Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2 (3ra parte)

☞ **20.** Dadas las funciones:

$$f_1(x) = \frac{x-2}{x}, \qquad f_2(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

se pide:

a) Determinar dominio, recorrido y asíntotas. Representarlas gráficamente a partir de la gráfica de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

b) Determinar los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f_1(x) < 3\}\ , \qquad y \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \geq 1\}.$$

✎ La función $f_1(x) = \dfrac{x-2}{x}$ es una función homográfica, con $a = 1$, $b = -2$, $c = 1 \neq 0$ y $d = 0$ (donde $ac - bd \neq 0$).
El $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \mathbb{R} - \{0\}$.
El $\mathrm{Rec}(f_1) = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\} = \mathbb{R} - \{1\}$.
Las asíntotas: la recta $x = \dfrac{-d}{c}$ es un asíntota vertical y la recta $y = \dfrac{a}{c}$ es una asíntota horizontal, es decir los puntos excluidos del dominio y del recorrido respectivamente.
Teniendo a una función homográfica expresada como

$$f(x) = A + \frac{B}{x-C}$$

las constantes A, B, C nos dan mucha información: $y = A$ es a_h, $x = C$ es a_v y el factor B contrae o dilata las ramas de las hipérbolas y refleja respecto del eje x si es negativo.
Haciendo el cociente entre los polinomios expresamos f_1 de esta manera,

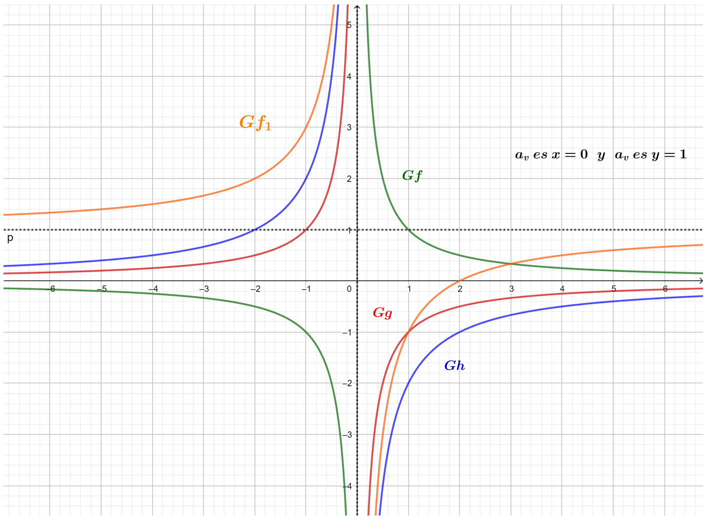
$$f_1(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} = 1 + \frac{-2}{x-0}$$

En este caso

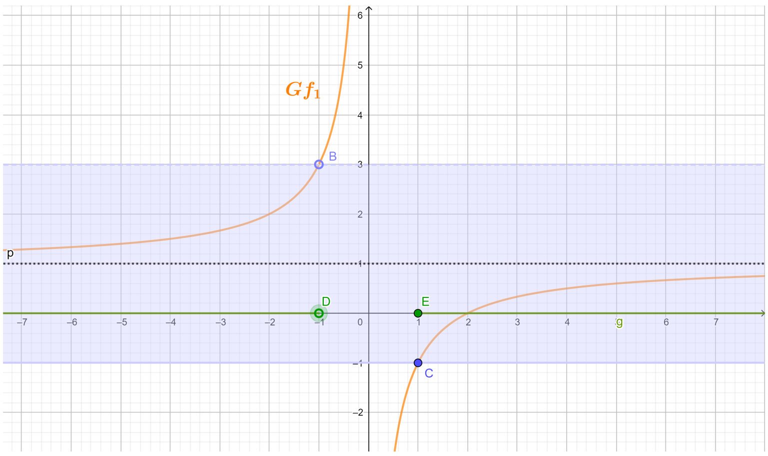
$$x = 0 \quad \text{es } a_v \qquad \text{e} \qquad y = 1 \quad \text{es } a_h$$

Y el factor -2 produce una dilatación o estiramiento y reflexión respecto del eje x.
Para representar la gráfica utilizamos funciones auxiliares:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con asíntotas a_v^f, $x = 0$ y a_h^f, $y = 0$.
- $g(x) = -f(x) = -\dfrac{1}{x}$, reflexión respecto del eje x, no se modifican las asíntotas.
- $h(x) = 2g(x) = \dfrac{-2}{x}$, dilatación con factor 2, no se modifican las asíntotas.
- $f_1(x) = 1 + h(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$, traslación vertical 1 unidad hacia arriba, se modifica la asíntota horizontal, a_v, $x = 0$ y a_h, $y = 1$.



b) Para determinar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f_1(x) < 3\}$ a partir de la gráfica debemos buscar las abscisas de los puntos de la gráfica de f_1 que están dentro la banda sombreada, es decir $x \in \mathrm{Dom}(f_1)$ tales que $-1 \leq f_1(x) < 3$,



será entonces

$$A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

✎ La función $f_2(x) = \left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ es el valor absoluto de una función homográfica $h(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, con $a = 1$, $b = 1$, $c = -1 \neq 0$ y $d = 1$ (donde $ac - bd \neq 0$).

a) Como $f_2(x) = |h(x)|$, estudiaremos primero la función h.
Podemos expresar a h haciendo el cociente entre los polinomios, o bien,

$$h(x) = \frac{1+x}{1-x} = (-1)\frac{x+1}{x-1} = (-1)\frac{x-1+1+1}{x-1} = -1 + \frac{-2}{x-1}$$

así vemos que
$\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{1\}$ y como el $\mathrm{Dom}(|\cdot|) = \mathbb{R}$, resulta $\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\mathrm{Rec}(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Las asíntotas de h,

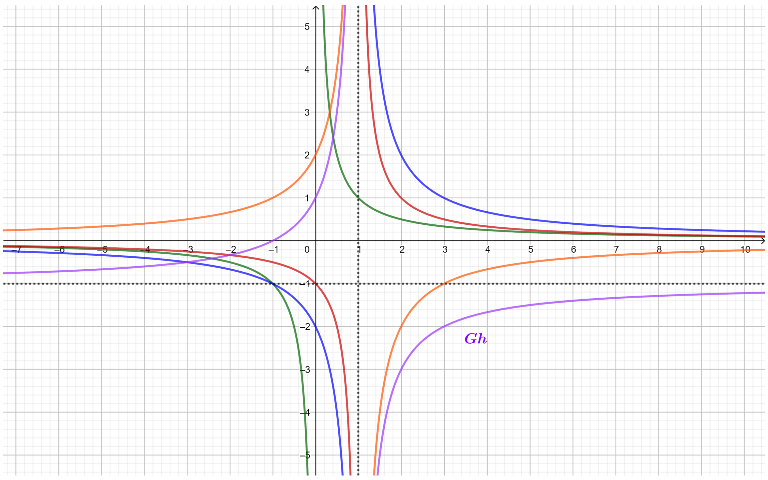
$$x = 1 \quad \text{es } a_v \qquad \text{e} \qquad y = -1 \quad \text{es } a_h$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

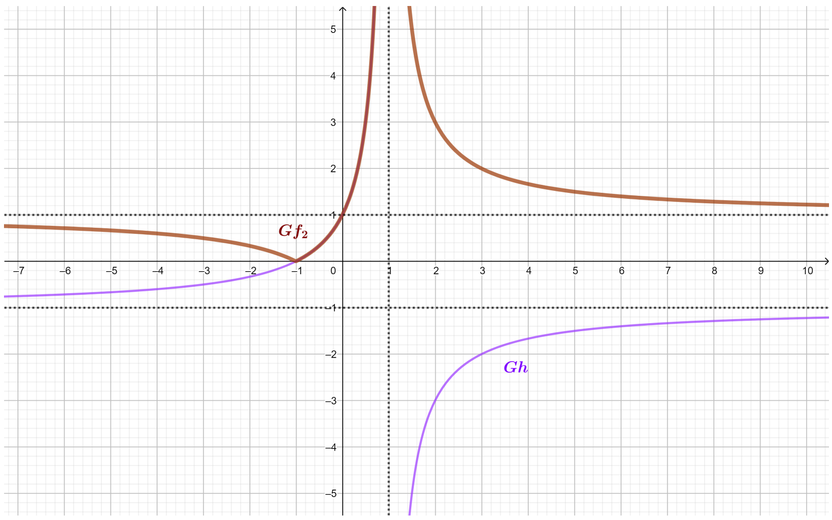
Y el factor -2 produce una dilatación o estiramiento y reflexión respecto del eje x.

Para graficar la función h a partir de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, utilizamos algunas funciones auxiliares:

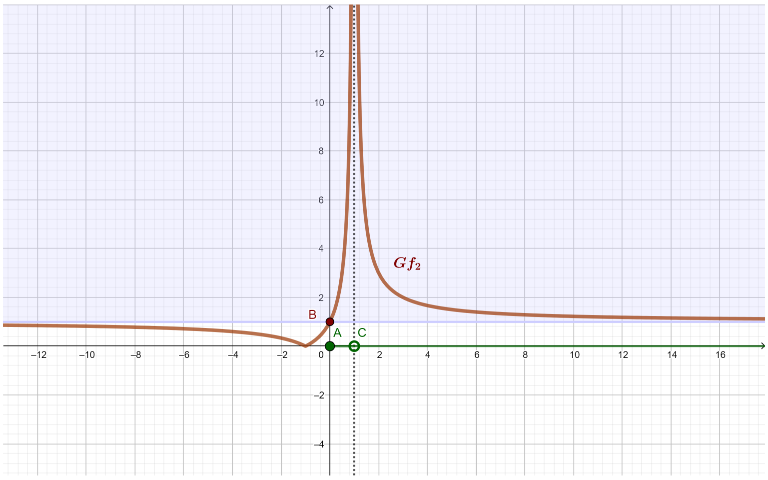
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con asíntotas $a_v^f,\ x = 0$ y $a_h^f,\ y = 0$.
- $g(x) = f(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$, traslación 1 unidad hacia la derecha, ahora la $a_v,\ x = 1$.
- $r(x) = 2g(x) = \dfrac{2}{x-1}$, dilatación con factor 2, no se modifican las asíntotas.
- $s(x) = -r(x) = -\dfrac{2}{x-1}$, reflexión respecto del eje x, no se modifican las asíntotas.
- $h(x) = -1 - r(x) = -1 - \dfrac{2}{x-1}$, traslación vertical 1 unidad hacia abajo, se modifica la $a_h,\ y = -1$ y $a_v,\ x = 1$.



Ahora para graficar f_2 a partir de h, nos quedamos sólo con la gráfica de h y hacemos $f_2(x) = |h(x)|$, luego todos los puntos de Gh con ordenada negativa pasan a puntos con ordenadas positivas en la Gf_2.
Qué sucede con las asíntotas?, se mantiene la asíntota vertical $a_v,\ x = 1$ y la asíntota horizontal ahora es $a_h,\ y = 1$.



b) Para determinar el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \geq 1\}$ a partir de la gráfica debemos buscar las abscisas de los puntos de la gráfica de f_2 que están dentro la banda sombreada, es decir $x \in \mathrm{Dom}(f_2)$ tales que $f_2(x) \geq 1$,



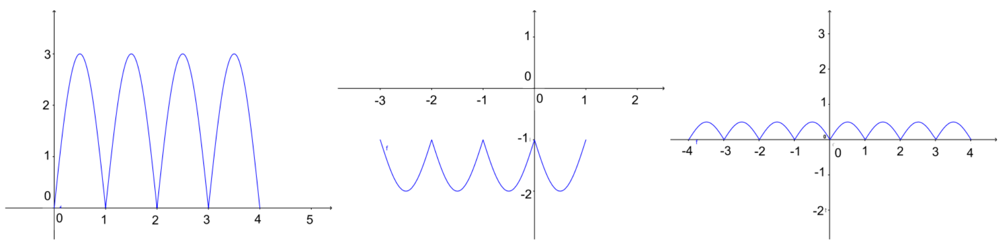
será entonces

$$B = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

☞ **21.** Sea $f(x) = |\,\mathrm{sen}\ \pi x|$ definida en el intervalo $[-2, 2]$. Se pide:

a) Graficar f y analizar paridad e inyectividad.

b) Dar la ley de las siguientes funciones como corrimientos de la función f:



(a) (b) (c)

✎ Sea $f(x) = |\mathrm{sen}(\pi x)|$, definida en $[-2, 2]$.
a) Como sabemos el comportamiento de la función $\mathrm{sen}\, x$, para graficar f busquemos los puntos del $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2]$ donde $f(x) = 0$ y donde $f(x) = 1$.
Luego, si $x \in [-2, 2]$, buscamos los ceros de f,

$$f(x) = |\mathrm{sen}(\pi x)| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{sen}(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

es decir,

$$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

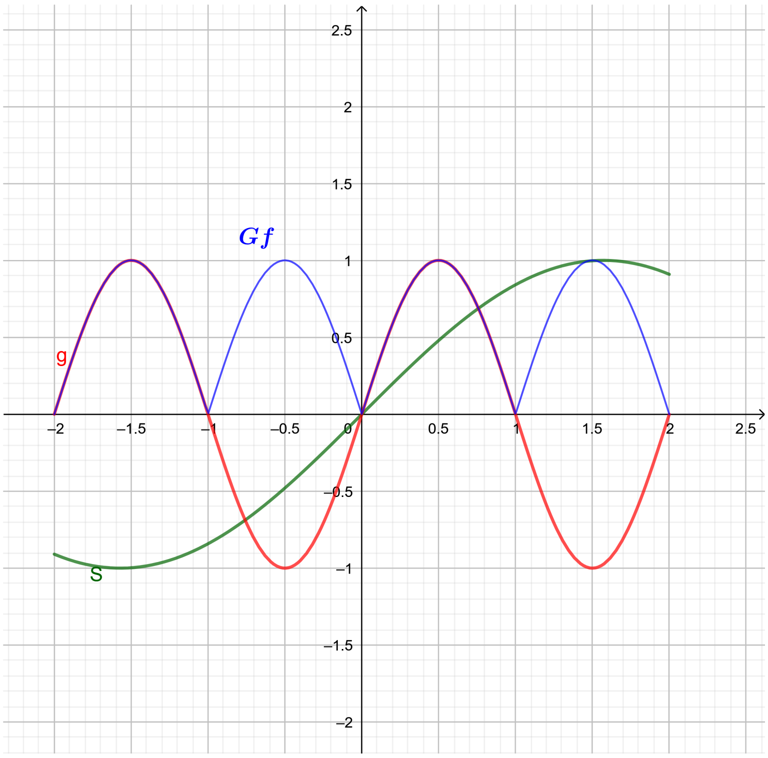
Luego, buscamos los $x \in [-2, 2]$ cuyas imágenes por f valen 1, esto es

$$f(x) = |\mathrm{sen}(\pi x)| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sen}(\pi x) = \pm 1 \Leftrightarrow \pi x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{con } k = -2, -1, 0, 1 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

Para realizar la gráfica podemos utilizar las funciones auxiliares:

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- $S(x) = \operatorname{sen} x$ en [-2,2].
- $g(x) = S(\pi x)$, contracción con factor π.
- $f(x) = |g(x)|$, todos los puntos de g con ordenada negativa pasan a puntos con ordenadas positivas en la Gf.

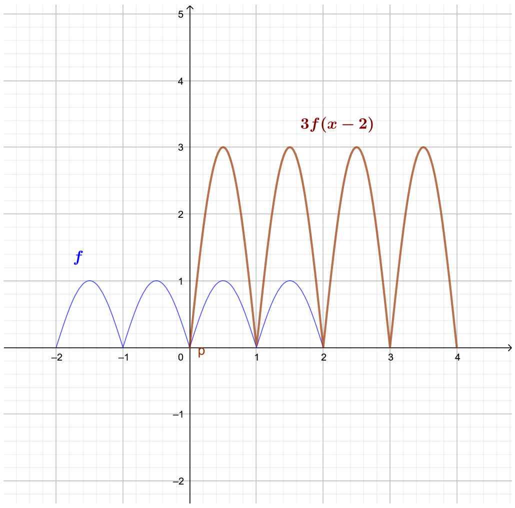


Como $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2]$ es un conjunto simétrico, analizamos paridad, para ello, hacemos

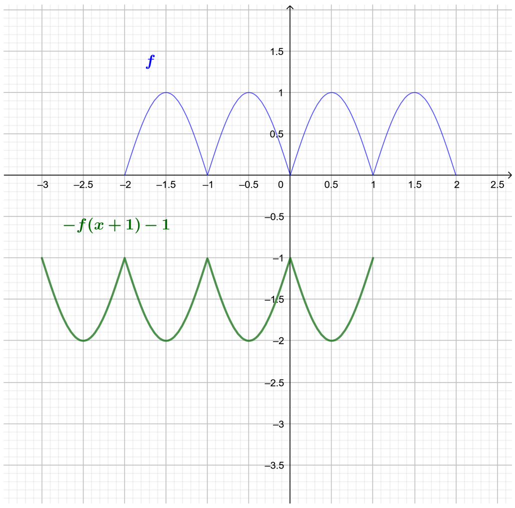
$$f(-x) = |\operatorname{sen}(\pi(-x))| = |\operatorname{sen}(-\pi x)| \overset{\text{seno impar}}{=} |-\operatorname{sen}(\pi x)| \overset{\text{prop}\,|\cdot|}{=} |\operatorname{sen}(\pi x)| = f(x)$$

Entonces f es par y por tanto no es inyectiva, pues por ejemplo, $f(-1) = f(1) = 0$.
También podemos obtener estas conclusiones a partir de la gráfica, f es par pues Gf es simétrica respecto del eje y y f no es inyectiva pues hay (al menos) una recta horizontal, $y = 0$, que interseca a Gf en mas de un punto.

b) Dar la ley de las siguientes funciones como corrimientos de f.
✍ Para la primera observamos una traslación horizontal 2 unidades hacia la derecha $f(x-2)$ y una dilatación vertical con factor 3, luego la función es $3f(x-2)$.

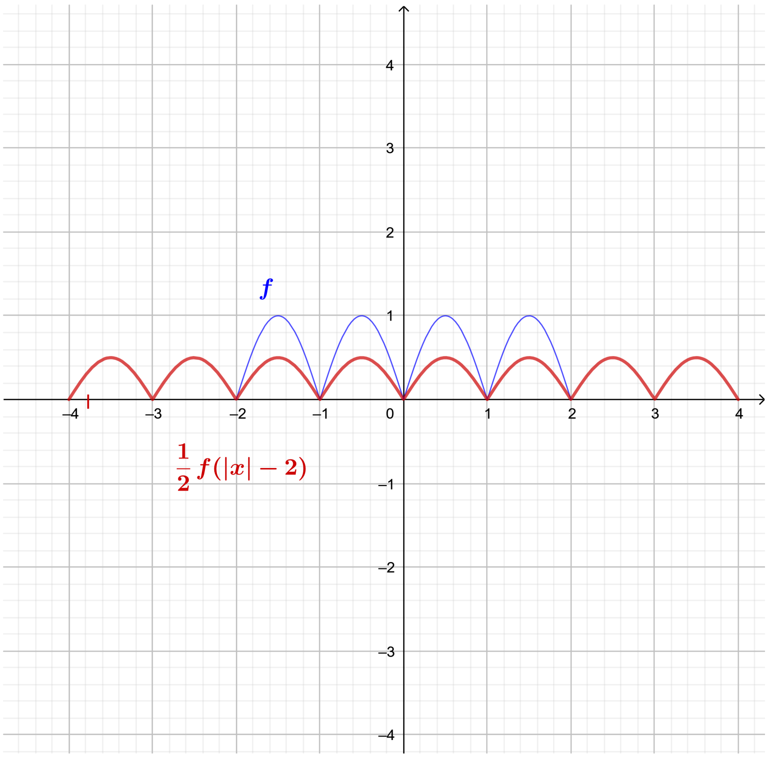


✍ Para la segunda observamos una traslación horizontal 1 unidad hacia la izquierda $f(x+1)$, una reflexión respecto del eje x o sea $-f(x+1)$ y finalmente una traslación vertical 1 unidad hacia abajo, luego la función es $-f(x+1)-1$.



✍ Para la tercera observamos que $x \in [-4,4]$, podemos hacer una traslación horizontal 2 unidades a la derecha $f(x-2)$, una reflexión respecto del eje y, $f(|x|-2)$ y finalmente una contracción vertical con factor $\frac{1}{2}$, luego la función es $\frac{1}{2}f(|x|-2)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



☞ **24.** Hallar el dominio y la ley de cada una de las funciones compuestas $h = f \circ g$ y $r = g \circ f$ si :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2$.

b) $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad g(x) = f^{-1}(x)$.

✎ **a)** Veamos primero cuáles son los dominios de las funciones f y g:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \; x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq -1\} = [-1, +\infty) \quad y \quad \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}.$$

Ahora obtengamos el dominio de la función $h = f \circ g$ y luego su ley.

$$\mathrm{Dom}(h) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : \; g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{x \in \mathbb{R} : \; x^2 \in [-1, +\infty)\} = \mathbb{R}.$$

Sea $x \in \mathrm{Dom}(h)$, resulta:

$$h(x) = (f \circ g)\,(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2+1}.$$

A continuación hallamos el dominio de la función $r = g \circ f$ y su ley.

$$\mathrm{Dom}(r) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : \; f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\} = \{x \in [-1, +\infty) : \; \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty)\,.$$

Sea $x \in \mathrm{Dom}(r)$, luego:

$$r(x) = (g \circ f)\,(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1.$$

b) Determinemos el dominio de las funciones $f(x)=\sqrt{3x+1}$ y $g(x)=f^{-1}(x)$.

$$\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}:\ 3x+1\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq -\frac{1}{3}\right\}=\left[-\frac{1}{3},+\infty\right).$$

Observemos que $\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}_0^+$, en efecto:
Si $y\in\mathrm{Rec}(f)$ luego existe $x\in\mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x)=y$, luego $x\in\mathrm{Dom}(f)\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x\geq -1\Leftrightarrow 3x+1\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}\geq 0\Leftrightarrow f(x)=y\geq 0$.
Y recíprocamente, si $y\in\mathbb{R}_0^+$, $y\in\mathrm{Rec}(f)$?, consideramos $x=\dfrac{y^2-1}{3}$, este $x\geq -\frac{1}{3}$ o sea $x\in\mathrm{Dom}(f)$ y además $f(x)=f(\dfrac{y^2-1}{3})=y$.
Por lo tanto

$$\mathrm{Rec}(f)=\mathbb{R}_0^+$$

Así $g=f^{-1}:\mathbb{R}_0^+\to\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ y $\mathrm{Dom}(g)=\mathrm{Dom}(f^{-1})=\mathbb{R}_0^+$.
Buscamos la ley de $g=f^{-1}$, por definición de función inversa sabemos que:

$$f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

luego,

$$\sqrt{3x+1}=y\underbrace{\Leftrightarrow}_{y\in\mathbb{R}_0^+}3x+1=y^2\Leftrightarrow 3x=y^2-1\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{3}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y^2-1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$g:\mathbb{R}_0^+\to\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$$
$$x\mapsto g(x)=\frac{x^2-1}{3}$$

Siendo

$$f:[-\tfrac{1}{3},+\infty)\to\mathbb{R}_0^+\ \text{tal que}\ f(x)=\sqrt{3x+1}\qquad g:\mathbb{R}_0^+\to[-\tfrac{1}{3},+\infty)\ \text{tal que}\ g(x)=\tfrac{x^2-1}{3}$$

El dominio de la función $h=f\circ g$:

$$\mathrm{Dom}(h)=\{x\in\mathrm{Dom}(g)\ :\ g(x)\in\mathrm{Dom}(f)\}=\left\{x\in\mathbb{R}_0^+\ :\ \tfrac{x^2-1}{3}\in[-\tfrac{1}{3},+\infty)\right\}=\mathbb{R}_0^+.$$

y la ley

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(f^{-1}(x))=x.$$

El dominio de la función $r=g\circ f$:

$$\mathrm{Dom}(r)=\{x\in\mathrm{Dom}(f)\ :\ f(x)\in\mathrm{Dom}(g)\}=\left\{x\in[-\tfrac{1}{3},+\infty):\ \sqrt{3x+1}\in\mathbb{R}_0^+\right\}=[-\tfrac{1}{3},+\infty).$$

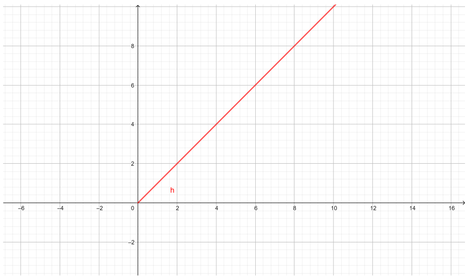
y la ley

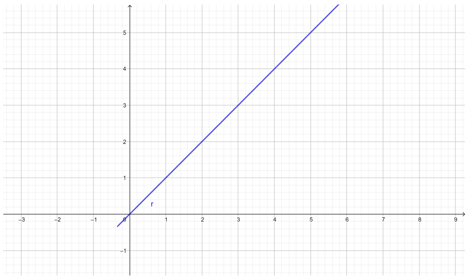
$$r(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Son iguales las funciones h y r?

$$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \text{ tal que } h(x) = x \qquad r : [-\tfrac{1}{3}, +\infty) \to [-\tfrac{1}{3}, +\infty) \text{ tal que } r(x) = x$$





☞ **25.** Dada la función:

$$f_2(x) = \frac{x-2}{x+2}, \text{ si } x > -2$$

se pide:

a) Demostrar que la función f_2 es inyectiva.

b) Simbolizar con g_2 la inversa de la función f_2, describir su dominio.

c) Hallar una expresión para obtener $g_2(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g_2.

d) A partir de la gráfica de la función f_2, representar gráficamente la función g_2.

✎ Expresemos la ley de la función de otra manera, $f_2(x) = \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x+2-2-2}{x+2} = \dfrac{x+2-4}{x+2} = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ si $x > -2$.

a) $\mathrm{Dom}(f_2) = (-2, +\infty)$. Para ver inyectividad, sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f_2)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, luego:

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow 1 - \frac{4}{x_1+2} = 1 - \frac{4}{x_2+2} \Rightarrow -\frac{4}{x_1+2} = -\frac{4}{x_2+2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1+2} = \frac{1}{x_2+2} \underbrace{\Rightarrow}_{x_1+2>0,\ x_2+2>0} x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto, f_2 es una función inyectiva.

b) Para hallar g_2 (función inversa de f_2) veamos primero cuál es el recorrido de f_2 ya que el $\mathrm{Rec}(f_2) = \mathrm{Dom}(g_2)$. Sea $x \in \mathrm{Dom}(f_2) = (-2, +\infty)$,

$$x > -2 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$1 - \dfrac{4}{x+2} < 1 \Leftrightarrow f_2(x) < 1$. Luego $\mathrm{Rec}(f_2) \subset (-\infty, 1)$, y recíprocamente, si $y \in (-\infty, 1)$, existe $x \in \mathrm{Dom}(f_2)$ tal que $f_2(x) = y$? Consideramos $x = \dfrac{4}{1-y} - 2$, resulta $x = \dfrac{4}{1-y} - 2 \in \mathrm{Dom}(f_2)$ (comprobarlo) y $f_2(x) = f_2\left(\dfrac{4}{1-y} - 2\right) = 1 - \dfrac{4}{\dfrac{4}{1-y} - 2 + 2} = 1 - \dfrac{4}{\dfrac{4}{1-y}} = 1 - 4\dfrac{1-y}{4} = 1 - (1-y) = 1 - 1 + y = y$.

Por lo tanto

$$\mathrm{Rec}(f_2) = (-\infty, 1) = \mathrm{Dom}(g_2).$$

c) Por definición de función inversa sabemos que $f_2(x) = y \Leftrightarrow g_2(y) = x$, luego:

$$1 - \frac{4}{x+2} = y \;\Rightarrow\; \frac{4}{x+2} = -y + 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x+2} = \frac{1-y}{4} \;\Rightarrow\; x + 2 = \frac{4}{1-y} \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{1-y} - 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g_2(y) = \frac{4}{1-y} - 2.$$

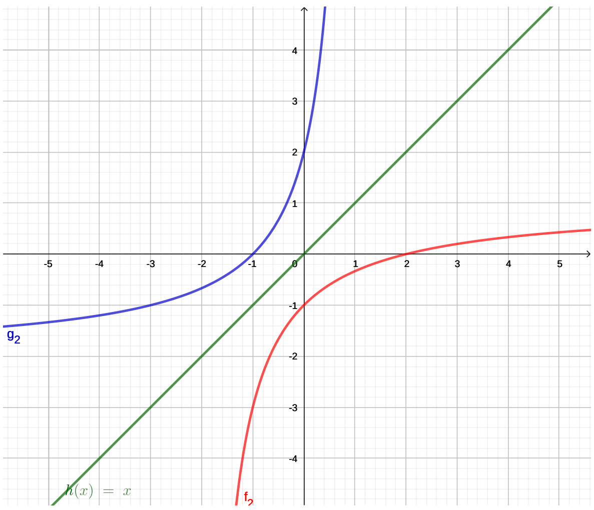
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_2 : (-\infty, 1) &\;\rightarrow\; (-2, +\infty) \\ x &\;\longmapsto\; g_2(x) = \frac{4}{1-x} - 2. \end{aligned}$$

d) Para la obtener la gráfica de la función f_2 a partir de corrimientos de la gráfica de $\frac{1}{x}$ en el dominio indicado $(x > -2)$, utilizamos funciones auxiliares:

1. $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $h_2(x) = \dfrac{1}{x+2}$ (traslación horizontal 2 unidades hacia la izquierda, la a_v es $x = -2$)
3. $h_3(x) = -\dfrac{4}{x+2}$ (reflexión respecto del eje x y dilatación con factor 4)
4. $f_2(x) = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ (traslación vertical 1 unidad hacia arriba, la a_v es $x = -2$ y la a_h es $y = 1$))

A continuación realizamos la grafica la función $h(x) = x$. Luego la gráfica de la función g_2 es la simétrica a la gráfica de f_2 respecto de la recta $y = x$ (gráfica de la función h). Obtenemos el siguiente gráfico:



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119