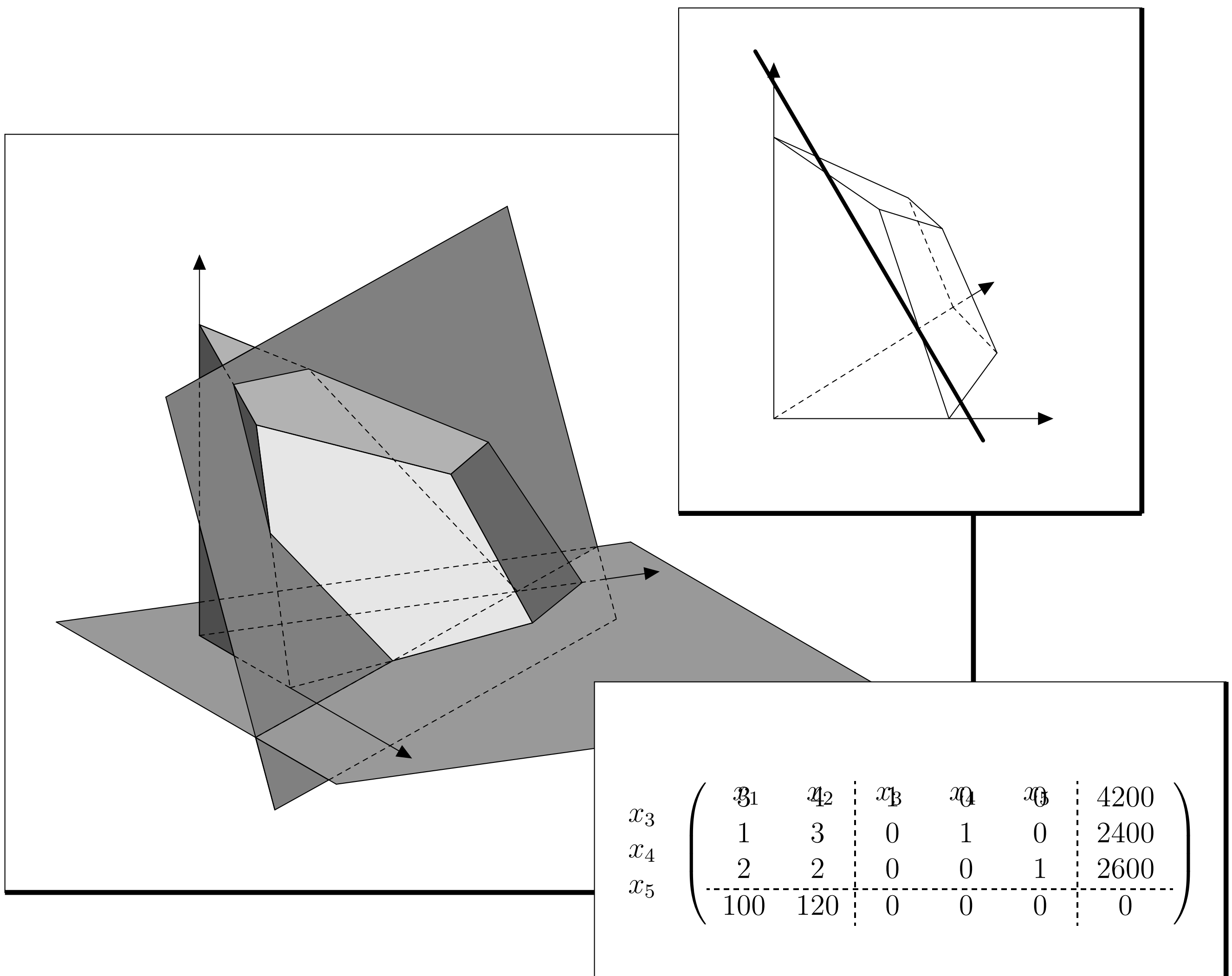
Programmation linéaire

2e Option spécifique

Jean-Philippe Javet



http://www.javmath.ch

Table des matières

1 Introduction

1.1 Préambule

La **programmation linéaire** peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple,la main-d'œuvre, les matières premières, les capitaux, ... qui sont disponibles en quantité limitée et qu'on veut répartir d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication. Notre approche pour résoudre ce type de problèmes sera divisée en deux étapes principales :

a) **La modélisation** du problème sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires qui permettra ainsi de bien identifier et structurer les contraintes que doivent respecter les variables du modèle ; de plus, on doit définir l'apport de chaque variable à l'atteinte de l'objectif poursuivi par l'entreprise, ce qui se traduira par une fonction à optimiser.

b) La détermination de l'**optimum mathématique** à l'aide de certaines techniques propres à la programmation linéaire.

Nous étudierons 3 méthodes pour résoudre les différents types de problèmes de programmation linéaire ; la première est basée sur une résolution graphique, elle est donc limitée à 2 ou 3 variables. La deuxième méthode est plus algébrique et elle justifiera la troisième qui porte le nom de méthode (ou algorithme) du simplexe.

Plan général du polycopié :

(I) Un exemple résolu par voie graphique

(II) Résolution de systèmes d'inéquations à 2 ou 3 variables

(III) Traduction des problèmes en langage mathématique

(IV) Résolution de problèmes de programmation linéaire à 2 variables par voie graphique

(V) Résolution de problèmes de programmation linéaire à 3 variables par voie graphique

(VI) Résolution de problèmes de programmation linéaire par méthode algébrique

(VII) Résolution de problèmes de programmation linéaire par méthode du simplexe

1.2 Un exemple résolu par voie graphique

Problème: La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M_1 et M_2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de Fr. 300.- pour M_1 et de Fr. 200.- pour M_2.

	M_1	M_2	Temps libres
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.

Solution: Posons x_1 le nombre de bureaux du modèle M_1 et x_2 le nombre de bureaux du modèle M_2. Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter. La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage :

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 20$$

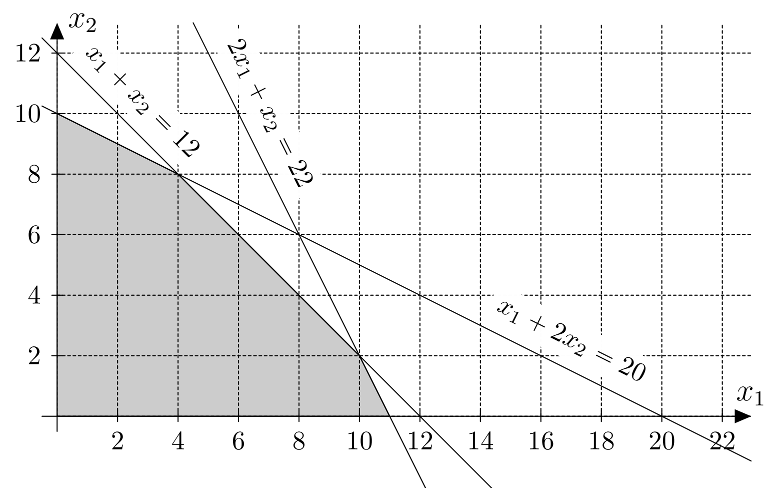
les autres contraintes sont :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 22 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 12 \end{aligned}$$

Il s'ajoute à ces contraintes des contraintes de *non-négativité* puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif, on a donc :

$$x_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geqslant 0$$

Graphiquement les solutions réalisables sont les points du polygone convexe de la figure suivante :



La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction :

$$f(x_1\,;x_2) = 300x_1 + 200x_2$$

Pour chacune de ces solutions, c'est-à-dire pour chacun des points du polygone convexe, la compagnie fera un profit positif. Si la compagnie fabrique trois exemplaires du modèle M_1 et deux exemplaires du modèle M_2, le profit sera :

$$f(3\,;2) = 300 \cdot 3 + 200 \cdot 2 = 1300 \text{ (Fr.)}$$

Il ne saurait être question de calculer le profit réalisable pour chacun des points du polygone convexe. Pour avoir une vision globale du problème, représentons le profit réalisé par le paramètre p. On a :

$$300x_1 + 200x_2 = p$$

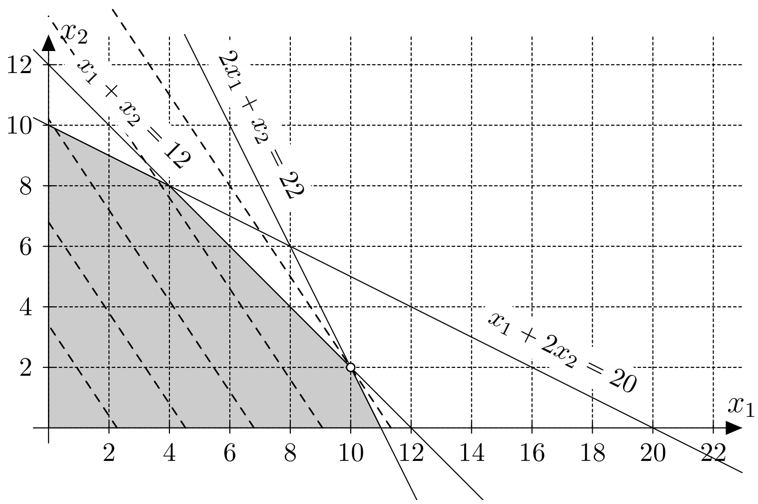
qui représente une famille de droites parallèles. En isolant x_2, on obtient :

$$x_2 = -\frac{300x_1}{200} + \frac{p}{200}$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{p}{200}$$

Il s'agit donc d'une famille de droites de pente $-3/2$ et dont l'ordonnée à l'origine est $p/200$. Parmi les droites de cette famille, seules celles ayant des points communs avec le polygone convexe nous intéressent. La fonction $f(x_1\,;x_2)$ atteindra sa valeur maximale lorsque l'ordonnée à l'origine $p/200$ de la droite :

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{p}{200}$$

atteindra sa valeur maximum tout en passant par au moins un des points du polygone convexe.



Graphiquement on constate que la droite respectant ces conditions semble être la droite de la famille passant par le point-sommet $(10\,;2)$. Le profit est alors :

$$f(10\,;2) = 300 \cdot 10 + 200 \cdot 2 = 3400 \text{ (Fr.)}$$

Il reste à s'assurer algébriquement des coordonnées du point-sommet en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

2

Résolution de systèmes d'inéquations à 2 ou 3 variables

2.1 Inéquations linéaires

Cette partie est consacrée à la présentation des définitions et des propriétés des inéquations, de systèmes d'inéquations linéaires et d'ensemble-solution des systèmes d'inéquations linéaires. Nous accorderons de l'importance à ces définitions parce qu'elles sont indispensables pour la compréhension des démarches de résolution de problèmes de programmation linéaire.

Définition: Une **inéquation linéaire** est une expression de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

où x_i sont les variables (ou inconnues), les a_i sont les coefficients des variables, b est une constante et n est le nombre d'inconnues.

Remarque: Une expression de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \geqslant b$$

est également une inéquation linéaire à n inconnues. Cependant, en multipliant les deux termes de l'inéquation par un nombre négatif, on change également le sens de l'inégalité. On peut donc toujours exprimer une inéquation linéaire sous la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

et nous utiliserons cette forme dans toutes les définitions.

Définition: On appellera **solution d'une inéquation linéaire** à n inconnues de la forme :

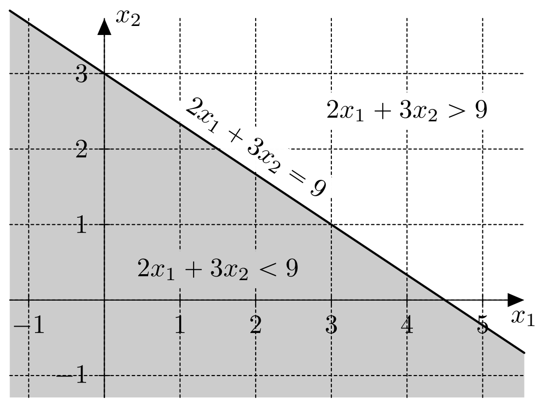
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

tout n-tuplet : $(k_1\,; k_2\,; k_3\,; \ldots; k_n)$ pour lequel :

$$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n \leqslant b \text{ est une inégalité vraie.}$$

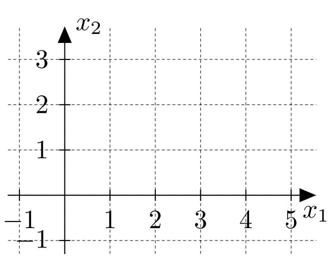
Exemple 1: Ainsi le couple $(-2\,; 3)$ est une solution de l'inéquation $2x_1+3x_2 \leqslant 9$ puisque : $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \leqslant 9$ est une inégalité vraie.

Ce n'est pas la seule solution de cette inéquation ; les couples $(0\,;0)$, $(1\,;2)$, $(3\,;1)$ sont également des solutions.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est un demi-plan dans le système d'axes Ox_1x_2. La **frontière** de ce demi-plan est la droite $2x_1 + 3x_2 = 9$



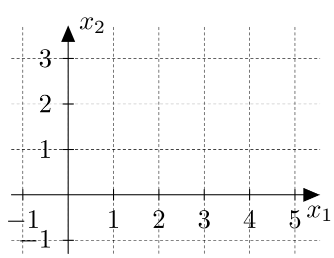
Constatations: Pour déterminer l'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à deux inconnues, on commence par tracer la droite-frontière, puis à l'aide d'un couple, on détermine par substitution de quel côté de la frontière sont les couples qui satisfont à l'inéquation. Lorsque l'inéquation ne comporte qu'une inégalité stricte $<$ ou $>$ la frontière ne fait pas partie de l'ensemble-solution de l'inéquation.

Exemple 2: Représenter l'ensemble-solution de l'inéquation $x_1 + 2x_2 < 5$:

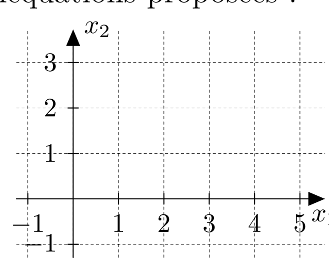


$x_1 + 2x_2 < 5$

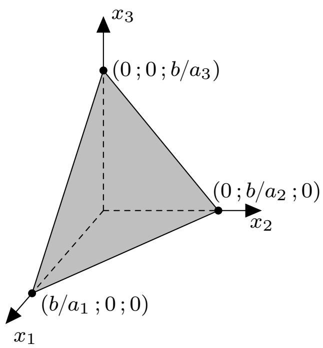
Exercice 2.1: Représenter l'ensemble-solution des inéquations proposées :



$x_1 + 3x_2 \leqslant 9$



$4x_1 + 6x_2 > 12$



Lorsque l'inéquation comporte trois inconnues, la frontière est un plan. Ainsi la frontière de l'inéquation :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leqslant b$$

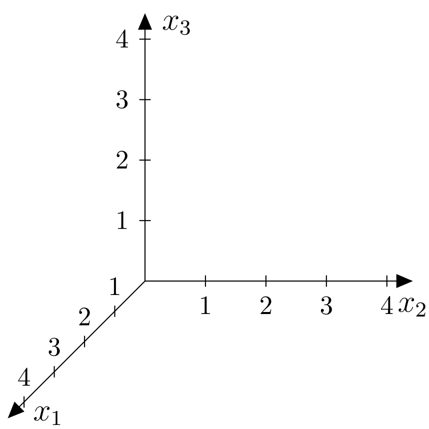
est un plan coupant les axes aux points représentant le triplet :

$$(b/a_1\,;0\,;0);(0\,;b/a_2\,;0);(0\,;0\,;b/a_3)$$

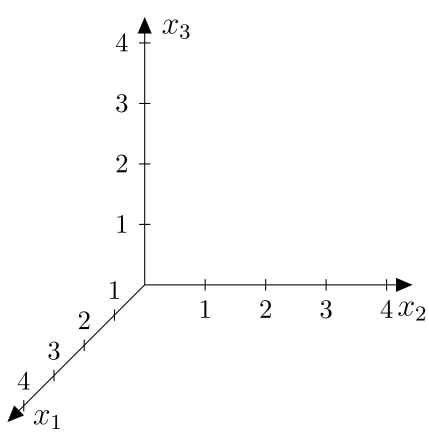
En effet :

Lorsqu'on représente un tel plan, il est d'usage de représenter **les traces du plan** sur les plans du système d'axes. On ne donne en fait qu'une partie du plan puisque celui-ci s'étend à l'infini.

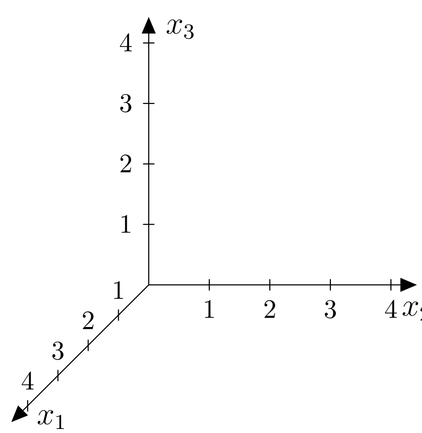
Exemple 3: Représenter l'ensemble-solution de l'équation $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$:



Exercice 2.2: Représenter l'ensemble-solution des équations proposées :



$6x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 24$



$2x_1 + 3x_2 = 6$

Le plan, ensemble solution d'une équation à 3 inconnues, divise l'espace en deux *demi-espaces*. L'un de ces demi-espaces en union avec la frontière forme l'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à trois inconnues.

Lorsque l'inéquation comporte plus de trois inconnues, on ne peut plus représenter l'ensemble-solution graphiquement ; cependant, les définitions seront toujours posées à partir des systèmes d'inéquations à n inconnues.

Définition: L'ensemble-solution d'une inéquation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

est appelé **demi-espace fermé**.

Si l'inéquation est définie par une inégalité stricte ($<$), le demi-espace est dit **ouvert**. La frontière de ce demi-espace est l'ensemble-solution de l'équation linéaire :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Cet ensemble-solution est appelé un **hyperplan** de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Système d'inéquations linéaires

Définition: On appelle **système de m inéquations linéaires à n inconnues** un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \leqslant b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

où x_j est une variable dans la colonne j, a_{ij} est le coefficient de la variable x_j sur la ligne i, b_i est la constante de la ligne i, n est le nombre d'inconnues et m est le nombre d'inéquations.

Exemple 4: Dans le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leqslant 17 \\ 6x_1 - 7x_2 + x_3 \leqslant 22 \\ 9x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 11 \end{cases}$$

$$a_{23} = \ldots \qquad a_{31} = \ldots \qquad a_{\ldots\ldots} = -2$$

Définition: Un n-tuplet $(k_1\,;k_2\,;k_3\,;\ldots\,;k_n)$ est **une solution d'un système de *m* inéquations à *n* inconnues** s'il est solution de chacune des inéquations du système, c'est-à-dire si chacune des inégalités suivantes est vérifiée :

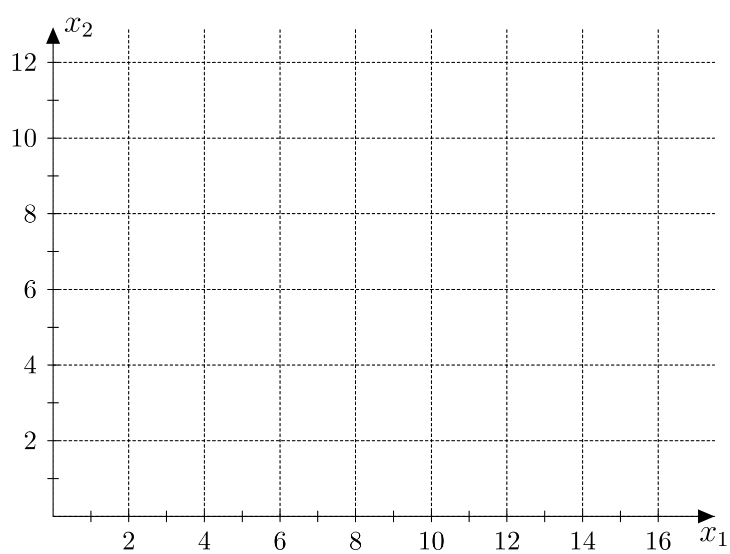
$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 + \cdots + a_{1n}k_n \leqslant b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 + \cdots + a_{2n}k_n \leqslant b_2 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 + \cdots + a_{3n}k_n \leqslant b_3 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + a_{m3}k_3 + \cdots + a_{mn}k_n \leqslant b_m \end{cases}$$

L'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires est l'intersection des ensembles-solutions de chacune des inéquations du système.

Exemple 5: Représenter graphiquement l'ensemble-solution du système d'inéquations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1 \qquad\; \geqslant 0 \\ \qquad\; x_2 \geqslant 1 \end{cases}$$

Puis déterminer les coordonnées des points-sommets de l'ensemble-solution



Exercice 2.3: Représenter graphiquement l'ensemble-solution des systèmes d'inéquations linéaires suivants puis déterminer les coordonnées des points-sommets.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 22 \\ x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leqslant 24 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 21 \\ x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

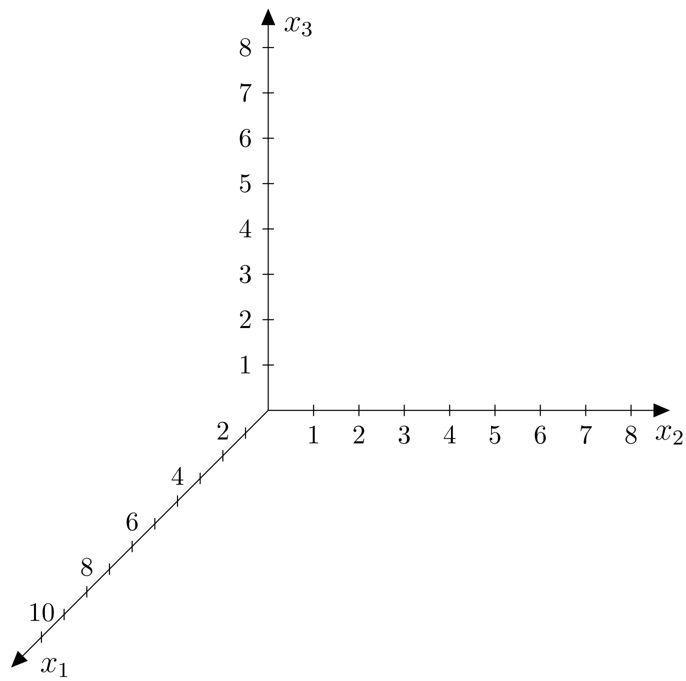
c) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant -1 \\ x_2 \geqslant -2 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 6: Représenter graphiquement l'ensemble-solution du système d'inéquations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Puis déterminer les coordonnées des points-sommets de l'ensemble-solution.



Exercice 2.4: Représenter graphiquement l'ensemble-solution des systèmes d'inéquations linéaires suivants puis déterminer les coordonnées des points-sommets.

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

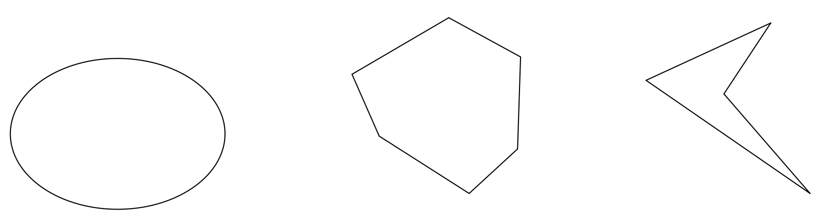
c) $$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqslant 24 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqslant 24 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 24 \\ 4x_1 + 12x_2 + 9x_3 \leqslant 72 \\ 4x_1 + 3x_3 \leqslant 24 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

2.3 Ensembles convexes

Définition: On dit qu'un ensemble de points est **convexe** si pour toute paire de points P et Q de l'ensemble, le segment de droite joignant P et Q est entièrement contenu dans l'ensemble.



Le troisième ensemble n'est pas convexe, car on peut trouver deux points P et Q dans l'ensemble, tel que le segment joignant ces deux points n'est pas entièrement contenu dans l'ensemble.

2.3.1 Quelques propriétés des ensembles convexes

Théorème:

- L'ensemble-solution d'une inéquation linéaire est un ensemble convexe.
- L'intersection de deux ou de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe.
- L'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires est un ensemble convexe.

Preuve: *Certains éléments seront justifiés en exercices ci-dessous.*

Exercice 2.5: Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan.
On considère l'ensemble des points $M(x_M\,;y_M)$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_M = (1-\lambda)x_A + \lambda x_B \\ y_M = (1-\lambda)y_A + \lambda y_B \end{cases} \qquad \lambda \in [0\,;1]$$

Déterminer le lieu géométrique des points M.

Exercice 2.6: Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan.
Soit M un point du segment AB.
Retrouver, en justifiant par des calculs, les formules caractérisant ses coordonnées en fonction de celles de A et celles de B.

Idée : *Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$*

Exercice 2.7: Justifier par des raisonnements les affirmations suivantes :

a) L'ensemble solution d'une inéquation linéaire est un ensemble convexe.

b) L'intersection de deux ou de plusieurs ensembles convexes est un ensemble convexe.

Constatation: L'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à 2 (ou 3) inconnues forme un polygone (ou un polyèdre) convexe.

3 Traduction des problèmes en langage mathématique

3.1 Un exemple

Dans ce chapitre, nous nous attarderons uniquement à la transcription d'un problème en un système d'inéquations ainsi que repérer la fonction à optimiser.

Problème: L'administrateur d'une firme de comptables doit déterminer, chaque semaine, le temps qu'il doit allouer à chacune des trois activités suivantes : la vérification, la comptabilité de gestion et la planification fiscale.
Le but est de gérer, le mieux possible, les ressources humaines de la firme. Pour chaque heure de vérification facturée, la firme doit faire 15 minutes de travail de comptabilité et 30 minutes de travail de bureau. Pour chaque heure de comptabilité de gestion facturée, la firme doit fournir 20 minutes de travail de comptabilité, 60 minutes de travail de bureau et elle doit, de plus, utiliser 6 minutes de temps d'ordinateur. Pour chaque heure de planification fiscale facturée, la firme doit prévoir 30 minutes de travail de comptabilité, 45 minutes de travail de bureau et 3 minutes de temps d'ordinateur. Le profit net pour une heure de vérification est de Fr. 4.-, tandis que les profits nets pour une heure de comptabilité de gestion et de planification fiscale sont respectivement de Fr. 10.- et de Fr. 6.-. Le personnel de la firme peut fournir cette semaine, 80 heures de comptabilité, 180 heures de travail de bureau et 30 heures de traitement par ordinateur.

Formuler ***le programme de base*** *de programmation linéaire dont la solution donnera la répartition des heures de travail disponibles qui maximise le profit net de la firme.*

Solution:

a) Identifier les inconnues qui sont à déterminer dans le problème. Dénotons ces inconnues par les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ce sont les **variables principales** :

$x_1 =$ ....

$x_2 =$ ....

$x_3 =$ ....

b) Identifier toutes les restrictions possibles. À chaque ressource disponible ou à chaque limitation correspondra une inéquation et celles-ci constitueront l'ensemble des contraintes. Il est important de fixer l'unité (temps, monétaire, ...) et de la respecter à l'intérieur d'une même contrainte.

Utilisons les minutes pour unité de temps. Ainsi, pour chaque heure facturée :

1$^{\text{re}}$ contrainte : ....

2$^{\text{e}}$ contrainte : ....

3$^{\text{e}}$ contrainte : ....

Les contraintes de non-négativité :

c) La fonction à optimiser :

Le programme de base du problème est donc le suivant :

Soit x_1 = nbre d'heures allouées à la vérification facturée.
Soit x_2 = nbre d'heures allouées à la comptabilité facturée.
Soit x_3 = nbre d'heures allouées à la planification facturée.

Trouver les nombres x_1, x_2 et x_3 qui maximisent le profit :

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

Et qui satisfont le système d'inéquations (en minutes) :

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leqslant 4'800 \\ 30x_1 + 60x_2 + 45x_3 \leqslant 10'800 \\ \qquad\quad 6x_2 + \ \ 3x_3 \leqslant 1'800 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Définition: On appelle **fonction économique** la fonction qui doit être maximisée ou minimisée.
On appelle **programme de base** l'identification des variables, la donnée de la fonction économique ainsi que du système d'inéquations correspondant aux contraintes.

Exercice 3.1: L'entreprise Simtech doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d'opération : l'usinage des pièces, l'assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l'entreprise fabrique trois produits que nous noterons P_1, P_2 et P_3. Les différentes phases d'opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d'heures. La main-d'œuvre actuelle limite le nombre d'heures disponibles aux valeurs suivantes :

Usinage :	100 heures
Assemblage :	120 heures
Finition :	200 heures

Le tableau suivant nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d'opération pour fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3.

		Produits		
		P_1	P_2	P_3
Phases d'opération	Usinage	1	2	1
	Assemblage	3	4	2
	Finition	2	6	4

Le département de compatibilité de l'entreprise a estimé aux valeurs suivantes la contribution au bénéfice de chaque produit :

Produits	Fr./unité
P_1	6.-
P_2	7.-
P_3	8.-

De plus, on suppose qu'il n'existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production.
Déterminer le programme de base du problème.

Exercice 3.2: La compagnie "Plants géants inc." produit trois types de fertilisants : du 20-8-8 pour les pelouses, du 4-8-4 pour les jardins et du 4-4-2 pour usages multiples. Les nombres représentent les pourcentages respectifs de nitrate, de phosphate et de potasse dans chaque sac de fertilisant. La compagnie dispose de 6'000 kg de nitrate, de 10'000 kg de phosphate et de 4'000 kg de potasse. Les profits, sur chaque sac de 100 kg, sont respectivement de Fr. 3.- pour le fertilisant de pelouse, de Fr. 8.- pour le fertilisant de jardin et de Fr. 6.- pour le fertilisant à usages multiples. Construire le programme de base permettant de maximiser le profit.

Exercice 3.3: La compagnie “Les jouets Lajoie” fabrique trois modèles de poupées : Am, Stram et Gram. La fabrication se déroule en trois étapes :

(1) construction du corps en matière plastique,

(2) habillement de la poupée,

(3) addition de certains articles spéciaux.

Le temps de fabrication et le matériel requis varient d’un modèle de poupée à l’autre. Chaque modèle a donc son coût de production propre et génère un profit particulier. Les données concernant le procédé de fabrication de chaque modèle apparaissent sur le tableau suivant :

	Quantité requise de matière plastique (en unité de 50g)	Temps pour habillement (en minutes)	Temps pour articles spéciaux (en minutes)	Profit par poupée (en Fr.)
Am	4	3	2	1.-
Stram	3	4	4	1.25
Gram	9	1	3	1.50
Temps ou matière plastique	160	50	50	

Construire le programme de base dont la solution sera le nombre de poupées, de chaque modèle, à fabriquer permettant de maximiser le profit total de la compagnie.

Exercice 3.4: *Énoncer le programme de base décrivant la situation suivante.*

L’administrateur d’une cafétéria désire diminuer les coûts des repas sans diminuer cependant la valeur nutritive. Chaque unité du produit A contient 15 g de protéines, 20 g d’hydrates de carbone et 500 calories. Cette unité coûte Fr. 1.25. Chaque unité du produit B contient 10 g de protéines, 30 g d’hydrates de carbone et 400 calories. Cette unité coûte Fr. 1.50. Chaque unité du produit C contient 22 g de protéines, 12 g d’hydrates de carbone et 200 calories. Cette unité coûte Fr. 1.75. Il faut préparer un mélange de ces produits qui doit au moins contenir 75 g de protéines, 100 g d’hydrates de carbone et 4’000 calories.
Quel est le mélange le moins coûteux respectant ces exigences ?

Exercice 3.5: *Énoncer le programme de base décrivant la situation suivante.*

La compagnie “Les Lebrun et Lebrun inc.” vient de perdre un contrat de production d’affiches de prix pour des stations-service. Elle se retrouve avec des ressources excédentaires qu’elle doit absolument utiliser à d’autres fins. Ces ressources sont 300 kg de revêtement intérieur pour boîtes fortes et 120 kg de carton fin. De plus, elle dispose de 10 heures de travail par jour. Elle peut utiliser ces ressources pour fabriquer des emballages de carton, des tubes et des boîtes. La fabrication de 100 emballages de carton requiert 150 kg de revêtement intérieur, 30 kg de carton fin et 2 heures de travail. La fabrication de 600 tubes requiert 50 kg de revêtement intérieur, 30 kg de carton fin et 2 heures de travail. Enfin, la fabrication de 100 boîtes requiert 60 kg de revêtement intérieur, 40 kg de carton fin et 5 heures de travail. Le profit est de Fr. 0.10 par boîte, de Fr. 0.01 par tube et de Fr. 0.04 par emballage.
Comment la compagnie doit-elle utiliser ses ressources pour maximiser son profit ?

Exercice 3.6: *Énoncer le programme de base décrivant la situation suivante.*

Une compagnie prépare trois assortiments de fruits frais : une boîte de luxe, une boîte spéciale et une boîte ordinaire. La boîte de luxe contient 0,45 kg de dattes, 0,67 kg d’abricots et 0,34 kg de pêches. La boîte spéciale contient 0,56 kg de dattes, 0,34 kg d’abricots et 0,084 kg de pêches. La boîte ordinaire contient 0,45 kg de dattes, 0,22 kg d’abricots. La compagnie dispose de 33,6 kg de dattes, 25,2 kg d’abricots et 10,08 kg de pêches. Les profits sur chaque boîte de luxe, spéciale et ordinaire sont respectivement de Fr. 3.-, Fr. 2.- et Fr. 1.50.
Combien de boîtes de chaque sorte faut-il produire pour maximiser le profit ?

21

4

Résolution graphique d'un problème à 2 variables

4.1 Reprenons l'exemple résolu au premier chapitre

Le programme de base se décrivait alors par :

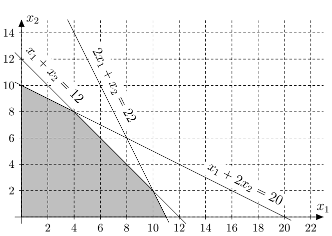
- fonction économique à maximiser : $f(x_1\,;x_2) = 300x_1 + 200x_2$
- avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 20 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 22 \\ x_1 + \ \ x_2 \leqslant 12 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

- le profit maximum était de Fr. 3400.- avec $x_1 = 10$ et $x_2 = 2$.

La solution du problème dépend des contraintes (le polygone des contraintes) mais également de la fonction décrivant le profit. Si le profit était de Fr. 200.- pour le modèle M_1 et de Fr. 300.- pour le modèle M_2, la fonction économique serait :

$$f(x_1\,;x_2) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



et en isolant x_2, on trouve :

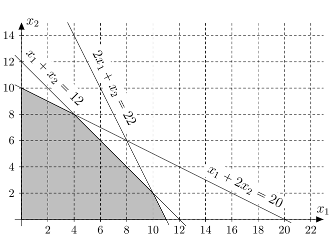
$$x_2 = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc une famille de droites dont la pente est de $-2/3$ et la droite de cette famille ayant l'ordonnée maximum est celle passant par le point-sommet (. . . . . . ; . . . . . .).

La solution d'un problème de programmation linéaire n'est pas toujours unique. Ainsi, si le profit était le même pour chaque modèle, soit Fr. 300.-, la fonction économique serait

$$f(x_1\,;x_2) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et en isolant x_2, on trouve :



$$x_2 = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On constate que les droites de cette famille sont parallèles à une des frontières du polygone des contraintes ; c'est la droite :

$$x_1 + x_2 = 12$$

Les points de cette droite faisant partie du polygone convexe sont les points du segment de droite joignant les points $(4\,;8)$ et $(10\,;2)$. Tous ces points sont des solutions engendrant le profit maximum.

Ici il s'agit donc de ....

4.2 Résolution graphique d'un problème de minimisation

Pour résoudre le problème linéaire dans le cas d'une minimisation, nous allons appliquer une démarche équivalente, mais dans ce cas, nous cherchons la droite (représentant la fonction économique) la plus rapprochée de l'origine.

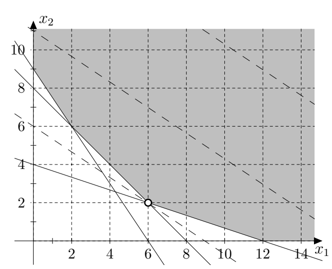
Problème: Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Minimiser : } f(x_1\,;x_2) = 6x_1 + 9x_2$$

Sujette aux contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geqslant 18 \\ \;\; x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ \;\; x_1 + \;\; x_2 \geqslant 8 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

Solution: Représentons graphiquement l'ensemble-solution puis représentons la famille de droites correspondante à :



$$6x_1 + 9x_2 = p \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{p}{9}$$

$$\Longrightarrow \qquad \text{droite de pente -2/3}$$

On constate que la valeur minimum semble atteinte au point $(6\,;2)$

Résolvons le système d'équations formé par les deux droites pour s'assurer des coordonnées de ce point :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 + \;\; x_2 = 8 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

La fonction économique est minimum en $(6\,;2)$ et vaut :

$$f(6\,;2) = 36 + 18 = 54$$

Exercice 4.1: En utilisant la méthode graphique, déterminer dans chaque cas, la solution (valeurs des variables et de la fonction économique).

a) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

b) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 4x_1 + 4x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 60 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

c) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 26 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

d) Minimiser

$$f(x_1\,;x_2) = 5x_1 + 7x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

e) Minimiser

$$f(x_1\,;x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 31 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

Exercice 4.2: Dans un gymnase, un groupe d'élèves se charge de la distribution de pains au chocolat et de croissants lors de la pause de 10 heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants. Deux boulangers proposent pour le même prix :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants,
- l'autre le lot B composé de 9 pains au chocolat et 12 croissants.

Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B qui doivent être achetés pour satisfaire la demande au moindre coût.

Exercice 4.3: Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises. Une chemise du premier modèle nécessite 1 mètre de tissu, 4 heures de travail et rapporte Fr. 24.- Une chemise du deuxième modèle exige 2 mètres de tissu, 2 heures de travail et rapporte Fr. 16.-
Sachant que l'atelier dispose quotidiennement de 150 mètres de tissu et de 400 heures de travail, et qu'il peut vendre toute sa fabrication, combien de lots de 10 chemises de chaque modèle faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ?

5 Résolution graphique d'un problème à 3 variables

5.1 Un exemple à 3 variables

Problème: Un marchand d'aliments naturels prépare des mélanges à grignoter en sachets dont les ingrédients de base sont les arachides, les raisins secs et les noix de cajou. Pour préparer ces mélanges, il reçoit hebdomadairement 2'400 g d'arachides, 1'200 g de raisins secs et 1'200 g de noix de cajou. Les quantités utilisées pour chaque mélange et le profit réalisé sont donnés dans le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	Quantité disponible
Arachides	30	30	20	2'400
Raisins	10	10	20	1'200
Cajou	30	10	10	1'200
Profit	Fr. 2.-	Fr. 1.50	Fr. 1.-	

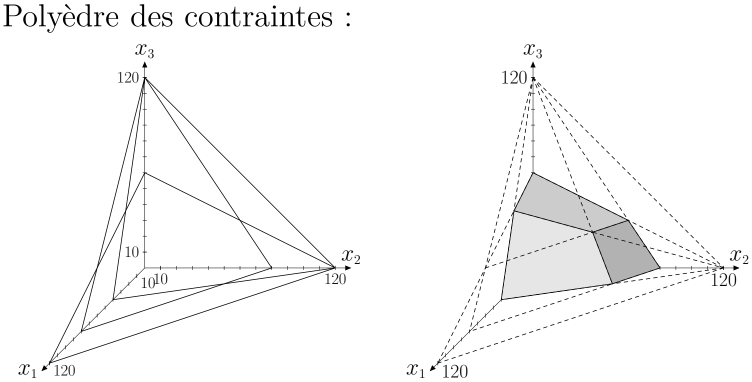
Sachant que le commerçant écoule tous les mélanges qu'il peut préparer chaque semaine, trouver combien il doit en préparer de chaque sorte pour que son profit soit maximum.

Solution:

- Posons x_i le nombre de sachets du mélange M_i
- Fonction économique : $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$
- Contraintes (simplifiée par 10) :

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 240 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 120 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

- Polyèdre des contraintes :

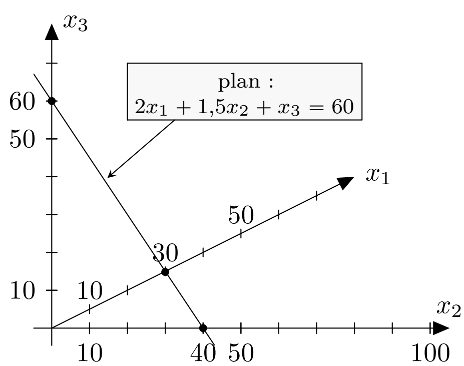


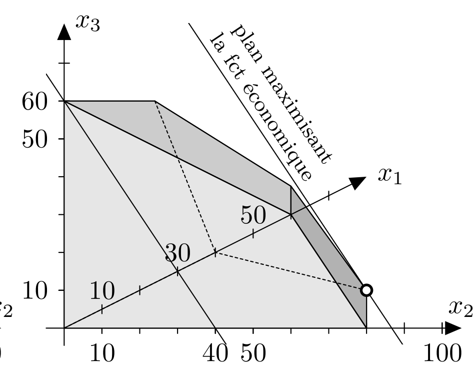
Il nous faut maintenant représenter la fonction économique :

On pose $2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3 = p$ où p est un paramètre. On a une famille de plans parallèles et l'on cherche le plan de cette famille pour lequel la valeur de p est maximale, tout en ayant au moins un point commun avec le polyèdre convexe.
Le bon **choix de la représentation axonométrique** du polyèdre convexe va nous permettre de représenter cette famille de plans et donc de déterminer celui qui nous fournira la valeur maximale.
L'idée est de déterminer l'axonométrie permettant de représenter cette **famille de plans** par une **famille de droites**.

En choisissant par exemple $p = 60$*, il s'agira d'assurer l'alignement des 3 points :* $(30\,;0\,;0)$*,* $(0\,;40\,;0)$ *et* $(0\,;0\,;60)$*.*

Il restera à représenter sur cette axonométrie le polyèdre de contrainte, puis d'y déterminer le plan maximisant la fonction économique.



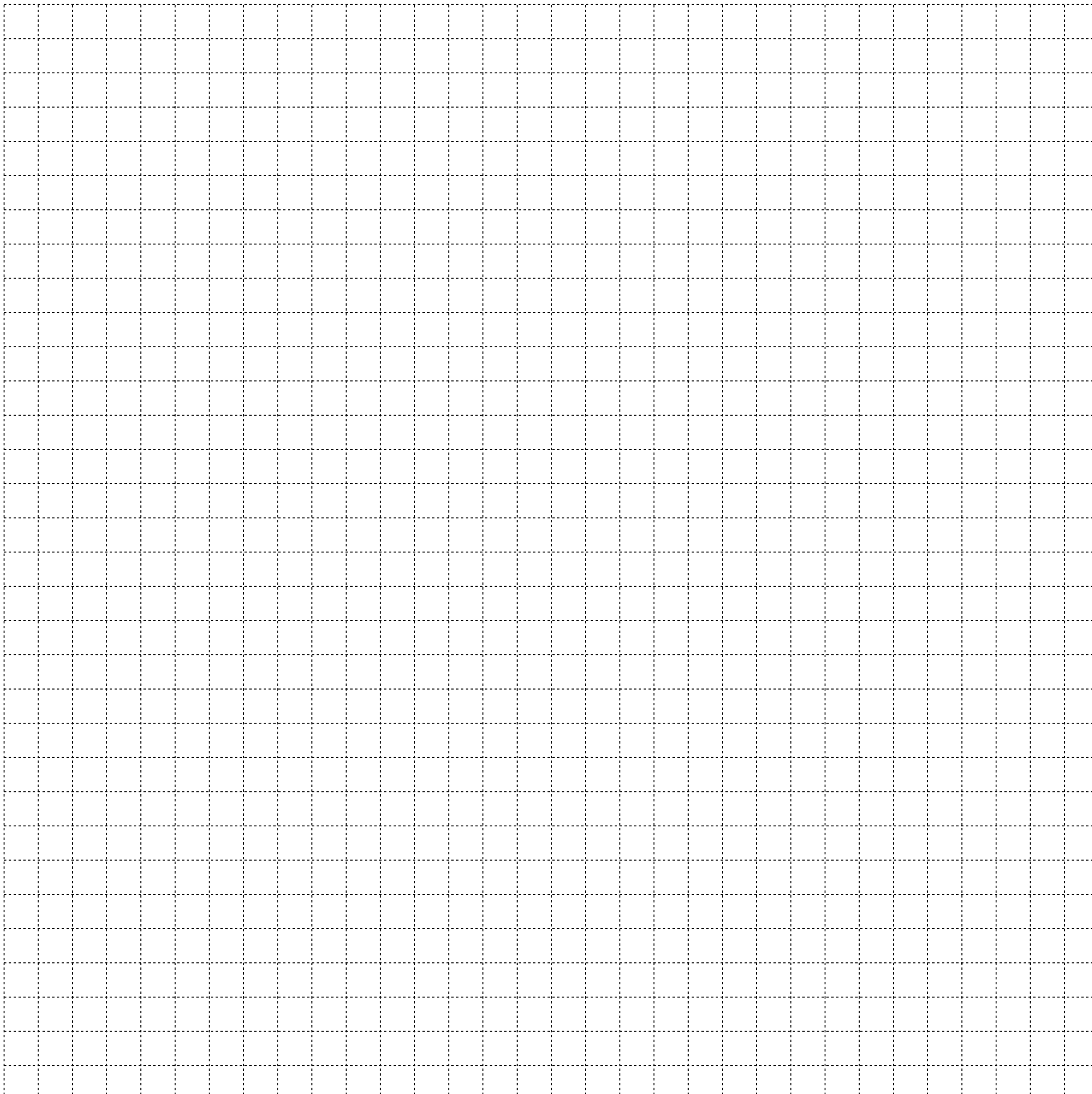


Nous constatons que la solution sera optimale sur le point de coordonnées $(20\,;60\,;0)$ ce qui nous permet alors de conclure le problème :

Il s'agira de préparer 20 mélanges M_1, 60 mélanges M_2 et 0 mélange M_3 pour un profit maximum de :

$$f(20\,;60\,;0) = 2 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 60 + 0 = 130 \text{ Frs}$$

Reprenons tranquillement la construction de l'axonométrie, le polyèdre, puis la solution sur la feuille quadrillée de la page suivante.



Exercice 5.1: En utilisant la méthode graphique, déterminer dans chaque cas, la solution (valeurs des variables et de la fonction économique).

a) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 15x_1 + 6x_2 + 8x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 50 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \leqslant 50 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \leqslant 40 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

b) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 15x_1 + 8x_2 + 6x_3$
sujette aux contraintes de la donnée précédente.

c) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 90 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \leqslant 80 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 70 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Exercice 5.2: Une entreprise fabrique trois pièces P_1, P_2 et P_3 et dispose pour la fabrication de ces pièces de trois ateliers : fraisage (A_1), tournage (A_2) et assemblage (A_3). Le tableau suivant représente les temps unitaires de fabrication (en heures) des pièces aux différents ateliers. La colonne de droite indique le temps disponible par semaine à chaque atelier.

		Pièces			
		P_1	P_2	P_3	temps (en heures)
Ateliers	A_1	1	2	3	120
	A_2	3	1	2	120
	A_3	1	4	1	120

Une étude du marché a démontré qu'il est actuellement en état d'absorber toute la production de l'entreprise. La contribution au bénéfice de l'entreprise est :

Fr. 10.- pour la pièce P_1
Fr. 13.- pour la pièce P_2
Fr. 12.- pour la pièce P_3

a) Déterminer graphiquement le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre.

b) Quels sont les ateliers qui seront utilisés à plein rendement ?

c) Quel sera le bénéfice optimal ?

5.2 Un théorème important

Lors de nos divers exercices, nous avons pu constater que les fonctions économiques atteignaient un maximum sur un des sommets du polygone convexe (en dim 2) ou sur un des sommets du polyèdre convexe. Ceci nous permettra de glisser progressivement vers une méthode de type algébrique en calculant l'ensemble des sommets du polygone (resp. polyèdre) et en évaluant la fonction économique en chacun de ses points.

Théorème: Soit f une fonction linéaire définie sur un polyèdre convexe borné. Alors la fonction f atteint sa valeur maximale en au moins un des sommets du polyèdre convexe.

Preuve: *Ce théorème sera laissé sans démonstration.*

5.3 Exemple FIL ROUGE (à compléter)

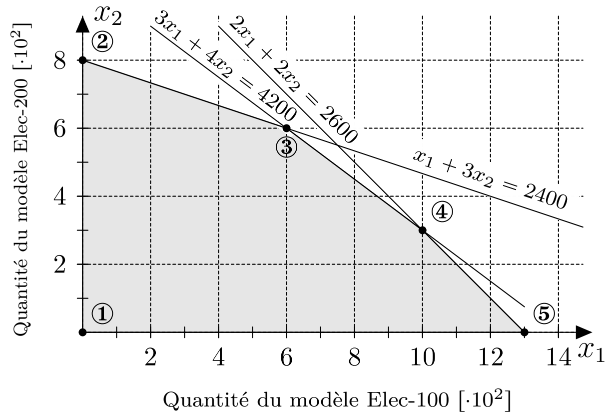
L'exemple suivant admet un statut particulier : il nous suivra tout au long des résolutions par méthode algébrique puis par méthode du simplexe. Ceci nous permettra de comparer "ligne à ligne" les différentes étapes des résolutions.

L'entreprise Simco fabrique différents modèles d'appareils électroménagers. Le programme actuel de fabrication est de 500 unités du modèle Elec-100 et 400 unités du modèle Elec-200. Le vice-président de la fabrication veut déterminer si les contributions aux bénéfices de l'entreprise peuvent être augmentées en modifiant le programme actuel de fabrication. Il possède l'information suivante sur le nombre d'heures requises pour fabriquer chaque modèle, ainsi que le temps disponible à chaque atelier.

	Modèles		
	Elec-100	Elec-200	
Atelier	Nbre d'heures requises		temps disponible
Assemblage	3	4	4'200 heures
Vérification	1	3	2'400 heures
Empaquetage	2	2	2'600 heures
Contribution	Fr. 100.-/unité	Fr. 120.-/unité	

a) Énoncer le programme de base :

b) Graphique et résolution de systèmes :



c) Points-sommets et fonction économique

Point-sommets	Coordonnées	$f(x_1\,;x_2) = 100x_1 + 120x_2$
①	$(0\,;0)$	Fr. 0
②	$(0\,;800)$	Fr. 96'000
③	$(600\,;600)$	Fr. 132'000
④	$(1000\,;300)$	Fr. 136'000
⑤	$(1300\,;0)$	Fr. 130'000

d) Comparaison avec le programme actuel :

e) Discusion sur les contraintes :

Remarque: La recherche algébrique des points-sommets et leur remplacement dans la fonction économique est une démarche particulièrement favorable en dimension 3 car une représentation axonométrique "naturelle" de la situation est alors suffisante.

Exercice 5.3: En évaluant la fonction économique en chacun des points-sommets,

a) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

b) Maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$
sujette aux contraintes de la donnée précédente

c) **Minimiser** $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} 30x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geqslant 2'400 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geqslant 1'200 \\ 30x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geqslant 1'200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

6

Résolution par méthode algébrique

Pour résoudre des problèmes de programmation linéaire ayant un nombre de variables (principales) supérieur à trois, nous devons obligatoirement faire appel à une autre méthode de résolution que celle déjà étudiée. Toutefois, avant d'aborder la méthode du simplexe comme technique de résolution d'un problème de programmation linéaire, vous découvrirez dans ce chapitre une version modifiée - la méthode algébrique - qui permettra d'étudier les différentes étapes à franchir pour arriver à une solution optimale.

6.1 Variables d'écart

La méthode de résolution que nous étudions dans ce chapitre nécessite que les contraintes du modèle soient exprimées sous forme d'**équations linéaires** au lieu d'inéquations.

On peut facilement transformer une inéquation linéaire ayant un signe $\leqslant$ en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite **variable d'écart** de la façon suivante :
Soit la i^{e} contrainte :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

Additionnant au premier membre de l'inéquation, la variable d'écart x_{n+1} vérifiant que $x_{n+1} \geqslant 0$, on obtient :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

et alors :

$$x_{n+1} = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n)$$

représente l'écart entre la quantité disponible de la ressource i et la quantité effectivement utilisée par l'ensemble des x_j. Si la quantité b_i représente des heures (disponibilité d'un département par exemple), la variable d'écart introduite dans la contrainte correspondante représentera alors un temps mort, qui peut être soit positif soit nul.

Nous ajoutons autant de variables d'écart différentes qu'il existe de contraintes du type $\leqslant$.
Ainsi les contraintes du modèle fil rouge (cf. page 38) exprimées sous forme d'inéquations linéaires, peuvent se ramener à un système d'équations linéaires en introduisant trois variables d'écart, x_3, x_4 et x_5 :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 4'200 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{array}\right.$$

6.2 Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

Si nous introduisons des variables d'écart dans le modèle de programmation linéaire, la fonction économique du modèle doit-elle être affectée ?

Comme l'on peut considérer que les variables d'écart permettant de mesurer le niveau d'activités fictives alors, pour qu'elles n'influencent pas l'optimisation, on suppose nuls les bénéfices ou coûts liés à ces activités. Ainsi, à chaque variable d'écart x_j correspondra le coefficient $c_j = 0$ dans la fonction économique.

En suivant toujours le même exemple,

La donnée était :

- maximiser :
$f(x_1\,;x_2) = 100x_1 + 120x_2$

- avec les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 4'200 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{array}\right.$$

elle devient :

- maximiser :
$f(x_1\,;\ldots\,;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

- avec les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{array}\right.$$

Nous sommes alors en présence d'un système de trois équations à cinq inconnues.
Rappelons qu'il est possible de résoudre un système d'équations ayant **plus d'inconnues que d'équations** ($n > m$) en fixant arbitrairement (par une valeur ou un paramètre) les valeurs de $n - m$ variables.

Exemple 1: Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4 \end{cases}$

Exercice 6.1: **a)** En posant $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$, résoudre

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 7 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 = 8 \end{cases}$$

b) Résoudre (*solution générale*) le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 7 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 = 8 \end{cases}$$

6.3 Résolution complète de l'exemple FIL ROUGE

Ainsi donc, après l'introduction des 3 variables d'écart :

x_3 = temps mort en heures à l'atelier d'assemblage,
x_4 = temps mort en heures à l'atelier de vérification,
x_5 = temps mort en heures à l'atelier d'empaquetage.

l'exemple *fil rouge* s'écrit alors :

maximiser $f(x_1\,;\ldots;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$
avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

PROGRAMME INITIAL

Pour déterminer le programme initial, on pose habituellement à zéro les **variables principales** du modèle. Pour l'entreprise Simco, ceci correspond à ne fabriquer aucun des deux appareils :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0.$$

Notre système de 3 équations à 5 inconnues devient alors un système de 3 équations à 3 inconnues que l'on va pouvoir manipuler.

Dans l'application de la méthode algébrique, le système d'équations correspondant aux contraintes se présente toujours de la façon suivante :

variables dans le programme (les $x_j \neq 0$)	— en fonction des —	variables hors programme (les $x_j = 0$)

Dans le programme de base initial, on exprime toujours les variables d'écart (ici x_3, x_4, x_5) en fonction des variables principales (ici x_1, x_2). Donc au départ, ce sont les variables d'écart qui sont dans le programme de base et les variables principales sont hors programme :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 & (1) \\ x_4 = 2'400 - x_1 - 3x_2 & (2) \\ x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 & (3) \end{cases}$$

variables hors programme

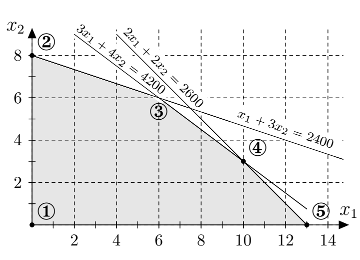
Comme $x_1 = x_2 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 \text{ heures} \\ x_4 = 2'400 \text{ heures} \\ x_5 = 2'600 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_1(0\,;0\,;4'200\,;2'400\,;2'600) = \mathbf{100} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{120} \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot 4'200 + 0 \cdot 2'400 + 0 \cdot 2'600 = 0$$

Programme de base n° 1
$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 0$ unité
$x_3 = 4'200$ heures
$x_4 = 2'400$ heures
$x_5 = 2'600$ heures
fct éco$_1$ = Fr. 0.-



Ce programme de base correspond au point extrême ① de la résolution graphique. Bien qu'il soit réalisable, il n'est pas financièrement attrayant pour l'entreprise. Comme aucun atelier n'est en opération, on peut évidemment améliorer la valeur de la fonction économique en fabriquant quelques unités de l'un ou de l'autre des appareils électroménagers.

➢ RÉVISION DU PROGRAMME INITIAL

On doit maintenant examiner la possibilité d'améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant l'une ou l'autre des variables principales (soit x_1, soit x_2 mais non les deux simultanément) dans le programme de base et en sortant une variable actuellement dans le programme de base. Nous savons que nous ne pouvons jamais avoir plus de m (ici 3) variables positives dans un programme de base.
Le choix de la variable (actuellement hors programme) à introduire dans le programme s'effectue à l'aide d'un critère qui permet d'améliorer le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique.

➢ CRITÈRE D'ENTRÉE D'UNE VARIABLE DANS LE PROGRAMME DE BASE

À chaque programme, on choisira la variable (actuellement hors programme) qui donne la meilleure augmentation de la valeur de la fonction économique c.-à-d. la variable dont la contribution au bénéfice est la plus élevée. On portera évidemment notre choix sur des variables dont les coefficients sont positifs.
À chaque étape de la résolution (chaque programme), nous exprimons la fonction économique en fonction des variables hors programme :

fct économique	— en fonction des —	variables hors programme

Donc à cette étape-ci, la fonction économique de l'entreprise Simco est :

$$\text{fct économique} = \underbrace{100x_1 + 120x_2}_{\textit{variables hors programme}}$$

D'après l'expression de la fonction économique, l'augmentation sera la plus élevée si nous introduisons la variable x_2 dans le programme, Donc :

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_2}$$

Il nous reste maintenant deux choses à déterminer. D'une part, calculer la quantité du modèle Elec-200 (x_2) que l'on doit fabriquer et d'autre part, quelle variable actuellement dans le programme doit devenir une variable hors programme c.-à-d. déterminer la variable sortante.

➢ DÉTERMINATION DE LA VALEUR ENTRANTE

Cherchons d'abord la plus grande quantité du modèle Elec-200 (x_2) que l'on peut fabriquer tout en respectant les conditions imposées par les équations (1), (2) et (3).
Nous ne pouvons excéder les temps disponibles à chaque atelier.

Il s'agit donc de déterminer la plus grande valeur pouvant être prise par x_2 dans chaque équation. Ainsi dans la première équation (1) :

$$x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2$$

Le modèle Elec-200 (variable x_2) exige 4 heures d'assemblage par unité. Comme nous avons 4'200 heures disponibles, on peut alors fabriquer :

$$\frac{4'200}{4} = 1'050 \text{ unités du modèle Elec-200}$$

Ainsi, pour chaque atelier (Assembage - Vérification - Empactage), on obtiendra les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llcl}
(1) & x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = 1'050 \text{ unités} \\
(2) & x_4 = 2'400 - x_1 - 3x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{2'400}{3} = 800 \text{ unités} \\
(3) & x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{2'600}{2} = 1'300 \text{ unités}
\end{array}$$

Pour s'assurer que toutes les contraintes soient respectées en même temps, on choisit parmi ces valeurs **la plus petite quantité positive** :

$$x_2 = 800 \text{ unités}$$

Ce minimum s'obtient dans l'équation (2). On utilise donc tout le temps disponible à l'atelier de vérification pour fabriquer 800 unités du modèle Elec-200. Il n'y aura donc plus aucun temps mort à cet atelier : $x_4 = 0$. C'est la variable qui sort du programme :

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_4}$$

➢ DÉTERMINATION DE LA NOUVELLE SOLUTION : PROGRAMME DE BASE N° 2

Puisque $x_2 = 800$ et que $x_1 = 0$, on a alors :

$$\begin{cases}
x_3 = 4'200 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 800 = 1'000 \text{ heures} \\
x_4 = 2'400 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 800 = 0 \text{ heure} \\
x_5 = 2'600 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 800 = 1'000 \text{ heures}
\end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

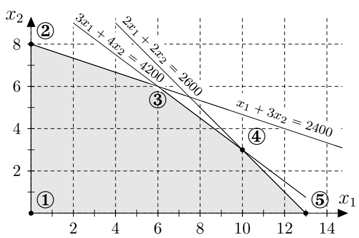
$$f_2(0\,;800\,;1'000\,;0\,;1'000) = \\ \mathbf{100} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{120} \cdot \mathbf{800} + 0 \cdot 1'000 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1'000 = 96'000$$

Ou plus simplement :

$$f_2(0\,;800) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 800 = 96'000$$

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base n° 2
$x_1 = 0$ unité
$x_2 = 800$ unités
$x_3 = 1'000$ heures
$x_4 = 0$ heure
$x_5 = 1'000$ heures
fct éco$_2$ = Fr. 96'000.-



Il correspond au point-sommet ② de la résolution graphique. S'agit-il du programme optimal ?

Toutefois, avant de tester si le programme est optimal, il faut d'abord transformer les équations (1), (2) et (3) pour exprimer les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_2, x_3, x_5
- Variables hors programme (les nulles) : x_1, x_4

$$\begin{cases} x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 2'400 - x_1 - 3x_2 \\ x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4x_2 \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 4'200 - 3x_1 - 4(800 - 1/3x_1 - 1/3x_4) \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 2'600 - 2x_1 - 2(800 - 1/3x_1 - 1/3x_4) \end{cases}$$

Et l'on obtient :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 & (4) \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 & (5) \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 & (6) \end{cases}$$

variables hors programme

Il nous reste à exprimer la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_1 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 100x_1 + 120x_2 \\ x_2 = 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4$$

variables hors programme

Cette dernière expression nous indique qu'on peut améliorer encore la valeur de la fonction économique puisque le coefficient de la variable x_1 est positif. En effet, nous remarquons que la fabrication d'une unité du modèle Elec-100 ($x_1 = 1$) permettra d'augmenter la valeur de la fonction économique de Fr. 60.- (le coefficient de la variable x_1). Toutefois, ceci ne peut se faire sans diminuer la fabrication au modèle Elec-200 (x_2) puisqu'actuellement le temps disponible à l'atelier de vérification est complètement utilisé.

Donc si nous voulons fabriquer une certaine quantité du modèle Elec-100 (x_1), il faut sacrifier une partie de la fabrication du modèle Elec-200 (x_2).

Puisque l'atelier de vérification est actuellement utilisé à pleine capacité pour la fabrication du modèle Elec-200 et que les temps opératoires pour chaque appareil sont les suivants :

	Modèles	
	Elec-100	Elec-200
Atelier de vérification	1	3

Nous constatons que pour fabriquer une unité de Elec-100, nous devons diminuer la fabrication du modèle Elec-200 de 1/3 unité, soit le coefficient de la variable x_1 dans l'équation (5).

En diminuant de 1/3 unité la fabrication du modèle Elec-200, nous réduisons le bénéfice de $120 \cdot 1/3 =$ Fr. 40.- mais nous obtenons un gain de $100 \cdot 1 =$ Fr. 100.- d'où un gain net de Fr. 60.- ; cette valeur correspond justement au coefficient de la variable x_1 dans l'expression de la fonction économique. Nous introduirons donc x_1 lors de la prochaine étape.

➢ DÉTERMINATION DU TROISIÈME PROGRAMME DE BASE

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_1}$$

Déterminons la valeur de x_1 (quantité d'Elec-100) en utilisant les équations (4), (5) et (6) :

$$\begin{array}{lll}
(4) \; x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{1'000}{5/3} = 600 \text{ unités} \\[2ex]
(5) \; x_2 = \;\; 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{800}{1/3} = 2'400 \text{ unités} \\[2ex]
(6) \; x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 & \Rightarrow & \text{Quantité} = \dfrac{1'000}{4/3} = 750 \text{ unités}
\end{array}$$

Ainsi x_1 devant respecter les différentes contraintes, nous choisirons $x_1 = 600$ unités qui se réalise dans la première équation et qui impose que x_3 devienne nulle, ainsi :

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_3}$$

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_1 = 600$ et $x_4 = 0$

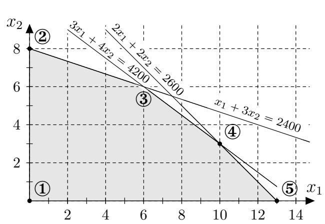
$$\begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3 \cdot 600 + 4/3 \cdot 0 = 0 \text{ heure} \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3 \cdot 600 - 1/3 \cdot 0 = 600 \text{ unités} \\ x_5 = 1'000 - 4/3 \cdot 600 + 2/3 \cdot 0 = 200 \text{ heures} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique peut se calculer de 2 manières différentes :

- $f(x_1\,,x_2) = 100x_1 + 120x_2 \quad \Rightarrow \quad f(600\,;600) = 132'000$
- $f_3(x_1\,;x_4) = 96'000 + 60 \cdot x_1 - 40 \cdot x_4$
  $\Rightarrow \quad f_3(600\,;0) = 96'000 + 60 \cdot 600 - 40 \cdot 0 = 132'000$

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base n° 3
$x_1 = 600$ unités
$x_2 = 600$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 0$ heure
$x_5 = 200$ heures
fct éco$_3$ = Fr. 132'000.-



Il correspond au point-sommet ③ de la résolution graphique.
Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2, x_5
- Variables hors programme (les nulles) : x_3, x_4

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = \ \ 800 - 1/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3(600 - 3/5x_3 + 4/5x_4) + 2/3x_4 \end{cases}$$

Et l'on obtient :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 & (7) \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 & (8) \\ x_5 = 200 + 4/5x_3 - 2/5x_4 & (9) \end{cases}$$

variables hors programme

Exprimons la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_4 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4 \\ x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4$$

variables hors programme

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4 est positif. On peut donc améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant la variable x_4 dans le programme.

Remarque: *Il peut paraître étonnant d'introduire ici une variable d'écart (temps mort en heures à l'atelier de vérification) qui n'a pas d'influence sur la fonction économique de départ puisque son coefficient était posé égal à zéro. Ceci n'a pourtant rien de particulier, car cela va permettre d'obtenir une meilleure répartition du programme de fabrication qui assurera un bénéfice plus élevé.*

➢ DÉTERMINATION DU QUATRIÈME PROGRAMME DE BASE

$$\boxed{\text{Variable entrante : } x_4}$$

Déterminons la valeur de x_4 (temps mort à l'atelier de vérification) en utilisant les équations (7), (8) et (9) :

$$(7) \quad x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{valeur} = \frac{600}{-4/5} = -750 \text{ heures}$$

$$(8) \quad x_2 = 600 - 1/5x_3 - 9/15x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{Valeur} = \frac{600}{3/5} = 1'000 \text{ heures}$$

$$(9) \quad x_5 = 200 + 4/5x_3 - 6/15x_4 \quad \Rightarrow \quad \text{Valeur} = \frac{200}{2/5} = 500 \text{ heures}$$

x_4 doit vérifier la condition d'être une variable d'écart donc d'être positive. De plus, elle doit correspondre au minimum des deux autres valeurs obtenues. On choisira donc $x_4 = 500$ dans l'équation (9) ce qui impose que x_5 devienne nulle.

$$\boxed{\text{Variable sortante : } x_5}$$

Déterminons les nouvelles valeurs sachant que $x_4 = 500$ et $x_3 = 0$

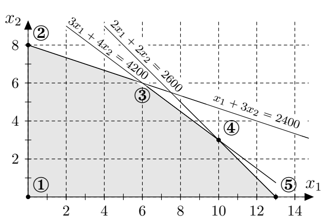
$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5 \cdot 0 + 4/5 \cdot 500 = 1'000 \text{ unités} \\ x_2 = 600 + 1/5 \cdot 0 - 3/5 \cdot 500 = 300 \text{ unités} \\ x_5 = 200 - 4/5 \cdot 0 - 2/5 \cdot 500 = 0 \text{ heure} \end{cases}$$

La valeur de la fonction économique est alors :

$$f_4(0\,;500) = 132'000 - 36 \cdot 0 + 8 \cdot 500 = 136'000$$

Le nouveau programme de base est donc :

Programme de base n° 4
$x_1 = 1'000$ unités
$x_2 = 300$ unités
$x_3 = 0$ heure
$x_4 = 500$ heures
$x_5 = 0$ heure
fct éco$_4$ = Fr. 136'000.-



Il correspond au point-sommet ④ de la résolution graphique.
Nous avons maintenant :

- Variables dans le programme (les non nulles) : x_1, x_2, x_4
- Variables hors programme (les nulles) : x_3, x_5

Exprimons à nouveau les variables dans le programme en fonction des variables hors programme :

$$\begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_5 = 200 - 4/5x_3 - 2/5x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5(500 + 2x_3 - 5/2x_5) \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases}$$

Et l'on obtient :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x_1 = 1'000 + x_3 - 2x_5 & (10) \\ x_2 = 300 - x_3 + 3/2x_5 & (11) \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 & (12) \end{cases}$$

variables hors programme

Puis finalement la valeur de la fonction économique, en fonction des variables hors programme x_3 et x_5 à l'aide de la substitution :

$$\begin{cases} \text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4 \\ x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{fct éco} = 136'000 - 20\underbrace{x_3 - 20x_5}_{\boxed{\textit{variables hors programme}}}$$

Pouvons-nous améliorer encore la valeur de la fonction économique ?

La réponse est **non** puisque les coefficients des variables hors programme (x_3 et x_5) sont négatifs.

> Un programme de base est optimal si tous les coefficients des variables hors programme, dans l'expression de la fonction économique, sont $\leqslant 0$.

On constate qu'elle correspond bien à la solution optimale obtenue lors de la résolution graphique. Le programme optimal de fabrication de l'entreprise Simco est donc :

1'000 unités de Elec-100 300 unités de Elec-200 pour un bénéfice maximum de Fr. 136'000.- De plus, il n'y a aucun temps mort aux ateliers d'assemblage et d'empaquetage et il y a 500 heures de temps mort à l'atelier de vérification.

6.4 Marche à suivre de la méthode algébrique

La méthode algébrique est une recherche systématique de programmes de base (points sommets) jusqu'à l'obtention d'un programme optimal.

Pour ce faire, il s'agit :

1) De structurer le problème sous forme d'un système d'équations en introduisant les variables d'écart requises. Il s'agira bien sûr d'avoir précisé préalablement les variables (principales et d'écart) ainsi que la fonction économique.

2) De déterminer le programme de base qui servira de départ au cheminement vers la solution optimale (programme optimal).

3) D'expliciter la fonction économique et de déterminer si elle peut être améliorée : recherche de l'éventuelle variable (hors programme) admettant le plus grand coefficient positif. Dans la négative, le programme est optimal.

4) En introduisant cette variable dans le programme, on choisira la plus petite valeur positive obtenue à l'aide du système d'équations calculé lors de l'étape précédente. Celà induira la variable sortante.

5) Pour déterminer un nouveau programme de base, on doit transformer le système d'équations ainsi que l'expression de la fonction économique en exprimant les variables dans le programme de base en fonction des variables hors programme (par substitution).

6) Retourner à **3)** jusqu'à l'obtention du programme de base optimal.

7) Donner le programme optimal en précisant la valeur de toutes les variables ainsi que la valeur optimisée de la fonction économique.

Remarque: *Pour simplifier notre exposé, nous allons étudier la méthode algébrique en considérant que nous l'appliquerons seulement à des problèmes dont le modèle ne comporte que des contraintes du type* $\leqslant$ *et que l'optimisation est une maximisation. Les autres particularités pourraient être traitées directement avec les tableaux du simplexe.*

6.5 Exemple accompagné (reprise de l'exercice 3.1 déjà étudié en page 17) :

Problème: L'entreprise Simtech doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d'opération : l'usinage des pièces, l'assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l'entreprise fabrique trois produits que nous noterons P_1, P_2 et P_3. Les différentes phases d'opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d'heures. La main-d'œuvre actuelle limite le nombre d'heures disponibles aux valeurs suivantes :

Usinage :	100 heures
Assemblage :	120 heures
Finition :	200 heures

Le tableau suivant nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d'opération pour fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3.

	Produits		
	P_1	P_2	P_3
Usinage	1	2	1
Assemblage	3	4	2
Finition	2	6	4

Le département de compatibilité de l'entreprise a estimé aux valeurs suivantes la contribution au bénéfice de chaque produit :

Produits	Fr./unité
P_1	6.-
P_2	7.-
P_3	8.-

De plus, on suppose qu'il n'existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production.
Déterminer le programme optimal.

Solution: **a)** Exprimer la fonction économique à maximiser :

b) Exprimer les contraintes sous la forme d'un système d'inéquations :

c) Structurer les contraintes sous la forme d'un système d'équations :

d) Que représente chaque variable d'écart ?

e) Déterminer le programme initial :

Les équations sont $\begin{cases} x_4 = & (1) \\ x_5 = & (2) \\ x_6 = & (3) \end{cases}$

Programme de base n° 1
$x_1 =$
$x_2 =$
$x_3 =$
$x_4 =$
$x_5 =$
$x_6 =$
fct $\text{éco}_1 =$

- Variables dans le programme (les non nulles) :
- Variables hors programme (les nulles) :

f) Quelle est l'expression de la fonction économique pour le programme de base n°1 ?

Peut-on améliorer la valeur de la fonction économique ?

g) Déterminer la variable entrante et la variable sortante :

$\boxed{\text{Variable entrante : }}$

(1) $\Rightarrow$

(2) $\Rightarrow$

(3) $\Rightarrow$

Variable sortante :

h) Déterminer la nouvelle solution : programme de base n°2

Programme de base n° 2
$x_1 =$
$x_2 =$
$x_3 =$
$x_4 =$
$x_5 =$
$x_6 =$
fct éco$_2$ =

- Variables dans le programme (les non nulles) :
- Variables hors programme (les nulles) :

i) Quelle(s) équation(s) doit-on transformer ?

j) Déterminer les nouvelles relations qui existent entre les variables dans le programme de base et les variables hors programme :

variables dans le programme

$$\begin{cases} x = & (4) \\ x = & (5) \\ x = & (6) \end{cases}$$

variables hors programme

k) Déterminer la nouvelle expression de la fonction économique :

l) Le programme de base n° 2 est-il optimal ?

m) À ce stade, déterminer la variable entrante, sa valeur et la variable sortante :

$\boxed{\text{Variable entrante : }\qquad}$

(4) $\Rightarrow$

(5) $\Rightarrow$

(6) $\Rightarrow$

$\boxed{\text{Variable sortante : }\qquad}$

n) Déterminer la nouvelle solution : programme de base n° 3

Programme de base n° 3

$x_1 =$
$x_2 =$
$x_3 =$
$x_4 =$
$x_5 =$
$x_6 =$
fct $\text{éco}_3 =$

- Variables dans le programme (les non nulles) :
- Variables hors programme (les nulles) :

o) Quelles équations doit-on transformer ?

p) Déterminer les nouvelles relations qui existent entre les variables dans le programme de base et les variables hors programme :

$$\boxed{\textit{variables dans le programme}} \rightarrow \begin{cases} x = & \qquad (7)\\ x = & \qquad (8)\\ x = & \qquad (9)\end{cases}$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

q) Déterminer la nouvelle expression de la fonction économique

r) Le programme de base n°3 est-il optimal ?

s) Le programme optimal de fabrication de l'entreprise Simtech est :

$P_1 =$ $\qquad$ $P_2 =$ $\qquad$ $P_3 =$

Bénéfice =

Les temps morts sont :

Usinage = $\qquad$ Assemblage = $\qquad$ Finition =

Remarque: *Pour pouvoir suivre les différentes étapes de résolution de ces exercices, il est primordial de les faire précéder par des* ***titres*** *et éventuellement des petites* ***phrases justificatives****.*

Exercice 6.2: Déterminer la solution optimale du programme linéaire suivant par la méthode algébrique :

- maximiser :

$$f(x_1\,;x_2) = 2x_1 + x_2$$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leqslant 10 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \leqslant 4 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

Vérifier ensuite que vous obtenez bien la même solution optimale avec la méthode graphique.

Exercice 6.3: Une entreprise envisage de fabriquer deux produits : SP-1 et SP-2. Les prix de vente de chaque produit sont respectivement Fr. 4.- et Fr. 6.- l'unité. On doit utiliser deux ateliers pour fabriquer ces deux produits et on possède l'information suivante :

	Temps requis (heures/unités)	
	Atelier I	Atelier II
SP-1	5	1
SP-2	6	2
Disponibilité	60 heures	16 heures

La fabrication des produits exige donc de passer par l'atelier I d'abord et par l'atelier II ensuite. Le marché peut absorber au plus 10 unités de SP-1 et 6 unités de SP-2. Les coûts de fabrication sont de Fr. 2.- l'unité pour SP-1 et Fr. 3.- l'unité pour SP-2.

a) Déterminer à l'aide de la méthode algébrique le programme de fabrication à mettre en œuvre pour maximiser les bénéfices.

b) Est-ce qu'il y a plein emploi des ateliers ?

Exercice 6.4: L'entreprise Mecanex fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 et pour réaliser ce projet utilise trois centres de fabrication. Les temps opératoires, en heure par unité, à chaque centre de fabrication sont les suivants :

	Produits			
	P_1	P_2	P_3	temps disponible
Centre I	4	2	4	80 heures
Centre II	2	2	3	50 heures
Centre III	1	3	2	40 heures

La contribution unitaire de chaque produit au bénéfice est la suivante :

Fr. 5.- pour P_1 , Fr. 3.- pour P_2 , Fr. 4.- pour P_3

a) Déterminer, à l'aide de la méthode algébrique, le programme de fabrication qui maximise les bénéfices.

b) Le centre II est-il pleinement utilisé ?

Exercice 6.5: Trois espèces de crabes sont pêchées dans les eaux côtières de l'Alaska : le crabe royal (King crab), le crabe des neiges (Snow crab), le crabe "Dungeness", en des lieux différents, mais proches.

Des bateaux sont aménagés pour pouvoir pêcher indifféremment les trois sortes de crabes ; pour un mois donné, dans la zone de "Cook Inlet", la capacité totale de pêche des bateaux est de 1'000 tonnes de crabes.

À l'arrivée des bateaux au port, un tri doit être effectué sur la cargaison ce tri tient compte, suivant la période de bataille, de la taille des carapaces des crabes, de leur qualité, etc... Aussi, après ce tri, ne peut-on utiliser en moyenne que 80% de la quantité totale de crabes royal pêchée, 95% de celle de crabe des neiges et 90% de celle du crabe Dungeness. Les crabes éliminés sont perdus.

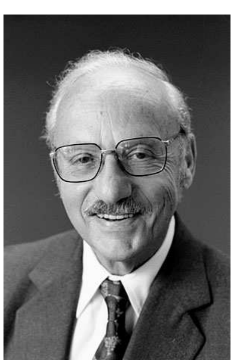
Intervient alors un conditionnement : différents points sont situés sur la côte, celui attribué à la zone "Cook Inlet" pouvant conditionner au maximum 900 tonnes de crabes au total pour le mois considéré.

Le crabe royal est le plus demandé, mais afin de respecter un certain équilibre entre les espèces, il a été établi que la différence entre la quantité pêchée de crabe royal et le tonnage global des deux autres espèces doit être inférieure ou égal à 100 tonnes.

On désire établir le plan de pêche qui maximise le bénéfice sachant que l'on gagne 12,5 unités monétaires (u.m.) par tonne de crabes royal pêchée et conditionnée, 8,42 u.m. par tonne pour la seconde espèce et 7,78 u.m. par tonne pour la troisième.

Les pêcheurs connaissent les sites où ils peuvent attraper telle ou telle sorte de crabe (qui ne se mélangent pas : en un lieu donné, on ne rencontre pas simultanément des espèces différentes).

Remarque: C'est en 1947 que George DANTZIG (mathématicien américain) travaillant sur un projet des forces de l'air américaines, a introduit un algorithme de calcul permettant de résoudre les problèmes de programmation linéaire. Cette technique, connue sous le nom d'algorithme du simplexe, nécessite l'utilisation d'un ordinateur pour résoudre des problèmes de gestion et de production dans le monde des affaires et dans celui de l'industrie.
En 1971, à l'aide de la méthode du simplexe, il a été possible de résoudre en 2 heures et demie un problème comportant 282'468 variables et 50'215 contraintes.



George Dantzig
(1914-2005)

7

Résolution par la méthode du simplexe

La présentation algébrique de la méthode du simplexe nous a permis de donner une interprétation pratique et économique aux différentes opérations à effectuer dans la résolution d'un problème de programmation linéaire pouvant comporter deux variables ou plus. Toutefois, la méthode algébrique devient rapidement laborieuse à mesure que le nombre de contraintes et le nombre de variables augmentent.

Nous allons donc systématiser toutes ces opérations algébriques sous forme d'un simple tableau dit « tableau du simplexe ». Ceci permettra de résoudre plus facilement des problèmes ayant beaucoup plus de variables et de contraintes. Malgré l'efficacité de cette méthode, il n'en demeure pas moins que la résolution à l'aide d'un ordinateur devient indispensable à mesure que les problèmes prennent de fortes dimensions.

7.1 Résolution du problème FIL ROUGE par la méthode du simplexe

Pour bien visualiser la similitude qui existe entre l'approche algébrique et celle des tableaux du simplexe, nous allons résoudre à nouveau le problème de fabrication de l'entreprise Simco.

Le problème, après l'introduction des variables d'écart, était le suivant :

- maximiser la fonction économique :

$$f(x_1\,;\ldots\,;x_5) = 100x_1 + 120x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

- avec les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;5 \end{cases}$$

Que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4'200 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2'400 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2'600 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; \ldots ; 5 \end{cases}$$

La représentation en tableau sera :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Remarque: Cette présentation sous forme d'un tableau de nombres n'est probablement pas inconnue pour vous. Ce tableau est appelé **matrice** du problème de programmation linéaire. Toutes les propriétés que vous connaissez sur les calculs à propos des matrices peuvent être alors utilisées.

ÉTAPE n° 1 : Matrice du programme de base n° 1 :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ÉTAPE N° 2 : Matrice du programme de base n° 2 :

Pour accroître le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique, il faut donner une valeur positive à x_2 puisque c'est x_2 qui a le plus grand coefficient positif sur la dernière ligne de la matrice. Quelle est la plus grande valeur que l'on peut attribuer à x_2 ?
Pour le déterminer, on prend les rapports des éléments de la colonne de droite sur les éléments de la colonne des x_2. On trouve alors :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} 4'200/4 = 1'050 \\ 2'400/3 = 800 \\ 2'600/2 = 1'300 \\ \end{array}$$

Le plus petit de ces rapports est 800 et c'est la plus grande valeur qu'on peut attribuer à x_2. Nous utiliserons donc l'élément de la deuxième ligne deuxième colonne ; encerclons-le pour le mettre en évidence. Nous l'appellerons **pivot de la 1re étape**.

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hdashline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nous devons maintenant annuler les autres éléments de la deuxième colonne. Pour ce faire, nous effectuons des opérations sur les lignes. En premier lieu, nous allons rendre le pivot unitaire en divisant les termes de la deuxième ligne par 3 :

$$\frac{1}{3}L_2 \to L_2 \quad \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hdashline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En deuxième lieu, on soustrait 4 fois la deuxième ligne à la première, 2 fois la deuxième à la troisième et finalement 120 fois la deuxième à la dernière :

$$\begin{array}{l} L_1 - 4L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ L_4 - 120L_2 \to L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3-4/3 & 4-4 & 1-0 & 0-4/3 & 0-0 & 4'200-3'200 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 2-2/3 & 2-2 & 0-0 & 0-2/3 & 1-0 & 2'600-1'600 \\ \hdashline 100-40 & 120-120 & 0-0 & 0-40 & 0-0 & 0-120\cdot 800 \end{array}\right)$$

Donc, nous obtenons après avoir simplifié :

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 5/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1'000 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\ \hdashline 60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000 \end{array}\right)$$

Cette matrice représente alors le système d'équations que nous avions obtenu après la première étape de la résolution algébrique (cf. page 43).

En effet en retranscrivant les 3 premières lignes, nous obtenons :

$$\begin{cases} 5/3x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 4/3x_4 + 0x_5 = 1'000 \\ 1/3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1/3x_4 + 0x_5 = 800 \\ 4/3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2/3x_4 + 1x_5 = 1'000 \end{cases}$$

qui est bien équivalente à :

$$\begin{cases} x_3 = 1'000 - 5/3x_1 + 4/3x_4 \\ x_2 = \quad 800 - 1/3x_1 - 1/3x_4 \\ x_5 = 1'000 - 4/3x_1 + 2/3x_4 \end{cases}$$

On constate également que la valeur obtenue en bas à droite de la matrice correspond à l'opposé de la valeur numérique obtenue dans la fonction économique :

$$\text{fct économique} = 96'000 + 60x_1 - 40x_4$$

ÉTAPE N° 3 : Matrice du programme de base n° 3 :

On constate que l'on peut encore accroître la valeur à optimiser en introduisant une valeur pour x_1.
À nouveau, effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_1 :

$$\begin{array}{cccccc}
\downarrow & & & & & \downarrow \\
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
5/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1'000 \\
1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\
4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\
\hdashline
60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
1'000/(5/3) = 600 \\
800/(1/3) = 2'400 \\
1'000/(4/3) = 750 \\

\end{array}$$

Le plus petit rapport étant sur la première ligne, notre pivot sera l'élément de la première ligne, première colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par 3/5 :

$$\begin{array}{l}
\frac{3}{5}L_1 \to L_1 \\
\\
\\
\\
\end{array}
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\
4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\
\hdashline
60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000
\end{array}\right)$$

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 1re colonne :

$$\begin{array}{r}
\\
L_2 - 1/3L_1 \to L_2 \\
L_3 - 4/3L_1 \to L_3 \\
L_4 - 60L_1 \to L_4
\end{array}
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)$$

Après retranscription en système d'équations :

$$\begin{cases}
1x_1 + 0x_2 + 3/5x_3 - 4/5x_4 + 0x_5 = 600 \\
0x_1 + 1x_2 - 1/5x_3 + 3/5x_4 + 0x_5 = 600 \\
0x_1 + 0x_2 - 4/5x_3 + 2/5x_4 + 1x_5 = 200
\end{cases}$$

On obtient bien le même système que celui obtenu en page 46 :

$$\begin{cases}
x_1 = 600 - 3/5x_3 + 4/5x_4 \\
x_2 = 600 + 1/5x_3 - 3/5x_4 \\
x_5 = 200 + 4/5x_3 - 2/5x_4 \\
\text{fct éco} = 132'000 - 36x_3 + 8x_4
\end{cases}$$

Nous n'avons pas encore atteint la solution optimale puisque le coefficient de la variable x_4, dans la fonction économique, est positif. Effectuons le rapport de la dernière colonne avec celle de x_4.

ÉTAPE N° 4 : Matrice du programme de base n° 4 :

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cccccc} & & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
600/(-4/5) = -750 \\
600/(3/5) = 1'000 \\
200/(2/5) = 500 \\

\end{array}
\end{array}
$$

Le pivot se situe en 3e ligne, 4e colonne. Rendons-le unitaire en le multipliant par 5/2 :

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \frac{5}{2}L_3 \rightarrow L_3 \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\
0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 5/2 & 500 \\
\hdashline
0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000
\end{array}\right)
$$

Effectuons à nouveau les opérations sur les lignes afin d'annuler les autres éléments de la 4e colonne :

$$
\begin{array}{r}
L_1 + 4/5L_3 \rightarrow L_1 \\
L_2 - 3/5L_3 \rightarrow L_2 \\
\\
L_4 - 8L_3 \rightarrow L_4
\end{array}
\left(\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1'000 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & 300 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 5/2 & 500 \\
\hdashline
0 & 0 & -20 & 0 & -20 & -136'000
\end{array}\right)
$$

Il n'y a plus de coefficients positifs sur la dernière ligne de la matrice et il n'est donc plus possible d'accroître la valeur de la fonction économique.

Retranscrivons le système correspondant :

$$
\begin{cases}
1x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 1'000 \\
0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 - 3/2x_5 = 300 \\
0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 1x_4 + 5/2x_5 = 500
\end{cases}
$$

Que l'on peut comparer à ce que l'on avait obtenu en page 47 :

$$
\begin{cases}
x_1 = 1'000 + x_3 - 2x_5 \\
x_2 = 300 - x_3 + 3/2x_5 \\
x_4 = 500 + 2x_3 - 5/2x_5 \\
\text{fct éco} = 136'000 - 20x_3 - 20x_5
\end{cases}
$$

La solution optimale est donc le quintuplet :

$$(x_1\,;x_2\,;x_3\,;x_4\,;x_5) = (1'000\,;300\,;0\,;500\,;0)$$

qui correspond à un bénéfice maximum de Fr. 136'000.- en produisant 1'000 unités de Elec-100, 300 unités de Elec-200 avec un temps mort de 500 heures à l'atelier de vérification.

7.2 Marche à suivre de la résolution matricielle

En résumé, pour résoudre matriciellement un problème de maximisation, les étapes sont :

1) Déterminer la colonne (sauf la dernière) dont l'élément de la dernière ligne a la plus grande valeur positive. C'est la colonne du pivot.

2) Déterminer la ligne du pivot en faisant le rapport des éléments de la dernière colonne sur les éléments correspondants de la colonne du pivot. La ligne du pivot étant celle donnant le plus petit rapport non négatif.

3) Rendre le pivot unitaire.

4) Annuler tous les termes de la colonne du pivot.

5) Répéter les quatre premières étapes jusqu'à ce que tous les éléments de la dernière ligne soient non positifs.

6) Les colonnes ne contenant qu'un seul élément non nul sont celles correspondant aux variables dans le programme ; la valeur de ces variables est donnée dans la dernière colonne, les variables hors programme étant nulles.

7) La valeur maximale de la fonction économique (plus exactement son opposé) est donnée dans la dernière ligne, dernière colonne.

7.3 Les variables dans et hors programme dans la résolution matricielle

Lors de la résolution matricielle, comment peut-on repérer les variables dans le programme et celles qui sont hors programme ?
Au départ, chaque variable de la matrice est représentée par une colonne et chacune des lignes donne la valeur d'une variable dans le programme.

- Les variables dans le programme sont celles dont la colonne ne contient qu'une seule valeur non nulle.
- Les variables hors programme sont donc celles qui restent.

Ainsi dans la première matrice :

variables hors programme (x_1, x_2)

variables dans le programme (x_3, x_4, x_5)

$$\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:ccc:c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4'200 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2'400 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2'600 \\ \hdashline 100 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

À la deuxième étape, nous avions obtenu la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 5/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1'000 \\ 1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 800 \\ 4/3 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1'000 \\ \hdashline 60 & 0 & 0 & -40 & 0 & -96'000 \end{array}\right)$$

On a donc :

- Variables dans le programme : x_2 ; x_3 ; x_5
- Variables hors programme : x_1 ; x_4

Exemple 1: On considère la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cc:ccc:c} 1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\ \hdashline 0 & 0 & -36 & 8 & 0 & -132'000 \end{array}\right)$$

a) Déterminer les variables qui sont hors programme.

b) Déterminer les valeurs des variables qui sont dans le programme.

7.4 Exemple accompagné

Reprenons l'exemple accompagné de la résolution algébrique (cf. page 50).

Il s'agissait de maximiser $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;\ldots;6 \end{cases}$$

a) Matrice du programme de base n° 1 :

b) Déterminer la ligne et la colonne du pivot n° 1 :

c) Rendre le pivot n° 1 unitaire :

d) Annuler tous les termes de la colonne du pivot n° 1 :

e) La fonction économique est-elle optimisée ?

f) Déterminer la ligne et la colonne du pivot n° 2 :

g) Rendre le pivot n° 2 unitaire :

h) Annuler tous les termes de la colonne du pivot n° 2 :

i) La fonction économique est-elle optimisée ?

j) Exprimer alors la situation optimale :

Exercice 7.1: Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe les problèmes linéaires suivants :

a) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 3x_1 + 3x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

b) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 5x_1 + 8x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 60 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

c) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 4x_1 + 4x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 50 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 60 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

d) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 26 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2 \end{cases}$$

e) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

f) Maximiser

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Exercice 7.2: Si dans le problème de fabrication de l'entreprise Simco (cf. page 38 : exemple FIL ROUGE), le bénéfice pour le modèle Elec-100 est de Fr. 90.- au lieu de Fr. 100.-

a) Quel est alors le programme optimal de fabrication ?

b) Et si l'on propose le programme suivant :

$$x_1 = 1'000 \quad ; \quad x_2 = 300 \quad ; \quad x_4 = 500$$

Que pouvez-vous alors affirmer ?

c) Dans votre dernière matrice (optimale), x_4 est hors programme. Et si vous la faisiez entrer…

d) Pour chacun des programmes, l'utilisation des trois ateliers est-elle identique ?

Exercice 7.3: L'entreprise ASP fabrique trois produits qui sont en grande demande. Le responsable de la production veut déterminer un programme de fabrication qui permettrait d'obtenir l'utilisation optimale de ces ressources. Il a l'information suivante :

Ressources	Quantités disponibles
Matières premières	
Matériel AX-200	2000 unités
Matériel AX-225	1800 unités
Temps-machine	
Département montage	60 heures
Département contrôle	60 heures
Département emballage	72 heures
Main-d'œuvre	80 heures

Quantité nécessaire pour la fabrication

Ressources	Produit A	Produit B	Produit C
Matériel AX-200	4 unités	5 unités	2 unités
Matériel AX-225	2 unités	5 unités	4 unités
Temps-machine en minutes/unité			
Dép. montage	10	8	10
Dép. contrôle	12	10	6
Dép. emballage	8	6	6
Main d'oeuvre en minutes/unité	15	20	15

Information coût - revenu

	Produit A	Produit B	Produit C
Prix de vente	Fr. 15.-	Fr. 19.40	Fr. 15.-
Coûts			
Matériel AX-200	Fr. 2.-	Fr. 3.-	Fr. 2.-
Matériel AX-225	Fr. 3.-	Fr. 5.-	Fr. 4.-
Main-d'oeuvre	Fr. 4.-/heure	Fr. 4.20/heure	Fr. 4.-/heure

L'entreprise veut maximiser les bénéfices.

a) Déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre.

b) Déterminer d'après le programme obtenu en a), l'utilisation réelle de chaque ressource de l'entreprise.

7.5 Quelques remarques pour terminer

"Et il y aurait encore tellement à dire!!"

Ce polycopié de près de 80 pages n'est qu'une introduction à une théorie qui pourrait encore être développée sur plusieurs dizaines de pages. Nous nous arrêterons donc ici. Nous pouvons encore mentionner quelques pistes de ce qu'on trouve dans la littérature :

- ➢ Méthode du simplexe pour minimiser une fonction économique.
- ➢ Transformation du problème en un problème appelé **dual**.
- ➢ Stabilité d'une solution optimale.

Précisons encore que ces quelques pages ont été motivées dans le but de vous proposer une application importante des notions de géométrie dans l'espace, de calculs matriciels et plus généralement d'algèbre linéaire. Lors de vos études, vous aurez encore à plusieurs reprises l'occasion de les croiser.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GERARD BAILLARGEON, *Introduction à la programmation linéaire*, Les éditions SMG 1977

ANDRÉ ROSS, *Mathématiques pour les techniques du bâtiment et du territoire*, Les Éditions Le Griffon d'Argile, 1989

MAKI THOMPSON, *Mathématiques appliquées*, McGraw-Hill, Editeurs, 1986

8 OpenOffice pour résoudre des problèmes de P.L.

*Le **solveur** du module « Classeur » d'OpenOffice*[1] *est un outil puissant d'optimisation. Il permet de trouver le minimum ou le maximum d'une fonction économique tout en respectant les contraintes qu'on lui soumet.*

8.1 Résolution de l'exemple accompagné (cf. pages 50 et 66)

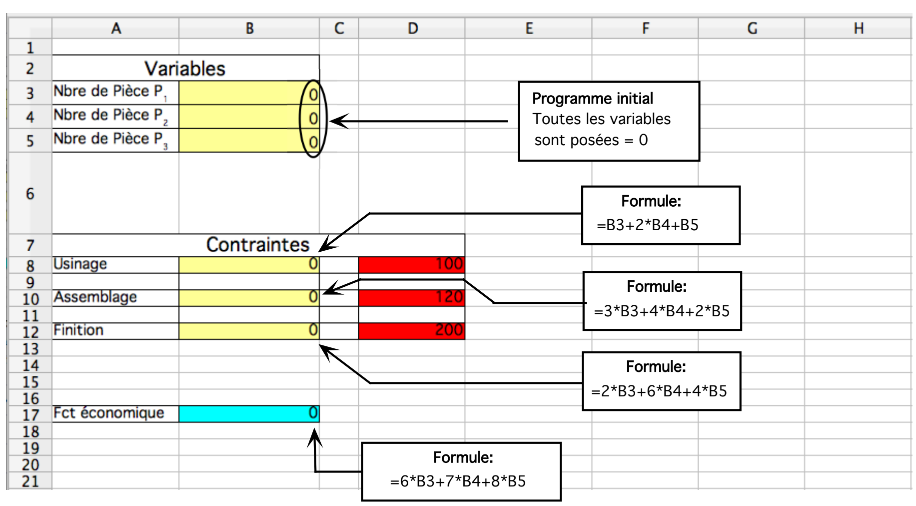
Il s'agissait de maximiser la fonction économique :

$$f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant 200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Le problème vous est proposé sur la feuille OpenOffice (fichier *proglin.ods* téléchargeable sur `http://www.javmath.ch`) :



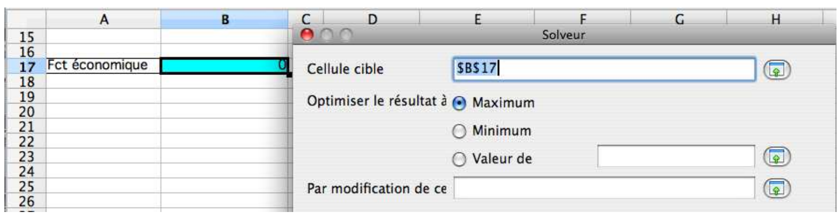
1. `http://fr.openoffice.org/`

- Les **variables** sont les quantités respectives des différents investissements (cellules jaunes).
- Les **contraintes** sont les valeurs imposées dans la donnée (cellules rouges).
- La **cellule cible** est celle contenant la formule exprimant la valeur à optimiser (cellule bleue).

Afin d'optimiser la fonction économique, nous allons utiliser la commande Solveur... du menu Outil.

➢ **ÉTAPE n° 1 : Spécification de la <u>cellule cible</u> :**

Dans la zone Cellule cible, précisez la référence de la cellule que vous voulez minimiser ou maximiser (c'est-à-dire la fonction économique).

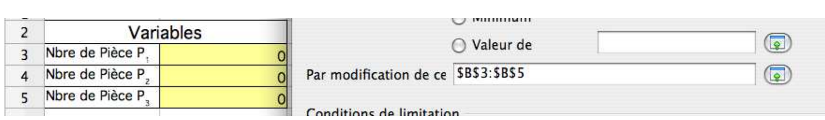


- Si vous désirez maximiser la cellule cible, choisissez le bouton Maximum.
- Si vous désirez minimiser la cellule cible, choisissez le bouton Minimum.
- Si vous désirez que la cellule cible se rapproche d'une valeur donnée, choisissez le bouton Valeur et indiquez la valeur souhaitée dans la zone à droite du bouton.

Remarque:
- Allez plus vite en cliquant directement sur la cellule à spécifier plutôt que de taper sa référence au clavier.
- La cellule cible \$B\$17 doit contenir la formule correspondante à la fonction économique dépendant directement des cellules variables : =6*B3+7*B4+8*B5 .

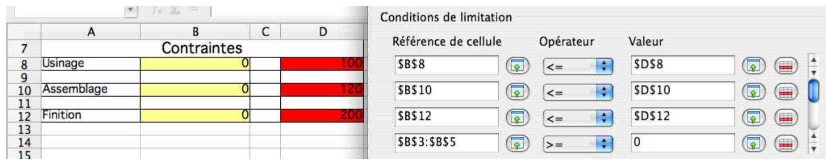
➢ **ÉTAPE n° 2 : Spécification des <u>cellules variables</u> :**

Tapez dans la zone Par modifications de cellules les références des cellules devant être modifiées par le solveur jusqu'à ce que les contraintes du problème soient respectées et que la cellule cible atteigne le résultat recherché.



Remarque:
- À nouveau, vous pouvez aller plus vite en cliquant-glissant directement sur les cellules à spécifier plutôt que de taper leurs références au clavier.
- Dans le programme initial, on définit les cellules variables par des zéros.

➢ **ÉTAPE n° 3 : Spécification des <u>contraintes</u> :**

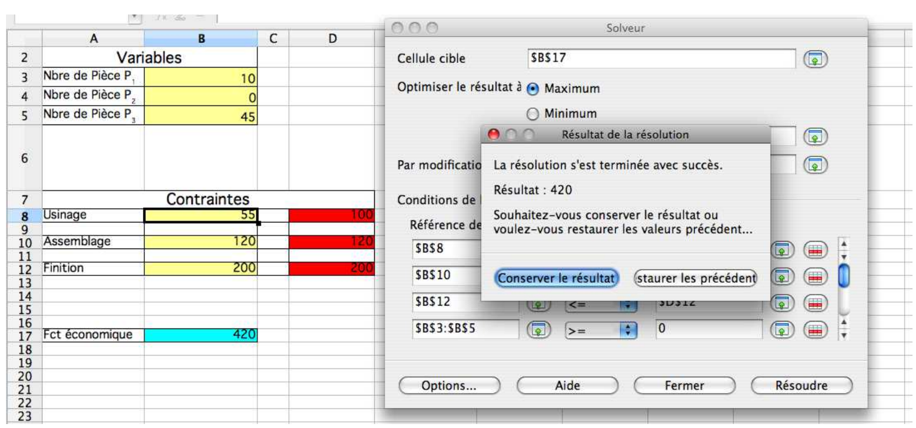


Pour chaque référence de cellule, il suffit de cliquer dans les cellules correspondantes directement sur la feuille OpenOffice. Par exemple, à la case B8, contenant la formule : =B3+2*B4+1*B5, on associe l'opérateur <= à la valeur de la cellule D8. On définit ainsi la contrainte : $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 100$.

Remarque:
- Une contrainte peut être limitée inférieurement ($\leqslant$), supérieurement ($\geqslant$), égalité ($=$) ou limitée aux nombres entiers (opérateur Nombre entier).
- La dernière contrainte correspond aux contraintes de non-négativités.

➢ **ÉTAPE n° 4 : Résolution et résultat :**

Une fois tous les paramètres du problème mis en place, le choix du bouton Résoudre amorce le processus de résolution du problème. Vous obtenez alors les réponses :



Correspondant bien à celles obtenues lors de la résolution algébrique. . . ;-)

8.2 Quelques exercices

Exercice 8.1: Reprendre le problème des crabes (ex. 6.5 page 57) dont le modèle était le suivant :

- maximiser : $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$
- avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1'000 \\ 0.80x_1 + 0.95x_2 + 0.90x_3 \leqslant 900 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 100 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1;2;3 \end{cases}$$

Exercice 8.2: Dans sa basse-cour, un fermier peut tenir 600 volatiles : oies, canard et poules. Il veut avoir au moins 20 canards et 20 oies, mais pas plus de 100 canards, ni plus de 80 oies, ni plus de 140 des deux.

Acheter et élever une poule coûte Fr. 3.-, un canard Fr. 6.- et une oie Fr. 8.-. Ils peuvent être vendus Fr. 8.-, Fr. 13.- et Fr. 20.- respectivement.

Comment ce fermier peut-il réaliser un bénéfice maximum ?

Exercice 8.3: Dans une entreprise de nettoyage, chaque personne travaille cinq jours consécutifs suivis de deux jours de congé. Il existe 4 catégories d'employés selon leurs jours de congé. Le salaire d'un employé varie selon la catégorie à laquelle il appartient :

Catégorie	①	②	③	④
Congé	Vendredi Samedi	Samedi Dimanche	Dimanche Lundi	Lundi Mardi
Salaire	Fr. 5200.-	Fr. 4800.-	Fr. 5200.-	Fr. 5600.-

Les demandes quotidiennes minimums en employés dépendent du jour de la semaine, suivant le tableau ci-dessous :

Jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Demande	25	18	41	41	30	18	24

Combien de personnes de chaque catégorie doit-on faire travailler de façon à satisfaire la demande et à minimiser le coût du personnel ?

Exercice 8.4: Présenter la feuille d'OpenOffice de l'exercice précédent de manière attrayante et interprétable par un tiers.

Exercice 8.5: Un revendeur d'électricité a promis à sa clientèle qu'au moins 25% de son électricité serait d'origine renouvelable. Il a calculé que pour l'année qui arrive il aura un marché d'au maximum 18 TWh (térawattheure). Il a aussi présélectionné trois fournisseurs à qui il va acheter son électricité en gros.
Voici les quantités (en TWh), le taux d'électricité renouvelable et la marge dégagée (en milliers d'euros/TWh) que peuvent lui fournir ces trois producteurs.

	% d'électricité renouvelable	Quantité d'électricité achetable (TWh)	Marge ($10^3 \cdot$ €/TWh)
Producteur 1	10 %	25	900
Producteur 2	46 %	6	700
Producteur 3	100 %	4	500

Chez quels producteurs et en quelle quantité ce revendeur doit-il acheter son électricité pour avoir le meilleur bénéfice possible ?

Exercice 8.6: Une entreprise fabrique trois types de piles : sèches de type 1 (PS1), sèches de type 2 (PS2) et à combustible (PC). Le processus de fabrication comporte trois étapes :

- l'assemblage,
- un test de qualité,
- un traitement d'isolation.

Seules les piles satisfaisant le test de qualité sont soumises au traitement d'isolation. Les piles qui ratent le test de qualité sont mises au rebut.
Au cours du mois prochain, l'entreprise disposera en temps-machine de 9000 heures pour l'assemblage, de 1200 heures pour les tests de qualité et de 8500 heures pour le traitement d'isolation.
Le tableau suivant résume les informations pertinentes du procédé de fabrication

Type	Assemblage (s/unité)	Test (s/unité)	Isolation (s/unité)	Profit (€/unité)	Taux d'échec	Pertes (€/unité)
PS1	33	3	15	1,15	3 %	0,6
PS2	25	4,5	22	1	1 %	0,55
PC	24	4	21	1,1	2 %	0,75

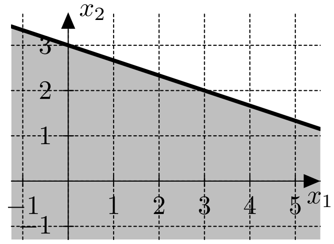
Quel est le nombre optimal de piles de chaque type à fabriquer le mois prochain si l'entreprise est assurée de vendre toute sa production ?

A

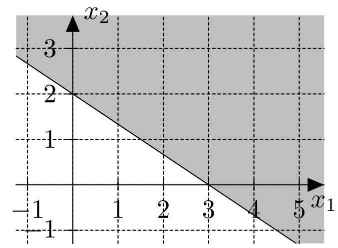
Quelques éléments de solutions

A.2 Résolution de systèmes d'inéquations

Exercice 2.1:

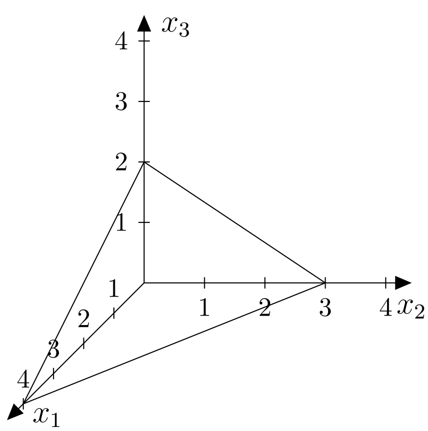


$x_1 + 3x_2 \leqslant 9$

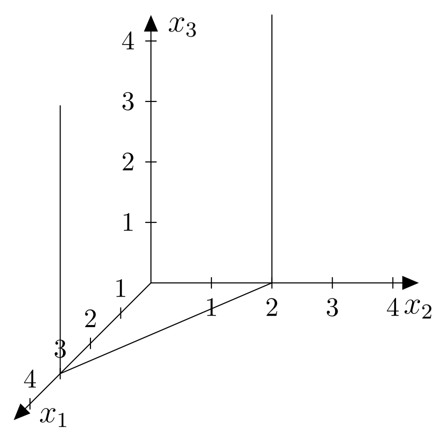


$4x_1 + 6x_2 > 12$

Exercice 2.2:



$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 12$



$2x_1 + 3x_2 = 6$

Exercice 2.3:

Seules les coordonnées des points-sommets sont données ci-dessous

a) $(0\,;0)\,;\,(0\,;10)\,;\,(4\,;8)\,;\,(10\,;2)\,;\,(11\,;0)$

b) $(0\,;0)\,;\,(0\,;6)\,;\,(4\,;5)\,;\,(6\,;3)\,;\,(7\,;0)$

c) $(-1\,;1)\,;\,(-1\,;8)\,;\,(4\,;-2)\,;\,(2\,;-2)$

d) $(0\,;0)\,;\,(0\,;4)\,;\,(4\,;2)\,;\,(6\,;0)$

Exercice 2.4:

Seules les coordonnées des points-sommets sont données ci-dessous

a) $(0\,;0\,;0)$; $(2\,;0\,;0)$; $(4/3\,;4/3\,;0)$; $(0\,;2\,;0)$; $(0\,;0\,;4)$

b) $(0\,;0\,;0)$; $(2\,;0\,;0)$; $(0\,;2\,;0)$; $(0\,;0\,;2)$; $(2\,;0\,;2)$

c) $(0\,;0\,;0)$; $(4\,;0\,;0)$; $(0\,;4\,;0)$; $(0\,;0\,;4)$; $(4\,;0\,;8/3)$; $(0\,;8/3\,;8/3)$; $(24/7\,;12/7\,;0)$

d) $(0\,;0\,;0)$; $(6\,;0\,;0)$; $(0\,;6\,;0)$; $(0\,;0\,;8)$; $(3\,;2\,;4)$

e) $(0\,;0\,;0)$; $(4\,;0\,;0)$; $(0\,;4\,;0)$; $(0\,;0\,;4)$; $(8/3\,;0\,;8/3)$; $(0\,;8/3\,;8/3)$; $(8/3\,;8/3\,;0)$; $(2\,;2\,;2)$

Exercice 2.5:

Il s'agit du segment AB.

Exercice 2.6:

Un corrigé peut être vu à votre demande.

Exercice 2.7:

Indications :

- Proposer dans un premier temps un raisonnement en dimension 2.
- Il s'agira de considérer deux points A et B dont les coordonnées vérifient une même inéquation ($ax_1 + bx_2 \leqslant c$) puis de montrer alors que tous les points M situés sur le segment AB vérifient eux aussi cette même inéquation.

Un corrigé complet peut être vu à votre demande

A.3 Traduction des prob. en langage mathématique

Exercice 3.1:

En posant x_1 = le nombre d'unités P_1, x_2 = le nombre d'unités P_2, x_3 = le nombre d'unités P_3,

maximiser $f(x_1; x_2; x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant 200 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

Exercice 3.2:

En posant x_1, x_2, x_3 = respectivement le nbre de sacs de 100 kg de fertilisant pelouse, jardin, usage multiple,

maximiser $f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1 + 8x_2 + 6x_3$ avec les contraintes :

$$\begin{cases} 20x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leqslant 6'000 \\ 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leqslant 10'000 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 4'000 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

Exercice 3.3:

En posant x_1, x_2, x_3 = respectivement le nbre de poupées Am, Stram, Gram,

$$\text{maximiser } f(x_1; x_2; x_3) = x_1 + 1{,}25x_2 + 1{,}5x_3 \text{ avec les contraintes :}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leqslant 160 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 50 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 50 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

Exercice 3.4:

En posant x_1, x_2, x_3 = respectivement le nbre d'unités du produit A, B, C,

$$\text{minimiser } f(x_1; x_2; x_3) = 1{,}25x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}75x_3 \text{ avec les contraintes :}$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 22x_3 \geqslant 75 \\ 20x_1 + 30x_2 + 12x_3 \geqslant 100 \\ 500x_1 + 400x_2 + 200x_3 \geqslant 4'000 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

Exercice 3.5:

En posant x_1, x_2, x_3 = respectivement le nbre d'emballages de carton, de tubes, de boîtes,

$$\text{maximiser } f(x_1; x_2; x_3) = 0{,}04x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}10x_3 \text{ avec les contraintes :}$$

$$\begin{cases} 150/100x_1 + 50/600x_2 + 60/100x_3 \leqslant 300 \\ 30/100x_1 + 30/600x_2 + 40/100x_3 \leqslant 120 \\ 2/100x_1 + 2/600x_2 + 5/100x_3 \leqslant 10 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

Exercice 3.6:

En posant x_1, x_2, x_3 = respectivement le nbre de boîtes de luxe, spéciales, ordinaires,

$$\text{maximiser } f(x_1; x_2; x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \text{ avec les contraintes :}$$

$$\begin{cases} 0{,}45x_1 + 0{,}56x_2 + 0{,}45x_3 \leqslant 33{,}6 \\ 0{,}67x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}22x_3 \leqslant 25{,}2 \\ 0{,}34x_1 + 0{,}084x_2 \leqslant 10{,}08 \\ \text{où } x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1; 2; 3 \end{cases}$$

A.4 Résolution graphique d'un prob. à 2 variables

Exercice 4.1:

a) $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 2$ $\quad f(4\,;2) = 18$

b) Tous les points $(x_1\,;x_2)$ situés sur le segment AB avec $A(5\,;8)$ et $B(8\,;5)$; $f(x_1\,;x_2) = 52$

c) $x_1 = 2$ $\quad x_2 = 8$ $\quad f(2\,;8) = 38$

d) $x_1 = 4$ $\quad x_2 = 2$ $\quad f(4\,;2) = 34$

e) $x_1 = 9$ $\quad x_2 = 1$ $\quad f(9\,;1) = 21$

Exercice 4.2:

Il faudra 6 lots A et 4 lots B.

Exercice 4.3:

Il faudra 9 lots de 10 chemises du premier modèle et 2 lots de 10 chemises du deuxième.
Attention : on attend ici des valeurs entières et non pas respectivement 25/3 et 10/3.

A.5 Résolution graphique d'un prob. à 3 variables

Exercice 5.1:

a) $x_1 = 10$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_3 = 30$ $\quad f(10\,;0\,;30) = 390$

b) $x_1 = 50/3$ $\quad x_2 = 50/3$ $\quad x_3 = 0$ $\quad f(50/3\,;50/3\,;0) = 1150/3$

c) Tous les points $(x_1\,;x_2\,;x_3)$ situés sur l'arête AB avec $A(10\,;0\,;60)$ et $B(0\,;0\,;70)$; $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 70$

Exercice 5.2:

a) $x_1 = 20$ $\quad x_2 = 20$ $\quad x_3 = 20$ $\quad f(20\,;20\,;20) = 700$

b) Tous les ateliers sont utilisés à plein rendement c'est-à-dire 120 heures.

c) Bénéfice optimal : Fr. 700.-

Exercice 5.3:

a)

$(x_1\,;x_2\,;x_3)$	$f(x_1\,;x_2\,;x_3)$
$(0\,;0\,;0)$	0
$(4\,;0\,;0)$	12
$(0\,;4\,;0)$	12
$(0\,;0\,;4)$	12
$(8/3\,;0\,;8/3)$	16
$(0\,;8/3\,;8/3)$	16
$(8/3\,;8/3\,;0)$	16
$(\mathbf{2}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{2})$	**18**

b)

$(x_1\,;x_2\,;x_3)$	$f(x_1\,;x_2\,;x_3)$
$(0\,;0\,;0)$	0
$S_1(\mathbf{4}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{0})$	**16**
$(0\,;4\,;0)$	8
$(0\,;0\,;4)$	8
$S_2(\mathbf{8/3}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{8/3})$	**16**
$(0\,;8/3\,;8/3)$	32/3
$S_3(\mathbf{8/3}\,;\mathbf{8/3}\,;\mathbf{0})$	**16**
$S_4(\mathbf{2}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{2})$	**16**

Dans ce deuxième cas, on constate que tous les points contenus dans la face $S_1S_2S_3S_4$ du polyèdre permettent d'optimiser la fonction f.

Exercice 5.3:

c)

$(x_1\,;x_2\,;x_3)$	$f(x_1\,;x_2\,;x_3)$
$(120\,;0\,;0)$	240
$(0\,;120\,;0)$	180
$(60\,;0\,;30)$	150
$(\mathbf{0}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{120})$	**120**
$(15\,;45\,;30)$	127,5

A.6 Résolution par méthode algébrique

Exercice 6.1:

a) $S = \{(0\,;7/2\,;0\,;9/2)\}$

b) $S = \{(9+\lambda-2\mu\,;-10-2\lambda+3\mu\,;\lambda\,;\mu)\}$ (*par exemple*)

Exercice 6.2:

$x_1 = 4$ $\qquad x_2 = 0$ $\qquad f(4\,;0) = 8$

Exercice 6.3:

a) Le nombre de produits du type SP-1 = 6 ; le nombre de produits du type SP-2 = 5
les bénéfices maximums sont de Fr. 27.-

b) Oui

Exercice 6.4:

a) Le nombre de produits du type $P_1 = 16$; $P_2 = 8$; $P_3 = 0$
les bénéfices maximums sont de Fr. 104.-

b) Non

Exercice 6.5:

Le nombre de crabe royal = 550 ; de crabe des neiges = 450 ; de crabe "Dungeness" = 0.
Le bénéfice maximum est d'environ 9'100 u.m.

A.7 Résolution par méthode du simplexe

Exercice 7.1:

a) $\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 2/7 & -1/7 & 2 \\ 1 & 0 & -1/7 & 4/7 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3/7 & -9/7 & -18 \end{array}\right)$ donc $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ et $f(4\,;2) = 18$

b) $\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1/5 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1 \\ 17/5 & 0 & 0 & 1 & -2/5 & 26 \\ 4/5 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 12 \\ \hline -7/5 & 0 & 0 & 0 & -8/5 & -96 \end{array}\right)$ donc $x_1 = 0$, $x_2 = 12$ et $f(0\,;12) = 96$

c) $\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 0 & 1 & 5/3 & -1/3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -17/3 & 1/3 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -52 \end{array}\right)$ ou $\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -17 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 0 & 0 & -4 & 0 & -8/5 & -52 \end{array}\right)$

donc $(x_1\,;x_2) = (8\,;5)$ ou $(5\,;8)$ $f(x_1\,;x_2) = 52$

d) $x_1 = 2$ $x_2 = 8$ $f(2\,;8) = 38$

e) $(x_1\,;x_2\,;x_3) = (2\,;3\,;0)$ ou $(0\,;2\,;3)$ ou... $f(x_1\,;x_2\,;x_3) = 15$

Comment pourrait-on caractériser l'ensemble des solutions optimales ?

f) $x_1 = 3$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$ $f(3\,;0\,;2) = 18$

Exercice 7.2:

a) $x_1 = 600\,;\ x_2 = 600\,;\ x_5 = 200$ pour un bénéfice maximum de Fr. 126'000.-

b) Il s'agit également d'un programme optimal.

c) La matrice obtenue en **a)** :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & -4/5 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & -1/5 & 3/5 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & -4/5 & 2/5 & 1 & 200 \\ \hline 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & -126'000 \end{array}\right)$$

devient :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & 300 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5/2 & 500 \\ \hline 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & -126'000 \end{array}\right)$$

Ainsi, le fait de faire entrer une variable hors programme associée au coefficient zéro de la fonction économique permet de déterminer un deuxième programme optimal.

d) Non, les temps morts ne sont pas distribués de la même manière.

Exercice 7.3:

a) 280 unités du produit A, 0 du produit B et 40 du produit C.

b) Il restera :
- 800 unités de AX-200,
- 1'080 unités de AX-225,
- 6 heures et 40 minutes de temps mort au département de montage,
- aucun temps mort au département de contrôle,
- 30 heures et 40 minutes de temps mort au département d'emballage,
- toute la main-d'œuvre est utilisée.

A.8 OpenOffice pour résoudre des problèmes de P.L.

Exercice 8.1:

Le nombre de crabes "royal" = 550 ; de crabes "des neiges" = 450 ; de crabes "Dungeness" = 0.
Le bénéfice maximum est d'environ 9'100 u.m.

Exercice 8.2:

Le nombre d'oies = 80 ; de canards = 60 ; de poules = 460.
Le bénéfice maximum est de Fr. 3680.-.

Exercice 8.3:

Catégorie ① = 13 personnes
Catégorie ② = 12 personnes
Catégorie ③ = 7 personnes
Catégorie ④ = 11 personnes.
Coût minimum = Fr. 223'200.-

Exercice 8.4:

Pas de corrigé

Exercice 8.5:

L'entreprise doit donc acheter 15 TWh au premier producteur, 0 TWh au deuxième et 3 TWh au troisième producteur. Elle fera alors une marge de 15 millions d'euros.

Exercice 8.6:

L'entreprise doit donc fabriquer 432'000 piles de type PS1, 0 pile type PS2 et 756'000 piles de type PC. Son profit optimisé sera alors de 1'277'748 €

Index

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`http://www.javmath.ch`