PRÁCTICA 4 - Teoría de Conjuntos

1. Escribir los siguientes conjuntos por extensión.

   a) $\{1+(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.
   b) $\{y/y = t^2, t \in \mathbb{N}, t \leq 5\}$
   c) $\{n^3 + n^2 : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
   d) $\{1/(n^2+n) : n \in \mathbb{N},\ n$ impar $, n \leq 11\}$
   e) $\{n \in \mathbb{N}, / -4 \leq n \leq 8, n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$
   f) $\{u \in \mathbb{Z}/0 \leq u \leq 9, u+1 < 7\}$
   g) $\{n + 1/n : n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
   h) $\{z \in \mathbb{R}/\sqrt{z} \in \mathbb{N}, z^2 \leq 25\}$

   Además, observar si hay relaciones entre los mismos. ¿Qué se deduce en cuanto a la forma de definir un conjunto? Intentar otras formas de definir los conjuntos de (a), (b) y (c).

2. Escribir los siguientes conjuntos por comprensión usando lenguaje simbólico:

   a) El conjunto de los números racionales positivos cuyos denominadores son mayores que los numeradores.
   b) El conjunto de los divisores de 20.
   c) El conjunto de los números pares múltiplos de 3.
   d) El conjunto de los números reales cuyas raíces cuadradas son menores a 1.
   e) $\{3\}$

3. Indicar en cada caso cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando la respuesta.

   a) $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, -4\}$

   1) $-4 \in \mathbb{N}$
   2) $-4 \in \mathbb{Z}$
   3) $-4 \in A$
   4) $\mathbb{Z} \in A$
   5) $\mathbb{N} \in A$
   6) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
   7) $6 \in \mathbb{N}$
   8) $6 \in \mathbb{Z}$
   9) $6 \in A$
   10) $-8 \in \mathbb{N}$
   11) $-8 \in \mathbb{Z}$
   12) $8 \in A$

   b) $B = \{1, 2, 3, 4, \{5\}\}$

   1) $2 \in \{1, 2\}$
   2) $2 \in B$
   3) $\{1, 2\} \in B$
   4) $3 \in B$
   5) $1 \notin B$
   6) $5 \in B$
   7) $4 \notin B$
   8) $5 \in \{5\}$
   9) $\{3, 4\} \in B$
   10) $\{3\} \in B$

4. Dar un ejemplo de tres conjuntos $W,\ ,X\ ,Y$ tales que $W \in X,\ X \in Y$ pero $W \notin Y$.¿Qué puede decirse de la airmación $W \in X \wedge X \in Y \Rightarrow W \in Y$?

5. Dado $A = \{1, \{1\}, 2\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $\mathbb{N}$ es un universo para A.
   b) $1 \in A$.
   c) $\{1\} \in A$.
   d) $\{1\} \subseteq A$.
   e) $\{\{1\}\} \subset A$.
   f) $\{2\} \in A$.
   g) $\{2\} \subseteq A$.
   h) $\{\{2\}\} \subseteq A$.
   i) $\{\{1, 2\}\} \subset A$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

6. Dados $V = \{a, b\}$, $X = \{d, b\}$, $Z = \{a, d, e\}$, $W = \{a, b, d, e\}$ y $Y = \{d, e\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $V \subset W$ *c*) $V \subset Z$ *e*) $Y \not\supseteq X$ *g*) $Y \supseteq W$ *i*) $X \subseteq W$
   b) $Y \nsubseteq V$ *d*) $Y \subseteq W$ *f*) $Z \supset Y$ *h*) $V \nsubseteq Z$ *j*) $X \subseteq Z$

7. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $\emptyset \in \emptyset$. *b*) $\emptyset \subset \emptyset$. *c*) $\emptyset \subseteq \emptyset$. *d*) $\emptyset \in \{\emptyset\}$. *e*) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. *f*) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

8. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

   a) $E \subseteq C \subseteq A$ *c*) $B \subseteq D$ *e*) $D \subseteq A$
   b) $A \subseteq C \subseteq E$ *d*) $D \subseteq B$

9. Para los conjuntos $A, B, C \subseteq U$ demostrar la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente: Si $A \subseteq B$ y $B \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq C$.

10. En cada caso, analizar si los conjuntos dados son iguales.

    a) $\{5, 6, 7\}$ y $\{5, \{6\}, 7\}$
    b) $\{n \in \mathbb{N}/n \text{ es par}\}$ y $\{n \in \mathbb{N}/n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ impares}\}$
    c) $\{2, 5\}$ y $\{\{2, 5\}\}$

11. En la teoría abstracta general de conjuntos, formulada por Georg Cantor (1845-1918), un conjunto se definía como "cualquier colección de un todo de objetos definidos y separados en nuestra intuición o pensamiento". En 1901, esta definición condujo a Bertrand Russel (1872-1970) al descubrimiento de una contradicción que hoy se conoce como *Paradoja de Russel*. Hoy se han encontrado varias vías para definir las ideas básicas de la teoría de conjuntos de modo que esta contradicción ya no aparezca.

    La paradoja de Russel surge cuando nos preguntamos si un conjunto puede ser un elemento de si mismo. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales no es un número natural, es decir, $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$. Pero el conjunto de todas las abstracciones es una abstracción.

    La paradoja de Russel es la siguiente: sea S el conjunto de todos los conjuntos A que no son elementos de si mismos. Esto es, $S = \{A : A \text{ es un conjunto y } A \notin A\}$. Mostrar que $S \in S$ si y sólo si $S \notin S$.

12. Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que:

    a) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.
    b) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

13. Dar ejemplos de conjuntos que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:

    a) $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $D \subseteq C$, $A \nsubseteq D$
    b) $A \subseteq B$, $B \in C$, $C \subseteq D$
    c) $A \in B$, $B \nsubseteq C$, $A \in C$
    d) $A \in B$, $B \nsubseteq C$, $A \notin C$

14. Dado $E = \{1, \{2\}, \{3, 4\}, 5, \{6, 7\}\}$ decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando la respuesta.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a) $1 \in E$	*e*) $\{5\} \subset E$	*i*) $\exists x \in E / \{x\} \in E$
b) $\{2\} \in E$	*f*) $\{3, 4\} \in P(E)$	*j*) $\forall x \in E, \{x\} \notin P(E)$
c) $\{1\} \in P(E)$	*g*) $\{6, 7\} \subseteq E$	*k*) $\exists x \in E / \{x\} \nsubseteq E$
d) $\{1\} \subseteq P(E)$	*h*) $\{6, 7\} \subseteq P(E)$	*l*) $\exists x \in E / \{x\} \nsubseteq P(E)$

15. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $C \cap E$	*c*) $A \cap B$	*e*) $\overline{A}$
b) $B \cup D$	*d*) $B \cap D$	*f*) $A \cap E$

16. Para $U = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$, sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Representar los conjuntos en un diagrama de Venn y determinar:

a) $(A \cup B) \cap C$	*d*) $\overline{C \cap D}$	*g*) $(B - C) - D$
b) $A \cup (B \cap C)$	*e*) $(A \cup B) - C$	*h*) $B - (C - D)$
c) $\overline{C} \cup \overline{D}$	*f*) $(A \cup (B - C))$	*i*) $(A \cup B) - (C \cap D)$.

17. Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

    a) $A \subseteq B$
    b) $A \cup B = B$
    c) $A \cap B = A$.

18. Sea A un subconjunto del conjunto universal U. Demostrar las siguientes propiedades:

    a) $A \cup A = A$ *b*) $A \cap A = A$ *c*) $A \cap \emptyset = \emptyset$ *d*) $A \cup U = U$.

19. Determinar qué relación existe entre $P(A \cup B)$ con $P(A) \cup P(B)$ y entre $P(A \cap B)$ con $P(A) \cap P(B)$.

20. Dados dos conjuntos A y B se define la *diferencia simétrica* entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

a) Dados los siguientes subconjuntos de números enteros:

$$A = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \geq 1\}, \quad B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2\}, \quad C = \{z \in \mathbb{Z} : z = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

determinar:

1) $A \triangle B$	3) $B \triangle C$	5) $(\overline{A} \cap C) \triangle (B \cap C)$
2) $A \triangle C$	4) $(A \cap B) \triangle C$	6) $A \triangle \overline{C}$

b) Dados A y B subconjuntos de un conjunto universal U, demostrar las siguientes propiedades de la diferencia simétrica:

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

1) $A \triangle B = B \triangle A$
2) $A \triangle \emptyset = A$
3) $A \triangle U = \overline{A}$
4) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

21. Demostrar las siguientes proposiciones, justificando en cada paso la propiedad de la teoría de conjuntos aplicada.

    a) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.
    b) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.
    c) $\overline{A - B} = \overline{A} \cup B$.
    d) $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} = B \cap C$.
    e) $\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B}$.
    f) $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))] = B \cap (A \cup C)$.

22. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n = \{n+1, n+2, n+3, \cdots\}$. Determinar:

    a) $\bigcup_{n=1}^{8} B_n$,
    b) $\bigcap_{n=1}^{11} B_n$,
    c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,
    d) $\bigcap_{n=1}^{m} B_n$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo.

23. Sea $U = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = [-2n, 3n]$. Determinar:

    a) A_3
    b) A_4
    c) $A_3 - A_4$
    d) $A_3 \triangle A_4$
    e) $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$
    f) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$
    g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
    h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

24. Dado un universo U y un conjunto de índices I, para cada $i \in I$ sea $B_i \subset U$. Demostrar que para cada $A \subseteq U$ se verifican:

    a) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$
    b) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

25. Sea I un conjunto cualquiera de índices y $\{A_i\}_{i \in I} \subset U$ una familia de conjuntos. Probar que

    a) $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$ si y sólo si $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$
    b) $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j$ para cada $j \in I$
    c) $B \subseteq A_j$ para cada $j \in I$ si y sólo si $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119