Resolución de algunos ejercicios - Práctica 1 - Números reales

1) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de cuerpo, demostrar las siguientes propiedades de los números reales.

b) El número 0 no tiene recíproco; si 0 tuviese recíproco, existiría $b \in \mathbb{R}$ tal que $0b = 1$ absurdo, pues $0b = 0$ (por T2-3) y $0 \neq 1$ (por A4), luego 0 no tiene recíproco.

¿$1^{-1} = 1$?; como 1^{-1} es recíproco de 1, es $1 \cdot 1^{-1} \overset{A6}{=} 1$, además $1 \cdot 1 \overset{A4}{=} 1$, entonces $1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1$ y por prop. cancelativa, resulta $1^{-1} = 1$.

c) $\dfrac{a}{1} = a$; como $1 \neq 0$, por definición de cociente, $\dfrac{a}{1} = a \cdot 1^{-1} \overset{T4-2}{=} a \cdot 1 \overset{A4}{=} a$.

Y si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$; como $a \neq 0$, por definición de cociente, $\dfrac{1}{a} = 1 \cdot a^{-1} \overset{A4}{=} a^{-1}$.

d) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces:

1) $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$; debemos probar que $b^{-1}d^{-1}$ es el recíproco de bd, o sea que el producto es 1. Luego hacemos $b^{-1}d^{-1}bd \overset{A1}{=} d^{-1}b^{-1}bd \overset{A2}{=} d^{-1}\,\overset{A6}{(b^{-1}b)}\,d \overset{A4}{=} d^{-1}d \overset{A6}{=} 1$.

2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$; comenzamos por el lado derecho de la igualdad, observemos que $bd \neq 0$, por definición de cociente tenemos

$$\frac{ad+bc}{bd} = (ad+bc)(bd)^{-1} \overset{T4-5i}{=} (ad+bc)b^{-1}d^{-1} \overset{A1A3}{=} add^{-1}b^{-1} + cbb^{-1}d^{-1} \overset{A4A6}{=} ab^{-1} + cd^{-1} =$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

3) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$; nuevamente comenzamos por el lado derecho de la igualdad, como $bd \neq 0$, por definición de cociente tenemos $\dfrac{ac}{bd} = (ac)(bd)^{-1} \overset{T4-5i}{=} acb^{-1}d^{-1} \overset{A1A3}{=} ab^{-1}cd^{-1} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$.

e) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$; debemos probar que $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$ es el recíproco de $\dfrac{a}{b}$, o sea, su producto es 1. Hacemos $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} \cdot \dfrac{a}{b} \overset{T4-5iii}{=} \dfrac{a^{-1}a}{b^{-1}b} \overset{A6}{=} \dfrac{1}{1} \overset{1-h}{=} 1$.

f) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Si fuese $a \neq 0$ (por A6) existiría a^{-1}, luego a partir de la igualdad $ab = 0$ hacemos $a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \overset{T2-3}{=} 0$ y por otro lado $a^{-1}(ab) \overset{A2}{=} (a^{-1}a)b = 1 \cdot b \overset{A4}{=} b$, de donde resulta $b = 0$. De manera análoga, se prueba que si suponemos $b \neq 0$ resulta $a = 0$.

———————————————————————————

2) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de orden, demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$; por definición "$<$", $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$ luego debemos probar que si $a < b$ entonces $(b+c)-(a+c) \in \mathbb{R}^+$, pero $(b+c)-(a+c) \overset{A1}{=} b+c-(c+a) \overset{A3}{=} b+c-c-a \overset{A4}{=} b-a \in \mathbb{R}^+$.

b) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$; hemos probado que si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, análogamente si $c < d \Rightarrow b + c < b + d$; luego $a + c < b + c$ y $b + c < b + d$, por propiedad transitiva resulta $a + c < b + d$.

c) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$; por hipótesis $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}^+$ luego por A7, $(b - a)c \in \mathbb{R}^+$, pero $(b - a)c \overset{A3}{=} bc - ac \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow ac < bc$.

d) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$; por hipótesis $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c < 0 \Leftrightarrow -c > 0 \Leftrightarrow -c \in \mathbb{R}^+$ luego por A7, $(b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+$, pero $(b - a)(-c) \overset{A3}{=} b(-c) - a(-c) \overset{T2-1,4}{=} -bc + ac \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow ac > bc$.

e) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (donde a^2 es una notación para el producto aa); $a \neq 0$, entonces (A8) $a > 0$ o $a < 0$. En el caso $a > 0$ por A7 resulta $a.a = a^2 > 0$ y en el caso $a < 0$ implica por A8 que $-a > 0$ y entonces por A7 $(-a)(-a) \overset{T2-5}{=} a.a = a^2 > 0$.

f) $1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$; pues $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$ por item anterior.

g) Si $a < b$, entonces $-b < -a$; Veamos $-b < -a \Leftrightarrow -a-(-b) > 0$ pero $-a-(-b) = -a+b = b-a \overset{hip}{>} 0$.

h) Si $a < 0$ entonces $-a > 0$; consecuencia inmediata.

i) $ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.

$\Leftarrow$) Si ambos a y b son positivos, por A7, $ab > 0$; y si ambos a y b son negativos, entonces $-a$ y $-b$ son positivos, pero $ab \overset{T2-5}{=} (-a)(-b) \overset{A7}{>} 0$.

$\Rightarrow$) Si $ab > 0$, observemos que $ab \neq 0$ (pues $0 \notin \mathbb{R}^+$), luego necesariamente $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces (A8) $a > 0$ o $a < 0$ pero no ambas y $b > 0$ o $b < 0$ pero no ambas.

Si fuesen ambos de distinto signo, por ejemplo, $a > 0$ y $b < 0$, resultaría $a > 0$ y $-b > 0$ luego por A7, $a(-b) > 0$, pero $a(-b) \overset{T2-4}{=} -ab > 0$, contradiciendo el hecho de que $ab > 0$.
Análogamente llegamos a una contradicción si suponemos $a < 0$ y $b > 0$.

Por lo tanto, si $ab > 0$ necesariamente a y b tienen el mismo signo.

j) $a > 0$ si y solo si $\frac{1}{a} > 0$; más generalmente, si $a \neq 0$ existe $a^{-1} = \frac{1}{a}$, y $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$ luego necesariamente a y a^{-1} tienen el mismo signo, ambos positivos o ambos negativos.

k) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$; como $a, b > 0$ podemos en la desigualdad $0 < a < b$ multiplicar por $a^{-1} > 0$ y luego por $b^{-1} > 0$ (porque sabemos que también son positivos). Hacemos $0 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1} < b \cdot a^{-1}$, y obtenemos $0 < 1 < b \cdot a^{-1}$, ahora si multiplicamos por b^{-1}, se tiene $b^{-1} \cdot 0 < b^{-1} \cdot 1 < b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1}$ o sea $0 < b^{-1} < a^{-1}$, resultando $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

l) $ab < 0$, entonces o bien a es positivo y b negativo o bien a es negativo y b positivo; consecuencia de los items 1f y 2i.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

———————————————————————

3) Resolver cada una de las siguientes inecuaciones o sistema de ecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

c) $-3(z-6) > 2z-5$, buscamos los $z \in \mathbb{R}$ tales que sea cierta la inecuación $-3(z-6) > 2z-5 \overset{A3,T2-1}{\Leftrightarrow}$ $-3z+18 > 2z-5 \overset{T7-1}{\Leftrightarrow} -3z+18-18 > 2z-5-18 \overset{A5,A4}{\Leftrightarrow} -3z > 2z-23 \overset{T7-1}{\Leftrightarrow} -3z-2z > -23 \overset{A3}{\Leftrightarrow}$ $-5z > -23 \overset{T7-3ii}{\Leftrightarrow} z < \dfrac{-23}{-5} = \dfrac{23}{5}$. Luego el conjunto solución es $S = \left\{z \in \mathbb{R} : z < \dfrac{23}{5}\right\} = (-\infty, \dfrac{23}{5})$.

r) $\dfrac{4x-3}{3-x} > 0$. Para resolver esta inecuación debemos tener en cuenta que $\dfrac{a}{b} > 0$ si y sólo si a y b son los dos positivos o los dos negativos. Es decir que debemos considerar ambos casos:

$$(1)\begin{cases} 4x-3 & > & 0 \\ 3-x & > & 0 \end{cases} \qquad\qquad (2)\begin{cases} 4x-3 & < & 0 \\ 3-x & < & 0 \end{cases}$$

Comenzamos con el sistema (1):

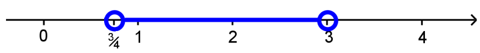
$$4x-3>0 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} 4x-3+3>0+3 \underset{\substack{\text{Ax. 4}\\ \text{Ax. 5}}}{\Leftrightarrow} 4x>3 \underset{\text{T.7.3i)}}{\Leftrightarrow} 4^{-1}4x>4^{-1}\cdot 3 \underset{\substack{\text{Ax. 1}\\ \text{Ax. 2}}}{\Leftrightarrow} (4^{-1}4)x>3\cdot 4^{-1} \underset{\substack{\text{Ax. 6}\\ \text{Def.}a/b}}{\Leftrightarrow} x>\frac{3}{4}$$

$$3-x>0 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} 3-x+x>0+x \underset{\substack{\text{Ax. 4}\\ \text{Ax. 5}}}{\Leftrightarrow} 3>x$$

Luego, como ambas inecuaciones deben verificarse al mismo tiempo el conjunto solución del sistema (1) es el intervalo $(\frac{3}{4}, 3)$. De la misma forma, resolvemos el sistema (2), pero en este caso el conjunto solución es el conjunto vacío.

La solución a la inecuación original, es la unión de las soluciones de los sistemas. Entonces en este caso la solución es el conjunto S$=(\frac{3}{4}, 3) \cup \emptyset = (\frac{3}{4}, 3)$.

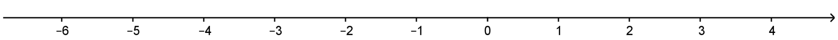
Gráficamente,



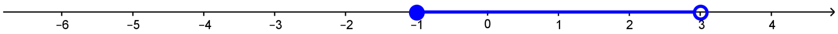
———————————————————————

4) c) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al -1 en menos de 4.

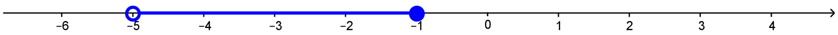
Para hallar gráficamente los puntos que distan al -1 en menos de 4, miremos la recta real.



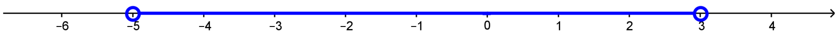
Una vez posicionados en -1, consideramos los puntos a la derecha, que distan menos que 4 serán los puntos entre -1 y 3. Observemos que la distancia entre -1 y 3 es exactamente 4.



Luego, considerando los puntos a la izquierda de -1, que distan en menos de 4 serán los puntos entre -5 y -1.



Entonces el conjunto de puntos que distan al -1 en menos de 4 es el conjunto $(-5, 3)$.



Analíticamente, la distancia entre -1 y un punto x está dada por $|x-(-1)|$. Luego, los puntos que distan de -1 en menos que 4, están dados por el conjunto solución de la inecuación $|x-(-1)| < 4$.

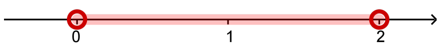
$|x-(-1)| < 4 \underset{\text{Prop.2.4.a)}}{\Leftrightarrow} -4 < x-(-1) < 4 \underset{\text{T.2.1.}}{\Leftrightarrow} -4 < x+1 < 4 \underset{\text{T.7.1.}}{\Leftrightarrow} -4-1 < x+1-1 < 4-1 \underset{\text{Ax.2}}{\Leftrightarrow}$ $-5 < x+(1-1) < 3 \underset{\text{Ax.4}}{\Leftrightarrow} -5 < x < 3$.

Es decir que el conjunto solución correspondiente a la inecuación es el intervalo $(-5, 3)$, que coincide con la solución hallada gráficamente.

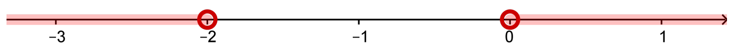
4) d) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 0 en más de 1; como buscamos los $x \in \mathbb{R}$ tales que la distancia de x a 0 es mayor que 1, recordemos que medimos la distancia de x a y con el número $|x-y|$, luego, buscamos los x tales que $|x-0| = |x| > 1 \overset{P2-4b}{\Leftrightarrow} x > 1$ o $x < -1$, o sea, $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

——————————————————————————

5) Representar en la recta numérica los siguientes conjuntos. Decidir si cada uno está acotado inferior y/o superiormente. Indicar en cada caso (si es posible) el ínfimo, supremo, mínimo y/o máximo.



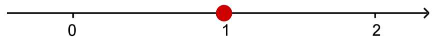
b) $|x-1| < 1$.
El conjunto solución es $S = (0, 2)$. S está acotado, el $\inf(S) = 0$, no tiene mínimo pues $0 \notin S$ y el $\sup(S) = 2$ no tiene máximo pues $2 \notin S$.



c) $|x+1| > 1$.
El conjunto solución es $S = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. S no está acotado ni inferior ni superiormente.

i) $\dfrac{|5x-5|}{|x+1|} \leq 0$. $\dfrac{|5x-5|}{|x+1|} \leq 0 \Leftrightarrow |5x-5| = 0 \Leftrightarrow 5\,|x-1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 0$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



El conjunto solución es $S = 1$ está acotado y $\inf(S) = \min(S) = 1 = \max(S) = \sup(S)$.

————————————————————————

6) Dado el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 1 - \dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$

-a- **Decidir si está acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.**

-b- **En el casos en que el conjunto está acotado superior y/o inferiormente, determinar el supremo y/o ínfimo;**

-c- **Establecer si los supremos e ínfimos obtenidos en el ítem anterior son máximos y mínimos, respectivamente, del conjunto considerado.**

Antes de abordar el problema en forma analítica es recomendable representar (gráficamente) algunos elementos del conjunto G en la recta real (por ejemplo, los corrrespondientes a los primeros 10 números naturales). Si la representación es correcta, ésta debería sugerir que todos los elementos de G pertenecen al intervalo $[0, 1)$. Más aún, debería sugerir que 0 es el menor de los elementos de G y que a medida que k se hace más grande, los elementos de G que son de la forma $1 - \frac{1}{k}$ se "aproximan indefinidamente a 1" sin llegar a tocarlo. Dicho de otra forma, de la gráfica deberíamos intuir que 0 es el ínfimo de G y que 1 es el supremo. Desde luego, dado que no podemos representar a todos los elementos de G (¡G tiene infinitos elementos!), lo anterior no prueba nada. En lo que sigue, vamos a dar una prueba formal de lo que observamos gráficamente. Comencemos por mostrar que $\sup(G) = 1$.

En primer lugar, notemos que 1 es cota superior de G. En efecto, si $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $k > 0$ y del **Teorema 7 (9.)**, sigue que $\frac{1}{k} > 0$. Ahora, por el **Teorema 7 (6.)**, podemos afirmar que $-\frac{1}{k} < 0$ y, sumando 1 en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos que

$$1 - \frac{1}{k} < 1,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto muestra que 1 es cota superior de G.

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ (**Corolario 5. (iii)**) y, en consecuencia, tenemos que $-\epsilon < -\frac{1}{n}$. Nuevamente, sumando 1 en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos que

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n}.$$

Esto muestra que, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un elemento de G (el elemento $1 - \frac{1}{n}$) mayor que $1 - \epsilon$. Finalmente, usando la caracterización del supremo vista en teoría (**Teorema 9.**), podemos afirmar que $\sup(G) = 1$. De paso, notemos que G no tiene máximo, puesto que $1 \notin G$ (¡probarlo!).

Ahora, veamos que $\min(G) = 0$ (y por lo tanto, también tenemos que $\inf(G) = 0$). Para esto, notemos que si $k \in \mathbb{N}$, entonces $k \geq 1$ y, en consecuencia, $-\frac{1}{k} \geq -1$. Sumando 1 en ambos miembros de la desigualdad anterior resulta que $1 - \frac{1}{k} \geq 0$ (esto muestra que 0 es cota inferior de G). Además, como $0 \in G$ (puesto que podemos escribir a 0 como $1 - \frac{1}{1}$), tenemos que $\min(G) = 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

———————————————————————

7) Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y sólo si existe un número real positivo L tal que $|x| < L$ para todo $x \in A$.

Sea A un conjunto no vacío de números reales.
($\Longrightarrow$) Si A está acotado (hipótesis) entonces debemos probar que existe $L > 0$ tal que $|x| < L$ $\forall x \in A$ (tesis); o sea, existe $L > 0$ tal que $-L < x < L$ $\forall x \in A$.
Como A está acotado, significa que está acotado superior e inferiormente. Es decir, (definición de cota superior e inferior, respectivamente) existen M y m números reales tales que para todo $x \in A$ se verifica $x \leq M$ y $x \geq m$. O sea,

$$m \leq x \leq M \ \ \forall x \in A$$

Observemos que resulta $m \leq M$.
Ahora, (propiedad de valor absoluto, proposición 2, (3)) todo número real verifica $-|x| \leq x \leq |x|$, además $|x| < |x| + 1$ y $-|x| - 1 < -|x|$. Luego

$$-|m| - 1 < -|m| \leq m \leq x \leq M < |M| + 1 \ \ \forall x \in A$$

Consideremos $L = \text{máx}\{|M| + 1, |m| + 1\}$. Veamos que L verifica la “tesis”.
Efectivamente $L > 0$ y además $L \geq |M| + 1$ y $L \geq |m| + 1$ luego vale $-L \leq -|m| - 1$ y entonces

$$-L \leq -|m| - 1 < -|m| \leq m \leq x \leq M < |M| + 1 \leq L \ \ \forall x \in A$$

o sea, existe $L > 0$ tal que

$$-L < x < L \ \ \forall x \in A \iff |x| < L \ \ \forall x \in A$$

($\Longleftarrow$) Si existe $L > 0$ tal que $|x| < L$ $\forall x \in A$; o sea, si existe $L > 0$ tal que $-L < x < L$ $\forall x \in A$ (hipótesis) debemos probar que A esta acotado (tesis).
Como $x < L$ $\forall x \in A$, L es cota superior de A, por lo tanto A está acotado superiormente. Además, como $-L < x$ $\forall x \in A$, resulta $-L$ una cota inferior de A, luego A está acotado inferiormente. Luego A está acotado, como queríamos probar.

———————————————————————

9) Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente:

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}.$$

Observación: esta definición nos dice que $x \in -A \iff -x \in A$.

a) Siendo A_1, A_2 y A_3 los conjuntos encontrados en los ejercicios 5(a), 5(b) y 5(c), hallar los conjuntos $-A_1$, $-A_2$ y $-A_3$.

$A_1 = \{-4, 4\}$. Luego por definición de conjunto $-A$, resulta $-A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A_1\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \{-4, 4\}\} = \{x \in \mathbb{R} : -x = -4 \vee -x = 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x = 4 \vee x = -4\} = \{-4, 4\} = A_1$.

$A_2 = (0, 2)$. Luego por definición de conjunto $-A$, resulta $-A_2 = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A_2\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in (0, 2)\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < -x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 0\} = (-2, 0)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$A_3 = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Luego por definición de conjunto $-A$, resulta $-A_3 = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A_3\} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : -x < -2 \vee -x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \vee x < 0\} = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

b) Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

1) En primer lugar veamos que $-A$ es un conjunto no vacío.
$A \neq \emptyset \implies \exists x \in A$.
Luego $-x \in -A$ pues $-(-x) \overset{T2-1}{=} x \in A \implies -A \neq \emptyset$.

2) Ahora veamos que $-(-A) = A$.
$x \in -(-A) \overset{Def.-A}{\iff} -x \in -A \overset{Def.-A}{\iff} -(-x) \in A \overset{T2-1}{\iff} x \in A$.
$\therefore -(-A) = A$.

c) Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

Supongamos que $-A = A$.
Luego $x \in A \overset{-A=A}{\iff} x \in -A \overset{Def.-A}{\iff} -x \in A$.
Es decir que $\forall x \in A, -x \in A$. Esto quiere decir que A es un conjunto simétrico respecto al origen.
Ejemplos de este tipo de conjuntos son: $(-5, 5)$, $[-3, -1) \cup (1, 3]$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Muestre que si A es un conjunto acotado superiormente (inferiormente) entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente (superiormente).

Veamos que si A es un conjunto acotado superiormente entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente.

Supongamos que A es un conjunto acotado superiormente $\implies \exists\, c \in \mathbb{R}/x \leq c,\ \forall\, x \in A \implies \exists\, c \in \mathbb{R}/-x \geq -c,\ \forall\ -(-x) \in A \overset{-x=y}{\implies} \exists\, c \in \mathbb{R}/y \geq -c,\ \forall\ -y \in A \overset{Def.-A}{\implies} \exists\, c \in \mathbb{R}/y \geq -c,\ \forall\, y \in -A$.

$\therefore -c$ es cota inferior de $-A \implies -A$ acotado inferiormente.

Análogamente se prueba que si A es un conjunto acotado inferiormente entonces $-A$ es un conjunto acotado superiormente.

e) Muestre que si A posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\inf(-A) = -\sup(A)$, y análogamente si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\text{ínf}(A)$.

Veamos que si A posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\text{ínf}(-A) = -\sup(A)$.
Supongamos que A posee supremo $\implies \exists\, b = \sup(A) \implies b$ cota superior de A.
Por lo realizado en d) sabemos que $-b$ es cota inferior de $-A$.
Veamos que $-b$ es ínfimo de $-A$.
Supongamos que no, luego $\exists\, c$ cota inferior de $-A$ tal que $-b < c$.
Luego $-b < c \leq y\ \forall\, y \in -A \implies -y \leq -c < b,\ \forall\, y \in -A \overset{-y=x}{\implies} x \leq -c < b\ \forall\, x \in A$.
Por lo tanto, $-c$ es cota superior de A menor a b. Esto contradice que b sea supremo de A.
$\therefore -b = \text{ínf}(-A) \implies -\sup(A) = \text{ínf}(-A)$.
Análogamente se prueba que si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\text{ínf}(A)$.

f) Utilizar los resultados de las partes anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

Sea $A \neq \emptyset$, A acotado inferiormente. Queremos probar que A posee ínfimo.
Por lo probado en b) resulta $-A \neq \emptyset$ y por lo probado en d) resulta $-A$ acotado superiormente.
De estas 2 cosas y por axioma 10 (axioma del supremo), resulta que $-A$ posee supremo.
Entonces por lo probado en e) $-(-A)$ posee ínfimo.
Finalmente, por b) $-(-A) = A$, y por lo tanto A posee ínfimo, como queríamos probar.

11) Sean A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leq b. \tag{1}$$

a) Demostrar que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B es acotado inferiormente.

Como por hipótesis el conjunto A es no vacío, podemos tomar un elemento de dicho conjunto, es decir, $\exists\ \tilde{a} \in A$. Luego, por (1), tenemos que $\forall\ b \in B,\ \tilde{a} \leq b$, es decir, $\tilde{a}$ es una cota inferior para el conjunto B, el cual resulta acotado inferiormente.

Por otro lado, como el conjunto B también es no vacío, $\exists\ \tilde{b} \in B$. Luego, por (1), $a \in A \Rightarrow a \leq \tilde{b}$, es decir, $\tilde{b}$ es una cota superior para el conjunto A.

b) ¿Existe alguna relación entre el $\sup(A)$ y el $\inf(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

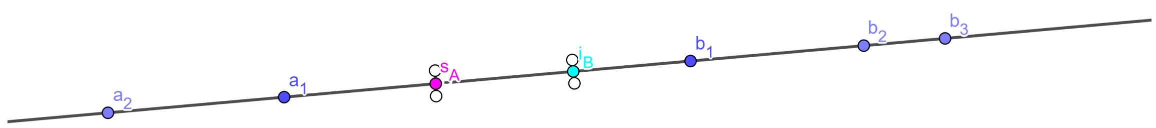
Como A está acotado superiormente, por el axioma del supremo (**Axioma 10**), el conjunto tiene supremo, es decir, $\exists\ s_A \in \mathbb{R}/\ s_A = \sup(A)$.

Como el conjunto B está acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo (**Teorema 12**), es decir, $\exists\ i_B = \text{ínf}(B)$.

Para intentar ver cuál es la relación entre s_A y i_B podemos mirar algún ejemplo.

En el caso en que $A = [1, 5]$ y $B = (8, 10]$, vemos que se verifican las hipótesis, en especial (1). Luego, $\sup(A) = 5$ y $\text{ínf}(B) = 8$, es decir, en este caso nos queda que $\sup(A) \leq \text{ínf}(B)$.

Dibujemos un boceto sobre la recta real, por ejemplo:



Todos los elementos del conjunto A son menores que los de B, por lo que en la recta real se encuentran todos a la izquierda, como en la figura. Entonces, las cotas se podrían encontrar por el sector entre medio. De este boceto, también podríamos pensar que $s_A \leq i_B$ y esta sería nuestra conjetura.

c) Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

Para probar nuestra conjetura, es decir, para probar que es verdad que $s_A \leq i_B$ vamos a suponer lo contrario, es decir, suponer que

$$i_B < s_A. \tag{2}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Consideremos el número real $t = \dfrac{s_A - i_B}{2}$. Por (2) y como $\frac{1}{2} > 0$, tenemos que $t \in \mathbb{R}^+$.

Luego, por la caracterización del supremo (**Teorema 9**),

$$\exists\ \hat{a} \in A \ /\ s_A - t < \hat{a} \leq s_A. \tag{3}$$

Como ya vimos que $t > 0$, en este caso, t sería aquel ϵ positivo que menciona el Teorema 9.

Por otro lado, considerando el resultado análogo al Teorema 9 para la caracterización del ínfimo, tenemos que

$$\exists\ \hat{b} \in B \ /\ i_B \leq \hat{b} < i_B + t. \tag{4}$$

Por cómo elegimos a t, podemos ver que

$$i_B + t = i_B + \frac{s_A - i_B}{2} = \frac{i_B + s_A}{2} = s_A - \frac{s_A - i_B}{2} = s_A - t. \tag{5}$$

Juntando (3), (4) y (5), tenemos que

$$\hat{b} < i_B + t = s_A - t < \hat{a},$$

es decir,

$$\exists\ \hat{a} \in A \wedge \hat{b} \in B \ /\ \hat{b} < \hat{a}.$$

Lo que contradice la hipótesis (1) del ejercicio.

Entonces nuestra suposición (2) debe ser falsa. Por lo tanto, $s_A \leq i_B$.