Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

**ANÁLISIS MATEMÁTICO II**

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2020

## Práctica 4: Métodos de integración.

---

1. Encuentre $f$ sabiendo que:

$$a)\ f'(x) = 6x^2 + 2x \text{ y } f(1) = 0, \qquad b)\ f'(x) = 3e^x - 2 \text{ y } f(0) = 4,$$

$$c)\ f''(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(\pi) = 1 \text{ y } f(0) = -2, \quad d\ f''(x) = e^{2x} - x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 0.$$

2. Resuelva las siguientes integrales

$$a)\ \int \frac{t^2+2}{t^2+1}\, dt, \qquad b)\ \int \sqrt{y\sqrt{y}}\, dy, \qquad c)\ \int (e^z - e^{-z})^2\, dz,$$

$$d)\ \int (5^x - x^5)\, dx, \qquad e)\ \int (\sqrt{x} - 3)(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x})\, dx, \qquad f)\ \int \left(\frac{5}{3t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt.$$

3. Halle las primitivas de las siguientes funciones:

$$a)\ f_1(x) = x(x^2-1)^{10}, \qquad b)\ f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}, \qquad c)\ f_3(x) = \frac{(ln\ x)^2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$d)\ f_4(x) = \sec(ax)\tan(ax), \qquad e)\ f_5(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \qquad f)\ f_6(x) = \sqrt{e^x - 1},$$

$$g)\ f_7(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}, \qquad h)\ f_8(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}, \qquad i)\ f_9(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2},$$

$$j)\ f_{10}(x) = -\frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}}, \qquad k)\ f_{11}(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad l)\ f_{12}(x) = x^2\ e^{-2x}$$

$$m)\ f_{13}(x) = x^2\ \operatorname{sen}(2x), \qquad n)\ f_{14}(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad o)\ f_{15}(x) = x\ \operatorname{sen} x\ \cos x$$

*p)* $f_{16}(x) = e^{-x}\cos(3x)$, *q)* $f_{17}(x) = x^2\ \ln x$ *r)* $f_{18}(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

*s)* $f_{19}(x) = \arctan x$, *t)* $f_{20}(x) = x\ \arctan x$, *u)* $f_{21}(x) = \sec^2(3x)$,

*v)* $f_{22}(x) = \sec x\ \tan x\ \sqrt{1+\sec x}$, *w)* $f_{23}(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, *x)* $f_{24}(x) = \operatorname{sen}^3 x - \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Aplicando el método de partes, deduzca las siguientes fórmulas de recurrencia:

   *a)* $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + k.$

   *b)* $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1} x\ \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \qquad \text{si } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

   *c)* $\int cos^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + k.$

   *d)* $\int cos^n x\,dx = \dfrac{\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad \text{si } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

5. Halle las primitivas de cada una de las siguientes fracciones simples:

   *a)* $l(x) = \dfrac{1}{(9x^2+1)^2}$, *b)* $m(x) = \dfrac{4x-3}{3x^2+3x+1}$, *c)* $n(x) = \dfrac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^2}$

   *d)* $o(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4-1}$, *p)* $m(x) = \dfrac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}$, *f)* $q(x) = \dfrac{5x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2}$.

6. Halle las primitivas de las siguientes funciones:

   *a)* $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$, *b)* $g(x) = \dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}$, *c)* $h(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$,

   *d)* $l(x) = \dfrac{x^2}{(x+4)^{\frac{3}{2}}}$, *e)* $m(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{x+1}$ *f)* $n(x) = \dfrac{2x+3\sqrt{x+1}}{2x-3\sqrt{x+1}}$.

7. Halle las primitivas de las siguientes funciones racionales de $\sin(x)$ y $\cos(x)$:

   *a)* $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, *b)* $g(x) = \dfrac{1}{4\sin(x)+3\cos(x)}$,

   *c)* $l(x) = \dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}$, *d)* $m(x) = \dfrac{(\cos(x))^3}{1+(\cos(x))^2}$.

8. Halle el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{1} 2x\, sen(1-x^2)dx$.

b) $\int_0^{\pi} \tan^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}} dr$.

d) $\int_{-\pi/3}^{0} \sec(x)\tan(x)dx$.

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{3sen(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3sen^2(x)}} dx$.

f) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{2\sec(\theta)}} d\theta$.

9. Demuestre que
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(a+b-x)\ dx.$$

10. Demuestre que el área de un círculo de radio $r$ es $\pi r^2$. Para ello, use que $\pi$ es el área del círculo unidad.

11. Demuestre que
$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}\ dx = \pi.$$

12. Existen cuerpos geométricos cuyo volumen es expresable mediante integrales. El más sencillo de ellos es el volumen de revolución, obtenido al hacer girar alrededor del eje $x$ la región que queda por encima del intervalo $[a,b]$ y por debajo de la gráfica de una función $f \geq 0$, considerando el plano inmerso en el espacio tridimensional.

    Este volumen viene dado por $V = \pi\ \int_a^b\ f(x)^2\ dx$.

    Lee la prueba en el apéndice 2 del capítulo 13 del libro.

    Si quisiéramos la superficie de esa figura entonces esta sería dada por la fórmula:
$$2\pi \int_a^b\ f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

    a) Halle el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje horizontal el área delimitada por las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

    b) Al hacer girar la elipse formada por todos los puntos $(x,y)$ que satisfacen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje horizontal se obtiene un "elipsoide de revolución". Halle el volumen del sólido encerrado.

    c) ¿Puede plantear la superficie de ese sólido? ¿Será posible hallarla?

    d) Halle el volumen del "toro": es el objeto que se obtiene al hacer girar el círculo $(x-a)^2+y^2=b^2$ con $a > b$ alrededor del eje vertical.

    e) Halle la superficie del toro.

13. Asuma que la aceleración de la gravedad en la superficie está definida por $9,80665 m/s^2$.

    Puesto que la aceleración mide cómo varía la velocidad de un objeto dado y que la velocidad mide la variación de la distancia, determine en qué instante caerá un cuerpo de masa 1 que es arrojado verticalmente con una velocidad inicial de $5m/s$.