PRÁCTICA 3 - Límite y Continuidad

Límite

1. Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   -a- $|x-3| < 2 \Rightarrow |x| < 5.$

   -b- $|x-3| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|} < 2.$

2. -a- En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \epsilon$$

   Siendo $f(x) = 2-3x$, para los siguientes valores: $a=-1$, $c=5$ y $\epsilon = 0{,}1$

   -b- Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

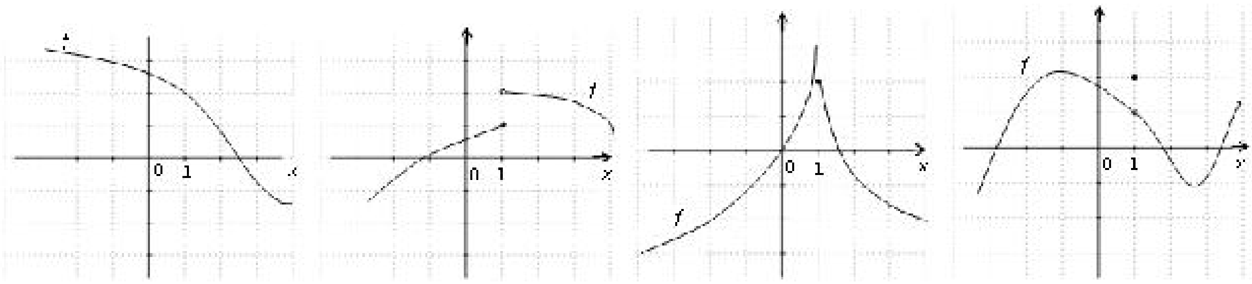
3. Utilizando la representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

   -a- explicitar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)-1| < 1/2\}$.

   -b- determinar un número $\delta > 0$, tal que $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-1| < 1/2$.

   -c- comprobar analíticamente la validez de la afirmación anterior.

4. Resolver para cada una de las funciones cuyas gráficas se esbozan a continuación, lo que se pide en cada item.



   -a- Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = L$.

   -b- En caso de una respuesta afirmativa en -a-, representar el número L sobre el eje de las ordenadas y, en caso de una respuesta negativa, explicar las razones de la misma.

5. -a- Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, ¿debería estar definida f en $x=1$? Si fuera así, ¿debe ser $f(1)=3$? Justificar la respuesta.

   -b- Si $g(0)=5$, ¿debería existir $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$? Si fuera así, ¿debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 5$? Justificar la respuesta.

   -c- Representar gráficamente tres funciones que carezcan, por razones diferentes, de límite en el punto $x=0$.

6. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1, \\ ax + b & \text{si } |x| \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 6 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

-a- Representar gráficamente la función h para $x < -1$ y $x > 1$.

-b- A partir de la gráfica obtenida, determinar a y b de manera que existan $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

7. Para cada una de las siguientes funciones determinar su dominio y su gráfica. A partir de la gráfica indicar el valor de cada límite.

-a- $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \lim\limits_{x \to 1} f_1(x).$

-b- $f_2(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}, \quad \lim\limits_{x \to 1} f_2(x).$

-c- $f_3(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}, \quad \lim\limits_{x \to 0} f_3(x)$

-d- $f_4(x) = \dfrac{\ln x^4 - \ln x^2 - \ln x}{\ln x^3}, \quad \lim\limits_{x \to 1} f_4(x).$

8. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

-a- $\lim\limits_{x \to 4} (9 - x) = 5.$

-b- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{8}{x} = 2.$

Cálculo de límites

9. Calcular los siguientes límites, indicando en cada caso las propiedades aplicadas.

-a- $\lim\limits_{x \to 4} \left(5x^2 - 2x + 3\right),$ -b- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 2}{x^4 - x + 5}.$

10. Sabiendo que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -3, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 6$$

determinar, si existen, los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + h(x)).$

-b- $\lim\limits_{x \to a} (g(x) \cdot h(x)).$

-c- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2g(x)}{f(x) - h(x)}.$

-d- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

11. Calcular los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x \to 4} (3x - 2).$

-b- $\lim\limits_{x \to 0} 3\sqrt{x^2 + 9}.$

-c- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x}{x^3 - 4x}.$

-d- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 14} - 4}{x - 2}.$

-e- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x) + x}{4}.$

-f- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\tan(x) - 1}.$

-g- $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^2 - 4}{2 - y}.$

-h- $\lim\limits_{v \to 1} \dfrac{v^4 - 1}{v^3 - 1}.$

-i- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x + \operatorname{sen} x}{3 \cos x}.$

-j- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(x^2 + 4x + 4)}{\ln(x + 2)}.$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

12. Analizar :

   -a- Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?, ¿o puede existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$?

   -b- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

   -c- Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

13. -a- Si $2-x^2 \leq f(x) \leq 2\cos x$ para todo x, determinar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   -b- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq 2$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} h(x) = -5$. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x=2$? ¿Es posible que $f(2)=0$? ¿Es posible que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$? Justificar las respuestas.

14. -a- Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, demostrar la siguiente proposición:

   Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ entonces
   $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1.$$

   -b- Utilizando el resultado del ítem anterior, calcular los siguientes límites.

   -a- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{5x}$.

   -b- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$.

   -c- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.

   -d- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

   -e- $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2\cot(x)\csc(2x)$.

   -f- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$.

   -g- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc(2x)}{\cos(3x)}$.

   -h- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x + 2x}{x+x^2}$.

   -i- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$.

15. Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

   -a- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

   -b- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

16. Calcular los siguientes límites laterales:

   -a- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x}$.

   -b- $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\csc(x))$.

   -c- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|2-x|}$.

   -d- $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+4)\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

   -e- $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

   -f- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{|1-x|}$.

17. Calcular los siguientes límites:

   -a- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}$.

   -b- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2(x+3)}$.

18. Dada la función
   $$g(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2, \\ \lambda x - 4 & \text{si } x < 2, \end{cases}$$
   determinar el número real λ tal que exista $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

19. Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

-a- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. -b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos 3x}{x}$.

20. -a- Demostrar que, si $n\in\mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$.

-b- Dada la función polinómica $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty.$$

Sugerencia: Reescriba a la función polinómica p como $p(x)=x^n(1+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n})$.

-c- Mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}+\infty & \text{si } m<n,\ a_n\,b_m>0,\\ -\infty & \text{si } m<n,\ a_n\,b_m<0,\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m=n,\\ 0 & \text{si } m>n.\end{cases}$$

21. Calcular los siguientes límites en el infinito.

-a- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^6+x^3+5}{x^4+10}$.

-b- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$.

-c- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$.

-d- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4-x+1}$.

-e- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}$.

-f- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^4+x}{3x^4+5x^3-4x^2-x+2}$.

——————————————- En los ejercicios siguientes se utilizan algunos de estos conceptos.——————-

Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a. La recta $x=a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y=f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(I) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$. (III) $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$. (V) $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$.

(II) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$. (IV) $\displaystyle\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$. (VI) $\displaystyle\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$.

La recta $y=L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y=f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes: (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ o (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$, la recta $y=mx+b$ se llama **asíntota oblicua o inclinada** de la curva $y=f(x)$ porque la distancia entre la curva $y=f(x)$ y la recta $y=mx+b$ tiende a 0, como se observa en la Figura 1. Se presenta un caso semejante si se hace $x\to-\infty$. ——————————————————

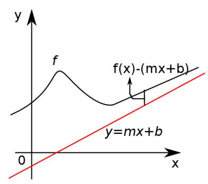


Figura 1: Asíntota oblícua

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

22. En cada uno de los siguientes ítems, determinar una función que satisfaga las condiciones indicadas. Elaborar un bosquejo de su gráfica.

-a- $f(2)=1$, $f(-1)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

-b- $g(0)=0$, $g(1)=2$, $g(-1)=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

-c- $h(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=-2$.

-d- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} k(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} k(x)=2$.

-e- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^+} p(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} p(x)=-\infty$.

Aclaración: En general las respuestas no son únicas; cualquier función que cumpla con las condiciones es aceptable. Se puede utilizar funciones definidas por partes, si esto ayuda.

23. Si f y g son funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=2$. ¿Qué se puede concluir sobre $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)/g(x))$? Fundamentar la respuesta.

24. Si f y g son funciones polinómicas con $g(x)$ tal que nunca es cero, ¿la gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota vertical? Fundamentar la respuesta.

25. La gráfica de una función racional, ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener? Justificar la respuesta.

26. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

-a- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$.

-b- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-x}-3x}$.

-c- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}$.

-d- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

——————————————— Sea f una función racional tal que el grado del numerador es igual al grado del denominador mas 1. Al dividir el numerador por el denominador podemos reescribir a la función racional f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x\to\pm\infty$. Entonces **la gráfica de f tiene una asíntota oblicua**.

Por ejemplo, si se quiere determinar la asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$, se efectúa la división de polinomios para obtener, gracias al algoritmo del cociente, que

$$f(x)=\underbrace{\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{\textit{término lineal}}+\underbrace{\left(\frac{1}{2x-4}\right)}_{\textit{residuo}}.$$

Cuando $x\to\pm\infty$, el residuo (cuya magnitud indica la distancia vertical que hay entre las gráficas de f y la del término lineal) tiende a cero. Por lo tanto, la recta $y=\dfrac{x}{2}+1$ resulta ser una asíntota de la gráfica de f, tanto por derecha, si $t\to+\infty$, como por izquierda, si $t\to-\infty$. ————————————————————-

27. Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

-a- $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

-b- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

-c- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$.

-d- $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

-I- Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

-II- Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

28. ¿Es la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ una función racional? ¿Tiene asíntota oblicua?

Continuidad

29. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ y $g(x) = x+3$.

-a- ¿Es correcto decir que $f = g$?

-b- ¿Cómo son los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$? Justificar la respuesta.

30. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

-a- $f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

-b- $f_2(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$.

-c- $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

-d- $f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$.

31. Dar un ejemplo de una función cuyo dominio sea el intervalo $[0,1]$, que sea continua en el intervalo $(0,1)$ pero no en el intervalo $[0,1]$.

32. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

-a- $f_1(x) = [x]$.

-b- $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+7x-4}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$.

-c- $f_3(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-6x+4}$.

-d- $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq -1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

-e- $f_5(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

33. Dadas las funciones

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad f_2(x) = \frac{|3-x|}{x-3}, \qquad f_3(x) = 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

determinar para cuáles de ellas se puede definir una función $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que coincida con f_i, es decir,

$$F_i(x) = f_i(x) \quad \forall\, x \in Dom(f_i),\; i = 1,2,3.$$

34. -a- Probar que si f es una función continua en el punto $x = a$, entonces la función $|f|$ también lo verifica.

-b- Mostrar, mediante un ejemplo, que la afirmación recíproca no es cierta. Es decir, si $|f|$ es continua en el punto $x = a$, no necesariamente f es continua en $x = a$.

35. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h = f \circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-a- $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - x$.

-b- $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

-c- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

36. Sea la función g definida por $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

   -a- Determinar su dominio.

   -b- Trazar la gráfica de la función g.

   -c- Calcular $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

   -d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x = 1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? En caso afirmativo, escribir su ley.

37. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

38. Determinar los valores de a y b para los cuales se verifica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(ax^2) - b}{2x^4} = -1.$$

39. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Teoremas de valor intermedio

40. Dada la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

   analizar si el teorema de Bolzano asegura la existencia de un punto $c \in (-1, 4)$ tal que $f(c) = 0$.

41. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x \in \mathbb{R}$.

   -a- Demostrar que existe un número $c \in [n, n+1]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(c) = 0$.

   -b- Aproximar c con un error menor que $0{,}01$.

   -c- Probar que existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(\beta) = 20$.

42. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\cos x - \sqrt{x} = 0$$

43. Un **punto fijo** de una función f es un número $\xi \in$ *Dom*(f) tal que $f(\xi) = \xi$.

-a- Representar gráficamente una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0,1]$ y determinar gráficamente si f tiene un punto fijo.

-b- ¿ Es posible trazar la gráfica de una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que su imagen está contenida en $[0,1]$ y que no tenga un punto fijo?

-c- Demostrar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0,1]$, entonces f tiene un punto fijo.
Sugerencia: Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = f(x) - x$.

44. Demostrar que si la función f es continua y no tiene ceros en el intervalo $[a,b]$ entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$.

45. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

-a- $f_1(x) = 2x - 5,\ x \in \mathbb{R}.$

-b- $f_2(x) = x^2 + 4,\ x \leq 0.$

-c- $f_3(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119