Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

Práctica 3: Funciones logarítmica y exponencial.

---

1. Sea la función $f(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$: determine el dominio y pruebe que f es una función impar.

2. A partir de la gráfica de la función $ln(x)$, represente gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso dominio y recorrido (puede usar Maxima):

   a) $f_1(x) = ln(x)$, b) $f_2(x) = ln\,|x|$, c) $f_3(x) = |ln(x)|$, d) $f_4(x) = 1 + ln(x-1)$.

3. A partir de la gráfica de la función $g(x) = e^x$, represente gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso dominio y recorrido (puede usar Maxima):

   a) $g_1(x) = e^{-x}$, b) $g_2(x) = e^{|x|}$, c) $g_3(x) = e^{x-1}$.

4. Esboce las gráficas de las siguientes funciones e indique en cada caso, el dominio y el recorrido de la función.

   $$a) f_1(x) = log_4(x+1), \qquad c) f_2(x) = log_{\frac{1}{5}} x,$$
   $$c) f_3(x) = 2^x, \qquad d) f_4(x) = 2^{-x}.$$

5. Halle las derivadas de las siguientes funciones, suponiendo que las mismas están definidas para los valores en los cuales su expresión tiene sentido:

   $$a) f_1(x) = e^{3x^2+5}, \qquad b) f_2(x) = e^{\frac{1}{x}}, \qquad c) f_3(x) = e^{(cos\,x)^2},$$
   $$d) f_4(x) = 3^{2^x}, \qquad e) f_5(x) = 2^{-sen^2 x}, \qquad f) f_6(x) = log_{\frac{1}{3}}.$$

6. Determine en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0.

   a) $f(x) = x^2 e^{-x},\ x_0 = 1$, b) $f(x) = ln(ln\,x),\ x_0 = e$.

7. Sean a y b dos números positivos y distintos de 1, demuestre la siguiente igualdad: $log_b x = \dfrac{(log_a x)}{(log_a b)}$.

8. Demuestre las siguientes igualdades:

   $$a) \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}, \qquad b) \lim_{x\to+\infty} \frac{log_2 x^2}{log_3(x+3)} = ln\,7, \qquad c) \lim_{x\to+\infty} (ln(2x) - ln(x+1)) = ln\,2,$$
   $$d) \lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}, \qquad e) \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1} = \frac{ln\,a}{ln\,b},\ b \neq 0, \qquad f) \lim_{x\to 1} \frac{sen\left(\frac{\pi}{2x}\right)\cdot ln\,x}{(x^3+5)(x-1)} = \frac{1}{6},$$

9. Las funciones

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad tgh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)}$$

se denominan respectivamente, seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica. Existen muchas analogías entre estas funciones y las corresondientes funciones trigonométricas ordinarias.

Demuestre que

a) $cosh(x)^2 - senh(x)^2 = 1$.

b) $tgh(x)^2 + \frac{1}{cosh(x)^2} = 1$.

c) $senh(x+y) = senh(x)\,cosh(y) + cosh(x)\,senh(y)$.

d) $cosh(x+y) = cosh(x)\,cosh(y) + senh(x)\,senh(y)$.

e) $senh(x)' = cosh(x) \quad cosh(x)' = senh(x), \quad tgh(x)' = \frac{1}{cosh(x)^2}$.

10. Halle los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} a^x, \text{ para } 0 < a < 1, \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(log(x)^n)}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

11. Halle la gráfica de x^x para $x > 0$. Use el ejercicio anterior.

12. Halle todas las funciones continuas f que satisfacen

$$i) \int_0^x f(t)\,dt = e^x, \qquad ii) (f(x))^2 = \int_0^x f(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

13. Una sustancia radioactiva disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad que de ella queda (puesto que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la desintegración total es proporcional al número de átomos remanentes). Si $A(t)$ es la cantidad en el tiempo t, esto significa que se satisface $A'(t) = cA(t)$ para algún c (el cual representa la probabilidad de que se desintegre un átomo).

(a) Halle $A(t)$ en términos de la cantidad $A_0 = A(0)$ presente en el tiempo 0.

(b) Demuestre que existe un número τ (la vida media del elemento radioactivo) con la propiedad de que $A(t+\tau) = A(t)/2$.