Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2020

UNIDAD 1: Análisis Combinatorio.

La Teoría Combinatoria es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las formas de contar. Aparte del interés que tiene en sí misma, la combinatoria tiene aplicaciones de gran importancia en otras áreas como la teoría de códigos, la probabilidad y estadística, y el análisis de algoritmos.

1 Reglas de la suma y del producto.

Comencemos presentando dos principios básicos del conteo: las reglas de la suma y del producto.

Regla de la suma: Si una primera tarea puede realizarse de m formas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas simultáneamente, entonces la tarea de llevar a cabo cualquiera de ellas puede realizarse de $m + n$ formas.

Nota 1 *Vale destacar que cuando decimos que una tarea puede realizarse de m formas, supondremos que estas m son distintas, salvo que se indique lo contrario.*

Ejemplo 1 *Veamos algunos ejemplos:*

1. *La biblioteca de la facultad tiene 15 libros de Matemática Discreta y 7 de Geometría Analítica. Por la regla de la suma, un estudiante puede elegir entre $15 + 7 = 22$ libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.*
2. *Claramente, esta regla puede ampliarse a más de dos tareas. En efecto, si suponemos que el estudiante está interesado, además en el área del Cálculo, y se sabe que la biblioteca cuenta con 35 libros de este tema, podemos asegurar que el estudiante podrá elegir entre $15 + 7 + 35 = 57$ libros para aprender acerca de alguno de estos temas.*

Ahora bien, ¿cómo formulamos matemáticamente la regla de la suma? Para responder esta pregunta nos concentraremos en propiedades de los conjuntos y de las funciones. Empecemos por la notación que vamos a utilizar:

- Sean $m, n, \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Notaremos

$$[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \cdots, n\} = \{k \in \mathbb{N} \colon\ m \leq k \leq n\}.$$

- Cantidad de elementos: $|[\![m, n]\!]| = n - (m-1) = n - m + 1$.

La siguiente definición debería ser conocida.

Definición 1 *Un conjunto X tiene* ***cardinalidad*** *n, con $n \in \mathbb{N}$, si existe una función biyectiva $f \colon [\![1, n]\!] \to X$ y se denota $|X| = n$. Para $X = \emptyset$ definimos $|X| = 0$. Todo conjunto que tenga cardinalidad n, para algún $n \in \mathbb{N}$ se dirá un conjunto finito.*

El siguiente Teorema se conoce como Principio de Adición, y es la formalización de la Regla de la Suma:

Teorema 1 ***(Principio de Adición)*** *Si A, B son dos conjuntos finitos disjuntos entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Demos. Siendo A y B conjuntos finitos, existen n y m naturales y dos funciones biyectivas $f \colon [\![1, n]\!] \to A$ y $g \colon [\![1, m]\!] \to B$.
Notemos que, la función

$$h \colon [\![1, n+m]\!] \to A \cup B \,/\, h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [\![1, n]\!] \\ g(x-n), & x \in [\![n+1, n+m]\!] \end{cases}$$

es biyectiva. Luego $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$. ∎

El siguiente Corolario justifica la ampliación de la Regla de la Suma a más tareas.

Corolario 1

1. *Si $A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos entonces $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.*
2. *Si A, B son conjuntos finitos entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Regla del producto: Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, de manera que existen m resultados posibles de la primera etapa, y, para cada uno de estos resultados existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.

Ejemplo 2 *Veamos algunos ejemplos:*

1. *Se encuentran ensayando para una obra de teatro 6 hombres y 8 mujeres. Se necesitan para el papel principal un hombre y una mujer. Por la regla del producto, el director puede elegir para protagonizar de* $6 \times 8 = 48$ *formas.*

2. *Las patentes del Mercosur para la Argentina cuentan de 2 letras, 3 números y 2 letras, (por ejemplo* AA 345 EX*). Argentina descartó la letra Ñ para que no sea confundida con la N. ¿Qué cantidad de autos es posible patentar?*

3. *Queremos plantear un problema donde las variables son sólo letras, o bien una letra seguida de un número. ¿Entre cuántas variables puedo elegir si*
   i) las mayúsculas y minúsculas son indistinguibles?
   ii) se distingue entre mayúsculas y minúsculas?

4. *Las ciudades A, B, y C están conectadas de la siguiente manera: hay seis caminos de A a B y cuatro de B a C, pero ninguno de A a C directamente. ¿De cuántas maneras podemos ir de A a C?*

El siguiente Teorema es la formalización de la Regla del Producto:

Teorema 2 *Si* A, B *son conjuntos finitos entonces* $|A \times B| = |A||B|$.

Demos. Sean $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$. Tenemos que probar que $|A \times B| = mn$. Fijaremos n y haremos la prueba por inducción sobre m.

1. $m = 1$. $A \times B = \{(a_1, b_1), \cdots, (a_1, b_n)\}$. Definiendo la función $f\colon [\![1, n]\!] \to A \times B$ por $f(i) = (a_1, b_i)$, resulta que f es biyectiva y por lo tanto $|A \times B| = n = 1 \cdot n$ como queríamos ver.

2. Supongamos ahora que si A tiene m elementos entonces $|A \times B| = m \cdot n$. Queremos ver que esto es válido también para $m + 1$.
   Sea entonces $A = \{a_1, \cdots, a_{m+1}\}$. Poniendo $A \times B = ((A - \{a_{m+1}\}) \times B) \cup (\{a_{m+1} \times B\})$, resulta que hemos escrito a $A \times B$ como unión disjunta de conjuntos y, utilizando el principio de adición y la HI, resulta que

$$|A \times B| = mn + m = (m + 1)n.$$

■

Hagamos esta vez el análisis reverso: ¿cómo se puede interpretar el siguiente Corolario?

Corolario 2 *Si* A_1, $A_2, \cdots, A_n$ *son conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Tanto la regla de la suma como la del producto pueden ser aplicadas reiteradamente. A veces es necesario combinar estas reglas de conteo para la solución de un problema.

Ejemplo 3 *Una persona visita dos tiendas con intención de comprar un pantalón. En la primera tienda hay seis modelos diferentes y para cada uno hay tres colores. En la segunda hay diez modelos y cuatro colores para cada modelo. ¿Entre cuántos pantalones tiene que escoger la persona?*

2 Disposiciones lineales. Permutaciones.

Pensemos ahora en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 *En un grupo de 10 estudiantes, se desea elegir a 5 y ubicarlos en fila para tomar una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales (importa el orden) son posibles? Observemos que en este caso, las repeticiones no son posibles. Si bien cualquiera de los 10 estudiantes puede ocupar el lugar de la izquierda, sólo podremos elegir entre los 9 restantes para ocupar el segundo lugar y así sucesivamente.*

Definición 2 *Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina* permutación *de la colección.*

Ejemplo 5 *Consideremos las cinco vocales de nuestro alfabeto. ¿De cuántas formas podemos permutarlas? Si, en cambio, queremos disponer de dos de estas letras, ¿cuántas permutaciones de tamaño dos podemos realizar?*

En general, si existen n objetos distintos a los que podemos denotar con a_1, a_2, ..., a_n y r es un entero $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

$$\underset{\text{primera posic.}}{n} \times \underset{\text{segunda posic.}}{(n-1)} \times \underset{\text{tercera posic.}}{(n-2)} \times \cdots \times \underset{\text{r-ésima posic.}}{(n-r+1)}$$

y lo notaremos con $P(n,r)$. Para $r=0$, $P(n,0)=1$.

Una forma más práctica para escribir este tipo de productos es mediante la utilización del símbolo factorial que se define:

$$\begin{aligned} &0! = 1 \\ &n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego,

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)}{(n-r)(n-(r+1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejemplo 6 *El número de permutaciones de la palabra MURCIELAGO es* $10!$. *Si sólo se utilizan 4 de las letras, el número de permutaciones (de tamaño 4) es* $P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!}$. *Si se permiten repeticiones de las letras, el número de secuencias posibles de 12 letras es* 10^{12}.

La formalización matemática del concepto de permutaciones o disposiciones lineales requiere de un poco más de esfuerzo. El siguiente ejemplo nos da una pista para iniciar el análisis riguroso necesario. Ahora bien, supongamos que tenemos el conjunto $X = \{1,2,3\}$ y queremos saber cuántas funciones $f\colon X \to X$ existen.
Si asociamos a cada posible función con la terna $(f(1), f(2), f(3))$ entonces tendremos las siguientes posibilidades:

(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(1,2,1)	(1,2,2)	**(1,2,3)**	(1,3,1)	**(1,3,2)**	(1,3,3)
(2,1,1)	(2,1,2)	**(2,1,3)**	(2,2,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	**(2,3,1)**	(2,3,2)	(2,3,3)
(3,1,1)	**(3,1,2)**	(3,1,3)	**(3,2,1)**	(3,2,2)	(3,2,3)	(3,3,1)	(3,3,2)	(3,3,3)

Observemos que de las 27 posibles funciones que existen, sólo 6 son inyectivas. Pero lo interesante es notar que:

- **Preguntarnos cuántas funciones $f\colon X \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas disposiciones lineales de tres elementos con repeticiones pueden realizarse.**
  Por la regla del producto, sabemos que la respuesta a esta pregunta es: $3^3 = 27$.
- **Preguntarnos cuántas funciones inyectivas $f\colon X \to X$ existen es equivalente a preguntarnos cuántas permutaciones de tres elementos pueden realizarse.**
  Vimos que la respuesta a esta pregunta es: $P(3) = 3! = 6$.

Formalizaremos a continuación este comentario.

Teorema 3 *Sean A y B dos conjuntos finitos con $|A| = n$ y $|B| = m$. Si $\mathcal{F}(A,B)$ es el conjunto de* ***todas*** *las funciones de A en B, entonces $|\mathcal{F}(A,B)| = m^n$.*

Demos. Basta observar que si f es una función de A en B y, si ponemos $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, entonces $f(a_i) = b_i$ donde b_i es algún elemento de B. Podemos así, identificar a f con la *n-upla* $(f(a_1), \cdots, f(a_n)) \in B \times \cdots \times B$. Por Teorema 2, la cantidad de elementos de $B \times \cdots \times B$ es m^n. Luego $|\mathcal{F}(A,B)| = m^n$. ∎

Nota 2 *Al conjunto de todos los subconjuntos de A (incluyendo al conjunto vacío y al mismo A) se lo conoce como el conjunto de partes de A, y se denota por $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$. Podemos identificar a cada subconjunto $B \subset A$ con la función (llamada característica)*

$$\chi_B \colon A \to \{0,1\} \;/\; \chi_B(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \notin B. \\ 1, & si\ x \in B \end{cases}$$

Claramente, $\chi_\emptyset(x) = 0$, $\forall\, x \in A$ y $\chi_A(x) = 1$, $\forall\, x \in A$.

La correspondencia $B \longleftrightarrow \chi_B$ es biunívoca. Luego, si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, contar la cantidad de subconjuntos B de A es equivalente a contar la cantidad de funciones características χ_B cuyo dominio es A. Aplicando el teorema anterior resulta que

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}(A, \{0,1\})| = 2^n.$$

Nota 3 *Recordemos que una función $f \colon A \to B$ es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primer componente de un par ordenado en la relación.*

Por otro lado, vimos que cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B, luego

$$\mathcal{F}(A, B) \subset \mathcal{P}(A \times B).$$

En particular, se verifica que $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{mn}$ y $|\mathcal{F}(A,B)| = m^n \leq 2^{mn}$.

Utilizaremos la siguiente notación para los siguientes conjuntos:

$\mathcal{F}_i(A,B) = \{f \in \mathcal{F}(A,B) : \, f \, inyectiva\}$ y $\mathcal{F}_b(A,B) = \{f \in \mathcal{F}(A,B) : \, f \, biyectiva\}$.

Veremos al finalizar la unidad que si $|A| > |B|$, entonces $|\mathcal{F}_i(A,B)| = 0$. Ahora bien:

Teorema 4 *Si $|A| = n$, $|B| = m$ y $n \leq m$ entonces $|\mathcal{F}_i(A,B)| = \frac{m!}{(m-n)!}$.*

Demos. Como antes, si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, podemos identificar a f con la $n-upla$ $(f(a_1), \cdots, f(a_n)))$ donde debido a la inyectividad de f podemos asegurar que hay:

- m valores posibles para $f(a_1)$,
- $m-1$ valores posibles para $f(a_2)$,
- $\cdots$
- $m-(n-1)$ valores posibles para $f(a_n)$.

Luego, $|\mathcal{F}_i(A,B)| = m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$. ∎

Corolario 3 *Si* $n = m$ *entonces* $|\mathcal{F}_b(A, B)| = m!$.

Nota 4 *Como dijimos anteriormente, podemos hacer la siguiente asociación*

$$\textbf{\textit{disposiciones lineales}} \longleftrightarrow \textbf{\textit{funciones}}$$

Por ejemplo:

1. *Queremos saber cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul y verde, si se permiten dos o más franjas del mismo color...*

   posible disposición: $\underline{\textit{1° color }}\ \underline{\textit{2° color }}\ \underline{\textit{3° color}} \quad \longleftrightarrow \quad f\colon \{1, 2, 3\} \to \{R, B, A, V\}$

   Luego, por teorema 3:

   $$\textit{Cantidad de banderas } \underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} \quad \longleftrightarrow \quad |\mathcal{F}(\{1, 2, 3\}, \{R, B, A, V\})| = 4^3 = 64.$$

2. *Si queremos saber cuántas banderas se pueden hacer con tres bandas verticales de colores rojo, blanco, azul y verde, si NO se permiten dos o más franjas del mismo color...*

   posible disposición: $\underline{\textit{1° color }}\ \underline{\textit{2° color }}\ \underline{\textit{3° color}} \quad \longleftrightarrow \quad f\colon \{1, 2, 3\} \to \{R, B, A, V\}$

   Luego, por teorema 4:

   $$\textit{Cantidad de banderas } \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \quad \longleftrightarrow \quad |\mathcal{F}_i(\{1, 2, 3\}, \{R, B, A, V\})| = \tfrac{4!}{(4-3)!} = 24.$$

3. *Si en un colectivo hay* 10 *asientos vacíos, ¿de cuántas maneras distintas pueden sentarse 7 personas?*

   $$|\mathcal{F}_i([\![1, 7]\!], [\![1, 10]\!])| = \frac{10!}{(10-7)!} = 604800.$$

4. *Si bien pensar a las disposiciones como funciones formaliza nuestros planteos, no siempre es fácil definirlas y, por ejemplo, para contar cuántos números capicúas de cinco dígitos hay, es mejor razonar con un esquema, como hicimos en la sección anterior:*

   $$\textit{número capicúa}\, xyzyx, \quad x \in [\![1, 9]\!],\ y,\ z \in [\![0, 9]\!].$$

Definición 3 *Sea* A *un conjunto de* n *elementos y sea* $r \leq n$. *Llamaremos* ***permutación*** *o* ***disposición lineal ordenada*** *de* n *elementos de* A *a cualquier función inyectiva* $f\colon [\![1, n]\!] \to A$. *Es común representar una permutación con la* $n-$*upla* $(a_1, \cdots, a_n)$ *donde* $a_i \in A$ *son todos distintos.*

Corolario 4 $P(n) = n!$ *y* $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ahora que hemos formalizado el concepto, veamos cómo podemos aplicarlo a diversas situaciones, a saber: cuando se repiten los objetos a permutar y cuando la disposición es *circular* en lugar de lineal.

Analicemos qué ocurre si quisiéramos permutar ahora las letras de una palabra donde hay letras repetidas.

Ejemplo 7

1. *Consideremos la palabra* $CASA$. *Si las letras* A *fueran distinguibles, digamos* CA_1SA_2, *claramente tendríamos* $P(4,4) = 4!$ *permutaciones diferentes. Ahora bien, si fueran indistinguibles, podemos realizar la siguiente tabla donde a cada par de casos distintos le asociamos sólo:*

$$\begin{array}{cc|c}
CSA_1A_2 & CSA_2A_1 & CSAA \\
A_1CSA_2 & A_2CSA_1 & ACSA \\
A_1A_2CS & A_2A_1CS & AACS \\
SA_1A_2C & SA_2A_1C & SAAC \\
CA_1SA_2 & CA_2SA_1 & CASA \\
A_1SA_2C & A_2SA_1C & ASAC \\
SA_1CA_2 & SA_2CA_1 & SACA \\
A_1CA_2S & A_2CA_1S & ACAS \\
SCA_1A_2 & SCA_2A_1 & SCAA \\
A_1SCA_2 & A_2SCA_1 & ASCA \\
A_1A_2SC & A_2A_1SC & AASC \\
CA_1A_2S & CA_2A_1S & CAAS
\end{array}$$

   En este caso, tenemos un par de letras repetidas y podemos ver que se pueden realizar 12 permutaciones.

$$\textit{Cant. de permut. de 4 con dos objetos repetidos} = \frac{4!}{2}.$$

2. *Supongamos ahora que queremos permutar las letras de la palabra* $BANANA$. *Si razonamos como en el ejemplo anterior, suponiendo primero que las tres letras son distinguibles,* $BA_1N_1A_2N_2A_3$, *tendríamos* $6!$ *permutaciones.*
   Ahora bien, ¿cuántas de estas disposiciones son en realidad las mismas si las letras son indistinguibles?
   Con respecto a la letra A, *las* $3!$ *formas de combinar las tres letras* A *corresponden a la misma combinación:*

$$\begin{array}{lcl}
BA_1N_1A_2N_2A_3 & & \\
BA_1N_1A_3N_2A_2 & & \\
BA_2N_1A_3N_2A_1 & \longrightarrow & BAN_1AN_2A \\
BA_2N_1A_1N_2A_3 & & \\
BA_3N_1A_2N_2A_1 & & \\
BA_3N_1A_1N_2A_2 & &
\end{array}$$

Con respecto a la letra N, las $2!$ *formas de combinar las dos letras N corresponden a la misma combinación:*

$$BAN_1AN_2A, BAN_2AN_1A \longrightarrow BANANA.$$

Por lo tanto, la cantidad de permutaciones de letras de la palabra BANANA, donde hay 3 letras A y 2 letras N, es:

$$\textit{número de disposiciones de las letras BANANA } = \frac{6!}{3!2!}.$$

En general...

Si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,..., y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ disposiciones lineales de los n objetos. (Los objetos del mismo tipo son indistinguibles).

Ejemplo 8 *Determinar el número de trayectorias escalonadas del plano xy del punto* $(2,1)$ *al* $(7,4)$*, entendiendo por trayectoria escalonada a aquellas formadas por escalones individuales que van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A).*
Notemos que cada trayectoria consta de 5 movimientos hacia la derecha y 3 hacia arriba (DDADADAD es un camino posible), luego, la cantidad de trayectoria corresponde a la cantidad de disposiciones lineales con repeticiones de 5 letras D y 3 letras A, y esto se obtiene realizando el cálculo $\frac{8!}{5!3!} = 56$.

Un caso especial es el de las **disposiciones circulares**, esto es, en vez de ubicar los elementos en fila, lo hacemos de forma circular.

Ejemplo 9 *Supongamos que queremos designar los lugares de 6 personas A, B, C, D, E y F alrededor de una mesa circular.*

1. *Si las disposiciones fueran lineales, claramente tendríamos* $6!$ *formas diferentes de realizar las disposiciones. Ahora bien, si la disposición es alrededor de una mesa circular las siguientes disposiciones serán indistinguibles:*

$$ABCDEF, BCDEFA, CDEFAB, DEFABC, EFABCD, \text{ y } FABCDEF.$$

O sea que 6 disposiciones lineales corresponden a una misma disposición circular, ya que dos disposiciones circulares serán idénticas si podemos obtener una de la otra mediante una rotación. Podemos deducir entonces que existen $\frac{6!}{6} = 5! = 120$ *disposiciones de A, B, C, D, E y F alrededor de una mesa redonda.*

2. *Otra forma de resolver este mismo problema, es plantear que fijamos la letra A en un lugar determinado (que luego será, eventualmente, cualquier lugar alrededor de la mesa). Observemos que podemos ocupar los lugares que faltan ubicando de manera lineal las 5 letras restantes y esto puede hacerse de $5! = 120$ maneras diferentes.* ***Haber fijado una letra, transformó el problema de las disposiciones circulares en un problema de disposiciones lineales.***

3. *Supongamos ahora que las 6 personas que deseamos ubicar alrededor de la mesa son 3 mujeres y 3 hombres, y queremos ubicarlas alternando los sexos.*
   Tenemos entonces M_1, M_2, M_3 y H_1, H_2 y H_3. Podemos proceder según el método anterior y fijar una letra cualquiera, digamos M_3. Pero entonces tenemos 3 opciones (a elegir entre H_1, H_2 y H_3) para el siguiente lugar, dos opciones (a elegir entre M_1 y M_2) para el tercero, y así sucesivamente...
   O sea que una vez bien planteado el problema, lo resolvemos mediante la regla del producto y tenemos por lo tanto

$$3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

   maneras diferentes de sentar a las seis personas alrededor de la mesa redonda alternando los sexos.

3 Combinaciones. El Binomio de Newton.

La baraja francesa es un conjunto de naipes, formado por 52 unidades repartidas en cuatro palos: corazones (C), diamantes (D), tréboles (T) y picas (P). Cada palo tiene 13 cartas: A,2, $3, \cdots, 9, 10$,J, Q y K.

Si nos piden sacar tres cartas, una tras otra y sin sustituirlas, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?

Si nos importara el orden en que disponemos de las tres cartas, tendríamos

$$52 \times 51 \times 50 = P(52, 3).$$

Pero, como hemos hecho anteriormente, las disposiciones $AD - 3P - 5C$, $AD - 5C - 3P$, $3P - AD - 5C$, $3P - 5C - AD$, $5C - 3P - AD$ y $5C - AD - 3P$ corresponden a la misma opción ya que no nos interesa el orden en que se extraen las cartas.

Luego, la cantidad de formas diferentes que tenemos de extraer 3 cartas sin importar el orden es de $\frac{P(52,3)}{3!} = \frac{52!}{49!3!}$.

En general...

Si existen n objetos distintos, cada selección o **combinación** de r de esos objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de los n objetos. Así, el número de combinaciones de tamaño r de una colección de tamaño n, que se denota $C(n,r)$, donde $0 \leq r \leq n$ está dado por

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \qquad 0 \leq r \leq n.$$

La formalización de este concepto es ahora inmediata (el esfuerzo lo hicimos antes). Como hemos dicho en las combinaciones $C(n,r)$ no interesa el orden en la selección luego, si tomamos las permutaciones de r elementos tomados de n, tendremos $r!$ permutaciones de esos r elementos que para nosotros corresponderán a la misma combinación. Así, la formalización de las combinaciones sigue entonces del Teorema 4:

Corolario 5 $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Definición 4 *Se denomina* ***número combinatorio*** *al definido por* $\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}_0$ *y* $r \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $0 \leq r \leq n$.

Resulta entonces que, el número combinatorio $\binom{n}{r}$ nos dice la cantidad de formas distintas que tenemos de elegir r elementos tomados de entre n elementos, **sin considerar el orden**.

Proposición 1 *Sea* $n \in \mathbb{N}_0$*. Para todo* $k \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $0 \leq k \leq n$*, el número combinatorio* $\binom{n}{k}$ *es un número natural.*

Demos. Consideremos la proposición

$$P(n)\colon\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \text{tal que } 0 \leq k \leq n,\ \text{el número combinatorio } \binom{n}{k} \text{ es un número natural.}$$

Debemos probar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Completar la prueba por inducción. ■

Nota 5 *En adelante, será* ***fundamental*** *preguntarnos a la hora de plantear un problema, si* ***importa el orden, o no****.*

Ejemplo 10

1. *En una escuela secundaria, la profesora de gimnasia debe elegir a nueve estudiantes de segundo y tercer año para el equipo de voley femenino. Si hay 28 estudiantes en segundo y 25 en tercero, ella puede hacer la elección de* $\binom{53}{9} = 4.431.613.550$ *formas.*

2. *Supongamos ahora que la profesora debe formar cuatro equipos, de 9 integrantes cada uno, con las 36 estudiantes de su curso de primer año. ¿De cuántas formas puede elegir estos equipos?*

   Supongamos que denominamos a los equipos por A, B, C y D. Para armar el equipo A cuenta con $\binom{36}{9}$ formas de elegir. A la vez, por cada una de esas formas, quedan ahora 27 estudiantes y puede elegir de $\binom{27}{9}$ formas para el equipo B. Nuevamente, por cada una de estas opciones, tenemos ahora $\binom{18}{9}$ posibles elecciones para el equipo C y finalmente restan $\binom{9}{9} = 1$ para el equipo D.

   Por la regla del producto, resulta que la profesora puede elegir los cuatro equipos de

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = \frac{36!}{9!27!} \cdot \frac{27!}{9!18!} \cdot \frac{18!}{9!9!} \cdot \frac{9!}{9!0!} = \frac{36!}{9!9!9!9!}$$

   formas.

3. *Otra forma de plantear el caso anterior es la siguiente. Alineamos a los 36 estudiantes:*

1°	2°	$\cdots$	35°	36°
estudiante	estudiante	$\cdots$	estudiante	estudiante

   Para seleccionar los 4 equipos podemos distribuir las letras A, B, C y D en los 36 espacios. O sea, debemos realizar disposiciones de 36 letras donde 4 de ellas se repiten 9 veces. Sabemos que esto se calcula por $\frac{36!}{9!9!9!9!}$.

Cadenas: En teoría de códigos y de lenguaje de computación, se consideran ciertas disposiciones llamadas *cadenas*, formadas a partir de un *alfabeto* que consta de determinados símbolos.
Si el alfabeto consta de los símbolos 0, 1 y 2, entonces 01, 11, 21 y 20 son cuatro de las nueve cadenas de *longitud dos*. Posibles cadenas de entre las 27 de longitud 3 son: 000, 012 o 202.

En general, si n es un entero positivo, por la regla del producto existen 3^n cadenas de longitud n para el alfabeto $0, 1$ y 2. Si $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ es una de estas cadenas, definimos el *peso* de x, que se denota $wt(x) = x_1 + \cdots + x_n$. Por ejemplo $wt(12) = 3$, $wt(210) = 3$ y $wt(101) = 2$.

Entre las 3^{10} cadenas de longitud 10, queremos determinar el número de ellas que tengan peso par. Observemos que esto depende sólo del número de unos que contenga! Completemos entonces la siguiente tabla para realizar el conteo:

Número de unos	**Número de cadenas**	**Explicaciones**
0	2^{10}	Cada posición puede ser ocupada por un 0 o un 2
2	$\binom{10}{2} \cdot 2^8$	Podemos elegir las posiciones de los 2 unos de $\binom{10}{2}$ formas, y por cada una de ellas habrá 2^8 formas de ubicar 0 y 2.
4	$\binom{10}{4} \cdot 2^6$	
6	$\binom{10}{6} \cdot 2^4$	
8	$\binom{10}{8} \cdot 2^2$	
10	$\binom{10}{10}$	

Luego, por la regla de la suma, el número de cadenas de longitud 10 que tienen peso par es:

$$2^{10} + \binom{10}{2} \cdot 2^8 + \binom{10}{4} \cdot 2^6 + \binom{10}{6} \cdot 2^4 + \binom{10}{8} \cdot 2^2 + \binom{10}{10} = \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{2k} \cdot 2^{10-2k}.$$

Ejemplo 11 ***Un error muy escurridizo...***
Supongamos que queremos extraer 5 cartas de una baraja francesa.

- *¿Cuántas selecciones de cartas existen si pedimos que no hayan tréboles en la elección?*

  En este caso, tendremos que pensar en las combinaciones de todas las cartas menos los tréboles ($52 - 13 = 39$)*, esto es* $C(39, 5) = 575.757$*.*

- *¿Cuántas selecciones son posibles si pedimos que en el conjunto de 5 cartas haya AL MENOS un trebol?*

  Claramente, estas opciones son las que no se consideraron en el apartado anterior, luego tenemos
  $$\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2.598.960 - 575.757$$
  posibilidades.

- *Supongamos ahora que, para contestar la misma pregunta del ejercicio anterior, hacemos el siguiente razonamiento:*
  Como queremos tener al menos un trebol en la mano, contamos primero esta posibilidad, que puede hacerse de $\binom{13}{1}$ formas. Una vez que no tenemos que preocuparnos

por tener un trebol, el resto de las posibilidades son $\binom{51}{4}$. Por la regla del producto, la cantidad de opciones son:

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{51}{4} = 13 \cdot 249.900 = 3.248.700.$$

Ups!!! Hay un millón de posibilidades de diferencia respecto de la respuesta dada anteriormente!!

El error está en el razonamiento actual ya que las siguientes opciones:

3T - 5T 3C QD AC y 5T - 3T 3C QD AC

son distintas en este razonamiento, pero son idénticas en lo que de verdad nos concierne. O sea que estamos contando de más...

- *Una forma de contar esta situación de un modo parecido al anterior, PERO CORRECTO, es:*

N° de ♣	***N° de formas de selecc. este n°. de ♣***	***N° de cartas que NO son ♣***	***N° de formas de selec. este n° de NO ♣***
1	$\binom{13}{1}$	4	$\binom{39}{4}$
2	$\binom{13}{2}$	3	$\binom{39}{3}$
3	$\binom{13}{3}$	2	$\binom{39}{2}$
4	$\binom{13}{4}$	4	$\binom{39}{1}$
5	$\binom{13}{5}$	0	$\binom{39}{0}$

La suma de estas posibilidades $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = 2.023.203.$

Veamos ahora algunas propiedades del **número combinatorio** $\binom{n}{r}$.

Proposición 2 *Sean $r \leq n$ dos enteros no negativos. Entonces:*

1. $\binom{n}{1} = n$.
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
3. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ *(Triángulo de Pascal).*

Demos. Ejercicio. ∎

Una aplicación interesante del item 3 de esta proposición es la configuración del Triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Que, resolviendo los números combinatorios nos da:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Estos números aparecen en las sucesivas potencias de la suma de dos números cualesquiera:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= (x+y)^3(x+y) = (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y) \\
&= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)x + (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)y \\
&= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}$$

y, en general vale el siguiente teorema:

Teorema 5 ***(El teorema del binomio de Newton)*** *Sean x, $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}$$

Demos. Haremos la demostración por inducción:

- El caso $n=1$ claramente se verifica.

- Supongamos que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Queremos probar entonces que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (x+y)^n x + (x+y)^n y \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) x + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) y \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0} y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

■

Nota 6 *Acabamos de mostrar que*

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k y^{n-k}$$

donde c_k es la cantidad de sumandos en los cuales aparece k veces la x y $n-k$ veces la y. Si aplicáramos arriba la propiedad distributiva, cada sumando sería una "palabra" de n letras formadas por letras x e y. El coeficiente c_k, corresponde a la cantidad de palabras de n letras en las que hay k letras x y $n-k$ letras y. Luego $c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Corolario 6

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

Ejemplo 12 *El coeficiente de* x^5y^2 *en el desarrollo de* $(x+y)^7$ *es* $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$.
El coeficiente de a^5b^2 *en el desarrollo de* $(2a-3b)^7$ *es* $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$.

Teorema 6 *Sean* $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}_0$ *tales que* $n_i \leq n$, $i = 1, \cdots, r$ *y* $n_1 + \cdots + n_r = n$. *Entonces el coeficiente de* $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ *en el desarrollo de* $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ *es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}.$$

4 Combinaciones con repetición: Distribuciones.

Cuando se permiten las repeticiones, hemos visto que, para n objetos distintos, una disposición de tamaño r de estos objetos puede obtenerse de n^r formas, para un entero $r \geq 0$. Ahora analizaremos el problema comparable para las combinaciones y de nuevo obtendremos un problema relacionado con el anterior cuya solución se sigue de las reglas de conteo anteriores.

Ejemplo 13

1. *Siete amigos van a cenar a un restaurante donde hay 4 menúes fijos entre los cuales pueden elegir. ¿Cuántas compras diferentes son posibles?*
Observemos que nos interesa el número de menúes de cada tipo que se encarguen sin importar el orden en que se encarguen.
Veamos algunas posibles representaciones del pedido (cada número corresponde a un menú):

   a) $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4$
   b) $1, 1, 1, 2, 2, 2, 4$
   c) $1, 2, 2, 4, 4, 4, 4.$

   No podemos decir que estamos haciendo combinaciones de 28 elementos tomados de a 7 ya que entre estos 28 elementos hay muchos repetidos... Tampoco son permutaciones con repeticiones pues no me interesa el orden en que pida los menúes...
Busquemos entonces otra forma de representar los mismos pedidos que antes:

   a) $x\,x\,|\,x\,x\,|\,x\,x\,|\,x$
   b) $x\,x\,x\,|\,x\,x\,x\,|\,|\,x$
   c) $x\,|\,x\,x\,|\,|\,x\,x\,x\,x.$

   donde los x *a la izquierda de la primera barra representan el primer menú, y así sucesivamente.*
En este caso, podemos notar que cada posible pedido es una disposición lineal de letras x *y barras "|". O sea debemos contar la cantidad de formas de disponer 10 letras donde hay 7* x *y 3 barras. O sea, tenemos* $\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3}$ *formas diferentes de encargar el pedido.*

2. *¿De cuántas formas podemos distribuir siete manzanas y seis naranjas entre cuatro niños de modo de que cada uno reciba al menos una manzana?*

   Si cada niño recibe una manzana, en realidad debemos repartir 3 manzanas y 6 naranjas entre los 4 niños.

   $$\textit{Opciones de reparto de manzanas: } m|m|m|,\ mm||m|,\ ||m|mm \to \frac{6!}{3!3!} = 20$$

   $$\textit{Opciones de reparto de naranjas: } nn|n|n|nn,\ nnn||n|nn,\ nnn|n|n|n \to \frac{9!}{6!3!} = 84$$

   Por la regla del producto, podemos distribuir las frutas de $20 \cdot 84$ *formas diferentes.*

En general...

Si X es un conjunto con n elementos distintos, y queremos elegir r pero tenemos la posibilidad de repetir objetos en la elección, estamos considerando todas las disposiciones de r letras x y $n-1$ $|$, que se calcula: $\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$.
Luego, el número de combinaciones de r objetos tomados de X permitiendo **repeticiones** es $C(r+n-1, r)$.

Nota 7 *En el ejemplo 1.* $r = 7$ *y* $n = 4$. *O sea que cuando trabajamos con combinaciones con repeticiones puede ser* $r > n$. *Pero observemos que en la forma de calcularlas, a través del número combinatorio* $n + r - 1 \geq r$ *siempre, como debe ser.*

Ejemplo 14 *Soluciones enteras no negativas de ecuaciones:*

1. *Queremos determinar la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_i \geq 0\ \forall\, i = 1, \cdots, 4.$$

   Podríamos pensar que resolver esa ecuación en el conjunto de los naturales y el cero, es equivalente a disponer 7 elementos entre 4 casilleros (separados por 3 barras!), donde estos elementos son exactamente iguales (a una unidad). Luego tendremos $C(7 + 4 - 1, 7) = \frac{10!}{7!3!} = 120$ *soluciones.*

   Notemos que hubiera sido lo mismo preguntarnos de cuántas formas podemos distribuir 7 canicas en 4 recipientes.

2. *Supongamos que nos preguntamos ahora cuántas soluciones enteras no negativas hay de la inecuación*

   $$x_1 + \cdots + x_6 < 10.$$

   Pero esto es equivalente a preguntarnos cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

   $$x_1 + \cdots + x_6 + x_7 = 10 \quad \textit{con } x_7 > 0.$$

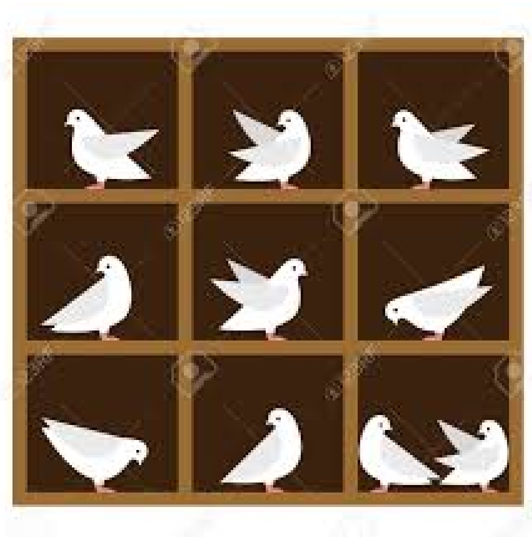
O bien cuántas soluciones no negativas hay de la ecuación

$$y_1 + \cdots + y_6 + y_7 = 9 \quad donde \;\; y_i = x_i,\; i = 1, \cdots, 6 \;\; e \;\; y_7 = x_7 - 1$$

Por lo analizado antes sabemos que las soluciones de esta ecuación son $\frac{(9+6)!}{9!6!} = 5005$.

5 El principio de las casillas, o de las cajas, o del palomar, o de Dirichlet, o...

Para finalizar el capítulo de conteo veremos uno de los principios más reconocidos (y con más nombres populares!), el *principio del palomar.* Les sugerimos que googleen el término, hay infinidad de videos explicativos, algunos más ocurrentes que otros. En el Campus Virtual les dejaremos alguna selección. El principio del palomar se entiende perfectamente a partir del siguiente dibujo:



Si hay 9 casillas y 10 palomas, en al menos una casilla hay más de una paloma.

En general, queremos decir que si hay n objetos para ser ubicados en m lugares, con $n > m$, nos veremos obligados a situar en alguno de los lugares más de un objeto. La formalización de este principio requiere, nuevamente, de la herramienta de las funciones.

Teorema 7 ***(Principio de las casillas.)*** *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$. Entonces no existe ninguna función inyectiva $f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!]$.*

Demos. Definamos el conjunto

$$H := \{n \in \mathbb{N} \colon \; \text{existe un} \;\; m < n, \;\; \text{y existe una función} \;\; f\colon [\![1, n]\!] \to [\![1, m]\!] \;\; \text{inyectiva} \; \}\,.$$

Debemos probar que $H = \emptyset$. Por el contrario, supongamos que esto no ocurre, o sea que H es un subconjunto de los naturales no vacío. Luego, por el principio del buen orden, debe existir un primer elemento de H, digamos $h \in H$. Luego, por definición de H, existe un $m < h$ y una $f\colon [\![1,h]\!] \to [\![1,m]\!]$ que es inyectiva.
Ahora bien, sea $c = f(h)$. Definimos la siguiente función

$$g\colon [\![1,m]\!] \to [\![1,m]\!],\ g(i) = \begin{cases} i & i \neq c, i \neq m \\ m, & i = c \\ c, & i = m \end{cases}.$$

Claramente g es biyectiva. Además para todo $i \in [\![1,h-1]\!]$, $f(i) \neq c$. Luego $g(f(i)) \neq m$. Luego, si definimos la función j en $[\![1,h-1]\!]$ por $j(i) = g(f(i))$, resultará que $j(i) \in [\![1,m-1]\!]$. Hemos encontrado entonces una función inyectiva $j\colon [\![1,h-1]\!] \to [\![1,m-1]\!]$ donde $m-1 < h-1$. Pero entonces $h-1 \in H$! Absurdo!
Este absurdo proviene de suponer que $H \neq \emptyset$. Luego $H = \emptyset$. ∎

En otras palabras, el teorema nos dice expresamente que **si quisiéramos ubicar n objetos en m casillas, entonces tendremos que poner más de un elemento en alguna de las casillas**.

Ejemplo 15

1. *Dadas 13 personas, hay dos que cumplen años el mismo mes.*
2. *En un conjunto A de $m \geq 2$ personas, existen dos personas con el mismo números de amigos (en A).*

   Vamos a convenir que a es amigo de a para todo $a \in A$. Además, notemos que

   $$a \text{ es amigo de } b \Leftrightarrow b \text{ es amigo de } a.$$

   Luego, si $f(x) :=$número de amigos de x en A, *resulta que:*

   - *Si alguien tiene m amigos, entonces nadie puede tener un solo amigo y $f\colon A \to [\![2,m]\!]$.*
   - *Si nadie tiene m amigos, entonces $f\colon A \to [\![1,m-1]\!]$.*

   En ambos casos, resulta que, por el principio de las casillas f no puede ser inyectiva y, por lo tanto existen dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en A.

Corolario 7 *Si $n \neq m$, no existe $f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ biyectiva.*

Corolario 8 *$f\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ es inyectiva sii es sobreyectiva sii es biyectiva.*

References

[1] R.Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria - Una introducción con aplicaciones*, 3^{ra} ED, Addison Wesley Longman, Argentina.

[2] R. Johnsonbaugh, *Matemáticas Discretas*, 4^{ta} ED, Pearson, México.