PRÁCTICA 2 - Polinomios

1. Sean $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2i$, $Q(x) = x^2 + (2 - i)$ y $R(x) = x^7 + 5x^3 - ix^2 + 2x + 1 - i$. Hallar los polinomios indicados en cada caso:

   a) $P + Q$
   b) $P + Q - R$
   c) $P \cdot Q$
   d) $Q \cdot (P + 2R)$
   e) $2P \cdot (R - Q)$

2. En cada uno de los siguientes casos hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio P por el polinomio Q. En los casos que sea posible aplicar la regla de Ruffini.

   a) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x^2 + 1 + i$
   b) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x + 1 + i$
   c) $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$, $Q(x) = 5x - 4$
   d) $P(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 4x^2$

3. Analizar porqué son iguales los resultados de los ejercicios 2c) y 2d).

4. Siendo $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $P(0)$, $P(1)$, $P(i)$, $P(-i)$, $P(i + 1)$, $P(5)$, $P(6)$ y $P(2 - i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el Teorema del Resto.

5. Siendo $P(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $P(4)$ sabiendo que $P(5) = 0$.

6. Siendo $P(x) = 3x^{12} + x^9 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$, determinar si los números 1, -1, i y $-i$ son raíces de P.

7. Dar en cada caso un polinomio P que cumpla con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.

   a) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.
   b) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz triple y es de grado 4.
   c) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz triple, es de grado 4 y $P(1) = 3i$.
   d) 0, 1, 2 y 4 son raíces de P y P es de grado 6.
   e) 0, 1, 2 y 4 son raíces de P, P es de grado 5 y a coeficientes reales.

8. Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.

   a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$
   b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$

9. Sea $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P. Luego hallar las restantes raíces de P.

10. Hallar un polinomio P de grado mínimo con coeficientes reales que verifique simultáneamente:

    a) las soluciones de $z^2 = 5\overline{z}$ son raíces de P,
    b) P tiene alguna raíz doble,
    c) $P(1) = 31$.