

Méthodes Numériques**Document 1 : Programmation linéaire**

1	Programmation linéaire	1
1.1	Méthode du simplexe	1
1.2	Dualité	4

1 Programmation linéaire**1.1 Méthode du simplexe****Exercice 1**

Résoudre les programmes suivants par la méthode du simplexe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } (x_1 + 2x_2) \\ x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exercice 2

Une raffinerie de pétrole traite deux sortes de brut pour donner des produits finis avec les rendements suivants :

	Brut 1	Brut 2
Essence	25%	35%
Gasoil	30%	30%
Fuel	45%	35%

Les quotas de production imposent de fabriquer au plus 825 milliers de m^3 d'essence, 750 milliers de m^3 de gas oil et 1065 milliers de m^3 de fuel. La marge bénéficiaire laissée par le traitement du brut 1 est de 3 milliers d'euros par millier de m^3 et celle du brut 2 est de 4 milliers d'euros par millier de m^3 .

Calculer, par la méthode du simplexe, quelles quantités de chaque pétrole il faut traiter pour obtenir un bénéfice maximal. Donner une interprétation graphique.

Exercice 3

Trouver un programme de base initial pour les problèmes suivants par la méthode des valeurs ajoutées, puis les résoudre par la méthode du simplexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(x_1 - x_2 + x_3) \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ et } x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 12x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 32 \\ x_1, x_2 \text{ et } x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exercice 4

Une raffinerie fabrique deux qualités d'essence (\mathcal{A} et \mathcal{B}) en mélangeant dans certaines proportions deux produits semi-finis (P_1 et P_2). Les indices d'octane et les quantités disponibles par jour pour ces deux produits sont indiqués dans le tableau suivant :

	Indice d'octane	Nb. de barils/jour
Produit 1	71	3900
Produit 2	99	5000

L'indice d'octane de l'essence \mathcal{A} doit être d'au moins 96 et celui de l'essence \mathcal{B} d'au moins 85. La raffinerie vend toute sa production de \mathcal{A} et \mathcal{B} aux prix respectifs de 3,75 \$ et 2,75 \$ par baril. Les excédents éventuels de P_1 sont revendus au prix de 1,25 \$ par baril à une fabrique de goudron et ceux de P_2 sont revendus à un terrain d'aviation au prix de 2,25 \$ par baril.

On notera x_{1A} et x_{2A} (resp. x_{1B} et x_{2B}) le nombre de barils de P_1 et de P_2 utilisés pour fabriquer \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}).

- 4-1) Calculer, en fonction de x_{1A} et x_{2A} , l'indice d'octane de \mathcal{A} .
 - 4-2) Ecrire le programme correspondant à l'optimisation du profit de la raffinerie.
 - 4-3) Résoudre ce programme par la méthode du simplexe.
 - 4-4) Indiquer en % la composition des essences \mathcal{A} et \mathcal{B} , solutions du problème.
- Quel est finalement leur indice d'octane ?

Exercice 5

Dans une entreprise qui fabrique des pièces détachées à la demande un client désire commander des pièces A et B dans un délai d'un mois. Fournisseur et client se sont mis d'accord sur les prix suivants : 138 € par série de 100 pièces A et 136 € par série de 100 pièces B. La réalisation des pièces A et B nécessite un passage dans trois ateliers pour lesquels on dispose des renseignements suivants :

	Nb d'unités d'oeuvre pour 100 pièces A	Nb d'unités d'oeuvre pour 100 pièces B	Coût variable d'une unité d'oeuvre
Atelier T	2	1	10 €
Atelier F	1	4,5	12 €
Atelier M	4	3	14 €

Au moment de la commande, l'entreprise ne dispose que d'un nombre limité d'heures dans chaque atelier correspondant respectivement à : 200 unités d'oeuvre pour l'atelier T, 540 unités d'oeuvre pour l'atelier F, 480 unités d'oeuvre pour l'atelier M.

Ces nombres d'unités d'oeuvre sont insuffisants pour satisfaire le client dans le délai demandé. L'entreprise lui propose une livraison partielle.

Quelles quantités de pièces A et de pièces B l'entreprise a-t-elle intérêt à fabriquer au cours du mois si elle veut obtenir une marge maximum compte-tenu des moyens

de production disponibles. On utilisera la méthode du simplexe dont on donnera par la suite une interprétation graphique.

Exercice 6

Une entreprise envisage le lancement de deux nouveaux types de moteurs. Ces deux modèles, A et B, seront fabriqués essentiellement dans trois ateliers pour lesquels on dispose des renseignements suivants :

	Temps opératoire unitaire pour le modèle A	Temps opératoire unitaire pour le modèle B	Temps disponible (en heures)	Coût variable de l'heure
Emboutissage	50 mn	40 mn	2500 h	150 €
Soudure	30 mn	20 mn	1000 h	60 €
Peinture	20 mn	10 mn	800 h	20 €

Une étude de marché a par ailleurs révélé que les prix de vente devaient être fixés à 215 € pour le modèle A et 150 € pour le modèle B, le marché du modèle A étant en tout état de cause saturé avec 1800 articles.

On demande de déterminer un plan optimal de fabrication et la marge à l'optimum par l'algorithme du simplexe.

Exercice 7

Une société se consacre à l'excavation et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la fourniture de graviers en divers calibres.

Un marché a été adjugé pour un prix global de facturation, portant sur les quantités suivantes :

- 13 500 tonnes de graviers de calibre 1
- 11 200 tonnes de graviers de calibre 2
- 5 000 tonnes de graviers de calibre 3.

La société exploite deux carrières P_1 et P_2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne extraite : 19,40 € par tonne pour P_1 et 20 € par tonne pour P_2 .

Après extraction, le pierre est concassée et les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes (le complément représente du sable considéré comme déchet sans valeur marchande) :

	Carrière 1	Carrière 2
graviers calibre 1	0,36 t	0,45 t
graviers calibre 2	0,40 t	0,20 t
graviers calibre 3	0,16 t	0,10 t

Formuler le programme linéaire d'optimisation permettant de définir un programme d'extraction des carrières P_1 et P_2 afin de minimiser le coût des redevances à la société civile. Résoudre par la méthode du simplexe. Donner une représentation graphique.

1.2 Dualité

Exercice 8

Soit une entreprise capable de produire deux biens en quantités x_1 et x_2 . Ces productions font intervenir deux facteurs fixes : la main d'œuvre et des équipements.

L'emploi de la main d'œuvre est rigide à la hausse et à la baisse, la quantité disponible étant égale à 2. La capacité de production des équipements est égale à 1 et ils n'interviennent que pour la production du second bien.

On veut maximiser la marge sur coût variable, les marges unitaires étant de $3/2$ et 1 respectivement. Le programme s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Max} 3/2 x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

8-1) Déterminer graphiquement l'optimum. Pour quelle base I cet optimum est-il solution réalisable de base ? Calculer le vecteur $\pi(I)$ des prix duaux associés à cette solution.

8-2) Dans quel domaine peut-on faire varier les seconds membres b_1 et b_2 des deux contraintes pour que les prix duaux restent inchangés ? Que se passe-t-il en frontière de ce domaine ?

8-3) Partant de l'état initial $(b_1^0, b_2^0) = (2, 1)$, on envisage successivement deux directions de développement : augmenter la main d'œuvre disponible b_1 avec une capacité de production b_2^0 fixe ou augmenter la capacité de production b_2 avec une main d'œuvre disponible b_1^0 constante. Comment évolue, dans chaque cas, la marge optimale ?

8-4) Si le prix d'usage des équipements servant à la fabrication du bien 2 est $p_2 = 0,2$ à quelle valeur doit-on fixer la capacité de production b_2 ? Même question si ce prix d'usage est $p_2 = 0,4$.

8-5) On envisage maintenant une augmentation simultanée de la quantité de main d'œuvre disponible b_1 et de la capacité de production b_2 . On suppose que les accroissements correspondant Δb_1 et Δb_2 sont tels que

$$\frac{\Delta b_2}{\Delta b_1} = 1/2$$

On note p_1 et p_2 les prix unitaires des deux facteurs fixes. Donner une condition portant sur p_1 et p_2 pour qu'une telle évolution des moyens de production soit profitable. On calculera pour cela l'accroissement de marge et l'accroissement de coût fixe correspondant à Δb_1 et Δb_2 . Cette condition est-elle valable quelle que soit l'échelle des extensions ?

Exercice 9

Une entreprise peut fabriquer un même bien selon trois techniques différentes de production utilisant les services d'une même machine et de la main d'œuvre. Produire une unité de bien nécessite :

- 0,5 heure de machine et 2 heures de main d'œuvre avec la première technique ;
- 1,5 heure de machine et 1,5 heure de main d'œuvre pour la deuxième technique ;
- 2 heures de machine et 0,5 heure de main d'œuvre pour la troisième technique.

On suppose que la capacité d'usinage de la machine est de 12 heures et que le nombre d'heures de travail disponibles est de 15 heures. L'entreprise cherche à maximiser sa marge sur coût variable. Les marges unitaires sont de 3 €, 4 € et 5 € selon que le bien est fabriqué à l'aide de la première, deuxième ou troisième technique.

9-1) Si on appelle x_1 , x_2 et x_3 les quantités de bien fabriquées selon chaque technique, écrire le programme correspondant. Le mettre sous forme canonique.

9-2) Résoudre le programme numériquement en utilisant l'algorithme du simplexe.

9-3) Comment écrire que l'on désire satisfaire au moins une demande de 10 unités ? Cela modifie-t-il la solution précédente ?

9-4) On considère le sommet $x_1 = \frac{96}{15}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{66}{15}$, $x_4 = x_5 = 0$.

Quelle est la base I correspondante ? Ce sommet est-il optimal ? On utilisera l'expression algébrique du critère d'optimalité et on cherchera s'il est vérifié par la base I .

Exercice 10

Une société fabrique deux produits P_1 et P_2 . Elle est formée d'une division auxiliaire (administration) et de deux divisions principales (usinage et finition). L'unité d'œuvre servant à mesurer l'activité de ces deux dernières divisions est l'heure-machine.

Lors du dernier exercice mensuel, la société a produit 5000 unités de P_1 et 7000 unités de P_2 . La fabrication de P_1 a demandé 650 heures-machine de la division usinage et 150 heures-machine de la division finition. La fabrication de P_2 a demandé 350 heures-machine de la division usinage et 350 heures-machine de la division finition. Pendant ce même exercice, les coûts supportés par les sections ont été :

<i>Division</i>	<i>Frais fixes</i>	<i>Frais variables</i>
Administration	50 000	0
Usinage	60 000	80 000
Finition	40 000	50 000

Le reste des coûts a pu être affecté directement aux produits. Ces coûts directs, qui sont des coûts variables, se sont élevés à 12 € par unité de P_1 et 5,80 € par unité de P_2 . Les prix de vente unitaires de P_1 et P_2 ont été de 50 € et 30 € respectivement.

10-1) Calculer les marges sur coût variable unitaires pour les deux produits P_1 et P_2 .

10-2) Les capacités de production mesurées en heures-machine sont de 1100 pour la division usinage et de 550 pour la division finition. On considère que la main d'œuvre est disponible sans limitation. Déterminer *graphiquement* les productions qui maximisent la marge sur coût variable de la société après avoir formé précisément le programme correspondant.

10-3) Ecrire les conditions d'optimalité et en déduire les prix duaux π_1 et π_2 relatifs aux deux divisions principales.

10-4) En utilisant ces prix duaux, donner une expression de la marge totale de la société. Expliquer comment cette marge se répartit entre les deux divisions principales.

10-5) Calculer les prix d'usage par heure-machine r_1 et r_2 de ces deux divisions (il s'agit des frais fixes supportés, rapportés à l'heure-machine).

10-6) Pour chacune des divisions principales, examiner s'il est profitable d'augmenter les capacités de production.