Lógica 1/2

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

18 de abril de 2021

Proposiciones

Son proposiciones

Son oraciones declarativas que tienen un valor de verdad: son verdaderas (valor 1) o falsas (valor 0), pero NO ambas. Por ejemplo:

- p : Hoy es lunes
- q : José Hernández escribió el Martín Fierro
- $r : 1 + 3 = 5$

No son proposiciones

Afirmaciones exclamativas, imperativas o preguntas. Ejemplos:

- ¡Qué lindo día!
- No salgan de casa
- $x^2 + 1 = 0$

Conectores lógicos

Son operadores que sirven para formar nuevas proporciones a partir de proporciones dadas $p, q, r, \ldots$

Negación

La negación de p es $\neg p$ y se lee "no p". El valor de verdad de $\neg p$ es el opuesto al valor de verdad de p. Esto puede resumirse usando las llamadas *tablas de verdad*.

p	$\neg p$
0	1
1	0

Conjunción

La conjunción de las proposiciones p y q es $p \wedge q$ y se lee "p y q". La conjunción es verdadera solamente cuando las dos proposiciones que la conforman son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción

- La disyunción (inclusiva) de p y q es $p \vee q$, se lee "p o q" y es verdadera cuando alguna de las dos proposiciones que la componen es verdadera (en particular, si ambas son verdaderas la disyunción es verdadera).
- La disyunción exclusiva se denota $p \veebar q$ y es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones que la compone son verdaderas.

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Implicación

La implicación $p \to q$, se lee "p implica q". A veces también se lee

- Si p, entonces q.
- p es *condición suficiente* para q
- q es *condición necesaria* para p
- etc.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

En la implicación $p \to q$, p se llama la *hipótesis* y q se llama la *conclusión*. La tabla de verdad anterior tiene la siguiente interpretación: no se puede tener una conclusión falsa con una hipótesis verdadera.

Bicondicional

La proposición $p \leftrightarrow q$ es el bicondicional de p y q. Se lee:

- p si y sólo si q, a veces abreviado p sii q.
- p es condición necesaria y suficiente para q.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ejemplo

- La proposición "si $1+1=3$, entonces $2+3=7$" es verdadera.
- La proposición "$1+1=3$ si y sólo si $2+3=7$" es verdadera.

Proposiciones primitivas

Son las proposiciones que no se pueden formar a partir de otras proposiciones utilizando los operadores lógicos anteriores.

Ejemplo

Proposiciones primitivas:

- s: Felipe saldrá a dar un paseo.
- t: La luna está brillando.
- u: Está nevando.

Proposiciones compuestas:

- $(t \wedge \neg u) \rightarrow s$: Si la luna está brillando y no está nevando, entonces Felipe saldrá a dar un paseo.
- $t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$: Si la luna está brillando, entonces si no está nevando, Felipe saldrá a dar un paseo. El operador $\neg$ tiene precedencia sobre $\rightarrow$: o sea $\neg u \rightarrow s$ significa $(\neg u) \rightarrow s$ y no $\neg(u \rightarrow s)$.

Order of precedence [edit]

As a way of reducing the number of necessary parentheses, one may introduce precedence rules: ¬ has higher precedence than ∧, ∧ higher than ∨, and ∨ higher than →. So for example, $P \vee Q \wedge \neg R \rightarrow S$ is short for $(P \vee (Q \wedge (\neg R))) \rightarrow S$.

Here is a table that shows a commonly used precedence of logical operators.[15]

Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

However, not all compilers use the same order; for instance, an ordering in which disjunction is lower precedence than implication or bi-implication has also been used.[16] Sometimes precedence between conjunction and disjunction is unspecified requiring to provide it explicitly in given formula with parentheses. The order of precedence determines which connective is the "main connective" when interpreting a non-atomic formula.

Ejemplo

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Luego tiene sentido hablar de la proposición $p \wedge q \wedge r$ sin ambigüedad. En otras palabras, la conjunción es asociativa. (Volveremos sobre esto más adelante)

Ejercicio

Probar que la disyunción es asociativa.

Ejemplo

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Luego, no tiene sentido escribir $p \vee q \wedge r$ (salvo que aclaremos de antemano cómo se debe evaluar esta expresión).

Ejemplo

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	$\neg p$	$p \wedge \neg p \wedge q$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Definición

Una proposición compuesta es una *tautología* (resp. *contradicción*) si es verdadera (resp. *falsa*) para todas las asignaciones de verdad de las proposiciones que la componen.

Notación

- Usaremos la notación T_0 para una tautología (también se usa $\top$)
- Usaremos la notación F_0 para una contradicción (también se usa $\perp$)

Equivalencia lógica

Definición

Dos proposiciones s_1 y s_2 son *lógicamente equivalentes*, y escribimos $s_1 \iff s_2$, si s_1 y s_2 tienen las mismas tablas de verdad. Dicho de otro modo, s_1 y s_2 toman los mismos valores de verdad para todas las posibles asignaciones de valores de verdad de las proposiciones primitivas que las componen.

Ejemplo

Proposiciones como s_1: "Hoy es lunes" y s_2: "No está lloviendo" no son lógicamente equivalentes, aunque en el momento de escribir esto el bicondicional $s_1 \leftrightarrow s_2$ sea verdadero.

Importante

- Si $s_1 \iff s_2$ entonces $s_1 \leftrightarrow s_2$ es una tautología.
- Recíprocamente, si $s_1 \leftrightarrow s_2$ entonces $s_1 \iff s_2$.

Ejemplo

$p \iff \neg\neg p$

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

Ejemplo (Importante)

$(p \to q) \iff (\neg p \vee q)$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Ejemplo

$$(p \leftrightarrow q) \iff (p \to q) \land (q \to p)$$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1

Ejemplo (Leyes de De Morgan)

- $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Notar que las leyes de De Morgan nos dicen que $\neg$ se "distribuye" en $\vee$ y $\wedge$.

Ejemplo (Leyes distributivas)

- $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Hacer el otro caso como ejercicio.

Teorema (Leyes de la lógica)

Sean p, q, r proposiciones primitivas, T_0 una tautología y F_0 una contradicción. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\neg\neg p \iff p$ *(Ley de doble negación)*
2. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
   $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ *(Leyes de De Morgan)*
3. $p \vee q \iff q \vee p$
   $p \wedge q \iff q \wedge p$ *(Leyes conmutativas)*
4. $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
   $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$ *(Leyes asociativas)*
5. $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(Leyes distributivas)*
6. $p \vee p \iff p$
   $p \wedge p \iff p$ *(Leyes idempotentes)*
7. $p \vee F_0 \iff p$
   $p \wedge T_0 \iff p$ *(Leyes de neutro)*

Teorema (cont.)

8. $p \vee \neg p \iff T_0$
   $p \wedge \neg p \iff F_0$ *(Leyes inversas)*
9. $p \vee T_0 \iff T_0$
   $p \wedge F_0 \iff F_0$ *(Leyes de dominación)*
10. $p \wedge (p \vee q) \iff p$
    $p \vee (p \wedge q) \iff p$ *(Leyes de absorción)*

Demostración.

Ejercicios (varias de estas propiedades ya han sido demostradas). $\square$

Observación

La equivalencia lógica tiene las siguientes propiedades.

- $s \iff s$
- Si $s_1 \iff s_2$, entonces $s_2 \iff s_1$.
- Si $s_1 \iff s_2$ y $s_2 \iff s_3$, entonces $s_1 \iff s_3$.

Luego, la equivalencia lógica es lo que se conoce como una relación de equivalencia (volveremos sobre esto más adelante en la materia).

Reglas de sustitución

1. Supongamos que una proposición compuesta P es una tautología y que p es una proposición primitiva que aparece en P. Si reemplazamos *cada* ocurrencia de p en P por la *misma* proposición q, entonces la proposición resultante P_1 también es una tautología.
2. Sea P una proposición compuesta y p una proposición arbitraria que aparece en P. Sea q una proposición tal que $p \iff q$. Supongamos que reemplazamos en P una o mas ocurrencias de p por q y llamemos P_1 a la proposición obtenida. Entonces $P \iff P_1$.

Ejemplo

$[(r \wedge s) \to q] \leftrightarrow [\neg(r \wedge s) \vee q]$ es una tautología. Para probar esto no es necesario hacer la tabla de verdad (tendría 8 filas), basta con observar que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ es una tautología y sustituir todas las ocurrencias de p por $r \wedge s$.

Ejemplo

Negar y simplificar la proposición compuesta $(p \vee q) \to r$.

$$\begin{aligned}
\neg[(p \vee q) \to r] &\iff \neg[\neg(p \vee q) \vee r] && \text{1ra regla sust.}\\
&\iff \neg\neg(p \vee q) \wedge \neg r && \text{De Morgan}\\
&\iff (p \vee q) \wedge \neg r && \text{Doble negación}
\end{aligned}$$

Ejemplo

A partir de una implicación $p \to q$ podemos formar las siguientes proposiciones:

- La *recíproca*: $q \to p$
- La *inversa*: $\neg p \to \neg q$
- La *contrapositiva*: $\neg q \to \neg p$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p$$

$$q \to p \iff \neg p \to \neg q$$

Esto se usa mucho en las llamadas demostraciones por el absurdo.