Programmation linéaire

Université de Rennes 1 et INRIA Rennes Bretagne-Atlantique

Historique

La programmation linéaire est dans les fondements de la recherche opérationnelle (RO) ou aide à la décision : propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces.

1940	P. Blackett prix Nobel de physique (1948)	dirige 1^{re} équipe de RO : implantation optimale de radars de surveillance
1939-45	L. Kantorovich	programmation linéaire
1947	G. Dantzig (le fondateur)	algorithme du simplexe " one of the top 10 algorithms of the century", CSE, 2 :1, 2000
2005	décès de Dantzig	

Aujourd'hui : développement considérable grâce aux solveurs et langage de modélisation très performants AMPL, Gurobi, CPLEX (`https://www.ampl.com`).

Un exemple ordinaire

Une entreprise manufacture quatre produits qui lui apportent des profits de $7, 9, 18$ et 17 € respectivement. Pour se faire, elle utilise les trois ressources A, B, C dont elle dispose en stock $42, 17, 24$ unités. Les ressources consommées pour fabriquer une unité de chacun de ces produits sont données dans le tableau ci-dessous. L'entreprise souhaite maximiser son profit.

	produit 1	produit 2	produit 3	produit 4	stock
ressource A	2	4	5	7	42
ressource B	1	1	2	2	17
ressource C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

Un exemple ordinaire

Notons x_i la quantité cherchée du produit i.

	produit 1	produit 2	produit 3	produit 4	stock
ressource A	2	4	5	7	42
ressource B	1	1	2	2	17
ressource C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Maximiser } z = & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s. c.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & \leq & 42 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 17 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 24 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Un problème de programmation linéaire (PL) sous *forme canonique*.

Programmes linéaires (PL)

L'intérêt des programmes linéaires (PL) réside dans :

- Ils modélisent convenalement un grand nombre de situations réelles.
- L'existance des solveurs efficaces pour la résolution (IBM ILOG CPLEX, Gurobi, COIN, MINOS etc.).
- L'existance des langages de modélisation comme "A Mathematical Programming Language (AMPL)".

Chaque programme linéaire peut être décrit sous la forme :

Forme canonique d'un PL :

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{Max} & c_1x_1 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\
\text{s. c.} & a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0}
\end{array}
$$

Un PL requiert toujours :

- une fonction objectif (**linéaire**)
- $m+n$ contraintes (**linéaires**) du problème.
- n variables $x_i, i = 1, \ldots, n$

Un PL sous forme matricielle

$$\begin{array}{lll} \text{Maximiser} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s. c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

ou

$$\max\{cx \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

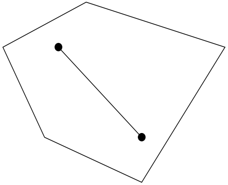
$$c = (c_1 \ldots c_n)$$

c désigne le vecteur **objectif**,
b – le vecteur **membre droit**,
et $A^{m \times n}$ – la **matrice des contraintes**.

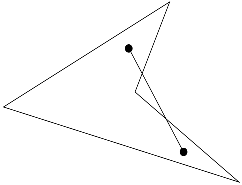
Espace des solutions addmissibles

L'espace des solutions *admissible/réalisables/faisables* défini par les contraintes linéaires est un polyèdre convexe $P = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

P est un *polyèdre convexe* dans $\mathbb{R}^n$ (si $x \in P$, $y \in P$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ alors $\lambda x + (1-\lambda)y \in P$)



convexe



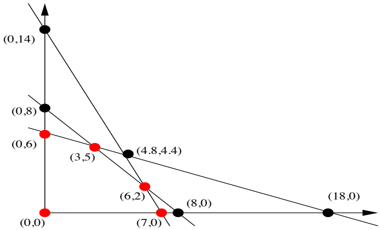
non convexe

Résultat principal : L'optimum, s'il existe, est toujours atteint à un sommet du polytope P.

Les sommets de P

Chacune des $m+n$ contraintes définit un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (ligne droite dans $\mathbb{R}^2$). Un *sommet* est l'intersection de n hyperplans. Il y a *au plus* C^n_{n+m} sommets.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

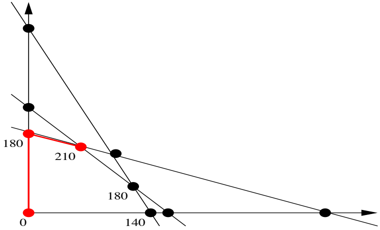


Approche naïve

Idée : On est sûr de trouver la solution optimale dans un sommet. Donc il suffit de parcourir tous les sommets et de prendre le meilleur.
Génération d'un sommet : Choisir n parmi les $m + n$ contraintes. Résoudre le système linéaire où les n contraintes choisies sont à égalité. Si le système a une solution et si cette solution satisfait les m contraintes restantes, cette solution est un sommet de P.
Problème : le nombre de sommets. Il faut résoudre $\binom{m+n}{n}$ systèmes linéaires.
Exemple : pour $m = 400$ et $n = 200$ il faut résoudre environ $2,5 \times 10^{164}$ systèmes linéaires, ce qui dépasse le nombre estimé des électrons et des protons dans l'Univers !

Idée : Parcourir les sommets de P de façon plus intelligente.

Passer itérativement d'un sommet à un sommet adjacent de façon à augmenter la valeur de la fonction à optimiser jusqu'à trouver un sommet où le maximum est atteint.



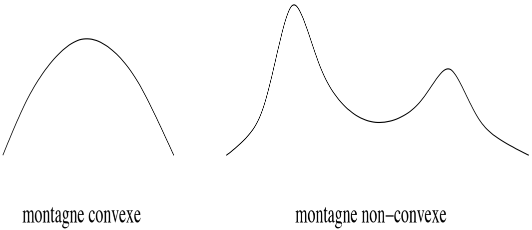
10/28

L'algorithme du simplexe

- *Initialisation* : Choisir un sommet $x^0 \in P$, $t = 1$
- *Itération t* : Soit $y^1, \dots, y^k$ tous les sommets voisins de x^t (les sommets reliés avec x^t par une arête).
  - Si $cx^t > cy^s$, $s = 1, \dots, k$, stop. La solution optimale est x^t.
  - Sinon, choisir un voisin y^s, tel que $cy^s \geq cx^t$. Poser $x^{t+1} = y^s$ et passer à l'itération $t + 1$.

Simplexe – pourquoi ça marche ?

Grâce à la convexité du polyèdre des contraintes et à la linéarité de la fonction objectif, il n'y a pas de *maxima locaux*.



Application à un exemple

	produit 1	produit 2	produit 3	produit 4	stock
ressource A	2	4	5	7	42
ressource B	1	1	2	2	17
ressource C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Maximiser } z = & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s. c.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & \leq & 42 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 17 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 24 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Un problème de programmation linéaire sous *forme canonique*.

13/28

Les variables d'écart

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 & \Longrightarrow & \text{Max} & & & & & & & & \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & & & & & & & = & 42 \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & & & + & x_6 & & & & & = & 17 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & & & & & + & x_7 & & & = & 24 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|}
\hline
x_5 & = & 42 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 7x_4 \\
x_6 & = & 17 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 \\
x_7 & = & 24 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 \\
\hline
z & = & & & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{Tr. 1}
$$

14/28

Solution de base et amélioration

Les variables x_5, x_6, x_7 sont des *variables de base* et x_1, x_2, x_3, x_4 sont des *variables hors-base*. La *solution de base* est $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, entraînant $x_5 = 42$, $x_6 = 17$, $x_7 = 24$. Le bénéfice correspondant est $z = 0$.
Peut on faire mieux ?
Choisissons x_3. Si on fait croître x_3 à partir de 0, les autres variables hors-base restant nulles, z croît aussi. Mais il faut que la solution reste réalisable !

$$\begin{array}{lcccc} x_5 \geq 0 & \Rightarrow & 42 - 5x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8.4 \\ x_6 \geq 0 & \Rightarrow & 17 - 2x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8.5 \\ x_7 \geq 0 & \Rightarrow & 24 - 3x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8 \end{array}$$

La plus restrictive est $x_3 \leq 8$.

Changement de base

On exprime x_3 et on remplace ensuite dans :

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|}
\hline
x_5 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{5}{3}x_7 & - & 2x_4 \\
x_6 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}x_7 & & \\
x_3 & = & 8 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_7 & - & x_4 \\
\hline
z & = & 144 & + & x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_7 & - & x_4 \\
\hline
\end{array} \qquad \text{Tr. 2}$$

x_7 est *sortie* de la base et x_3 est *entrée* en base. La solution de base est $x_1 = x_2 = x_7 = x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$, $x_3 = 8$. Le bénéfice est $z = 144$.

16/28

Peut on faire mieux ?

la seule variable > 0 est x_1. On la fait entrer en base

$$\begin{array}{lcl} x_5 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 6 \\ x_6 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 24 \end{array}$$

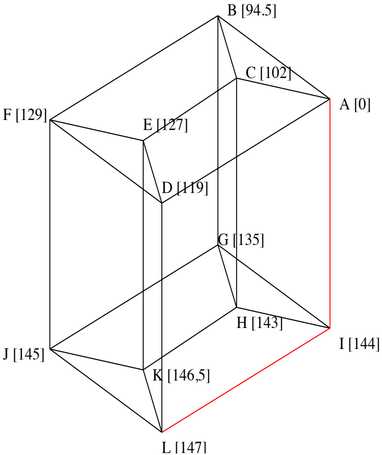
d'où $x_1 \leq 3$. On fait sortir x_6 et on obtient :

$$\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|} \hline x_5 & = & 1 & + & x_6 & - & x_2 & + & x_7 & - & 2x_4 \\ x_1 & = & 3 & - & 3x_6 & + & x_2 & + & 2x_7 & & \\ x_3 & = & 7 & + & x_6 & - & x_2 & - & x_7 & - & x_4 \\ \hline z & = & 147 & - & 3x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_7 & - & x_4 \\ \hline \end{array} \qquad \text{Tr. 3}$$

C'est la solution optimale

La solution de base associée $x_6 = x_2 = x_7 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_1 = 3$, $x_3 = 7$, correspond au sommet $(3, 0, 7, 0)$ du polyèdre des contraintes. Elle définit le plan de production suivant : on fabrique 3 unités du produit 1 et 7 unités de produit 3. Il ne nous reste qu'une unité de la ressource A. Le bénéfice est $z = 147$. De plus, tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs, donc on ne peut pas se déplacer vers un sommet voisin en augmentant la fonction du profit.

L'interprétation géométrique



sommet	x_1	x_2	x_3	x_4	z
A	0	0	0	0	0
B	0	10.5	0	0	94.5
C	0	0	0	6	102
D	17	0	0	0	119
E	11.67	0	0	2.67	127
F	13	4	0	0	129
G	0	3	6	0	135
H	0	0	7	1	143
I	0	0	8	0	144
J	4	1	6	0	145
K	3	0	6.5	0.5	146.5
L	3	0	7	0	147

19/28

Convergence de l'algorithme du simplexe

On se déplace d'un sommet à un autre en augmentant la valeur de la fonction z. Le nombre de sommets et fini (au plus $\binom{m+n}{n}$).

- Si la fonction objectif est bornée, on va finir par trouver le maximum
- Si elle ne est pas bornée, on va le détecter (pas de candidat à entrer en base).

20/28

Forme matricielle

$$z = \max\{cx \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

(contraintes de type "=" après l'introduction de variables d'écart)
Soit x_B le vecteur de variables en base et x_N le vecteur de variables hors base. Le problème s'écrit

$$Bx_B + Nx_N = b,\ \text{d'où}$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b = \overline{b}$$

La fonction objectif s'exprime comme

$$z = c_B x_B + c_N x_N = c_B\overline{b} + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

21/28

Exemple d'un PL : À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 14 kg de lait. Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait. Il fera un profit de 20 € en vendant un oeuf Extra, et de 30 € en vendant un oeuf Sublime. Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?
Solution : 3 oeufs Extra, 5 oeufs Sublime, benefice 210 €.

Solution si 18,5 kg de cacao : 2,75 Extra et 5,25 Sublime et benefice=212,5 € . Ce qui n'est pas admissible !. Pour rendre le problème admissible on ajoute la conrainte : Extra, Sublime : entier$\geq$ 0. Donc, **un (PLNE)**.

22/28

L'approche graphique pour le problème du chocolatier

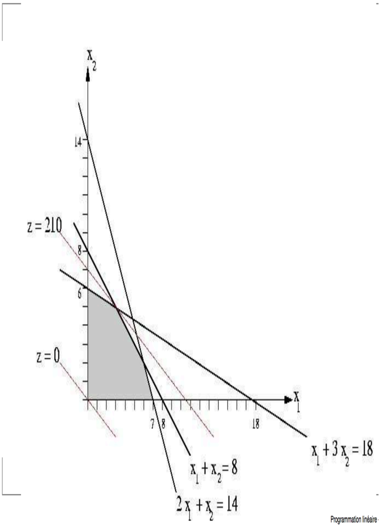
x_1 : # d'oeufs Extra
x_2 : # d'oeufs Sublime

$$\max 20x_1 + 30x_2 \qquad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (3)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \qquad (4)$$



23/28

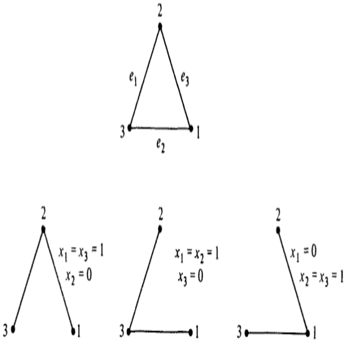
Résoudre par l'approche graphique

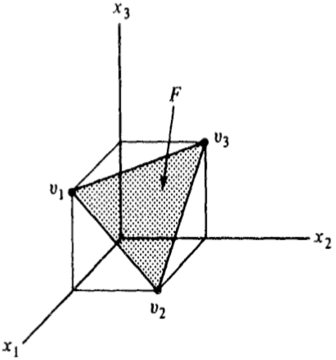
$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser } z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s. c.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser } z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s. c.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

L'ACM vu comme un PL

On cherche l'arbre couvrant minimal (ACM) du graphe $G = (V, E)$ tel que $|V| = |E| = 3$. Il y 3 arbres candidats d'être l'ACM pour G (ci-dessous à gauche). Notons $x_j = 1$ ssi $e_j = 1$. Les trois arbres peuvent alors etre vus comme des points en $3D$ et ils coincîdent avec les sommets v_1, v_2 et v_3 du polytope F (ci-dessous à droite) défini par les contraintes $x_1 + x_2 + x_3 = 2, 0 \leq x_i \leq 1$. Ainsi, un problème purement combinatoire peut être résolu comme un PL.





Partition équilibrée ou le parking optimal

M. Edmons habite au 1, rue "Dantzig" sur laquelle les voitures peuvent se garer de deux cotés. Pour son anniversaire, il a invité ses amis qui viendront avec k voitures. La longueur de la i^e voiture est notée λ_i.
Pour ne pas déranger ses voisins, M. Edmons souhaite organiser le parking des voitures de ses amis des deux cotés de la rue de manière à minimiser la longueur du coté le plus long.

1. Donner le programme linéaire associé à ce problème (sans le résoudre)
2. Quelles contraintes faut-il ajouter au programme précédent pour modéliser les situations suivantes :
    2.1 La longueur du coté pair ne doit pas dépasser 20 mètres.
    2.2 Les voitures d'une longueur supérieure à 4 mètres doivent être garées du coté impair.
    2.3 Si la longueur du coté pair dépasse 15 mètres, la longueur du coté impair ne doit pas dépasser 20 mètres.

26/28

Une étudiante élégante et coquette doit se rendre par avion aux États-Unis afin d'effectuer son stage d'été. Outre ses affaires professionnelles et quelques objets indispensables, elle doit choisir un certain nombre de vêtement dans sa garde-robe. Du fait des réglementations aériennes, il s'avère qu'il ne reste plus que quatre kilos disponibles pour ses vêtements.
Une première sélection dans sa garde-robe conduit l'étudiante à retenir, en plus de la robe qu'elle a décidé de porter dans l'avion, 3 jupes, 3 pantalons, 4 hauts et 3 robes. Le poids en grammes de chaque vêtement est répertorié dans le tableau suivant.

Vêtement	Jupe			Pantalon			Haut				Robe		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
Poids (g)	500	400	700	600	500	500	400	300	300	400	600	700	800

TABLE 1 : Poids des différents vêtement

L'étudiante décide que :

- elle doit porter au moins une robe,
- si elle porte la jupe 1 alors elle emportera également le haut 2 qui s'assortit si bien avec cette jupe,
- elle ne prendra pas le haut 4 si elle emporte les hauts 1 et 2.

Modélisation des programmes linéaires

L'objectif poursuivi est de maximiser le nombre de tenues différentes qu'elle pourra porter aux États-Unis. Une robe constitue une tenue. Les autres tenues résultent de combinaisons d'un haut et d'une jupe ou d'un pantalon. Cependant, les règles de l'élégance n'autorisent que certaines combinaisons indiquées par une croix dans le tableau suivant.

		Haut			
		1	2	3	4
Jupe	1	+	+		+
	2	+			+
	3			+	
Pantalon	1	+		+	
	2		+		
	3			+	+

TABLE 2 : Combinaisons autorisées

Modélisation du problème sous forme d'un programme linéaire

1. Exprimer les quatre contraintes du problème
2. Expression de la fonction objectif :
    2.1 Formuler la fonction objectif du problème en utilisant une expression quadratique (c'est-à-dire une somme de produits de deux variables)
    2.2 Rendre linéaire la fonction objectif. Pour chaque produit de la somme précédente, on utilisera une nouvelle variable binaire et deux nouvelles contraintes.