4. Continuidad

4.1. Definición de Continuidad

La mayor parte de las funciones con las que hemos venido trabajando, tienen una importante propiedad, que es continuidad. Intuitivamente, la continuidad de una función significa que pequeños cambios en x ocasionan variaciones pequeñas entre sus imágenes, y no, por ejemplo, un salto brusco de su valor. La gráfica que la representa "no se rompe".
Hemos visto que para una función f y un punto a, la idea de límite de la función en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden ser diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.
Si existe el límite finito de una función en un punto a, existen el valor de la función en el punto, y además ambos valores coinciden, se dice que la función es *continua en el punto.*

Definición (Continuidad en un punto y en un conjunto)**.** Sean f una función y a un número real, entonces, se dice que la función f es continua en el punto a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si la función no es continua en el punto a, allí se dice discontinua.
Si en todo punto de un conjunto A la función es continua, se dice que es continua en el conjunto A.

Como la definición de continuidad utiliza el concepto de límite en un punto, puede entonces darse la definición utilizando entornos de a y $f(a)$.
Decimos que f es continua en a, si y solamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon\ .$$

Respecto de la definición de límite, se han realizado dos modificaciones:

1. *Se ha reemplazado el valor ℓ por el número $f(a)$ y*
2. *la condición se debe verificar en el entorno completo, ya que f debe estar definida en el punto a, y en dicho punto vale, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$|f(a)-f(a)| = 0 < \varepsilon\ .$$

Definición (Continuidad lateral)**.** Una función f se dice continua por izquierda (respectivamente, por derecha) en el punto a, si existe el valor de $f(a)$, el límite lateral por izquierda (respectivamente, por derecha) de la función allí, y ambos coinciden.
Cuando se trata de un intervalo cerrado (o semiabierto), la continuidad en los extremos se considera continuidad lateral.

Definición (Función continua)**.** Se dice que una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo.

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua.
2. Los polinomios son funciones continuas, y las funciones racionales son continuas.
3. Las funciones seno y coseno, y las demás funciones trigonométricas, son continuas.
4. La función $f(x) = |x|$ es continua.
5. la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es continua en todo $x \neq 0$ y no es continua en el punto $x = 0$. Lo mismo si la función se define de cualquier manera en el punto 0.
6. La función $f(x) = [x]$, parte entera de x, es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, y no es continua en $\mathbb{Z}$. En los números enteros, la función es continua por derecha.

4.2. Tipos de Discontinuidades

Una función f puede ser discontinua en a, sucede si no se cumple una cualquiera de las condiciones de la definición. Es decir, puede ser discontinua en a si no existe $f(a)$, si no existe el límite cuando $x \to a$, o porque ambos existen pero son distintos.

Discontinuidades Evitables

Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto, si existe el límite (finito) de la función allí, pero no coincide con el valor de la función en el punto, que puede incluso no estar definido.

Si f presenta una discontinuidad evitable en a, y allí tiene límite ℓ, definiendo una nueva función g de manera que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases},$$

se obtiene una función continua en a, que coincide con f en los demás puntos.

Ejemplo (Discontinuidad evitable). Consideremos la función (ver Figura 7)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

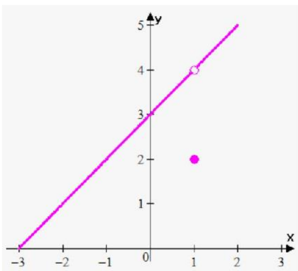


Figura 7: Figura 7

Esta función no es continua en el punto 1, ya que, existe

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4 \ ,$$

pero este valor es diferente de $f(1) = 2$.
En este caso, puede considerarse una nueva función g, definida por

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ /$$

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases} \ = \ x+3 \ , \quad \text{para todo } x \ ,$$

que, por construcción es una función que es continua en el punto, ya que fue hecha para que la función tenga en el punto 1 el mismo valor que su límite.

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito
En el caso que en un punto a una función posea ambos límites laterales (finitos), pero ellos no coincidan, se dice que la función tiene una discontinuidad de salto finito.
En un punto donde una función presenta una discontiuidad de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito). La función (ver Figura 8)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases} \ ,$$

presenta una discontinuidad de salto finito en el punto $a = 2$, ya que existen pero son diferentes,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \ .$$

En este caso, se dice que f tiene una discontinuidad de salto 1 (distancia entre sus límites laterales).

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito). La función parte entera, $[x]$. (ver Figura 9), parte entera de x, tiene discontinuidades de salto uno (finito) en todo número entero; en efecto, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\to n^-} [x] = n-1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to n^+} [x] = n \ .$$

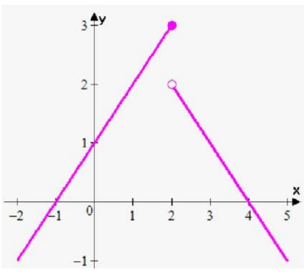


Figura 8

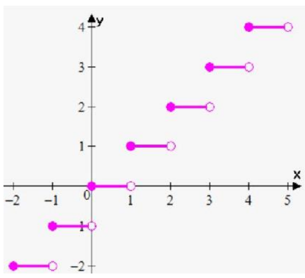


Figura 9

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito
Una función tiene una discontinuidad de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto infinito). La función (ver Figura 10) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en el punto $a = 1$.

Ejemplo. La función de la Figura 11 presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto 0, discontinuidades evitables en los puntos 2 y 6 y una discontinuidad de salto finito en el punto 4.

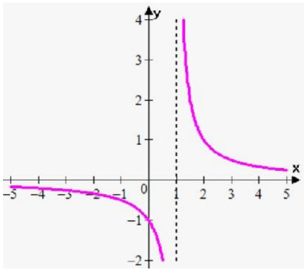


Figura 10

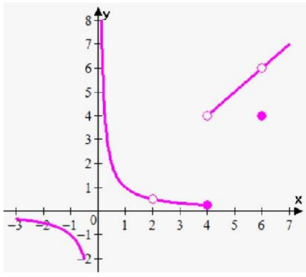


Figura 11

Discontinuidades Esenciales

Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial). La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.
En efecto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo a racional, en cualquier entorno $E(a, \delta)$ existen números irracionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \ ,$$

mientras que para todo a irracional, en $E(a, \delta)$ existen números racionales, en los que

$$|f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \ .$$

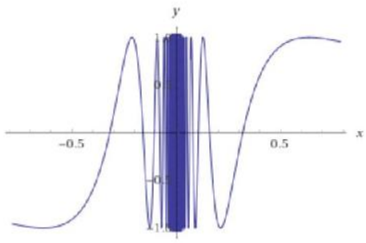
Como en ningún punto la función es continua por no verificarse la condición de límites, siquiera laterales, la función tiene discontinuidades esenciales en todos los puntos.

Ejercicio. Con la función f del ejemplo anterior, mostrar que la función

$$g(x) = x \cdot f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \ ,$$

es discontinua en todo $x \neq 0$, pero continua en $x = 0$.
Para la continuidad en 0, recordar el teorema 6, considerar las funciones $f(x)$ acotado en un entorno reducido de cero y la función $h(x) = x$ con límite cero, y para la discontinuidad en $\mathbb{R} - \{0\}$ renegar un poco.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



Otros ejemplos clásicos †

1) La función

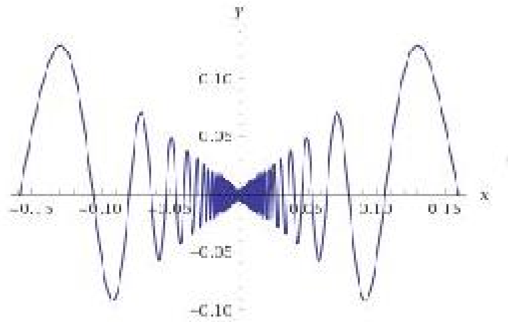
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ ,$$

cuya gráfica se muestra en la figura, tiene una discontinuidad esencial en el punto $a = 0$ pero es continua en todo punto $a \neq 0$.. En efecto, la función f en $a = 0$ no tiene límite finito ni infinitos (pues está acotada). Por otro lado, es continua en todo punto distinto de cero, consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.

2) La función

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \ ,$$

cuya gráfica se muestra en la figura, es continua en todo $\mathbb{R}$. Afirmamos que es continua en $x = 0$,



ya que, por el teorema 6,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0) \ .$$

La continuidad en los demás puntos será consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.

4.3. Algunos Teoremas de Funciones Continuas

Recordando que si una función es continua en un punto, tiene límite en ese punto y coincide con su valor allí, adaptamos dos resultados de la Subsección 1.7 para el caso de funciones continuas.

Proposición 11. *Si f es una función continua en a, entonces existe un entorno de a en el cual f está acotada. Esto es, existen $\delta > 0$ y $M > 0$,*

$$x \in E(a, \delta) \ \Rightarrow \ |f(x)| \leq M \ .$$

Proposición 12. *Si f es una función continua en a y k es un número tal que $f(a) > k$ (respect. $f(a) < k$), entonces existe un entorno de a en el cual f asume valores todos mayores a k (respect. asume valores todos menores a k). Esto es, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in E(a,\delta) \ \Rightarrow \ f(x) > k \ \ (\text{respect. } f(x) < k).$$

Corolario 3 (Principio de conservación del signo)**.** *Si f es una función continua en a, tal que $f(a) > 0$ (respect. $f(a) < 0$), entonces existe un entorno de a en el cual la función f se mantiene positiva (respect. negativa).*

Corolario 4. *Si f es una función continua en a tal que, en cualquier entorno de a, la función f asume tanto valores positivos como negativos, entonces $f(a) = 0$.*

Demostración: Si suponemos, $f(a) > 0$, existiría un entorno de a donde la función es siempre positiva, que contradice la hipótesis. Luego, $f(a) \leq 0$. Si ahora suponemos que $f(a) < 0$, habría un entorno donde la función es siempre negativa, que también contradice la hipótesis. Concluimos que, necesariamente, como la función efectivamente está definida en a (pues es continua en a), debe ser $f(a) = 0$. *Q.E.D.*

Álgebra de Funciones Continuas y Continuidad de la Función Compuesta

Utilizando los resultados de la Subsección 1.8, correspondientes al álgebra de límites finitos, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 11 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean f y g dos funciones continuas en a, entonces son continuas en el punto a las funciones $f \pm g$, $c \cdot f$ (si $c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.*

Demostración: Solamente probaremos la continuidad de la función suma, que dan como ejercicio las demás. Como f y g son continuas en a, existen $f(a)$ y $g(a)$, luego existe $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$. Además existen los límites de f y g en a y vale $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$. *Q.E.D.*

Teorema 12 (Límite de la función compuesta)**.** *Sean f y g dos funciones tales que $\mathrm{Rec}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Supongamos que existe el límite*

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell \ ,$$

y que además f es continua en ℓ. Entonces existe el límite

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = f(\ell) \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |(f\circ g)(x) - f(\ell)| = |f(g(x)) - f(\ell)| < \varepsilon \ .$$

Como f es continua en ℓ, dado el valor ε propuesto, existe un valor ρ, para el cual

$$|z-\ell| < \rho \ \Rightarrow \ |f(z) - f(\ell)| < \varepsilon \ . \tag{1}$$

Ahora, como $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ *, dado el valor* $\rho > 0$*, existe* $\delta > 0$*, que hace válido*

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |g(x)-\ell| < \rho \ . \tag{2}$$

Combinando las implicaciones (??) y (??),

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \;&\Rightarrow\; |g(x)-\ell| < \rho \\ &\Rightarrow\; |f(g(x))-f(\ell)| < \varepsilon \ , \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. *Q.E.D.*

Corolario 5 (Continuidad de la función compuesta). *Con f, g y a como antes, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es una función continua en a.*

Nota. Recordemos que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, más aún para todo $a>0$ es $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Si g es una función no negativa tal que existe $\lim_{x\to a} g(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{L}$.

Ejemplo. 1) Si $f(x) = \frac{1}{x-4}$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f\circ g)(x) = \frac{1}{x^2-4}$ es continua en todo $a \neq \pm 2$.
2) Las funciones $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ y $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ son continuas en todo $a \neq 0$.

Ceros de Funciones Continuas y Teorema de Bolzano

Teorema 13 (Teorema de Bolzano). *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$ (i.e. $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo). Entonces, existe un punto $\xi \in (a,b)$, donde $f(\xi) = 0$.*

Nota. Para la intuición geométrica, el resultado es trivial, pues afirma que una curva continua (la gráfica de una función continua) que comienza debajo del eje x y termina por encima de él (o al revés), debe intersecarlo, al menos una vez.
Para la prueba de este importante teorema, pueden consultar la bibliografía sugerida, donde también encontrarán muchas aplicaciones del teorema que permiten encontrar ceros de funciones, por ejemplo el **El Método de Bisección**; es uno de los procedimientos más sencillos para aproximar (o encontrar) las raíces de una función real. Esto es, resolver ecuaciones del tipo

$$f(x) = 0 \ ,$$

y se basa en la prueba del Teorema de Bolzano.
Allí, dada una función continua en un intervalo, que asuma valores de diferente signo en los extremos, sucesivamente se calculan los valores de dos sucesiones a_n y b_n que convergen a un cero de la función f. Conocidos a_n y b_n, se calcula el valor del punto medio $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, y se tendrá que el valor c_{n+1} aproxima al valor ξ de un cero, con cota

$$|c_{n+1} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \ .$$

O sea, dada una tolerancia ε, buscamos n para el cual $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$, encontraremos un valor c_{n+1} a distancia de ξ menor a ε.
Observemos que este cero de f puede no ser único. El método de bisección aproxima (o encuentra) un cero, dado un par inicial a, b. Sin embargo, utilizando otros puntos a y b, pueden encontrarse ceros diferentes, si los hubiera. En la figura se muestran algunas situaciones.

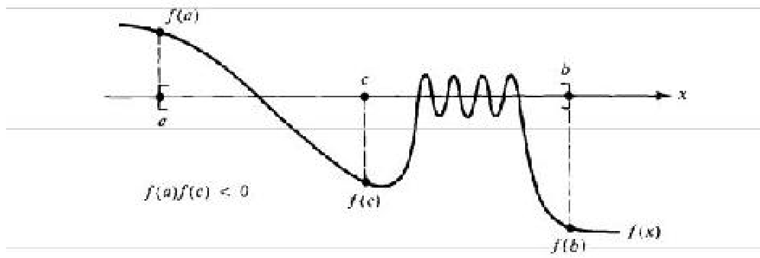


Figure 3.1(a) Bisection method selects left subinterval

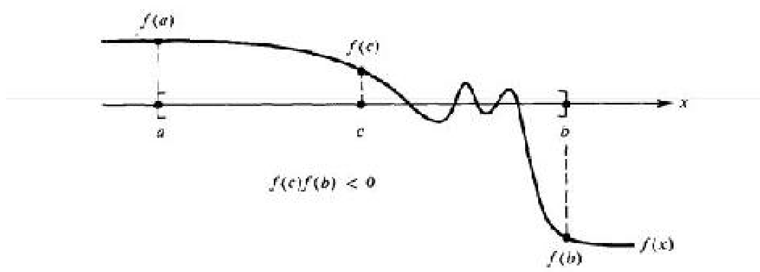


Figure 3.1(b) Bisection method selects right subinterval

Figura 8: Ceros de una función

Teorema 14 (Propiedad de los Valores Intermedios)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$, donde $f(a) \neq f(b)$ y k un valor comprendido estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe un punto $\xi \in (a,b)$ para el cual resulta $f(\xi) = k$.*

Demostración: Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$, supongamos que $f(a) < f(b)$ (si $f(b) < f(a)$ el razonamiento es análogo) y un número real k tal que $f(a) < k < f(b)$. Definimos la función sobre el intervalo $[a,b]$ por la ley $g(x) = f(x) - k$, se tiene

- *g es continua en $[a,b]$, por ser resta de funciones continuas.*
- *$g(a) = f(a) - k < 0$,*
- *$g(b) = f(b) - k > 0$.*

Tenemos entonces que g verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano, entonces existe un valor $\xi \in (a,b)$, para el cual $0 = g(\xi) = f(\xi) - k$, en consecuencia $f(\xi) = k$. Q.E.D.

Nota. En la Unidad 2 hemos hecho un "acto de fé" al aceptar que, por ejemplo, el recorrido de las funciones potencias $f(x) = x^m$, con m impar es $\mathbb{R}$ y con m par es $\mathbb{R}_0^+$.
En realidad, en ese momento, sólo podíamos afirmar que $Rec(f) \subseteq \mathbb{R}$, o $Rec(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, pero no sabíamos si efectivamente, todo número real (real positivo) era imagen de algún otro por la función potencia. Ahora podemos hacer eso utilizando el Teorema de los valores intermedios, ya que hemos probado que las potencias son funciones continuas.
Por ejemplo, si $m = 2$, dado $y \in \mathbb{R}_0^+$, si $0 < y < 1$ por PVI existe $0 < x < 1$ tal que $f(x) = y$; si $y \geq 1$, por Propiedad Arquimedeana, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $y < n$. Pero entonces $f(1) = 1 \leq y < n \leq n^2 = f(n)$.

Aplicando PVI, existe $1 \leq x < n$, tal que $f(x) = y$.

Con las funciones trigonométricas pasa algo similar. En su momento, para la función seno, sólo fuimos capaces de afirmar $Rec(f) \subseteq [-1,1]$ (si no se ha hecho aún con argumentos geométricos la otra inclusión).
Ahora, por PVI (ya conocemos que la función seno es continua) sabemos que dado $y \in [-1,1]$, existe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, (e infinitos otros x fuera de ese intervalo) tal que $f(x) = y$. Afirmación que utilizamos para definir la función arcoseno.
Razonamientos análogos pueden realizarse con los recorridos de las funciones coseno, tangente, y las funciones homográficas.

Continuidad de la Función Inversa

Hemos visto que una función biyectiva admite una función inversa, y que ésta también es biyectiva. Recordemos que una función f definida sobre un conjunto A se dice creciente, si para todos $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \ .$$

Una función monótona es inyectiva, y luego, al restringir el codominio de ser necesario, será biyectiva y existirá la función inversa.

Teorema 15 (Continuidad de la función inversa). *Si f es creciente y continua en un intervalo $[a,b]$, entonces*

1. *existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$,*
2. *f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ y*
3. *f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.*

Demostración:

1. *Como ya observamos, f creciente, implica f inyectiva, o biyectiva restringiendo el codominio. Ahora bien, $Rec(f) = [f(a), f(b)]$, ya que, por PVI, como f es continua sobre $[a,b]$, dado un $z \in [f(a), f(b)]$, existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = z$. Luego, f admite inversa, f^{-1} y $Dom f^{-1} = Rec f = [f(a), f(b)]$.*

2. *Sean y_1 e y_2 dos puntos cualesquiera de $[f(a), f(b)]$ y sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ (las correspondientes preimágenes). Para mostrar que f^{-1} es creciente, habrá que ver*
$$y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \ .$$
De manera equivalente,
$$\begin{aligned} &\Big(y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)\Big) \\ \Leftrightarrow \quad &\Big(f(x_1) < f(x_2) \;\Rightarrow\; f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))\Big) \\ \Leftrightarrow \quad &\Big(f(x_1) < f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 < x_2\Big) \end{aligned}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Argumentamos la validez de esta implicación suponiendo que si existiesen dos valores x_1 y x_2, tales que

$$x_1 \geq x_2 \quad y \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Si $x_1 > x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, esto llevaría a contradecir que f sea creciente y si $x_1 = x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, contradice que f sea función. Luego, f^{-1} es monótona creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

3. *Mostratremos primero que f^{-1} es continua en $(f(a), f(b))$.*
   Sea $y_0 = f(x_0) \in (f(a), f(b))$; f^{-1} será continua y_0, si dado $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $\delta > 0$ tal que

$$|y - y_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \;,$$

o equivalente a la proposición

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \;\Rightarrow\; |x - x_0| < \varepsilon \;.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \varepsilon \;&\Rightarrow\; x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \\ &\Rightarrow\; f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \;. \end{aligned}$$

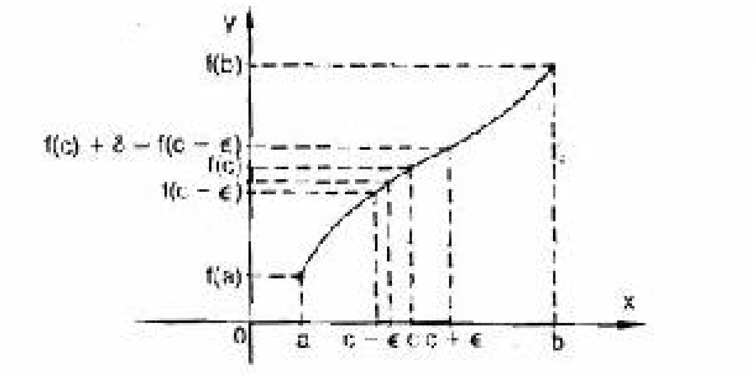
Sea δ un número positivo, elegido de manera que el entorno $E(y_0, \delta) = E(f(x_0), \delta)$ esté incluido en el intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, así, si

$$\delta \leq \text{mín}\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\} \;,$$

será

$$(f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \subseteq (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)) \;.$$

La gráfica de la figura muestra los elementos mencionados, nombrando c a nuestro x_0.



Con esta elección y recordando que al ser f creciente también lo es f^{-1},

$$\begin{aligned} |y - y_0| < \delta \;&\Rightarrow\; y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \\ &\Rightarrow\; f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta \\ &\Rightarrow\; f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \\ &\Rightarrow\; f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) \\ &\Rightarrow\; x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \;\Rightarrow\; |x - x_0| < \varepsilon \\ &\Rightarrow\; |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$, que hace válida la condición de continuidad de la función f^{-1} en el punto y_0.

A continuación, mostraremos la continuidad por derecha de la función f^{-1} en el punto $f(a)$, y dejamos como ejercicio la demostración de continuidad por izquierda en el punto $f(b)$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f es una función continua por derecha en a, podemos elegir $\delta > 0$ tal que el intervalo $(f(a), f(a)+\delta)$ esté incluido en el intervalo $(f(a), f(a+\varepsilon))$, haciendo

$$\delta \leq \text{mín}\{f(a+\varepsilon) - f(a)\} \ .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f(a) < y < f(a)+\delta \ &\Rightarrow \ f(a) < y < f(a+\varepsilon) \\
&\Rightarrow \ f(a) < f(x) < f(a+\varepsilon) \\
&\Rightarrow \ f^{-1}(f(a)) < f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(a+\varepsilon)) \\
&\Rightarrow \ a < x < a+\varepsilon \ \Rightarrow \ |x-a| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))| < \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

y dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$, que hace válida la condición de continuidad por derecha de la función f^{-1} en el punto $f(a)$. *Q.E.D.*

El resultado análogo al anterior si f es decreciente es el siguiente:

Teorema 16. *Si f es decreciente y continua en un intervalo $[a,b]$, entonces*

1. *existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(b), f(a)]$,*
2. *f^{-1} es decreciente en $[f(b), f(a)]$, y,*
3. *f^{-1} es continua en $[f(b), f(a)]$.*

Ejemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que la función

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$f(x) = x^n$$

es creciente y continua en su dominio. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

también es creciente y continua en su dominio.

Ejemplo. 1. La función

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$f(x) = \sin x$$

es creciente y continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$

también es creciente y continua en $[-1,1]$.

2. La función
$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$f(x) = \cos x$$
es decreciente y continua en $[0, \pi]$. Por lo tanto su función inversa
$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$f^{-1}(x) = \arccos x$$
también es decreciente y continua en $[-1, 1]$.

3. La función
$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \tan x$$
es creciente y continua en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por lo tanto su función inversa
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$f^{-1}(x) = \arctan x$$
también es creciente y continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo. Combinando los ejemplos anteriores con el corolario **??**, valen las siguientes afirmaciones.

1. Con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 4$, la función $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es continua en $[-2, 2]$.
2. Con $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \arcsin x$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\arcsin x - 1}$ es continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Valores Extremos y Teoremas de Weierstrass

Definición. (Máximos y mínimos) Sea f una función definida sobre un conjunto A. Diremos que el valor M es el máximo de la función f en el conjunto A, si existe un número $x^* \in A$, para el cual,

$$M = f(x^*) \geq f(x) \ , \quad \text{para todo } x \in A \ ,$$

y en ese caso, decimos que f alcanza el máximo en x^*.
Análogamente, diremos que m es el mínimo de la función f en el conjunto A, si existe $x^* \in A$, donde vale

$$m = f(x^*) \leq f(x) \ , \quad \text{para todo } x \in A \ ,$$

y en ese caso, decimos que f alcanza el mínimo en x^*.
Cuando existen estas cantidades, notaremos,

$$M = \max_{x\in A} f(x) \qquad \text{y} \qquad m = \min_{x\in A} f(x) \ .$$

Nota.

$$\max_{x\in A} f(x) = -\min_{x\in A}(-f)(x) \qquad \text{y} \qquad \min_{x\in A} f(x) = -\max_{x\in A}(-f)(x) \ .$$

En efecto, $f(x^*) = \max_{x\in A} f(x)$ luego $f(x) \leq f(x^*)$, $\forall x \in A$, o sea, $(-f)(x^*) = -f(x^*) \leq -f(x) = (-f)(x)$, $\forall x \in A$, entonces $-f(x^*) = \min_{x\in A}(-f)(x) \Rightarrow f(x^*) = -\min_{x\in A}(-f)(x)$. La segunda afirmación, se muestra de manera similar.

Teorema 17 (Primer Teorema de Weierstrass). *Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ entonces f está acotada en dicho intervalo.*

Se puede consultar la bibliografía para ver una prueba del primer teorema de Weierstrass.

Teorema 18 (Segundo Teorema de Weierstrass). *Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$.*

Demostración: Por el Primer Teorema de Weierstrass, la función f está acotada en $[a,b]$. Mostremos que f alcanza su valor máximo.
Como el recorrido de la función f está acotado, lo está en particular superiormente. Sea M el supremo del conjunto de números reales $\mathrm{Rec}(f)$.
Entonces,

$$f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b].$$

El número M puede o no pertencer $\mathrm{Rec}(f)$.
Si $M \in \mathrm{Rec}(f)$, existe $x^* \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x^*) = M$ y la existencia de máximo está probada.
Ahora supongamos que no existe dicho punto. Esto es $f(x) < M$, $\forall x \in [a,b]$, es decir $M - f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. Queda bien definida entonces en el intervalo $[a,b]$ la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \ .$$

Luego, g es una función continua (por ser la recíproca de una función continua que no se anula en $[a,b]$). Nuevamente, por el Primer Teorema de Weierstrass, la función g está acotada en el intervalo

$[a,b]$. Por lo tanto, existe un valor $M'>0$ tal que $g(x)<M'$ $\forall x\in[a,b]$. En consecuencia, para todo $x\in[a,b]$ se tiene

$$\begin{aligned}
&0<g(x)<M' \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad 0<\frac{1}{M-f(x)}<M' \Rightarrow 0<\frac{1}{M'}<M-f(x)\\
&\Rightarrow \quad f(x)<M-\frac{1}{M'}<M.
\end{aligned}$$

Resumiendo tenemos

$$f(x)<M-\frac{1}{M'}<M \;,\; \forall x\in[a,b].$$

Esto quiere decir que $\mathrm{Rec}(f)$ admite una cota superior estrictamtente menor que el número M, asumido como supremo de ese conjunto. Esta contradicción nos lleva a afirmar que existe al menos un punto $x^*\in[a,b]$, para el cual $f(x^*)=M$, y luego M es el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[a,b]$.
La existencia de mínimo se deja como ejercicio. *Q.E.D.*
Habiendo probado el Segundo Teorema de Weierstrass, podemos enunciar el Teorema de los Valores Intermedios del siguiente modo:

Teorema 19 (Teorema de los Valores Intermedios). *Sea f una función definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y supongamos que f es continua en $[a,b]$, con m y M sus respectivos valores mínimo y máximo absolutos, respectivamente.*
Entonces, f alcanza todos los valores entre m y M. Es decir, $\mathrm{Rec}(f)=[m,M]$.

Nota. Las hipótesis del Teorema de Weierstrass son imprescindibles.

1. La función
$$f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}\;.$$
$$f(x)=x^2$$
es continua en el conjunto no acotado $[0,+\infty)$, pero allí no alcanza un valor máximo.

2. La función
$$g:(0,1]\to\mathbb{R}\;.$$
$$g(x)=\frac{1}{x}$$
es continua en el intervalo abierto a izquierda $(0,1]$, pero no alcanza su valor máximo en este intervalo.

3. La función
$$h:[0,1]\to\mathbb{R}\;.$$
$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\in(0,1]\\[2ex] 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}\;,$$
está definida en el intervalo cerrado y acotado $[0,1]$, allí no es continua, y no alcanza su valor máximo en ese intervalo.