

## PRÁCTICA 5 - Introducción al Cálculo Integral

### PRIMITIVAS DE FUNCIONES ELEMENTALES.

1. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

(a)  $f_1(x) = 3x - 5$

(b)  $f_2(x) = x^3 + 4x - 2$

(c)  $f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}$

(d)  $f_4(x) = \frac{e^x}{2} + 3 \cos x$

(e)  $f_5(x) = 1 - \tan^2 x$

(f)  $f_6(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

(g)  $f_7(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

(h)  $f_8(x) = 2e^x - 2^x - x^2$

(i)  $f_9(x) = \frac{3}{\sin^2 x}$

### REGLA DE SUSTITUCIÓN.

2. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

(a)  $\frac{1}{3 - 5x}$

(b)  $(4 - 7x)^2$

(c)  $\frac{1}{x^2 - 2x + 1}$

(d)  $e^{3x} + \cos 2x$

(e)  $\frac{1}{(4x^2 + 1)^2}$

(f)  $\frac{6x + 3}{3x^2 + 3x + 1}$

(g)  $\frac{x^2}{x^3 - 1}$

(h)  $x^2 \cos(x^3)$

(i)  $(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

(j)  $\frac{2x - 7}{(x^2 - 7x + 4)^3}$

(k)  $\tan(x)$

(l)  $\frac{3}{1 + 9x^2}$

(m)  $\frac{2}{\sqrt{1 - (2x)^2}}$

3. Probar que integrales de la forma  $\int R(e^x) dx$ , mediante la sustitución  $u = e^x$ , se reducen a integrales de la forma  $\int \frac{R(u)}{u} du$ . Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

(a)  $\frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$

(b)  $(1 + e^x)^{-1}$

(c)  $\frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x - 1}$

### INTEGRACIÓN POR PARTES.

4. Calcular las siguientes integrales:

(a)  $\int \frac{-2x}{e^x} dx$

(b)  $\int 3x^2 \ln x dx$

(c)  $\int x \sin x dx$

(d)  $\int e^{2x} \cos x dx$

(e)  $\int x^2 \cos 5x dx$

(f)  $\int e^{-x} \sin 3x dx$

(g)  $\int (x^2 + 5x - 3)e^x dx$

(h)  $\int \frac{x^2 + 5x - 3}{e^x} dx$

(i)  $\int \sin(\ln x) dx$

(j)  $\int \cos(\ln x) dx$

(k)  $\int x(2 + \ln x) dx$

## PRIMITIVAS DE FUNCIONES RACIONALES.

5. Halle las primitivas de las siguientes funciones racionales usando el método de fracciones simples.

(a) $\frac{1}{7-8x}$	(c) $\frac{1}{x^2-1}$	(e) $\frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^2}$	(g) $\frac{1}{(x^3-x)^2}$
(b) $\frac{1}{(3x-4)^2}$	(d) $\frac{1}{(x+1)(2x+1)^2}$	(f) $\frac{1}{x^3-x}$	(h) $\frac{2x+1}{(x^3-x)}$

## LA REGLA DE BARROW.

6. Aplicando la regla de Barrow calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_0^1 2x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}) dx$	(e) $\int_{-2}^2 (4-x^2) dx + \int_2^4 (x-2) dx$
(b) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x} - 2x^2 + 5}{x^2} dx$	(f) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{3-5x}$
(c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$	(g) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(4-7x)^2}$
(d) $\int_{-1}^2  x-x^2  dx$	(h) $\int_2^4 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$

7. Dada la función  $f(x) = -3x$ , se pide calcular:

(a) $\int_{-2}^3 f(x) dx$
(b) $\int_{-2}^3  f(x)  dx$

## MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN INTEGRALES DEFINIDAS.

8. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_1^2 \frac{8x^3-1}{(2x^4-x)^2} dx$	(b) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cos x dx$	(c) $\int_2^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x} dx$
---	---------------------------------------	---

9. Si  $m$  y  $n$  son números positivos, demostrar que:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

10. Probar que  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  valen las siguientes igualdades:

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

### MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES EN INTEGRALES DEFINIDAS.

11. Calcular las siguientes integrales, en caso de que existan:

$$(a) \int_0^1 \frac{-2x}{e^x} dx$$

$$(b) \int_1^3 3x^2 \ln x dx$$

$$(c) \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$(d) \int_0^1 x^2 e^x dx$$

12. Verificar las siguientes igualdades:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(b) \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$$