Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Álgebra y geometría analítica I - 2020

Lógica: Ejecicios resueltos - Sección 2.2

1. Sean p, q, r proposiciones primitivas.

   a) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.

   1) $[p \to (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (p \to r)]$
   2) $[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$
   3) $[p \to (r \vee q)] \Leftrightarrow [\neg r \to (p \to q)]$

   b) Use las reglas de sustitución para ver que $[p \to (r \vee q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$.

Para el ejercicio 1. (a) i., construimos las tablas de verdad correspodientes a las proposiciones $p \to (q \wedge r)$ y $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

p	r	q	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 1

Comparando la quinta y la octava columna de la Tabla 1, podemos ver que las proposiciones $p \to (q \wedge r)$ y $(p \to q) \wedge (p \to r)$ son equivalentes. Análogamente, las Tablas 2 y 3 muestran las equivalencias de los ejercicios 1. (a) ii. y 1. (a) iii.

p	r	q	$p \vee q$	$p \vee q \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 2

p	r	q	$q \vee r$	$p \to q \vee r$	$\neg r$	$p \to q$	$\neg r \to (p \to q)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Tabla 3

Para probar la equivalencia $[p \to (r \vee q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$ usando las reglas de sustitución, recordemos que $p \to t$ y $\neg p \vee t$ son proposiciones equivalentes, es decir

$$(p \to t) \leftrightarrow (\neg p \vee t) \tag{1}$$

es una tautología. Luego, por la primera regla de sustitución, reemplazando en (1) t por $r \vee q$, tenemos que

$$[p \to (r \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \vee (r \vee q)] \tag{2}$$

es también un tautología. Ahora, de la conmutatividad y asociatividad de la disyunción, sigue que

$$[\neg p \vee (r \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p \vee q) \vee r]\,.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $[(\neg p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [\neg(\neg p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$, y usando la segunda regla de sustitución, resulta

$$[\neg p \vee (r \vee q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]\,.$$

4. Para las proposiciones primitivas p, q, r y s, simplifique la proposición compuesta

$$[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r] \vee \neg q] \to s$$

$[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r] \vee \neg q] \to s$	**Razones**
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \wedge q] \vee [p \wedge (r \wedge \neg r)] \vee \neg q] \to s$	Asociatividad y conmutatividad de $\wedge$
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \wedge q] \vee [p \wedge F_0] \vee \neg q] \to s$	$r \wedge \neg r \Leftrightarrow F_0$
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \wedge q] \vee F_0 \vee \neg q] \to s$	Ley de dominación
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \wedge q] \vee \neg q] \to s$	F_0 es el neutro para $\vee$
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge [q \vee \neg q]] \to s$	Ley distributiva
$\Leftrightarrow [[(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge T_0] \to s$	$q \vee \neg q \Leftrightarrow T_0$
$\Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee \neg q] \to s$	T_0 es el neutro para $\wedge$

9. Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes implicaciones. Para cada implicación, determine su valor de verdad, así como el valor de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva correspondientes.

   a) Si hoy es el día del trabajo, entonces mañana es martes.

   b) Si $-1 < 3$ y $3 + 7 = 10$, entonces $\frac{3\pi}{2} = -1$.

Sean p y q las siguientes proposiciones primitivas

$$\begin{aligned} p &: \text{ hoy es el día del trabajo} \\ q &: \text{ mañana es martes} \end{aligned}$$

Notemos que la proposición compuesta del apartado (a) puede escribirse en términos simbólicos como

$$p \to q. \tag{3}$$

Luego, tenemos que la recíproca de la proposición es

$$q \to p, \tag{4}$$

que tiene la forma coloquial

Si mañana es martes, entonces hoy es el día del trabajo.

Puesto que hoy no es el día del trabajo ni mañana es martes, los antecedentes p y q en las proposiciones (3) y (4) son falsos. Consecuentemente, tanto la proposición $p \to q$, como su recíproca, son verdaderas (note que si lee esto un día lunes que no sea el día del trabajo, la recíproca resulta falsa).

La inversa de

$$p \to q$$

es la proposición

$$\neg p \to \neg q,$$

Si hoy no es el día del trabajo, entonces mañana no es martes.

Aquí, tanto $\neg p$ como $\neg q$, son proposiciones verdaderas (al menos que lea esto el día lunes), luego, la inversa de la proposición $p \to q$ es verdadera.

Finalmente, la contrapositiva de

$$p \to q$$

es la proposición

$$\neg q \to \neg p,$$

esto es

Si mañana no es martes, entonces hoy no es el día del trabajo.

Siempre, la contrapositiva de una proposición es equivalente a la proposición. Por lo tanto $\neg q \to \neg p$ es verdadera.

La proposición del apartado (b) puede escribirse simbólicamente como

$$p \wedge q \to r,$$

donde p, q y r son las propocisiones

$$\begin{aligned} p &: \ -1 < 3 \\ q &: \ 3 + 7 = 10 \\ r &: \ \frac{3\pi}{2} = -1 \end{aligned}$$

Notemos que p y q son) verdaderas (y por lo tanto también lo es $p \wedge q$) mientras que r es falsa. En consecuencia, la proposición $p \wedge q \to r$ es falsa.

La recíproca $(r \to p \wedge q)$ es la proposición

$$Si\ \frac{3\pi}{2} = -1,\ entonces -1 < 3\ y\ 3+7=10.$$

Puesto que el antecedente $(\frac{3\pi}{2} = -1)$, esta proposición es verdadera.

La inversa es la proposición $\neg(p \wedge q) \to \neg r$ o, equivalentemente (usando las leyes de De Morgan), $\neg p \vee \neg q \to \neg r$, esto es

$$Si -1 \geq 3\ o\ 3+7 \neq 10,\ entonces\ \frac{3\pi}{2} \neq -1$$

Como $\frac{3\pi}{2} \neq -1$, la inversa es verdadera.

Finalmente, la contrapositiva (que es equivalente a la proposición original y por lo tanto es falsa) es la proposición $\neg r \to \neg(p \wedge q)$,

$$Si\ \frac{3\pi}{2} \neq -1,\ entonces\ -1 \geq 3\ o\ 3+7 \neq 10.$$