El Principio de Inducción

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

6 de junio de 2021

Bibliografía

- Kisbie-Miatello, Álgebra I - Matemática Discreta I, Cáp. 1
  - https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/941/CMat32.pdf
- Grimaldi, Secc. 4.1 y 4.2

Motivación

Idea general: el principio de inducción matemática sirve para demostrar enunciados del siguiente estilo:

$$\forall n, P(n)$$

en donde $P(n)$ es una proposición que depende del número natural n.

Esto a veces no es necesario...
Por ejemplo, para demostrar

$$n + 0 = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, basta con usar el axioma que dice que 0 es el elemento neutro para la suma.

... pero a veces es casi inevitable

Por ejemplo, consideremos la proposición $P(n)$ que dice que "la suma de los primeros n números naturales es igual a $n(n+1)/2$". Aquí aparecen algunos problemas:

- No es tan sencillo manipular formalmente una expresión de la forma

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

  (a medida de n crece, en el lado izquierdo aparecen más sumandos).
- Podríamos chequear casos particulares
  - Para $n = 1$ es cierto: $1 = 1 \cdot 2/2$ ✓
  - Para $n = 2$ es cierto: $1 + 2 = 3 = 2 \cdot 3/2$ ✓
  - Para $n = 3$ es cierto: $1 + 2 + 3 = 6 = 3 \cdot 4/2$ ✓
  - Para $n = 2$ es cierto: $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 \cdot 5/2$ ✓
- Pero esto no significa que hayamos probado la afirmación para TODO n.

Para resolver este tipo de problemas necesitamos estudiar más en profundidad la estructura de los números naturales.

Conjuntos inductivos

En primer lugar, veamos **una** construcción de los números naturales. Recordemos que al comenzar la materia empezamos a trabajar con los números reales *aximáticamente*.

Axiomas de los números reales

Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen

- S1 $(a+b)+c = a+(b+c)$
- S2 $a+b = b+a$
- S3 $\exists 0 \in \mathbb{R},\ a+0 = a$
- S4 $\exists -a \in \mathbb{R},\ a+(-a) = 0$
- P1 $(ab)c = a(bc)$
- P2 $ab = ba$
- P3 $\exists 1 \in \mathbb{R},\ (1 \neq 0) \wedge (a1 = a)$
- P4 $(a \neq 0) \implies \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, aa^{-1} = 1$
- D $a(b+c) = ab+ac$
- O1 $(a = b) \underline{\vee} (a < b) \underline{\vee} (b < a)$
- O2 $[(a < b) \wedge (b < c)] \implies (a < c)$
- CS $(a < b) \implies (a+c < b+c)$
- CP $[(a < b) \wedge (0 < c)] \implies (ac < bc)$
- AS Axioma del supremo

Definición

Un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ se dice *inductivo* si se cumplen las siguientes propiedades

- $1 \in H$
- $x \in H \implies x + 1 \in H$

Ejemplo

- $\mathbb{R}$ es inductivo.
- $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{>1}$ son inductivos
- $(0, 2) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$ no es inductivo. Por ejemplo, $1 \in (0, 2)$, pero $1 + 1 = 2 \notin (0, 2)$
- $\varnothing$ no es inductivo.

Lema
La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$.

Demostración.

- Consideramos una familia $\{X_i : i \in I\}$ en donde $X_i \subset \mathbb{R}$ es inductivo para cada $i \in I$.
- $1 \in X_i$ para todo $i \in I$, luego $1 \in \bigcap_{i \in I} X_i$.
- Si $x \in X_i$, entonces $x + 1 \in X_i$ para todo $i \in I$, luego

$$x \in \bigcap_{i \in I} X_i \implies x + 1 \in \bigcap_{i \in I} X_i.$$

- Por lo tanto $\bigcap_{i \in I} X_i$ es inductivo. $\square$

Definición
Se define a $\mathbb{N}$ como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

Observación

- Observemos que por el Lema anterior, $\mathbb{N}$ así definido resulta un conjunto inductivo. De hecho es el menor subconjunto inductivo posible.
- Como el único que elemento que debe estar sí o sí en $\mathbb{N}$ es el 1 (y sus sucesores), nuestra definición coincide con la idea intuitiva de qué son los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- A diferencia de otras construcciones de los números naturales, con la construcción que acabamos de dar no es necesario definir la suma y multiplicación de los números naturaes, porque a estas operaciones ya las tenemos definidas en $\mathbb{R}$. (Técnicamente, deberíamos probar que las operaciones son cerradas, lo cual haremos en unos minitos.)

Principio de inducción matemática

Teorema (Principio de Inducción)

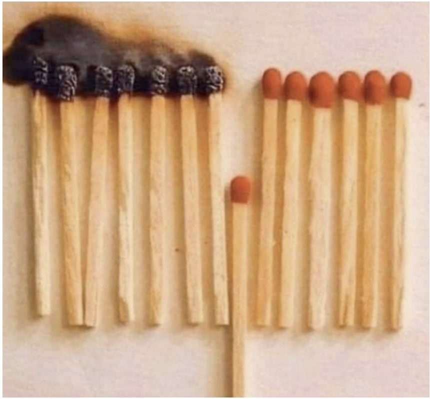
Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que

1. $P(1)$ *es verdadera;*
2. $P(k) \implies P(k+1)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

- Consideramos $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es verdadera}\}$.
- El ítem 1 nos dice que $1 \in H$.
- El ítem 2 nos dice que si $k \in H$, entonces $k+1 \in H$.
- Luego H es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$ que está contenido en $\mathbb{N}$.
- Como $\mathbb{N}$ es el menor subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, resulta $H = \mathbb{N}$ y por lo tanto $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$



Ejemplo

Probar que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos la afirmación

$$P(n) : 2^n > n.$$

- $P(1) : 2^1 > 1$ es verdadera.
- Veamos que $P(k) \implies P(k+1)$ para todo $k \geq 1$.
  - Supongamos que $P(k) : 2^k > k$ es verdadera. Esto es lo que se llama la hipótesis inductiva (HI).
  - Para probar $P(k+1)$ observamos que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot k = k + k \geq k + 1.$$

- Luego por el Principio de Inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Probar que $n^2 + 3 > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos

$$P(n) : n^2 + 3 > n.$$

- Verificamos $P(1)$. En efecto, $1^2 + 3 = 4 > 1$.
- Dado $n \geq 1$, suponemos que $P(n)$ es cierta y probamos $P(n+1)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + 3 &= n^2 + 2n + 1 + 3 \\
&= n^2 + 3 + 2n + 1 \\
&> n + 2n + 1 && \text{(por HI)} \\
&> n + 1
\end{aligned}$$

  por ende $P(n+1)$ es cierta.
- Por el Principio de Inducción, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos modificar ligeramente el principio de inducción para demostrar afirmaciones que son verdaderas a partir de un cierto número natural $n_0 \geq 1$.

Teorema

Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural $n \in \mathbb{N}$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Supongamos que

1. *$P(n_0)$ es verdadera;*
2. *$P(k) \implies P(k+1)$ para todo $k \geq n_0$.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Demostración.

- Consideramos $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$.
- $Q(1) = P(n_0)$ es verdadera.
- Sea $k \geq 1$ y supongamos $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$ es verdadera.
- Como $n_0 + k - 1 \geq n_0$, sigue que $P(n_0 + k) = Q(k + 1)$ es verdadera.
- Luego, $Q(k) \implies Q(k + 1)$ para todo $k \geq 1$.
- Por el Principio de Inducción $Q(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$, o equivalentemente $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$. $\square$

Ejemplo

Probar que $2^n > 2n+1$ para todo $n \geq 3$. Consideramos como siempre nuestra afirmación

$$P(n) : 2^n > 2n+1.$$

- Observemos que
  - $P(1)$: "$2 > 3$" es falsa
  - $P(2)$: "$4 > 5$" es falsa
- $P(3) : 8 > 7$ es verdadera.
- Sea $n \geq 3$, supongamos que $P(n)$ es cierta y probemos $P(n+1)$. En efecto,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot (2n+1) = 2 \cdot (n+1+n) = 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$$

- Así $P(n) \implies P(n+1)$ y por el teorema anterior, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 3$.

Ejercicio

Enunciar y demostrar un principio de inducción que sirva para demostrar afirmaciones que son ciertas para todo $n \geq n_0$ con $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio

Enunciar y demostrar un principio de inducción que sirva para demostrar afirmaciones que son ciertas sólo para los naturales pares.

Podemos usar el Principio de Inducción para demostrar las siguientes propiedades elementales de los números naturales.

Proposición

1. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n \neq 1$*, entonces* $n - 1 \in \mathbb{N}$*. Equivalentemente, existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m + 1$*.*
2. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$*, entonces* $m + n \in \mathbb{N}$ *y* $m \cdot n \in \mathbb{N}$*.*
3. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$*, entonces* $m < n \implies n - m \in \mathbb{N}$
4. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *es tal que* $n - 1 < a < n$*, entonces* $a \notin \mathbb{N}$*.*

Demostración.

1. Sea $P(n) : n - 1 \in \mathbb{N}$.
   - Claramente, $P(1)$ es falsa, pero $P(2)$ es verdadera.
   - Supongamos que $P(n)$ es verdadera y probemos $P(n+1)$:

     $$(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$$

   - Luego $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 2$.

Demostración (cont.)

2. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ y hacemos inducción en n. Consideramos las afirmaciones

$$P(n) : m + n \in \mathbb{N} \qquad\qquad Q(n) : m \cdot n \in \mathbb{N}$$

   - $P(1) : m + 1 \in \mathbb{N}$ es verdadera (pues $\mathbb{N}$ es inductivo)
   - Supongamos que $P(n) : m + n \in \mathbb{N}$ es verdadera. Sigue que

     $$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$$

     pues es el sucesor de un número natural. O sea, $P(n + 1)$ es verdadera.
   - Por el Principio de Inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.
   - $Q(1) : m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$ es verdadera.
   - Supongamos que $Q(n)$ es verdadera y probemos $Q(n + 1)$. En efecto,

     $$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N}$$

     pues $m \cdot n \in \mathbb{N}$ (HI) y acabamos de ver que la suma de dos naturales es un natural.
   - Luego $Q(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración (cont.)

3. En este caso fijamos n y hacemos inducción en m: Sea

$$P(m) : m < n \implies n - m \in \mathbb{N}.$$

- Caso $m = 1$. Notar que $P(1) : 1 < n \implies n - 1 \in \mathbb{N}$ es verdadera por 1.
- Paso inductivo: $P(m) \implies P(m+1)$.
  - HI: $P(m) : m < n \implies n - m \in \mathbb{N}$
  - Debemos probar: $P(m+1) : m + 1 < n \implies n - (m+1) \in \mathbb{N}$
- Como $m < m + 1 < n$, La HI nos dice que $n - m \in \mathbb{N}$. Más aún, $1 < n - m$
- Luego,

$$n - (m+1) = (n - m) - 1 \in \mathbb{N}$$

  por 1 (es el predecesor de un natural mayor que 1).
- Esto prueba $P(m) \implies P(m+1)$.
- Luego, usando el Principio de Inducción, que $P(m)$ es verdadera para todo m (independientemente del valor de n).

Demostración (cont.)

4. Podemos pensar que $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario pero está fijo. Consideremos la proposición
$$P(n) : n - 1 < a < n \implies a \notin \mathbb{N}.$$
   - $P(1)$ es verdadera. En efecto, si $0 < a < 1$ entonces $a \notin \mathbb{N}$. Una forma de ver esto es la siguiente: el subconjunto $\mathbb{R}_{\geq 1}$ es inductivo (por lo tanto contiene a los naturales) pero $a \notin \mathbb{R}_{\geq 1}$. Luego $a \notin \mathbb{N}$.
   - Supongamos que $P(n)$ es cierta y probemos
$$P(n+1) : n < a < n+1 \implies a \notin \mathbb{N}$$
   - Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $n < a < n+1$ implica
$$0 < a - n < 1$$
   - Esto es absurdo, pues por la parte 3 tendríamos que $a - n \in \mathbb{N}$, pero acabamos de ver que no hay naturales entre 0 y 1. $\square$

Ejercicio (Paradoja de los caballos)

Encontrar el error en el razonamiento inductivo utilizado para utilizado para "demostrar" por inducción la siguiente afirmación falsa.

"Teorema"

Todos los caballos son del mismo color.

"Demostración".

- Si $n = 1$, hay un único caballo y claramente todos son del mismo color.
- Supongamos que la afirmación es cierta para conjuntos de n caballos.
- Si tenemos un conjunto con $n + 1$ caballos podemos retirar un caballo del conjunto y por la hipótesis inductiva los n caballos restantes son del mismo color.
- Para ver que el caballo que sacamos es del mismo color que los anteriores simplemente lo intercambiamos por alguno de los otros caballos y nuevamente en un conjunto de n caballos, todos deben ser del mismo color.
- Por el Principio de Inducción, todos los caballos son del mismo color. "$\square$"

Definiciones recursivas

Una sucesión $u_1, u_2, u_3, \ldots$ está definida *recursivamente* si puede obtenerse de la siguiente forma:

- se explicita el primer [o primeros] elemento[s] u_1 $[u_2, \ldots, u_{n_0}]$
- y además hay una regla para obtener el elemento u_{n+1}, con $n \geq 1$ [o $n \geq n_0$] en función de los elementos anteriores de la sucesión.

Ejemplo

Definimos recursivamente la sucesión u_n por

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

- Intuitivamente vemos que en este caso el término u_n está también definido por la fórmula $u_n = 2^{n-1}$.
- Pero también podríamos probar esto por inducción (ejercicio).

A veces se necesita más de un caso base

Ejercicio* (Sucesión de Fibonacci)

Consideremos la sucesión

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases}$$

Probar la siguiente fórmula general

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ayuda: como para definir F_n se necesitan conocer los dos casos anteriores, el principio de inducción no nos sirve en la forma que vimos. Necesitamos una versión más sofisticada llamada *Principio de Inducción Fuerte* que veremos en breve. También hará falta usar la ecuación cuadrática que define el número de oro.

Sumatoria

Dados n números (reales, complejos, etc.) $x_1, \dots, x_n$ podemos definir recursivamente su suma $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + x_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Intuitivamente

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Esta notación se lee *sumatoria* entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i.

Productoria

Análogamente la *productoria* $\prod_{i=1}^{n} x_i$ de n números $x_1, \ldots, x_n$ se define recursivamente como

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i \right) \cdot x_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Intuitivamente,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$$

Se lee *productoria* entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i.

Observación

Las definiciones de sumatoria y productoria se extienden para incluir los casos en los que los subíndices se mueven entre dos enteros m y n tales que $m \leq n$.
Por ejemplo,

$$\sum_{i=0}^{5}(2i-1) = -1+1+3+5+7+9 = 21$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=-2}^{1}(k^2+1) &= ((-2)^2+1)((-1)^2+1)(0^2+1)(1^2+1)\\ &= 5\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = 20\end{aligned}$$

Ejemplo

Usando la productoria podemos dar una definición recursiva de las potencias naturales de un número complejo. Si $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$z^n = \prod_{i=1}^{n} z$$

Ejemplo (factorial)

El *factorial* del número natural n, denotado por $n!$, se define como el producto de los primeros n números naturales, es decir,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

En este caso se define además $0! = 1$

Ejemplo

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $c \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{1}$$

- Probamos para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} c = c = 1 \cdot c$$

- Suponemos cierto para n y probamos para $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} c \underset{\text{def.}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} c \right) + c \underset{\text{HI}}{=} nc + c = (n+1)c$$

- Por el Principio de Inducción, (1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Probar que $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$.

- Notar que la afirmación es cierta para $n = 0$, pues $0! = 1 = 2^0$
- Pero es falsa para $n = 1, 2, 3$:

$$1! = 1 < 2 = 2^1 \qquad 2! = 2 < 4 = 2^2 \qquad 3! = 6 < 8 = 2^3$$

- La afirmación es cierta para $n = 4$. En efecto,

$$4! = 24 \geq 16 = 2^4$$

- Suponemos cierto para n y probamos para $n + 1$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underset{\text{HI}}{\geq} 2^n(n+1) \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

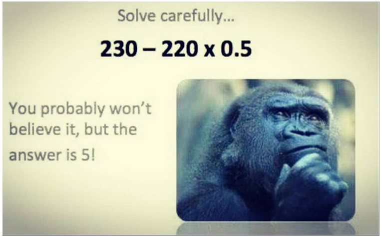
  Importante: en el segundo $\geq$ estamos usando $n+1 \geq 2$ (lo cual es cierto si $n \geq 4$).
- Por lo tanto la afirmación es válida para todo $n \geq 4$.

Comentario

La función factorial crece muy rápido. Más aún, el crecimiento de la función factorial es mayor que el de la función exponencial, en el sentido que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

para todo $c \in \mathbb{R}$.



n	$n!$	2^n	3^n
0	1	1	1
1	1	2	3
2	2	4	9
3	6	8	27
4	24	16	81
5	120	32	243
6	720	64	726
7	5040	128	2187
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	3628800	1024	59049
25	$> 10^{25}$	$< 4 \cdot 10^7$	$< 9 \cdot 10^{11}$
50	$> 3 \cdot 10^{64}$	$< 2 \cdot 10^{15}$	$< 8 \cdot 10^{23}$
100	$> 9 \cdot 10^{157}$	$< 2 \cdot 10^{30}$	$< 6 \cdot 10^{47}$

Ejemplo

Probar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple

$$z^m z^n = z^{m+n}. \tag{2}$$

- Fijamos m y z para hacer inducción en n.
- Notar que por definición, $z^{m+1} = z^m z = z^m z^1$ y por ende la identidad (2) es verdadera para $n = 1$.
- Para probar el paso inductivo suponemos (2) y probamos para $n + 1$. En efecto,

$$z^m z^{n+1} \underset{\text{def.}}{=} z^m (z^n z) = (z^m z^n) z \underset{\text{HI}}{=} z^{m+n} z \underset{\text{def.}}{=} z^{(m+n)+1} = z^{m+(n+1)}$$

- Por el Principio de Inducción, (2) es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ (independientemente de los valores de m y z).

Ejercicio

Probar que si $z \neq 0$, entonces $z^m z^n = z^{m+n}$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo

Volvamos al ejemplo que vimos al principio. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Caso $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

- Caso $n \implies$ caso $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \underset{\text{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

como queríamos probar.

Comentario

La identidad anterior es tan famosa que existe la leyenda de que a Karl F. Gauss, siendo un un niño de primaria, su maestro le pidió que sumara todos los números entre el 1 y el 100. Al parecer Gauss resolvió el problema en cuestión de segundos:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+98+99+100 &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(50+51) \\ &= \underbrace{101+101+101+\cdots+101}_{\text{50 veces}} \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Esta idea se generaliza fácilmente a la suma de n números:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n &= (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Otra prueba (un poco más geométrica)

x	x	x	x	x	x	x	x
o	x	x	x	x	x	x	x
o	o	x	x	x	x	x	x
o	o	o	x	x	x	x	x
o	o	o	o	x	x	x	x
o	o	o	o	o	x	x	x
o	o	o	o	o	o	x	x
o	o	o	o	o	o	o	x
o	o	o	o	o	o	o	o

- El tablero tiene $n+1$ filas y n columnas y por lo tanto su área es

$$A = n(n+1)$$

(suponemos que cada cuadradito tiene área 1)

- Tanto el área cubierta por las "x"s como por las "o"s es igual a

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

- Por lo tanto

$$n(n+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

Ejercicio

Probar las siguientes fórmulas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ejercicio*

Encontrar una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Ejemplo

Probar que si X es un conjunto con n elementos, entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

- Hacemos inducción en $|X| = n$.
- Si $n = 0$, entonces $X = \varnothing$. Luego $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$ y por ende $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$.
- Notemos también que si $|X| = 1$, entonces X tiene un único elemento y por lo tanto $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, X\}$. En este caso también se cumple que $|\mathcal{P}(X)| = 2 = 2^1$.
- Supongamos que la afirmación ya está probada para los conjuntos con n elementos y sea X un conjunto con $n+1$ elementos.
- Podemos fijar un elemento $x_0 \in X$ y escribir

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X - \{x_0\}) \cup \{\{x_0\} \cup A : A \in \mathcal{P}(X - \{x_0\})\}$$

- Como esta unión es disjunta tenemos que

$$|\mathcal{P}(X)| = 2|\mathcal{P}(X - \{x_0\})| \underset{\text{HI}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Principio del buen orden

Definición

- Un subconjunto de A de $\mathbb{R}$ tiene *primer elemento* si existe $a \in A$ tal que

$$a \leq x \qquad \text{para todo } x \in A$$

  y en tal caso a se dice el primer elemento de A.
- Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío de A tiene primer elemento.

Observación

- Si A tiene primer elemento a, entonces a es el mínimo de A.
- No confundir con la noción de ínfimo que se estudia en Análisis.

Ejemplo

- Cualquier subconjunto finito y no vacío de $\mathbb{R}$ tiene primer elemento (ejercicio, hacerlo usando el principio de inducción).
- Cualquier subconjunto finito de $\mathbb{R}$ está bien ordenado. En particular, el conjunto vacío está bien ordenado (aunque no tenga primer elemento).
- Si $a < b$ entonces los intervalos
  - (a, b) y $(a, b]$ no tienen primer elemento
  - $[a, b]$ y $[a, b)$ sí tienen primero elemento
  - Ninguno de estos cuatro intervalos es un conjunto bien ordenado.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n : -n \in \mathbb{N}\}$ no tiene primer elemento (en particular, no está bien ordenado).

Teorema (Principio de buena ordenación)

$\mathbb{N}$ *es un conjunto bien ordenado.*

Atención

No confundir con el teorema del buen orden (que no se cubre en este curso).

Demostración.

- Razonamos por el absurdo. Supongamos que un subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ no tiene primer elemento y sea

$$H = \{n \in \mathbb{N} : \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - X\}$$

- La idea es probar H es inductivo.
- $1 \in H$, de lo contrario $1 \in X$ sería el primer elemento de X.
- Si $k \in H$, entonces $k + 1 \in H$. En efecto,
  - $k \in H \implies \{1, \ldots, k\} \subset \mathbb{N} - X$.
  - $k + 1 \notin H \implies \{1, \ldots, k, k + 1\} \not\subset \mathbb{N} - X \implies k + 1 \in X$ sería el primer elemento de X. Absurdo. Luego, $k \in H \implies k + 1 \in H$.
- Luego, H es inductivo $\implies H = \mathbb{N} \implies X = \varnothing$
- Por lo tanto, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento, como queríamos probar. $\square$

Usando el principio de buena ordenación podemos demostrar la siguiente versión del principio de inducción.

Teorema (Principio de inducción fuerte.)

Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural n tal que

1. *$P(1)$ es verdadera.*
2. *Para todo $k \geq 1$, si $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderas, entonces $P(k+1)$ es verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

- Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falsa}\}$. Queremos ver que $X = \varnothing$.
- Supongamos por el absurdo que $X \neq \varnothing$ y sea n_0 el primer elemento de X. Observar que $n_0 \geq 2$, pues $P(1)$ es verdadera.
- Luego, $1, \ldots, n_0 - 1 \notin X$, o equivalentemente $P(1), \ldots, P(n_0 - 1)$ son verdaderas.
- El ítem 2 implica que $P(n_0)$ es verdadera y por ende $n_0 \notin X$. Absurdo. $\square$

Ejemplo

Consideremos la sucesión u_n definida recursivamente por

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = 5 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Probar que $u_n = 2^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Para probar $P(n) : u_n = 2^n + 1$ deberemos usar el ppio. de inducción fuerte.
- Notar que $P(1)$ y $P(2)$ son trivialmente verdaderas.
- Supongamos que $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderas y probemos $P(k+1)$. En efecto,

$$u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1} \underset{\text{HI}}{=} 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2^{k+1} + 1$$

- Luego $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Probar que cualquier número natural $n \geq 14$ se puede escribir como suma de 3s y 8s.

- Notar que $P(n)$: "n es suma de 3s y 8s" es cierta para algunos $n < 14$
    - $P(1)$ es falsa
    - $P(2)$ es falsa
    - $P(3)$ es verdadera
    - $P(4)$ es falsa
    - $P(5)$ es falsa
    - $P(6 = 3 + 3)$ es verdadera
    - $P(7)$ es falsa
    - $P(8)$ es verdadera
    - $P(9 = 3 + 3 + 3)$ es verdadera
    - $P(10)$ es falsa
    - $P(11 = 3 + 8)$ es verdadera
    - $P(12 = 3 + 3 + 3 + 3)$ es verdadera
    - $P(13)$ es falsa
    - $P(14 = 3 + 3 + 8)$ es verdadera
    - $P(15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3)$ es verdadera
    - $P(16 = 8 + 8)$ es verdadera
- Supongamos $P(14), P(15), \ldots, P(n)$ son verdaderas y probemos $P(n + 1)$.
- Como ya lo probamos hasta $n = 16$, podemos suponer que $n + 1 \geq 17$. Luego, $n + 1 = (n - 2) + 3$ es suma de 3s y de 8s (aplicamos HI a $n - 2 \geq 14$).
- Por el Principio de Inducción Fuerte, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 14$.

Más ejemplos

Ejemplo (Leyes de De Morgan generalizadas)

Observemos que la unión e intersección de una familia finita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se pueden definir recursivamente como

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1 \\ \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1 \\ \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} \end{cases}$$

Probar las siguientes igualdades.

1. $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$
2. $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

Ejemplo (cont.)

- Veamos primero la parte 1.
  - Caso $n = 1$.
  $$\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right)^c = A_1^c = \left(\bigcap_{i=1}^{1} A_i^c\right)$$
  - Caso $n = 2$ también está probado (leyes de De Morgan clásicas).
  - Supongamos cierto para n y probemos para $n + 1$:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)^c \underset{\text{De Morgan}}{=} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \cap A_{n+1}^c$$
$$\underset{\text{HI}}{=} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \cap A_{n+1}^c = \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i^c$$

- Dejamos la parte 2 como ejercicio (se puede hacer sin usar inducción).

Ejemplo

Probar que si F_n es la sucesión de Fibonacci, entonces $F_n \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Recordemos que F_n se define recursivamente por

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- La afirmación vale para $n = 0$ pues $F_0 = 0 \leq 1 = 2^0$.
- También vale para $n = 1$ pues $F_1 = 1 \leq 2 = 2^1$.
- Supongamos que la afirmación vale para $n \geq 1$ y probémosla para $n + 1$. Notar que es necesario usar el Principio de Inducción Fuerte. En efecto,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} < 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

- Luego, la afirmación vale para todo $n \geq 0$.

Ejemplo (Teorema de De Moivre)

Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple

$$(\cos t + i \operatorname{sen} t)^n = \cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt)$$

- Para $n = 0$ claramente se cumple pues

$$(\cos t + i \operatorname{sen} t)^0 = 1 = \underbrace{\cos(0 \cdot t)}_{=1} + i \underbrace{\operatorname{sen}(0 \cdot t)}_{=0}$$

- Supongamos cierto para n y probemos la afirmación para $n + 1$.
- Harán falta las fórmulas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos
  - $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$
  - $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Ejemplo (cont.)

- Luego,

$$
\begin{aligned}
(\cos t + i \operatorname{sen} t)^{n+1} &= (\cos t + i \operatorname{sen} t)^{n}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\
&\underset{\mathrm{HI}}{=} (\cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt))(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\
&= (\cos(nt)\cos t - \operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen} t) \\
&\qquad\qquad + i(\cos(nt)\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(nt)\cos t) \\
&= \cos(nt + t) + i \operatorname{sen}(nt + t) \\
&= \cos((n+1)t) + i \operatorname{sen}((n+1)t)
\end{aligned}
$$

como queríamos probar.

Ejemplo

Probar que todo número natural impar es de la forma $2k-1$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

- Parece una trivialidad, pero hay una sutiliza en las definiciones:
  - Un número natural se dice *par* si es de la forma $2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
  - Un número natural se dice *impar* si no es par
- Consideramos $P(n)$: n impar $\implies \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k-1$.
- $P(1)$ es verdadera, pues $1 = 2 \cdot 1 - 1$.
- Supongamos que $P(n)$ es verdadera y probemos $P(n+1)$.
- Si $n+1$ es par, entonces $P(n+1)$ es verdadera (pues el antecedente es falso). Luego, podemos suponer que $n+1$ es impar.
- Esto implica que n es par. Si así no fuera, n sería impar y por hipótesis inductiva existiría k tal que $n = 2k-1$. Esto implica que $n+1 = 2k$, lo cual es absurdo.
- Así, n es de la forma $2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$n+1 = 2k+1 = 2(k-1)-1$$

  como queríamos probar (ejercicio: chequear que $k-1 \in \mathbb{N}$).