COMPLEX SYSTEMS & AI

Operational Research – Machine Learning – Data Science

Chaines de Markov en temps discret

Rappel sur les probabilités

Lorsqu'on est en presence d'un phenomène aleatoire, on remarque que le futur n'est dependant que du present.

Soit (X_n) une suite de variables aleatoires à valeurs dans un ensemble fini de J etats, X_t=j est l'etat du système au temps t. On dit que X_n est une chaîne de Markov de transition si qqsoit n, qqsoit i_0, …, i_{n+1} :

$P(X_{(n+1)}=i_{(n+1)} \mid X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{(n+1)} = i_{(n+1)} \mid X_n = i_n)$

Un tel processus est dit sans memoire. La valeur de cette probabilite est notee $p_{n(n+1)}$.

On remarque que X_0 n'est pas fixee par la definition, cette loi est appelee loi initiale. Le vecteur des probabilites initiales est note $\boldsymbol{\pi}$, avec $\boldsymbol{\pi}_j=P(S_0=j)$ avec j compris dans l'ensemble fini et la somme des $\boldsymbol{\pi}_j$=1.

Le vecteur des probabilites de transition est note v_i $(p_{i0}, \ldots, p_{ij})$ avec j compris dans l'ensemble fini et la somme des p_{ij}=1.

La matrice des probabilites de transition est la concatenation des vecteurs de probabilites de transition. Tous les termes sont donc positifs ou nuls, la somme des termes sur une ligne est egale à 1. Les puissances d'une matrice de transition (ou matrice stochastique) sont des matrices stochastiques.

Une chaîne de Markov est dite homogène dans le temps si les probabilites de transition ne sont pas affectees par une translation dans le temps. C'est-à-dire qu'elle ne depend pas de n. Les probabilites de transition restent stationnaires dans le temps.

Prenons un exemple. Tant qu'un joueur a de l'argent, il joue en misant 1£. Il gagne 1£ avec une probabilite de p et perd sa mise avec une probabilite (1-p) avec p entre 0 et 1. Le jeu s'arrête lorsqu'il a 3£.

Nous pouvons definir quatre etats : 0, 1, 2, 3, representant l'argent qu'il possède. La matrice de transition est la suivante :

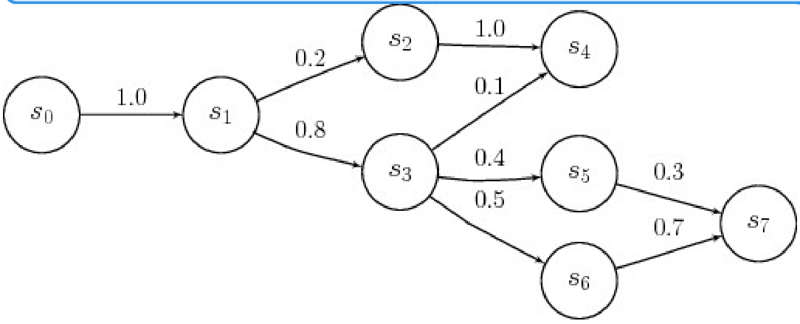
$$\text{états} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

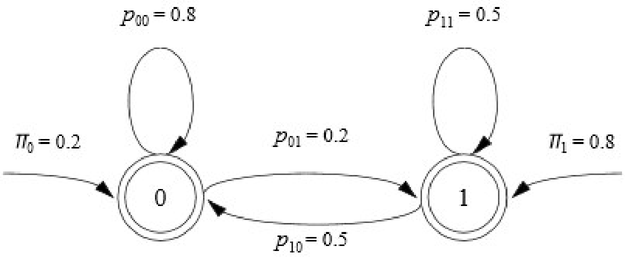
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p) & 0 & p & 0 \\ 0 & (1-p) & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une chaine de Markov peut posseder une loi initiale qui se presente sous forme d'un vecteur stochastique (la somme est egale à 1). Cette loi represente la repartition à l'origine.

Représentation en graphe et déplacement

Le graphe associe à un processus de Markov est forme des points representant les etats du processus de l'ensemble fini, et d'arcs correspondant aux transitions possible p_{ij}.





Notons Q la matrice de transition. Une suite d'etats $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ definit un chemin de longueur m allant de x_1 à x_m dans le graphe associe à la chaine de Markov homogène si et seulement si $Q(x_1, x_2)Q(x_3, x_4) \dots Q(x_{m-1}, x_m) > 0$.

Lorsque l'on cherche à simuler les premiers etats d'une chaine de Markov homogène (X_n) d'espace d'etats finis $X = \{1, \dots, N\}$ decrite uniquement par sa loi initiale et sa matrice de transition Q on peut utiliser l'algorithme suivant :

Simuler une réalisation x_0 de X_0 suivant la loi initiale de la chaîne de Markov ;
Pour k allant de 1 à n :
    Simuler une réalisation x_k d'une v.a. dont la loi est égale à la loi conditionnelle
    de X_k sachant que $X_{k-1} = x_{k-1}$ (cette loi $\mathcal{X}$ décrite est décrite par le vecteur ligne
    $(Q(x_{k-1}, 1), \dots, Q(x_{k-1}, N))$.
FinDeLaBoucle
Retourner le vecteur $(x_0, \dots, x_n)$.

La probabilite d'être dans un etat j à partir d'un etat i après n iteration revient à multiplier la matrice de transition Q^n par le vecteur initial. La reponse est alors $Q^n(i,j)$.

Graphes réduits

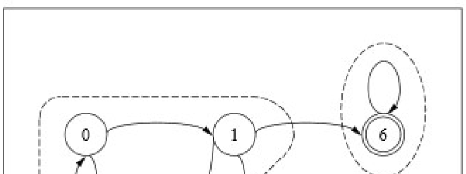
Un etat j est accessible à partir d'un etat i sil y a une probabilite strictement positive d'atteindre l'etat j à partir de l'etat i en un nombre fini de transition. D'un point de vue de la theorie des graphes, j est accessible à partir d'un etat i s'il existe un chemin entre i et j.

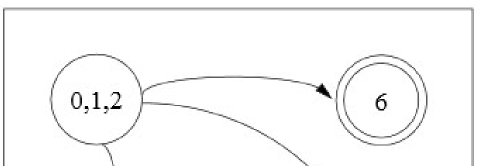
Si l'etat j est accessible à partir de l'etat i et que, reciproquement, l'etat i est accessible à partir de l'etat j, alors on dit que les etats i et j communiquent. Cela se traduit par le fait que i et j soient sur un même circuit.

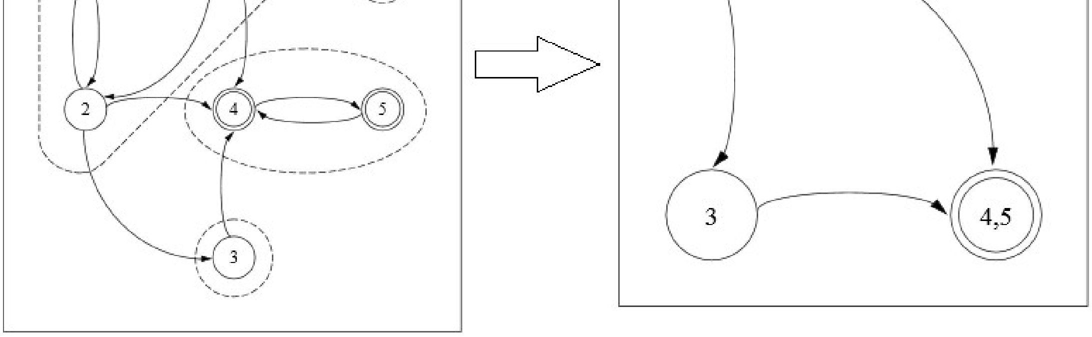
Un graphe reduit est une partition d'une chaîne de Markov en classes d'equivalence telles que tous les etats d'une classe communiquent entre eux.

Les classes d'equivalence sont les suivantes :

- une classe est dite transitoire s'il est possible d'en sortir mais dans ce cas, le processus ne pourra plus jamais y revenir;
- une classe est dite recurrente ou persistante s'il est impossible de la quitter. Si une classe recurrente est composee d'un seul etat, il est dit absorbant.







Si la partition en classes d'equivalence n'induit qu'une seule classe recurrente, la chaîne de Markov est dite irreductible. Une chaîne de Markov possède au moins une classe recurrente.

Exemple de modélisation

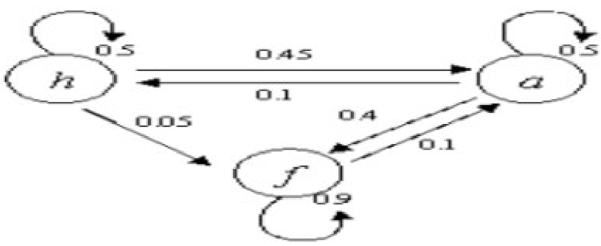
On s'interesse au developpement d'une forêt naturelle en region temperee sur une parcelle. Notre modèle comporte 3 etats. L'etat 1 est celui d'une vegetation constituee d'herbes ou d'autres espèces au faible bilan carbone; l'etat 2 correspond à la presence d'arbustes dont le developpement rapide necessite un ensoleillement maximal et dont le rendement carbone sera maximale, et l'etat 3 celui d'arbres plus gros qui peuvent se developper dans un environnement semi ensoleille (considere comme une forêt). Si l'on note respectivement h, a, f ces trois etats (pour herbe, arbustes, forêt), l'ensemble des etats possibles pour un point donne de cette parcelle est l'ensemble s={h, a, f}. Sur la parcelle on repère au sol un grand nombre de points repartis sur un maillage regulier et on enregistre à intervalle de temps fixe l'etat de la vegetation en chacun de ces points. Ce type de programme s'appelle un automate cellulaire.

En observant l'evolution durant un intervalle de temps, on peut determiner pour chaque etat i∈S la proportion de points qui sont passees à l'etat j∈S, et noter p_{ij} cette proportion. Si les differentes proportions ainsi relevees (il y en a 9) evoluent peu d'un intervalle de temps au suivant, on peut les supposees inchangees au cours du temps et on peut regarder comme les probabilites pour un point quelconque de passer de l'etat i à l'etat j pendant un intervalle de temps. Supposons par exemple que dans cette parcelle, ces probabilites soient les suivantes :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{matrix} h & \quad a & \quad f \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} h \\ a \\ f \end{matrix}$$

Si X_0 designe l'etat d'un point à l'instant t=0 et X_1 l'etat du même point en t=1, on a par exemple la probabilite de passage de l'etat arbuste en t=0 à l'etat forêt en t=1 s'ecrit $P(X_1=f : X_0=a)$ est vaut 0, 4.

L'ensemble des etats S et la matrice de transition P constituent un exemple de chaine de Markov. On peut aussi representer cette chaine de Markov par le graphe suivant :



Dans ce modèle, on peut ainsi calculer la probabilite de n'importe quelle succession d'etats, appelee trajectoire de la chaine de Markov. Par exemple la probabilite, qu'en un point de la parcelle, on observe la succession d'etats (h, h, a, f, f) se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(X_0 = h, X_1 = h, X_2 = a, X_3 = f, X_4 = f) \\ &= \pi_0(h) * P(X_1 = h : X_0 = h) * P(X_2 = a : X_1 = h) * P(X_3 = f : X_2 = a) \\ &* P(X_4 = f : X_3 = f) = \pi_0(h)(0,5)(0,45)(0,4)(0,9) = \ 0,081\pi_0(h) \end{aligned}$$

où π_0 est la probabilite d'être dans l'etat à l'instant initial t=0.

L'observation de l'etat dans lequel se trouve les differents points de la parcelle à l'instant initial t_0 permet de determiner les proportions initiales de chacun des 3 etats. Pour cela, on relève pour chaque point l'etat dans lequel il se trouve et on calcule la proportion de points de chacun des etats possibles. On peut voir chaque proportion comme la probabilite pour un point de la parcelle d'être dans l'un des etats à l'instant initial. Ainsi, si l'on a par exemple π_0 =(0.5, 0.25, 0.25), cela signifie que la moitie des points de la parcelle sont au depart dans l'etat h, un quart dans l'etat a et un quart dans l'etat f. Mais on peut aussi interpreter cela en considerant qu'un etat quelconque a 50% de chance d'être dans l'etat h, 25% d'être dans l'etat a et 25% dans l'etat f. C'est pour cela que proportion d'individus de la population etudiee se trouvant dans chacun des etats,

S	h	a	f
π_0	$\pi_0(h)$	$\pi_0(a)$	$\pi_0(f)$

s'appelle la loi de probabilite initiale ou encore la distribution initiale. Lorsqu'on choisit une modelisation par une chaine de Markov, l'objectif est souvent de determiner l'evolution de la repartition des etats au cours du temps. Par exemple, si la parcelle consideree ci-dessus est recouverte pour un tiers de forêt à l'instant initial, cette proportion va-t-elle grandir, tendre vers 100%, au contraire tendre vers zero ou bien s'approcher d'une valeur limite sorte d'equilibre ecologique ?

Nous allons voir que si l'on connait la distribution initiale on peut calculer la distribution à l'instant t=1, puis à l'instant t=2 et ainsi de suite. Calculons pour t=1 :

$$\pi_1 = (P(X_1 = h), P(X_1 = a), P(X_1 = f)) = (\pi_1(h), \pi_1(a), \pi_1(f)),\ \pi_1(h) \leftrightarrow P(X_1 = h : X_0 = h) * P(X_0 = h) + P(X_1 = h : X_0 = a) * P(X_0 = a) + P(X_1 = h : X_0 = f) * P(X_0 = f) \quad \leftrightarrow \pi_1(h) = 0,5 * \pi_0(h) + 0,1 * \pi_0(a) + 0 * \pi_0(f).$$

On en deduit que π_1(h) est le produit scalaire du vecteur π_0 avec la première colonne de la matrice P. De même, on verifie que π_1(a) est le produit scalaire du vecteur avec la deuxième colonne de la matrice P et que π_1(f) est le produit scalaire du vecteur avec la troisième colonne de la matrice P. On resume cela : π_1=π_0P.

$$(\pi_1(h), \pi_1(a), \pi_1(f)) = (\pi_0(h), \pi_0(a), \pi_0(f)) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Partager :