Vectores - Parte 2

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

21 de junio de 2021

Introducción al tratamiento analítico de los vectores: En la Parte 1, realizamos el tratamiento geométrico de los vectores. El conjunto de los vectores geométricos con las operaciones de suma, producto de un escalar por un vector y producto escalar (o interno) que verifican las propiedades enunciadas en los Teoremas 1, 2 y 4 se denomina *espacio vectorial real euclídeo*.

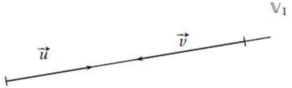
Descomposición de un vector

Distinguiremos los vectores según sean de una recta, de un plano o del espacio.

Notamos con

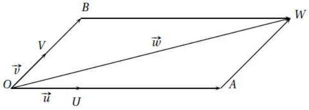
- $\mathbb{V}_1$: conjunto de los vectores de una recta.
- $\mathbb{V}_2$: conjunto de los vectores de un plano.
- $\mathbb{V}_3$: conjunto de los vectores del espacio.

1. Fijado en $\mathbb{V}_1$ un vector no nulo $\overrightarrow{u}$, cualquier otro vector $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{V}_1$, se puede expresar de manera única como $\alpha\overrightarrow{u}$. (Recordemos la condición de paralelismo entre vectores).



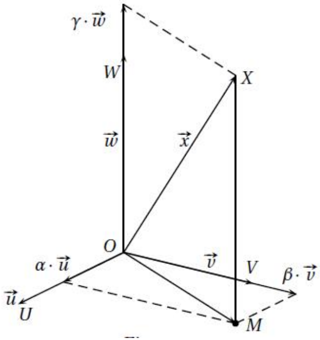
   Diremos que la expresión $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$ es la descomposición de $\overrightarrow{v}$ en la base formada por $\overrightarrow{u}$ y que el escalar α es la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en la base formada por $\overrightarrow{u}$.

2. Fijados en un plano dos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$, ambos no nulos ni paralelos, cualquier otro vector $\overrightarrow{w}$ del mismo plano puede ser descompuesto según las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.



Si por el punto W trazamos rectas paralelas a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se determinan respectivamente los puntos A y B tal que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OW}$. Como $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son respectivamente paralelos con $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, existen únicos escalares α y β tales que $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{OB} = \beta\overrightarrow{v}$, y en consecuencia $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. Decimos que $\overrightarrow{w}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ con los escalares α y β. Así, el conjunto formado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ constituyen una base para los vectores de un plano y los escalares α y β se llaman las componentes de $\overrightarrow{w}$ en dicha base.

3. Fijados en el espacio tres vectores $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$ no nulos ni paralelos a un mismo plano, todo vector $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ puede ser descompuesto según las direcciones de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



Si por el punto X trazamos una recta paralela a $\vec{w}$, esta corta al plano determinado por $\overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{OV}$ en un punto que llamamos M. Como $\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están en un mismo plano, $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Por otra parte, $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX}$, siendo $\overrightarrow{MX} = \gamma\vec{w}$. Entonces resulta que $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$. Decimos así que el conjunto formado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden) constituye una base para los vectores del espacio. Los números o escalares α, β y γ constituyen las componentes escalares de $\vec{x}$ en la base formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (en ese orden).

Conclusiones:

- Fijado un vector $\overrightarrow{u}$ no nulo de $\mathbb{V}_1$, se establece una correspondencia biunívoca entre vectores de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales.
- Fijada una base en $\mathbb{V}_2$, queda establecida una correspondencia biunívoca entre los vectores de $\mathbb{V}_2$ (constituido por entes u objetos geométricos, como lo son los segmentos orientados) y $\mathbb{R}^2$ (constituido por objetos algebraicos, como lo son los pares ordenados de números reales).
- Fijada una base en $\mathbb{V}_3$, (tres vectores no nulos ni paralelos a un plano) queda establecida una correspondencia biunívoca entre los vectores de $\mathbb{V}_3$ y las ternas ordenadas de números reales, $\mathbb{R}^3$.

Observación: Las componentes de un vector dependen de la base de referencia, de modo que, al cambiar la base, cambian las componentes del vector. Estos temas se profundizarán en próximas asignaturas, donde entre otras cuestiones se verá cómo se relacionan las componentes de un vector en bases distintas.

A modo se síntesis:

1. Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_1$ entonces $\{\overrightarrow{v}\}$ es una base de $\mathbb{V}_1$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_1$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\overrightarrow{v}$.
2. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son dos vectores no nulos ni paralelos de $\mathbb{V}_2$ entonces el conjunto ordenado $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ constituye una base de $\mathbb{V}_2$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_2$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
3. Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son tres vectores no nulos ni coplanares (esto es, no yacen los tres en un mismo plano) de $\mathbb{V}_3$ entonces el conjunto ordenado $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ constituye una base de $\mathbb{V}_3$. Cualquier vector de $\mathbb{V}_3$ se expresa de una única manera como combinación lineal de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Versores fundamentales - Descomposición canónica

Fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, (O, x, y), llamamos versores fundamentales y simbolizamos con $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, a los versores cuyas direcciones y sentidos son las de los semiejes coordenados positivos x e y respectivamente.

Dado en el plano un punto P de coordenadas (v_1, v_2) queda determinado un vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ llamado vector posición del punto P . Si por el punto P trazamos paralelas a los ejes se obtienen los puntos A de coordenadas $(v_1, 0)$ y B de coordenadas $(0, v_2)$, como se muestra en la siguiente figura:

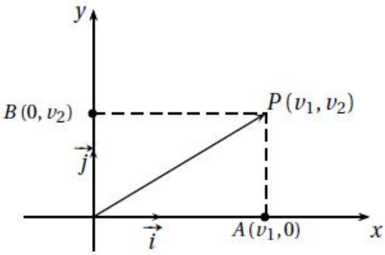


Figura: 1

Descomposición canónica del vector como combinación lineal de los versores fundamentales: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}$.

Las componentes de $\overrightarrow{v}$ en la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ son las coordenadas de P en el sistema cartesiano (O, x, y). Escribimos:

$$\overrightarrow{v} = (v_1, v_2).$$

En forma análoga, fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el espacio, (O, x, y, z), y llamando con $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ a los versores cuyas direcciones y sentidos son los de los semiejes positivos, para cada punto P de coordenadas (v_1, v_2, v_3) queda determinado un vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ de componentes v_1, v_2, v_3 en la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Escribimos:

$$\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k} = (v_1, v_2, v_3).$$

En lo que sigue se continúa con el estudio analítico de los vectores que surge de la representación geométrica cuando se introduce un sistema coordenado. Cuando se expresa un vector por sus componentes, se supone, salvo que se diga lo contrario, que las mismas están dadas en la base canónica.

Vectores:

Tratamiento Analítico

Igualdad de vectores - Operaciones por componentes

Es fácil comprobar que:

- Dado que $\overrightarrow{i} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$, resulta que, en la base canónica $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, las componentes de $\overrightarrow{i}$ son $(1, 0, 0)$. Análogamente $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.
- Dados dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$,
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow u_i = v_i; \forall i = 1, 2, 3.$$
- $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 1$ y $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = 0$.

Teorema (5)

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores. Entonces:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
- $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Demostración.

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

- Veamos que vale la primer propiedad:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k} + v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k} \\
&= \left(u_1 \overrightarrow{i} + v_1 \overrightarrow{i}\right) + \left(u_2 \overrightarrow{j} + v_2 \overrightarrow{j}\right) + \left(u_3 \overrightarrow{k} + v_3 \overrightarrow{k}\right) \\
&= (u_1 + v_1) \overrightarrow{i} + (u_2 + v_2) \overrightarrow{j} + (u_3 + v_3) \overrightarrow{k} \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) .
\end{aligned}$$

- Análogamente se prueba la segunda propiedad:

$$\begin{aligned}
\alpha \overrightarrow{u} &= \alpha \left(u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}\right) \\
&= (\alpha u_1) \overrightarrow{i} + (\alpha u_2) \overrightarrow{j} + (\alpha u_3) \overrightarrow{k} \\
&= (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) .
\end{aligned}$$

Continuación de la demostración.

- Veamos ahora que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \left(u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}\right) \times \left(v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}\right) \\
&= u_1 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}\right)}_{=1} + u_1 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}\right)}_{=0} + u_1 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}\right)}_{=0} \\
&+ u_2 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}\right)}_{=0} + u_2 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}\right)}_{=1} + u_2 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}\right)}_{=0} \\
&+ u_3 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}\right)}_{=0} + u_3 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}\right)}_{=0} + u_3 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}\right)}_{=1} \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.
\end{aligned}$$

$\square$

Condición de paralelismo

Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores no nulos; resulta que son paralelos si y solo si uno de ellos es múltiplo escalar del otro, esto es:

$$\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,$$

esto es, expresando por componentes:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha u_1 \\ v_2 &= \alpha u_2 \\ v_3 &= \alpha u_3 \end{aligned}$$

lo que, si ninguna de las componentes de $\overrightarrow{u}$ es nula, es equivalente a:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = \alpha$$

En el caso en que $\alpha > 0$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos de igual sentido. En cambio cuando $\alpha < 0$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos de sentido opuesto.

Algunas puntualizaciones: Módulo de un vector - Vector opuesto - Versor

Si $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, entonces:

- recordando que $\left|\overrightarrow{u}\right|^2 = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{u}\right|^2 &= u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{aligned}$$

  de donde

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- $-\overrightarrow{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$
- $\overrightarrow{u_0} = \frac{(u_1, u_2, u_3)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$

Ejemplo

Sean $\overrightarrow{u}=(3,-1,2)$, $\overrightarrow{v}=(-2,0,4)$ y $\overrightarrow{w}=(3,2,5)$.
Hallar: 1) $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ y 2) $\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v_0}$.

Solución:

1.

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v} &= 2\,(3,-1,2)-3\,(-2,0,4) \\ &= (6,-2,4)-(-6,0,12) \\ &= (6-(-6)\,,-2-0,4-12) \\ &= (12,-2,-8) \end{aligned}$$

2.

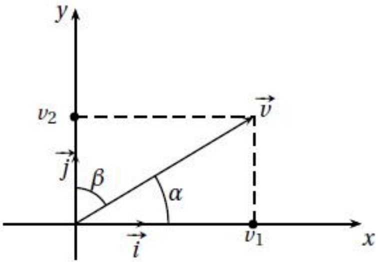
$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}=(3,-1,2)\times(3,2,5)=3\cdot 3+(-1)\cdot 2+2\cdot 5=9-2+10=17$$

$$\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{(-2)^2+0^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\right)\overrightarrow{v_0}=17\cdot\frac{\overrightarrow{v}}{2\sqrt{5}}=\frac{17}{2\sqrt{5}}(-2,0,4)=\left(\frac{-17}{\sqrt{5}},0,\frac{34}{\sqrt{5}}\right)$$

Ángulos y cosenos directores de un vector

Sea $\vec{v} \in \mathbb{V}_2$, un vector no nulo, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Este determina con los versores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ dos ángulos $\alpha = \left(\vec{v}, \overset{\wedge}{\ }\vec{i}\right)$ y $\beta = \left(\vec{v}, \overset{\wedge}{\ }\vec{j}\right)$ que llamamos ángulos directores. A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.



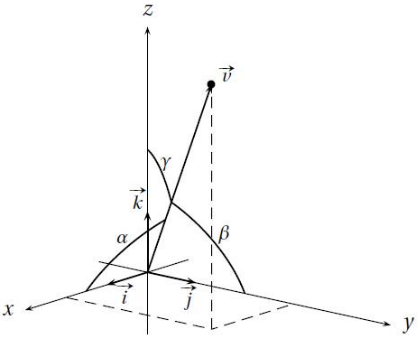
$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{v}, \overset{\wedge}{\ }\vec{i}\right) = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\vec{v}, \overset{\wedge}{\ }\vec{j}\right) = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v_0}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

Análogamente, si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$, un vector no nulo, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, este determina con los los versores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$ tres ángulos $\alpha = \left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{i}\right)$, $\beta = \left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{j}\right)$ y $\gamma = \left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{k}\right)$ que llamamos ángulos directores. A los cosenos de dichos ángulos se los denomina cosenos directores.



$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{i}\right) = \frac{v_1}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{j}\right) = \frac{v_2}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\overrightarrow{v}, \overset{\wedge}{} \overrightarrow{k}\right) = \frac{v_3}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{v_1}{|\overrightarrow{v}|}, \frac{v_2}{|\overrightarrow{v}|}, \frac{v_3}{|\overrightarrow{v}|}\right) = \overrightarrow{v_0}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ejemplo

Hallar las componentes de $\overrightarrow{u}$ sabiendo que $\left|\overrightarrow{u}\right| = 3$ y sus cosenos directores son $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ y $\cos\gamma = \frac{\sqrt{7}}{3}$, respectivamente.

<u>Solución</u>:

En tanto

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{u_1}{\left|\overrightarrow{u}\right|} \\
\cos\beta &= \frac{u_2}{\left|\overrightarrow{u}\right|} \\
\cos\gamma &= \frac{u_3}{\left|\overrightarrow{u}\right|}
\end{aligned}$$

obtenemos que:

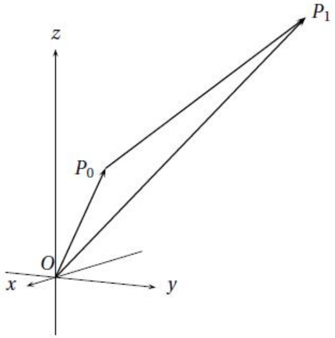
$$\begin{aligned}
u_1 &= \left|\overrightarrow{u}\right| \cos\alpha = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \\
u_2 &= \left|\overrightarrow{u}\right| \cos\beta = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \\
u_3 &= \left|\overrightarrow{u}\right| \cos\gamma = 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \sqrt{7}
\end{aligned}$$

de donde:

$$\overrightarrow{u} = \left(1; -1; \sqrt{7}\right).$$

Componentes de un vector a partir de dos puntos

Dados $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ queremos encontrar las componentes del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$. Si representamos en un sistema de ejes cartesianos ortogonales del espacio los vectores $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_1}$ observamos que $\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}$.

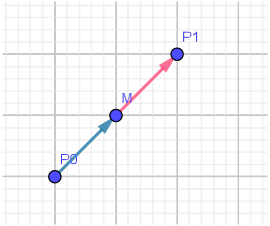


$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} &= \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} \\
\overrightarrow{P_0P_1} &= (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) \\
\overrightarrow{P_0P_1} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\,.
\end{aligned}$$

Las componentes de $\overrightarrow{P_0P_1}$ se obtienen restando a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen.

Las coordenadas del punto medio entre dos puntos

Para obtener las coordenadas (x, y, z) de M, punto medio entre $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ debemos tener en cuenta que $\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0M} + \overrightarrow{MP_1}$ y $\overrightarrow{P_0M} = \overrightarrow{MP_1}$, de donde:



$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{P_0M} &= \overrightarrow{P_0P_1}\\
2\,(x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\\
(2(x - x_0), 2(y - y_0), 2(z - z_0)) &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)
\end{aligned}$$

Igualando las componentes, obtenemos:

$$\boxed{x = \frac{x_0+x_1}{2},\ y = \frac{y_0+y_1}{2},\ z = \frac{z_0+z_1}{2}}$$

Las coordenadas del punto medio entre dos puntos dados se obtienen promediando las respectivas coordenadas.

Ejemplo: Dados los puntos $P(1,-3,2)$ y $Q(-2,1,2)$, hallar el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el punto medio M entre ambos.

Solución:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2,1,2) - (1,-3,2) = (-2-1, 1-(-3), 2-2) = (-3,4,0)$$

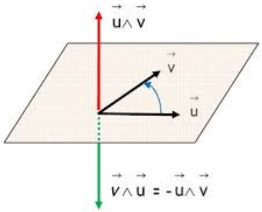
$$\begin{aligned} x &= \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2} \\ y &= \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ z &= \frac{z_P + z_Q}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto medio son: $M\left(\frac{-1}{2}, -1, 2\right)$.

Producto vectorial

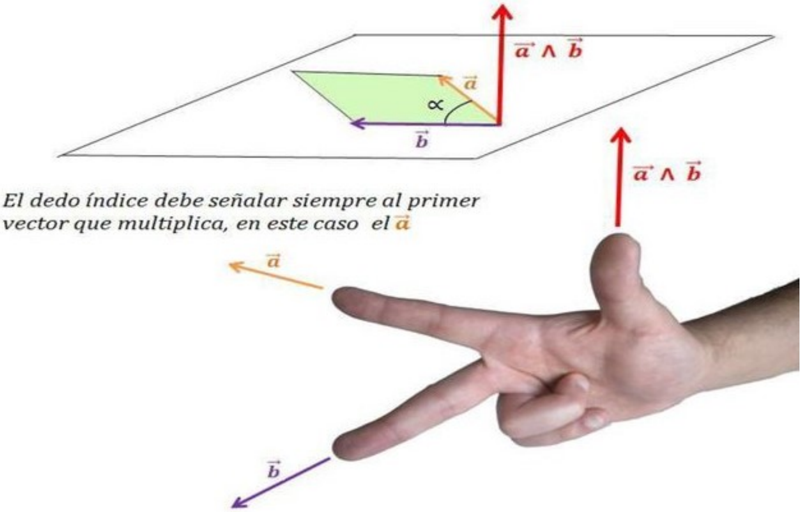
En numerosas aplicaciones a problemas de Geometría y de Mecánica resulta útil disponer de un método sencillo para obtener un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados. Esto se logra a través de una operación llamada producto vectorial.

Definición: Si $\vec{u} = \vec{0}$ y/o $\vec{v} = \vec{0}$ entonces, el producto vectorial entre ellos (denotado $\vec{u} \wedge \vec{v}$) es $\vec{0}$. Si tanto $\vec{u}$ como $\vec{v}$ son no nulos entonces $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es el vector que tiene las siguientes características:



- La dirección es simultáneamente perpendicular a las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- El sentido está dado por la regla de la mano derecha.
- $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\left(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}}\right)$.

REGLA DE LA MANO DERECHA.



Consecuencias inmediatas de la definición

Teorema (6)

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores no nulos. Entonces: $\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}.}$

Demostración.

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \operatorname{sen}\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}\right) = 0 \vee \left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}\right) = \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}. \qquad \square$$

Además es fácil advertir que

$$\boxed{\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},}$$

mientras que:

$$\boxed{\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \ \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.}$$

Propiedades del producto vectorial

Teorema (7)

Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces valen las siguientes propiedades:*

- *Propiedad antisimétrica:* $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.
- *Propiedad distributiva del producto por un escalar respecto al producto vectorial:* $\alpha\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) = \left(\alpha\overrightarrow{u}\right) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \left(\alpha\overrightarrow{v}\right)$
- *Propiedad distributiva del producto vectorial respecto a la suma de vectores:* $\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$

Las demostraciones de estas propiedades se proponen como ejercicios para el alumnado.

Expresión del producto vectorial por componentes

Si $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}$ entonces aplicando propiedades del producto vectorial y propiedades del producto de un escalar por un vector, resulta:

Expresión del producto vectorial por componentes

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \left(u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}\right) \wedge \left(v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}\right) \\
&= u_1 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}\right)}_{=\overrightarrow{0}} + u_1 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}\right)}_{=\overrightarrow{k}} + u_1 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}\right)}_{=-\overrightarrow{j}} \\
&+ u_2 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}\right)}_{=-\overrightarrow{k}} + u_2 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}\right)}_{=\overrightarrow{0}} + u_2 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}\right)}_{=\overrightarrow{i}} \\
&+ u_3 v_1 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}\right)}_{=\overrightarrow{j}} + u_3 v_2 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j}\right)}_{=-\overrightarrow{i}} + u_3 v_3 \underbrace{\left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k}\right)}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \overrightarrow{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \overrightarrow{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \overrightarrow{k}\,.
\end{aligned}$$

Observación y ejemplo

Observación: Las componentes del vector $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pueden calcularse mediante el siguiente determinante simbólico (decimos simbólicos en razón de que los elementos de la primera fila no son números):

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

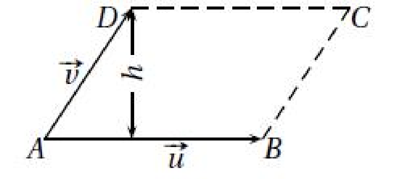
Ejemplo: Si $\overrightarrow{u} = (1, 3, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \\ &= (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) \overrightarrow{i} - (1 \cdot 0 - (-2) \cdot 2) \overrightarrow{j} + (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) \overrightarrow{k} \\ &= 2 \overrightarrow{i} - 4 \overrightarrow{j} + (-5) \overrightarrow{k} = (2; -4; -5) \end{aligned}$$

Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al área del paralelogramo determinado por ambos vectores.

$$\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \operatorname{sen}\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \left|\overrightarrow{u}\right| h = \mathcal{A}\left(ABCD\right).$$



Producto mixto

Dados los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{V}_3$, el producto escalar $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ se llama producto mixto entre $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Observaciones:

- $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ es un número real.
- El paréntesis es innecesario, pues no hay otra forma de agrupar los vectores para que la expresión tenga sentido.

Volumen de un paralelepípedo

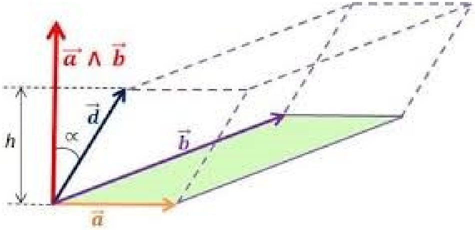
Teorema (8)

El volumen $\mathcal{V}$ del paralelepípedo determinado por los vectores (no nulos ni coplanares) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{d}$ es

$$\mathcal{V} = \left| \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right) \times \overrightarrow{d} \right|.$$

Demostración.
Observemos que $\mathcal{A} = \left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right|$ es el área de la base del paralelepípedo y que $h = \left|proy_{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}} \overrightarrow{d}\right|$ es la altura del paralelepípedo. Luego el volumen $\mathcal{V}$ buscado es

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathcal{A}h \\
&= \left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right| \left|proy_{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}} \overrightarrow{d}\right| \\
&= \left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right| \left|\overrightarrow{d}\right| \left|\cos\left(\overrightarrow{a} \wedge \overset{\wedge}{\overrightarrow{b}}, \overrightarrow{d}\right)\right| \\
&= \left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{d}\right|
\end{aligned}$$



$\square$