Le lemme de Neyman Pearson indique que le LRT est le test qui maximise la probabilité de détection pour une probabilité fixe de fausse alarme α.

On utilise le LRT pour trouver le seuil ainsi que les régions de décision R_0 et R_1 nous permettant de décider si il y a eu un changement au niveau des pixels.

· On a d'après le notebook :

$$H_0 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 0{,}125^2)$$

$$H_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0{,}35, 0{,}125^2)$$

avec H_0 modélisant l'absence de changement et H_1 modélisant le changement.

$$\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0{,}35}{\sigma}\right)^2}}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0{,}35}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

$$e^{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{x_i - 0{,}35}{\sigma}\right)^2\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

$$\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2 - \left(\frac{x_i - 0{,}35}{\sigma}\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\ln(\lambda)$$

$$\frac{0{,}7x_i - 0{,}1225}{\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\ln(\lambda)$$

D'après les estimation faites sur le notebook, $\sigma = 0{,}125$

$$44{,}8\, x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\ln(\lambda) + 7{,}84$$

$$x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{0{,}04464\ \ln(\lambda) + 0{,}175}_{\gamma}$$

Scanné avec CamScanner

Pour trouver γ on étudie la probabilité de fausse alarme

$$P_{FA} = P(H_1 | H_0 \text{ vraie}) = P(X_i > \gamma | H_0 \text{ vraie}) = 0,05$$

On fixe $P_{Fa} = 0,05$ car on souhaite avoir un P_{Fa} dans moins de 5% des cas.

Sous H_0, $X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = 0,125$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt = 0,05$$

On aimerait bien se ramener à la densité d'une loi normale centrée réduite

donc on pose $\begin{cases} u = \frac{t}{\sigma} \\ t = u\sigma \\ dt = \sigma du \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\gamma}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) = 0,05$$

donc comme Q est inversible on a :

$$\gamma = Q^{-1}(0,05) \times \sigma$$

$$\gamma = 1,65 \times 0,125 \simeq 0,20625$$

donc on a : $x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0,20625$

Donc on choisit H_1 si la valeur du pixel (après avoir fait la soustraction des 2 images) est supérieur à 0,20625 ou inférieur à $-0,20625$

c'est à dire que on dit qu'il y a eu un changement pour ce pixel si il est supérieur à 0,20625 (après soustraction) ou inférieur à $-0,20625$

sinon on choisit H_0, pas de changement

$\Leftrightarrow \alpha = P(X_i > \gamma \mid X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 0{,}125^2))$

$\Leftrightarrow \alpha = 1 - P(X_i < \gamma \mid X_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 0{,}125^2))$

$\Leftrightarrow \alpha = 1 - F_{\mathcal{N}(0, 0{,}125^2)}(\gamma)$ avec F la fonction de répartition de X_i.

$\Leftrightarrow 1 - \alpha = F_{\mathcal{N}(0, 0{,}125^2)}(\gamma)$

$\Leftrightarrow F^{-1}_{\mathcal{N}(0, 0{,}125^2)}(1 - \alpha) = \gamma$

Cette dernière équation nous permet de trouver le seuil pour une valeur de α fixée.