École des Mines de Nancy
Coralie Fritsch, coralie.fritsch@inria.fr

Année 2018-2019

FICM 2A – Probabilités

TD 8. Chaînes de Markov IV – Corrigé

Exercice 1. Supposons que E est fini et X est irréductible. Montrer que X est irréductible récurrente positive.

Solution. La chaîne X étant irréductible sur un espace d'état fini, donc elle est irréductible récurrente et admet donc au moins un point récurrent $x \in E$. D'après la proposition 7.5, elle admet μ_x comme mesure invariante à valeurs finies. De plus,

$$\mu_x(E) = \sum_{y \in E} \mu_x(\{y\}),$$

qui est finie en tant que somme finie de termes finis. En conséquence, X admet une mesure invariante de masse finie, donc X est, par définition, irréductible récurrente positive. □

Exercice 2. Soit X une chaîne de Markov homogène irréductible récurrente et ν une mesure invariante à valeurs finies pour X. Montrer que $\mu_x = \frac{\nu}{\nu(\{x\})}$.

Solution. La chaîne X étant irréductible récurrente, elle admet, d'après la proposition 7.7, μ_x comme mesure invariante à valeurs finies, unique à constante multiplicative près. Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\nu = c\,\mu_x.$$

En prenant cette égalité en $\{x\}$ et en utilisant le fait que $\mu_x(\{x\}) = 1$ (Proposition 7.5), on en déduit que $c = \nu(\{x\})$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 3. On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ définie par $X_{n+1} = X_n + 1$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que X est transitoire.
2. Déterminer une mesure invariante à valeurs finies pour X.

Solution. 1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ presque sûrement sous $\mathbb{P}_x$. Montrons que cela implique que X est transitoire. En effet, pour toute constante $A > 0$, il existe N_A (aléatoire) tel que

$$X_n \geq N,\ \forall n \geq N_A.$$

Par conséquent, en prenant $A = x+1$, on s'aperçoit que X passe au plus N_{x+1} fois en x, c'est-à-dire un nombre aléatoire fini de fois. Par conséquent, x est transitoire. Ceci étant vrai pour tout point initial $x \in_Z$,

$$\boxed{\text{La chaîne } X \text{ est transitoire.}}$$

Remarquons que cette démonstration reste valable pour toute chaîne de Markov qui tend vers $+\infty$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement (ou même avec une probabilité strictement positive sous $\mathbb{P}_x$).

2. On vérifie aisément que la mesure de comptage, définie par $\nu_i = 1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ convient. En effet, la matrice de transition est donnée par $P_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$ donc

$$[\nu P]_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_i P_{ij} = \nu_{i+1} = 1$$

□

Exercice 4. On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admet que cette chaîne est irréductible récurrente.

1. Déterminer une mesure invariante à valeurs finies pour X.
2. Montrer que X est irréductible récurrente nulle.
3. Calculer $\mathbb{E}_0(T_0)$.

Solution. 1. On vérifie aisément que la mesure de comptage, définie par $\nu_i = 1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ convient. En effet, la matrice de transition est donnée par $P_{ij} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{j=i+1} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{j=i-1}$ donc

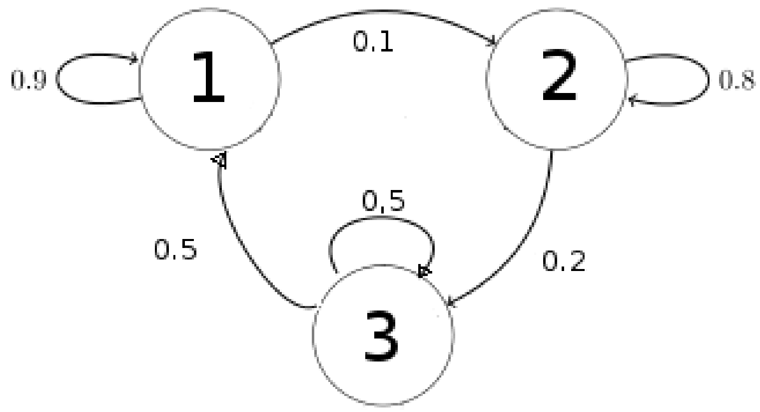
$$[\nu P]_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_i P_{ij} = \frac{1}{2}\nu_{i+1} + \frac{1}{2}\nu_{i-1} = 1.$$

2. D'après l'énoncé, la chaîne est irréductible récurrente. De plus elle admet une mesure invariante de masse infinie, donc la chaîne est irréductible récurrente nulle.

3. La chaîne est irréductible récurrente nulle, donc, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_i(T_i) = +\infty$ (d'après la proposition 7.12).

□

Exercice 5. On considère le graphe de transition suivant et la chaîne X associée.



1. Démontrer sans calcul que X admet une unique probabilité invariante ν.
2. Calculer ν.
3. Calculer $\mathbb{E}_1(T_1)$, $\mathbb{E}_2(T_2)$ et $\mathbb{E}_3(T_3)$.
4. On considère que le graphe est représentatif d'un modèle de l'évolution d'une plante : 1 pour bourgeonnement, 2 pour production de pollen, 3 pour repos. Sachant que la plante produit un nombre $N_p \geq 0$ de grains de pollen par unité de temps dans l'état 2 (et 0 grain de pollen dans les autres états), donner un équivalent de la production totale de pollen par la plante au cours de sa vie de durée $n >> 1$.

Solution. 1. La chaîne est irréductible (car tous les états communiquent entre eux) et elle est récurrente positive (car elle est finie). Par conséquent (Proposition 7.10), elle est irréductible récurrente positive et admet donc une unique probabilité invariante ν.

2. La mesure ν est solution de $\nu P = \nu$, où P est la matrice de transition de X. Donc, en notant $\nu = (x_1, x_2, x_3)$, nous avons

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (10x_1, 10x_2, 10x_3),$$

soit

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ t.q} \begin{cases} x_1 = 10\alpha \\ x_2 = 5\alpha \\ x_3 = 2\alpha. \end{cases}$$

De plus, ν est une mesure de probabilité, donc $\alpha = 1/17$, soit

$$\boxed{\nu = (10/17, 5/17, 2/17).}$$

3. D'après la proposition 7.11, nous avons

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{E}_1(T_1) = 1/\nu(\{1\}) = 17/10 \\ \mathbb{E}_2(T_2) = 1/\nu(\{2\}) = 17/5 \\ \mathbb{E}_3(T_3) = 1/\nu(\{3\}) = 17/2. \end{cases}}$$

4. On utilise ici le théorème ergodique (Théorème 7.14, partie 1), et on en déduit que la quantité de grains de pollen produits après un temps n, notée $Q_p(n)$, pour une position initiale x donnée, vérifie

$$\frac{Q_p(n)}{n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_p \mathbf{1}_{X_i=2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_x-ps} N_p \nu_2(\{2\}) = \frac{5N_p}{17}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{Q_p(n) \sim_{n\to\infty} \frac{5\,n\,N_p}{17}.}$$

□

Exercice 6. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *iid* de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On considère la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 \text{ si } \xi_{n+1} = 1 \\ 0 \text{ si } \xi_{n+1} = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de probabilités transition.
2. On note $T = \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}_0(T = k) = p^{k-1}(1-p),\ \forall k \geq 1,$$

puis montrer que la chaine est irréductible récurrente positive.
3. Calculer l'ensemble des mesures invariantes à valeurs finies de X. On note ν son unique mesure de probabilité invariante. Montrer que $\nu(0) = 1 - p$ puis donner la valeur de ν en tout point.
4. Calculer l'espérance du maximum de X entre les temps 0 et T_0.

5. Supposons que X_n représente la valeur au jour n de la trésorerie d'une entreprise. Cette trésorerie rapporte chaque jour une valeur rX_n. Quel est, en moyenne, le gain quotidien réalisé en temps long par l'entreprise grâce au placement de cette trésorerie ?

Solution. 1. On a, presque sûrement et pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = F(X_n, \xi_{n+1})$ où

$$F : E \times \{0,1\} \mapsto E$$
$$(x,e) \to \begin{cases} x+1 \text{ si } e = 1, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

est une fonction mesurable et où la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, indépendante de X_0. On en déduit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite récurrente aléatoire. Par conséquent, <u>X est une chaîne de Markov homogène</u> et sa probabilité de transition est donnée par

$$\boxed{P_{ij} = \mathbb{P}(F(i,\xi_1) = j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1, \\ 1-p \text{ si } j = 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}}$$

2. On a $\{T = k\} = \{X_0 = 0, X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{k-1} \neq 0, X_k = 0\}$, or $X_{k+1} = X_k + 1$ ou 0 presque sûrement pour tout $k \geq 0$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_{k-1} = k-1, X_k = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = 0) P_{0,1} P_{1,2} \cdots P_{k-1,k} P_{k,0}. \end{aligned}$$

Soit, en utilisant 1),

$$\boxed{\mathbb{P}(T = k) = p^{k-1}(1-p).}$$

Montrons à présent que X est irréductible. Pour tout $i \geq 0$, $\mathbb{P}_i(X_1 = i+1) = p > 0$ donc $i \to i+1$. Par transitivité, $0 \to i$ pour tout $i \geq 1$. De plus, $\mathbb{P}_i(X_1 = 0) = 1-p > 0$ donc $i \to 0$. En définitive, $0 \leftrightarrow i$ pour tout $i \geq 1$, donc $i \leftrightarrow j$ pour tout $i, j \geq 0$ et <u>la chaîne est irréductible</u>.
Montrons la récurrence de la chaîne. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)p^{k-1} \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} \qquad = \frac{1}{1-p} < \infty, \end{aligned}$$

donc le point 0 est récurrent. La chaîne X est irréductible et admet un point récurrent, donc $\underline{X \text{ est irréductible récurrente.}}$

Montrons finalement que la chaîne est positive. X étant irréductible récurrente elle admet la mesure invariante à valeurs finies définie par

$$\mu_0(y) = \mathbb{E}_0(\sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{1}_{X_k=y}).$$

On a alors $\mu_0(E) = \mathbb{E}(T) = 1/(1-p) < \infty$, donc μ_0 est de masse finie. En définitive, X est une chaîne irréductible récurrente qui admet une mesure invariante de masse finie, donc

$$\boxed{X \text{ est irréductible récurrent positive.}}$$

3. Les mesures invariantes finies d'une chaîne irréductible récurrentes étant proportionnelles, il suffit pour toutes les déterminer d'en calculer une. Déterminons exactement μ_0. Par invariance, on a $\mu_0 = \mu_0 P$, c'est-à-dire, pour tout $i \geq 0$,

$$\mu_0(i+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k P_{k,i+1} = \mu_0(i)p.$$

Par récurrence immédiate, $\mu_0(i) = \mu_0(0)p^i$ avec $\mu_0(0) = 1$, donc $\underline{\mu_0(i) = p^i}$ pour tout $i \geq 0$. L'ensemble des mesure invariantes est donc donné par

$$\boxed{\left\{\mu : i \mapsto Kp^i,\ K \in \mathbb{R}_+^*\right\}.}$$

Soit ν la mesure de probabilité invariante de X. D'après ce qui précède, il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\nu = K\mu_0$ déterminé par l'égalité $1 = \nu(E) = K\mu_0(E) = K/(1-p)$ soit

$$\boxed{\nu(i) = (1-p)p^i,\ \forall i \geq 0.}$$

4. La trajectoire de X entre 0 et $T-1$ est uniquement constituée de sauts égaux à $+1$ et $X_T = 0$ presque sûrement. Par conséquent le maximum de X entre les temps 0 et T est réalisé en $T-1$ et il vaut $T-1$. Ainsi

$$\mathbb{E}_0\left(\max_{k\in\{0,1,\dots,T\}} X_k\right) = \mathbb{E}_0(T-1) = \frac{1}{1-p} - 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{E}_0\left(\max_{k\in\{0,1,\dots,T\}} X_k\right) = \frac{p}{1-p}.}$$

5. Après n jours, la trésorerie a rapporté en moyenne quotidienne $\sum_{i=1}^{n} rX_i/n$. Or X est irréductible récurrente positive de mesure de probabilité invariante ν et $f : x \in \mathbb{N} \mapsto rx \in \mathbb{R}_+$ est mesurable positive, donc, d'après le théorème ergodique,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rX_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_0-p.s.} \nu(f) = \sum_{k=0}^{\infty} rk\nu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} rk(1-p)p^i.$$

Nous avons donc

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rX_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_0-p.s.} \frac{rp}{1-p}}$$

$\square$