Vectores - Parte 1

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

21 de junio de 2021

Motivación: ¿Por qué usar vectores?

La construcción histórica de la noción de vector se fue manifestando en la medida que se iban identificando elementos de causalidad de la tríada: magnitud, dirección y número.

Muchas cantidades, tanto en geometría como en física, tales como el *área*, el *volumen*, la *temperatura*, la *masa* y el *tiempo*, pueden caracterizarse mediante un único número real en una escala de medición apropiada. A estas cantidades se las denomina magnitudes escalares.

Otras magnitudes, tales como la *fuerza* y la *velocidad*, contienen ambos, magnitud y dirección, y no pueden ser caracterizados mediante un único número real. Para representar tales magnitudes, llamadas magnitudes vectoriales, usamos un segmento orientado, una *flecha*.

Matemáticamente, los vectores pueden ser descriptos en dos sentidos: uno geométrico y otro analítico.

Vectores:

Tratamiento Geométrico

Definición de vector

Un vector es un segmento orientado, esto es, un par ordenado de puntos (O, U). El punto O se llama origen y el punto U se llama extremo del vector.

Observación: A un vector se lo representa gráficamente mediante una flecha, razón por la cual algunos autores lo denominan de esa manera. Usamos indistintamente las siguientes notaciones: $\overrightarrow{OU}$ o simplemente $\overrightarrow{u}$.

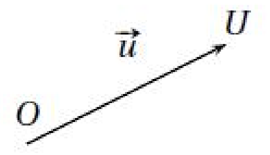


Figura: 1

Características de un vector

En todo vector se distinguen:

1. la dirección, que está dada por la recta que lo contiene (recta sostén) o por una paralela cualquiera a la misma,
2. el sentido, que está dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos). Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

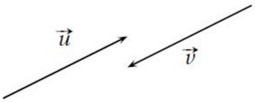


Figura: 2

3. el módulo, que es igual a la longitud del segmento orientado que define al vector. Al módulo de $\overrightarrow{u}$ lo simbolizamos $|\overrightarrow{u}|$.

<u>Observación</u>: El módulo es siempre un número no negativo. Si el módulo es cero quiere decir que el origen coincide con el extremo, es decir, el vector se reduce a un punto y por lo tanto no puede hablarse propiamente de un vector. En este caso, aun cuando la dirección y el sentido no están determinados, para facilitar muchas operaciones que se verán más adelante, decimos que se trata del vector nulo y lo simbolizamos: $\overrightarrow{0}$.

En síntesis:

$$\boxed{\left|\overrightarrow{u}\right| \geq 0.}$$

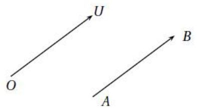
Más aún:

$$\boxed{\left|\overrightarrow{u}\right| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.}$$

Igualdad de vectores - Vectores libres

Dos vectores se dicen iguales cuando ambos tienen módulo cero, o en caso contrario, cuando ambos tienen la misma dirección, sentido y módulo.

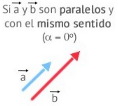
Con esta definición de igualdad entre vectores, todos los vectores iguales a uno dado pueden ser trasladados de manera que tengan un origen común. De esta manera, *cada vector y todos sus iguales* tendrán un *solo representante* con origen en el punto mencionado. De acuerdo a la definición de igualdad, dado un punto A y un vector $\overrightarrow{OU}$, existe un vector con origen en A igual al vector $\overrightarrow{OU}$, o equivalentemente, existe un punto B tal que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$.

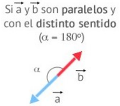


Observación: La igualdad así definida caracteriza a los vectores libres. Salvo que se diga lo contrario trabajaremos con vectores libres y los llamamos directamente vectores.

Versor - Vectores paralelos - Ángulo entre vectores

- Llamamos versor o vector unitario a todo vector de módulo uno.
- Se llama versor asociado a $\vec{u}$ y se simboliza con $\vec{u}_0$ al versor de igual sentido que $\vec{u}$.
- Decimos que dos vectores son paralelos o colineales cuando tienen igual dirección (aunque no tengan el mismo sentido y/o módulo).
- Dado el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ es el vector opuesto a $\vec{u}$ y se simboliza $-\vec{u}$. (Si $\vec{u}$ es no nulo entonces $\vec{u}$ y $-\vec{u}$ tienen igual módulo y dirección pero sentidos opuestos. El vector nulo es igual a su opuesto).
- Dados dos vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se define el ángulo entre ambos vectores y se lo representa por $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, al ángulo convexo determinado por dichos vectores cuando sus orígenes se aplican en un punto común. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos el ángulo entre ellos es nulo si son de igual sentido, o llano si sus sentidos son opuestos.





Consecuencias inmediatas de la definición de ángulo entre vectores

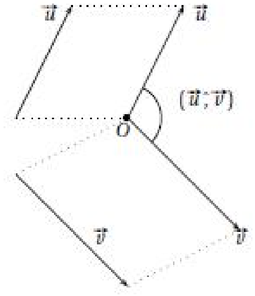


Figura: 3

- $0 \leq (\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) \leq \pi$.
- $(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{u})$ (No existen ángulos negativos entre vectores).
- $(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \pi$.

Suma de vectores

Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y un punto arbitrariamente fijado A, queda determinado un punto B tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, el que a su vez, determina un punto C tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. El vector $\overrightarrow{AC}$ es por definición la suma de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y lo simbolizamos $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

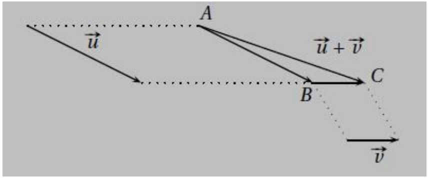


Figura: 4

Observaciones:

- El vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ es independiente de la elección del punto A.
- La suma de vectores se extiende a cualquier número de sumandos, llevando sucesivamente cada uno a continuación del precedente y uniendo, al final, el origen del primero con el extremo del último. A dicho método se lo conoce como método de la poligonal.

Propiedades de la suma de vectores

Teorema (1)

Valen las siguientes propiedades para la suma de vectores:

- *Propiedad conmutativa:* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$; $\forall \overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$.
- *Propiedad asociativa:* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$; $\forall \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *y* $\overrightarrow{w}$.
- *Existencia de elemento neutro:* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$; $\forall \overrightarrow{u}$.
- *Existencia de elemento opuesto: dado* $\overrightarrow{u}$, *existe* $-\overrightarrow{u}$ *tal que* $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Demostración.

- La propiedad conmutativa queda como tarea para el alumnado.
- La propiedad asociativa queda demostrada en la siguiente resolución gráfica donde $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son tres vectores cualesquiera elegidos arbitrariamente:

Continuación de la demostración.

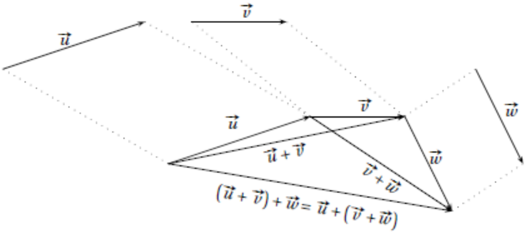


Figura: 5

- De las definiciones de vector nulo y suma, surge claramente el vector nulo como elemento neutro para la suma.
- Por último, dado $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, es claro que existe $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ y que es tal que

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}.$$

□

Vector diferencia

La última propiedad nos permite hacer la siguiente definición:

Dados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, se llama vector diferencia entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y se simboliza $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ al vector definido por:

$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$$

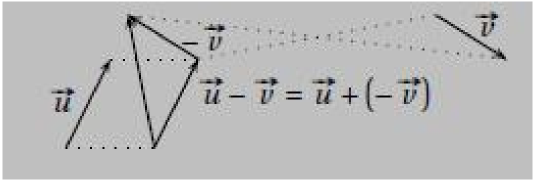


Figura: 6

Observación: Como ejemplo, se muestra cómo utilizando el método de la poligonal podemos resolver sumas y/o diferencias entre un número cualquiera de vectores, en este caso, se representa el vector $\overrightarrow{y}$, resultado de realizar la suma $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} - \overrightarrow{x}$.

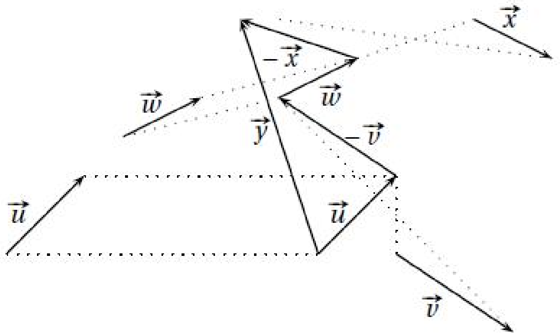


Figura: 7

Producto de un vector por un escalar

De la definición de suma de vectores se deduce que $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}$ es un vector de igual sentido que $\overrightarrow{v}$ y cuyo módulo es igual al doble del módulo de $\overrightarrow{v}$. Si simbolizamos $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}$ con $2\overrightarrow{v}$, entonces $2\overrightarrow{v}$ es un vector de igual sentido que $\overrightarrow{v}$ y tal que $\left|2\overrightarrow{v}\right|=2\left|\overrightarrow{v}\right|$. Análogamente $(-\overrightarrow{v})+(-\overrightarrow{v})$ es un vector de sentido opuesto al vector $\overrightarrow{v}$ y cuyo módulo es igual al doble del módulo de $\overrightarrow{v}$. Si simbolizamos $(-\overrightarrow{v})+(-\overrightarrow{v})$ con $-2\overrightarrow{v}$, entonces $-2\overrightarrow{v}$ es un vector de sentido opuesto al de $\overrightarrow{v}$ y tal que $\left|-2\overrightarrow{v}\right|=2\left|\overrightarrow{v}\right|$.

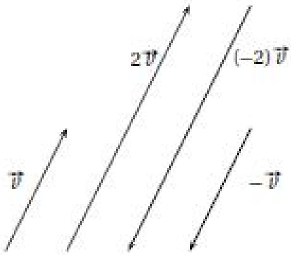


Figura: 8

Definición de producto por un escalar

Sea $\overrightarrow{v}$ un vector y α un escalar (es decir, un número real) cualquiera. Se llama producto del escalar α por el vector $\overrightarrow{v}$, y se simboliza $\alpha\overrightarrow{v}$ al vector que verifica:

- $\left|\alpha\overrightarrow{v}\right| = |\alpha|\left|\overrightarrow{v}\right|$.
- Si $\alpha \neq 0$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $\alpha\overrightarrow{v}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{v}$ ($\alpha\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores paralelos).
- Si $\alpha > 0$ entonces $\alpha\overrightarrow{v}$ tiene el mismo sentido que $\overrightarrow{v}$; si $\alpha < 0$ entonces $\alpha\overrightarrow{v}$ tiene sentido opuesto a $\overrightarrow{v}$.

Observación: Como ya se señalara, el vector nulo es el único vector con módulo cero. Por lo tanto si en el primer ítem se considera $\alpha = 0$ y/o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ resulta que:

$$\boxed{\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}} \quad \boxed{0 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

Propiedades del producto de un vector por un escalar

Teorema (2)

Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ *y* $\overrightarrow{u}$ *y* $\overrightarrow{v}$ *vectores. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- *Propiedad distributiva del producto por escalares respecto de la suma de vectores:* $\alpha\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \alpha\cdot\overrightarrow{u}+\alpha\cdot\overrightarrow{v}$
- *Propiedad distributiva del producto por escalares respecto de la suma de escalares:* $(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{u} = \alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{u}$
- *Propiedad de asociatividad de escalares (u homogeneidad):* $\alpha\cdot(\beta\cdot\overrightarrow{u}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\overrightarrow{u}$
- *Unidad para el producto por un escalar:* $1\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

- $(-1)\cdot\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$
- $(-\alpha)\cdot\overrightarrow{u} = -(\alpha\cdot\overrightarrow{u})$
- $\alpha\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *o* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$*, o ambos.*
- $\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}\cdot\overrightarrow{u}$

Demostración.

Ejercicio para el alumnado. □

Condición de paralelismo entre vectores

Teorema (3)

Dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si y solo si existe un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Demostración.

Supongamos primero que existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Siendo $\overrightarrow{u}$ paralelo a $\alpha \overrightarrow{u}$, por definición de producto de un vector por un escalar, resulta que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos.

Supongamos ahora que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ (ambos no nulos) son paralelos. Puede ocurrir que sean de igual sentido o de sentido opuesto. En el primer caso el valor de α tiene que ser positivo, en cambio en el segundo caso α tiene que ser negativo. En cualquiera de los casos α depende tanto del módulo de $\overrightarrow{u}$ como del módulo de $\overrightarrow{v}$. Suponiendo que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$, veamos cómo tiene que ser α.

Continuación de la demostración.

$$\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\alpha \overrightarrow{u}\right| = |\alpha| \left|\overrightarrow{u}\right| \Rightarrow |\alpha| = \frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} \Rightarrow \alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} \text{ o } \alpha = -\frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}.$$

1. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son de igual sentido entonces:
$$\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}.$$

2. Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son de sentido opuesto entonces:
$$\alpha = -\frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}.$$

$\square$

Comentario: Esta caracterización de los vectores paralelos es fundamental ya que permitirá transitar del estudio geométrico al estudio analítico de los vectores; es decir de los vectores flecha a los vectores dados por sus componentes escalares.

Proyección ortogonal de un vector sobre la dirección de otro

Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OV}$ (dos vectores no nulos) se llama vector proyección ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre $\overrightarrow{v}$ y se nota $proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ al vector $\overrightarrow{OP}$, donde P es el punto de intersección entre la recta sostén de $\overrightarrow{v}$ y la perpendicular a ella que contiene a U.

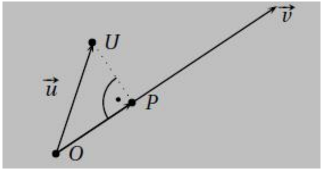


Figura: 9

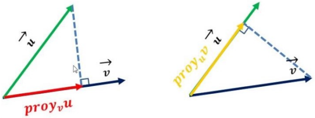


Figura: 10

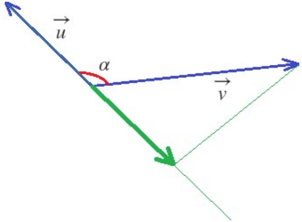


Figura: 11

<u>Observación</u>: Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, definimos $proy_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Vector proyección

¿Cómo podemos encontrar una expresión para calcular el vector proyección? Claramente de la definición recién hecha, podemos advertir que el vector proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$ es paralelo a $\overrightarrow{u}$ y por lo tanto debe existir un $p \in \mathbb{R}$ tal que $proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = p\overrightarrow{u_0}$.

Notemos que el número $p = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v})$, al que denominamos la proyección escalar de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$, es el número buscado. Así:

$$\boxed{proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v})\overrightarrow{u_0} = p\overrightarrow{u_0}.}$$

En particular:

$$\begin{aligned} \left|proy_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}\right| &= |p| \\ &= \left|\overrightarrow{v}\right| \left|\cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v})\right|. \end{aligned}$$

Producto escalar

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores cualesquiera. Se llama producto escalar (o producto interno) de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ y se nota $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ (también $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) al número real definido por:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{cases} |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) & \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ y } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ y/o } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

<u>Observaciones</u>:

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$.
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ entonces

$$\cos(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|}.$$

A continuación se muestran posibles orientaciones entre dos vectores, y su relación tanto con el producto escalar entre ellos como con el coseno del ángulo θ que forman.

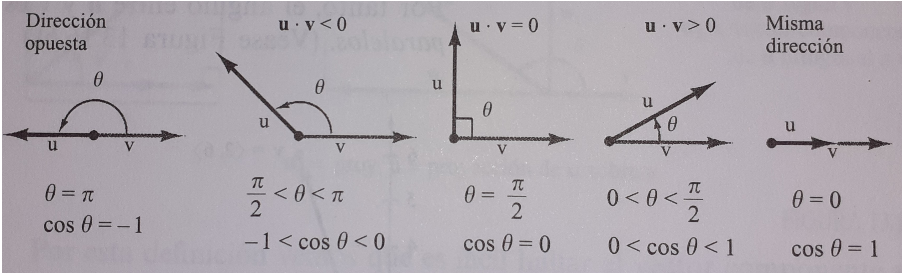


Figura: 10

3. $proy_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \times \vec{u_0})\vec{u_0}$.
4. $\left|proy_{\vec{u}}\vec{v}\right| = \frac{1}{|\vec{u}|}\left|\vec{v} \times \vec{u}\right|$.

Propiedades del producto escalar

Teorema (4)

Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores cualesquiera y, sean α y β escalares. Entonces valen:

- *Propiedad conmutativa:* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.
- *Propiedad distributiva:* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$.
- $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} \geq 0$; $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$ *si y solo si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Demostración.

- La demostración de las dos primeras propiedades enunciadas quedan como ejercicio para el alumnado.
- Probemos la tercer propiedad. Para ello, consideremos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos y $\alpha < 0$. (El caso $\alpha > 0$ se resuelve de manera similar).

Continuación de la demostración.

$$
\begin{aligned}
(\alpha\vec{u})\times\vec{v} &= |\alpha\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) = |\alpha|\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) \\
&\underset{\alpha<0}{=} -\alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) \underset{(*)}{=} -\alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|(-\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})) \\
&= \alpha\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \alpha(\vec{u}\times\vec{v}).
\end{aligned}
$$

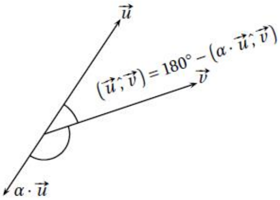


Figura: 11

(*) Si $\alpha<0$ entonces $\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\alpha\vec{u}$, en consecuencia, $(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}})$ y $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ son ángulos suplementarios; por lo tanto sus cosenos son opuestos, esto es: $\cos(\widehat{\alpha\vec{u},\vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Continuación de la demostración.

- Probemos ahora la cuarta propiedad. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, es claro que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$. Si fuera $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ pero $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$, entonces debería ser $\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{u}\right) = \frac{\pi}{2}$, lo cual es absurdo. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{u}\right) = 0$ y, por definición de producto escalar,

$$\boxed{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{u}| \cos(0) = (|\overrightarrow{u}|)^2 > 0}.$$

$\square$

Vectores perpendiculares - Condición de perpendicularidad

<u>Definición</u>: Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos. Decimos que $\overrightarrow{u}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v}$ y notamos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si y solo si $\left(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Se propone como ejercicio que pruebe que: $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$.