big[Y_{n,0}^4\big] = \mathbb{E}\big[Z^4/n^4\big] = (t^4/n^4)\ \mathbb{E}\big[Z^4\big]$.

On utilise maintenant le Lemme **??** :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k}\right)^4\right] \le Cn^2\mathbb{E}[Y_{n,0}^4].$$

Par l'inégalité de Markov, on a alors

$$\mathbb{P}\big(|v_n - t| \ge \delta_n\big) \le \frac{\mathbb{E}\big[(\sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k})^4\big]}{\delta_n^4} \le \frac{Cn^2\mathbb{E}\big[Z^4\big]}{n^4\delta_n^4} = \frac{C'}{n^2\delta_n^4}.$$

Avec le choix $\delta_n = 1/\ln n$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big(|v_n - t| \ge \delta_n\big) < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli s'applique et donne : ps, pour n assez grand on a $|v_n - t| \le \delta_n \to 0$. D'où ps $\lim_{n\to+\infty} v_n = t$. □

Proposition 3.8 *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien sont à trajectoires à variations non bornées.*

Ce résultat justifie que, si les trajectoires browniennes sont continues, elles oscillent quand même beaucoup... tellement que les trajectoires sont ps à variations non bornées. Ce phénomène explique les difficultés qu'il y aura à construire une intégrale (de type Stieltjes) par rapport au mouvement brownien.

Démonstration : Il suffit de justifier la remarque générale suivante : si f est continue sur $[0, 1]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 = a \in]0, +\infty[$$

alors $Var(f,1) = +\infty$. Pour cela, supposons que $Var(f,1) < +\infty$ et notons $\rho_f(u) = \sup_{|x-y|<u} |f(x) - f(y)|$ le module de continuité de f. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^2 &\leq \rho_f\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \rho_f\left(\frac{1}{n}\right) Var(f,1) \to 0\end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$ puisque par continuité de f : $\lim_{n\to+\infty} \rho_f(1/n) = 0$. Il est donc nécessaire d'avoir $Var(f,1) = +\infty$. □

3.6 Propriété de Markov forte

Le but dans cette section est d'étendre la propriété de Markov simple (invariance par translation, cf. Prop. 3.2) au cas où l'instant déterministe s est remplacé par un temps aléatoire T. On commence par préciser la classe des temps aléatoires pour lesquels cela est possible.

3.6.1 Temps d'arrêt

Définition 3.6 (Temps d'arrêt) *Étant donnée une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Les propriétés suivantes sont simples :

Proposition 3.9 *Soient T et S deux $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt alors $T \wedge S$ et $T \vee S$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.*

Démonstration : Cela vient facilement de pour $t \geq 0$:

$$\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque S, T sont de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt et la tribu $\mathcal{F}_t$ est stable par intersection et réunion.
□

Proposition 3.10 *Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration continue à droite alors T est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt ssi pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Démonstration : C'est suffisant car

$$\{T \le t\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{T < t+\varepsilon\} \in \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t.$$

Et c'est nécessaire car

$$\{T < t\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \{T \le t-\varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque $\{T \le t-\varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$. □

Cette proposition s'applique par exemple pour la filtration brownienne $\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t\ge 0}$ (Prop. 3.3, généralisation de la loi de Blumenthal).

Proposition 3.11 *1. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt alors $T = \lim_{n\to+\infty} T_n$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.*

2. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt alors $T = \lim_{n\to+\infty} T_n$ est un $(\mathcal{F}_{t^+})$-temps d'arrêt.

Démonstration : 1) Soit $T_n \nearrow T$ alors pour tout $t \ge 0$:

$$\{T \le t\} = \bigcap_{n\ge 1} \{T_n \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

2) Soit $T_n \searrow T$ alors pour tout $t \ge 0$:

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\ge 1} \{T_n < t\}.$$

Mais

$$\{T_n < t\} = \bigcup_{p\ge 1} \{T_n \le t - 1/p\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque $\{T_n \le t-1/p\} \in \mathcal{F}_{t-1/p} \subset \mathcal{F}_t$. On a donc $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^+}$ ce qui suffit d'après la Prop. 3.10 puisque $\mathcal{F}_{t^+}$ est continue à droite. □

Exemple 3.1
- Un temps $T = t$ (constant) est un temps d'arrêt.
- Un temps d'atteinte $T_a := \inf\{t \ge 0 : B_t = a\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration browienne $\mathcal{F}^B$.
  En effet, $\{T_a \le t\} = \{\sup_{0\le s\le t} B_s \ge a\} = \bigcup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{B_s \ge a\} \in \mathcal{F}_t$ pour $a \ge 0$.
- En revanche, $T = \sup\{s \ge 1 : B_s = 0\}$ n'est pas un temps d'arrêt.

— Soit O un ouvert alors $T_O = \inf\{t \geq 0 : B_t \in O\}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt si la filtration est continue à droite.
En effet :

$$\begin{aligned}\big\{T_O < t\big\} &= \big\{\exists s < t : B_s \in O\big\} = \big\{\exists s \in [0,t] \cap \mathbb{Q} : B_s \in O\big\} \quad \text{(trajectoires continues)}\\ &= \bigcup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \big\{B_s \in O\big\} \in \bigvee_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Comme la filtration est continue à droite, $\{T_O < t\} \in \mathcal{F}_t$ suffit.

— Soit F un fermé alors $T_F = \inf\{t \geq 0 : B_t \in F\}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.
En effet :

$$\begin{aligned}\big\{T_F \leq t\big\} &= \big\{\omega \in \Omega : \inf_{0\leq s\leq t} d(B_s(\omega), F) = 0\big\}\\ &= \big\{\omega \in \Omega : \inf_{s\in[0,t]\cap,\mathbb{Q}} d(B_s(\omega), F) = 0\big\}\end{aligned}$$

car B est à trajectoires continues et donc la distance aussi. Par ailleurs, un inf dénombrable de fonctions mesurables reste mesurable. Par conséquent, $\{T_F \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et T_F est bien un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.

Définition 3.7 (Temps d'arrêt simple) *Soit T un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. On dit que T est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt simple si l'ensemble des valeurs prises par T est au plus dénombrable, ie. il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps positifs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T = t_n) = 1$.*

Proposition 3.12 (Approximation de temps d'arrêt) *Soit T un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt. Alors il existe une suite décroissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt simples tels que ps $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.*

Démonstration : On pose $T_n = ([T2^n] + 1)2^{-n}$ sur $\{T < +\infty\}$, ie. $T_n = (j+1)2^{-n}$ sur l'évènement $\{T \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[\}$ et $T_n = +\infty$ sur $\{T = +\infty\}$. On vérifie que T_n est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt :

$$\begin{aligned}\big\{T_n \leq t\big\} &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \big\{T_n = (j+1)2^{-n}\big\} \quad \text{avec } p2^{-n} \leq t < (p+1)2^{-n}\\ &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \big\{T \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[\big\}\\ &= \big\{T \in [0, p2^{-n}[\big\} \in \mathcal{F}_{p2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

où on a utilisé $\big\{T < p2^{-n}\big\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \big\{T \leq p2^{-n} - \varepsilon\big\} \in \mathcal{F}_{p2^{-n}}$. Puis, par construction, on a facilement $T_n \to T$ ps et $T_n \geq T$, ie. $T_n \searrow T$. □

Définition 3.8 *Soit T un temps d'arrêt. La tribu des évènements antérieurs à T est*

$$\mathcal{F}_T = \Big\{ A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Big\}.$$

Si $T = t$ est déterministe, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Proposition 3.13 *Soit T un temps d'arrêt fini ps. Les variables aléatoires T et B_T sont $\mathcal{F}_T$-mesurables.*

Démonstration : Il s'agit de voir que pour tout $s \geq 0$, $T^{-1}(]-\infty, s]) = \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, soit $t \geq 0$, on a

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t\wedge s} \subset \mathcal{F}_t$$

en utilisant le fait que T est un temps d'arrêt. Pour B_T, il suffit de remarquer que par continuité presque sûre des trajectoires

$$B_T = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{i2^{-n} < T \leq (i+1)2^{-n}\}} B_{i2^{-n}}$$

puis que $B_s \mathbf{1}_{\{s<T\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. En effet pour tout $u \in \mathbb{R}$, on montre que $\{B_s \mathbf{1}_{\{s<T\}} \leq u\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, on établit que, pour tout $t \geq 0$, $\{B_s \mathbf{1}_{\{s<T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

- si $t < s$ alors $\{B_s \mathbf{1}_{\{s<T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} = \{0 \leq u\} \cap \{T \leq t\} = (\emptyset \text{ ou } \Omega) \cap \mathcal{F}_t \in \mathcal{F}_t$;
- si $t \geq s$ alors $\{B_s \mathbf{1}_{\{s<T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} = (\{B_s \leq u\} \cap \{s < T \leq t\}) \cup (\{0 \leq u\} \cap \{T \leq s\})$ mais $\{B_s \leq u\} \in \mathcal{F}_s$ et $\{s < T \leq t\} = \{T \leq s\}^c \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

□

Cette notion est développée en Section 4.2, en particulier les relations entres les diverses filtrations $\mathcal{F}_T$.

3.6.2 Propriété de Markov

Le résultat suivant généralise la Prop. 3.2 à un changement de temps donné par un temps d'arrêt.

Théorème 3.2 (Propriété de Markov forte) *Soit T un temps d'arrêt. Alors conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $B^{(T)}$ défini par*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Démonstration : On suppose d'abord que $T < +\infty$ ps. On prouve alors la propriété de Markov en montrant que pour $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \le t_1 \le \dots \le t_p$ et F une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^p$, on a

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A F(B^{(T)}_{t_1}, \dots, B^{(T)}_{t_p})\big] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\big[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})\big]. \tag{3.5}$$

En effet, avec $A = \Omega$, on obtient que $B^{(T)}$ a les mêmes lois fini-dimensionnelles que B et il est facile de voir que $B^{(T)}$ a des trajectoires presque sûrement continues. Autrement dit $B^{(T)}$ est un mouvement brownien. Puis pour A quelconque, (3.5) assure que pour tout choix $0 \le t_1 \le \dots \le t_p$, le vecteur $(B^{(T)}_{t_1}, \dots, B^{(T)}_{t_p})$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$, d'où par un argument de classe monotone $B^{(T)} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_T$.

Pour montrer (3.5), on écrit, par continuité presque sûre des trajectoires de B :

$$\begin{aligned} & F\big(B^{(T)}_{t_1}, \dots, B^{(T)}_{t_p}\big) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big). \end{aligned}$$

Comme F est bornée, par convergence dominée, il vient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A F(B^{(T)}_{t_1}, \dots, B^{(T)}_{t_p})\big] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big)\big]. \end{aligned}$$

Pour $A \in \mathcal{F}_T$, l'évènement $A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\} = A \cap \{T \le k2^{-n}\} \cap \{T \le (k-1)2^{-n}\}^c$ est $\mathcal{F}_{(k2^{-n})}$-mesurable donc par la propriété de Markov simple (Prop. 3.2), on a

$$\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_r : r \le k2^{-n})$$

et donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\}} F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big)\big] \\ &= \mathbb{P}\big(A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\}\big)\, \mathbb{E}\big[F\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big)\big] \\ &= \mathbb{P}\big(A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \le k2^{-n}\}\big)\, \mathbb{E}\big[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})\big] \end{aligned}$$

puisque par stationnarité des accroissements de B :

$$\big(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}\big) \sim (B_{t_1}, \dots, B_{t_p}).$$

Finalement, on obtient (3.5) en sommant sur $k \in \mathbb{N}$.

Lorsque $\mathbb{P}(T = +\infty) > 0$, on obtient de la même façon

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{A\cap\{T<+\infty\}} F\big(B^{(T)}_{t_1}, \dots, B^{(T)}_{t_p}\big)\big] = \mathbb{P}\big(A \cap \{T < +\infty\}\big)\mathbb{E}\big[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})\big]$$

et le résultat cherché suit. □

3.6.3 Principe de réflexion

Une application importante de la propriété de Markov forte est le principe de réflexion.

Théorème 3.3 (Principe de réflexion) *Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup_{s \le t} B_s$. Alors si $a \ge 0$ et $b \le a$ on a*

$$\mathbb{P}\big(S_t \ge a, B_t \le b\big) = \mathbb{P}\big(B_t \ge 2a - b\big). \tag{3.6}$$

En particulier, pour chaque $t \ge 0$, S_t a même loi que $|B_t|$.

Remarque 3.6 — À chaque trajectoire brownienne dépassant le seuil a et terminant en deça de $b \le a$, on peut associer la trajectoire brownienne (fictive) obtenue par symétrie autour de la droite $y = a$ à partir de la date $\inf(t \ge 0 : B_t = a)$. Cette trajectoire termine alors au délà de $2a - b$. Il y a ainsi une ″bijection″ entre les trajectoires browniennes vérifiant $\{S_t \ge a, B_t < b\}$ et celles vérifiant $\{B_t \ge 2a - b\}$. Le principe de réflexion (3.6) est une formalisation de cette ″bijection″.
[Dessin typique illustant le principe de réflexion].

— Le principe (3.6) implique que pour $\forall t \ge 0$, $S_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} |B_t|$. Toutefois, **attention :** l'égalité tient pour les marginales mais ne s'étend pas aux processus : l'un est croissant, l'autre pas.

Démonstration : Il s'agit d'appliquer la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $T_a = \inf\big(t \ge 0 : B_t = a\big)$. On a déjà vu que $T_a < +\infty$ ps. On a aussi

$$\mathbb{P}(S_t \ge a, B_t \le b) = \mathbb{P}(T_a \le t, B_t \le b) = \mathbb{P}\left(T_a \le t, B^{(T_a)}_{t-T_a} \le b - a\right)$$

puisque $B^{(T_a)}_{t-T_a} = B_{t-T_a+T_a} - B_{T_a} = B_t - a$. Pour simplifier, notons $B' = B^{(T_a)}$. Le Théorème 3.2 (propriété de Markov forte) assure que B' est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$, donc de T_a. Comme B' a même loi que $-B'$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_a \le t, B^{(T_a)}_{t-T_a} \le b - a\right) &= \int_0^t \mathbb{P}(B'_{t-u} \le b - a)\ \mathbb{P}_{T_a}(du) = \int_0^t \mathbb{P}(-B'_{t-u} \le b - a)\ \mathbb{P}_{T_a}(du) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(B'_{t-u} \ge a - b)\ \mathbb{P}_{T_a}(du) = \mathbb{P}\left(T_a \le t, B^{(T_a)}_{t-T_a} \ge a - b\right) \\
&= \mathbb{P}\big(T_a \le t, B_t - a \ge a - b\big) \\
&= \mathbb{P}(B_t \ge 2a - b)
\end{aligned}$$

car l'évènement $\{B_t \ge 2a - b\}$ est contenu dans $\{T_a \le t\}$ $(b \le a)$.

Pour la deuxième partie, on utilise le principe de réflexion et la symétrie (en loi) du mouvement brownien :

$$\mathbb{P}(S_t \ge a) = \mathbb{P}\big(S_t \ge a, B_t \ge a\big) + \mathbb{P}\big(S_t \ge a, B_t < a\big)$$

Comme $\{B_t \geq a\} \subset \{S_t \geq a\}$, on a $\mathbb{P}\big(S_t \geq a, B_t \geq a\big) = \mathbb{P}(B_t \geq a)$. Puis le principe de réflexion (3.6) avec $a = b$ donne

$$\mathbb{P}\big(S_t \geq a, B_t < a\big) = \mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(-B_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \leq -a)$$

en utilisant la symétrie de B. Finalement,

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}\big(|B_t| \geq a\big).$$

□

Remarque 3.7 On déduit facilement du principe de réflexion que le temps d'atteinte $T_a = \inf\big(t \geq 0 \,:\, B_t = a\big)$ d'un mouvement brownien du niveau a n'est pas déterministiquement borné : pour tout $C > 0$, on a

$$\mathbb{P}(T_a \leq C) = \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,C]} B_t \geq a\Big) = \mathbb{P}\Big(|B_C| \geq a\Big) = 2\mathbb{P}(N \geq a/C^2) < 1 \qquad (3.7)$$

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Soit Z une variable aléatoire réelle. Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est appelé mouvement brownien réel issu de Z si on peut écrire $X_t = Z + B_t$ où B est un mouvement brownien issu de 0 indépendant de Z.

3.7 Équation de la chaleur

Cette section reprend la présentation de cette équation par [EGK].

3.7.1 Origine physique

L'équation de la chaleur est l'EDP qui décrit la propagation de la chaleur en donnant la température $T(t, x)$ dans un milieu en fonction du temps t et du lieu x.

Le flux d'énergie thermique J qui traverse une surface unitaire par unité de temps est donné par la loi de Fourier :

$$J = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

où k est le coefficient de conductivité thermique du milieu (en $mkgs^{-3}K^{-1}$). Cette loi stipule qu'une différence de température engendre un flux d'énergie dans la direction des températures décroissantes.

Si on calcule le gain d'énergie par unité de temps d'un volume d'épaisseur dx et de section S, on remarque que cette puissance est égale à la différence entre le flux entrant et le flux sortant :

$$P = J(x)S - J(x + dx)S \quad \text{c'est à dire} \quad P = -\frac{\partial J}{\partial x}Sdx.$$

Cette puissance assimilée à cet élément de volume Sdx est supposée élever sa température T. On pose une relation linéaire simple

$$P = cm\frac{\partial T}{\partial t}$$

où c est la chaleur spécifique de la matière considérée. Comme $m = \rho S dx$ (où ρ est la masse volumique du milieu), on a alors

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

qui est l'équation de continuité d'un flux thermique d'énergie. En la combinant avec la loi de Fourier, on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Cette EDP se généralise facilement en dimension supérieure.

3.7.2 Origine mathématique

Les premières propriétés du mouvement brownien mises en évidence par Bachelier et Einstein concernent le lien entre la loi du mouvement brownien issu de x et l'équation de la chaleur. On note $p_t(x,\cdot)$ la densité de la variable aléatoire qui modélise le phénomène $x + B_t$ à la date t et qui part de x à la date 0. Par stationnarité du phénomène, $p_t(x,y)$ ne dépend de x, y que par la différence $y - x$. Puis, ces auteurs déduisent de la propriété d'accroissements indépendants que la densité $p_t(x,\cdot)$ de la loi de $x + B_t$ (qui n'est pas supposée gaussienne a priori) vérifie l'équation de convolution

$$\int_{\mathbb{R}} p_t(x,y)p_h(y,z)\ dy = p_{t+h}(x,z). \tag{3.8}$$

En effet, on écrit $x + B_{t+h} = x + B_t + B_{t+h} - B_t$ et on note que

— $B_t = B_t - B_0$ est indépendant de $B'_h = B_{t+h} - B_t$,

— si $x + B_t = y$, la loi de $x + B_t + B_{t+h} - B_t$ est la même que celle de $y + \widetilde{B}_h$ de densité $p_h(y,\cdot)$,

— on récupère la densité du tout, en intégrant par rapport à la loi de $x + B_t$ de densité $p_t(x,\cdot)$.

Bachelier conclut en montrant que l'équation (3.8) est vérifiée par les fonctions de la forme $A_t e^{-\pi A_t^2 x^2}$ pour lesquelles A_t^2 est proportionelle au temps t. Il n'envisage pas a priori d'autre type de fonctions. Ce résultat montre la grande généralité des situations qui peuvent être modélisées par un mouvement brownien.

Revenons à la densité gaussienne

$$g(t,x,y) := g(t, y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\big(-(y-x)^2/(2t)\big)$$

qui traduit que $x+B_{t+h}$ est la somme des variables gaussiennes indépendantes $x+B_t$ et $B_{t+h}-B_h$. Un calcul direct montre que le noyau gaussien est solution de l'équation de la chaleur, c'est à dire de l'EDP

$$\left\{\begin{array}{lcl} g'_t(t,x,y) & = & \frac{1}{2}g''_{yy}(t,x,y) \\ g'_t(t,x,y) & = & \frac{1}{2}g''_{xx}(t,x,y). \end{array}\right. \tag{3.9}$$

La densité gaussienne standard satisfait donc l'équation de la chaleur par rapport aux variables x et y. Cette propriété est étendue à une vaste classe de fonctions construites à partir du mouvement brownien.

Théorème 3.4 *1. Considérons la fonction*

$$u(t,x,f)=\mathbb{E}[f(x+B_t)]=\int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)f(y)\,dy$$

où f est une fonction borélienne bornée. La fonction u est C^∞ en espace et en temps pour $t>0$ et vérifie l'équation de la chaleur

$$u'_t(t,x,f)=\frac{1}{2}u''_{xx}(t,x,f), \quad u(0,x)=f(x). \tag{3.10}$$

2. Lorsque le point de départ du mouvement X_0 est aléatoire avec une loi de densité $\pi(x)$, indépendante du mouvement brownien, la densité de la loi de X_0+B_t est égale à $q(t,y)=\int_{\mathbb{R}} g(t,y-x)\pi(x)dx$ et vérifie l'équation de la chaleur

$$q'_t(t,y)=\frac{1}{2}q''_{yy}(t,y), \quad q(0,y)=\pi(y).$$

Démonstration : 1) La fonction $u(t,x,f)=\mathbb{E}[f(x+B_t)]=\int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)f(y)\,dy$ est très régulière pour $t>0$, car la densité gaussienne (le noyau de la chaleur) est C^∞, à dérivées bornées pour $t>a$. Par dérivation sous le signe intégral, on a aisément :

$$u'_t(t,x,f)=\int_{\mathbb{R}} g'_t(t,x,y)f(y)\,dy, \quad u''_{xx}(t,x)=\int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t,x,y)f(y)\,dy.$$

L'équation de la chaleur (3.10) pour $u(t,\cdot,f)$ suit alors facilement de celle pour $g(t,x,y)$.

2) Supposons que la condition initiale soit aléatoire et indépendante du mouvement brownien et donc de B_t. La loi de X_0+B_t admet une densité qui est la convolée de $\pi(x)$ et de $g(t,x)$. □

La formule précédente peut être étendue sous certaines conditions à d'autres fonctions que les fonctions bornées, par exemple pour les fonctions $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$. La fonction $u(t,x,e^{\lambda\cdot})$ est la transformée de Laplace de $x+B_t$. Des calculs gaussiens (classiques) montrent que

$$u\big(t,x,e^{\lambda\cdot}\big)=\mathbb{E}\big[e^{\lambda(x+B_t)}\big]=e^{\lambda x+\frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

Lorsque la fonction considérée est régulière, une autre formulation peut être donnée à cette relation qui jouera un rôle important dans la suite :

Proposition 3.14 *Si f est une fonction C_b^1 en temps et C_b^2 en espace (c'est à dire à dériveés bornées en temps et en espace), on a*

$$u'_t(t,x,f) = u\big(t,x,f'_t + \frac{1}{2}f''_{xx}\big)$$

soit, en intégrant, sous une forme probabiliste :

$$\mathbb{E}[f(t,x+B_t)] = f(0,x) + \int_0^t \mathbb{E}\big[\frac{1}{2}f''_{xx}(s,x+B_s) + f'_t(s,x+B_t)\big]\ ds. \tag{3.11}$$

Démonstration : On représente la fonction $u(t,x,f)$ de la façon suivante

$$u(t,x,f) = \mathbb{E}[f(t,x+B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t,y)f(t,x+y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,z)f(t,z)\ dz$$

où $g(t,y)$ est la densité de $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ et $g(t,x,z) = g(t,z-x)$ est la densité de $x+B_t \sim \mathcal{N}(x,t)$. Par convergence dominée, on dérive sous le signe intégral, pour une fonction f deux fois dérivable, à dérivées bornées.

$$\begin{aligned}
u''_{xx}(t,x,f) &= \int_{\mathbb{R}} g(t,y)f''_{xx}(t,x+y)dy = u(t,x,f''_{xx}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t,x,z)f(t,z)dz \quad \text{(avec deux ipp)} \\
u'_t(t,x,f) &= \int_{\mathbb{R}} g(t,x,z)f'_t(t,z)\ dz + \int_{\mathbb{R}} g'_t(t,x,z)f(t,z)\ dz \\
&= u(t,x,f'_t) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t,x,z)f(t,z)dz = u(t,x,f'_t) + \frac{1}{2}u(t,x,f''_{xx})
\end{aligned}$$

en utilisant que g satisfait l'équation de la chaleur. Pour avoir l'équation intégrale (3.11), il suffit d'intégrer par rapport à t et d'expliciter les fonctions $u(t,x,f'_t)$ et $u(t,x,f''_{xx})$ comme des espérances. □

Le mouvement brownien décentré $X_t^x = x + bt + \sigma B_t$ joue un rôle important dans les applications. Les équations aux dérivées partielles (EDP) précédentes s'étendent sans difficulté à partir de l'EDP satisfaite par la densité de X_t^x

$$g_{b,\sigma^2}(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left(-\frac{(y-x-bt)^2}{2\sigma^2 t}\right) = g(\sigma^2 t, x+bt, y) = g(\sigma^2 t, x, y-bt).$$

Nous introduisons le **générateur** associé à ce processus, c'est à dire l'opérateur du 2nd ordre défini par

$$L_{b,\sigma^2}\phi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2\phi''_{xx}(x) + b\phi'_x(x).$$

Puisque $g(t,x,y)$ satisfait l'équation de la chaleur, la fonction $x \mapsto g_{b,\sigma^2}(t,x,y)$ vérifie

$$\partial_t g_{b,\sigma^2}(t,x,y) \quad = \quad \frac{1}{2}\sigma^2 g''_{xx}(\sigma^2 t, x+bt, y) + b g'_x(\sigma^2 t, x+bt, y)$$

$$= \quad L_{b,\sigma^2} g_{b,\sigma^2}(t,x,y). \tag{3.12}$$

Dans ce contexte, l'équation (3.12) remplace l'équation de la chaleur (3.9).

Proposition 3.15 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Les fonctions $u(t,x,f) = \mathbb{E}[f(x+bt+\sigma B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g_{b,\sigma^2}(t,x,y) f(y)\, dy$ satisfont l'EDP*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'_t(t,x,f) & = & L_{b,\sigma^2} u(t,x,f) = \frac{1}{2}\sigma^2 u''_{xx}(t,x,f) + b u'_x(t,x,f) \\ u(0,x,f) & = & f(x). \end{array} \right. \tag{3.13}$$

2. De plus, si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C_b^1 en temps sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et C_b^2 en espace, alors

$$\mathbb{E}[f(t, X_t^x)] = f(0,x) + \int_0^t \mathbb{E}\big[L_{b,\sigma^2} f(s, X_s^x) + f'_t(s, X_s^x)\big]\, ds. \tag{3.14}$$

Démonstration : L'équation (3.13) s'obtient en intégrant par rapport à $f(y)dy$ l'EDP satisfaite par la densité $g_{b,\sigma^2}(t,x,y)$ considérée comme fonction de x. Puis (3.14) suit avec des intégrations par parties comme précédemment. □

Remarque 3.8 La représentation de la solution de l'équation de la chaleur comme $\mathbb{E}[f(x+B_t)]$ montre que la trajectoire brownienne joue pour cette équation le même rôle que les caractéristiques, solutions d'équations différentielles du premier ordre, pour la résolution des EDP du premier ordre. L'équation (3.13) montre que ce résultat peut être étendu aux EDP elliptiques à coefficients constants à condition de se référer à un MB décentré.
Un objectif important est de passer de cette formule, vraie en moyenne (en espérance), à une formule trajectorielle. Cette étape a été amorcée par Paul Lévy dans les années 30 et complétée par Kiyoshi Itô dans les années 50. Plus précisément, Itô interprète la quantité

$$T_t(f) = f(t, x+B_t) - f(0,x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(s, x+B_s) + f'(s, x+B_s) ds$$

qui mesure la différence trajectorielle entre les deux termes de l'équation (3.11) sans prendre l'espérance $\mathbb{E}$ comme une intégrale stochastique. Ce faisant, il introduit un calcul différentiel stochastique, le calcul d'Itô, vrai sur les trajectoires et non plus seulement en moyenne. C'est l'objet des chapitres suivants (Chapitre **??**).

Deuxième partie

Martingales

Chapitre 4

Martingales en temps continu

Dans ce chapitre, on présente les rudiments sur la théorie des martingales en temps continu. Ce sont des processus définis sur des espaces $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ filtrés, c'est à dire muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On rappelle qu'une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus telles que pour $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.
On rappelle qu'on associe à chaque $\mathcal{F}_t$ les tribus $\mathcal{F}_{t^+}$ et $\mathcal{F}_{t^-}$ et la filtration est dite continue à droite (resp. à gauche) si pour tout $t \geq 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ (resp., pour tout $t > 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$). Elle est dite satisfaire les conditions habituelles si elle est continue à droite et complète (ie. contient tous les négligeables de $\mathcal{F}$).

Dans tout ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré. On commence par des généralités sur les filtrations en Section 4.1 et sur les temps d'arrêts en Section 4.2 puis on présente la notion de martingale en temps continu en Section 4.3. On généralise les principaux résultats rencontrés dans le cadre discret (inégalités de Doob, théorèmes de convergence, théorème d'arrêt, martingales arrêtées) et on régularise les trajectoires des martingales. On termine avec un mot sur le processus de Poisson en Section 4.4.

4.1 Filtration et processus

Définition 4.1 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribus telle que pour* $s \leq t$*, on a* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*.*

Si on considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$, on considère souvent la filtration canonique qu'il engendre : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible à une date donnée : $\mathcal{F}_t^X$ représente l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t.
Une filtration est $\mathbb{P}$**-complète** pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les évènements de mesure nulle, ie. $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \exists A \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset \Omega$ et $\mathbb{P}(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

Remarque 4.1 L'intérêt d'une tribu complète vient du fait suivant : soit $X = Y$ ps où Y est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable, avec $\mathcal{G}$ complète. Alors X est $\mathcal{G}$-mesurable.

Preuve : En effet notons $N = \{X \neq Y\}$, négligeable, donc dans $\mathcal{G}$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$X^{-1}(A) = \big(\{Y \in A\} \cap N^c\big) \cup \big(\{X \in A\} \cap N\big).$$

On a $\big(\{X \in A\} \cap N\big) \in \mathcal{G}$ car $\big(\{X \in A\} \cap N\big) \subset N$ et $\mathcal{G}$ est une tribu complète. Puis $\big(\{Y \in A\} \cap N^c\big) \in \mathcal{G}$ car $\{Y \in A\} \in \mathcal{G}$ et $N^c \in \mathcal{G}$.

À une filtration, on associe $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ et $\mathcal{F}_{t^-} = \bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon}$.
La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est dite **continue à droite** si pour tout $t \geq 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$, **continue à gauche** si pour tout $t > 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$.
Dans la suite, on dira qu'une filtration satisfait les **conditions habituelles** si elle est complète et continue à droite. C'est le cas de la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ donnée par $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : s \leq t)$, cf. Prop. 3.3. Étant donnée une filtration quelconque $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on peut toujours en considérer une satisfaisant les conditions habituelles en ajoutant à $\mathcal{F}_{t^+}$ la classe des $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$. Il s'agit de l'**augmentation habituelle** de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Définition 4.2 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable.*

Cette propriété est plus forte que de demander à X_t d'être $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$. Cependant, si les trajectoires de X sont presque sûrement continues, les deux propriétés deviennent équivalentes.

Définition 4.3 *(Adapté) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

(Progressif) Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

(Tribu progressive) La famille des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ telle que le processus $X_t(\omega) = \mathbf{1}_A(t, \omega)$ est progressif est appelée la tribu progressive. On la note Prog.

Remarque 4.2
- Un processus X est adapté par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}^X$.
- Un processus progressif est adapté et mesurable.
  Il est adapté car $X_t = X \circ i_t$ où $i_t : \omega \in (\Omega, \mathcal{F}_t) \mapsto (t, \omega) \in ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ est mesurable.
  Il est mesurable car un processus est mesurable si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}$.
- Un processus mesurable et adapté admet une version progressive (Chung et Doob, cf. [DM]).

Exemple 4.1 — Soit $0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $h_1, \dots, h_n$ des variables aléatoires telles que h_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable. On pose $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = +\infty$. Les processus $X = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}$ et $Y = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$ sont progressifs.
En effet, montrons le pour X : soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\big\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s(\omega) \in B\big\} &= \bigcup_{i=0}^n \big([t_i, t_{i+1}[\cap [0,t]\big) \times \big\{\omega \in \Omega : h_i(\omega) \in B\big\} \\ &\in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

— Si la filtration est complète, un processus adapté à trajectoires continues à gauche est progressif.
En effet, on approche le processus X par $X_t^{(n)} = X_{k2^{-n}}$ pour $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Le processus $X^{(n)}$ est progressif (exemple précédent) et comme X est continu à gauche, $X_t^{(n)} \longrightarrow X_t$ pour tout $t \geq 0$. Cela garantit que le processus X est progressif (la mesurabilité se conserve à la limite).

Proposition 4.1 *Soit X un processus adapté et à trajectoires continues à droite. Alors X est progressif.*

Démonstration : On considère $X^{(n)}$ donné par $X_t^{(n)} = X_{(k+1)2^{-n}}$ pour $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. D'après l'exemple ci-dessus, le processus $X^{(n)}$ est progressif avec la filtration $(\mathcal{F}_{t+2^{-n}})_{t\geq 0}$ et comme X est continu à droite, pour tout $t \geq 0$, $X_t^{(n)} \to X_t$.

Fixons $t \geq 0$ et considérons $\widetilde{X}_s^{(n)} = X_s^{(n)} \mathbf{1}_{\{s<t-2^{-n}\}} + X_t \mathbf{1}_{\{s=t\}}$. Ce processus est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$. En effet, $X_s^{(n)} \mathbf{1}_{s<t-2^{-n}}$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable d'après ce qui précède. Puis, si on note $Y_s = X_t \mathbf{1}_{\{s=t\}}$, alors

$$Y^{-1}(A) = \{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega \ : \ X_t(\omega)\mathbf{1}_{\{s=t\}} \in A\}.$$

Si $s = t$ alors il faut $\omega \in X_t^{-1}(A)$ et si $s \neq t$, il faut $0 \in A$, ie. on a $\emptyset$ ou Ω. On a donc

$$Y^{-1}(A) = \Big([0,t) \times (\Omega \text{ ou } \emptyset)\Big) \cup \Big(\{t\} \times X_t^{-1}(A)\Big) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Par ailleurs, quand $n \to +\infty$, $\widetilde{X}_s^{(n)} \longrightarrow X_s$ pour $s \leq t$. La restriction de X à $[0,t]$ est donc mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, ie. le processus X est progressif. □

Un processus est progressif s'il est mesurable par rapport à la tribu progressive Prog. L'intérêt d'un processus progressif vient de ce que, estimé en un temps d'arrêt, il est mesurable pour la tribu associé au temps d'arrêt, cf. Proposition 4.4. Avant de voir cela, on revient sur les principales propriétés des temps d'arrêt.

4.2 Filtrations et temps d'arrêt

Dans cette section, on rappelle et développe la notion de temps d'arrêt du cadre discret ($T = \mathbb{N}$) au cadre continue ($T = \mathbb{R}^+$)

Définition 4.4 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On associe à un temps d'arrêt T les tribus suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T &= \big\{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\big\} \\
\mathcal{F}_{T^+} &= \big\{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\big\} \\
\mathcal{F}_{T^-} &= \sigma\big\{A \cap \{T > t\} : t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t\big\}.
\end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

Proposition 4.2
1. *On a toujours $\mathcal{F}_{T^-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T^+}$. Si la filtration est continue à droite $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T^+}$.*
2. *Une variable aléatoire $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est un $(\mathcal{F}_{t^+})_t$ temps d'arrêt si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Cela équivaut encore à dire que $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.*
3. *Si $T = t$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{T^+} = \mathcal{F}_{t^+}$ et $\mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_{t^-}$.*
4. *Pour $A \in \mathcal{F}_\infty$, posons $T^A(\omega) = T(\omega)$ si $\omega \in A$, $+\infty$ sinon. Alors $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si T^A est un temps d'arrêt.*
5. *Le temps d'arrêt T est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*
6. *Si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Pour S, T des temps d'arrêt, $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. De plus $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$, $\{S = T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.*
7. *Si S_n est une suite croissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S^-} = \bigvee_{n_geq1} \mathcal{F}_{S_n^-}$.*
8. *Si S_n est une suite décroissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq0}$ et $\mathcal{F}_{S^+} = \bigcap_{n\geq1} \mathcal{F}_{S_n^+}$.*
9. *Si S_n est une suite décroissante stationnaire de temps d'arrêt (ie. $\forall\omega$, $\exists N(\omega)$, $\forall n \geq N(\omega)$, $S_n(\omega) = S(\omega)$) alors $S = \lim_n S_n$ est aussi un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ et $\mathcal{F}_S = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$ (comparer avec 8)).*

Démonstration :

1) Soit $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_{T^-}$ avec $A \in \mathcal{F}_t$. Alors $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_\infty$ et pour $s \geq 0$

$$(A \cap \{T > t\}) \cap \{T \leq s\} = A \cap (\{t < T \leq s\}) \in \mathcal{F}_t$$

car si $s \leq t$ alors $\{t < T \leq s\} = \emptyset$ tandis que si $s > t$ alors $\{t < T \leq s\} = \{T \leq t\}^c \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ et $A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$. Ainsi $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$. Soit maintenant $A \in \mathcal{F}_T$ alors

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_n (A \cap \{T \leq t - 1/n\}) \in \bigvee_n \mathcal{F}_{t-1/n} \subset \mathcal{F}_t$$

Puis si la filtration est continue à droite et $A \in \mathcal{F}_{T^+}$ alors

$$A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_n A \cap \{T < t + 1/n\} \in \bigcap_n \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t.$$

2) Soit T est un $(\mathcal{F}_{t^+})_t$-temps d'arrêt alors

$$\{T < t\} = \bigcup_n \{T \leq t - 1/n\} \in \bigvee_n \mathcal{F}_{(t-1/n)^+} \subset \mathcal{F}_t$$

car pour chaque on a $n : \mathcal{F}_{(t-1/n)^+} \subset \mathcal{F}_t$. Réciproquement, si $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ alors

$$\{T \leq t\} = \bigcap_n \{T < t + 1/n\} \in \bigcap_n \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_{t^+}.$$

Puis si $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable alors pour tout s, $\{T \wedge t \leq s\} = \{T \leq s\} \cup \{t \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. Mais pour $s < t$, cela garantit donc $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $s < t$, ie. $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_{s^+}$, c'est à dire T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t^+})_{t \geq 0}$. Réciproquement, si T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t^+})_{t \geq 0}$, alors pour tout $s \geq 0$, on a $\{T \wedge t \leq s\} = \{T \leq s\} \cup \{t \leq s\} = \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_{s^+} \subset \mathcal{F}_t$ si $s < t$ et $= \Omega \in \mathcal{F}_{t^+}$ si $t \leq s$ et donc $T \wedge t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

3) Soit $T = t$ alors $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$ on a $A \cap \{t \leq s\} \in \mathcal{F}_s$. Pour $s < t$ on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_s$ et pour $t \leq s$, il faut $A \in \mathcal{F}_s$. En particulier, il faut $A \in \mathcal{F}_t$. La réciproque est claire.
Si $A \in \mathcal{F}_{T^+}$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$ on a $A \cap \{t < s\} \in \mathcal{F}_s$. Pour $s \leq t$ on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_s$ et pour $t < s$, il faut $A \in \mathcal{F}_s$. En particulier, il faut $A \in \cap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t^+}$. Pour la réciproque, observer que quand $t < s$, on a $A \cap \{t < s\} = A \in \mathcal{F}_{t^+} \subset \mathcal{F}_s$.
La tribu $\mathcal{F}_{T^-}$ est constituée des $A \cap \{T > s\}$ pour $A \in \mathcal{F}_s$. Comme $T = t$: si $s \geq t$, cet ensemble est vide ; si $s < t$, cet ensemble est $A \in \mathcal{F}_s$. On a donc $\mathcal{F}_{T^-} = \sigma(\cup_{s<t} \mathcal{F}_s) = \mathcal{F}_{t^-}$.

4) $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si pour tout $t \geq 0 : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Mais $A \cap \{T \leq t\} = \{T^A \leq t\}$ ce qui permet de conclure.

5) On a $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout s car

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subset \mathcal{F}_t.$$

6) Si $S \leq T$ et $A \in \mathcal{F}_S$ alors

$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

D'où $A \in \mathcal{F}_T$. Pour S, T quelconques, on a

$$\begin{array}{rcl}\{S \wedge T \leq t\} & = & \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \\ \{S \vee T \leq t\} & = & \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.\end{array}$$

Comme $S \wedge T \leq T, S$, on a facilement $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. De plus, si $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, alors

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\} \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$. Puis pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{array}{rcl}\{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} & = & (\{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t \\ \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} & = & \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t\end{array}$$

car $S \wedge t$ et $T \wedge t$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables d'après 5) et 6) déjà vus ($S \wedge t \leq t$ donc $S \wedge t$ qui est $\mathcal{F}_S$-mesurable est aussi $\mathcal{F}_t$-mesurable) donc $\{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$. Finalement, cela garantit $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$. L'argument est analogue pour $\{S = T\}$.

7) On a $\{S \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. De plus, on a $\mathcal{F}_{S_n^-} \subset \mathcal{F}_{S^-}$ (car pour $A \in \mathcal{F}_{S_n^-}$, on a $A \cap \{S_n > t\} = (A \cap \{S_n > t\}) \cap \{S > t\} \in \mathcal{F}_{S^-}$). Donc $\bigvee_n \mathcal{F}_{S_n^-} \subset \mathcal{F}_{S^-}$. Puis pour $A \in \mathcal{F}_{S^-}$, on a

$$A \cap \{S > t\} = \bigcup_n (A \cap \{S_n > t\}),$$

ce qui montre que $A \cap \{S > t\} \in \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n^-}$ et $\mathcal{F}_{S^-} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n^-}$.

8) On a $\{S < t\} = \bigcup_n \{S_n < t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^+}$. Comme $\mathcal{F}_{t^+})_{t \geq 0}$ est continue à droite, S est bien un $(\mathcal{F}_{t^+}$-temps d'arrêt. De plus, on voit aisément que $\mathcal{F}_{S^+} \subset \mathcal{F}_{S_n^+}$ pour tout n car pour $A \in \mathcal{F}_{S^+}$

$$A \cap \{S_n < t\} = A \cap (\{S_n < t\} \cap \{S < t\}) = (A \cap (\{S < t\}) \cap \{S_n < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Réciproquement si $A \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n^+}$ alors

$$A \cap \{S < t\} = \bigcup_n (A \cap \{S_n < t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $A \in \mathcal{F}_{S^+}$ et $\mathcal{F}_{S^+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n^+}$.

9) Dans ce cas, on a en plus $\{S \leq t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et pour $A \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}$, $A \cap \{S \leq t\} = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap \{S_n \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$. D'où $A \in \mathcal{F}_S$. Puis si $A \in \mathcal{F}_S$ alors comme $S = S_n$ pour tout $n \geq N$ et on a $A \in \cap_{n \geq N} \mathcal{F}_{S_n}$. mais comme $\mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}_{S_p}$ pour $n \geq p$, on a $\bigcap_{n \geq N} \mathcal{F}_{S_n} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_{S_n}$. □

Proposition 4.3 *Soient T un temps d'arrêt et S une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $S \geq T$. Alors S est aussi un temps d'arrêt.*

En particulier, si T est un temps d'arrêt, $T_n = ([2^nT]+1)2^{-n}$, ie.

$$T_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty)\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \tag{4.1}$$

est une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T.

Démonstration : On écrit $\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ car $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$ (S est $\mathcal{F}_T$-mesurable). La deuxième partie en découle facilement puisque $T_n \geq T$ et T_n est $\mathcal{F}_T$-mesurable. En effet, T_n est $\mathcal{F}_T$-mesurable si pour tout $u \geq 0$, on a $\{T_n \leq u\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, il faut voir que pour tout $t \geq 0$, on a $\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Mais

$$\begin{aligned}
\{T_n \leq u\} &= \left\{T_n \leq \frac{[2^n u]}{2^n}\right\} = \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{T_n = \frac{k+1}{2^n}\right\} \\
&= \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{T \in \left]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right\} = \left\{T \leq \frac{[2^n u]}{2^n}\right\}.
\end{aligned}$$

On a

$$\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} = \left\{T \leq t \wedge \frac{[2^n u]}{2^n}\right\} \in \mathcal{F}_{t \wedge [2^n u]/2^n} \subset \mathcal{F}_t.$$

□

Le résultat suivant sera utile :

Proposition 4.4 *Soit X progressif et T un temps d'arrêt. Alors $X_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Démonstration : On utilise le lemme suivant

Lemme 4.1 *Une variable aléatoire $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable si et seulement si, pour tout $t \geq 0$, $Y\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Démonstration :[Lemme 4.1] En effet si la condition est vérifiée alors pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\} = \{Y\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ donc $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_T$. Puis si Y est $\mathcal{F}_T$-mesurable, alors $\{Y\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} \in A\} = (\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\}) \cup (\{0 \in A\} \cap \{T > t\}) \in \mathcal{F}_t$. □

On vérifie alors la $\mathcal{F}_T$-mesurabilité de $Y = X_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ en montrant que pour tout $t \geq 0$

$$Y\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = X_{T \wedge t} \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$$

est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Mais $X_{T \wedge t}$ est la composition des deux applications mesurables

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}_t) & \to & ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \\ \omega & \mapsto & (T(\omega) \wedge t, \omega) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \to & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ (s, \omega) & \mapsto & X_s(\omega) \end{array} \right.$$

(respectivement car T est un temps d'arrêt et X est progressif). On conclut que $X_{T \wedge t}$ donc aussi $X_{T \wedge t}\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. □

Remarque 4.3 Il est nécessaire de considérer $X_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ plutôt que X_T tant que X_∞ n'est pas défini. Par contre si X_∞ est défini et est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable alors X_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable. En effet, comme $X_T = X_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} + X_T\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}$ avec $X_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ $\mathcal{F}_T$-mesurable par la Prop. 4.4, il reste à voir que $X_T\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}$ est aussi $\mathcal{F}_T$-mesurable, ie. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\{X_T\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \in A\} = \big(\{X_\infty \in A\} \cap \{T = +\infty\}\big) \cup \big(\{0 \in A\} \cap \{T < +\infty\}\big) \in \mathcal{F}_T.$$

Pour cela, on a $\{X_T\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \in A\} \cap \{T \le t\} = \{0 \in A\} \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ quand $t < +\infty$ tandis que pour $t = +\infty$,

$$\{X_T\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}} \in A\} \cap \{T \le +\infty\} = \big(\{X_\infty \in A\} \cap \{T = +\infty\}\big) \cup \big(\{0 \in A\} \cap \{T < +\infty\}\big) \in \mathcal{F}_\infty.$$

4.3 Martingales en temps continu

4.3.1 Définition, exemples

Définition 4.5 (Martingale) *Un processus $(X_t)_{t\ge0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ et tel que pour tout $t \ge 0$, $X_t \in L^1$ est appelé*

— *une martingale si pour $s \le t$: $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$;*

— *une sur-martingale si pour $s \le t$: $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \le X_s$;*

— *une sous-martingale si pour $s \le t$: $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \ge X_s$.*

Une martingale est, en moyenne, constante, tandis qu'une sur-martingale est, en moyenne, décroissante et une sous-martingale, en moyenne, croissante. Ainsi, on peut considérer qu'une sur-martingale est une généralisation aléatoire d'une fonction décroissante tandis qu'une sous-martingale est une généralisation d'une fonction croissante. Dans la suite, on considère souvent des martingales à trajectoires continues à droite, d'après la Prop. 4.1 elles seront progressivement mesurables.

Proposition 4.5 *Soit $(X_t)_{t\ge0}$ une martingale (resp. une sous-martingale) et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante). On suppose que $\varphi(X_t) \in L^1$ pour tout $t \ge 0$. Alors $(\varphi(X_t))_{t\ge0}$ est une sous-martingale.*

Démonstration : En effet, d'après l'inégalité de Jensen (pour l'espérance conditionnelle), on a, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s] \ge \varphi(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]) \ge \varphi(X_s).$$

□

En appliquant cette remarque à la fonction convexe croissante $x \mapsto x^+$, on montre que si $(X_t)_{t\ge0}$ est une sous-martingale alors $(X_t^+)_{t\ge0}$ aussi. En particulier, on a pour $s \in [0,t]$: $\mathbb{E}[X_s^+] \le \mathbb{E}[X_t^+]$. D'autre part, puisque X est une sous-martingale, on a pour $s \in [0,t]$,

$\mathbb{E}[X_s] \geq \mathbb{E}[X_0]$. En combinant ces deux inégalités et en utilisant $|x| = 2x^+ - x$, on trouve la borne

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}[|X_s|] \leq 2\mathbb{E}[X_t^+] - \mathbb{E}[X_0].$$

On peut alors énoncer un résultat utile :

Proposition 4.6 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale (ou en fait sur-martingale, ou martingale en changeant X en $-X$), on a pour tout $t \geq 0$: $\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}\big[|X_s|\big] < +\infty$.*

4.3.2 Inégalités pour martingales en temps continu

Dans cette section, on généralise au cadre continu plusieurs inégalités déjà connues dans le cadre discret ($T = \mathbb{N}$) quand les (sur/sous)-martingales sont à trajectoires continues à droite ($T = \mathbb{R}_+$). Pour cela, l'idée est de considérer un ensemble dénombrable dense D qu'on voit comme limite de parties finies croissantes $\{t_1, \dots, t_n\}$. On applique les résultats discrets aux restrictions à $\{t_1, \dots, t_n\}$. En passant à la limite (convergence monotone avec $\{t_1, \dots, t_n\} \nearrow D$), le résultat s'obtient pour les restrictions à D. Comme D est dense dans $\mathbb{R}_+$, la continuité (à droite) permet de lever la restriction $t \in D$ et d'obtenir le résultat pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Systématiquement, on commence par rappeler les résultats principaux pour des martingales discrètes.

Inégalité maximale. *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sur-martingale discrète. Alors pour tout $x > 0$ et $n \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} |Y_k| \geq x\Big) \leq \frac{\mathbb{E}[|Y_0|] + 2\mathbb{E}[|Y_n|]}{x}.$$

Si on considère maintenant une sur-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ en temps continu, on peut appliquer cette inégalité à la sur-martingale en temps discret $Y_k = X_{t_{k\wedge n}}$, $k \geq 0$, pour toute partie finie $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t\}$ de $[0, t]$. Elle donne

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{k\leq n} |X_{t_k}| \geq x\Big) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]}{x}.$$

Si D est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}_+$ (contenant t), en écrivant D comme une limite croissante de parties finies $\{0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n = t\}$, on obtient avec la monotonie séquentielle des probabilités :

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,t]\cap D} |X_s| \geq x\Big) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]}{x}. \tag{4.2}$$

Si on suppose en plus que les trajectoires de X sont continues à droite alors en prenant D dense contenant t, on a $\sup_{s\in[0,t]\cap D} |X_s| = \sup_{s\in[0,t]} |X_s|$ ce qui montre qu'on peut prendre $\sup_{s\in[0,t]}$ dans (4.2) et on a alors montré :

Proposition 4.7 (Inégalité maximale de Doob) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale dont les trajectoires sont continues à droite. Alors*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,t]}|X_s|\geq x\Big)\leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|]+2\mathbb{E}[|X_t|]}{x}\quad\Big(\leq\frac{3\sup_{s\leq t}\mathbb{E}[|X_s|]}{x}\Big). \tag{4.3}$$

L'**inégalité de Doob** affirme que *si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale en temps discret telle que $Y_n\in L^p$ pour $p>1$ alors pour tout $n\geq 0$ on a, pour q conjugué de p (ie. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) :*

$$\Big\|\sup_{k\leq n}|Y_k|\Big\|_p\leq q\|Y_n\|_p.$$

On en déduit comme précédemment, avec le théorème de convergence monotone, que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale en temps continu bornée dans L^p

$$\Big\|\sup_{s\in[0,t]\cap D}|X_s|\Big\|_p\leq q\|X_t\|_p. \tag{4.4}$$

À nouveau, si X a des trajectoires continues à droite, on peut remplacer $\sup_{s\in[0,t]\cap D}$ par $\sup_{s\in[0,t]}$ dans (4.4) et obtenir :

Proposition 4.8 (Inégalité de Doob) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues à droite avec $X_t\in L^p$ pour tout $t\geq 0$ alors, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,*

$$\Big\|\sup_{s\in[0,t]}|X_s|\Big\|_p\leq q\|X_t\|_p. \tag{4.5}$$

Si f est une fonction définie sur une partie T de $\mathbb{R}_+$ et si $a<b$, le nombre de montées de f le long de $[a,b]$, noté $M^f_{a,b}(T)$, est le supremum des entiers k tels que l'on puisse trouver une suite croissante de T, $s_1<t_1<s_2<t_2\cdots<s_k<t_k$, avec $f(s_i)<a$, $f(t_i)>b$.

[Dessin typique des montées]

Pour une sur-martingale discrète $(Y_n)_{n\geq 0}$, on a :

$$\mathbb{E}\big[M^Y_{a,b}([0,n])\big]\leq\frac{1}{b-a}\mathbb{E}\big[(Y_n-a)^-\big]. \tag{4.6}$$

On en déduit comme précédemment le résultat suivant dans le cadre continu :

Proposition 4.9 (Nombre de montées) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale. Si D est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}_+$, on a :*

$$\mathbb{E}\big[M^X_{a,b}([0,t]\cap D)\big]\leq\frac{1}{b-a}\mathbb{E}\big[(X_t-a)^-\big]. \tag{4.7}$$

Démonstration : Considérer d'abord D fini puis passer à la limite par convergence monotone. Attention pour ce résultat, on ne peut pas prolonger la borne par continuité puisque $M^X_{a,b}([0,t])$ est à valeurs entières et donc non continue. □

4.3.3 Régularisation de trajectoires

Avant de donner des théorèmes de convergence pour les martingales en temps continu dans la Section 4.3.4, on rappelle les résultats du cadre en temps discret. Ils permettent d'abord de donner dans cette section des conditions de régularisation des martingales (existence de versions à trajectoires continues ou càdlàg).

Proposition 4.10 (Convergence des martingales discrètes)

1. *Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale bornée dans L^1 (en particulier si elle est positive) alors $Y_n \to Y_\infty$ ps et $Y_\infty \in L^1$.*
2. *Si $(Y_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ est une sur-martingale indéxée par $-\mathbb{N}$ (ie. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ et $Y_n \geq \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour $n \leq 0$) et telle que $\sup_{n\leq 0}\mathbb{E}[Y_n] < +\infty$ alors la suite $(Y_n)_{n\leq 0}$ est uniformément intégrable et converge ps et dans L^1 quand $n \to -\infty$ vers une variable Z telle que $Z \geq \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{-\infty}]$ (où par définition $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\leq 0}\mathcal{F}_n$).*

En appliquant ces résultats en temps discret à des (sur)martingales en temps continu, on a :

Théorème 4.1 (Limites à droite et à gauche) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale et D un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$.*

1. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $s \in D \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$ admet en tout $t \in \mathbb{R}_+$ une limite à droite $X_{t^+}(\omega)$ finie et en tout point $t \in \mathbb{R}_+^*$, une limite à gauche $X_{t^-}(\omega)$.*
2. *De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $X_{t^+} \in L^1$ et $X_t \geq \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]$ avec égalité si la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite (par exemple, si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale).*
3. *De plus, le processus $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ est alors une sur-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ et une martingale si X en est une.*

Démonstration : 1) C'est une conséquence de l'inégalité sur le nombre de montées et de celle de Doob. En effet, pour $T > 0$ fixé, on a d'abord, $\sup_{s\in[0,T]\cap D}|X_s| < +\infty$ ps car l'inégalité maximale de Doob assure

$$\lim_{x\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,T]\cap D}|X_s| \geq x\Big) = 0.$$

Ensuite, l'inégalité sur le nombre de montées montre que pour tous $a < b$ rationnels, on a ps $M^X_{a,b}([0,T]\cap D) < +\infty$. On a donc aussi ps pour tous $a < b$ rationnels, $M^X_{a,b}([0,T]\cap D) < +\infty$. Finalement, $s \mapsto X_s(\omega)$ est bornée sur $[0,T]\cap D$ et pour tous $a < b$ rationnels, ne fait qu'un nombre fini de montées le long de $[a,b]$. La partie 1) s'en déduit puisque si, par exemple une fonction $f : [0,T]\cap D \to \mathbb{R}$ n'a pas de limite à gauche finie en $t \in]0,T]$, on peut choisir $a < b$ rationnels de sorte que

$$\liminf_{s\in D\to t} f(s) < a < b < \limsup_{s\in D\to t} f(s).$$

2) Pour que $X_{t^+}(\omega)$ soit défini pour tout ω et pas seulement sur l'ensemble de probabilité 1 où la limite existe, on prend $X_{t^+}(\omega) = 0$ sur l'ensemble $\mathcal{F}_{t^+}$-mesurable et de probabilité nulle où la limite en t le long de D n'existe pas. De cette façon, $X_{t^+}(\omega)$ est bien défini pour tout ω et reste $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$-mesurable (car la filtration est complète).
On fixe $t \geq 0$ et on choisit une suite $t_n \in D$ qui décroit vers t. Par construction, on a $X_{t_+} = \lim_{n\to+\infty} X_{t_n}$ ps. En posant $Y_k = X_{t_{-k}}$ pour $k \leq 0$, comme la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ décroit, on a

$$\mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{G}_k] = \mathbb{E}[X_{t_{-k+1}}|\mathcal{F}_{t_{-k}}] \leq X_{t_{-k}} = Y_k.$$

La suite $(Y_k)_{k\in-\mathbb{N}}$ est donc une sur-martingale indéxée par $-\mathbb{N}$ par rapport à la filtration $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{t_{-k}}$, $k \leq 0$. Comme on a

$$\sup_{k\leq 0} \mathbb{E}[|Y_k|] \leq \sup_{s\in[0,t_1]\cap D} \mathbb{E}[|X_s|] < +\infty,$$

le résultat discret (cf. 2) de la Prop. 4.10) assure que la suite X_{t_n} converge dans L^1 nécessairement vers X_{t^+}. En particulier, $X_{t^+} \in L^1$.
Grâce à la convergence L^1, on peut passer à la limite dans l'inégalité $X_t \geq \mathbb{E}[X_{t_n}|\mathcal{F}_t]$ pour obtenir $X_t \geq \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]$.
Toujours grâce à la convergence dans L^1, on a $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$ et donc si la fonction $s \mapsto \mathbb{E}[X_s]$ est continue à droite, on doit avoir $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \mathbb{E}[X_t]$. L'inégalité précédente n'est alors possible que si $X_t = \mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_t]$.

3) Ensuite, on remarque d'abord que X_{t^+} est $\mathcal{F}_{t^+}$-mesurable : en effet, $X_{t^+} = \lim_{s\searrow t} X_s$ et X_s est $\mathcal{F}_u$-mesurable pour tout $u \geq s$ mais alors on en déduit la $\mathcal{F}_u$-mesurabilité de X_{t^+} pour tout $u > t$ et donc aussi sa $\bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_{t^+}$-mesurabilité.
Soit maintenant $s < t$ et $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite de D qui décroit vers s. On peut supposer $s_n \leq t_n$. Alors X_{s_n} converge vers X_{s^+} dans L^1, et donc, si $A \in \mathcal{F}_{s^+}$,

$$\mathbb{E}[X_{s^+}\mathbf{1}_A] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_{s_n}\mathbf{1}_A] \geq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{t^+}\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s^+}]\mathbf{1}_A\big]$$

ce qui entraîne $X_{s_+} \geq \mathbb{E}\big[X_{t^+}|\mathcal{F}_{s^+}\big]$. Enfin, si X est une martingale, on peut remplacer dans le calcul précédent l'inégalité $\geq$ par une égalité $=$. □

Théorème 4.2 (Régularisation) *On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles. Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une sur-martingale et si la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite alors X admet une modification qui est aussi une $(\mathcal{F}_t)$-surmartingale et dont les trajectoires sont continues à droite avec des limites à gauche en tout point (càdlàg).*

Démonstration : On fixe D un ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$. Soit, d'après le Théorème 4.1, N l'ensemble négligeable tel que si $\omega \notin N$, l'application $s \mapsto X_s(\omega)$ admet des limites le long de D à droite en tout $t \geq 0$ et à gauche en tout $t > 0$. On pose

$$Y_t = \begin{cases} X_{t^+}(\omega) & \text{si } \omega \notin N \\ 0 & \text{si } \omega \in N. \end{cases}$$

Les trajectoires de Y sont continues à droite : en effet si $\omega \notin N$ alors pour $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$Y_{t^+} = \lim_{h \searrow 0} Y_{t+h} = \lim_{h \searrow 0} X_{(t+h)^+} = \lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} X_{t+h+\delta} = \lim_{h \searrow 0} X_{t+h} = X_{t^+} = Y_t$$

et

$$Y_{t^-} = \lim_{h \searrow 0} Y_{t-h} = \lim_{h \searrow 0} X_{(t-h)^+} = \lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} X_{t-h+\delta} = \lim_{u \searrow 0} X_{t-u} \text{ existe}$$

car la limite itérée $\lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0}$ revient à prendre $\lim_{u \searrow 0}$ avec $u = h - \delta \searrow 0$ car $\delta \to 0$ avant h. Ou alors

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t, t+\varepsilon[} Y_s(\omega) &\leq \sup_{s \in]t, t+\varepsilon[\cap D} X_s(\omega) \\ \inf_{s \in [t, t+\varepsilon[} Y_s(\omega) &\geq \inf_{s \in]t, t+\varepsilon[\cap D} X_s(\omega) \end{aligned}$$

et avec des limites à gauche

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{s \in]t, t+\varepsilon[\cap D} X_s(\omega) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{s \in]t, t+\varepsilon[\cap D} X_s(\omega) \right) = X_{t^+}(\omega) = Y_t(\omega).$$

De la même façon, on montre que les trajectoires de Y ont des limites à gauche.

Enfin, comme $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ (conditions habituelles vérifiées par la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$), on a d'après le 2) du théorème précédent

$$X_t = \mathbb{E}\big[X_{t^+} | \mathcal{F}_t\big] = \mathbb{E}\big[X_{t^+} | \mathcal{F}_{t^+}\big] = X_{t^+} = Y_t \quad \text{ ps}$$

puisque X_{t^+} est $\mathcal{F}_{t^+}$-mesurable. On voit ainsi que Y est une modification de X. Puisque la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète, il est clair que Y_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et il est immédiat aussi que Y est une $(\mathcal{F}_t)$-sur-martingale (cf. 3) dans le Th. 4.1). □

4.3.4 Théorèmes de convergence

Dans cette section, la notion d'uniforme intégrabilité est importante. On renvoie à un cours de probabilités de base pour la définition de cette notion, cf. par exemple [JCB-L3].

Théorème 4.3 (Convergence ps) *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sur-martingale continue à droite et bornée dans L^1. Alors il existe une variable aléatoire $X_{\infty^-} \in L^1$ telle que*

$$\lim_{t \to +\infty} X_t = X_{\infty^-} \quad \textit{ps.}$$

Remarque 4.4 — Un énoncé adapté donne la convergence des sous-martingales continues à droite.

— Une sur-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^1 si et seulement si $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[X_t^-] < +\infty$. En effet, comme $\mathbb{E}[X_t] \leq \mathbb{E}[X_0]$, on a $\mathbb{E}[X_t^+] \leq \mathbb{E}[X_t^-] + \mathbb{E}[X_0]$. Il vient
$$\mathbb{E}[X_t^-] \leq \mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[X_t^+] + \mathbb{E}[X_t^-] \leq 2\mathbb{E}[X_t^-] + \mathbb{E}[X_0]$$
et donc
$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[|X_t|] \leq \mathbb{E}[X_0] + 2\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[X_t^-].$$
L'autre sens est évident puisque $X_t^- \leq |X_t|$.

— En particulier, une sur-martingale positive est bornée dans L^1 et d'après le Théorème 4.3 ci-dessus elle converge ps.

Démonstration : Soit D un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}_+$. On déduit de la Proposition 4.9 (inégalité du nombre de montées) que pour tous $a < b$, on a
$$\mathbb{E}\big[M_{a,b}^X(D)\big] = \lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\big[M_{a,b}^X([0,t]\cap D)\big] \leq \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathbb{E}[(X_t-a)^-]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\big[(X_t-a)^-\big]}{b-a} < +\infty.$$
On a donc $M_{a,b}^X(D) < +\infty$ presque sûrement, pour tout rationnels $a < b$ et aussi $M_{a,b}^X(D) < +\infty$ pour tout rationnels $a < b$ presque sûrement. En raisonnant comme dans le Théorème 4.1, on en déduit que $X_{\infty^-} := \lim_{t\in D\to+\infty} X_t$ existe presque sûrement (sinon, il existerait $a < b$ rationnels tels que $\liminf_{t\in D\to+\infty} X_t < a < b < \limsup_{t\in D\to+\infty} X_t$, ce qui exige un nombre infini de montées de a vers b le long de D). De plus, le lemme de Fatou permet de voir que cette limite est dans L^1 : d'abord, on a
$$\mathbb{E}\big[|X_{\infty^-}|\big] = \mathbb{E}\Big[\lim_{s\to+\infty}|X_s|\Big] = \mathbb{E}\Big[\liminf_{s\to+\infty}|X_s|\Big] \leq \liminf_{s\to+\infty}\mathbb{E}[|X_s|] \leq \sup_{s\geq 0}\mathbb{E}[|X_s|] < +\infty.$$
Pour finir, la continuité à droite des trajectoires de X permet de lever la restriction $t \in D$ dans la limite précédente. □

Définition 4.6 (Martingale fermée) *Une sur-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite fermée par une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t \geq \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$.*
Une martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est dite fermée (comme martingale) par une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$.

Attention : une martingale peut être fermée en tant que sur-martingale mais pas en tant que martingale : considérer par exemple une martingale positive (non nulle), elle est fermée par 0 en tant que sur-martingale pourtant elle n'est pas fermée en tant que martingale puisque non nulle.

Dans le cadre discret une martingale $(Y_n)_{n\geq 0}$ est fermée (ie. il existe Y_∞ tel que $Y_n = \mathbb{E}[Y_\infty|\mathcal{F}_n]$) si et seulement si elle est uniformément intégrable ou si et seulement si Y_n converge ps et dans L^1. On a l'analogue dans le cadre continu :

Proposition 4.11 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(1) X est fermée (par X_∞) ;

(2) la famille $(X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable ;

(3) X_t converge ps et dans L^1 vers X_{∞^-}.

De plus $X_{\infty^-} = X_\infty$ si $\mathcal{F} = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t := \sigma\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\Big)$.

Démonstration : L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est facile puisque si $Z \in L^1$ alors la famille de variables aléatoires $\big\{\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}] : \mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}\big\}$ est uniformément intégrable.

Si (2) est vrai, le Théorème 4.3 (convergence ps) entraîne que X_t converge ps vers $X_{\infty^-} \in L^1$ donc aussi dans L^1 par uniforme intégrabilité (Théorème de Vitali), ce qui donne (3).

Enfin, si (3) est vérifié, on peut passer à la limite $t \to +\infty$ dans L^1 dans l'égalité $X_s = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$ et on trouve $X_s = \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_s]$, ie. X est fermée, c'est à dire (1).

Pour la dernière partie, en notant $Z = X_\infty - X_{\infty^-}$, on déduit de $X_t = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t]$ que

$$\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0 \quad \text{pour tout} \quad A \in \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t.$$

Notons $\mathcal{M} = \big\{A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0\big\}$. Il s'agit d'une classe monotone et $\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ est stable par intersection finie (π-système). D'après le théorème des classes monotones, $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$ est inclus dans $\mathcal{M}$. On a donc $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. Mais, comme Z est $\mathcal{F}$-mesurable, on a donc $Z = 0$ presque sûrement, ie. $X_\infty = X_{\infty^-}$. □

Pour une sur-martingale fermée, on a la convergence presque sûre :

Proposition 4.12 *Une sur-martingale continue à droite $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est fermée (par X_∞) si et seulement si X_t converge ps vers X_{∞^-}.*

Démonstration : Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale continue à droite et fermée par X_∞. Par un argument de convexité (inégalité de Jensen appliquée à la sous-martingale $-X$ et à x^+) donne $\mathbb{E}[(X_t)^-] \leq \mathbb{E}[(X_\infty)^-]$. Le Théorème 4.3 assure alors que X_t converge presque sûrement vers une limite X_{∞^-} (la réciproque va garantir que $X_{\infty^-} = X_\infty$ quand $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$).

Réciproquement, si X_t converge presque sûrement vers X_{∞^-}, pour $s \leq t$ on a

$$\begin{aligned} X_s - \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_s] &\geq \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t]\mathcal{F}_s\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X_t - \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s\big]. \end{aligned}$$

En passant à la limite $t \to +\infty$ par le lemme de Fatou, on a

$$X_s - \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to+\infty} \big(X_t - \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t]\big)|\mathcal{F}_s\right]. \tag{4.8}$$

Mais $\liminf_{t\to+\infty} X_t = \lim_{t\to+\infty} X_t = X_{\infty^-}$ ps et comme $\big(\mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t]\big)_{t\geq 0}$ est une martingale fermée donc convergente ps, on a aussi, d'après la Prop 4.11, $\limsup_{t\to+\infty} \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_t] = X_{\infty^-}$ (ici il est immédiat que $\mathcal{F}_{\infty^-} = \sigma\big(\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\big)$). Finalement, la minoration dans (4.8) est nulle et elle donne $X_s \geq \mathbb{E}[X_{\infty^-}|\mathcal{F}_s]$: la sur-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ est fermée. □

4.3.5 Théorème d'arrêt

Le théorème d'arrêt pour une sur-martingale discrète $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par rapport à une filtration $(\mathcal{G}_k)_{k\geq 0}$, fermée par Y_∞, énonce que si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ on a $Y_S, Y_T \in L^1$ et $Y_S \geq \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{G}_S]$ (avec la convention $Y_T = Y_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$). Le résultat s'applique encore à une sur-martingale quelconque si S, T sont (déterministiquement) bornés. L'analogue continu de ce théorème est un résultat essentiel pour la suite.

Rappelons qu'une martingale X à trajectoires continues à droite est progressivement mesurable, cf. Prop. 4.1. En particulier, la Prop. 4.4 s'appliquera à $X_T\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ et la Remarque 4.3 à X_T si elle est fermée (qui sont $\mathcal{F}_T$-mesurables).

Théorème 4.4 (Arrêt de Doob)

1. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale continue à droite et fermée par X_∞, variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. Soient S et T deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Alors X_S et X_T sont dans L^1 et*
$$X_S \geq \mathbb{E}\big[X_T|\mathcal{F}_S\big]$$
avec la convention $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$.
2. *Soit X une martingale continue à droite fermée par X_∞, variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable. Alors, si S et T sont deux temps d'arrêt avec $S \leq T$ on a*
$$X_S = \mathbb{E}\big[X_T|\mathcal{F}_S\big]$$
avec la même convention que ci-dessus. En particulier, $X_S = \mathbb{E}\big[X_\infty|\mathcal{F}_S\big]$.

Démonstration : 1) Pour tout $n \geq 1$, posons $D_n = \{k2^{-n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$ et comme en (4.1) o pose $T_n = ([2^nT] + 1)2^{-n}$, soit

$$\begin{aligned} T_n &= \inf\big\{t \in D_n : t > T\big\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n}\mathbf{1}_{\{k2^{-n}<T\leq(k+1)2^{-n}\}} + (+\infty)\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}. \end{aligned}$$

D'après la Prop. 4.3, les T_n forment une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T. Considérons pour n fixé les deux variables aléatoires T_n et T_{n+1}. Ce sont deux temps d'arrêt pour la filtration discrète $(\mathcal{F}_t)_{t\in D_{n+1}}$ car

$$\big\{k2^{-n-1} < T \le (k+1)2^{-n-1}\big\} = \big\{T \le k2^{-n-1}\big\}^c \cap \big\{T \le (k+1)2^{-n-1}\big\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n-1}}.$$

Puisque $T_{n+1} \le T_n$, le théorème d'arrêt (discret) appliqué à la sur-martingale discrète $(X_t)_{t\in D_{n+1}}$ (qui est fermée par X_∞) pour la filtration discrète $(\mathcal{F}_t)_{t\in D_{n+1}}$ entraîne que

$$X_{T_{n+1}} \ge \mathbb{E}[X_{T_n}|\mathcal{F}_{T_{n+1}}].$$

Notons, pour $k \le 0$, $Y_k = X_{T_{-k}}$. On a alors

$$Y_{k-1} = X_{T_{-k+1}} \ge \mathbb{E}[X_{T_{-k}}|\mathcal{F}_{T_{-k+1}}] = \mathbb{E}\big[Y_k|\mathcal{F}_{T_{-k}}\big].$$

La suite $(Y_k)_{k\in-\mathbb{N}}$ est donc une sur-martingale indexée par $-\mathbb{N}$ pour la filtration $(\mathcal{F}_{T_{-k}})_{k\in-\mathbb{N}}$. De plus, on a aussi $\sup_{k\le 0}\mathbb{E}[Y_k] = \sup_{n\ge 0}\mathbb{E}[X_{T_n}] \le \mathbb{E}[X_0]$ (on utilise ici encore le théorème d'arrêt discret).

D'après le résultat discret de convergence de sur-martingale (Prop. 4.10), on conclut que X_{T_n} converge ps et dans L^1. Comme $T_n \searrow T$, par continuité à droite, la limite presque sûre est nécessairement X_T, ce qui donne en particulier $X_T \in L^1$ car il y a aussi convergence dans L^1.

Au temps d'arrêt S, on associe de même la suite $S_n \searrow S$ vérifiant aussi (quitte à réindéxer S_n) $S_n \le T_n$, et X_{S_n} converge vers X_S ps et dans L^1. Puisque $S_n \le T_n$ le théorème d'arrêt discret donne $X_{S_n} \ge \mathbb{E}[X_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}]$ ainsi, pour $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$,

$$\mathbb{E}\big[X_{S_n}\mathbf{1}_A\big] \ge \mathbb{E}\big[X_{T_n}\mathbf{1}_A\big].$$

En passant à la limite L^1 quand $n \to +\infty$, il vient

$$\mathbb{E}\big[X_S\mathbf{1}_A\big] \ge \mathbb{E}\big[X_T\mathbf{1}_A\big]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_S$. Comme d'après la Prop. 4.4 et la Remarque 4.3, X_S est $\mathcal{F}_S$-mesurable, cette inégalité assure alors que $X_S \ge \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$, ce qui conclut le **1)**.

2) Il suffit d'appliquer la partie 1) à X et à $-X$. □

Corollaire 4.1 *Soit X une sur-martingale (resp. une martingale) continue à droite et soient $S \le T$ deux temps d'arrêt (déterministiquement) bornés. Alors*

$$X_S \ge \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S] \quad (\textit{resp. } X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]).$$

Démonstration : Soit $a \ge 0$ tel que $T \le a$. On applique le théorème précédent (Th. 4.4) à la martingale $X^a = (X_{t\wedge a})_{t\ge 0}$ qui est fermée par X_a. Puis on remarque que $X^a_T = X_T$ et $X^a_S = X_S$. □

Remarque 4.5 Le théorème d'arrêt (Th. 4.4) ne s'applique que pour des (sur)martingales uniformément intégrables (fermées) ou pour des temps d'arrêt (déterministiquement) bornés. Par exemple si B est un mouvement brownien, c'est bien une martingale (mais non uniformément intégrable sinon le Théorème 4.3 (de convergence ps) exigerait la convergence ps $B_t \to B_\infty$ ce qui est faux). Si pour $a > 0$, on pose $T_a = \inf\big(t \geq 0 : B_t = a\big)$ alors on a bien un temps d'arrêt mais il est non (déterministiquement) borné, cf. (3.7) dans la Remarque 3.7. Le théorème d'arrêt (Th. 4.4) ne s'applique effectivement pas dans ce cas puisque $\mathbb{E}[B_0] = 0 \neq \mathbb{E}[B_{T_a}] = a$ malgré $0 \leq T_a$.

Définition 4.7 (Martingale arrêtée) *Étant donné un temps d'arrêt T, on définit le processus arrêté $X^T = (X_t^T)_{t\geq 0}$ par $X_t^T = X_{t\wedge T}$, c'est le processus qui vaut X_t tant que $t \leq T$ puis qu'on arrête à sa valeur en T, X_T, pour les dates ultérieures à T.*

Corollaire 4.2 *Soit X une martingale continue à droite uniformément intégrable et soit T un temps d'arrêt. Alors le processus $(X_t^T)_{t\geq 0}$ est aussi une martingale uniformément intégrable, et*

$$X_t^T = \mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_t] \tag{4.9}$$

avec la convention $X_T = X_{\infty^-}$ sur $\{T = +\infty\}$.

Démonstration : Il suffit d'établir (4.9) : on aura alors une martingale fermée donc uniformément intégrable. Rappelons que $X_T \in L^1$ d'après le Théorème 4.4 (Arrêt). D'après ce théorème avec $S = t \wedge T \leq T$, on a aussi

$$X_t^T = X_S = \mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}].$$

Il reste à voir que $\mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_t]$.
Puisque $X_T \mathbf{1}_{\{T<+\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable (cf. Prop. 4.4), le Lemme 4.1 assure que $X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et aussi $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc $\mathcal{F}_{t\wedge T}$-mesurable. Il en découle que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}] = X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}} = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T\leq t\}} \,|\mathcal{F}_t]. \tag{4.10}$$

Pour compléter la preuve, il reste à voir que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_t]. \tag{4.11}$$

Or si $A \in \mathcal{F}_t$, on a

- $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ car $A, \{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$;
- puis $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$ car $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s$ si $s \leq t$ et $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$ car $A, \{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ et $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Finalement, $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t\wedge T}$ et donc pour tout $A \in \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T>t\}} \mathbb{E}[X_T \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}]\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}]\big]
\end{aligned}$$

car $\{T > t\} \in \mathcal{F}_T$ ($\{T > t\} = \{T \le t\}^c$ et $\{T \le t\} \cap \{T \le s\} = \{T \le t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t\wedge s} \subset \mathcal{F}_s$). Par ailleurs

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T | \mathcal{F}_t]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T | \mathcal{F}_t]\big].$$

On a donc

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T>t\}} X_T \,|\mathcal{F}_t]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}]\big] \tag{4.12}$$

avec $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}]$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
Mais rappelons que $Y = \mathbb{E}[Z\,|\mathcal{G}]$ si et seulement si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y]$ pour tout $A \in \mathcal{G}$. Finalement (4.12) assure

$$\mathbb{E}\big[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_{t\wedge T}\big] = \mathbb{E}\big[X_T \mathbf{1}_{\{T>t\}} \,|\mathcal{F}_t\big],$$

ie. (4.11) est obtenue, ce qui compte tenu de (4.10), termine la preuve du Corollaire 4.2. □

Remarque 4.6 Si on suppose seulement que X est une martingale continue à droite, alors on peut appliquer le corollaire ci-dessus à la martingale uniformément intégrable $X^{(a)} = (X_{t\wedge a})_{t\ge 0}$. On trouve que pour tout temps d'arrêt T, $X^a = (X_{t\wedge T\wedge a})_{t\ge 0}$ est une martingale. Comme on peut prendre a aussi grand qu'on le désire, cela signifie que $(X_{t\wedge T})_{t\ge 0}$ est une martingale : avec $a \ge t \ge s$, la propriété de martingale pour $(X_{t\wedge T\wedge a})_{t\ge 0}$, $\mathbb{E}[X_{t\wedge T\wedge a}|\mathcal{F}_s] = X_{s\wedge T\wedge a}$, s'écrit $\mathbb{E}[X_{t\wedge T}|\mathcal{F}_s] = X_{s\wedge T}$ ie. $(X_{t\wedge T})_{t\ge 0}$ est bien une martingale.

On a donc

Corollaire 4.3 (Martingale arrêtée) *Si X est une martingale et T un temps d'arrêt, X^T définie bien une martingale appelée* **martingale arrêtée**. *Elle est uniformément intégrable si X l'est ou si T est (déterministiquement) borné.*

4.4 Processus de Poisson

Si le mouvement brownien est le processus à trajectoires continues typique, le processus à saut typique est le processus de Poisson qu'on décrit (très) sommairement dans cette section. Ce type de processus est utilisé par exemple pour modéliser les files d'attente comme les arrivées des appels téléphoniques à un central.

Définition 4.8 (Processus de Poisson) *Soit $\lambda > 0$ et $(S_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $T_n = S_1 + \cdots + S_n$. On définit alors le processus de comptage $N = (N_t)_{t\ge 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par*

$$N_t = \sum_{n\ge 1} \mathbf{1}_{\{T_n \le t\}}.$$

Ce processus s'appelle le processus de Poisson d'intensité λ.

Définition 4.9 *On définit $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle complétée du processus de Poisson.*

Remarque 4.7 Le processus se réécrit aussi sous la forme $N_t = \sup\big(n \geq 0 : T_n \leq t\big)$. Réciproquement, on remarque que $T_n = \inf\big(t \geq 0 : N_t = n\big)$ est un $(\mathcal{F}_t^N)$-temps d'arrêt.

Comme pour $t > s$, on a $N_t - N_s = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{s<T_n\leq t\}}$, N est un processus à accroisssements indépendants et stationnaires (PAIS) et à trajectoires càdlàg. On montre qu'il vérifie alors la **propriété de Markov forte** : soit T un $(\mathcal{F}_t^N)$-temps d'arrêt fini presque sûrement ; on note N' le processus défini pour $s \geq 0$ par $N'_s = N_{T+s} - N_T$. Alors le processus N' est indépendant de $\mathcal{F}_T^N$ et a même loi que N.

Définition 4.10 (équivalente du processus de Poisson) *Un processus de Poisson $N = (N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ est un processus de comptage à trajectoires continues à droite tel que*

- *$N(0) = 0$;*
- *N est un processus à accroissements indépendants et stationnaires ;*
- *pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.*

Démonstration : Fastidieux. . . , cf. [BC]. □

Théorème 4.5 *Soit N un processus de Poisson d'intensité λ. Alors les processus suivants sont des martingales :*

1. *le processus de Poisson compensé : $\widetilde{N} = (N_t - \lambda t, t \geq 0)$;*
2. $\big((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t\big)_{t\geq 0}$.

Remarque 4.8

- On peut voir le processus de Poisson comme une mesure aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: la mesure de l'intervalle $]s, t]$ est $N(]s, t]) = N_t - N_s$.
- Le mouvement brownien et le processus de Poisson sont deux représentant d'une classe plus vaste de **processus** dit **de Lévy** (processus càdlàg à accroissements indépendants et stationnaires).

Chapitre 5

Semimartingales continues

Les semimartingales continues forment la classe générale de processus à trajectoires continues pour laquelle on peut développer une théorie de l'intégration stochastique qui sera l'objet du chapitre suivant. Par définition, une semimartingale est la somme d'une martingale (locale) et d'un processus à variation finie. Dans ce chapitre nous étudions séparément ces deux classes de processus. En particulier, nous introduisons la notion de variation quadratique d'une martingale qui jouera un rôle fondamental pour l'intégration stochastique.

Dans ce chapitre, on considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. On considère d'abord des processus à variation finie en Section 5.1 puis des martingales locales en Section 5.2 dont on étudie la variation quadratique en Section 5.3. On résume les résultats obtenus pour les semimartingales en Section 5.4.

5.1 Processus à variation bornée

5.1.1 Fonctions à variation finie

Soit $T > 0$ fixé. On rappelle qu'il y a une bijection entre les fonctions croissantes continues àe droite $g : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ et les mesures ν positives finies sur $[0, T]$. Elle est donnée par $g(t) = \nu([0, t])$ où $\nu(]s, t]) = g(t) - g(s)$. La donnée de ν sur les intervalles $]s, t]$ déterminent uniquement la mesure ν sur $\mathcal{B}([0, T])$ (par un argument de classe monotone). Si g est en plus supposée continue alors ν est sans atome (ie. $\nu(\{t\}) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$).

Exemples : si $g(x) = x$ alors ν est la mesure de Lebesgue λ ; si $g(x) = \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(x)$ alors ν est la mesure de Dirac δ_a.

Définition 5.1 (Mesure signée) *Une mesure finie est dite signée si elle est différence de deux mesures positives finies.*

L'écriture d'une mesure μ signée sous la forme d'une différence de deux mesures positives finies n'est pas unique, cependant il existe une seule décomposition canonique :

Proposition 5.1 (Décomposition canonique d'une mesure signée) *Il existe une seule décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ minimale dans le sens où μ_+ et μ_- sont deux mesures positives finies portées par des boréliens disjoints. Il s'agit de la décomposition canonique de μ.*

Dans la suite, pour une fonction h à valeurs réelles, on note $h^+ = h \vee 0$ et $h^- = h \wedge 0$.

Démonstration : Pour obtenir l'existence d'une telle décomposition, on considère une décomposition quelconque $\mu = \mu_1 - \mu_2$ de μ, on pose $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Comme $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_2 \ll \nu$, on écrit par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\mu_1(dt) = h_1(t)\nu(dt), \quad \mu_2(dt) = h_2(t)\nu(dt).$$

Avec $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$ on a

$$\mu(dt) = h(t)\nu(dt) = h(t)^+\nu(dt) - h(t)^-\nu(dt)$$

ce qui donne la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_+(dt) = h(t)^+\nu(dt)$, $\mu_-(dt) = h(t)^-\nu(dt)$. Notons que les mesures μ_+ et μ_- sont bien à supports disjoints puisqu'elles sont portées respectivement par $D_+ = \{t \in [0,T] : h(t) > 0\}$ et $D_- = \{t \in [0,T] : h(t) < 0\}$. L'unicité de la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ vient du fait que l'on a nécessairement

$$\mu_+(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, C \text{ borélien}\}.$$

En effet $\mu(C) \leq \mu_+(C) \leq \mu_+(A)$ quand $C \subset A$ et

$$\mu_+(A) = \mu_+(A \cap D_+) = \mu(A \cap D_+) \leq \sup\{\mu(C) : C \subset A, C \text{ borélien}\}.$$

□

On note $|\mu|$ la mesure positive $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. Il s'agit de la **variation totale** de μ. Remarquons que la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à $|\mu|$ est

$$\frac{d\mu}{d|\mu|} = \mathbf{1}_{D_+} - \mathbf{1}_{D_-}$$

où $D_+ \cup D_-$ est une partition de l'espace.

Définition 5.2 *Soit $T > 0$. Une fonction continue $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ est dite à variation finie s'il existe une mesure signée (ie. différence de deux mesures positives finies) μ telle que $F(t) = \mu([0,t])$ pour tout $t \in [0,T]$.*

La mesure μ est alors déterminée de façon unique : l'expression $\mu(]s,t]) = F(t) - F(s)$ la détermine uniquement sur la famille des intervalles $]s,t]$ puis, par un argument de classe monotone, sur $\mathcal{B}([0,T])$. De plus, F étant continue, μ est sans atome.

Proposition 5.2 *Une fonction F est à variation finie si et seulement si F est différence de deux fonctions croissantes continues nulles en* 0.

Démonstration : Si F est à variation finie, $F(t) = \mu([0,t])$ et avec la décomposition canonique de μ de la Proposition 5.1, F est différence de deux fonctions croissantes continues et nulles en 0 : $F(t) = \mu_+([0,t]) - \mu_-([0,t])$ (si μ_+ et μ_- ont des atomes, ils doivent nécessairement coïncider pour s'annuler (μ n'en ayant pas). Mais comme μ_+ et μ_- sont censés avoir des supports disjoints, c'est que de tels atomes n'existent pas : μ_+ et μ_- sont bien sans atome. Réciproquement, si $F = F_1 - F_2$ avec F_1, F_2 fonctions croissantes continues et nulles en 0 alors on associe μ_1 et μ_2 des mesures positives finies à F_1, F_2 et F s'écrit alors $F(t) = \mu([0,t])$ pour la mesure signée $\mu = \mu_1 - \mu_2$. □

Dans la suite, on note μ la mesure associée à F et $\mu_+ - \mu_-$ la décomposition canonique de μ. La fonction définie par $\mu^+([0,t]) + \mu^-([0,t])$ s'appelle la **variation totale** de F. D'habitude, les fonctions à variation finie sont plutôt définies par la propriété suivante :

Proposition 5.3 (Variation finie – ou bornée) *Pour tout $t \in [0,T]$, on a*

$$|\mu|([0,t]) = \sup_{\{t_i\}_{i=1,\dots,p}} \left\{ \sum_{i=1}^{p} |F(t_i) - F(t_{i-1})| \right\}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ de $[0,t]$.

Démonstration : Il suffit clairement de traiter le cas $t = T$. L'inégalité $\geq$ s'obtient facilement puisque

$$|F(t_i) - F(t_{i-1})| = |\mu(]t_{i-1}, t_i])| \leq |\mu|(]t_{i-1}, t_i])$$

et donc $\sum_{i=1}^p |F(t_i) - F(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^p |\mu|(]t_{i-1}, t_i]) = |\mu|(]0,T]) = |\mu|([0,T])$ par additivité. Pour l'autre inégalité, on montre le résultat plus fort suivant : pour toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n$ de subdivisions emboîtées de $[0,T]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} |F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)| = |\mu|([0,T]).$$

Pour simplifier, on considère les subdivisions dyadiques $t_i^n = i2^{-n}T$, $0 \leq i \leq 2^n$, de $[0,T]$. On utilise un argument de martingales en introduisant l'espace de probabilité $\Omega = [0,T]$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}([0,T])$ et de la probabilité $\mathbb{P}(ds) = (|\mu|([0,T])^{-1})|\mu|(ds)$. Sur cet espace, on considère la filtration discrète $(\mathcal{B}_n)_{n\geq n}$ où $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par les intervalles $](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$, avec $1 \leq i \leq 2^n$. On pose alors

$$X(s) = \frac{d\mu}{d|\mu|}(s) = \mathbf{1}_{D_+}(s) - \mathbf{1}_{D_-}(s)$$

où $D_+ \cup D_-$ est une partition de l'espace et on considère pour chaque $n \geq 0$

$$X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_n].$$

Il s'agit d'une $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$-martingale. Comme X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable, X_n est constante sur chaque intervalle $](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$. D'après les propriétés de l'espérance conditionnelle, sa valeur α_i sur $](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$ vérifie

$$\begin{aligned}\alpha_i \frac{|\mu|(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|([0,T])} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_n]\mathbf{1}_{](i-1)2^{-n}T,i2^{-n}T]}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d\mu}{d|\mu|}\mathbf{1}_{](i-1)2^{-n}T,i2^{-n}T]}\right] \\ &= \int_{](i-1)2^{-n}T,i2^{-n}T]} \frac{d\mu}{d|\mu|}\frac{d|\mu|}{|\mu|([0,T])} = \frac{\mu(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|([0,T)]}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\alpha_i = \frac{\mu(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])} = \frac{F(i2^{-n}T) - F((i-1)2^{-n}T)}{|\mu|(](i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}.$$

Puis comme, par définition, la martingale discrète $(X_n)_{n\geq 0}$ est fermée et comme X est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,T]) = \bigvee_{n\geq 0}\mathcal{B}_n$ cette martingale converge ps et dans L^1 vers X. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|X|] = 1,$$

où on utilise $|X(s)| = 1$, μ-pp. Le résultat suit facilement puisque

$$\mathbb{E}[|X_n|] = (|\mu|([0,T])^{-1})\sum_{i=1}^{2^n}|F(i2^{-n}T) - F((i-1)2^{-n}T)|.$$

□

5.1.2 Intégrale de Stieltjes

Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_{[0,T]}|f(s)||\mu|(ds) < +\infty$. On note

$$\int_0^t f(s)\ dF(s) = \int_{[0,t]} f(s)\ \mu(ds), \qquad \int_0^t f(s)\ |dF(s)| = \int_{[0,t]} f(s)\ |\mu|(ds).$$

On vérifie facilement l'inégalité

$$\left|\int_0^t f(s)\ dF(s)\right| \leq \int_0^t |f(s)|\ |dF(s)|.$$

Remarquons de plus que la fonction $t \mapsto \int_0^t f(s)\ dF(s)$ est aussi à variation finie. La mesure associée est alors simplement $\mu'(ds) = f(s)\mu(ds)$ et sa décomposition canonique est

$$\left(\int_0^t f^+(s)\ dF^+(s) + \int_0^t f^-(s)\ dF^-(s)\right) - \left(\int_0^t f^-(s)\ dF^+(s) + \int_0^t f^+(s)\ dF^-(s)\right).$$

On a aussi une écriture en terme d'intégrales par rapport à des mesures positives

$$\int_0^t f(s)\ dF(s) = \int_0^t f(s)\ dF^+(s) - \int_0^t f(s)\ dF^-(s).$$

On a encore l'associativité de l'intégrale : si F est une fonction à variation bornée et si h, g sont des fonctions mesurables bornées alors en notant $\widetilde{F}(t) = \int_0^t h(s)\ dF(s)$, on a

$$\int_0^t g(s)d\widetilde{F}(s) = \int_0^t g(s)h(s)\ dF(s).$$

Le résultat suivant généralise les sommes de Riemann à l'intégrale de Stieltjes et donne donc un moyen d'approcher les intégrales de Stieltjes par des sommes.

Proposition 5.4 *Si $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = T$ est une suite de subdivisions (emboîtées) de $[0,T]$ de pas tendant vers 0 on a*

$$\int_0^T f(s)dF(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)(F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)).$$

Démonstration : Soit f_n la fonction constante par morceaux définie par $f_n(s) = f(t_{i-1}^n)$ si $s \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n)(F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)) = \int_{[0,T]} f_n(s)\mu(ds)$$

et le résultat suit par convergence dominée (f continue sur $[0,T]$ est bornée). □

5.1.3 Extension de l'intégration de Stieltjes à $\mathbb{R}_+$

Définition 5.3 (Variation finie sur $\mathbb{R}_+$) *Une fonction continue $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite à variation finie sur $\mathbb{R}_+$ si, pour tout $T > 0$, la restriction de F à $[0,T]$ est à variation finie.*

Il est alors facile d'étendre les définitions précédentes des intégrales à $\mathbb{R}_+$ en supposant f dF-intégrable. En particulier, on peut définir $\int_0^{+\infty} f(s)\ dF(s)$ pour toute fonction f telle que $\int_0^{+\infty} |f(s)|\ |dF(s)| = \sup_{T>0} \int_0^T |f(s)|\ |dF(s)| < +\infty$.

5.1.4 Processus à variation finie

On rappelle qu'on considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.

Définition 5.4 (Processus à variation finie et processus croissant)

— *Un processus à variation finie $A = (A_t)_{\geq 0}$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la Définition 5.2.*
— *Le processus A est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de A sont croissantes.*

Remarque 5.1 — En particulier, d'après la Définition 5.2 d'une fonction à variation finie, on a $A_0 = 0$ et les trajectoires de A sont continues.
— Le mouvement brownien n'est pas à variation bornée, cf. Prop. 3.8 : on ne pourra donc pas utiliser cette section pour construire l'intégrale contre un mouvement brownien.

Proposition 5.5 *Soit A un processus à variation finie et H un processus progressif tel que*

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \quad \int_0^t |H_s(\omega)|\,|dA_s(\omega)| < +\infty.$$

Alors le processus $H \cdot A$ défini par

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s(\omega)\,dA_s(\omega)$$

est aussi un processus à variation finie.

Remarque 5.2 Quand on intègre contre un processus à variation finie, on définit une intégrale trajectorielle : l'intégrale se définit ω par ω (ie. trajectoire par trajectoire).

Démonstration : D'après les observations de la section précédente, les trajectoires de $H \cdot A$ sont à variations finies. Il ne reste donc qu'à justifier que $H \cdot A$ est adapté. Pour cela, il suffit de voir que, si $h : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et si $\int_0^t |h(s,\omega)|\,|dA_s(\omega)|$ est fini pour tout ω, alors la variable $\int_0^t h(s,\omega)\,dA_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

D'abord, pour $h(s,\omega) = \mathbf{1}_{]u,v]}(s)1_\Gamma(\omega)$ avec $]u,v] \subset [0,t]$ et $\Gamma \in \mathcal{F}_t$, on a

$$\int_0^t h(s,\omega)\,dA_s(\omega) = (A_v(\omega) - A_u(\omega))\mathbf{1}_\Gamma(\omega)$$

qui est clairement $\mathcal{F}_t$-mesurable puisque $(A_t)_{t\geq 0}$ est adapté et $\Gamma \in \mathcal{F}_t$.

Par un argument de classe monotone, comme $\{]u,v] \times \Gamma,]u,v] \subset [0,t] \ : \ \Gamma \in \mathcal{F}_t\}$ engendre $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, on justifie alors que pour $h = \mathbf{1}_G$, $G \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, $\int_0^t h(s,\omega)\,dA_s(\omega)$ est encore $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Enfin, on passe au cas général en écrivant h fonction $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable, $dA_s(\omega)$-intégrable, comme limite simple d'une suite de fonctions étagées h_n telles que pour tout n on ait $|h_n| \leq |h|$. Par convergence dominée (pour l'intégrale de Stieltjes), on a

$$\int_0^t h_n(s,\omega)\, dA_s(\omega) \to \int_0^t h(s,\omega)\, dA_s(\omega).$$

Comme $\int_0^t h_n(s,\omega)\, dA_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et que la $\mathcal{F}_t$-mesurabilité se conserve en passant à la limite, on obtient la Proposition 5.5. □

Remarque 5.3 — Souvent, on sera dans la situation où l'hypothèse plus faible est satisfaite

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s||dA_s| < +\infty.$$

Dans ce cas, on peut encore définir $H \cdot A$ en convenant que, sur l'ensemble de probabilité nulle où $\int_0^t |H_s||dA_s|$ devient infini, on prend $(H \cdot A)_t(\omega) = 0$ pour tout t. Le processus $(H \cdot A)$ ainsi défini reste adapté lorsque la filtration est supposée complète (conditions habituelles).

— Sous des hypothèses convenables d'intégrabilité de H et de K, on a la propriété d'associativité :

$$K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A.$$

Un cas particulier important est celui où $A_t = t$: si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ est un processus progressif tel que

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0 \quad \int_0^t |H_s|\, ds < +\infty,$$

le processus $\int_0^t H_s\, ds$ est un processus à variation finie.

5.2 Martingales locales

Si T est un temps d'arrêt et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus, on rappelle que X^T désigne le processus arrêté : pour tout $t \geq 0$, $X_t^T = X_{t \wedge T}$. On a vu que si X est une martingale alors X^T l'est aussi (il s'agit de la martingale arrêtée), cf. Remarque 4.6.

Définition 5.5 (Martingale locale) *Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est appelé une martingale locale (continue) s'il s'écrit $M_t = M_0 + N_t$ où*

- *M_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et*
- *$(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté à trajectoires continues avec $N_0 = 0$ et tel qu'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt avec $T_n \nearrow +\infty$ et pour tout n le processus arrêté N^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.*

On dit que la suite de temps d'arrêt $T_n \nearrow +\infty$ réduit M si pour tout n le processus arrêté N^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.

Lorsque $M_0 = 0$, on parle de martingale locale issue de 0.

Remarque 5.4 On n'impose pas dans la définition d'une martingale locale que les variables M_t soient dans L^1 (c'est une différence essentielle avec les martingales). En particulier, d'après la définition précédente, M_0 peut être n'importe quelle variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Dans les propriétés qui suivent, la plupart des justifications viennent des propriétés des martingales arrêtées énoncées dans le Corollaire 4.2.

Exemple : Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale (et la suite $T_n = n$ réduit M).
En effet, cela suit par exemple du Corollaire 4.2 et de ses conséquences avec les temps d'arrêt $T_n = n \nearrow +\infty$, plus simplement, il est immédiat que pour $s < t$:

$$M_{s\wedge n} = \mathbb{E}\big[M_{t\wedge n}|\mathcal{F}_s\big]$$

et $(M_{t\wedge n})_{t\geq 0}$ est fermée par M_n donc uniformément intégrable.

Proposition 5.6 *Dans la définition d'une martingale locale (issue de 0) on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (en effet, on peut ensuite remplacer T_n par $T_n \wedge n$ pour récupérer l'uniforme intégrabilité).*

Démonstration : Si M^{T_n} est une martingale alors $(M^{T_n})^n = M^{T_n\wedge n}$ l'est aussi et elle est fermée par M_n donc uniformément intégrable. De plus, il est évident que $(T_n \wedge n) \nearrow +\infty$ lorsque $T_n \nearrow +\infty$. □

Proposition 5.7 *Si M est une martingale locale, pour tout temps d'arrêt T, M^T est une martingale locale.*

Démonstration : Si T_n réduit M alors M^{T_n} est une martingale et $(M^T)^{T_n} = M^{T\wedge T_n} = (M^{T_n})^T$ l'est aussi d'après le Corollaire 4.2. □

Proposition 5.8 *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ réduit M et si $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt telle que $S_n \to +\infty$, alors la suite $(T_n \wedge S_n)_{n\geq 0}$ réduit encore M.*

Démonstration : On a $(T_n \wedge S_n) \nearrow +\infty$ et $M^{T_n\wedge S_n} = (M^{T_n})^{S_n}$ est une martingale uniformément intégrable en tant que martingale uniformément intégrable M^{T_n} arrêtée (Corollaire 4.2). □

Proposition 5.9 *L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.*

Démonstration : Si M, N sont des martingales locales réduites respectivement par $(T_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ alors d'après la Prop. 5.8, elles le sont encore toutes les deux par $(T_n \wedge S_n)_{n\geq 0}$. Mais alors $(M + N)^{T_n\wedge S_n} = N^{T_n\wedge S_n} + N^{T_n\wedge S_n}$ est une martingale, comme somme de martingales. □

Proposition 5.10 *Une martingale locale* **positive** *M telle que $M_0 \in L^1$ est une sur-martingale.*

D'après le Théorème 4.3 (convergence ps des sur-martingales) et la remarque qui le suit, une martingale locale positive converge donc ps.

Démonstration : Écrivons $M_t = M_0 + N_t$ et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite de temps d'arrêt qui réduit N. Alors, si $s \leq t$, on a pour tout n,

$$N_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}\big[N_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big].$$

En ajoutant des deux côtés la variable M_0 (qui est $\mathcal{F}_0$-mesurable et dans L^1), on trouve

$$M_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big]. \tag{5.1}$$

Puisque M est positive, on peut appliquer le lemme de Fatou pour les espérances conditionnelles en faisant $n \to +\infty$. Comme $T_n \nearrow +\infty$, on a alors

$$\begin{aligned} M_s &= \lim_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} = \liminf_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big] \\ &\geq \mathbb{E}\big[\liminf_{n\to+\infty} M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[M_t|\mathcal{F}_s\big]. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $s = 0$ et l'espérance, on a $\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0] < +\infty$, donc comme M est positive, $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. L'inégalité précédente assure alors que M est bien une sur-martingale. □

Proposition 5.11 *Soit M une martingale locale. S'il existe une variable $Z \in L^1$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$, alors M est une martingale. En particulier, une martingale locale bornée est une martingale.*

Démonstration : Si M est dominée par une variable aléatoire Z intégrable, on obtient comme pour la Proposition 5.10 pour $s \leq t$:

$$M_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big].$$

Puis, par convergence dominée la suite $M_{t\wedge T_n}$ converge dans L^1 vers M_t. On peut donc passer à la limite $n \to +\infty$ pour trouver

$$M_s = \lim_{n\to+\infty} M_{s\wedge T_n} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[\lim_{n\to+\infty} M_{t\wedge T_n}\,|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[M_t\,|\mathcal{F}_s\big].$$

□

Remarque 5.5 **Attention**, il n'est donc pas facile d'affaiblir les conditions de le Prop. 5.11 : si M est une martingale locale uniformément intégrable, en général M n'est pas une martingale (cf. le contre-exemple 2.13 p. 182 dans [RY], cf. aussi le contre-exemple page **??** pour le processul de Bessel R_t en dimension 3 : la martingale locale $1/R_t$ est uniformément intégrable car bornée dans L^2 mais n'est pas une martingale). Par contre si on a une condition d'uniforme intégrabilité pour tous les temps d'arrêt, on a un résultat positif :

Proposition 5.12 *Si M est une martingale locale à trajectoires continues avec $M_0 = 0$, alors M est réduite par la suite de temps d'arrêt*

$$T_n = \inf\big(t \geq 0 : |M_t| = n\big).$$

Démonstration : Comme M^{T_n} est une martingale locale bornée, c'est aussi une martingale uniformément intégrable par la Prop. 5.11. De plus M est à trajectoires continues, on a bien $T_n \nearrow +\infty$. En effet, soit $A > 0$, comme M est à trajectoires continues, $\{M_t : t \in [0, A]\}$ est compact donc borné par $R(A) < +\infty$. On a alors pour tout $n \geq R(A)$, $T_n \geq A$, ie. $T_n \nearrow +\infty$. □

Dans la suite, on utilise abondamment le résultat immédiat suivant :

Lemme 5.1 *Pour une martingale de carré intégrable, on a pour $0 \leq s \leq t$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2\,|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[M_t^2\,|\mathcal{F}_s\big] - \mathbb{E}\big[M_s^2\,|\mathcal{F}_s\big], \\ \mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2\big] &= \mathbb{E}\big[M_t^2\big] - \mathbb{E}\big[M_s^2\big]. \end{aligned}$$

Démonstration : La deuxième partie découle de la première en y prenant l'espérance. Pour la première, on a

$$\mathbb{E}\big[(M_t - M_s)^2\,|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[(M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2)\,|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[M_t^2\,|\mathcal{F}_s\big] - 2\mathbb{E}\big[M_tM_s|\mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[M_s^2\,|\mathcal{F}_s\big].$$

Mais par la propriété de martingale, on a

$$\mathbb{E}\big[M_tM_s\,|\mathcal{F}_s\big] = M_s\mathbb{E}[M_t\,|\mathcal{F}_s] = M_s^2 = \mathbb{E}\big[M_s^2\,|\mathcal{F}_s\big]$$

ce qui conclut. □

Le résultat suivant montre qu'une martingale locale continue qui n'est pas triviale est à variations non bornées. L'ensemble des martingales locales est donc un ensemble vraiment différent de celui des processus à variation finie.

Théorème 5.1 *Soit M une martingale locale (continue) issue de 0. Alors si M est un processus à variation finie, M est indistinguable de 0.*

Démonstration : Supposons que M est un processus à variation finie et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_n = \inf\Big(t \geq 0 : \int_0^t |dM_s| \geq n\Big).$$

Les temps τ_n sont des temps d'arrêt d'après l'Exemple 3.1 (pour cela, il faut remarquer que le processus $\int_0^t |dM_s|$ est continu et adapté, ce qui se voit par l'approximation donnée par la Prop. 5.4). Fixons $n \geq 1$ et posons $N = M^{\tau_n}$. Alors N est une martingale locale telle que $\int_0^{+\infty} |dN_s| \leq n$, en particulier $|N_t| = \left| \int_0^{t\wedge\tau_n} dM_s \right| \leq \int_0^{t\wedge\tau_n} |dM_s| \leq n$. D'après la Proposition 5.11, N est alors une vraie martingale bornée.

Ensuite, soit $t > 0$ et soit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de $[0, t]$. Alors, avec le Lemme 5.1, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t^2] &= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\big[N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2\big] = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\big[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2\big] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1\leq i\leq p} \big|N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\big|\right) \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right] \leq n\mathbb{E}\left[\left(\sup_{1\leq i\leq p} \big|N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\big|\right)\right]
\end{aligned}$$

en utilisant la Proposition 5.3. On applique l'inégalité précédente à une suite $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{p_k}^k = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. En utilisant la continuité des trajectoires, et le fait que N est bornée par n (fixé dans cette partie de l'argument), on a par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{1\leq i\leq p_k} \big|N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}\big|\right] = 0.$$

On conclut alors que $\mathbb{E}[N_t^2] = 0$ c'est à dire $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n}^2] = 0$. En faisant ensuite tendre $n \to +\infty$, comme $\tau_n \to +\infty$, on obtient par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}\big[M_t^2\big] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to+\infty} M_{t\wedge\tau_n}^2\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to+\infty} M_{t\wedge\tau_n}^2\right] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[M_{t\wedge\tau_n}^2\big] = 0.$$

Finalement pour tout $t \geq 0$, $M_t = 0$ ps. La martingale locale M admet donc 0 comme version. Pour conclure, comme 0 et M sont à trajectoires continues, le processus M est en fait indistinguable de 0. □

5.3 Variation quadratique d'une martingale locale

Le théorème ci-dessous définit le crochet (ou variation quadratique) d'une martingale locale. Cette notion est clef dans le calcul stochastique qui va être développé dans la suite.

Théorème 5.2 (Crochet d'une martingale locale) *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale à trajectoires continues.*

1. *Il existe un processus croissant, noté $\langle M, M\rangle = (\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ unique à indistinguabilité près, tel que*
$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t \tag{5.2}$$
est une martingale locale continue.

2. *De plus, pour tout $t>0$, si $0=t_0^n<t_1^n<\dots<t_{p_n}^n=t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité,*

$$\langle M,M\rangle_t=\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\big(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}\big)^2. \tag{5.3}$$

Le processus $\langle M,M\rangle$ est appelé la **variation quadratique** *ou* **crochet** *de M.*

Remarque 5.6

— Pour les martingales, on a mieux : si M est une martingale de carré intégrable alors $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$ est une martingale aussi, cf. plus bas Théorème 5.3.

— Si $M=B$ est un mouvement brownien, on a vu que $\langle B,B\rangle_t=t$, cf. Prop. 3.7.

— Pour la dernière assertion, il n'est pas nécessaire de supposer que les subdivisions sont emboîtées.

Démonstration : L'**unicité** découle du Théorème 5.1. En effet, si A et A' sont deux processus croissants satisfaisant la condition (5.2), le processus $A_t-A'_t=(M_t^2-A'_t)-(M_t^2-A_t)$ doit être à la fois une martingale locale (car différence de martingales locales) et un processus à variation finie (car différence de tels processus), ce qui exige sa nullité à indistinguabilité près (cf. Th. 5.1).

Pour l'**existence**, on considère d'abord le cas où $M_0=0$ et M est bornée. D'après la Prop. 5.11, M est alors une vraie martingale. On se fixe $t>0$ et $0=t_0^n<t_1^n<\dots<t_{p_n}^n=t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0,t]$ de pas tendant vers 0. Pour chaque $n\geq 1$, on considère le processus $X^{(n)}$ défini par

$$X_s^{(n)}=\sum_{i=1}^{p_n}M_{t_{i-1}^n}\big(M_{t_i^n\wedge s}-M_{t_{i-1}^n\wedge s}\big).$$

Lemme 5.2 *Le processus $X^{(n)}$ est une martingale à trajectoires continues.*

Démonstration : Le processus X est adapté et à trajectoires continues car la martingale M l'est, il est intégrable car M est bornée. Pour la propriété de martingale, pour $s\leq r$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[X_r^{(n)}\,|\mathcal{F}_s\big]\\
&=\sum_{i=1}^{p_n}\mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_s\big]\\
&=\sum_{i:t_{i-1}^n\leq r}\mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_s\big]\\
&=\sum_{i:s\leq t_{i-1}^n\leq r}\mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_s\big]+\sum_{i:t_{i-1}^n\leq s\leq r}\mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_s\big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i:s\leq t_{i-1}^n\leq r} \mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}\mathbb{E}\big[(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\big]|\mathcal{F}_s\big] + \sum_{i:t_{i-1}^n\leq s\leq r} M_{t_{i-1}^n}\mathbb{E}\big[(M_{t_i^n\wedge r}-M_{t_{i-1}^n\wedge r})\,|\mathcal{F}_s\big]\\
&= \sum_{i:s\leq t_{i-1}^n\leq r} \mathbb{E}\big[M_{t_{i-1}^n}\underbrace{(M_{t_{i-1}}-M_{t_{i-1}})}_{=0}\,|\mathcal{F}_s\big] + \sum_{i:t_{i-1}^n\leq s\leq r} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge s}-M_{t_{i-1}^n\wedge s})\\
&= \sum_{i:t_{i-1}^n\leq s} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n\wedge s}-M_{t_{i-1}^n\wedge s}) = X_s^{(n)}.
\end{aligned}
$$

□

On a ensuite :

Lemme 5.3 *Les variables aléatoires $X_t^{(n)}$, $n\geq 1$, vérifient une propriété de Cauchy dans L^2 :*

$$\lim_{n,m\to+\infty}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_t^{(m)})^2\big]=0.$$

Démonstration : Notons que, les subdivisions étant emboîtées, on peut écrire lorsque $n\leq m$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}) &= \sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^m]} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}),\\
\sum_{j=1}^{p_m} M_{t_{j-1}^m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}) &= \sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^m]} M_{t_{j-1}^n}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}).
\end{aligned}
$$

Avec des calculs (fastidieux...) qui utilisent la propriété de martingale sous la forme du Lemme 5.1, pour $n\leq m$ on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_t^{(m)})^2\big]\\
&\quad= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}) - \sum_{j=1}^{p_m} M_{t_{j-1}^m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})\right)^2\right]\\
&\quad= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^m]} M_{t_{i-1}^n}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m}) - \sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^m]} M_{t_{j-1}^n}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})\right)^2\right]\\
&\qquad\text{(les partitions sont emboîtées)}\\
&\quad= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n}-M_{t_{j-1}^m})(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})\right)^2\right]\\
&\quad= \sum_{i=1}^{p_n}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t_j^m\in]t_{i-1}^n,t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n}-M_{t_{j-1}^m})(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

car la propriété de martingale annule les termes croisés du carré de la somme : en effet pour $i_1 < i_2$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_1}\in]t^n_{i_1-1},t^n_{i_1}]}(M_{t^n_{i_1-1}}-M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}}-M_{t^m_{j_1-1}})\right)\left(\sum_{t^m_{j_2}\in]t^n_{i_2-1},t^n_{i_2}]}(M_{t^n_{i_2-1}}-M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}}-M_{t^m_{j_2-1}})\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_1}\in]t^n_{i_1-1},t^n_{i_1}]}(M_{t^n_{i_1-1}}-M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}}-M_{t^m_{j_1-1}})\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left(\sum_{t^m_{j_2}\in]t^n_{i_2-1},t^n_{i_2}]}(M_{t^n_{i_2-1}}-M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}}-M_{t^m_{j_2-1}})\right)\Big|\mathcal{F}_{t^n_{i_1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_1}\in]t^n_{i_1-1},t^n_{i_1}]}(M_{t^n_{i_1-1}}-M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}}-M_{t^m_{j_1-1}})\right)\right.\\
&\qquad\left.\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_2}\in]t^n_{i_2-1},t^n_{i_2}]}(M_{t^n_{i_2-1}}-M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}}-M_{t^m_{j_2-1}})\right)\Big|\mathcal{F}_{t^n_{i_1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_1}\in]t^n_{i_1-1},t^n_{i_1}]}(M_{t^n_{i_1-1}}-M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}}-M_{t^m_{j_1-1}})\right)\right.\\
&\qquad\left.\mathbb{E}\left[\sum_{t^m_{j_2}\in]t^n_{i_2-1},t^n_{i_2}]}\mathbb{E}\left[(M_{t^n_{i_2-1}}-M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}}-M_{t^m_{j_2-1}})\Big|\mathcal{F}_{t^m_{j_2-1}}\right]\Big|\mathcal{F}_{t^n_{i_1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_{j_1}\in]t^n_{i_1-1},t^n_{i_1}]}(M_{t^n_{i_1-1}}-M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}}-M_{t^m_{j_1-1}})\right)\right.\\
&\qquad\left.\mathbb{E}\left[\sum_{t^m_{j_2}\in]t^n_{i_2-1},t^n_{i_2}]}(M_{t^n_{i_2-1}}-M_{t^m_{j_2-1}})\underbrace{\mathbb{E}\left[(M_{t^m_{j_2}}-M_{t^m_{j_2-1}})\Big|\mathcal{F}_{t^m_{j_2-1}}\right]}_{=0}\Big|\mathcal{F}_{t^n_{i_1}}\right]\right].
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(X^{(n)}_t-X^{(m)}_t)^2\big] &= \sum_{i=1}^{p_n}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t^m_j\in]t^n_{i-1},t^n_i]}(M_{t^n_{i-1}}-M_{t^m_{j-1}})(M_{t^m_j}-M_{t^m_{j-1}})\right)^2\right]\\
&= \sum_{i=1}^{p_n}\sum_{t^m_j\in]t^n_{i-1},t^n_i]}\mathbb{E}\left[(M_{t^n_{i-1}}-M_{t^m_{j-1}})^2(M_{t^m_j}-M_{t^m_{j-1}})^2\right] \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

car à nouveau la propriété de martingale annule les termes croisés du carré de la somme :

pour $j_1 < j_2$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}} - M_{t^m_{j_2-1}})\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_2-1}})(M_{t^m_{j_2}} - M_{t^m_{j_2-1}})\Big|\mathcal{F}_{t^m_{j_2-1}}\Big]\Big] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^m_{j_1}} - M_{t^m_{j_1-1}})(M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j_2-1}})\underbrace{\mathbb{E}\Big[(M_{t^m_{j_2}} - M_{t^m_{j_2-1}})\Big|\mathcal{F}_{t^m_{j_2-1}}\Big]}_{=0}\right] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

Et donc à partir de (5.4), on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2\big] \\
&\quad \leq \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i]} \mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}})^2\right)(M_{t^m_j} - M_{t^m_{j-1}})^2\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\left(\sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}})^2\right)\left(\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t^m_j} - M_{t^m_{j-1}})^2\right)\right] \\
&\quad \leq \mathbb{E}\left[\sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}})^4\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t^m_j} - M_{t^m_{j-1}})^2\right)^2\right]^{1/2} \qquad (5.5) \\
&\qquad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}
$$

Comme M est à trajectoires continues, on a

$$
\lim_{n,n \to +\infty} \sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}}) = 0
$$

et comme M est bornée, disons par K :

$$
\left|\sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}})\right| \leq 2K
$$

si bien que, par convergence dominée, on a

$$
\lim_{n,m \to +\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{\substack{t^m_j \in]t^n_{i-1}, t^n_i] \\ 1 \leq i \leq p_n}} (M_{t^n_{i-1}} - M_{t^m_{j-1}})^4\right] = 0. \qquad (5.6)
$$

Pour conclure, il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^2\right)^2\right]\le C. \tag{5.7}$$

En effet, en combinant (5.5), (5.6) et (5.7), on aura

$$\lim_{n,m\to+\infty}\mathbb{E}\big[(X_t^{(n)}-X_t^{(m)})^2\big]=0.$$

Pour voir (5.7) (avec $C=8K^4$), on développe les carrés en utilisant le Lemme 5.1 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^2\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^4+2\sum_{1\le j_1<j_2\le p_m}(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2(M_{t_{j_2}^m}-M_{t_{j_2-1}^m})^2\right]\\
&\le (2K)^2\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^2\right]+2\sum_{1\le j_1<j_2\le p_m}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2(M_{t_{j_2}^m}-M_{t_{j_2-1}^m})^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]\right]\\
&\le (2K)^2\sum_{j=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^2\right]+2\sum_{1\le j_1<j_2\le p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2\,\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_2}^m}-M_{t_{j_2-1}^m})^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]\right]
\end{aligned}$$

On estime les deux termes en utilisant le Lemme 5.1 : pour le premier terme, on a

$$\sum_{j=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_j^m}-M_{t_{j-1}^m})^2\right]=\sum_{j=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[M_{t_j^m}^2-M_{t_{j-1}^m}^2\right]=\mathbb{E}\big[M_t^2\big]\le K^2.$$

Puis

$$\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_2}^m}-M_{t_{j_2-1}^m})^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]=\mathbb{E}\left[M_{t_{j_2}^m}^2-M_{t_{j_2-1}^m}^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]$$

si bien que

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j_1<j_2\le p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2\,\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_2}^m}-M_{t_{j_2-1}^m})^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]\right]\\
&= \sum_{j_1=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2\sum_{j_2=j_1+1}^{p_m}\mathbb{E}\left[M_{t_{j_2}^m}^2-M_{t_{j_1}^m}^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]\right]\\
&= \sum_{j_1=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2\,\mathbb{E}\left[M_t^2-M_{t_{j_1-1}^m}^2|\mathcal{F}_{t_{j_1}^m}\right]\right]\\
&\le \sum_{j_1=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[(M_{t_{j_1}^m}-M_{t_{j_1-1}^m})^2(2K^2)\right]=(2K^2)\sum_{j_1=1}^{p_m}\mathbb{E}\left[M_{t_{j_1}^m}^2-M_{t_{j_1-1}^m}^2\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad (2K^2)\mathbb{E}\left[M_t^2\right] \leq 2K^4.$$

Finalement,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p_m}(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2\right)^2\right] \leq 8K^4.$$

□

À partir du Lemme 5.2, l'inégalité de Doob (Proposition 4.8 avec $p = q = 2$) donne alors

$$\lim_{n,m\to+\infty} \mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t}\big(X_s^{(n)} - X_s^{(m)}\big)^2\Big] = 0. \tag{5.8}$$

On peut alors extraire une sous-suite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t}\big(X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})}\big)^2\Big] \leq 2^{-2k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\sup_{s\leq t}\big|X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})}\big|\right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}(X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})})^2\right]^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k} < +\infty.$$

On en déduit que ps

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sup_{s\leq t}\big|X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})}\big| < +\infty.$$

Presque sûrement, la suite $\big(X_s^{(n_k)}\big)_{s\in[0,t]}$ converge donc uniformément sur $[0,t]$ vers une limite qu'on note $(Y_s)_{s\in[0,t]}$. Sur l'ensemble négligeable où il n'y a pas la convergence, on impose $Y_s \equiv 0$. Le processus limite $(Y_s)_{s\in[0,t]}$ a alors des trajectoires continues.

Comme d'après (5.8) $(X_s^{(n)})_{s\in[0,t]}$ est une suite de Cauchy dans L^2, on a aussi la convergence $X_s^{(n)} \to Y_s$ dans L^2 quand $n \to +\infty$. En passant à la limite L^2 dans l'égalité de martingale pour $X^{(n)}$ aux dates s et r,

$$X_s^{(n)} = \mathbb{E}\big[X_r^{(n)}\,|\mathcal{F}_s\big], \quad s \leq r,$$

on voit alors que Y est une martingale sur $[0,t]$:

$$Y_s = \mathbb{E}\big[Y_r\,|\mathcal{F}_s\big], \quad s \leq r.$$

Finalement, $X^{(n_k)}$ converge ps uniformément sur $[0,t]$ vers un $Y = (Y_s)_{0\leq s\leq t}$ qui est à trajectoires continues. Le processus Y est donc une martingale continue.

Puis par un calcul simple, pour tout $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, p_n\}$, on a

$$M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^n = \sum_{i=1}^{j} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \tag{5.9}$$

En effet $X_{t_j^n}^{(n)} = \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n}\big(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\big) = \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}^2$ et donc

$$\begin{aligned}
M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^{(n)} &= M_{t_j^n}^2 + 2\sum_{i=1}^{j} M_{t_{i-1}^n}^2 - 2\sum_{i=1}^{j} M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} \\
&= \sum_{i=1}^{j} M_{t_i^n}^2 + \sum_{i=1}^{j} M_{t_{i-1}^n}^2 - 2\sum_{i=1}^{j} M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} \\
&= \sum_{i=1}^{j} \left(M_{t_i^n}^2 + M_{t_{i-1}^n}^2 - 2M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{j} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Le processus $M^2 - 2X^{(n)}$ est donc croissant le long de la subdivision $\{t_i^n : 0 \leq i \leq p_n\}$. En passant à la limite avec la sous-suite $n_k \to +\infty$ trouvée précédemment (pour laquelle il y a convergence presque sûre), par continuité, la fonction $s \in [0, t] \mapsto M_s^2 - 2Y_s$ est ps croissante sur $[0, t]$.

On pose alors, pour $s \in [0, t]$, $\langle M, M \rangle_s = M_s^2 - 2Y_s$ (avec, par convention, $\langle M, M \rangle_s \equiv 0$ sur l'ensemble de probabilité nulle où la fonction $t \mapsto M_t^2 - 2Y_t$ n'est pas croissante).

Ainsi, $\langle M, M \rangle$ est un processus croissant et $M_s^2 - \langle M, M \rangle_s = 2Y_s$ est une martingale, sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

Rappelons que t est fixé depuis le début de l'argument. Pour étendre la définition de $\langle M, M \rangle_s$ à tout $s \in \mathbb{R}_+$, on applique ce qui précède avec $t = k$ pour tout entier $k \geq 1$ et on note $A^{(k)}$ le processus ainsi construit. Par unicité (à l'indistinguabilité près), on remarque que le processus obtenu avec $t = k$ doit être la restriction à $[0, k]$ de celui obtenu avec $t = k + 1$: $A^{(k)} = A^{(k+1)}_{|[0,k]}$. On définit alors un processus $\langle M, M \rangle_t$, $t \geq 0$, croissant vérifiant (5.2) en prenant

$$\langle M, M \rangle_t = A_t^{(k)} \qquad \text{pour } k \geq t.$$

L'égalité des restrictions des $A^{(k)}$ assure la cohérence de la définition ci-dessus. De plus, $\langle M, M \rangle$ ainsi construit est même une martingale L^2 sur $\mathbb{R}_+$.

La partie unicité montre aussi que le processus $\langle M, M \rangle = \big(\langle M, M \rangle_t\big)_{t \geq 0}$ ne dépend pas de la suite de subdivisions choisies pour le construire. On déduit alors de (5.9) (avec $j = p_n$)

que pour tout $t > 0$, pour n'importe quelle suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$L^2\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{p_n}(M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})^2 = \langle M, M\rangle_t$$

dans L^2. Cela achève la preuve du théorème dans le cas borné.

Considérons maintenant une martingale locale générale qu'on écrit sous la forme $M_t = M_0 + N_t$. On a donc $M_t^2 = M_0^2 + 2M_0N_t + N_t^2$.

On remarque que $(M_0N_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale. En effet, en notant T_n la suite qui réduit la martingale locale N et $S_n = \inf\big(n \geq 0 : |M_0N_t| \geq n\big)$, alors S_n est un temps d'arrêt (M_0N_t est adaptée) et $S_n \nearrow +\infty$ (continuité de $t \mapsto M_0N_t$, comme en Prop. 5.12). Comme $\big(M_0N_t\big)_{t\geq 0}^{T_n\wedge S_n}$ est bornée et vérifie la propriété de martingale, $(M_0N_t)_{t\geq 0}$ est bien une martingale locale réduite par la suite de temps d'arrêt $T_n \wedge S_n$.

Sans perte de généralité, on suppose donc que $M_0 = 0$ et on pose alors

$$T_n = \inf\big(t \geq 0 : |M_t| \geq n\big),$$

et on applique le résultat vu dans le cas borné aux martingales bornées M^{T_n}. Notons $A^{(n)} = \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle$ le processus associé à M^{T_n}. D'après l'unicité, les processus $A^{(n+1)}_{t\wedge T_n}$ et $A^{(n)}_t$ sont indistinguables. On en déduit qu'il existe un processus croissant A tel que, pour tout $n \geq 1$, $A_{t\wedge T_n}$ et $A^{(n)}_t$ sont indistinguables. De plus, par construction du cas borné, $M^2_{t\wedge T_n} - A_{t\wedge T_n} = (M_t^2 - A_t)^{T_n}$ est une martingale, c'est à dire $M_t^2 - A_t$ est une martingale locale pusique $T_n \nearrow +\infty$.

On prend alors $\langle M, M\rangle_t = A_t$ et cela termine la preuve de la partie existence.

Enfin, la **deuxième partie** du théorème reste vraie dans le cas d'une martingale locale : en effet, si on remplace M et $\langle M, M\rangle_t$ par M^{T_n} et $\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t = \langle M, M\rangle_t^{T_n}$ (en anticipant la proposition suivante), alors le cas borné assure :

$$\langle M, M\rangle_{t\wedge T_n} = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\big(M^{T_n}_{t_i^n} - M^{T_n}_{t_{i-1}^n}\big)^2$$

(même avec convergence dans L^2 plutôt qu'en probabilité). On conclut en observant que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(t \leq T_n) \to 1$, quand $n \to +\infty$, ce qui affaiblit la convergence L^2 en une convergence en probabilité : soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_n(\varepsilon) = \left\{\left|\langle M, M\rangle_t - \sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right| \geq \varepsilon\right\}$$

alors $\mathbb{P}\big(A_n(\varepsilon)\big) = \mathbb{P}\big(A_n(\varepsilon), t \leq T_n\big) + \mathbb{P}\big(A_n(\varepsilon), T_n < t\big)$ avec $\mathbb{P}\big(A_n(\varepsilon), T_n < t\big) \leq \mathbb{P}(T_n < t) \to 0$ et

$$A_n(\varepsilon) \cap \{t \leq T_n\} = \left\{\left|\langle M, M\rangle_{t\wedge T_n} - \sum_{i=1}^{p_n}(M^{T_n}_{t_i^n} - M^{T_n}_{t_{i-1}^n})^2\right| \geq \varepsilon\right\} \cap \{t \leq T_n\}.$$

Il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big(A_n(\varepsilon)\big)\leq \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n<t)+\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\langle M,M\rangle_{t\wedge T_n}-\sum_{i=1}^{p_n}(M^{T_n}_{t_i^n}-M^{T_n}_{t_{i-1}^n})^2\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

ie. $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\big(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n}\big)^2=\langle M,M\rangle_t$. □

Proposition 5.13 (Crochet et arrêt) *Si T est un temps d'arrêt, alors on a*

$$\langle M^T,M^T\rangle_t=\langle M,M\rangle_t^T.$$

Démonstration : Cela vient de ce que

$$(M_t^T)^2-\langle M,M\rangle_t^T=M^2_{t\wedge T}-\langle M,M\rangle_{t\wedge T}=(M^2-\langle M,M\rangle)_t^T$$

est une martingale locale comme martingale locale arrêtée. Par conséquent le crochet arrêté $\langle M,M\rangle^T$ vérifie la propriété/définition de $\langle M^T,M^T\rangle$ du Théorème 5.2. Par unicité du crochet, on doit avoir $\langle M^T,M^T\rangle=\langle M,M\rangle^T$ à indistinguabilité près. □

Le théorème suivant montre comment les propriétés d'une martingale locale M sont liées à celles de sa variation quadratique $\langle M,M\rangle$. Ainsi, les intervalles sur lesquels M est constante sont exactement ceux sur lesquels $\langle M,M\rangle$ est constant. Si A est un processus croissant, on note A_∞ la limite croissante de A_t quand $t\to+\infty$.

Théorème 5.3 *Soit M une martingale locale (continue) avec $M_0=0$.*

1. *Si M est une (vraie) martingale bornée dans L^2, alors $\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_\infty\big]<+\infty$, et $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$ est une martingale uniformément intégrable.*
2. *Réciproquement, si $\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_\infty\big]<+\infty$, alors M est une (vraie) martingale bornée dans L^2 (donc uniformément intégrable).*
3. *Il y a équivalence entre :*
   (a) *M est une (vraie) martingale de carré intégrable (ie. $\mathbb{E}\big[M_t^2\big]<+\infty$ pour tout $t\geq 0$).*
   (b) *$\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_t\big]<+\infty$ pour tout $t\geq 0$.*

   De plus si ces conditions sont satisfaites, $M_t^2-\langle M,M\rangle_t$ est une martingale.

Remarque 5.7 Dans la partie 1) de l'énoncé, il est essentiel de supposer que M est une martingale, et pas seulement une martingale locale car on utilise l'inégalité de Doob et elle n'est pas valable pour une martingale locale.

Démonstration : 1) Si M est une martingale (continue) bornée dans L^2, l'inégalité de Doob (Proposition 4.8 avec $p = q = 2$) assure

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0} M_t^2\Big] \leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[M_t^2\big] < +\infty.$$

En particulier, M est une martingale uniformément intégrable qui converge (ps et, par convergence dominée, dans L^2) vers une limite $M_\infty \in L^2$ quand $t \to +\infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t \geq n\big).$$

Alors S_n est un temps d'arrêt et $\langle M, M\rangle_{t\wedge S_n} \leq n$. On en déduit que la martingale locale $M_{t\wedge S_n}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge S_n}$ est dominée par la variable intégrable $n + \sup_{t\geq 0} M_t^2$. D'après la Proposition 5.11, cette martingale locale est donc une vraie martingale. Comme elle est nulle en 0, la propriété de martingalen assure

$$\mathbb{E}\big[M_{t\wedge S_n}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge S_n}\big] = \mathbb{E}\big[M_{0\wedge S_n}^2 - \langle M, M\rangle_{0\wedge S_n}\big] = 0,$$

soit

$$\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{t\wedge S_n}\big] = \mathbb{E}\big[M_{t\wedge S_n}^2\big].$$

En faisant tendre $t \to +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone pour le terme de gauche, le théorème de convergence dominée pour celui de droite), on trouve

$$\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{S_n}\big] = \mathbb{E}\big[M_{S_n}^2\big].$$

Puis comme $S_n \nearrow +\infty$, en faisant tendre $n \to +\infty$, on trouve de la même façon (convergences monotone et dominée)

$$\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty\big] = \mathbb{E}\big[M_\infty^2\big] < +\infty.$$

De plus comme la martingale locale $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est dominée par la variable intégrable $\sup_{t\geq 0} M_t^2 + \langle M, M\rangle_\infty$, c'est donc une (vraie) martingale uniformément intégrable (toujours par la Prop. 5.11)).

2) On suppose maintenant $\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty\big] < +\infty$. Avec $T_n = \inf\big(t \geq 0 : |M_t| \geq n\big)$, M^{T_n} est bornée donc c'est une vraie martingale bornée. De plus, la martingale locale $M_{t\wedge T_n}^2 - \langle M, M\rangle_t^{T_n}$ est aussi une vraie martingale uniformément intégrable, car elle est dominée par la variable aléatoire intégrable $n^2 + \langle M, M\rangle_\infty$ (cf. encore Prop. 5.11)).
Soit S un temps d'arrêt fini ps. D'après le Théorème 4.4 (théorème d'arrêt), appliqué à la martingale uniformément intégrable $M_{t\wedge T_n}^2 - \langle M, M\rangle_t^{T_n}$ avec $S \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\big[M_{S\wedge T_n}^2\big] = \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{S\wedge T_n}\big].$$

Par le lemme de Fatou, on a alors (en utilisant S fini ps) :

$$\mathbb{E}\big[M_S^2\big] = \mathbb{E}\big[\liminf_n M_{S\wedge T_n}^2\big] \leq \liminf_n \mathbb{E}\big[M_{S\wedge T_n}^2\big] = \liminf_n \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{S\wedge T_n}\big] \leq \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty\big].$$

La famille $\{M_S : S$ temps d'arrêt fini$\}$ est donc bornée dans L^2 et par conséquent uniformément intégrable. En particulier avec la suite des temps d'arrêt bornés T_n, en passant à la limite L^1 quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\mathbb{E}\big[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s\big] = M_s^{T_n}$ (pour $s \leq t$) on en déduit que M est une vraie martingale. De plus, M est bornée dans L^2 car $\{M_s, s \geq 0\}$ est une sous-famille de $\{M_S : S$ temps d'arrêt fini$\}$ qui est bornée dans L^2.

3) Soit $a > 0$. D'après **1)** et **2)**, on a $\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_a\big] < +\infty$ si et seulement si M_t^a est une vraie martingale de carré intégrable. L'équivalence de (a) et (b) suit alors facilement. Enfin, si ces conditions sont remplies, 1) montre que $M_{t\wedge a}^2 - \langle M, M\rangle_{t\wedge a}$ est une vraie martingale, ce qui prouve le 3) car a est quelconque et peut être choisi arbitrairement grand. □

Corollaire 5.1 *Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$. Alors on a $\langle M, M\rangle_t = 0$ ps pour tout $t \geq 0$ si et seulement si M est indistinguable de 0.*

Démonstration : Supposons $\langle M, M\rangle_t = 0$ ps pour tout $t \geq 0$. D'après les parties 1) et 2) du théorème ci-dessus, M_t^2 est une martingale uniformément intégrable, d'où $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_0^2] = 0$. Le processus nul est une modification de M. Commes les deux sont à trajectoires continues, ils sont indistingables. □

Crochet de deux martingales locales

Si M et N sont deux martingales locales, on définit leur crochet par polarisation en posant :

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}\big(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t - \langle N, N\rangle_t\big).$$

Proposition 5.14

1. *$\langle M, N\rangle$ est l'unique (à indistinguabilité près) processus à variation finie tel que $M_tN_t - \langle M, N\rangle_t$ soit une martingale locale.*
2. *Si $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité,*

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) = \langle M, N\rangle_t.$$

3. *L'application $(M, N) \mapsto \langle M, N\rangle$ est bilinéaire symétrique.*
4. *(arrêt) Pour tout temps d'arrêt T,*

$$\langle M^T, N^T\rangle_t = \langle M^T, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_{t\wedge T}. \tag{5.10}$$

Démonstration : 1) découle de la caractérisation analogue dans le Théorème 5.2 avec la polarisation du produit réel (et l'unicité découle du Théorème 5.1).
2) est de même une conséquence de l'affirmation analogue dans le Théorème 5.2 par polarisation.
3) découle, par exemple, de l'expression 2).
Enfin, on peut voir **4)** comme une conséquence de la propriété 2), en observant que cette propriété entraîne ps

$$\begin{aligned} \langle M^T, N^T\rangle_t = \langle M^T, N\rangle_t = \langle M, N\rangle_t \quad \text{sur} \quad \{T \geq t\}, \\ \langle M^T, N^T\rangle_t - \langle M^T, N^T\rangle_s = \langle M^T, N\rangle_t - \langle M^T, N\rangle_s = 0 \quad \text{sur} \quad \{T \leq s < t\}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.15 *Soit M_1, M_2 deux martingales locales à trajectoires continues issues de 0. On a $M_1 = M_2$ (à indistinguabilité près) si et seulement si pour toute martingale locale N, on a $\langle M_1, N\rangle = \langle M_2, N\rangle$.*

Démonstration : Il suffit de choisir $N = M_1 - M_2$ pour avoir $\langle M_1 - M_2, M_1 - M_2\rangle = 0$, c'est à dire $M_1 - M_2$ est constante donc nulle. □

Le résultat suivant est une sorte de généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux intégrales par rapport à un crochet de martingales locales.

Proposition 5.16 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soit M et N deux martingales locales et H et K deux processus progressivement mesurables. Alors pour tout $t \geq 0$:*

$$\int_0^t |H_s|\ |K_s|\ |d\langle M, N\rangle_s| \leq \left(\int_0^t H_s^2\ d\langle M, M\rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2\ d\langle N, N\rangle_s\right)^{1/2}. \tag{5.11}$$

Conséquence : Avec $H = K = 1$, on a $|\langle M, N\rangle|^2 \leq \langle M, M\rangle\langle N, N\rangle$.

Démonstration : Par le théorème de convergence monotone, il suffit de voir le résultat pour H, K processus mesurables bornés. Quitte à remplacer K par $gK\mathrm{sgn}(HK)$, où $g = d(\langle M, N\rangle)/d|\langle M, N\rangle|$ est la densité de Radon-Nikodym à valeurs dans $\{-1, +1\}$, on peut remplacer $\int_0^{+\infty} |H_s|\ |K_s|\ |d\langle M, N\rangle_s|$ à gauche dans (5.11) par $\left|\int_0^{+\infty} H_s\ K_s\ d\langle M, N\rangle_s\right|$.
Notons $\langle M, N\rangle_{s,t} = \langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s$. On commence par remarquer que presque sûrement pour tous $s < t$ rationnels (donc aussi par continuité pour tous $s < t$) on a

$$|\langle M, N\rangle_{s,t}| \leq \sqrt{\langle M, M\rangle_{s,t}}\ \sqrt{\langle N, N\rangle_{s,t}}. \tag{5.12}$$

En effet, cela découle des approximations en probabilité de $\langle M, M\rangle$ et $\langle M, N\rangle$ données respectivement dans le Théorème 5.2 et la Proposition 5.14, ainsi que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (classique pour les sommes) :

$$\left(\sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \sum_{i=1}^{p_n} (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})^2$$

où $(t_i^n)_{i=1,\dots,n}$ est une partition de $[t,s]$. À la limite $n\to+\infty$, on obtient bien (5.12).

Dans la suite on fixe un $\omega\in\Omega$ pour lequel (5.12) est vraie pour tout $s<t$ et on raisonne pour ce ω presque sûr. L'interprétation de $\int_s^t |d\langle M,N\rangle_u|$ comme variation finie par la Proposition 5.3 donne aussi

$$\int_s^t |d\langle M,N\rangle_u| \le \sqrt{\langle M,M\rangle_{s,t}}\ \sqrt{\langle N,N\rangle_{s,t}}. \tag{5.13}$$

En effet, pour une subdivision $s=t_0<t_1<\dots<t_p=t$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p |\langle M,N\rangle_{t_{i-1},t_i}| &\le \sum_{i=1}^p \sqrt{\langle M,M\rangle_{t_{i-1},t_i}}\ \sqrt{\langle N,N\rangle_{t_{i-1},t_i}}\\
&\le \left(\sum_{i=1}^p \langle M,M\rangle_{t_{i-1},t_i}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^p \langle N,N\rangle_{t_{i-1},t_i}\right)^{1/2}\\
&\le \sqrt{\langle M,M\rangle_{s,t}}\ \sqrt{\langle N,N\rangle_{s,t}}.
\end{aligned}$$

Soit maintenant H,K des processus progressifs simples. Quitte à raffiner les partitions définissant H et K, on peut trouver $0=t_0<t_1<\dots<t_n<+\infty$ et $h_0,\dots,h_n,k_0,\dots,k_n$ telles que $h_i,k_i\in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i})$, et pour lesquels

$$H=h_0\mathbf{1}_{\{0\}}+\sum_{i=0}^{n-1} h_i\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]},\quad K=k_0\mathbf{1}_{\{0\}}+\sum_{i=0}^{n-1} k_i\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t H_sK_s\ d\langle M,N\rangle_s\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} h_ik_i\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M,N\rangle_s\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}|h_i|\ |k_i|\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M,N\rangle_s\right|\\
&\le \sum_{i=0}^{n-1}|h_i|\ |k_i|\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle N,N\rangle_s\right)^{1/2}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^2\ d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_i^2\ d\langle N,N\rangle_s\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^2\ d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_i^2\ d\langle N,N\rangle_s\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_0^t H_s\ d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_0^t K_s\ d\langle N,N\rangle_s\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Quand H et K sont des processus progressifs bornés, on peut les approximer par deux suites de processus simples $(H_n)_{n\ge1}$ et $(K_n)_{n\ge1}$ qui convergent vers H et K en restant bornées. On conclut alors par le théorème de convergence dominée. □

5.4 Semimartingales continues

Les semimartingales forment la classe la plus générale de processus considérés pour construire une intégrale stochastique.

Définition 5.6 (Semimartingale) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$ où M est une martingale locale (issue de 0) et A est un processus à variation finie.*

Toujours grâce au Théorème 5.1, la décomposition ci-dessus est unique à indistinguabilité près. Si $Y_t = Y_0 + M'_t + A'_t$ est une autre semimartingale continue, on pose par définition

$$\langle X, Y\rangle_t := \langle M, M'\rangle_t.$$

En particulier, $\langle X, X\rangle_t = \langle M, M\rangle_t$.

Proposition 5.17 *Soit X, Y deux semimartingales et $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors, au sens de la convergence en probabilité :*

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \big(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\big)\big(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}\big) = \langle X, Y\rangle_t.$$

Remarque 5.8 En particulier, si X ou Y est à variation bornée, alors $\langle X, Y\rangle \equiv 0$. En effet, si par exemple X est à variation bornée, on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{p_n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n})\right| &\leq \sum_{i=1}^{p_n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| \sup_{i=1,\dots,p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}| \\ &\leq \left(\sup_{i=1,\dots,p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}|\right) \int_0^t |dX_s| \to 0\end{aligned}$$

car $\int_0^t |dX_s|$ est bornée (processus à variations bornées) et $\sup_{i=1,\dots,p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}| \to 0$ par continuité des trajectoires de Y.

Démonstration : Pour simplifier, on suppose $X = Y$. Le cas général s'obtient ensuite facilement par polarisation. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p_n} \big(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\big)^2 &= \sum_{i=1}^{p_n} \big(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\big)^2 + \sum_{i=1}^{p_n} \big(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}\big)^2 \\ &\quad +2\sum_{i=1}^{p_n} \big(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}\big).\end{aligned}$$

Le Théorème 5.2 donne déjà pour la martingale locale M :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \big(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\big)^2 = \langle M, M\rangle_t = \langle X, X\rangle_t.$$

Puis comme A est à variation finie (et M est continue), la Remarque 5.8 s'applique pour donner

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\big(M_{t_i^n}-M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n}-A_{t_{i-1}^n}\big)=\langle M,A\rangle_t=0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\big(A_{t_i^n}-A_{t_{i-1}^n}\big)^2=\langle A,A\rangle_t=0.$$

□

Les principaux résultats d'intégration contre un crochet de martingales locales restent vrais contre un crochet de semimartingales, en particulier :

Proposition 5.18 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soit X, Y deux semimartingales et H, K deux processus localement bornés (pour tout t, $\sup_{s\leq t}|H_s|<+\infty$, idem pour K). Alors ps pour $t\geq 0$:*

$$\int_0^{+\infty}|H_s|\ |K_s|\ |d\langle X,Y\rangle_s|\leq\left(\int_0^{+\infty}H_s^2\ d\langle X,X\rangle_s\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}K_s^2\ d\langle Y,Y\rangle_s\right)^{1/2}.$$

Troisième partie

Intégration stochastique

Chapitre 6

Intégration stochastique

On considère à nouveau dans ce chapitre un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles. Le but est de construire une théorie de l'intégration contre les processus stochastiques. La bonne classe de processus à considérer est celle des semimartingales (à trajectoires continues) introduites dans le Chapitre 5.
On commence par intégrer par rapport à des martingales (à trajectoires continues) bornées dans L^2 en Section 6.1, cette construction est fondée sur une théorie L^2. On étend cette construction par propriété d'arrêt en Section 6.2 à des martingales locales à trajectoires continues. On achève la construction en Section 6.3 avec l'intégration contre des semimartingales. On conclut le chapitre par quelques commentaires sur le cas des semimartingales non continues en Section 6.4.

6.1 Par rapport à une martingale bornée dans L^2

Définition 6.1 (Espace H^2_c) *On note H^2_c l'espace des martingales M (à trajectoires continues) bornées dans $L^2(\Omega)$ et telles que $M_0 = 0$.*

Le Théorème 5.3 montre qu'on a $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < +\infty$ pour $M \in H^2_c$. D'après la Proposition 5.16 (inégalité de Kunita-Watanabe), si $M, N \in H^2_c$ on a $\mathbb{E}[|\langle M, N\rangle_\infty|] < +\infty$. En effet :

$$\mathbb{E}[|\langle M, N\rangle_\infty|] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} |d\langle M, N\rangle_s|\right] \leq \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]^{1/2}\mathbb{E}[\langle N, N\rangle_\infty]^{1/2} < +\infty.$$

On définit alors un produit scalaire sur H^2_c par $(M, N)_{H^2_c} := \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty]$ et on note $\|\cdot\|_{H^2_c}$ la norme sur H^2_c associée à ce produit scalaire :

$$\|M\|_{H^2_c} = (M, M)^{1/2}_{H^2_c} = \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty\big]^{1/2}.$$

D'après le Corollaire 5.1, en identifiant les processus indistinguables, on a bien une norme car $(M, M)_{H^2_c} = 0$ si et seulement si $M = 0$ (ie. le produit scalaire considéré est bien défini positif).

Proposition 6.1 *L'espace H_c^2 muni du produit scalaire $(M,N)_{H_c^2}$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Il s'agit de vérifier que H_c^2 est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H_c^2}$. Pour cela, on considère une suite de Cauchy $(M^n)_{n\geq 0}$ pour cette norme : d'après le Théorème 5.3, $(M^n-M^m)^2-\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle$ est une martingale uniformément intégrable. L'égalité de martingale assure

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(M^n-M^m)_t^2-\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle_t\big]\\ &\quad= \mathbb{E}\big[(M^n-M^m)_0^2-\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle_0\big]=0\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(M^n-M^m)_t^2\big] &= \mathbb{E}\big[\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle_t\big]\\ &\leq \mathbb{E}\big[\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle_\infty\big].\end{aligned}$$

Par la propriété de Cauchy de la suite $(M^n)_{n\geq 0}$ pour H_c^2, on a donc

$$\lim_{m,n\to+\infty}\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\big[(M_t^n-M_t^m)^2\big]=\lim_{m,n\to+\infty}\mathbb{E}\big[\langle M^n-M^m, M^n-M^m\rangle_\infty\big]=0.$$

L'inégalité de Doob (Prop. 4.8) donne alors

$$\lim_{m,n\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M_t^n-M_t^m)^2\right]\leq \lim_{m,n\to+\infty}\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\big[(M_t^n-M_t^m)^2\big]=0.$$

On peut alors extraire une sous-suite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k\geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}})^2\right]^{1/2}\leq \frac{1}{2^k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\sup_{t\geq 0}\big|M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}}\big|\right]\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}(M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}})^2\right]^{1/2}\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}<+\infty.$$

On en déduit que ps

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sup_{t\geq 0}\big|M_t^{n_k}-M_t^{n_{k+1}}\big|<+\infty.$$

Presque sûrement, la suite $(M_t^{n_k})_{t\geq 0}$ est de Cauchy dans $C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite qu'on note $(M_t)_{t\geq 0}$. Sur l'ensemble négligeable où il n'y a pas convergence, on impose $M_t\equiv 0$. Le processus limite $(M_t)_{t\geq 0}$ a alors des trajectoires continues. Comme, pour chaque $t\geq 0$, la suite $(M_t^{n_k})_{k\geq 0}$ est évidemment de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, $(M_t^{n_k})_{k\geq 0}$ converge aussi dans $L^2(\Omega)$ vers M_t pour tout $t\geq 0$. On peut donc passer à la limite (dans $L^1(\Omega)$) dans la propriété de martingale de $(M_t^{n_k})_{t\geq 0}$ et on obtient celle de $(M_t)_{t\geq 0}$ qui est donc aussi une martingale. La suite M^n étant de Cauchy dans H^2_c, elle est bornée dans H^2_c pour $\|\cdot\|_{H^2_c}$, on a alors pour tout $n \geq 1, t \geq 0$

$$\mathbb{E}\big[(M^n_t)^2\big] = \mathbb{E}\big[\langle M^n, M^n\rangle_t\big] \leq \mathbb{E}\big[\langle M^n, M^n\rangle_\infty\big] = \|M^n\|_{H^2_c} \leq \sup_{n\geq 0} \|M^n\|_{H^2_c}$$

soit $\sup_n \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\big[(M^n_t)^2\big] < +\infty$. Les variables aléatoires M^n_t, $n \geq 1$, $t \geq 0$, sont donc uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, la martingale M est aussi bornée dans $L^2(\Omega)$, ce qui assure $M \in H^2_c$. Enfin, comme $(M - M^{n_k})^2 - \langle M - M^{n_k}, M - M^{n_k}\rangle$ est une martingale convergente (lorsque $k \to +\infty$), on a

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\big[\langle M^{n_k} - M, M^{n_k} - M\rangle_\infty\big] = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\big[(M^{n_k}_\infty - M_\infty)^2\big] = 0,$$

ce qui montre que la sous-suite $(M^{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers M dans H^2_c. Finalement, comme la suite de Cauchy $(M^n)_{n\geq 0}$ a une sous-suite convergeant vers M, elle converge entièrement vers M dans H^2_c. □

Rappelons que Prog désigne la tribu progressive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (Déf. 4.3) et que les processus, vus comme fonctions sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Prog})$ sont appelés progressifs.

Définition 6.2 (Espace $L^2(M)$) *Pour $M \in H^2_c$, on note*

$$L^2(M) = L^2\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathit{Prog}, d\mathbb{P} \otimes d\langle M, M\rangle\big)$$

l'espace des processus progressifs $H = (H_s)_{s\geq 0}$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 \; d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty.$$

L'espace $L^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s K_s \; d\langle M, M\rangle_s\right].$$

Définition 6.3 (Processus simple) *On note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $L^2(M)$ formé des processus H (dits simples) de la forme*

$$H_s(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega)\mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s) \tag{6.1}$$

où $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p$ et pour chaque $0 \leq i \leq p$, $H_{(i)}$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée.

Proposition 6.2 (Densité) *Pour tout $M \in H^2_c$, l'espace $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(M)$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si $K \in L^2(M)$ est orthogonal à $\mathcal{S}$ alors $K = 0$. Supposons donc K orthogonal à $\mathcal{S}$. Soient $0 \leq s < t$ et soit F une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée. Avec $H = F\mathbf{1}_{]s,t]} \in \mathcal{S}$, on a

$$\mathbb{E}\left[F\int_s^t K_u \, d\langle M, M\rangle_u\right] = (H, K)_{L^2(M)} = 0. \tag{6.2}$$

En posant

$$X_t = \int_0^t K_u \, d\langle M, M\rangle_u, \quad t \geq 0,$$

l'égalité (6.2) se réécrit $\mathbb{E}\big[F(X_t - X_s)\big] = 0$ pour tous $s < t$ et toute variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable F bornée, ie. $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est en fait une martingale car en plus $X_t \in L^1(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$, l'intégrale définissant X_t étant ps absolument convergente lorsque $M \in H_c^2$ et $K \in L^2(M)$ (appliquer par exemple l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

D'autre part, par la Proposition 5.5, X étant une intégrale contre un processus croissant est aussi un processus à variation finie avec $X_0 = 0$. Le Théorème 5.1 exige alors d'avoir $X = 0$, ie.

$$\int_0^t K_u \, d\langle M, M\rangle_u = 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ ps.}$$

Comme $0 = \int_0^t K_u \, d\langle M, M\rangle_u = \int_{\mathbb{R}} K_u \mathbf{1}_{[0,t]}(u) \, d\langle M, M\rangle_u$, $K_u d\langle M, M\rangle_u$ coïncide avec la mesure nulle sur la famille des intervalles $[0, t]$, donc par un argument de classe monotone sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, c'est à dire K est ps orthogonal à $L^2(M)$ ou encore $K = 0$ dans $L^2(M)$. Cela établit la densité de $\mathcal{S}$ dans $L^2(M)$. □

Définition 6.4 *Soient $M \in H_c^2$ et $H \in \mathcal{S}$ de la forme (6.1). On définit $H \cdot M$ par*

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

Proposition 6.3 *Soient $M \in H_c^2$ et $H \in \mathcal{S}$. On a $H \cdot M \in H_c^2$ et pour tout $N \in H_c^2$:*

$$\langle H \cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s \, d\langle M, N\rangle_s = H \cdot \langle M, N\rangle_t. \tag{6.3}$$

Remarque 6.1 — En général, on utilise la notation intégrale :

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s \, dM_s.$$

— L'intégrale $H \cdot \langle M, N\rangle$ qui figure dans le terme de droite de (6.3) est une intégrale de Stieltjes par rapport à un processus à variation finie $\langle M, N\rangle$, comme défini dans la Section 5.1.4.

Démonstration : Pour $H \in \mathcal{S}$ de la forme (6.1), on écrit $H \cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M_t^{(i)}$ où $M_t^{(i)} := H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})$. On commence par observer que $(M_t^{(i)})_{t\geq 0}$ est une martingale pour chaque $0 \leq i \leq p-1$. En effet : pour $s \leq t$,

— si $s \geq t_i$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[M_t^{(i)}|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s\big] = H_{(i)}\mathbb{E}\big[(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s\big]\\ &= H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge s} - M_{t_i\wedge s}) = M_s^{(i)};\end{aligned}$$

— puis si $s < t_i$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[M_t^{(i)}|\mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})\big|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s\big]\\ &= \mathbb{E}\big[H_{(i)}\mathbb{E}\big[(M_{t_i\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_{t_i}\big]\big|\mathcal{F}_s\big]\\ &= 0 = M_s^{(i)}.\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}[M_t^{(i)}|\mathcal{F}_s] = M_s^{(i)}$ pour tout $t \geq s$ et $H\cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M^{(i)}$ est bien une martingale. De plus, comme H est bornée et $M \in H_c^2$, on a aussi $H \cdot M \in H_c^2$.

Pour la deuxième partie, d'abord, si $H = H_{(i)}\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$, comme $MN - \langle M, N\rangle$ est une martingale (car martingale locale bornée dans L^2 d'après la Prop. 5.14), alors

$$M^{t_{i+1}}N - \langle M, N\rangle^{t_{i+1}} \quad \text{et} \quad M^{t_i}N - \langle M, N\rangle^{t_i}$$

sont des martingales. Par conséquent la différence

$$(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})N - (\langle M, N\rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle^{t_i})$$

est aussi une martingale. Comme cette martingale est nulle en $t \leq t_i$ et comme $H_{(i)} \in \mathcal{F}_{t_i}$

$$H_{(i)}\big(M^{t_{i+1}} - M^{t_i}\big)N - H_{(i)}\big(\langle M, N\rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle^{t_i}\big)$$

est encore une martingale puis en sommant sur $0 \leq i \leq p-1$, $(H \cdot M)N - \int_0^\cdot H_s\, d\langle M, N\rangle_s$ reste aussi une martingale. D'après la Prop. 5.14, on identifie le crochet de $(H \cdot M)$ et de N :

$$\langle (H \cdot M), N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle.$$

Noter en particulier que $\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle = H^2 \cdot \langle M, M\rangle$. □

Théorème 6.1 (Existence de l'intégrale stochastique L^2) *Soit $M \in H_c^2$. L'application $H \in \mathcal{S} \mapsto H \cdot M$ s'étend en une isométrie de $L^2(M)$ dans H_c^2. De plus,*

1. *la martingale $H \cdot M$ est caractérisée par la relation*

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle, \quad \forall N \in H_c^2; \tag{6.4}$$

2. *puis, si T est un temps d'arrêt, on a une propriété d'arrêt :*

$$(\mathbf{1}_{[0,T]}H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \tag{6.5}$$

Avec des notations intégrales, cette dernière propriété s'écrit de façon naturelle :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,T]} H\ dM = \int_0^{t\wedge T} H\ dM = \int_0^t H\ dM^T.$$

Démonstration : L'application $H \mapsto H \cdot M$ est clairement linéaire. Puis pour $H \in \mathcal{S}$, on a vu que $H \cdot M$ est une martingale avec la propriété caractéristique (6.3) (Prop. 6.3). On a

$$\begin{aligned}
\|H \cdot M\|_{H_c^2}^2 &= \mathbb{E}[\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_\infty] \\
&= \mathbb{E}[H^2 \cdot \langle M, M\rangle_\infty] \quad (\text{par } (6.3)) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2\ d\langle M, M\rangle_s\right] \\
&= \|H\|_{L^2(M)}^2.
\end{aligned}$$

L'application $H \mapsto H \cdot M$ est donc une isométrie de $\mathcal{S}$ dans H_c^2.
Comme H_c^2 est un espace de Hilbert (Proposition 6.1) et comme $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2(M)$ (Proposition 6.2), on peut alors prolonger de manière unique cette application en une isométrie de $L^2(M)$ dans H_c^2.

1) On vérifie maintenant la propriété d'arrêt caractéristique (6.4). On sait déjà par (6.3) qu'elle est vraie si $H \in \mathcal{S}$. Pour la généraliser, notons que pour $N \in H_c^2$, l'application $X \mapsto \langle X, N\rangle_\infty$ est continue de H_c^2 dans $L^1(\Omega)$: en effet, par les inégalités de Kunita-Watanabe et Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[|\langle X, N\rangle_\infty|\big] &\le \mathbb{E}\big[\langle X, X\rangle_\infty^{1/2}\langle N, N\rangle_\infty^{1/2}\big] \quad (\text{Kunita-Watanabe}) \\
&= \mathbb{E}\big[\langle X, X\rangle_\infty\big]^{1/2}\mathbb{E}\big[\langle N, N\rangle_\infty\big]^{1/2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\
&= \mathbb{E}\big[\langle N, N\rangle_\infty\big]^{1/2}\|X\|_{H_c^2}.
\end{aligned}$$

Soit alors $H \in L^2(M)$ et $(H^n)_{n\ge 0}$ suite de $\mathcal{S}$ qui converge vers H dans $L^2(M)$ (densité cf. Prop. 6.2). Par l'isométrie, on a alors $H^n \cdot M \to H \cdot M$ dans H_c^2. Puis par la continuité de $X \in H_c^2 \mapsto \langle X, N\rangle_\infty \in L^1(\Omega)$:

$$\langle H \cdot M, N\rangle_\infty = \lim_{n\to+\infty}\langle H^n \cdot M, N\rangle_\infty = \lim_{n\to+\infty}(H^n \cdot \langle M, N\rangle)_\infty = (H \cdot \langle M, N\rangle)_\infty,$$

où les convergences ont lieu dans $L^1(\Omega)$ avec pour la dernière égalité l'utilisation, encore, de l'inégalité de Kunita-Watanabe :

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{+\infty}(H_s^n - H_s)\ d\langle M, N\rangle_s\right|\right] \le \mathbb{E}[\langle N, N\rangle_\infty]^{1/2}\|H^n - H\|_{L^2(M)}.$$

(On justifie de la même façon que $(H \cdot \langle M, N\rangle)_\infty$ est bien défini.) On a donc établi (6.4) pour $t = +\infty$. Pour conclure, il faut l'obtenir pour tout $t \ge 0$. Pour cela, il suffit de remplacer N par N^t, la martingale arrêtée en $t \ge 0$, dans l'égalité $\langle H \cdot M, N\rangle_\infty = (H \cdot \langle M, N\rangle)_\infty$ et on trouve $\langle H\cdot M, N\rangle_t = (H\cdot\langle M,N\rangle)_t$, ce qui achève de prouver la propriété caractéristique (6.4).

Il faut encore justifier que (6.4) caractérise effectivement $H\cdot M$. Pour cela, soit X une autre martingale de H_c^2 qui satisfait la même propriété (6.4), on a pour tout $N\in H_c^2$,

$$\langle H\cdot M - X, N\rangle = 0.$$

Le choix particulier $N = H\cdot M - X$ donne alors $\langle H\cdot M - X, H\cdot M - X\rangle = 0$ donc $\|H\cdot M - X\|_{H_c^2} = 0$, ie. $X = H\cdot M$. Cela termine la preuve de **1)**.

2) Pour terminer, on utilise les propriétés du crochet de deux martingales (Prop. 5.14) pour prouver la dernière propriété. Si $N\in H_c^2$, on a

$$\langle (H\cdot M)^T, N\rangle_t = \langle H\cdot M, N\rangle_{t\wedge T} = (H\cdot\langle M,N\rangle)_{t\wedge T} = (H\mathbf{1}_{[0,T]}\cdot\langle M,N\rangle)_t$$

où l'avant dernière égalité vient de la Proposition 6.3 et la dernière égalité est évidente puisqu'il s'agit de l'intégrale de Stieltjes. La martingale arrêtée $(H\cdot M)^T$ vérifie donc la propriété caractéristique de l'intégrale $(\mathbf{1}_{[0,T]}H)\cdot M$. Cela justifie la première partie de (6.5). On obtient la seconde partie en procédant de même :

$$\langle H\cdot M^T, N\rangle = H\cdot\langle M^T, N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle^T = (H\mathbf{1}_{[0,T]})\cdot\langle M,N\rangle$$

où à nouveau la dernière égalité est due au fait qu'il s'agit de l'intégrale de Stieltjes. □

Le résultat suivant est une propriété d'associativité de l'intégrale stochastique sous réserve de conditions convenables d'intégrabilité des processus à intégrer.

Proposition 6.4 (Associativité de l'intégrale stochastique L^2) *Soit $M\in H_c^2$. Si $K\in L^2(M)$ et $H\in L^2(K\cdot M)$ alors $HK\in L^2(M)$ et*

$$(HK)\cdot M = H\cdot(K\cdot M). \tag{6.6}$$

Démonstration : D'après le Théorème 6.1, on a

$$\langle K\cdot M, K\cdot M\rangle = K\cdot\langle M, K\cdot M\rangle = K^2\cdot\langle M,M\rangle,$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2K_s^2\ d\langle M,M\rangle_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2\ d\langle K\cdot M, K\cdot M\rangle_s\right] < +\infty$$

ce qui garantit $HK\in L^2(M)$. Pour (6.6), on montre la propriété caractéristique (6.4) : si $N\in H_c^2$, on a :

$$\langle (HK)\cdot M, N\rangle = HK\cdot\langle M,N\rangle = H\cdot(K\cdot\langle M,N\rangle) = H\cdot\langle K\cdot M, N\rangle = \langle H\cdot(K\cdot M), N\rangle$$

où la deuxième égalité utilise l'associativité de l'intégrale de Stieltjes. Comme l'égalité est vraie pour toute $N\in H_c^2$, elle exige $(HK)\cdot M = H\cdot(K\cdot M)$. □

Remarque 6.2 La proposition précédente légitime les écritures informelles suivantes

$$\int_0^t H_s(K_s\ dM_s) = \int_0^t H_sK_s\ dM_s.$$

De même (6.4) s'écrit

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s\ dM_s, N\right\rangle_t = \int_0^t H_s\ d\langle M,N\rangle_s.$$

En appliquant deux fois cette relation, on obtient aussi :

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s\ dM_s, \int_0^\cdot K_s\ dN_s\right\rangle_t = \int_0^t H_sK_s\ d\langle M,N\rangle_s. \tag{6.7}$$

En particulier, on a

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s\ dM_s, \int_0^\cdot H_s\ dM_s\right\rangle_t = \int_0^t H_s^2\ d\langle M,M\rangle_s.$$

Soient $M \in H_c^2$, $N \in H_c^2$ et $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$, comme $H \cdot M$ et $(H\cdot M)(K\cdot N) - \langle (H\cdot M),(K\cdot N)\rangle$ sont des martingales (en utilisant (6.7)), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ les moments suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dM_s\right] &= 0 && (6.8)\\
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)\left(\int_0^t K_s dN_s\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t H_sK_s\ d\langle M,N\rangle_s\right]. && (6.9)
\end{aligned}$$

Attention : ces relations (6.8), (6.9) ne seront plus forcément vraies pour les extensions de l'intégrale stochastique qu'on décrit ci-dessous pour les martingales locales.

Remarque 6.3 Le mouvement brownien est bien une martingale continue mais n'est pas borné dans L^2 (par exemple avec le Théorème 5.3 parce que son crochet $\langle B,B\rangle_t = t \to +\infty$). Cette section ne permet donc toujours pas de construire une intégrale contre le mouvement brownien. Les derniers obstacles sont levés dans la section suivante.

6.2 Par rapport à une martingale locale

En utilisant la propriété d'arrêt (6.5), on étend maintenant dans cette section la définition de $H \cdot M$ au cas où M est une martingale locale continue. Dans cette section, on considère M une martingale locale issue de 0.

Définition 6.5 (Espaces $L^2_{loc}(M)$) *On note $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t H_s^2\ d\langle M,M\rangle_s < +\infty \quad ps.$$

Pour une martingale locale M, on continue à noter $L^2(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty.$$

Théorème 6.2 (Existence de l'intégrale stochastique générale) *Soit M une martingale locale issue de 0. Pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H \cdot M$. De plus*

1. *la martigale locale $H \cdot M$ est caractérisée par :*
$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle, \tag{6.10}$$
pour toute martingale locale N ;
2. *la propriété d'arrêt (6.5) reste vraie : si T est un temps d'arrêt, on a*
$$(\mathbf{1}_{[0,T]} H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \tag{6.11}$$

Remarque 6.4 — On note habituellement $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$.

- — Cette définition étend celle du Théorème 6.1 : si $M \in H_c^2$ et $H \in L^2(M)$, alors les définitions de ce théorème et du Théorème 6.1 coïncident.
En effet, si $M \in H_c^2$ et $H \in L^2(M)$, l'égalité $\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle = H^2 \cdot \langle M, M\rangle$ entraîne d'abord que $H \cdot M \in H_c^2$, et ensuite les propriétés caractéristiques (6.4) et (6.10) montrent que les définitions des Théorèmes 6.1 et 6.2 coïncident.
- — La propriété d'associativité de la Proposition 6.4 reste vraie aussi sous des hypothèses convenables d'intégrabilité.
- — Le mouvement brownien B est une martingale locale pour laquelle le Théorème 6.2 définit donc l'intégrale $(H \cdot B)_t = \int_0^t H_s dB_s$ pour $H \in L^2_{loc}(B)$. Les intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B s'appellent les **intégrales d'Itô**. Le calcul stochastique lié à ces intégrales est le **calcul d'Itô**.

Démonstration : On définit

$$T_n = \inf\left(t \geq 0 : \int_0^t (1 + H_s^2) \, d\langle M, M\rangle_s \geq n\right).$$

Comme pour la Prop. 5.12, il s'agit d'une suite de temps d'arrêt, croissante vers $+\infty$. Comme on a

$$\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_t = \langle M, M\rangle_{t\wedge T_n} \leq \int_0^{T_n} d\langle M, M\rangle_s \leq n,$$

le Théorème 5.3 s'applique et assure que la martingale arrêtée M^{T_n} est dans H_c^2. De plus, $H \in L^2(M^{T_n})$, car par définition de T_n, on a aussi

$$\int_0^{+\infty} H_s^2 \, d\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle_s = \int_0^{T_n} H_s^2 \, d\langle M, M\rangle_s \leq n.$$

Pour chaque $n \geq 1$, on peut donc définir l'intégrale stochastique $H \cdot M^{T_n}$ par le Théorème 6.1 (cas L^2 borné). Par la propriété caractéristique (6.4), on vérifie facilement que nécessairement si $m > n$ alors $T_m \geq T_n$ et on a

$$H \cdot M^{T_n} = (H \cdot M^{T_m})^{T_n}$$

en effet

$$\begin{aligned}
\langle (H \cdot M^{T_m})^{T_n}, N\rangle_t &= \langle (H \cdot M^{T_m}), N\rangle_{t\wedge T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} H_s d\langle M^{T_m}, N\rangle_s \\
&= \int_0^{t\wedge T_n} H_s d\langle M, N\rangle_s^{T_m} = \int_0^{t\wedge T_n\wedge T_m} H_s d\langle M, N\rangle_s \\
&= \int_0^{t\wedge T_n} H_s d\langle M, N\rangle_s = \langle (H \cdot M, N\rangle_t^{T_n} \\
&= \langle (H \cdot M)^{T_n}, N\rangle_t.
\end{aligned}$$

Il existe donc un (unique) processus noté $H \cdot M$ qui étend tous les $H \cdot M^{T_n}$, ie. pour tout $n \geq 1$,

$$(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot M^{T_n}.$$

Explicitement, on pose

$$(H \cdot M)_t = \big(H \cdot M^{T_n}\big)_t \tag{6.12}$$

pour tout n tel que $T_n \geq t$. La discussion précédente justifie que la définition a bien un sens (elle ne dépend pas de n !). D'après le Théorème 6.1, les processus $(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot M^{T_n}$ sont des martingales de H_c^2, si bien que $H \cdot M$ est en fait une martingale locale.

1) On montre maintenant la propriété caractéristique (6.10). Pour cela, soit N une martingale locale issue de 0 et soient $T'_n = \inf(t \geq 0 : |N_t| \geq n)$ qui réduit N. On pose alors $S_n = T_n \wedge T'_n$. Comme $M^{S_n}, N^{S_n} \in H_2^c$, on a

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot M, N\rangle^{S_n} &= \langle (H \cdot M)^{S_n}, N^{S_n}\rangle \\
&= \langle (H \cdot M^{T_n})^{S_n}, N^{S_n}\rangle \quad (\text{car } S_n \leq T_n) \\
&= \langle H \cdot M^{T_n}, N^{S_n}\rangle \quad (\text{propriété (5.10) du crochet}) \\
&= H \cdot \langle M^{T_n}, N^{S_n}\rangle \quad (\text{d'après (6.4) du cas } L^2 \text{ borné}) \\
&= H \cdot \langle M^{T_n}, N\rangle^{S_n} \quad (\text{propriété (5.10) du crochet}) \\
&= H \cdot \langle M, N\rangle^{S_n\wedge T_n} = H \cdot \langle M, N\rangle^{S_n} \quad (S_n \leq T_n) \\
&= (H \cdot \langle M, N\rangle)^{S_n} \quad (\text{propriété de l'intégrale de Stieltjes}).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Comme $S_n \nearrow +\infty$, en faisant $n \to +\infty$, on déduit de (6.13) pour tout $t \geq 0$: $\langle H \cdot M, N\rangle_t = H \cdot \langle M, N\rangle_t$. Finalement, on a $\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$. La caractérisation de $H \cdot M$ par cette égalité pour toute martingale locale N se justifie exactement comme précédemment dans le Théorème 6.1 : si pour toute martingale locale N

$$\langle (H \cdot M), N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle = \langle X, N\rangle,$$

alors avec $N = (H \cdot M) - X$, on a $\langle (H \cdot M) - X, (H \cdot M) - X \rangle = 0$, et d'après le Th. 5.3 $(H \cdot M) - X$ est une vraie martingale locale L^2. La propriété de martingale donne alors $\mathbb{E}\big[\big((H \cdot M)_t - X_t\big)^2\big] = 0$, donc $(H \cdot M)_t - X_t = 0$ presque sûrement. Comme il s'agit de processus à trajectoires continues, on a $X = H \cdot M$, à indistiguabilité près (cf. Corollaire 5.1).

2) La propriété d'arrêt (6.11) est obtenue pour les martingales locales par les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 6.1 (noter que ces arguments utilisent seulement la propriété caractéristique (6.4) qu'on vient d'étendre). □

Remarque 6.5 Discutons maintenant de l'extension des formules de moments (6.8), (6.9) énoncées en Remarque 6.2. Soient M une martingale locale, $H \in L^2_{loc}(M)$ et $t \in [0, +\infty]$. Alors, sous la condition

$$\mathbb{E}\big[\langle H \cdot M, H \cdot M\rangle_t\big] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty,$$

on a $H \in L^2(M^t)$ et on peut appliquer le Théorème 5.3 à $(H \cdot M)^t$ pour obtenir

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s\, dM_s\right] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s\right].$$

De façon générale, la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique du cas borné dans L^2 est remplacée par

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\, dM_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s\right]. \tag{6.14}$$

En effet soit le majorant est $+\infty$ et l'inégalité est vraie, soit il est fini et l'estimation de la variance est valable et donne l'égalité.

L'énoncé suivant établit une approximation par des sommes de Riemann des intégrales stochastiques (contre une martingale locale) et complète le Lemme 5.4 dans le cas variation finie.

Proposition 6.5 (Approximation de Riemann) *Soit M une martingale locale continue et H un processus continu adapté. Alors, pour tout $t > 0$, pour toute suite $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité :*

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s\, dX_s. \tag{6.15}$$

Démonstration : Pour chaque $n\geq 1$, on définit un processus $H^{(n)}$ par

$$H_s^{(n)}=\sum_{i=0}^{p-1}H_{t_i^n}\mathbf{1}_{]t_i^n,t_{i+1}^n]}.$$

Dans ce cas, (6.15) est clair. Posons enfin pour tout $p\geq 1$

$$T_p=\inf\big(s\geq 0:|H_s|+\langle M,M\rangle_s\geq p\big) \tag{6.16}$$

et remarquons que $H, H^{(n)}$ et $\langle M,M\rangle$ sont bornés sur l'intervalle $]0,T_p]$. D'après la théorie L^2 de l'intégrale stochastique (cf. (6.9) pour une expression du moment d'ordre 2), pour tout p fixé,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\big((H^{(n)}\cdot M^{T_p})_t-(H\cdot M^{T_p})_t\big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\big((H^{(n)}\mathbf{1}_{[0,T_p]}\cdot M)_t-(H\mathbf{1}_{[0,T_p]}\cdot M)_t\big)^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\big(((H^{(n)}-H)\mathbf{1}_{[0,T_p]})\cdot M\big)_t^2\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^t (H_s^{(n)}-H_s)^2\mathbf{1}_{[0,T_p]}(s)\ d\langle M,M\rangle_s\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge T_p} (H_s^{(n)}-H_s)^2\ d\langle M,M\rangle_s\Big].
\end{aligned}$$

Sur $[0,T_p]$, on a $(H_s^{(n)}-H_s)^2\leq 4p^2$ et par continuité des trajectoires de H, $\lim_{n\to+\infty}H_s^{(n)}=H_s$. Par le théorème de convergence dominée (pour Stieltjes), il vient presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{t\wedge T_p}(H_s^{(n)}-H_s)^2\ d\langle M,M\rangle_s=0$$

Puis comme

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{t\wedge T_p}(H_s^{(n)}-H_s)^2\ d\langle M,M\rangle_s\right| &\leq \int_0^{t\wedge T_p}4p^2\ d\langle M,M\rangle_s\leq 4p^2\langle M,M\rangle_{t\wedge T_p}\\
&\leq 4p^2\langle M,M\rangle_{T_p}\leq 4p^3
\end{aligned}$$

le théorème de convergence dominée (pour $\mathbb{E}$) entraîne

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\big((H^{(n)}\cdot M^{T_p})_t-(H\cdot M^{T_p})_t\big)^2\Big]=0.$$

On a donc $(H^{(n)}\cdot M^{T_p})_t\to(H\cdot M^{T_p})_t$ dans L^2 et en utilisant la propriété d'arrêt (6.11), on en déduit la convergence dans L^2

$$\lim_{n\to+\infty}(H^{(n)}\cdot M)_{t\wedge T_p}=(H\cdot M)_{t\wedge T_p}.$$

Pour conclure, on remarque que $\mathbb{P}(T_p>t)\nearrow 1$ quand $p\to+\infty$, ce qui affaiblit la convergence L^2 obtenue en une convergence en probabilité. □

Le résultat suivant est une version du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques :

Théorème 6.3 *Soit X une semimartingale continue. Si H^n est une suite de processus localement bornés telle que $\lim_{n\to+\infty} H^n_t = 0$ pour tout $t \geq 0$ et telle qu'il existe un processus K borné satisfaisant $|H^n| \leq K$ pour tout $n \geq 1$, alors $(H^n \cdot X)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \to +\infty$, uniformément sur tout compact.*

Démonstration : Il s'agit de voir

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty} \sup_{s\leq t} |(H^n \cdot X)_s| = 0$$

ce qui est clair d'après les propriétés de l'intégrale de Stieltjes si X est un processus à variations finies. Il suffit donc de considérer le cas où X est une martingale locale.

On suppose alors X réduite par la suite de temps d'arrêt $(T_p)_{p\geq 1}$ donnée en (6.16) alors $(H^n)^{T_p}$ converge vers 0 dans $L^2(X^{T^p})$. D'après l'isométrie du Théorème 6.1, $(H^n \cdot X)^{T_p}$ converge vers 0 dans H^2_c. Comme $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(T_p \geq t) = 1$, on obtient la convergence en probabilité cherchée. □

6.3 Par rapport à une semimartingale

On achève dans cette section la construction de l'intégrale stochastique en intégrant finalement par rapport aux semimartingales continues. Pour cela, on dit qu'un processus progressif H est localement borné si

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0, \quad \sup_{s\leq t} |H_s| < +\infty.$$

En particulier, tout processus continu adapté est localement borné (cf. Prop. 4.1). De plus, si H est localement borné, pour tout processus V à variation finie on a :

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s|\, |dV_s| < +\infty.$$

De même, pour toute martingale locale M, on a $H \in L^2_{loc}(M)$ car

$$\int_0^t H_s^2\, d\langle M, M\rangle_s \leq \Big(\sup_{s\leq t} |H_s|\Big) \sup_{s\in[0,t]} \langle MM\rangle_s < +\infty.$$

Définition 6.6 (Intégrale par rapport à une semimartingale) *Soit $X = X_0 + M + A$ une semimartingale continue, et soit H un processus progressif localement borné. L'intégrale stochastique $H \cdot X$ est alors définie par*

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$$

où $H \cdot M$ est définie dans la Section 6.2 et $H \cdot A$ est définie en Section 5.1.4 (intégrale de Stieltjes). On note traditionnellement

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s \, dX_s.$$

Des propriétés déjà vues pour l'intégrale contre une martingale locale et contre un processus à variation finie, on déduit facilement :

Proposition 6.6 (Propriétés de l'intégrale stochastique)

1. *L'application $(H, X) \mapsto H \cdot X$ est bilinéaire.*
2. *$H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X$, si H et K sont localement bornés.*
3. *Pour tout temps d'arrêt T, $(H \cdot X)^T = (H\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot X = H \cdot X^T$.*
4. *Si X est une martingale locale (resp. si X est un processus à variation finie) alors il en est de même pour $H \cdot X$.*
5. *Si H est un processus progressif de la forme $H_s = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$ où, pour chaque i, $H_{(i)}$ est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, alors*
$$(H \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$
6. *Soit X une semimartingale continue et soit H un processus continu adapté. Alors, pour tout $t > 0$, pour toute suite $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité :*
$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s \, dX_s.$$

Remarque 6.6

— Remarquer que dans la propriété **5)**, on ne suppose pas que les variables aléatoires $H_{(i)}$ sont bornées.

— Le résultat d'approximation dans **6)** généralise dans le cas de l'intégration stochastique l'approximation des intégrales de Riemann. Ce résultat sera utile dans la suite, notamment pour prouver la formule d'Itô.

— Dans ce résultat, il est essentiel de considérer $H_{t_i^n}$ dans l'approximation de Riemann. Un autre choix conduit à un autre type d'intégrale stochastique : par exemple $H_{t_{i+1}^n}$ mène à une **intégrale** dite **anticipante**, et $H_{(t_{i+1}^n + t_i^n)/2}$ mène à l'**intégrale de Stratonovich** alors que pour le choix $H_{t_i^n}$, fait dans ce chapitre, on obtient l'intégrale d'Itô.

Démonstration : Toutes les propriétés viennent de celles vues en Section 5.1 pour la partie variation finie et en Section 6.2 pour la partie martingale locale. Par exemple, **6)** vient du Lemme 5.4 et de la Proposition 6.5. □

Le résultat suivant est une version du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques :

Théorème 6.4 *Soit X une semimartingale à trajectoires continues. Si $H^{(n)}$ est une suite de processus localement bornés telle que $\lim_{n\to+\infty} H_t^{(n)} = 0$ pour tout $t \geq 0$ et telle qu'il existe un processus K borné satisfaisant $|H^{(n)}| \leq K$ pour tout $n \geq 1$, alors $\big(H^{(n)}\cdot X\big)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \to +\infty$, uniformément sur tout compact.*

Démonstration : Il s'agit de voir

$$\sup_{s\leq t} \big|(H^{(n)} \cdot X)_s\big| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to +\infty,$$

ce qui est clair d'après les propriétés de l'intégrale de Stieltjes si X est un processus à variations finies. Il suffit donc de considérer le cas où X est une martingale locale. On suppose X réduite par la suite de temps d'arrêt $(T_p)_{p\geq 1}$ donnée en (6.16) alors $(H^{(n)})^{T_p}$ converge vers 0 dans $L^2(X^{T_p})$. D'après l'isométrie du Théorème 6.1, $(H^{(n)} \cdot X)^{T_p}$ converge vers 0 dans H_c^2. Comme $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(T_p \geq t) = 1$, on obtient la convergence en probabilité cherchée. □

6.4 Cas non continu

La théorie d'intégration stochastique présentée dans ce chapitre s'applique pour des semimartingales à trajectoires continues. On pourrait s'intéresser à des semimartingales à trajectoires *càdlàg* (continue à droite et avec des limites à gauche) ou *càglàd* (continue à gauche avec des limites à droite). On intègre alors des processus dits **prévisibles** ($(\mathcal{F}_{t^-})_{t\geq 0}$-adaptés et continus à gauche) ou **optionnels** ($(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- adaptés et continus à droite). Dans le cadre càdlàg, la décomposition d'une semimartingale en martingale locale + processus à variation bornée n'est plus unique (heuristiquement : on peut jouer sur les sauts) à moins d'imposer par exemple que le processus à variation finie soit prévisible (dans ce cas, on ″fixe″ les sauts).
Il faut cependant introduire deux crochets $[M, M]_t$ et $\langle M, M\rangle_t$ (qui est la projection prévisible de $[M, M]_t$). Chacun de ces deux crochets hérite d'une des propriétés fondamentales (5.2), (5.3) de l'unique crochet défini dans le cadre continu (cf. Théorème 5.2), on retrouve ainsi que

— $[M, M]_t = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_i\in\Delta} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$ est la variation quadratique de M où Δ est une subdivision de $[0, t]$ et $|\Delta|$ désigne son pas.

— $\langle M, M\rangle$ est l'unique processus prévisible tel que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale locale.

Dans ce contexte, il faut alors porter une attention particulière aux sauts $\Delta X_t = X_t - X_{t^-}$ du processus. On consultera [Pro] pour une introduction au calcul stochastique avec saut ou, pour le cas spécifique des processus de Lévy, [CT] ou [App].

Chapitre 7

Formule d'Itô et conséquences

Dans ce chapitre, on prouve la formule d'Itô, véritable clef de voûte du calcul stochastique. Celle-ci montre que lorsqu'on applique une application C^2 à une semimartingale, on conserve une semimartingale ; elle en donne en plus la décomposition (martingale locale + processus à variation finie). La formule d'Itô est prouvée en Section 7.1. Des conséquences importantes en sont présentées dans les sections suivantes : théorème de Lévy (caractérisation du mouvement brownien par son crochet, Section 7.2), théorème de Dubins-Schwarz (Section 7.3), inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG, Section 7.4), théorème de représentation des martingales (Section 7.5), formule de Tanaka (Section 7.6).

7.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe C^2 de p semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Rappelons la formule de changement de variable classique : si F, g sont de classe C^1 alors $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\, g'(t)$ s'écrit

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))g'(s)\, ds.$$

Si F est C^1 et g est seulement absolument continue (c'est à dire à variation finie) alors on a encore avec l'intégrale de Stieltjes :

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))\, dg(s).$$

La même formule reste vraie pour un processus X à variation finie en faisant un calcul trajectoriel (pour chaque ω fixé, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est à variation finie et le cas précédent s'applique) : pour F une fonction de classe C^1, on a alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s.$$

La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semimartingales lorsque F est C^2 ; la formule fait alors apparaître un terme supplémentaire dû au fait que ces processus ne sont pas à variation finie, cf. (7.1) ci-dessous.

Théorème 7.1 (Formule d'Itô) *Soient X une semimartingale et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s. \tag{7.1}$$

Si on considère p semimartingales continues $X^1, \dots, X^p$ et $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^2 alors,

$$\begin{aligned} F(X_t^1, \dots, X_t^p) &= F(X_0^1, \dots, X_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, \dots, X_s^p)\, dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \dots, X_s^p)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Démonstration : On traite d'abord le cas (7.1) c'est à dire $p = 1$. Considérons une suite $\{0 = t_0^n < \dots < t_{p_n}^n = t\}_{n \geq 1}$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors en télescopant la somme, on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n - 1} \big(F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})\big).$$

La formule de Taylor (Lagrange) à l'ordre 2 sur l'intervalle (non ordonné) $(X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n})$ donne pour chaque $\omega \in \Omega$:

$$F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) = F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{f_{n,i}(\omega)}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

où

$$f_{n,i} \in \left[\inf_{\theta \in [0,1]} F''\big(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big), \sup_{\theta \in [0,1]} F''\big(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})\big)\right].$$

D'après 6) dans la Proposition 6.6 (approximation à la Riemann des intégrales stochastiques) avec $H_s = F'(X_s)$, on a au sens de la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n - 1} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t F'(X_s)\, dX_s, \quad n \to +\infty.$$

Pour prouver la formule d'Itô (7.1), il reste à établir la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n - 1} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s, \quad n \to +\infty, \tag{7.3}$$

car alors, par unicité presque sûre de la limite en probabilité, on aura pour tout $t \geq 0$:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \quad \text{ps.}$$

Les deux termes de l'égalité ci-dessus étant continus en t, les deux processus seront en fait indistinguables, ce qui donnera (7.1).

Il reste donc à établir (7.3) ; pour cela, on note pour $n < m$:

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^n})^2 \\ T_{n,m} &= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,j}(\omega) \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{j=0}^{p_m-1} = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}}$ (subdivision emboîtées), on a

$$T_m = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^n})^2$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned} &|T_m - T_{n,m}| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{i:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} \big(f_{m,j}(\omega) - f_{n,i}(\omega)\big)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \\ &\leq Z_{n,m} \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| = Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \end{aligned}$$

avec

$$Z_{n,m} = \sup_{0 \leq i \leq p_n-1} \left(\sup_{\{j:t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} |f_{m,j} - f_{n,i}| \right).$$

La continuité de F'' assure que $Z_{n,m} \xrightarrow{ps} 0$ quand $n, m \to +\infty$. D'après l'interprétation ″variation quadratique″ du crochet (Proposition 5.17), on a $\sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t$. Et donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_1 \geq 1$ tel que pour tout $m > n \geq n_1$,

$$\mathbb{P}\big(|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3\big) \leq \mathbb{P}\left(Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3. \qquad (7.4)$$

(Comme $Z_{n,m} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\sum_{j=0}^{p_m-1}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X\rangle_t$, le théorème de Slutsky assure $Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.) Ensuite, comme les $(t^m_j)_{j:t^n_i \le t^m_j < t^n_{i+1}}$ forment une subdivision de $[t^n_i, t^n_{i+1}]$, la Proposition 5.17 montre aussi qu'en probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\text{-}\lim_{m\to+\infty} T_{n,m} &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \sum_{\{j:t^n_i \le t^m_j < t^n_{n+1}\}} (X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 \\
&= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \left(\langle X, X\rangle_{t^n_{i+1}} - \langle X, X\rangle_{t^n_i}\right) \\
&= \int_0^t h_n(s)\ d\langle X, X\rangle_s,
\end{aligned}$$

où $h_n = \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}\mathbf{1}_{[t^n_i, t^n_{i+1}[}$. Ainsi il existe $n_2 \ge 1$ tel que pour $m \ge n_2$

$$\mathbb{P}\left(\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right) \le \varepsilon/3. \tag{7.5}$$

Puis comme F est C^2, on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(s) = F''(X_s)$ ps. De plus, on a pour tout $s \in [t^n_i, t^n_{i+1}[$

$$\left|h_n(s) - F''(X_s)\right| = \left|f_{n,i} - \lim_{m\to+\infty} f_{m,n}\right| = \lim_{m\to+\infty} \left|f_{n,i} - f_{m,j}\right| \le \lim_{m\to+\infty} Z_{n,m},$$

et donc

$$\sup_{s\in[0,t]} |h_n(s) - F''(X_s)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to +\infty.$$

Il existe donc aussi $n_3 \ge 1$ tel que pour $n \ge n_3$

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_n(s)\ d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right) \le \varepsilon/3. \tag{7.6}$$

Comme

$$\begin{aligned}
&\left\{\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right\} \\
&\subset \ \{|T_m - T_{n,m}| \ge \varepsilon/3\} \\
&\quad \cup \left\{\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right\} \\
&\quad \cup \left\{\left|\int_0^t h_n(s)\ d\langle X, X\rangle_s - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon/3\right\}
\end{aligned}$$

en combinant (7.4), (7.5), (7.6), et en prenant $m > n > \max(n_1, n_2, n_3)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=0}^{p_m-1} f_{mj}(X_{t^m_{j+1}} - X_{t^m_j})^2 - \int_0^t F''(X_s)\ d\langle X, X\rangle_s\right| \ge \varepsilon\right) \le \varepsilon$$

ce qui prouve (7.3) puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Finalement, la formule d'Itô (7.1) est prouvée pour $p = 1$.

Dans le cas où p est quelconque, la formule de Taylor (toujours à l'ordre 2) donne

$$\begin{aligned}
&F(X^{(1)}_{t^n_{i+1}}, \dots, X^{(p)}_{t^n_{i+1}}) - F(X^{(1)}_{t^i_i}, \dots, X^{(p)}_{t^n_i}) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial x_k}(X^{(1)}_{t^n_i}, \dots, X^{p}_{t^n_i})(X^{(k)}_{t^n_{i+1}} - X^{(k)}_{t^n_i}) + \sum_{k,l=1}^{p} \frac{f^{k,l}_{n,i}}{2}(X^{(k)}_{t^n_{i+1}} - X^{(k)}_{t^n_i})(X^{(l)}_{t^n_{i+1}} - X^{(l)}_{t^n_i})
\end{aligned}$$

avec

$$f^{k,l}_{n,i} \in \left[\inf_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^{(1)}_{t^n_i} + \theta(X^{(1)}_{t^n_{i+1}} - X^{(1)}_{t^n_i}), \dots), \sup_{\theta\in[0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^{(1)}_{t^n_i} + \theta(X^{(1)}_{t^i_{i+1}} - X^{(1)}_{t^n_i}), \dots)\right].$$

Le 6) dans la Proposition 6.6 donne à nouveau la limite cherchée pour les termes faisant intervenir les dérivées premières :

$$\sum_{i=1}^{p_i-1} \frac{\partial F}{\partial x_k}(X^{(1)}_{t^n_i}, \dots, X^{(p)}_{t^n_i})(X^{(k)}_{t^n_{i+1}} - X^{(k)}_{t^n_i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{k=1}^{p} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X^{(1)}_s, \dots, X^{(p)}_s)\, dX^{(k)}_s.$$

En adaptant légèrement les arguments du cas $p = 1$, on montre que pour tous $k, l \in \{1, \dots, p\}$:

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} f^{k,l}_{n,i}(X^{(k)}_{t^n_{i+1}} - X^{(k)}_{t^n_i})(X^{(l)}_{t^n_{i+1}} - X^{(l)}_{t^n_i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X^{(1)}_s, \dots, X^{(p)}_s)\, d\langle X^{(k)}, X^{(l)}\rangle_s, \quad n \to +\infty.$$

Cela achève la preuve de la formule d'Itô dans le cas général (7.2). □

Un cas particulier important de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties.

Corollaire 7.1 (IPP) *Si X et Y sont deux semimartingales continues, on a*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y\rangle_t. \tag{7.7}$$

Le terme $\langle X, Y\rangle$ est nul si X ou Y est à variation finie. Il est présent quand on considère de (vraies) semimartingales et ce terme supplémentaire témoigne de la différence entre le calcul stochastique et le calcul différentiel déterministe.

Démonstration : Appliquer la formule d'Itô à $F(x, y) = xy$ qui est bien de classe C^2 en x, y et noter que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

□

En particulier, si $Y = X$ on obtient

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\, dX_s + \langle X, X\rangle_t.$$

Remarque 7.1 — Lorsque $X = M$ est une martingale locale, on sait que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale locale (définition du crochet du Théorème 5.2). La formule précédente montre que cette martingale locale est en fait

$$M_0^2 + 2\int_0^t M_s\, dM_s,$$

ce qu'on aurait pu voir directement sur la démonstration donnée en Section 5.2 puisqu'une lecture attentive de la démonstration indique que la construction de $\langle M, M\rangle_t$ fait intervenir $\sum_{i=0}^{p_n} M_{t_i^n}(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})$ qui sont des approximations (de type Riemann) de l'intégrale stochastique $\int_0^t M_s\, dM_s$.

— En prenant $X_t^1 = t$ et $X_t^2 = X_t$, on a aussi pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = {} & F(0, X_0) \\ & + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s}_{\text{variation finie}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

En fait, il suffit de prendre $F \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ie. F est C^1 en $t \in \mathbb{R}_+$ et C^2 en $x \in \mathbb{R}$.

Retour au mouvement brownien

Pour un $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement brownien B, la formule d'Itô s'écrit

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\, ds.$$

En prenant $X_t^1 = t$ et $X_t^2 = B_t$, (7.8) devient : pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(s, B_s)\, ds.$$

Si $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^p)$ est un $(\mathcal{F}_t)_t$-mouvement brownien en dimension d alors les B^i sont des mouvements browniens indépendants. On a vu au chapitre précédent que dans ce cas $\langle B^i, B^j \rangle = 0$ lorsque $i \neq j$ et $d\langle B^i, B^i \rangle_s = ds$. La formule d'Itô montre alors que, pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$,

$$F(B_t^1, \ldots, B_t^p) \quad = \quad F(B_0^1, \ldots, B_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^1, \ldots, B_s^p) dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s^1, \ldots, B_s^p) ds$$

où $\Delta F = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de F. On a aussi une formule analogue pour $F(t, B_t^1, \ldots, B_t^p)$.

En particulier si F est harmonique (ie. $\Delta F = 0$) alors $F(B_t^1, \ldots, B_t^p)$ est une martingale locale.

Exponentielles stochastiques

On définit maintenant l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale locale M quelconque. La formule d'Itô justifie qu'il s'agit d'une martingale locale et explique la terminologie, cf. la Remarque 7.2 ci-dessous. Pour commencer, on dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire en sont.

Proposition 7.1 *Soit M une martingale locale. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t\right).$$

Le processus $\mathcal{E}(\lambda M)$ est une martingale locale.

Démonstration : Si $F(x, r)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la formule d'Itô entraîne que

$$\begin{aligned} F\big(M_t, \langle M, M \rangle_t\big) \quad &= \quad F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s, \langle M, M \rangle_s\big)\, dM_s \\ &\qquad + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \big(M_s, \langle M, M \rangle_s\big)\, d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

Le processus $F\big(M_t, \langle M, M \rangle_t\big)$ est une martingale locale dès que sa partie à variation finie s'annule, ie. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Il est immédiat que cette condition est satisfaite par la fonction $F(x, r) = \exp\big(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r\big)$ (plus précisément par les parties réelle et imaginaire de cette fonction). $\square$

Remarque 7.2 Avec $F(x,r) = \exp\big(x - r/2\big)$ (prendre $\lambda = 1$ précédemment), $\frac{\partial F}{\partial x}(x,r) = F(x,r)$, si bien que l'identité

$$F\big(M_t, \langle M, M\rangle_t\big) = F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\big(M_s, \langle M, M\rangle_s\big)\ dM_s$$

s'écrit

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s\ dM_s \tag{7.9}$$

ou en écriture symbolique d'EDS (cf. Chapitre **??**) : $d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)dM$, ce qui généralise l'équation $dy = ydx$ de solution $y(x) = e^x$ avec la condition $y(0) = 1$ ou l'équation $dy_t = y_t dg_t$ de solution $y_t = \exp(g_t)$ si g est à variation finie nulle en 0 et avec la condition initiale $y_0 = 1$. Cette propriété justifie l'appelation ″exponentielle stochastique″ de M pour $\mathcal{E}(M)$.

Proposition 7.2 *Soit $f \in L^2_{loc}(B)$. Si pour une constante C finie, on a*

$$\int_0^t f(s)^2 ds \leq C \qquad ps$$

alors $\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)$ est une vraie martingale de carré intégrable et, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)_t] = 1$
Si $f \in L^2_{loc}(B)$ est à valeurs complexes, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq C \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\left|\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)\right|^2\right] < +\infty \qquad et \qquad \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)\right] = 1.$$

Démonstration : Notons $Z_t = \mathcal{E}(\int_0^\cdot f(s)dB_s)_t$. On commence par supposer que $|f(s)| \leq k$ pour tout $s \in [0,t]$. Pour l'exponentielle stochastique, la formule d'Itô s'écrit

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s f(s)\ dB_s.$$

On montre alors que

$$fZ \in L^2_{[0,t]}(B) = \left\{H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} :\ \text{progressif avec } \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right] < +\infty\right\}$$

pour assurer que $\int_0^t Z_s f(s)\ dB_s$ est une (vraie) martingale et que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. De $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on déduit

$$Z_u^2 \leq 2\left(1 + \left(\int_0^u Z_s f_s dB_s\right)^2\right), \quad u \leq t.$$

Pour le calcul du moment d'ordre 2 de $\int_0^u Z_s f_s dB_s$, on utilise l'isométrie d'Itô pour déduire pour $u \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Z_u^2\big] &\leq 2\left(1+\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 f_s^2\big]\, ds\right) \\ &\leq 2\left(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2\big]\, ds\right). \end{aligned} \tag{7.10}$$

A priori comme $\mathbb{E}[Z_s^2]$ n'est pas finie, on considère les temps d'arrêt $T_n = \inf\big(t \geq 0 : Z_t \geq n\big)$, $n \geq 1$, qui réduisent la martingale locale Z. En faisant comme précédemment, on peut remplacer (7.10) par

$$\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u\leq T_n\}}\big] \leq \mathbb{E}\big[Z_{u\wedge T_n}^2\big] \leq 2\left(1+k^2\int_0^u \mathbb{E}\big[Z_s^2 \mathbf{1}_{s\leq T_n}\big]\, ds\right). \tag{7.11}$$

On peut alors appliquer le résultat suivant à $\mathbb{E}\big[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u\leq T_n\}}\big]$:

Lemme 7.1 (Gronwall) *Soit g une fonction positive localement intégrable définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour $a, b \geq 0$*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)\, ds. \tag{7.12}$$

Alors $g(t) \leq a\exp(bt)$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve (Gronwall). En multipliant par e^{-bt}, l'hypothèse (7.12) s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds\right] \leq a\exp(-bt)$$

ce qui, en intégrant, donne

$$\exp(-bt)\int_0^t g(s)ds \leq \frac{a}{b}(1-\exp(-bt)).$$

On obtient le résultat en reportant l'inégalité ci-dessus dans l'hypothèse (7.12) :

$$g(t) \leq a + b\frac{a}{b}e^{bt}(1-\exp(-bt)) = ae^{bt}.$$

□

Le lemme de Gronwall (Lemme 7.1) assure alors $\mathbb{E}[Z_s^2 \mathbf{1}_{\{u\leq T_n\}}] \leq 2\exp(2k^2 s)$ et par convergence monotone lorsque $n \to +\infty$ $\mathbb{E}[Z_s^2] \leq 2\exp(2k^2 s)$. On a donc Z_s de carré intégrable et borné dans L^2 pour $s \in [0,t]$. Cela garantit $fZ \in L^2_{[0,t]}(B)$ et $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

Dans le cas général, on pose $f_n = (f\wedge n)\vee(-n)$ et on applique le cas précédent à f_n. Par convergence monotone $\int_0^t f_n(u)^2 du \nearrow \int_0^t f(u)^2 du$, $n \to +\infty$, et par isométrie et convergence dominée $\int_0^t f_n(u)dB_u \xrightarrow{L^2} \int_0^t f(u)dB_u$ car

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_n(u)\, dB_u - \int_0^t f(u)\, dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (f_n(u)-f(u))^2\, du\right].$$

On a donc
$$\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\ ds$$
et (comme la convergence en probabilité se conserve en appliquant une application continue) on a avec des notations évidentes $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$, $n \to +\infty$. Puis
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[Z_n(t)^2\big] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^t f_n(s)\ dB_s - (4-3)\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\qquad \times \mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\leq 1 \times \exp(3C)
\end{aligned}$$
en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas précédent pour avoir
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(4\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 8\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(\int_0^t 4 f_n(s)\ dB_s\right)\right] = 1.$$
On a donc $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ uniformément intégrable. D'après le Théorème de Vitali, la convergence $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$ se renforce en $Z_n(t) \xrightarrow{L^1} Z(t)$ et on a en particulier $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n(t)] = \mathbb{E}[Z(t)]$, ce qui assure $\mathbb{E}[Z(t)] = 1$. On a aussi $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s]$ et $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] = Z_n(s) \xrightarrow{L^1} Z(s)$. D'où $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] = Z(s)$ et Z est donc une martingale.
Puis, on a mieux que l'uniforme intégrabilité dans L^1 : en effet
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n(t)^3] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{3}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(3\int_0^t f_n(s)\ dB_s - \frac{18-15}{2}\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(6\int_0^t f_n(s)\ dB_s - 18\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\qquad \times \mathbb{E}\left[\exp\left(15\int_0^t f_n(s)^2\ ds\right)\right]^{1/2} \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot 6 f_n(s)\ dB_s\Big)_t\Big] \exp(15C/2) = \exp(15C/2)
\end{aligned}$$
justifie que $(Z_n(t))_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable dans L^2. On en déduit alors que $Z_n(t) \xrightarrow{L^2} Z(t)$ et donc $Z(t) \in L^2$.

Pour le cas complexe, on écrit $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ et on se ramène assez facilement au cas réel. □

7.2 Théorème de Lévy

Le résultat suivant permet de caractériser le mouvement brownien par son crochet parmi les martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 7.2 (Caractérisation du MB par son crochet) *Soit* $X = \big(X^{(1)}, \dots, X^{(d)}\big)$ *un processus à trajectoires continues* $(\mathcal{F}_t)_t$*-adapté issu de* 0*. Il y a équivalence entre*

1. *X est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien en dimension d.*
2. *Les processus $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales continues et de plus*
$$\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = \delta_{i,j}\, t$$
où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue M issue de 0 est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien si et seulement si $\langle M, M\rangle_t = t$.

Remarque 7.3 Il est crucial que le processus soit à trajectoires continues. Par exemple le processus de Poisson (standard) vérifie la même propriété de crochet mais il est à trajectoires càdlàg.

Démonstration : Le sens 1) $\Rightarrow$ 2) est connu, cf. Remarques 5.6 et **??**. On montre la réciproque. Pour cela, soit $u \in \mathbb{R}^d$. Alors $u \cdot X_t = \sum_{j=1}^d u_j X_t^{(j)}$ est une martingale locale de processus croissant
$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d u_j u_k \langle X^{(j)}, X^{(k)}\rangle_t = \sum_{j=1}^d u_j^2 t = \|u\|^2 t.$$
D'après la Proposition 7.1 sur les exponentielles stochastiques, $\mathcal{E}(iuX) = \exp\big(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\big)$ est une martingale locale. Cette martingale locale est bornée sur les intervalles $[0, T]$, $T > 0$, il s'agit donc d'une vraie martingale. La propriété de martingale donne alors pour $s < t$
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \Big| \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s\right).$$
En particulier, pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A \exp\big(iu \cdot (X_t - X_s)\big)\Big] \\
= \ & \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \exp\left(iu \cdot (X_t - X_s)\right) | \mathcal{F}_s\big]\Big] \\
= \ & \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) | \mathcal{F}_s\right]\right] \\
= \ & \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t\right) \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(A)\exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\right). \tag{7.13}$$

Avec $A=\Omega$, (7.13) montre que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0,(t-s)I_d)$. Ensuite pour $A\in\mathcal{F}_s$ de probabilité $\mathbb{P}(A)>0$, en notant $\mathbb{P}_A(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot|A)$, on a

$$\mathbb{E}_A\Big[\exp\big(iu\cdot(X_t-X_s)\big)\Big] = \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)\right)$$

ie. $\mathcal{L}(X_t-X_s|A)=\mathcal{N}\big(0,(t-s)I_d\big)$. Pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}_A\big[f(X_t-X_s)\big] = \mathbb{E}\big[f(X_t-X_s)\big]$$

soit

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A f(X_t-X_s)\big] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\big[f(X_t-X_s)\big].$$

Comme c'est vrai pour tout $A\in\mathcal{F}_s$, on a $X_t-X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ (argument de classes monotones).

Finalement, pour tout $0=t_0<t_1<\dots<t_p$, le vecteur $\big(X^{(i)}_{t_j}-X^{(i)}_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ est un vecteur gaussien (car obtenu en regroupant p vecteurs gaussiens indépendants). Par transformation linéaire, $(X_{t_i})_{1\le i\le p}$ est encore un vecteur gaussien pour tout $(t_i)_{1\le i\le p}$ et donc X est un processus gaussien. Comme le vecteur $\big(X^i_{t_j}-X^i_{t_{j-1}}\big)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le p}}$ a ses composantes indépendantes, le processus X est finalement gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires et (par hypothèse) à trajectoires continues : cela justifie que $X^{(1)},\dots,X^{(d)}$ sont d mouvements browniens indépendants. □

7.3 Dubins-Schwarz

Le résultat suivant montre que pour les martingales locales, le crochet est une horloge interne qui permet de retrouver le processus quand on évalue un mouvement brownien avec cette horloge. C'est une preuve supplémentaire du rôle central du mouvement brownien dans la classe des martingales locales continues.

Théorème 7.3 (Dubins-Schwarz) *Soit M une martingale locale continue issue de 0 et telle que $\langle M,M\rangle_\infty=+\infty$ ps. Alors, il existe un mouvement brownien β tel que*

$$ps \quad \forall t\ge 0,\quad M_t=\beta_{\langle M,M\rangle_t}.$$

Remarque 7.4
— En grossissant l'espace de probabilité on peut se débarrasser de la restriction $\langle M,M\rangle_\infty=+\infty$ ps.
— Le mouvement brownien β n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ initiale de M, mais par rapport à une filtration « changée de temps ».

— Il s'agit d'un résultat existentiel : le résultat est valable pour un certain mouvement brownien (construit par la preuve du théorème) et pas pour un mouvement brownien quelconque.

Démonstration : Pour tout $r \geq 0$, on définit un temps d'arrêt τ_r en posant

$$\tau_r = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > r\big).$$

L'hypothèse sur $\langle M, M\rangle$ assure que $\tau_r < +\infty$ ps. De plus, la fonction $r \mapsto \tau_r$ est

— croissante car si $r \leq s$ alors

$$\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > s\} \subset \{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > r\}$$

et en passant aux inf : $\tau_r \leq \tau_s$;

— continue à droite car si on note $\alpha = \lim_{s\searrow r} \tau_s$, on a d'abord $\alpha \geq \tau_r$ par croissance, puis si l'inégalité est stricte, on aurait $\tau_r < \beta < \alpha \leq \tau_s$ pour tout $s > r$ et nécessairement $r < \langle M, M\rangle_\beta \leq s$ pour tout $s > r$ ce qui est absurde (car on peut prendre s arbitrairement proche de r) ;

— avec des limites à gauche en $r > 0$ avec

$$\lim_{s\nearrow r} \tau_s = \tau_{r^-} = \inf\big(t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t = r\big).$$

La fonction $r \mapsto \tau_r$ est donc croissante càdlàg. On pose alors $\beta_r = M_{\tau_r}$. Le processus β est adapté par rapport à la filtration donnée par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, $r \geq 0$. Remarquons que cette filtration satisfait les conditions habituelles (puisque lorsque $(T_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt décroissants vers T on a $\mathcal{F}_T = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_{T_n}$, cf. Prop. 4.2).

Lemme 7.2 *Les intervalles de constance de M et de $\langle M, M\rangle$ sont ps les mêmes. En d'autres termes, on a ps pour tous $a < b$,*

$$M_t = M_a, \forall t \in [a, b] \Longleftrightarrow \langle M, M\rangle_t = \langle M, M\rangle_a, \forall t \in [a, b].$$

Démonstration : De la gauche vers la droite, utiliser l'approximation habituelle de $\langle M, M\rangle_t$. De la droite vers la gauche, appliquer le Corollaire 5.1 ($\langle M, M\rangle = 0$: M est indistinguable de M_0) au processus $M_{(a+t)\wedge T} - M_a$ pour un temps d'arrêt T convenable. □

Revenons à la preuve du Théorème 7.3. On a ps pour tout $r > 0$,

$$\lim_{s\nearrow r} \beta_s = \lim_{s\nearrow r} M_{\tau_s} = M_{\tau_{r^-}} = M_{\tau_r} = \beta_r.$$

où l'avant dernière égalité vient du Lemme 7.2 et du fait que pour $t \in [\tau_{r^-}, \tau_r]$, on a $\langle M, M\rangle_t = r$. Par ailleurs, par composition de telles fonctions, les trajectoires de β sont clairement continues à droite ; on conclut que le processus β est à trajectoires continues.

Nous montrons ensuite que β_s et $\beta_s^2 - s$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$. Pour tout $n \geq 1$, les martingales locales arrêtées M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M, M\rangle^{\tau_n}$ sont des vraies martingales uniformément intégrables (d'après le Théorème 5.3 puisque $\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_\infty = \langle M, M\rangle_{\tau_n} = n$). Le théorème d'arrêt s'applique pour ces martingales uniformément intégrables et donne alors pour $r \leq s \leq n$:

$$\mathbb{E}[\beta_s|\mathcal{G}_r] = \mathbb{E}[M_{\tau_s}^{\tau_n}|\mathcal{F}_{\tau_r}] = M_{\tau_r}^{\tau_n} = \beta_r$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta_s^2 - s|\mathcal{G}_r] &= \mathbb{E}\big[(M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_s}|\mathcal{F}_{\tau_r}\big] \\
&= (M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n}\rangle_{\tau_r} \\
&= \beta_r^2 - r.
\end{aligned}$$

On a donc $\langle \beta, \beta\rangle_s = s$. Le Théorème 7.2 (Théorème de Lévy avec $d = 1$) assure alors que β est un $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$-mouvement brownien. Finalement, par définition de β, on a ps pour tout $t \geq 0$,

$$\beta_{\langle M,M\rangle_t} = M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}}.$$

On a

$$\tau_{\langle M,M\rangle_t} = \inf\big(s \geq 0 : \langle M, M\rangle_s > \langle M, M\rangle_t\big) \geq t,$$

si l'inégalité est stricte alors $\langle M, M\rangle$ est constante sur $[t, \tau_{\langle M,M\rangle_t}]$, et d'après le Lemme 7.2 M aussi, ce qui assure $M_{\tau_{\langle M,M\rangle_t}} = M_t$ et conclut que ps pour tout $t \geq 0$ on a $M_t = \beta_{\langle M,M\rangle_t}$. Par continuité des trajectoires, les deux processus sont indistinguables. □

7.4 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Dans cette section, on prouve les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) qui montrent que pour une martingale locale M

$$\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_t^m\big] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big[|M_t^*|^{2m}\big]$$

où $M_t^* = \max_{0\leq s\leq t}|M_s|$ sont de même ordre de grandeur sur $[0, +\infty[$ pour tout $m > 0$.

Théorème 7.4 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy) *Pour tout réel $p \geq 0$, il existe des constantes c_p, C_p telles que pour toutes martingale locale M continue issue de 0,*

$$c_p\,\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\big] \leq \mathbb{E}\big[(M_\infty^*)^p\big] \leq C_p\,\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}\big] \tag{7.14}$$

où $M_t^* = \sup_{0\leq s\leq t}|M_s|$.

Remarque 7.5 Si T est un temps d'arrêt quelconque, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^T, on obtient les mêmes inégalités avec T à la place de $+\infty$; en particulier, on a les mêmes inégalités avec t à la place de $+\infty$.

On commence par les résultats préliminaires suivant :

Proposition 7.3 (Inégalités de martingales) *Soit M une martingale continue bornée et de variation quadratique bornée. Pour tout temps d'arrêt T, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] &\leq C_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big], \quad m > 0 & (7.15)\\ B_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big], \quad m > 1/2 & (7.16)\\ B_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big] \leq C'_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big], \quad m > 1/2 & (7.17) \end{aligned}$$

où B_m, C_m, C'_m sont des constantes universelles (qui dépendent seulement de m mais pas de la martingale M ni du temps d'arrêt T).

Remarque 7.6 En localisant correctement, on montre que (7.15) et (7.17) restent valables pour M martingale locale continue. Pour que (7.16) reste valable, il faut supposer en plus que $\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] < +\infty$.

Démonstration :[Inégalités de martingales] On considère le processus

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta + \varepsilon\langle M, M\rangle_t + M_t^2\\ &= \delta + (1+\varepsilon)\langle M, M\rangle_t + 2\int_0^t M_s dM_s, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

où $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard et la deuxième expression vient de la formule d'Itô. En appliquant la formule d'Itô pour $f(x) = x^m$, on a pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Y_t^m &= \delta^m + m(1+\varepsilon)\int_0^t Y_s^{m-1} d\langle M, M\rangle_s + 2m(m-1)\int_0^t Y_s^{m-2} M_s^2 d\langle M, M\rangle_s\\ &\quad +2m\int_0^t Y_s^{m-1} M_s dM_s. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse M, Y et $\langle M, M\rangle$ sont bornées et Y est bornée de 0, l'intégrale $\int_0^t Y_s^{m-1} M_s dM_s$ est (vraie) une martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt (Théorème 4.4) s'applique et donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1} M_s dM_s\right] = 0.$$

En prenant les espérances dans la formule d'Itô, on a donc

$$\mathbb{E}\big[Y_T^m\big] = \delta^m + m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-1} d\langle M, M\rangle_s\right] \tag{7.18}$$

$$+2m(m-1)\mathbb{E}\left[\int_0^T Y_s^{m-2}M_s^2 d\langle M,M\rangle\right].$$

Cas 1 : borne sup pour $0<m\le 1$**.** Comme le dernier terme à droite de (7.18) est négatif pour $m\le 1$, en faisant $\delta\to 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(\varepsilon\langle M,M\rangle_T+M_T^2)^m\big] &\le m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T(\varepsilon\langle M,M\rangle_s+M_s^2)^{m-1}d\langle M,M\rangle_s\right]\\ &\le m(1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\left[\int_0^T\langle M,M\rangle_s^{m-1}d\langle M,M\rangle_s\right]\\ &= (1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big] \qquad (7.19)\end{aligned}$$

en utilisant la décroissance de x^{m-1} pour $0<m\le 1$. Comme pour ces valeurs de m, $x\mapsto x^m$ est concave, on a

$$2^{m-1}(x^m+y^m)\le(x+y)^m,\quad x\ge 0, y\ge 0, \qquad (7.20)$$

et (7.19) donne

$$\varepsilon^m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]+\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]\le(1+\varepsilon)(\varepsilon/2)^{m-1}\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]. \qquad (7.21)$$

On déduit alors

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]\le\big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m}-\varepsilon^m\big)\,\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]. \qquad (7.22)$$

Cas 2 : borne inf pour $m>1$**.** Dans ce cas, le dernier terme à droite de (7.18) est positif, $x\mapsto x^{m-1}$ est croissante et $x\mapsto x^m$ est convexe. Les inégalités dans (7.19), (7.21), (7.22) se renversent pour mener à

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]\ge\big((1+\varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m}-\varepsilon^m\big)\,\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big].$$

Cas 3 : borne inf pour $\frac{1}{2}<m\le 1$**.** En faisant $\varepsilon=0$ et $\delta\to 0$ dans (7.18), on a

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]=2m(m-\frac{1}{2})\mathbb{E}\left[\int_0^T|M_s|^{2(m-1)}d\langle M,M\rangle_s\right]. \qquad (7.23)$$

De plus, on déduit de (7.20) et (7.18) et de la décroissance de x^{m-1}

$$\begin{aligned}2^{m-1}\big(\varepsilon^m\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_T^m]+\mathbb{E}[(\delta+M_T^2)^m]\big) &\le \mathbb{E}\left[\big(\varepsilon\langle M,M\rangle_T+(\delta+M_T^2)\big)^m\right]=\mathbb{E}[Y_T^m]\\ &\le \delta^m+m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T(\delta+M_s^2)^{m-1}d\langle M,M\rangle_s\right].\end{aligned}$$

En faisant $\delta\searrow 0$, on voit alors

$$2^{m-1}\big(\varepsilon^m\mathbb{E}\big[\langle M,M\rangle_T^m\big]+\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big]\big)\le m(1+\varepsilon)\mathbb{E}\left[\int_0^T|M_s|^{2(m-1)}d\langle M,M\rangle_s\right]. \qquad (7.24)$$

En combinant (7.23) et (7.24), on a la borne inférieure valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \geq \varepsilon^m \left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1} \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big].$$

Cas 4 : borne sup pour $m > 1$. Dans ce cas, l'inégalité (7.24) s'inverse et on a

$$\mathbb{E}\big[|M_T|^{2m}\big] \leq \varepsilon^m \left(\frac{(1+\varepsilon)2^{1-m}}{2m-1} - 1\right)^{-1} \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big]$$

où ε doit vérifier $\varepsilon > (2m-1)2^{m-1} - 1$.

Les cas 1–4 établissent (7.15) et (7.16). Pour prouver (7.17), on applique l'inégalité maximale de Doob à la $(\mathcal{F}_t)$-martingale $(M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ On a alors pour $m > 1/2$:

$$\begin{aligned} B_m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\big] &\leq \mathbb{E}\big[|M_{T\wedge t}|^{2m}\big] \leq \mathbb{E}\big[(M^*_{T\wedge t})^{2m}\big] \\ &\leq \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\big[|M_{T\wedge t}|^{2m}\big] \\ &\leq C_m \left(\frac{2m}{2m-1}\right)^{2m} \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_{T\wedge t}^m\big], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est (7.17) avec T remplacé par $T \wedge t$. On conclut alors à l'aide du théorème de convergence monotone en faisant $t \to +\infty$. □

On utilise encore l'inégalité de Lenglart :

Proposition 7.4 (Inégalité de Lenglart) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu positif partant de 0 et $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu croissant tels que*

$$\textit{pour tout temps d'arrêt } T \textit{ borné} : \quad \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]. \tag{7.25}$$

Alors pour tout temps d'arrêt T borné :

$$\mathbb{P}\left(\max_{s\leq T} X_s \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[\delta \wedge A_T]}{\varepsilon} + \mathbb{P}(A_T \geq \delta), \quad \varepsilon, \delta > 0 \tag{7.26}$$

$$\mathbb{E}\big[(X_T^*)^p\big] \leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\big[A_T^p\big], \quad 0 < p < 1. \tag{7.27}$$

Remarque 7.7 Noter que la condition (7.25) est remplie si $X = M^2$ où M est une martingale continue bornée dans L^2 car par définition du crochet de M, on a $X_t - A_t = M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ martingale locale et c'est une vraie martingale car $M \in L^2$. Le théorème d'arrêt (avec T borné et $0 \leq T$) donne en prenant l'espérance $\mathbb{E}\big[M_T^2 - A_T\big] = \mathbb{E}\big[M_0^2 - A_0\big]$, ie. $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[A_T]$.

La condition (7.25) est encore remplie si M est une martingale locale réduite par T_n : on peut supposer que M^{T_n} est une martingale L^2 pour laquelle d'après 1) (7.25) est vraie, ie.

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \le \mathbb{E}[A_T].$$

Mais comme $T_n \nearrow +\infty$ et T est borné, par le lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}\big[\liminf_n X_{T\wedge T_n}\big] \le \liminf_n \mathbb{E}[X_{T\wedge T_n}] \le \liminf_n \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] \le \mathbb{E}[A_T].$$

Démonstration : Soient d'abord T un temps d'arrêt borné et $\varepsilon > 0$. On note $R = \inf\big(t \ge 0 : X_t \ge \varepsilon\big)$. Sur $\{X_T^* \ge \varepsilon\}$, on a $R \le T$ ou encore $R = R \wedge T$. Comme par continuité des trajectoires $X_R = \varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(X_T^* \ge \varepsilon\big) &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{X_T^*\ge\varepsilon\}}\big] = \mathbb{E}\left[\frac{X_R}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^*\ge\varepsilon\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_{R\wedge T}}{\varepsilon}\mathbf{1}_{\{X_T^*\ge\varepsilon\}}\right] \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[X_{R\wedge T}] \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{R\wedge T}] \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T] \end{aligned} \tag{7.28}$$

où on utilise d'abord (7.25) avec $T \wedge R$ borné puis la croissance de A.

Si T est un temps d'arrêt quelconque, alors (7.28) s'applique à $T_n = T \wedge n$ temps d'arrêt borné : $\mathbb{P}(X_{T_n}^* \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_{T_n}]$. Mais comme $T_n \to T$, $\bigcup_{n\ge1}\{X_{T_n}^* > \varepsilon\} = \{X_T^* > \varepsilon\}$ (réunion croissante), en passant à la limite, on a :

$$\mathbb{P}\big(X_T^* > \varepsilon\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(X_{T_n}^* > \varepsilon\big) \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T].$$

On a aussi $\mathbb{P}(X_T^* > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[A_T]$. Finalement, soient $\varepsilon, \delta > 0$ et $S = \inf\big(t \ge 0 : A_t \ge \delta\big)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(X_T^* \ge \varepsilon\big) &= \mathbb{P}\big(X_T^* \ge \varepsilon, A_T < \delta\big) + \mathbb{P}\big(X_T^* \ge \varepsilon, A_T \ge \delta\big) \\ &\le \mathbb{P}(X_T^* \ge \varepsilon, T < S) + \mathbb{P}(A_T \ge \delta) \\ &\le \mathbb{P}(X_{T\wedge S}^* \ge \varepsilon) + \mathbb{P}(A_T \ge \delta) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[A_{T\wedge S}\big] + \mathbb{P}(A_T \ge \delta) \\ &\le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[A_T \wedge \delta\big] + \mathbb{P}(A_T \ge \delta) \end{aligned}$$

en utilisant (7.28) avec $T \wedge S$ puis la définition de S (qui assure $A_{T\wedge S} = A_T \wedge \delta$).

Considérons $(M^n)_{n\ge1}$ une suite de martingales locales et un temps d'arrêt T tels que $\langle M^n, M^n\rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. D'après la remarque, la borne précédente reste vraie pour $X = (M^n)^2$ et $A_t = \langle M^n, M^n\rangle_t$ où M^n est une martingale locale. on a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le T} |M_s^n|^2 > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\big[\langle M^n, M^n\rangle_T \wedge \delta\big] + \mathbb{P}\big(\langle M^n, M^n\rangle_T \ge \delta\big).$$

Le deuxième terme tend vers 0 directement par l'hypothèse. Comme $\langle M^n, M^n\rangle_T \wedge \delta \leq \delta$ est borné, le premier terme tend aussi vers 0 par convergence dominée. Finalement, $\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq T}|M_s^n|^2 > \varepsilon\right) \to 0$, ce qui assure, en probabilité

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{s\leq T}|M_s^n|\right) = 0.$$

Pour la dernière partie, on utilise $\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z \geq x)dx$ valable pour toute variable aléatoire Z positive. Avec ci-dessous (7.28) pour $\varepsilon = \delta = x^{-1/p}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(X_T^*)^p\big] &\leq \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\big((X_T^*)^p > x\big)dx \\
&\leq \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\big(X_T^* > x^{1/p}\big)dx \\
&\leq \int_0^{+\infty}x^{-1/p}\mathbb{E}\big[A_T\wedge x^{1/p}\big] + \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\big(A_T > x^{1/p}\big)dx \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{A_T^p}dx\right] + \mathbb{E}\left[\int_{A_T^p}^{+\infty}A_T x^{-1/p}dx\right] + \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\big(A_T^p > x\big)dx \\
&\leq \mathbb{E}[A_T^p] + \mathbb{E}\left[A_T \times \frac{p}{1-p}A_T^{p-1}\right] + \mathbb{E}\big[A_T^p\big] \\
&\leq \frac{2-p}{1-p}\mathbb{E}\big[A_T^p\big].
\end{aligned}$$

□

Démonstration des inégalités BDG (Théorème 7.4). D'après les inégalités de martingales précédentes (Proposition 7.3) et la remarque qui les suit, (7.14) est valable pour $p = 2m > 1$. Il reste à voir le cas $0 < p = 2m \leq 1$. On suppose (quitte à localiser les processus) que M et $\langle M, M\rangle$ sont bornées et on utilise l'inégalité de Lenglart (7.27).

D'après l'inégalité droite dans (7.17) (avec $m = 1$), on peut appliquer l'inégalité de Lenglart (7.27) avec

$$X = (M^*)^2, \quad A = C_1'\langle M, M\rangle$$

et on a pour $m \leq 1/2$:

$$\mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big] \leq \frac{2-m}{1-m}\,(C_1')^m\mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big]$$

pour tout $0 < m < 1$. De la même façon, l'inégalité à gauche de (7.17) (avec $m = 1$) permet d'appliquer l'inégalité de Lenglart avec

$$X = B_1\langle M, M\rangle, \quad A = (M^*)^2$$

ce qui donne, pour $0 < m < 1$,

$$\frac{1-m}{2-m} B_1^m \mathbb{E}\big[\langle M, M\rangle_T^m\big] \leq \mathbb{E}\big[(M_T^*)^{2m}\big].$$

Cela achève la preuve des inégalités BDG. □

7.5 Représentation des martingales (browniennes)

Nous montrons que lorsque la filtration est engendrée par un mouvement brownien, toutes les martingales pour cette filtration peuvent être représentées comme intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien.

Théorème 7.5 (Représentation des martingales) *On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur Ω est (l'augmentation habituelle de) la filtration canonique d'un mouvement brownien B issu de 0. Alors, pour toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (en particulier progressif donc adapté) tel que*

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\ dB_s.$$

Par conséquent, pour toute martingale M continue et bornée dans L^2 (respectivement pour toute martingale locale M continue), il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (resp. $h \in L^2_{loc}(B)$) et une constante C réelle tels que

$$M_t = C + \int_0^t h(s,\omega)\ dB_s.$$

La preuve utilise le résultat suivant de densité.

Lemme 7.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires*

$$\exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)$$

pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Démonstration :[Lemme 7.3] Il suffit de montrer que si $Z \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vérifie

$$\mathbb{E}\left[Z \exp\Big(i\sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big)\right] = 0 \tag{7.29}$$

pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors $Z = 0$.
Soient $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ fixés et on note $g_{m,\sigma^2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

$m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. La condition (7.29) assure que pour tous $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n g_{m_j,\sigma_j^2}(\lambda_j)\mathbb{E}\left[Z \exp\left(i\sum_{j=1}^n \lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)\right] d\lambda_1 \dots d\lambda_j \\ &= \mathbb{E}\left[Z \prod_{j=1}^n \exp\left(im_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \frac{\sigma_j^2(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient du théorème de Fubini et de l'expression de la fonction caractéristique d'une loi gaussienne. On obtient pour tous $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$:

$$\mathbb{E}\left[Z \prod_{j=1}^n \exp\left(im_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \alpha_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right)\right] = 0.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass garantit que les combinaisons linéaires complexes de la fonction constante égale à 1 et des fonctions de la forme

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^n (im_j y_j - \alpha_j y_j^2)\right)$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ sont denses dans l'espace $C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ qui ont une limite à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme. Par un passage à la limite, on obtient donc, pour toute fonction $\varphi \in C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathbb{E}\big[Z\ \varphi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

On a donc, d'abord par approximation, pour tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ puis, par un argument de classe monotone, pour tout borélien U de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{E}\big[Z\ \mathbf{1}_U(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})\big] = 0.$$

Finalement, on a obtenu l'égalité $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Avec un dernier argument de classe monotone, on montre que cette égalité reste vraie pour tout $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$; puis, par complétion, pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$. On conclut finalement que $Z = 0$ ce qui établit le lemme. □

Démonstration :(du Théorème 7.5) On montre d'abord la première assertion. Pour cela, on note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des variables aléatoires $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ qui ont la propriété annoncée. Remarquons que l'unicité de h est facile à établir puisque si h et $\widetilde{h}$ correspondent à la même variable aléatoire Z, on a par isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (h(s,\omega) - \widetilde{h}(s,\omega))^2\ ds\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} h(s,\omega)\ dB_s - \int_0^{+\infty} \widetilde{h}(s,\omega))\ dB_s\right)^2\right] = 0,$$

d'où $h = \widetilde{h}$ dans $L^2(B)$. Si $Z \in \mathcal{H}$ correspond à h,

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[Z]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s,\omega)^2\, ds\right].$$

Il en découle facilement que si $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{H}$ qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vers Z, les processus h_n associés à Z_n forment une suite de Cauchy dans $L^2(B)$ donc convergent vers $h \in L^2(B)$. D'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique (Théorème **??**) on a alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s$ et $\mathcal{H}$ est donc fermé.

Ensuite, pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, notons $f(s) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{]t_{j-1}, t_j]}(s)$ et $\mathcal{E}_t^f$ la martingale exponentielle $\mathcal{E}\left(i \int_0^\cdot f(s)\, dB_s\right)$ (cf. Proposition 7.1). La formule d'Itô pour l'exponentielle stochastique (cf. (7.9)) montre que

$$\exp\Big(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) = \mathcal{E}_\infty^f = 1 + i \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_s^f f(s)\, dB_s$$

soit

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big) \\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) + i \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\Big) \mathcal{E}_s^f f(s)\, dB_s
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\left\{\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathcal{H}$$

et d'après le Lemme 7.3,

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty) = \overline{\mathrm{Vect}\left\{\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n, n \in \mathbb{N}\right\}} \subset \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

On a donc $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ ce qui prouve la première partie du théorème.

Soit maintenant M une martingale continue et bornée dans L^2, alors, d'après la première partie, $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ s'écrit, avec $h \in L^2(B)$, sous la forme

$$M_\infty = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^{+\infty} h(s,\omega)\, dB_s.$$

Par conditionnement, il vient :

$$M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s.$$

L'unicité de h s'obtient comme dans la première partie.

Enfin, soit M une martingale locale (continue), on a d'abord $M_0 = C \in \mathbb{R}$ parce que $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$-triviale (ce qu'on peut déduire soit de la première partie de la preuve soit du Chapitre 3). Si $T_n = \inf\big(t \geq 0 : |M_t| \geq n\big)$ on peut appliquer ce qui précède à la martingale arrêtée M^{T_n} et trouver un processus $h_n \in L^2(B)$ tel que

$$M_t^{T_n} = C + \int_0^t h_n(s,\omega)\ dB_s.$$

Par unicité dans la deuxième partie, si $m < n$, on a $h_n(s,\omega) = h_m(s,\omega)$, ds-pp sur $[0, T_m]$ ps. Il est alors facile de construire $h \in L^2_{loc}(B)$ tel que, pour tout m, $h(s,\omega) = h_m(s,\omega)$ ds-pp sur $[0, T_m]$ ps. La formule annoncée découle ensuite de la construction de l'intégrale stochastique $\int_0^t h(s,\omega)\ dB_s$ et l'unicité de h s'obtient aussi facilement par un argument de localisation. □

Remarque 7.8 Sous les hypothèses du Théorème 7.5, notons $\mathcal{N}$ la classe des $\mathbb{P}$-négligeables de $\sigma(B_t : t \geq 0)$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$. A priori, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{t^+}$. En fait, le Théorème 7.5 entraîne que $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ (le cas $t = 0$ est la loi de Blumenthal). En effet, si Z est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a

$$Z = \int_0^t h(s,\omega)\ dB_s = (L^2)\text{-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{t-\varepsilon} h(s,\omega)\ dB_s.$$

et quitte à prendre une sous-suite, on voit que Z est limite ps de variables $(\mathcal{G}_t)_t$-mesurables (car si $\varepsilon > 0 : \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{G}_t$).

7.6 Formule de Tanaka

Théorème 7.6 (Formule de Tanaka) *Soit X une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, processus croissant continu, appelé* **temps local** *en a de la semimartingale X, tel que*

$$\begin{aligned}
(X_t - a)^+ &= (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
(X_t - a)^- &= (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a) dX_s + L_t^a
\end{aligned}$$

où $sgn(x) = -1, 1$ selon que $x \leq 0, x > 0$. De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée à L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.

Démonstration : On considère d'abord φ une fonction convexe continue. Bien que φ ne soit pas C^2, on tente d'écrire une « formule d'Itô » pour $\varphi(X_t)$.

Soit j une fonction positive de classe C^∞ à support compact inclus dans $]-\infty, 0]$ telle que $\int_{-\infty}^0 j(y)dy = 1$. On pose $\varphi_n(x) = n\int_{-\infty}^0 \varphi(x+y)j(ny)dy$. Comme φ convexe est localement bornée, φ_n est bien définie. De plus, φ_n est C^∞ et converge simplement vers φ et φ_n' croît vers φ_-', dérivée à gauche de φ.

En appliquant la formule d'Itô à la fonction φ_n de classe C^2, on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi_n'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^{\varphi_n} \tag{7.30}$$

où $A_t^{\varphi_n} = \int_0^t \varphi_n''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_t) = \varphi(X_t)$ et $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(X_0) = \varphi(X_0)$. En arrêtant X, on peut supposer que X et $\varphi_n'(X_s)$ sont bornées (uniformément en n car $\varphi_1' \leq \varphi_n' \leq \varphi_-'$). Par le Théorème 6.4 (convergence dominée pour l'intégrale stochastique), on a

$$\int_0^t \varphi_n'(X_s)dX_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \varphi_-'(X_s)dX_s$$

uniformément sur les compacts. Par conséquent, A^{φ_n} converge vers un processus A^φ croissant car limite de processus croissants. En passant à la limite dans (7.30), il vient

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi_-'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}A_t^\varphi \tag{7.31}$$

puis le processus A^φ peut être choisi continu (car différence de processus continus).

On applique (7.31) à $\varphi(x) = (x-a)^+$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi_-' = \mathbf{1}_{]a,+\infty[}$: il existe un processus croissant A^+ tel que

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}}dX_s + \frac{1}{2}A_t^+. \tag{7.32}$$

De la même façon avec $\varphi(x) = (x-a)^-$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi_-' = -\mathbf{1}_{]-\infty,a]}$: il existe un processus croissant A^- tel que

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}}dX_s + \frac{1}{2}A_t^-. \tag{7.33}$$

Par différence de (7.32) et (7.33), comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-). \tag{7.34}$$

Il vient $A^+ = A^-$ et on pose alors $L_t^a = A_t^+$. En sommant (7.32) et (7.33), comme $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a.$$

Pour la dernière partie, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $|X_t - a|$ avec $f(x) = x^2$, on a en utilisant aussi (7.34)

$$\begin{aligned}
|X_t - a|^2 &= |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \, d(|X_s - a|)_s + \langle |X - a|, |X - a| \rangle_t \\
&= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a| \mathrm{sign}\ (X_s - a) \, dX_s + 2\int_0^t |X_s - a| \, dL_s^a + \langle X, X \rangle_t.
\end{aligned}$$

En comparant avec la formule d'Itô pour X avec $f(x) = (x - a)^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a) \, dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

il vient $\int_0^t |X_s - a| \, dL_s^a = 0$ ps, ce qui est le résultat. □

Remarque 7.9 (Formule d'Itô-Tanaka) Lorsque $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, on peut préciser (7.31) : on montre que

$$A_t^\varphi = 2\int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \varphi''(da)$$

où $\varphi''(da)$ est la mesure associée à φ'' à comprendre dans le sens des distributions. On a alors la formule d'Itô-Tanaka pour φ convexe :

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s) dX_s + \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \, \varphi''(da). \tag{7.35}$$

La formule (7.35) se généralise immédiatement à une combinaison linéaire de fonctions convexes $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i$. Dans ce cas, φ'' devient une mesure signée.

Bibliographie

[App] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge series in advanced mathematics, vol. 93, 2004.

[BC] Bernard Bercu, Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007.

[JCB-L3] Jean-Christophe Breton. *Fondement des Probabilités*. Notes de cours, L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2013.

[Bil2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability measures*. 2nd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1999.

[Chung] Kai Lai Chung. *A course in probability theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.

[CM] Francis Comets, Thierry Meyre. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Dunod, 2006.

[CT] Rama Cont, Peter Tankov. *Financial modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall, 2003.

[Dav] Youri Davydov. *Cours de DEA "Processus stochastiques"*. Université Lille 1, 1999–2000.

[DM] Claude Dellacherie, Pierre-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[EGK] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet, Etienne Pardoux. *Introduction au calcul stochastique*. École Polytechnique, 2001.

[Fel] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.

[Gal] Léonard Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Coll. Méthodes mathématiques. Ed. Hermann. 2008.

[Gué] Hélène Guérin. *Processus à temps continu*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2009.

[Kal] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. 2nd Edition, Springer Series in Statistics. Probability and its Applications, 2002.

[KS] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, 1987.

[Kin] John Kingman. *Poisson processes*. Oxford University Press, 1993.

[LG0] Jean-François Le Gall. *Introduction au mouvement brownien*. Gazette des Mathématiciens, vol. 40, 1989.

[LG1] Jean-François Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Spinger, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013. Voir les notes de cours M2 Mathématiques de l'Université Paris sud-Orasy.

[Lif] Michel Lifshits. *Gaussian random functions*, Kluwer, 1995.

[Mal] Florent Malrieu. *Processus de Markov et inégalités fonctionnelles*. Notes de cours de Master 2, 2005–2006.

[Pro] Philipp Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 1995.

[RY] Daniel Revuz, Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 1991.

[Tud] Ciprian Tudor. *Cours de calcul stochastique*. Notes de cours M2 Mathématiques, Université Lille 1, 2011.