PRÁCTICA 5 - Relaciones, Funciones y Operaciones

Relaciones

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ y $C = \{3, 4, 7\}$, determinar los siguientes conjuntos, graficarlos como subconjuntos del plano y hallar dominio e imagen:

   a) $A \times B$
   b) $B \times A$
   c) $(A \times A) \cup (B \times C)$
   d) $(A \cup B) \times C$
   e) $(A \times C) \cup (B \times C)$

2. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, $C = (\frac{3}{2}, 3) \subseteq \mathbb{R}$. Determinar gráficamente en $\mathbb{R}^2$:

   a) $A \times C$
   b) $B \times C$
   c) $(A \cup B) \times C$
   d) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   e) $(A \cap C) \times C$

   En cada caso determinar un punto del plano que pertenezca al conjunto dado y uno que no.

3. Sean A, B, C, D subconjuntos no vacíos de un universo U. Demostrar que

   a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
   b) $A \times B \subseteq C \times D$ si y sólo si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

4. a) ¿Para qué conjuntos $A, B \subseteq U$ se verifica $A \times B = B \times A$?
   b) ¿Existe alguna relación entre $P(A \times B)$ y $P(A) \times P(B)$?

5. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ dar ejemplos de:

   a) Tres relaciones binarias no vacías de A en B. Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
   b) Tres relaciones binarias no vacías en A. Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, expresar por extensión el subconjunto R de $A \times B$ definido por:

   a) $(x, y) \in R$ si y sólo si $x+y$ es múltiplo de 3.
   b) xRy si y sólo si $y - x$ es primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión el subconjunto R de $A \times A$ definido por las relaciones siguientes:

   a) $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 6$.
   b) $x\ R\ y$ si $x = y - 1$.

8. Esbozar la gráfica de cada una de las relaciones siguientes de A en B y determinar su imagen.

   a) $\{(x, y)/x < y \leq 0\}$ $\quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$.

b) $\{(2,1),(3,4),(1,4),(2,1),(4,4)\}\quad A=\{1,2,3,4,5\}\quad B=\{1,2,3,4\}$.

c) $\{(x,y)/0\le x<1, y\ge x\}\quad A=\mathbb{R}\quad B=\mathbb{R}$.

d) $\{(x,y)/x\in\mathbb{N}, y=\sqrt{x}\}\quad A=\mathbb{R}\quad B=\mathbb{R}$.

e) $\{(x,y)/x\in\mathbb{N}, y=\sqrt{x}\}\quad A=\mathbb{N}\quad B=\mathbb{R}$.

f) $\{(x,\sqrt{x}), x\in\mathbb{R}\}\quad A=\mathbb{R}\quad B=\mathbb{R}_0^+$.

9. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar $R(1)$, $R(3)$, $R^{-1}(4)$, $R^{-1}(5)$.

10. Con referencia a las relaciones del ejercicio 8, hallar:

    a) En (a), $R((-1,\frac{1}{2}))$, $R([-3,5])$, $R(\mathbb{Z})$, $R^{-1}([-4,2])$, $R^{-1}(\{-7\})$, $R^{-1}(\mathbb{N})$.

    b) En (b), $R(\{5\})$, $R(\{2,3,5\})$, $R()$, $R^{-1}(\{1,3\})$, $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}()$.

    c) En (d), $R((5,6))$, $R([3,5])$, $R((3,5))$, $R^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$, $R^{-1}((-4,4])$, $R^{-1}((1,\frac{12}{10}))$.

11. Sean A, B y C conjuntos, R una relación de A en B y S una relación de B en C. Hallar, en cada caso $S\circ R$ y $R^{-1}\circ S^{-1}$ sus dominios e imágenes.

    a) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ y $C=\{0,1,2\}$.
    $R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$, $S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

    b) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ y $C=\{s,t,u\}$.
    $R=\{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$, $S=\{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$

    c) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{s,t,u,v\}$ y $C=\{1,2,3,4,5\}$.
    $R=\{(a,s),(a,t),(c,v),(d,u)\}$, $S=\{(s,2),(t,1),(t,4),(u,3)\}$

12. Sean $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,3,4\}$ y sean $R=\{(1,3),(1,4),(4,4)\}$ una relación de A en B y $S=\{(1,1),(3,4),(3,2)\}$ una relación de B en A. Hallar:

    a) $S\circ R$

    b) $R\circ S$

    c) $Dom(S\circ R)$

    d) $Dom(R\circ S)$

    e) $Im(S\circ R)$

    f) $Im(R\circ S)$

Relaciones en un conjunto

13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación R definida en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. Para los casos a,b,c,d y e determinar $R(1)$ y $R^{-1}(1)$.

    a) $(x,y)\in R$ si $x=y^2$;

    b) $(x,y)\in R$ si $x>y$;

    c) $(x,y)\in R$ si $x\ge y$;

    d) $(x,y)\in R$ si $x+y$ es par;

    e) $(x,y)\in R$ si $x-y$ es impar;

    f) $(x,y)\in R$ si x^3+y^3 es par.

14. Sea $A=\{1,2,3,4\}$. Proporcionar ejemplos de relaciones en A que tengan las propiedades especificadas en cada caso.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a) Reflexiva, simétrica y no transitiva.
b) Reflexiva, no simétrica y no antisimétrica.
c) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.
d) No reflexiva, simétrica y transitiva.

15. Sean R_1 y R_2 relaciones reflexivas en un conjunto A. Determinar si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta:

a) $R_1 \cup R_2$ es reflexiva;
b) $R_1 \cap R_2$ es reflexiva;
c) $R_1 \circ R_2$ es reflexiva.

16. Repetir el ejercicio anterior cambiando "reflexiva"por simétrica, antisimétrica o transitiva.

17. Sea A un conjunto finito no vacío con $|A| = n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

a) Si R es una relación reflexiva sobra A, entonces $|R| \geq n$.
b) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si R_1 es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces R_2 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).
c) Si R_1 y R_2 son relaciones en A y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si R_2 es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces R_1 es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).

Relaciones de equivalencia

18. Determinar si cada una de las colecciones dadas a continuación es o no una partición del conjunto A dado. Justificar por qué.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 7\}$.
b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{1, 3, 4, 7\}$, $A_2 = \{2, 6\}$, $A_3 = \{5, 8\}$.
c) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.
d) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
e) $A = \mathbb{R}$, $A_n = (n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.
f) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $A_n = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{B\} \cup \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.
g) $A = \mathbb{C}$, $A_n = \{z \in \mathbb{C} : n - 1 < z \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

19. Analizar, en cada caso, si la relación dada en el conjunto A indicado es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente.

a) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
b) $A = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.
c) $A = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ fijo, $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x - y = kp$.
d) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$.
e) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$.
f) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$ o $x + y = 5$.

20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y R la relación de equivalencia en A que induce la partición $A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$. Dar R por extensión y determinar $R(1)$, $R^{-1}(1)$.

21. En $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tenemos la relación de equivalencia

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

a) Determinar $[1]$, $[2]$ y $[3]$.

b) Determinar la partición de A que induce R.

c) Determinar $R(1)$ y $R^{-1}(2)$.

22. Mostrar que para una relación de equivalencia R en A, para cada $x \in A$ $R(x) = R^{-1}(x) = [x]$.

23. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ y $A_3 = \{5\}$, definimos la relación R en A por

$$x \; R \; y \text{ si están en el mismo subconjunto } A_i, \text{ para algún } i \in \{1, 2, 3\}.$$

¿Es R una relación de equivalencia?

24. Para $A = \mathbb{R}^2$ definimos R en A por $(x_1, y_1) \; R \; (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$.

    a) Verificar que R es una relación de equivalencia en A.

    b) Describir geométricamente las clases de equivalencia y la partición de A inducida por R.

25. Definimos la relación R en $\mathbb{N}$ por $x \; R \; y$ si $x/y = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

    a) Verificar que R es una relación de equivalencia.

    b) ¿Cuántas clases distintas encontramos entre $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$?

26. Considerar en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo n, esto es, $x \; R \; y$ si $x - y$ es múltiplo de n.

    a) Mostrar que R es una relación de equivalencia.

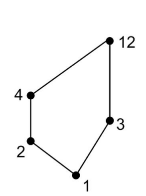
    b) Mostrar que R induce la partición $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \cdots \cup [n-1] = \cup_{i=0}^{n-1} [i]$.

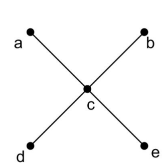
Relaciones de orden

27. Determinar el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$, con $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

28. Sea $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ y R la relación en A dada por $x \; R \; y$ si x divide a y. Mostrar que es una relación de orden y trazar el diagrama de Hasse correspondiente.

29. Los siguientes son diagramas de Hasse correspondientes a un conjunto parcialmente ordenado (A, R). Determinar A y R en cada caso.





30. Definimos en $\mathbb{C}$ la relación $z_1 R z_2$ si $|z_1| \leq |z_2|$. ¿Es una relación de orden? Determinar sus propiedades. Dado z_0 fijo, determinar geométricamente el conjunto $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : z \; R \; z_0\}$ y $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : z_0 \; R \; z\}$.

31. Determinar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos de cada una de las relaciones de los ejercicios 27, 28 y 29.

32. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$, con $A = \mathcal{P}(X)$. Para cada uno de los siguientes subconjuntos B de A, determine el ínfimo y el supremo de B.

a) $B = \{\{1\}, \{2\}\}$;

b) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$;

c) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

d) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

e) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;

f) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

33. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathbb{R}$ por $x\ R\ y$ si $x - y$ es un entero par no negativo. Probar que R es un orden parcial en $\mathbb{Z}$. ¿Es un orden total?

34. Dados dos conjuntos X_1 y X_2, sean R_1 un orden parcial en X_1 y R_2 un orden parcial sobre X_2. Probar que R es un orden parcial en $X_1 \times X_2$, donde

$$(x_1, x_2)\ R\ (y_1, y_2) \text{ si } x_1\ R_1\ y_1 \text{ y } x_2\ R_2\ y_2.$$

35. Probar que $(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado. ¿Lo es $(\mathbb{R}^2, R)$, donde R es la relación definida en el ejercicio 34?

36. Sea (X, R) un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq X$.

    a) Mostrar que $R_B = (B \times B) \cap R$ define un orden parcial en B.

    b) Mostrar que si (X, R) es totalmente ordenado, entonces (B, R_B) es totalmente ordenado.

    c) Si (X, R) no es totalmente ordenado, ¿implica esto que (B, R_B) no es totalmente ordenado?

37. Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que (A, R) es un *retículo* si dados $x, y \in A$ cualesquiera, $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en A.

    a) Mostrar que $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ son retículos.

    b) Mostrar que si $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo.

    c) Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados del ejercicio 29 son retículos.

    d) Probar que todo orden total es un retículo. ¿Es un retículo un conjunto totalmente ordenado?

38. Sean (X_1, R_1), (X_2, R_2) conjuntos parcialmente ordenados y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(X_1 \times X_2, R)$ definido en el ejercicio 34. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

    a) Si x_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_1, R_1) e y_0 es un elemento maximal (o minimal) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un elemento maximal (o minimal) para $(X_1 \times X_2, R)$.

    b) Si x_0 es máximo (o mínimo) para (X_1, R_1) e y_0 es un máximo (o mínimo) para (X_2, R_2) entonces (x_0, y_0) es un máximo (o mínimo) para $(X_1 \times X_2, R)$.

    c) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son totalmente ordenados, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es totalmente ordenado.

    d) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es cota superior (o inferior) de B_1 y b_2 es cota superior (o inferior) de B_2, entonces (b_1, b_2) es cota superior (o inferior) de $B_1 \times B_2$.

    e) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si b_1 es supremo (o ínfimo) de B_1 y b_2 es supremo (o ínfimo) de B_2, entonces (b_1, b_2) es supremo (o ínfimo) de $B_1 \times B_2$.

    f) Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son retículos, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es un retículo.

39. Sea (A, R) un conjunto totalmente ordenado. Se dice que (A, R) está *bien ordenado* si para todo $B \subseteq A$, con $B \neq \emptyset$, el conjunto totalmente ordenado (B, R_B) definido en el ejercicio 36 tiene un elemento mínimo. Determinar si los siguientes conjuntos totalmente ordenados están bien ordenados.

a) $(\mathbb{N}, \leq)$;

b) $(\mathbb{Z}, \leq)$;

c) $(\mathbb{Q}, \leq)$;

d) $(P, \leq)$, donde P es el conjunto de todos los primos;

e) $(A, \leq)$, donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$;

f) $(A, \leq)$, donde A es un subconjunto no vacío finito de $\mathbb{Z}$.

Funciones

1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso de que lo sea, determinar su imagen:

   a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{Z};\, y = x^2 + 7\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

   b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R};\, y^2 = x\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R};\, y = 3x + 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{Q};\, x^2 + y^2 = 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Sea $f : A \to B$ la función dada por

   $$f = \{(1, 2), (2, 6), (3, 6), (4, 8), (5, 6), (6, 8), (7, 12)\}.$$

   Determinar la preimagen de B_1 mediante f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $B_1 = \{2\}$

   b) $B_1 = \{6\}$

   c) $B_1 = \{6, 8\}$

   d) $B_1 = \{6, 8, 10\}$

   e) $B_1 = \{6, 8, 10, 12\}$

   f) $B_1 = \{10, 12\}$

3. Para cada una de las siguientes funciones, determinar $Im(f)$, $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ para los subconjuntos A y B indicados:

   a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{7, 8, 9\}$.

   b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - x$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-5, -4, -3\}$.

   c) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $B = [-1, 0]$.

   d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x$, $A = \{2^{-n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [1, +\infty)$, $B = [4, 9]$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} x + 7, & x \leq 0 \\ -2x + 5, & 0 < x < 3 \\ x - 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

   Determinar la preimagen mediante f de cada uno de los siguientes intervalos

   a) $[-5, -1]$, *b*) $[-5, 0]$, *c*) $[-2, 4]$, *d*) $(5, 10)$, *e*) $[11, 17)$.

5. Dar un ejemplo de una función $f : A \to B$ y de dos subconjuntos A_1, A_2 de A de modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

6. Dar, en cada caso, un ejemplo de conjuntos finitos A y B con $|A|, |B| \geq 4$ y una función f tal que

   a) f no sea inyectiva ni sobre.

   b) f sea inyectiva pero no sobre.

   c) f sea sobre pero no inyectiva.

   d) f sea sobre e inyectiva.

7. Sea $f : A \to B$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq A$. Demostrar que si f es inyectiva, entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

8. Determinar si cada una de las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de que no sea sobre, determinar su imagen.

   a) $f(x) = x + 7$,
   c) $f(x) = 2x - 3$,
   e) $f(x) = x^2 + x$,
   b) $f(x) = x^2$,
   d) $f(x) = -x + 5$,
   f) $f(x) = x^3$.

9. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Se denomina *restricción* de f a A_1 a la función $f_{|A_1} : A_1 \to B$ definida por $f_{|A_1}(x) = f(x)$ para cada $x \in A_1$.

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función parte entera. Probar que $f_{|\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$ donde $1_{\mathbb{Z}}$ es la función identidad en $\mathbb{Z}$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(2\pi x)$. Probar que $f_{|\mathbb{Z}}$ es la función constante igual a 1.

10. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente su respuesta.

    a) Si f es inyectiva, entonces $f_{|A_1}$ es inyectiva.

    b) Si $f_{|A_1}$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

    c) Si f es sobre, entonces $f_{|A_1}$ es sobre.

    d) Si $f_{|A_1}$ es sobre, entonces f es sobre.

11. Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son funciones, definimos $h : A \times C \to B \times D$ por $h(a, c) = (f(a), g(c))$. Demostrar que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.

12. Sean $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ y

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

    Determinar

    a) $f \circ g$,
    b) $g \circ f$,
    c) $g \circ h$,
    d) $f \circ (g \circ h)$,
    e) $(f \circ g) \circ h$.

13. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = 2n$. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \to \mathbb{N}$ es la función dada por $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$, encontrar $g \circ f$.

14. Sean S y T conjuntos (fijos) en el universo $\mathcal{U}$ dado. Se define

$$g : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ por } g(A) = T \cap (S \cup A).$$

    Demostrar que $g \circ g = g$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

15. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar si f es invertible y, si lo es, determinar f^{-1}

    a) $f = \{(x, y) : 2x + 3y = 7\}$,
    b) $f = \{(x, y) : y = x^3\}$,
    c) $f = \{(x, y) : y = x^4 + x\}$.

16. Sean $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ g(x) = x^2$. Demostrar que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. Es $g = f^{-1}$?

17. Demostrar que $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = \sqrt{x}$ es invertible y hallar su inversa.

18. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, \\ -2x, & x \leq 0. \end{cases}$$
    Demostrar que f es biyectiva y hallar su inversa.

19. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demostrar que:

    a) $g \circ f : A \to C$ sobre $\Rightarrow$ g sobre.
    b) $g \circ f : A \to C$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva.

Operaciones

1. Para $A = \{a, b, c\}$, sea $f : A \times A \to A$ la operación binaria cerrada dada en la siguiente tabla:

f	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

   Dé un ejemplo para mostrar que f no es asociativa.

2. Defina la operación binaria cerrada $h : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dada por $h(a, b) = \dfrac{a}{b}$.

    a) Muestre que h no es conmutativa ni asociativa.
    b) Determine si h tiene algún elemento neutro.

3. Cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una operación binaria cerrada en $\mathbb{Z}$. Determine los casos en los que f es conmutativa o asociativa.

    a) $f(x, y) = x + y - xy$
    b) $f(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$, el máximo entre x e y
    c) $f(x, y) = x^{|y|}$
    d) $f(x, y) = x + y - 3$

4. Determine y justifique cuáles de las operaciones binarias cerradas del ejercicio anterior tienen elemento neutro.

5. Para $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, sean $f, g : A \times A \to A$ las operaciones binarias cerradas dadas por $f(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$ y $g(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a) Determine si f tiene elemento neutro.

b) Determine si g tiene elemento neutro.

6. Sean $A = B = \mathbb{R}$. Determine $\pi_A(D)$ y $\pi_B(D)$ para cada uno de los conjuntos siguientes $D \subseteq A \times B$.

   a) $D = \{(x, y) \,:\, x = y^2\}$

   b) $D = \{(x, y) \,:\, y = \mathsf{sen}(x)\}$

   c) $D = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$