PRÁCTICA 3 - Lógica

1. Determine cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones.

   a) En 1990 Raúl Alfonsín era el presidente de Argentina.

   b) $x+3$ es un entero positivo.

   c) ¡Si todas las mañanas fueran tan soleadas como esta!

   d) Quince es un número par.

   e) Si Josefina tarda en llegar a la fiesta, su primo Zacarías podría enojarse.

   f) ¿Qué hora es?

   g) De la corte de Moctezuma a las playas de Trípoli.

   h) Hasta el 30 de junio de 1986, Christine Marie Evert había ganado el abierto de Francia siete veces.

2. Identifique las proposiciones primitivas en el ejercicio 1.

3. Sean p, q proposiciones primitivas para las que la implicación $p \to q$ es falsa. Determine los valores de verdad de

   a) $p \wedge q$ *b*) $\neg p \vee q$ *c*) $q \to p$ *d*) $\neg q \to \neg p$

4. Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas donde p, q y r denotan proposiciones primitivas.

   a) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$ *b*) $(p \to q) \to (q \to p)$ *c*) $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

5. ¿Cuáles de las proposiciones compuestas del ejercicio 4 son tautologías?

6. Verifique que $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ es una tautología.

7. Determine todas las asignaciones de valores de verdad, si es que existen, para las proposiciones primitivas p, q, r, s, t que hacen que todas las siguientes proposiciones compuestas sean falsas.

   a) $[(p \wedge q) \wedge r] \to (s \vee t)$ *b*) $[p \wedge (q \wedge r)] \to (s \veebar t)$

8. Después de hornear un pastel para sus dos sobrinas y dos sobrinos que vienen a visitarla, la tía Natalia deja el pastel en la mesa de la cocina para que se enfríe. Luego, ella va al centro comercial para atender su negocio durante el resto del día. Al regresar, descubre que alguien se ha comido una cuarta parte del pastel. Puesto que nadie estuvo en su casa ese día (excepto los cuatro visitantes), la tía Natalia se pregunta cuál de sus sobrinos se comería esa parte del pastel. Los cuatro sospechosos le dicen lo siguiente:

   - Carlos: Jimena se comió el trozo del pastel.
   - Delia: Yo no me lo comí.

- Jimena: Toño se lo comió.
- Toño: Jimena mintió cuando dijo que yo me había comido el pastel.

Si sólo una de estas proposiciones es verdadera y sólo uno de ellos cometió el terrible crimen, ¿quién fue?

9. Sean p, q y r proposiciones primitivas.

   a) Use las tablas de verdad para verificar las siguientes equivalencias lógicas.

      i) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

      ii) $[(p \vee q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$

      iii) $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [\neg r \to (p \to q)]$

   b) Use las reglas de sustitución para ver que $[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r)]$.

10. Use las reglas de sustitución para verificar que cada una de las siguientes proposiciones es una tautología. (En este caso p, q, r, s y t son proposiciones primitivas).

    a) $[p \vee (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$

    b) $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to \neg(p \vee q)]$

    c) $[[(p \vee q) \to r] \vee (s \wedge t)] \leftrightarrow [[[(p \vee q) \to r] \vee s] \wedge [[(p \vee q) \to r] \vee t]]$

11. Para las proposiciones primitivas p, q, r y s simplifique la siguiente proposición compuesta

$$[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s.$$

12. Refute lo siguiente y simplifique la proposición resultante.

    a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

    b) $(p \wedge q) \to r$

    c) $p \to (\neg q \wedge r)$

    d) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

13. Escriba la recíproca, la inversa y la contrapositiva de cada una de las siguientes implicaciones. Para cada implicancia, determine su valor de verdad, así como el valor de verdad de la recíproca, la inversa y la contrapositiva correspondientes.

    a) Si hoy es el día del trabajador, entonces mañana es martes.

    b) Si $-1 < 3$ y $3 + 7 = 10$, entonces $\frac{3\pi}{2} = -1$.

14. Determine si lo siguiente es verdadero o falso. Aquí p, q y r son proposiciones arbitrarias.

    a) Una forma equivalente para expresar la recíproca de "p es suficiente para q" es "p es necesaria para q".

    b) Una forma equivalente para expresar la inversa de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es suficiente para $\neg p$".

    c) Una forma equivalente para expresar la contrapositiva de "p es necesaria para q" es "$\neg q$ es necesaria para $\neg p$".

    d) Una forma equivalente para expresar la recíproca de $p \to (q \to r)$ es $(\neg q \vee r) \to p$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

15. Muestre que para p y q proposiciones primitivas,

$$p \veebar q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q).$$

16. Dé las razones para cada paso de las siguientes simplificaciones de proposiciones compuestas.

a)
$$\begin{array}{ll} & [(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q \\ \Leftrightarrow & [p \vee (q \wedge \neg q)] \vee q \\ \Leftrightarrow & (p \vee F_0) \vee q \\ \Leftrightarrow & p \vee q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} & \neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q] \\ \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)] \\ \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)] \\ \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge T_0] \\ \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p) \\ \Leftrightarrow & \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p) \\ \Leftrightarrow & \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)] \\ \Leftrightarrow & \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)] \\ \Leftrightarrow & \neg[q \wedge [p \wedge (p \vee q)]] \\ \Leftrightarrow & \neg(q \wedge p) \end{array}$$

17. Como en el ejercicio 16, escriba los pasos y las razones para establecer las siguientes equivalencias lógicas.

   a) $p \vee [p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$
   b) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$

18. Considere las siguientes proposiciones abiertas definidas en el universo de los números enteros:

$$p(x): \ x \leq 3 \qquad q(x): \ x+1 \text{ es impar} \qquad r(x): \ x > 0.$$

   a) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

      i) $p(3) \vee [q(3) \vee \neg r(3)]$
      ii) $\neg\, p(3) \wedge [q(3) \vee r(3)]$
      iii) $p(2) \rightarrow [q(2) \rightarrow r(2)]$
      iv) $[p(2) \wedge q(2)] \rightarrow r(2)$
      v) $p(0) \rightarrow [\neg q(-1) \leftrightarrow r(1)]$
      vi) $[p(-1) \leftrightarrow q(-2)] \leftrightarrow r(-3)$

   b) Determine todos los valores de x para los cuales $[p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ da como resultado una proposición verdadera.
   c) Encuentre los cinco enteros positivos x más pequeños para los cuales la proposición abierta $p(x) \rightarrow [\neg q(x) \wedge r(x)]$ da como resultado una proposición verdadera.

19. Sea $p(x)$ la proposición abierta "$x^2 = 2x$", donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

   a) $p(0)$
   b) $p(1)$
   c) $p(2)$
   d) $p(-2)$
   e) $\exists x\; p(x)$
   f) $\forall x\; p(x)$

20. Para el universo de los enteros, sean $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ y $t(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$\begin{aligned} p(x) &: \quad x > 0 \\ q(x) &: \quad x \text{ es par} \\ r(x) &: \quad x \text{ es un cuadrado perfecto} \\ s(x) &: \quad x \text{ es (exactamente) divisible por } 4 \\ t(x) &: \quad x \text{ es (exactamente) divisible por } 5 \end{aligned}$$

   a) Escriba las siguientes proposiciones en forma simbólica.
      i) Al menos un entero es par.
      ii) Existe al menos un entero positivo que es par.
      iii) Si x es par, entonces x no es divisible por 5.
      iv) Ningún entero par es divisible por 5.
      v) Existe al menos un entero par divisible por 5.
      vi) Si x es par y x es un cuadrado perfecto, entonces x es divisible por 4.

   b) Determine si cada una de las seis proposiciones de la parte (a) es verdadera o falsa. Para cada proposición falsa, dé un contraejemplo.

21. Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ las siguientes proposiciones abiertas.

$$\begin{aligned} p(x) &: \quad x^2 - 8x + 15 > 0 \\ q(x) &: \quad x \text{ es impar} \\ r(x) &: \quad x > 0 \end{aligned}$$

Para el universo de los enteros, determine la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Si una proposición es falsa, dé un contraejemplo.

   a) $\forall x\ [p(x) \to q(x)]$
   b) $\forall x\ [q(x) \to p(x)]$
   c) $\exists x\ [p(x) \to q(x)]$
   d) $\exists x\ [q(x) \to p(x)]$
   e) $\exists x\ [r(x) \wedge p(x)]$
   f) $\forall x\ [p(x) \to r(x)]$
   g) $\exists x\ [r(x) \to p(x)]$
   h) $\forall x\ [\neg q(x) \to \neg p(x)]$
   i) $\exists x\ [p(x) \to (q(x) \wedge r(x))]$
   j) $\forall x\ [(p(x) \vee q(x)) \to r(x)]$

22. Sea $p(x, y)$ la proposición abierta "x divide a y", donde el universo para cada una de las variables x e y es el conjunto de los números enteros. Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes; si una proposición cuantificada es falsa, proporcione una explicación o un contraejemplo.

   a) $p(3, 7)$
   b) $p(7, 3)$
   c) $p(3, 27)$
   d) $\forall y\ p(1, y)$
   e) $\forall x\ p(x, 0)$
   f) $\forall x\ p(x, x)$
   g) $\forall y\ \exists x\ p(x, y)$
   h) $\exists y\ \forall x\ p(x, y)$
   i) $\forall x\ \forall y\ [(p(x, y) \wedge p(y, x)) \to (x = y)]$
   j) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(p(x, y) \wedge p(y, z)) \to p(x, z)]$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

23. Suponga que $p(x,y)$ es una proposición abierta en la que el universo para cada x, y está formado solamente por tres enteros: 2, 3 y 5. Entonces, la proposición cuantificada $\exists y\ p(2,y)$ es lógicamente equivalente a $p(2,2) \vee p(2,3) \vee p(2,5)$. La proposición cuantificada $\exists x\ \forall y\ p(x,y)$ es lógicamente equivalente a $[p(2,2) \wedge p(2,3) \wedge p(2,5)] \vee [p(3,2) \wedge p(3,3) \wedge p(3,5)] \vee [p(5,2) \wedge p(5,3) \wedge p(5,5)]$. Use conjunciones y disyunciones para expresar las siguientes proposiciones sin cuantificadores.

    a) $\exists x\ p(x,5)$
    b) $\forall x\ p(x,3)$
    c) $\forall y\ p(2,y)$
    d) $\exists x\ \exists y\ p(x,y)$
    e) $\forall x\ \forall y\ p(x,y)$
    f) $\forall y\ \exists x\ p(x,y)$

24. Para cada una de las siguientes parejas de proposiciones, determine si la negación propuesta es correcta. Si es correcta, determine cuál es verdadera: la proposición original o la negación propuesta. Si la negación propuesta es incorrecta, escriba una versión corregida de la negación y determine a continuación si la proposición original o la versión corregida de la negación es verdadera.

    a) Proposición: Para todo los números reales x, y, si $x^2 > y^2$, entonces $x > y$.
    Negación propuesta: Existen números reales x, y tales que $x^2 > y^2$ pero $x \leq y$.
    b) Proposición: Existen números reales x, y tales que x e y son racionales pero $x+y$ es irracional.
    Negación propuesta: Para todos los números reales x, y, si $x+y$ es racional, entonces x e y son racionales.
    c) Proposición: Para todo número real x, si x no es 0, entonces x tiene inverso multiplicativo.
    Negación propuesta: Existe un número real distinto de cero que no tiene inverso multiplicativo.
    d) Proposición: Existen enteros impares cuyo producto es impar.
    Negación propuesta: El producto de cualesquiera dos enteros impares es impar.
    e) Proposición: El cuadrado de todo número racional es racional.
    Negación propuesta: Existe un número real x tal que si x es irracional, entonces x^2 es irracional.

25. Niegue y simplifique lo siguiente.

    a) $\exists x\ [p(x) \vee q(x)]$
    b) $\forall x\ [p(x) \wedge \neg q(x)]$
    c) $\forall x\ [p(x) \to q(x)]$
    d) $\exists x\ [(p(x) \vee q(x)) \to r(x)]$

26. Para las siguientes proposiciones, el universo abarca todos los números enteros distintos de cero. Determine el valor de verdad de cada proposición.

    a) $\exists x\ \exists y\ [xy = 1]$
    b) $\exists x\ \forall y\ [xy = 1]$
    c) $\forall x\ \exists y\ [xy = 1]$
    d) $\forall x\ \forall y\ \left[sen^2 x + \cos^2 x = sen^2 y + \cos^2 y\right]$
    e) $\exists x\ \exists y\ [(2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)]$
    f) $\exists x\ \exists y\ [(3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = -3)]$

27. Repita el ejercicio anterior para el universo de los números reales diferentes de cero.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119