PRÁCTICA 3 COMPLEMENTARIA - Límite y Continuidad

Límite

1. -a- Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   I. $|x-3|<1 \Rightarrow |x+3|<7.$ II. $|x-2|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|}<1.$

   -b- Interpretar geométricamente los resultados obtenidos en los ítem anteriores.

2. -a- En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\epsilon,$$

   para los valores de a, c y ϵ dados en cada caso:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ a=2,\ c=\frac{1}{2},\ \epsilon=0{,}0001.$$

   -b- Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\leq 1,\\ \dfrac{x}{2}+1 & x>1,\end{cases}$$

   -a- graficar f y comprobar a partir de la gráfica la siguiente afirmación:
   Dado $\epsilon=1$, para todo $0<\delta<1$ se verifica que $0<|x-1|<\delta \ \Rightarrow |f(x)-1|<\epsilon.$

   -b- Del resultado de la parte -a-, ¿se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$?

4. Determinar el dominio y la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$. A partir de la gráfica indicar el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

   I. $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2.$

   II. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6.$

   III. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ para $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 1,\\ 2 & x=1.\end{cases}$

6. Probar que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ si y sólo si $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h)=L.$

Cálculo de límites

7. Calcular el siguiente límite, indicando las propiedades aplicadas.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+x\right)\left(x^3-1\right).$$

8. Sabiendo que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=-3,\qquad \lim_{x\to a} g(x)=0,\qquad \lim_{x\to a} h(x)=6$$

   determinar, si existen, los siguientes límites:

.I. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$. .II. $\lim_{x\to a} \frac{2f(x)}{g(x)+3h(x)}$. .III. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

9. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim_{x\to -1}(x^2+3x+2)$.

-b- $\lim_{x\to 1}\ln(3x-2)$.

-c- $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

-d- $\lim_{x\to -3}\frac{3x+4}{x+1}$.

-e- $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$.

-f- $\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\cos(\pi x)}{x^2-25}$.

-g- $\lim_{u\to 3}\frac{15-5u}{2u^2-4u-6}$.

-h- $\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$.

-i- $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$.

-j- $\lim_{x\to \pi}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

-k- $\lim_{x\to 2}\left(4x+x^3\right)^{\frac{3}{2}}$.

-l- $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$.

10. -a- Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

-b- Dar un ejemplo en que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no exista $\lim_{x\to 0} f(x)$.

11. Calcular los siguientes límites.

-a- $\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t)\sec(2t)}{3t}$. -b- $\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$. -c- $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)\cot(3x)$.

12. Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

-a- $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$. -b- $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1} = -\infty$.

13. Calcular los siguientes límites laterales:

-a- $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}$.

-b- $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}\tan(x)$.

-c- $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}(3x)\cot(x)$.

-d- $\lim_{x\to -2^-}(x+4)\frac{|x+2|}{x+2}$.

-e- $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5x^2+11x+6}}{x}$.

-f- $\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{2x}{5x+1}\right)\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$.

14. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x^2(x+3)}$$

15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Utilizar las definiciones formales para verificar los resultados. En base a lo obtenido, ¿qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justificar la respuesta.

16. Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2-x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}.$$

17. Calcular, para cada función racional enunciada, el límite cuando $x\to +\infty$ y el límite cuando $x\to -\infty$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-a- $\dfrac{2x-3}{5x+7}$. -b- $\dfrac{2x^3+7}{x^2+x+7}$. -c- $\dfrac{x+1}{x^2+3}$.

18. Calcular los siguientes límites en el infinito.

-a- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+62x-4}{5x^2+13}\right)^3$. -c- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2+3x}\right)^5$.

-b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

19. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

-a- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+5}$. -c- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$.

-b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}^3 x}{5x+6}$. -d- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\operatorname{sen}^2 x}{(x+\operatorname{sen}x)^2}$.

20. Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

-a- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. -b- $f(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-1}$.

I Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

II Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

Continuidad

21. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

-a- $f_1(x)=\begin{cases}2x+1 & x<2\\ 1+x & x>2\end{cases}$, $(x_0=2)$. -c- $f_3(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\le 3\\ 2x+1 & x>3\end{cases}$, $(x_0=3)$.

-b- $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\ne 3\\ -5 & x=3\end{cases}$, $(x_0=3)$.

22. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

-a- $f_1(x)=\operatorname{mant}(x)=x-[x]$. -c- $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-1} & x<1, x\ne 1\\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & x>1\end{cases}$.

-b- $f_2(x)=\begin{cases}1-x & x\le 2\\ x^2-2x & x>2\end{cases}$. -d- $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} & |x|\ne 2\\ 3 & |x|=2\end{cases}$.

23. Sea f una función continua en a y $f(a)=0$. Demostrar que si $\alpha\ne 0$, entonces $f+\alpha$ es distinto de 0 en algún intervalo abierto que contiene a a.

24. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h=f\circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-a- $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x + 1$.

-b- $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

-c- $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

Teoremas de valor intermedio

25. Sea la función $f(x) = \tan(x)$.

-a- Probar que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$.

-b- A partir de la gráfica de la función f, analizar si existe $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

-c- Explicar los motivos por los cuales lo obtenido en los ítems anteriores no contradice al teorema de Bolzano.

26. Una raíz real de una ecuación se dice aislada si se tiene un intervalo $[a, b]$ tal que contiene a dicha raíz y ninguna otra. Con ayuda del Teorema de Bolzano, mostrar que las cuatro raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones son aisladas.

$$(i)\ 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0, \qquad (ii)\ 2x^4 - 14x^2 = -14x + 1.$$

27. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = -x + 1.$$

28. Un monje tibetano sale del monasterio a las $7:00$ a.m. y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las $7:00$ p.m. A la mañana siguiente baja de la cima a las $7:00$ a.m., y siguiendo el mismo camino arriba al monasterio a las $7:00$ p.m. Utilizando el teorema de los valores intermedios, demostrar que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.

29. Demostrar que existe un número positivo c tal que $c^2 = 2$. (Con esto se demuestra la existencia del número $\sqrt{2}$).

30. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

-a- $f_1(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$.

-b- $f_2 = 2x^3 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119