Resolución de algunos ejercicios de la práctica 3 (segunda parte)

Cálculo de límites

☞**9.** Calcular los siguientes límites, indicando en cada caso las propiedades aplicadas.

$$\text{-a- } \lim_{x\to 4}\left(5x^2-2x+3\right), \qquad \text{-b- } \lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x^4-x+5}.$$

Podemos calcular estos límites usando los límites (ya probados) de las funciones constantes, las potencias y las lineales.

a)

$$\lim_{x\to 4}5=5, \quad \lim_{x\to 4}x^2=4^2, \quad \lim_{x\to 4}(-2x+3)=-2(4)+3=-5$$

Por el álgebra de límites, resulta $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)=5(4^2)-5=75$

b)

$$\lim_{x\to -1}(x+2)=-1+2=1, \quad \lim_{x\to -1}x^4=(-1)^4=1,$$
$$\lim_{x\to -1}(-x+5)=-(-1)+5=6$$

Luego, por el álgebra de límites se tiene: $\lim_{x\to -1}(x^4-x+5)=1+6=7\neq 0$. Nuevamente por el álgebra de límites, resulta $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x^4-x+5}=\dfrac{1}{7}$

☞**10.** Sabiendo que:

$$\lim_{x\to a}f(x)=-3, \qquad \lim_{x\to a}g(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}h(x)=6$$

determinar, si existen, los siguientes límites:

A partir del álgebra de límites

a) $\lim_{x\to a}(f(x)+h(x))=-3+6=3$

b) $\lim_{x\to a}(g(x)\cdot h(x))=0\cdot 6=0$

c) $\lim_{x\to a}\dfrac{2g(x)}{f(x)-h(x)}=\dfrac{2\cdot 0}{\underbrace{-3-6}_{\neq 0}}=\dfrac{0}{-9}=0$

d) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ este límite no existe finito, pues $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$ y $\lim_{x\to a}g(x)=0$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞11. Calcular los siguientes límites:

Podemos calcular estos límites por el álgebra de límites, carácter local del límite y algunos límites (ya probados) de las funciones constantes, las potencias y las lineales.

-a- $\lim\limits_{x\to 4}(3x-2) = 3(4)-2 = 10.$

-b- $\lim\limits_{x\to 0} 3\sqrt{x^2+9} = 3\sqrt{0^2+9} = 9.$

-c- $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^3-3x}^{\nearrow 0}}{\underbrace{x^3-4x}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-3)}{x(x^2-4)} \overset{x\neq 0\, CLL}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-3)}{(x^2-4)} = \frac{3}{4}.$$

-d- $$\lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\sqrt{x+14}-4}^{\nearrow 0}}{\underbrace{x-2}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+14}-4)(\sqrt{x+14}+4)}{(\sqrt{x+14}+4)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+14-4^2)}{(\sqrt{x+14}+4)(x-2)} \overset{x\neq 2\, CLL}{=}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(\sqrt{x+14}+4)} = \frac{1}{8}.$$

-e- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+x}{4} = \frac{1+\pi/4}{4}.$$

-f- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}^{\nearrow 0}}{\underbrace{\tan(x)-1}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-1} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)(\operatorname{sen}(x)-\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)} \overset{x\neq \frac{\pi}{4}\, CLL}{=}$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

-g- $$\lim_{y\to 2} \frac{\overbrace{y^2-4}^{\nearrow 0}}{\underbrace{2-y}_{\searrow 0}} = \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y+2)}{2-y} \overset{y\neq 2\, CLL}{=} \lim_{y\to 2} \frac{y+2}{-1} = -4.$$

-h- $$\lim_{v\to 1} \frac{\overbrace{v^4-1}^{\nearrow 0}}{\underbrace{v^3-1}_{\searrow 0}} = \lim_{v\to 1} \frac{(v-1)(v^3+v^2+v+1)}{(v-1)(v^2+v+1)} \overset{v\neq 1\, CLL}{=} \lim_{v\to 1} \frac{v^3+v^2+v+1}{v^2+v+1} = \frac{4}{3}.$$

-i- $$\lim_{x\to 0} \frac{1+x+\operatorname{sen} x}{3\cos x} = \frac{1+0+0}{3\cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

-j- $$\lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{\ln(x^2+4x+4)}^{\nearrow 0}}{\underbrace{\ln(x+2)}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to -1} \frac{\ln((x+2)^2)}{\ln(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{2\ln(x+2)}{\ln(x+2)} \overset{x\neq -1\, CLL}{=} \lim_{x\to -1} 2 = 2.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**12.** Analizar :

-a- Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?, ¿o puede existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$?

-b- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

-c- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

-a- Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$:

i) Puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?. Si, por ejemplo si consideramos $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{-1}{x}$ y $a=0$.

No existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$, ni $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x}$, pero existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}+\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$

ii) Puede existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$?. Si, para el producto, considerar $f(x)=g(x)=sig(x)$ y $a=0$.

No existe $\lim\limits_{x\to 0} sig(x)$, pero existe $\lim\limits_{x\to 0} sig(x)\cdot sig(x)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$

-b- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?. Si, para probarlo, observemos que $g(x)=(f(x)+g(x))-f(x)$.

-c- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?. No, por ejemplo, sean $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$ y $a=0$.

Existe $\lim\limits_{x\to 0} x$ y existe $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ pero no existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

☞**13.**
a- Si $2-x^2\le f(x)\le 2\cos x$ para todo x, determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b- Si $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para todo $x\neq 2$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} h(x)=-5$. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x=2$? ¿Es posible que $f(2)=0$? ¿Es posible que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$? Justificar las respuestas.

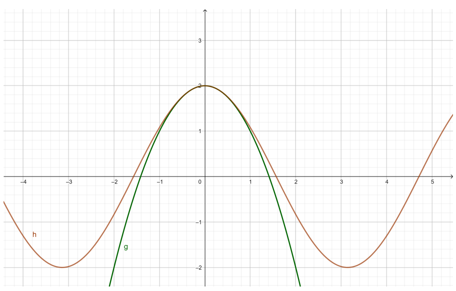
a- Sean $g(x)=2-x^2$ y $h(x)=2\cos x$, luego

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} 2-x^2=2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0} 2\cos x=2$$

además

$$\underbrace{2-x^2}_{\searrow 2}\le f(x)\le\underbrace{2\cos x}_{\searrow 2} \qquad \forall x$$

luego por principio de intercalación, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.



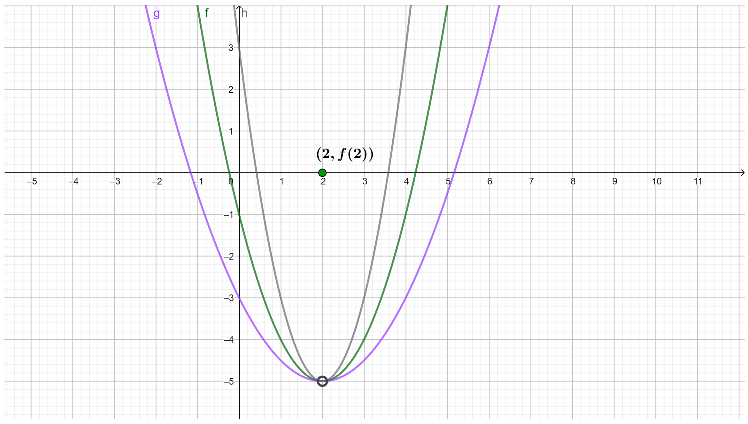
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

b- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq 2$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} h(x) = -5$.

Se puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x = 2$?

No, podríamos considerar 3 funciones tales que $x = 2$ no pertenezca a sus dominios, o que $f(2) \neq g(2) \neq h(2)$.

Es posible que $f(2) = 0$? Si, puede ser $f(2) = 0$. https://www.geogebra.org/classic/dxmtux2e



Es posible que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$? No, pues por principio de intercalación necesariamente $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -5$.

☞**14.** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, sea f una función tal que $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a con $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$$

Utilizamos este resultado para calcular los siguientes límites:

-a- Consideramos $f(x) = 2x$ y $a = 0$, luego $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\frac{2}{5} \overset{AL}{=} 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

-b- $$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos x - 1}^{\nearrow 0}}{\underbrace{x}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x + 1} \overset{AL}{=} 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

-c- Consideramos $f(x) = ax$ y $g(x) = bx$, luego $\lim\limits_{x\to 0} ax = \lim\limits_{x\to 0} bx = 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} \frac{bx}{\operatorname{sen} bx} \frac{a}{b} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} bx}{bx}} \frac{a}{b} \overset{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

-d- Si hacemos $h = x - \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h + \frac{\pi}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h \overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^{=0} - \operatorname{sen} h \overbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}^{=1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{h} \overset{AL}{=} -1 \cdot 1 = -1$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-e- Recordemos que $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, luego

$$\lim_{x\to 0} 6x^2 \cot(x)\csc(2x) = \lim_{x\to 0} 6x^2 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} \overset{AL}{=} \frac{3\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 1} = 3$$

-f- Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$, luego $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = 1$

-g- $$\lim_{x\to 0}\frac{x\csc(2x)}{\cos(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(2x)\cos(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(3x)\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} \overset{AL}{=} \frac{1}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

-h- $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x + 2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + 2}{1+x} \overset{AL}{=} \frac{1\cdot 0 + 2}{1} = 2$$

-i- $$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h} \overset{AL}{=} \operatorname{sen} x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x$$

☞**15.** Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

-a- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty.$ -b- $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty.$

-a- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow$ dado $M>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<x<0+\delta \Rightarrow \dfrac{1}{x} > M$

Dado $M>0$, ¿existe $\delta>0$ tal que $0<x<\delta \Rightarrow \dfrac{1}{x} > M$?

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}, \text{ pues } x > 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Luego, podemos elegir $\delta = \dfrac{1}{M} > 0$, para el cual se verifica que

$$0 < x < \delta = \frac{1}{M} \underset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{x} > M$$

-b- $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty \Leftrightarrow$ dado $M>0$ existe $\delta>0$ tal que $2<x<2+\delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} > M$

Dado $M>0$, ¿existe $\delta>0$ tal que $2<x<2+\delta \Rightarrow \dfrac{1}{x-2} > M$?

$$\frac{1}{x-2} > M \quad\Leftrightarrow\quad 0 < x-2 < \frac{1}{M}, \text{ pues } x>2 \quad\Leftrightarrow\quad 2 < x < \frac{1}{M} + 2 \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, podemos elegir $\delta = \dfrac{1}{M} > 0$, para el cual se verifica que

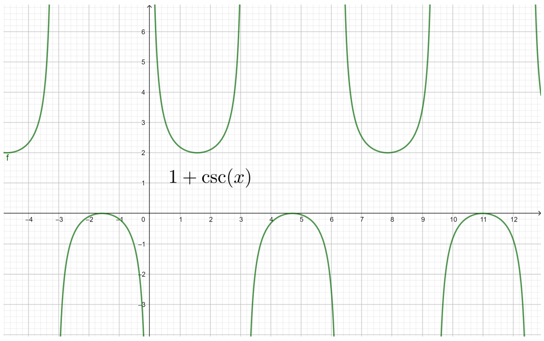
$$2 < x < 2+\delta = 2 + \frac{1}{M} \underset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{x-2} > M$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

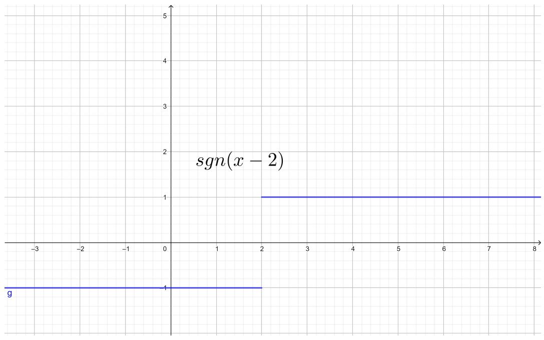
☞16. Calcular los siguientes límites laterales:

-a- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\nearrow -1}}{\underbrace{x}_{\searrow 0^+}} = -\infty.$$

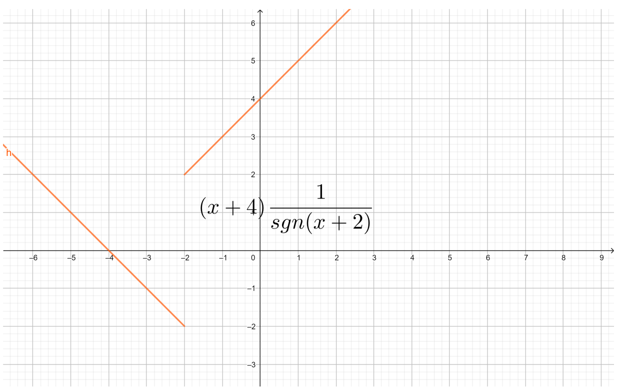
-b- $$\lim_{x\to 0^-} (1+\csc(x)) = \lim_{x\to 0^-} (1+\frac{1}{\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\searrow 0^-}}) = -\infty.$$



-c- $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|2-x|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \operatorname{sig}(x-2) = -1.$$



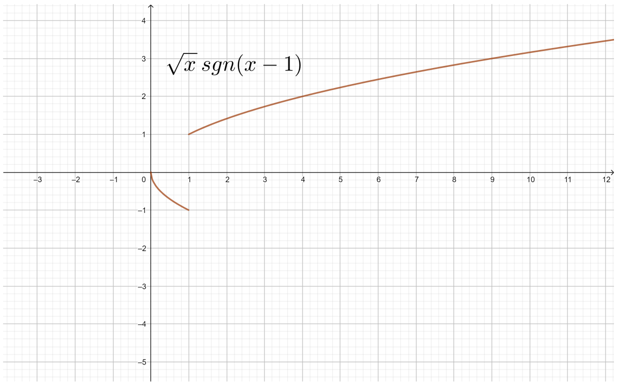
-d- $$\lim_{x\to -2^+} (x+4)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} (x+4)\frac{1}{\frac{x+2}{|x+2|}} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+4)}{\underbrace{\operatorname{sig}(x+2)}_{\searrow 1}} = 2.$$



-e- $$\lim_{x\to 0^+} \overbrace{\sqrt{x}}^{\nearrow 0} \overbrace{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}^{\text{acot.}} = 0.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

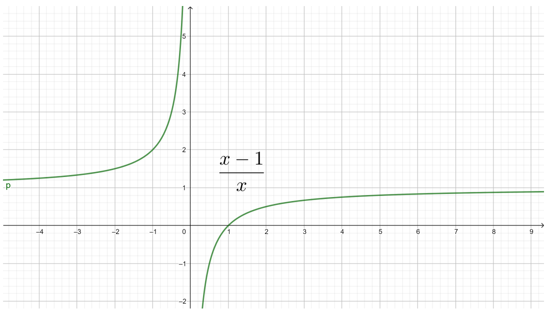
-f- $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{|1-x|} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x}\,\mathrm{sig}(x-1) = -1.$

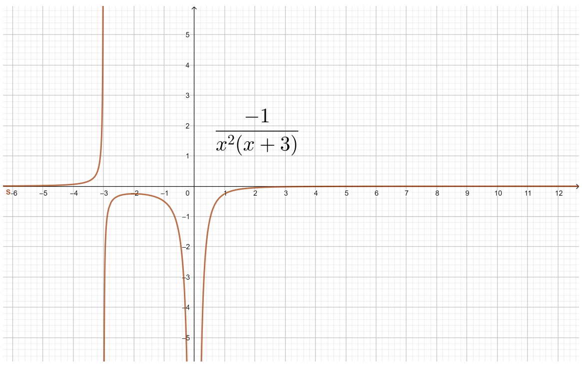


☞17. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}$ no existe.

-b- $\lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2(x+3)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{\searrow 0} \overbrace{\dfrac{-1}{x+3}}^{\nearrow -1/3} = -\infty.$





☞18. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2, \\ \lambda x - 4 & \text{si } x < 2, \end{cases}$$

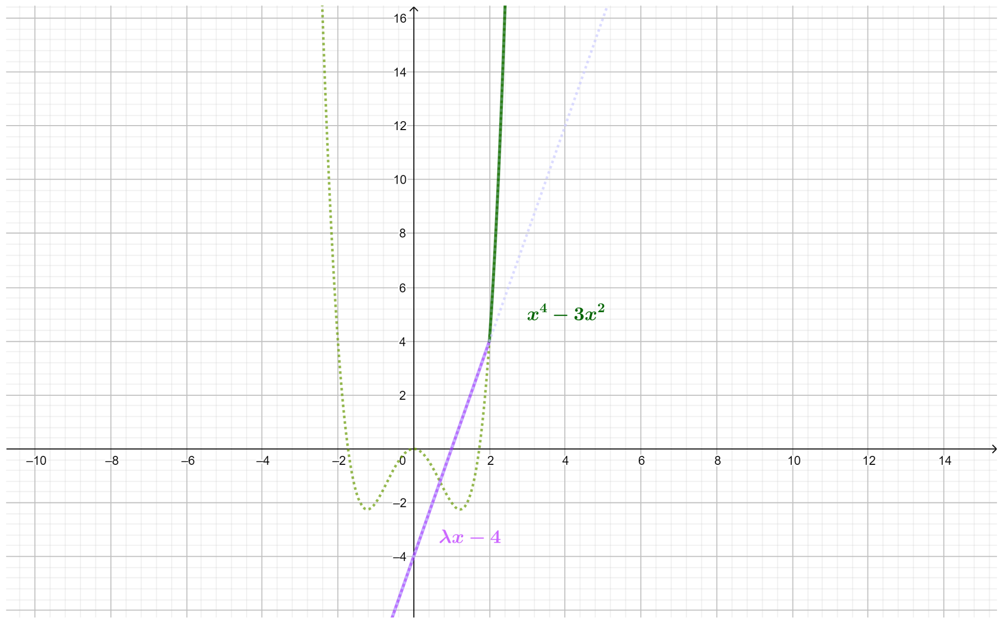
determinar el número real λ tal que exista $\lim_{x\to 2} g(x)$.

$$\text{Existe } \lim_{x\to 2} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} g(x) \quad = \quad \lim_{x\to 2^+} g(x)$$

- $\lim_{x\to 2^-} \lambda x - 4 \overset{AL}{=} 2\lambda - 4$
- $\lim_{x\to 2^+} x^4 - 3x^2 \overset{AL}{=} 2^4 - 3\cdot 2^2 = 4$

Luego buscamos λ tal que $2\lambda - 4 = 4$. Entonces $\lambda = 4$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



☞**19.** Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

-a- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}$. -b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos 3x}{x}$.

a) Debemos encontrar funciones $g(x)$ y $h(x)$ tales que:

$$g(x)\leq\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\leq h(x),\quad \text{si } x>H, \text{ p.a } H\in\mathbb{R}^+.$$

Como $-1\leq\operatorname{sen}(2x)\leq 1$ y $x>0$, tenemos $\dfrac{-1}{x}\leq\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\leq\dfrac{1}{x}$.
Además $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.
Por el principio de intercalación (para límites en el infinito)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=0$$

b) De manera análoga se prueba que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos 3x}{x}=0$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**20.**

-a- Demostrar que, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

-b- Dada la función polinómica $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty.$$

Sugerencia: Reescriba a la función polinómica p como $p(x) = x^n(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})$.

-c- Mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m > 0, \\ -\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

-a- Demostrar que, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \Leftrightarrow \text{dado } M > 0 \text{ ¿existe } H > 0 \text{ tal que si } x > H \Rightarrow x^n > M\text{?}$$

Sea $M > 0$, consideramos $H = \sqrt[n]{M} > 0$, luego si $x > H = \sqrt[n]{M} \Rightarrow x^n > (\sqrt[n]{M})^n = M$. Por lo tanto

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

Además, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

-b- Dada la función polinómica $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \overset{x \neq 0}{=} x^n(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})$, luego

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{x^n}^{\nearrow +\infty} (\underbrace{1}_{\searrow 1} + a_{n-1} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\searrow 0} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\searrow 0}) \overset{AL}{=} +\infty$$

-c- Mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m > 0, \\ -\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Sean p, q dos polinomios, tales que

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \overset{x \neq 0}{=} x^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \overset{x\neq 0}{=} x^m(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m})$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})}{x^m(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m})} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} f(x) \qquad (*)$$

Por un lado

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})}{(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\frac{1}{x^m})} \overset{AL}{=} \frac{a_n}{b_m} \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n, \\ 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases} \qquad (2)$$

Luego, a partir de lo anterior resulta,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} f(x) \overset{AL}{=} \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n,\ \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty & \text{si } m < n,\ \frac{a_n}{b_m} < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

☞**21.** Calcular los siguientes límites en el infinito.

Observemos primero, que para $n \in \mathbb{N}$,

si n es par entonces $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

y

si n es impar entonces $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

-a- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^6 + x^3 + 5}{x^4 + 10} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^6(10 + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^6})}{x^4(1 + \frac{1}{x^4})} = \lim_{x\to-\infty} x^2\frac{(10 + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^6})}{(1 + \frac{1}{x^4})} = +\infty.$$

-b- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(2 + x^{-3/2})}{x(3 - \frac{7}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{(2 + x^{-3/2})}{(3 + \frac{7}{x})} = 0.$$

-f- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^4 + x}{3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - x + 2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(9 + \frac{1}{x^3})}{x^4(3 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x})} = \frac{9}{3} = 3.$$

——————————- En los ejercicios siguientes se utilizan alguno de estos conceptos. ——————————

Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a. La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

(I) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty.$ (III) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty.$ (V) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$

(II) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty.$ (IV) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty.$ (VI) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ o (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L.$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$, la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota oblicua o inclinada** de la curva $y = f(x)$ porque la distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como se observa en la Figura **??**. Se presenta un caso semejante si se hace $x \to -\infty$.

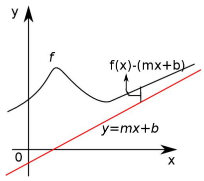


Figura 1: Asíntota oblícua

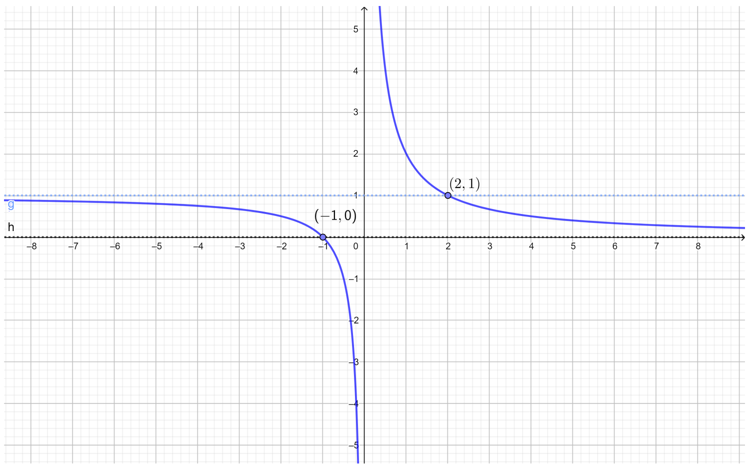
☞**22.** En cada uno de los siguientes ítems, determinar una función que satisfaga las condiciones indicadas. Elaborar un bosquejo de su gráfica.

-a- $f(2) = 1,\ f(-1) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1.$

La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

verifica las condiciones. https://www.geogebra.org/classic/samnhakc



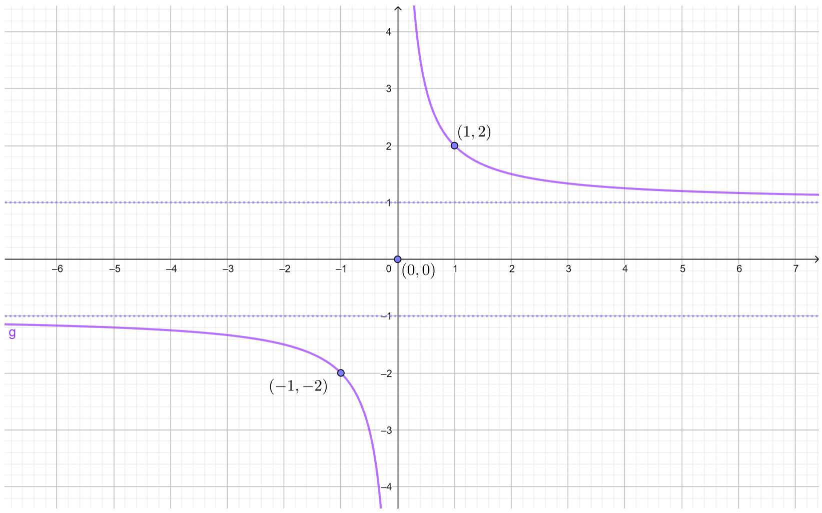
-b- $g(0) = 0,\ g(1) = 2,\ g(-1) = -2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1.$

La función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

verifica las condiciones. https://www.geogebra.org/classic/rzmj5vgd

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



☞23. Si f y g son funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=2$. ¿Qué se puede concluir sobre $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)/g(x))$? Fundamentar la respuesta.

Sean f y g son funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=2\neq 0$, entonces por ejercicio 20-c-, tienen el mismo grado o sea, $n=m$, luego también, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)/g(x))=2$.

☞24. Si f y g son funciones polinómicas con $g(x)$ tal que nunca es cero, ¿la gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota vertical? Fundamentar la respuesta.

No, pues si f y g son funciones polinómicas con $g(x)$ tal que nunca es cero, entonces la gráfica de $f(x)/g(x)$ no tiene asíntota vertical en $x=a$, pues $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{\underbrace{g(a)}_{\neq 0}}\neq\pm\infty$.

☞25. La gráfica de una función racional, ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener? Justificar la respuesta.

Sólo una, en efecto, la gráfica de una función racional R tiene una asíntota horizontal $y=L$ sii $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=L$ o $\lim\limits_{x\to-\infty}R(x)=L$, y $L=0$ si $m>n$ o $L=\dfrac{a_n}{b_m}$ si $m=n$, en cualquier caso, este número es único.

☞26. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

-a- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)\frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}\right)}{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{(x+9)-(x+4)}^{\nearrow 5}}{\left(\underbrace{\sqrt{x+9}}_{\searrow+\infty}+\underbrace{\sqrt{x+4}}_{\searrow+\infty}\right)}\overset{AL}{=}0.$$

-b- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2-x}-3x}=-6.$$

-c- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+x})}\frac{(x-\sqrt{x^2+x})}{(x-\sqrt{x^2+x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x-\sqrt{x^2(1+1/x)})}{x^2-(x^2+x)}=$$

$$=\lim_{\underbrace{x\to-\infty}_{x<0}}\frac{x(x-\overbrace{|x|}^{=-x}\sqrt{1+1/x})}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x+x\sqrt{1+1/x})}{-x}=$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\sqrt{1+1/x})}{-x} = \lim_{x\to-\infty} (-x)\overbrace{(1+\sqrt{1+1/x})}^{\nearrow 2} = +\infty.$$

-d- $$\lim_{x\to-\infty}\left(\overbrace{\sqrt{x^2+x}}^{\nearrow+\infty}-\overbrace{\sqrt{x^2-x}}^{\nearrow+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x-x^2+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|=-x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|=-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \overset{AL}{=} -1.$$

———————— Sea f una función racional tal que el grado del numerador es igual al grado del denominador mas 1. Al dividir el numerador por el denominador podemos reescribir a la función racional f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x\to\pm\infty$. Entonces **la gráfica de f tiene una asíntota oblicua**. Por ejemplo, si se quiere determinar la asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$, se efectúa la división de polinomios para obtener, gracias al algoritmo del cociente, que

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{\textit{término lineal}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x-4}\right)}_{\textit{residuo}}.$$

Cuando $x\to\pm\infty$, el residuo (cuya magnitud indica la distancia vertical que hay entre las gráficas de f y la del término lineal) tiende a cero. Por lo tanto, la recta $y=\dfrac{x}{2}+1$ resulta ser una asíntota de la gráfica de f, tanto por derecha, si $t\to+\infty$, como por izquierda, si $t\to-\infty$. ————————

☞**27.** Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

-a- $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. -c- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$.

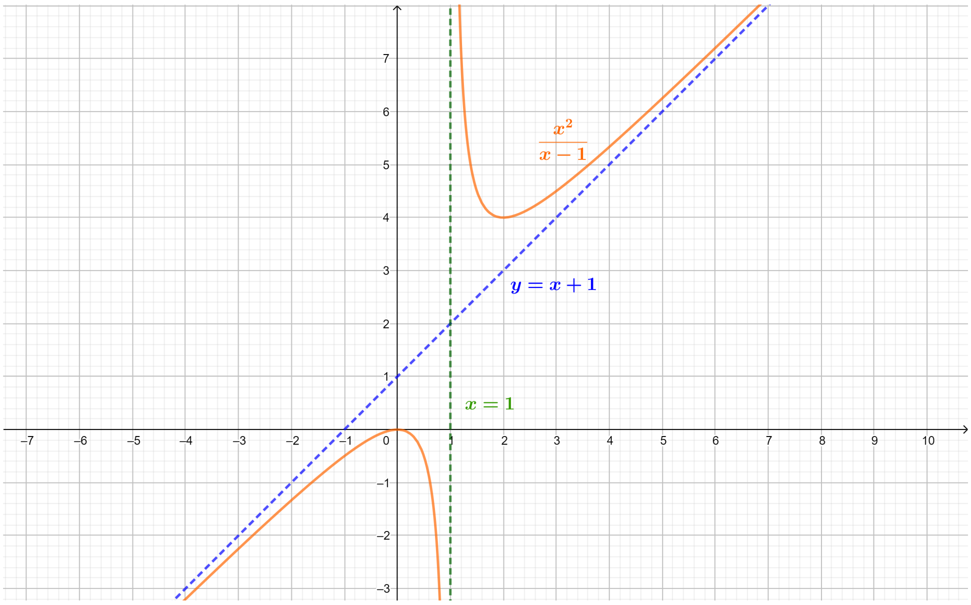
-b- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$. -d- $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

-I- Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

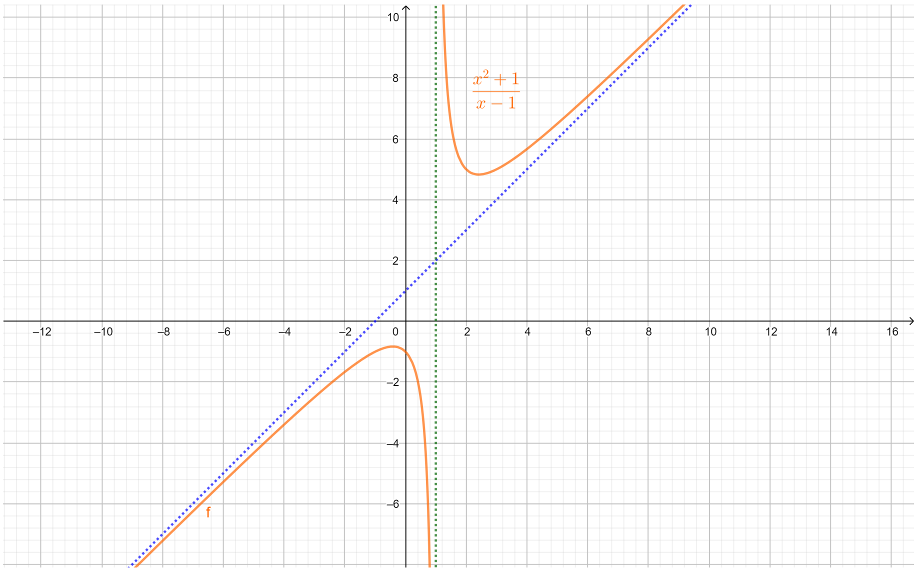
-II- Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

-a- $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, por algoritmo de la división, tenemos $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ luego:
La recta $y=x+1$ es una asíntota oblícua a la gráfica de f.
Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$, la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.
Como $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$ (y $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$), la recta $x=1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

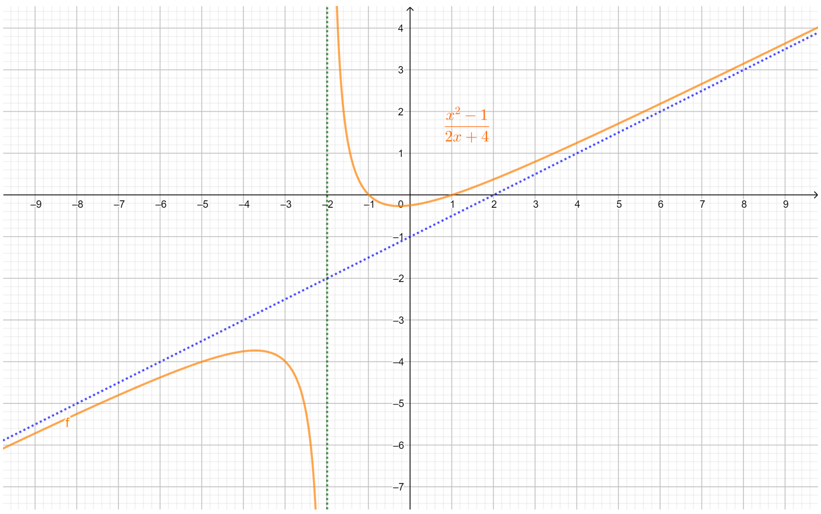


-b- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$, luego $y = x + 1$ es asíntota oblícua y $x = 1$ es una asíntota vertical.



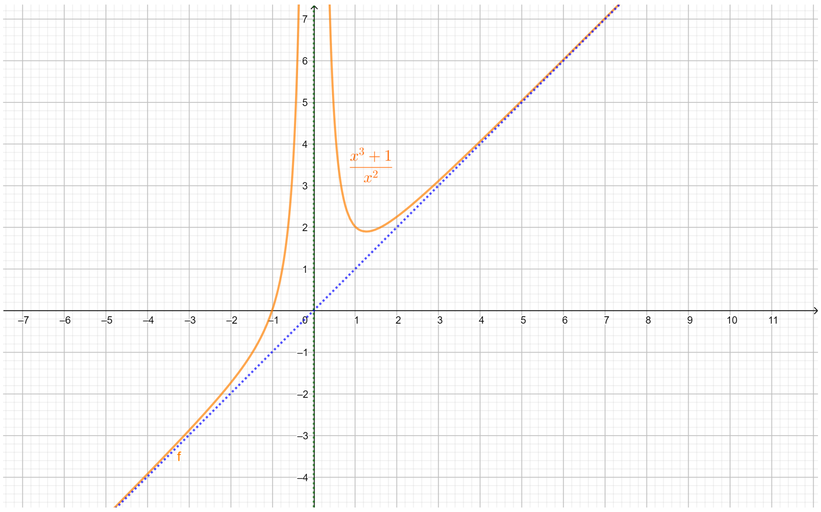
-c- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2-1}{x+2} = \dfrac{1}{2}(x - 2 + \dfrac{3}{x+2}) = \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{3}{2x+4}$,

luego $y = \dfrac{x}{2} - 1$ es asíntota oblícua y $x = -2$ es una asíntota vertical.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-d- $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2} = x + \dfrac{1}{x^2}$, luego $y = x$ es asíntota oblícua y $x = 0$ es una asíntota vertical.



☞**28.** ¿Es la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ una función racional? ¿Tiene asíntota oblicua?

Si, es una función racional, que coincide con la lineal $x+1$ para $x \neq 1$, y por lo tanto la recta $y = x+1$ es una asíntota oblicua a su gráfica.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119