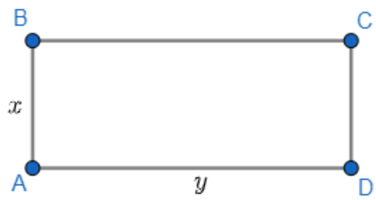
Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2 (1ra parte)

☞ **1.c-** Un rectángulo tiene un perímetro de 20m. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

✎ Sea $ABCD$ un rectángulo de lados $AB = x$ y $BC = y$.



El perímetro de $ABCD$ es $P = 2x + 2y$, pero por hipótesis tenemos que $P = 20$, luego:

$$y = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x \qquad (1)$$

Además conocemos cómo calcular el área de un rectángulo, que la llamaremos a, por lo que tenemos:

$$a = x \cdot y \qquad (2)$$

Luego, reemplazando (1) en (2) resulta que:

$$a = a(x) = x \cdot y \overset{(1)}{=} x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$$

Observemos que x representa la medida de un lado, es decir, $x > 0$. Además, y representa la medida del otro lado, entonces $y \overset{(1)}{=} 10 - x > 0$.

Ahora determinemos el dominio de la función $a(x)$:

$$x > 0 \ \wedge \ y > 0 \Leftrightarrow x > 0 \ \wedge \ 10 - x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \ \wedge \ x < 10$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(a) = (0, 10)$$

es decir la función área del rectángulo de lado x queda definida:

$$\begin{array}{rcl} a: & (0,10) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow a(x) = 10x - x^2 \end{array}$$

☞ **2.** Describir el dominio y recorrido de la siguiente función. Calcular el valor de la función en los puntos indicados.

c- $q(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$ $\qquad x=-1,\ x=0,\ x=2$

✎ Para determinar el dominio debemos tener en cuenta los intervalos en los cuales la función q está definida, es decir, $q(x) = 2x+1$ si $-2 \leq x \leq 0$ y $q(x) = 3$ si $0 < x \leq 3$. Esto nos indica que la función $q(x)$ está definida en $[-2,0] \cup (0,3] = [-2,3]$. Por lo tanto,

$$\text{Dom}(q) = [-2,3].$$

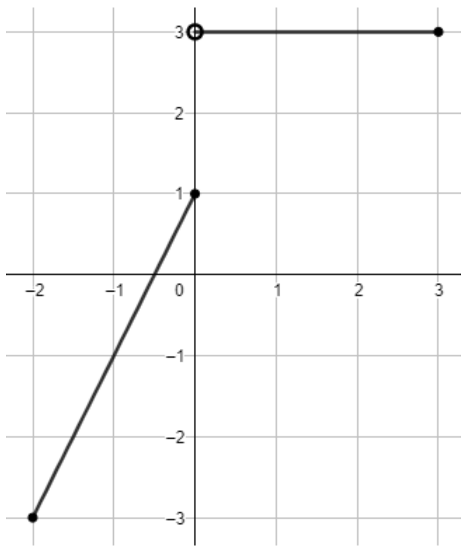
Previamente a determinar el recorrido de la función, calculemos los valores que nos piden. Recordemos que vamos a poder calcular las imágenes de los distintos valores de x, si es que dichos valores de x están en el dominio de q. En nuestro caso, -1, 0 y 2 pertenecen al dominio de q, por lo tanto vamos a poder calcular $q(-1)$, $q(0)$ y $q(2)$.

- $-1 \in [-2,0] \Rightarrow q(-1) = 2\cdot(-1)+1 = -1 \Rightarrow (-1, q(-1)) = (-1,-1) \in G_q$.
- $0 \in [-2,0] \Rightarrow q(0) = 2\cdot 0+1 = 1 \Rightarrow (0, q(0)) = (0,1) \in G_q$.
- $2 \in (0,3] \Rightarrow q(2) = 3 \Rightarrow (2, q(2)) = (2,3) \in G_q$.

Ahora vamos a determinar el recorrido de q, a partir de la gráfica:

- En el intervalo $[-2,0]$, la función coincide con la recta $y = 2x+1$ y, aprovechando lo que hicimos antes, conocemos dos puntos de la recta que son $(-1,-1)$ y $(0,1)$.
- En el intervalo $(0,3]$, la función coincide con la función constante $f(x) = 3$.

Por lo tanto, la gráfica de q es:



Entonces, a partir de la gráfica, podemos observar claramente que el recorrido es:

$$\text{Rec}(q) = [-3,1] \cup \{3\}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Ahora, veamos analíticamente que $\operatorname{Rec}(q) = [-3, 1] \cup \{3\}$. La idea es probar una doble inclusión de conjuntos.

- $\subseteq$) Sea $y \in \operatorname{Rec}(q) \implies \exists x \in Dom(q)/q(x) = y$. Veamos que $y \in [-3, 1] \cup \{3\}$.

  Hay 2 opciones para x:

  - $-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 0 \Rightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq q(x) \leq 1 \Rightarrow y \in [-3, 1]$.
  - $0 < x \leq 3 \Rightarrow q(x) = 3 \Rightarrow y \in \{3\}$.

  $\therefore y \in [-3, 1] \cup \{3\}$.

  $\therefore \operatorname{Rec}(q) \subseteq [-3, 1] \cup \{3\}$.

- $\supseteq$) Sea $y \in [-3, 1] \cup \{3\}$. Veamos que $y \in \operatorname{Rec}(q)$, es decir que $\exists x \in Dom(q)/q(x) = y$.

  Hay 2 opciones para y:

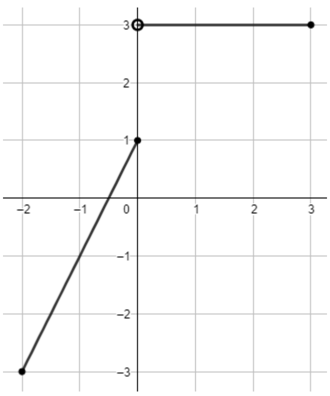
  - $-3 \leq y \leq 1 \Rightarrow -4 \leq y - 1 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq \dfrac{y-1}{2} \leq 0 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{2} \in Dom(q)$ es tal que $q(x) = q\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = \cancel{2}\dfrac{y-1}{\cancel{2}} + 1 = y - \cancel{1} + \cancel{1} = y$.
  - $y = 3 \Rightarrow$ por ejemplo $\exists x = 1 \in Dom(q)$ tal que $q(x) = q(1) = 3$.

  $\therefore y \in \operatorname{Rec}(q)$.

  $\therefore \operatorname{Rec}(q) \supseteq [-3, 1] \cup \{3\}$.

$$\therefore \operatorname{Rec}(q) = [-3, 1] \cup \{3\}.$$

Volviendo a la gráfica de q,



Qué podemos decir, acerca de inyectividad, sobreyectidad, paridad y monotonía?

$*$ q es **inyectiva**? **no**, hay una recta horizontal, $y = 3$, que interseca a Gq en más de un punto, o bien, $1 \neq 2$ y $q(1) = q(2) = 3$

$*$ Suponiendo $\operatorname{Codom}(q) = \mathbb{R}$, q es **sobreyectiva**? **no**, hay recta horizontales, $y = k$ con $k = 2, 4$ y otras, que no intersecan a Gq, o sea, $\operatorname{Rec}(q) = [-3, 1] \cup \{3\} \subset \operatorname{Codom}(q) = \mathbb{R}$.

* q es **par o impar**? como $\mathrm{Dom}(q) = [-2, 3]$ no es un conjunto simétrico, no podemos analizar paridad, es decir q **no** es par ni impar.

* q es **monótona**? **sí**, q es no decreciente, vemos que para todo $x_1, x_2 \in Dom(q)$, si $x_1 < x_2$, entonces $q(x_1) \leq q(x_2)$.

☞ **4. a)** Para la función f_1, hallar el dominio y simplificar la expresión de la ley de la función

$$g_1(h) = \frac{f_1(3+h) - f(3)}{h}$$

$$i)\ f_1(x) = x^2$$

b) Para la función f_1 recién definidas, simplificar el valor de la expresión

$$\frac{f_a(x+h) - f(x)}{h}$$

✎ Primero determinemos el dominio de f_1. Como es una función cuadrática cuya ley es $f_1(x) = x^2$, podemos calcular la imagen de cualquier valor que asuma x. Por lo tanto,

$$Dom(f_1) = \mathbb{R}$$

Ahora, veamos cómo es la ley de la función g_1, a partir de la ley de f_1

$$g_1(h) = \frac{f_1(3+h) - f_1(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \ (1)$$

Entonces, en claro reconocer que $h = 0$ no pertenece al dominio de g_1 ya que anularía el denominador. Luego, tenemos que

$$Dom(g_1) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Ahora simplifiquemos la expresión que nos quedó en (1)

$$g_1(h) = \frac{f_1(3+h) - f_1(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 \cdot h + h^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h}$$

Solo nos resta sacar h como factor común del numerador y cancelarla con la del denominador, es decir

$$g_1(h) = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

Por lo tanto, la expresión simplificada de g_1 es

$$g_1(h) = 6 + h$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Para el ítem b), tenemos que realizar los mismos razonamientos, pero en vez de trabajar con $3+h$ y 3 lo haremos con $x+h$ y x. Simplifiquemos,

$$g_1(h) = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot h + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$$

Solo nos resta sacar h como factor común del numerador y cancelarla con la del denominador, es decir

$$g_1(h) = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Por lo tanto, la expresión simplificada de g_1 es

$$g_1(h) = 2x + h$$

☞ **6.** Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

ii. $f_2(x) = |x| + |x-1|$.

✎ Podemos ver que la función f_2 es la suma de las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = |x-1|$. Veamos primero la definición de **suma** de dos funciones:

Sean $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones, definimos la función suma:

$f + g : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R}$ tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

En nuestro caso, sabemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y entonces tenemos que

$$\mathrm{Dom}(f_2) = \mathrm{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Para dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto, recordemos primero la definición de valor absoluto:

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Entonces, para $|x-1|$ tenemos

$$k(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

Como cada sumando en la definición de f_2 tiene una definición diferente según el valor de x que estemos considerando, deberemos analizar tres casos:

- Si $x \geq 1$, sabemos que $x > 0$, entonces $f_2(x) = g(x) + k(x) = x + (x-1) = 2x - 1$.
- Si $x < 1$ pero $x \geq 0$, resulta $f_2(x) = g(x) + k(x) = x + (1-x) = 1$.
- Si $x < 0$, sabemos que $x < 1$, y en este caso $f_2(x) = g(x) + k(x) = (-x) + (1-x) = 1 - 2x$.

En resumen, podemos escribir la ley f_2 como

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1-2x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

En cuanto al recorrido de la función, la idea es tomar x en cada uno de los intervalos en los que está dividido el dominio de f_2 y analizar el intervalo al que pertenece $f_2(x)$.

- $x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 2x - 1 \geq 1 \Rightarrow f_2(x) \geq 1 \Rightarrow f_2(x) \in [1, +\infty)$.
- $0 \leq x < 1 \Rightarrow f_2(x) = 1 \Rightarrow f_2(x) \in \{1\}$.
- $x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow 1 - 2x > 1 \Rightarrow f_2(x) > 1 \Rightarrow f_2(x) \in (1, +\infty)$.

Por lo tanto el recorrido de f_2 está contenido la unión de los intervalos a los cuales pertenece $f_2(x)$ en cada sección del dominio. Es decir $\mathrm{Rec}(f_2) \subseteq [1, +\infty) \cup \{1\} \cup (1, +\infty) = [1, +\infty)$.

Tarea: Probar que $\mathrm{Rec}(f_2) \supseteq [1, +\infty)$.

$$\therefore \mathrm{Rec}(f_2) = [1, +\infty).$$

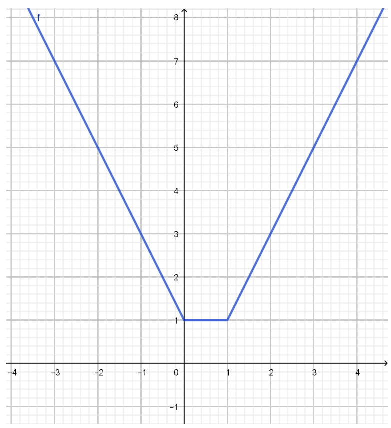
Grafiquemos f_2: observemos que para graficar una recta, alcanza con encontrar dos puntos que pertenezcan a la misma. Es decir que si la gráfica de f_2 coincide con una recta, podemos hallar el valor de f_2 en dos puntos distintos y trazar la recta que pasa por ellos.

Cuando $x < 0$, la gráfica coincide con la recta $y = 1 - 2x$.

$f_2(-1) = 1 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$,

$f_2(-2) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$.

Entonces cuando $x < 0$ la gráfica coincide con la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(-2, 5)$.



En el caso que $0 \leq x < 1$, la función coincide con la función constante igual a 1.

Cuando $x \geq 1$, la gráfica coincide con la recta $y = 2x - 1$.

$f_2(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$,

$f_2(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$,

entonces cuando $x \geq 1$, la gráfica coincide con la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

Notemos que en la gráfica se ve claramente que $\mathrm{Rec}(f_2) = [1, +\infty)$.

☞ **7.** Determinar si las siguientes funciones son monótonas, indicando si lo son en forma estricta.

ii. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

✎ Observemos que la función $f(x)$ esta definida para todo número real, por lo que resulta :

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Veamos si es una función monótona, es decir, si es creciente o decreciente en su dominio. Para eso, debemos considerar dos valores reales distintos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, uno menor que otro ($x_1 < x_2$) y analizar el comportamiento de sus imágenes (¿$f(x_1) < f(x_2)$?, ¿$f(x_1) > f(x_2)$?, ¿$f(x_1) \leq f(x_2)$? o ¿$f(x_1) \geq f(x_2)$?).

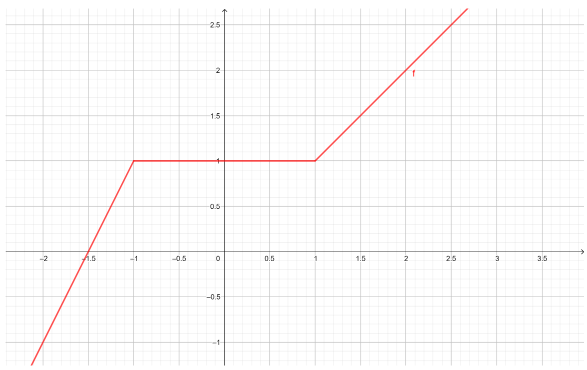
Tengamos presente de considerar todos los casos posibles ya que la ley de la función f está definida en partes. A continuación mostramos su resolución:

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, donde $x_1 < x_2$:

- Si $x_1,\ x_2 < -1$:
  $$f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 = f(x_2).$$
- Si $x_1 < -1$ y $-1 \leq x_2 < 1$:
  $$f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1 = f(x_2).$$
- Si $x_1 < -1$ y $x_2 \geq 1$:
  $$f(x_1) = 2x_1 + 3 < 2(-1) + 3 = 1 \leq x_2 = f(x_2).$$
- Si $-1 \leq x_1,\ x_2 < 1$:
  $$f(x_1) = 1 = f(x_2).$$
- Si $-1 \leq x_1 \leq 1$ y $x_2 \geq 1$:
  $$f(x_1) = 1 \leq x_2 = f(x_2).$$
- Si $x_1,\ x_2 \geq 1$:
  $$f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2).$$

Por lo tanto se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x_1 < x_2.$

Así, resulta que f es una función no decreciente en los $\mathbb{R}$. No es creciente estrictamente ya que, por ejemplo, en $-1 = x_1 < x_2 = 0$ tenemos que $f(-1) = f(0) = 1$.Observemos la gráfica de f,



nuevamente qué podemos decir acerca de inyectividad y sobreyectividad?

$$f \text{ no es inyectiva, pero si es sobreyectiva}$$

☞ **8.** Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad.

$i.\ f_1(x) = 4.$ $\qquad ii.\ f_2(x) = x^2 + x.$ $\qquad iii.\ f_3(x) = \dfrac{x}{x^2-1}.$

✎ $i.$ $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(-x) = 4 = f_1(x).$$

Por lo tanto, f_1 es una función par.

$ii.$ $\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

$$-f_2(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x$$

Resulta que f_2 no es una función par, ni impar, pues por ejemplo:

$$f_2(1) = 2 \qquad y \qquad f_2(-1) = 0$$

Es decir $f_2(1) \neq f_2(-1)$ y $f_2(-1) \neq -f_2(1)$.

$iii.$ $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, el dominio es simétrico respecto al origen de coordenadas.
Sea $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

$$f_3(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f_3(x).$$

Por lo tanto, f_3 es una función impar.

☞ **9. a-** Mostrar que, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico, la única función $f : A \to \mathbb{R}$ que es par e impar simultáneamente es la función nula.
b- Siendo p_1, p_2 dos funciones pares e i_1, i_2 dos funciones impares definidas en A, determinar, de ser posible, la paridad en cada uno de los siguientes casos:

I. $f_1 = p_1 + p_2$.

II. $f_2 = p_1 + i_1$.

III. $f_3 = i_1 + i_2$.

IV. $f_4 = p_1 p_2$.

V. $f_5 = p_1 i_1$.

VI. $f_6 = i_1 i_2$.

c- Sea f una función dada, con dominio simétrico.

(I) Demostrar que las funciones p e i, que tienen el mismo dominio que f y están definidas por
$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\ , \ \text{ e } \ i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$
son una función par y una función impar respectivamente.

(II) Verificar que $f(x) = p(x) + i(x)$.

(III) Mostrar que, si puede descomponerse a la función f como
$$f(x) = p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x)\ ,$$
con p_1, p_2 pares e i_1, i_2 impares, entonces, necesariamente,
$$p_1 = p_2\ , \ \text{ e } \ i_1 = i_2\ .$$

Luego, una función f de dominio simétrico siempre puede escribirse como la suma de una función par con una impar, y esta representación es única.

d- Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 3$, hallar su descomposición como la suma de una función par p con una impar i y representar gráficamente las tres funciones f, p e i.

✎ **a-** Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico y $f : A \to \mathbb{R}$ una función par e impar, entonces para todo $x \in A$ se verifica que $f(-x) = f(x)$ (por ser par) y también $f(-x) = -f(x)$ (por ser impar), luego $f(x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.
Pero $f(x) = -f(x)$ solo si $f(x) = 0$, para todo $x \in A$, luego f es la función nula.

b- Sean p_1, p_2 funciones pares y i_1, i_2 funciones impares definidas en A. Debemos determinar la paridad de las siguientes funciones f_i, $i = 1, .., 6$.

Para ello recordemos la definición de función **suma** y **producto** de dos funciones.
Sean $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R}$ dos funciones, definimos la función suma:

$$f + g : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Y la función producto:

$$fg : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R} \text{ tal que } (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Observemos que $\mathrm{Dom}(p) = \mathrm{Dom}(i) = A$, luego los $\mathrm{Dom}(f_i) = A$ para $i = 1, .., 6$, que es simétrico, analizaremos paridad de esas funciones.

i. Hacemos $f_1(-x) = (p_1 + p_2)(-x) = p_1(-x) + p_2(-x) \overset{pares}{=} p_1(x) + p_2(x) = f_1(x)$, luego f_1 es una función par.

ii. Hacemos $f_2(-x) = (p_1 + i_1)(-x) = p_1(-x) + i_1(-x) \overset{par, impar}{=} p_1(x) - i_1(x)$, que es distinto de $f_2(x)$ y de su opuesto, luego f_2 no es una función par ni impar.

iii. Hacemos $f_3(-x) = (i_1 + i_2)(-x) = i_1(-x) + i_2(-x) \overset{impares}{=} -i_1(x) - i_2(x) = -f_3(x)$, luego f_3 es una función impar.

iv. Hacemos $f_4(-x) = (p_1 p_2)(-x) = p_1(-x)p_2(-x) \overset{pares}{=} p_1(x)p_2(x) = f_4(x)$, luego f_4 es una función par.

v. Hacemos $f_5(-x) = (p_1 i_1)(-x) = p_1(-x)i_1(-x) \overset{par, impar}{=} p_1(x)(-i_1(x)) = -f_5(x)$, luego f_5 es una función impar.

vi. Hacemos $f_6(-x) = (i_1 i_2)(-x) = i_1(-x)i_2(-x) \overset{impares}{=} (-i_1(x))(-i_2(x)) = f_6(x)$, luego f_6 es una función par.

c- Sea f una función con dominio simétrico:
i- Demostrar que las funciones p e i, con $\mathrm{Dom}(p) = \mathrm{Dom}(i) = \mathrm{Dom}(f)$ (un conjunto simétrico), definidas por

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad \text{e} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

son una función par y una función impar respectivamente.
Para ello hacemos

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$$

y

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$$

Podemos concluir que p es una función par e i es una función impar.

ii- Además $p(x) + i(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$

iii- Sean p_1, p_2 funciones pares e i_1, i_2 funciones impares, y supongamos que podemos descomponer a f como

$$f(x) = p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x),$$

pero entonces $p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x) \Leftrightarrow p_1(x) - p_2(x) = i_2(x) - i_1(x) \qquad (*)$.

Observemos que $p_1(x) - p_2(x) = p_1(-x) - p_2(-x)$ luego la función de la izquierda en la igualdad (*) es par, y el lado derecho $i_2(x) - i_1(x) = -i_2(-x) - (-i_1(-x)) = -(i_2(-x) - i_1(x))$ es una funcion impar.
Luego por lo probado en (**a**), necesariamente es $p_1(x) - p_2(x) = i_2(x) - i_1(x) = 0$ luego

$$p_1 = p_2, \qquad \text{e} \qquad i_1 = i_2.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Luego, una función f de dominio simétrico siempre puede escribirse como la suma de una función par con una impar, y esta representación es única.

d- Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=4x-3$, hallar su descomposición como la suma de una función par p con una impar i y representar gráficamente las tres funciones f, p e i.
Como $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$ es un conjunto simétrico, podemos definir p e i sus respectivas descomposiciones par e impar,

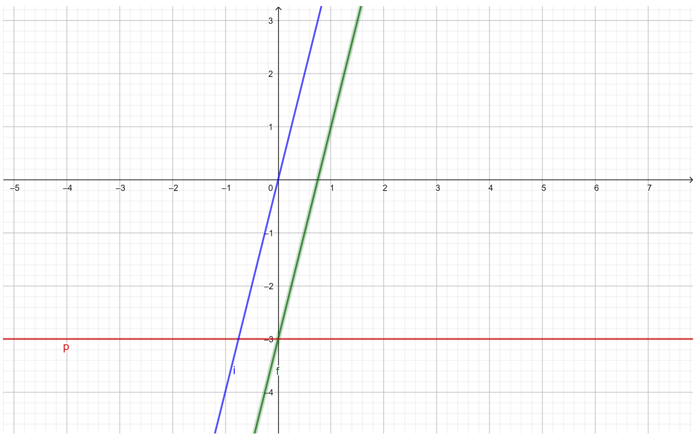
$$p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{4x-3+4(-x)-3}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

e

$$i(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{4x-3-(4(-x)-3)}{2}=\frac{8x}{2}=4x.$$

Entonces

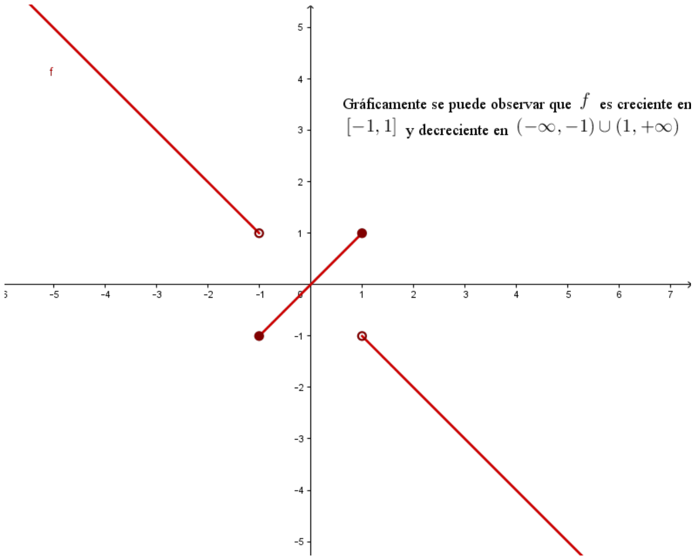
$$f(x)=4x-3=-3+4x.$$



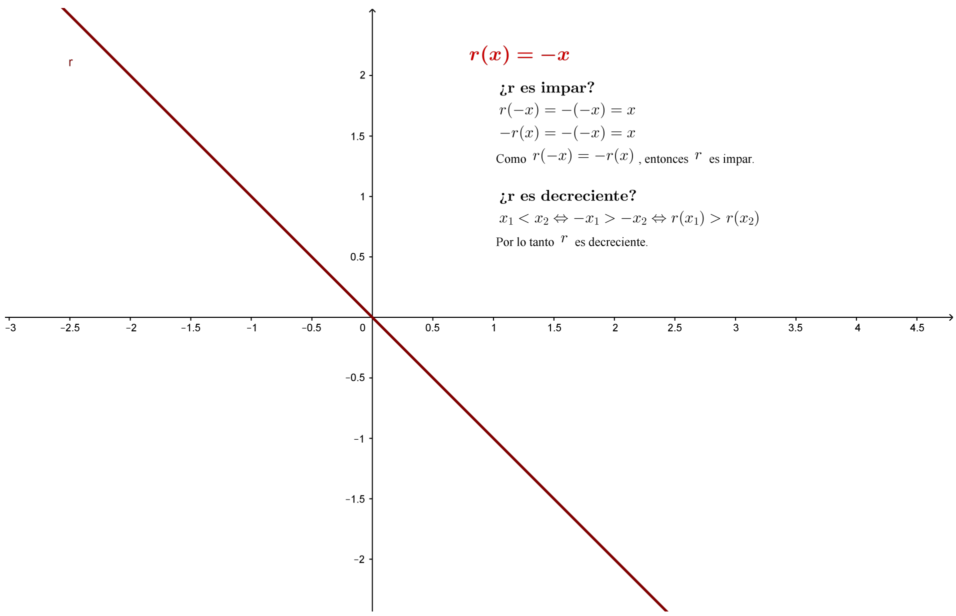
> ☞ **11.** En cada uno de los siguientes casos esbozar, de ser posible, la gráfica de una función que cumpla con las propiedades especificadas. En el caso de no ser posible, justifique el porqué.
>
> -a- f es una función creciente en $[-1,1]$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
>
> -b- r es una función impar y decreciente en $\mathbb{R}$.
>
> -c- s es una función periódica de período p y estrictamente creciente.

✎

a) f es una función creciente en $[-1;1]$ y decreciente en $(-\infty;-1)\cup(1,+\infty)$.



b) r es una función impar y decreciente en $\mathbb{R}$.



c) s es una función periódica de período p y estrictamente creciente.

Sea s una función periódica de período p, por definición $p > 0$ y $f(x + p) = f(x)$ para todo x en el dominio de s.

Observemos que s no es estrictamente creciente:

Sean x_1 y $x_2 = x_1 + p$ en el dominio de s.

Tenemos $x_1 < x_2$ y $s(x_1) = s(x_2)$. Por lo tanto s no es estrictamente creciente.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$\therefore$ No es posible que una función cumpla con dichas condiciones.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119