Lógica 2/2

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

26 de abril de 2021

Cuantificadores

Recordemos que al principio dijimos que oraciones del estilo $x^2 + 1 = 0$ no son consideradas proposiciones (a menos que sepamos qué valor toma x). En este caso x se considera una *variable* y a continuación estudiaremos este tipo de situaciones.

Definición

Una afirmación es una *proposición abierta* si

- contiene una o más variables;
- no es una proposición, pero
- se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen se reemplazan por ciertos "valores permitidos".

Notación para proposiciones abiertas

$p(x)$, $q(x)$, $r(x,y)$, $\neg p(x)$, $p(x) \to q(x)$, etc.

Ejemplo

Sigamos con nuestro ejemplo, $p(x) : x^2 + 1 = 0$.

- $p(1) = 0$ es FALSA
- "Hay un número real x tal que $p(x)$" es (una proposición y es) FALSA
- $p(i)$ es VERDADERA
- "Hay un número complejo z tal que $p(z)$" es VERDADERA
- "Todo número complejo z satisface $p(z)$" es FALSA

Cuantificador existencial

$\exists x\, p(x)$ (existe un x tal que $p(x)$ es VERDADERA)

Cuantificador universal

$\forall x\, p(x)$ (para todo x, $p(x)$ es VERDADERA)

Ejemplo

Consideremos las siguientes proposiciones abiertas con $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) : x \geq 0 \qquad\qquad q(x) : x^2 \geq 0$$

$$r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad\qquad s(x) : x^2 - 3 > 0$$

- $\exists x\,[p(x) \land q(x)]$ es VERDADERA (por ejemplo $x = 1$)
- $\forall x\,[p(x) \rightarrow q(x)]$ es VERDADERA
- $\forall x\,[q(x) \rightarrow s(x)]$ es FALSA (contraejemplo: $x = 0$)
- $\forall x\,[r(x) \rightarrow p(x)]$ es FALSA (contraejemplo: $x = -1$)

Importante

Siempre hay que prestar atención al contexto para determinar en qué *universo* toman valores nuestras variables. Por ejemplo,

$$\exists x \, x^2 + 1 = 0$$

es una ambigüedad, pues si x toma valores en $\mathbb{R}$ es FALSA pero si x toma valores en $\mathbb{C}$ entonces es verdadera. Es común expresar el universo después del cuantificador:

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ (FALSO)
- $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0$ (VERDADERO)

Implicación lógica

Es un concepto análogo a la equivalencia lógica. Decimos que p *implica lógicamente* q, en símbolos, $p \implies q$, si $p \to q$ es una tautología.

Ejemplo

- $\forall x\, p(x) \implies \exists x\, p(x)$ (sutileza: en este caso hay que suponer que el universo para x es no vacío)
- $\exists x\, p(x)$ no implica lógicamente $\forall x\, p(x)$ (en general)

Ejemplo (Cuantificadores implícitos)

Consideremos las proposiciones (informales) sobre el universo de los números reales

- Si un número es racional, entonces es real
- Si x es racional, entonces x es real

Podemos formalizar estos enunciados (equivalentes) usando el cuantificador universal: consideramos las proposiciones

$$p(x) : x \in \mathbb{Q} \qquad\qquad q(x) : x \in \mathbb{R}$$

Una versión más precisa de lo anterior es

$$\forall x \, [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Ejemplo (cont.)

Consideremos la proposición (con universo los naturales):

> 1729 *se puede expresar como suma de cubos de dos maneras distintas.*

Usando cuantificadores existenciales:

$$\exists m_1, n_1, m_2, n_2 \left[(\{m_1, n_1\} \neq \{m_2, n_2\}) \wedge (m_1^3 + n_1^3 = m_2^3 + n_2^3 = 1729)\right]$$

Btw, la proposición anterior es verdadera: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (es el número de Hardy-Ramanujan)

Definición

Sean $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas para un universo dado.

- Decimos que $p(x)$ y $q(x)$ son *lógicamente equivalentes* cuando el bicondicional $p(a) \leftrightarrow q(a)$ es verdadero para cada a en el universo dado. En este caso se escribe

$$\forall x \, [p(x) \iff q(x)]$$

- Decimos que $p(x)$ *implica lógicamente* $q(x)$ si $p(a) \to q(a)$ es verdadera para cada a en el universo dado. En este caso escribimos

$$\forall x \, [p(x) \implies q(x)]$$

Observar que se puede hacer una definición análoga para proposiciones que tengan dos o más variables.

Definición

Para las proposiciones abiertas $p(x)$ y $q(x)$ y la proposición cuantificada en forma universal $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$ definimos

- La *contrapositiva:* $\forall x\,[\neg q(x) \to \neg p(x)]$
- La *recíproca:* $\forall x\,[q(x) \to p(x)]$
- La *inversa:* $\forall x\,[\neg p(x) \to \neg q(x)]$

Equivalencias e implicaciones lógicas para proposiciones cuantificadas

1. $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \implies [\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)]$ (no vale la recíproca)
2. $\exists x\,[p(x) \vee q(x)] \iff [\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(x)]$
3. $\forall x\,[p(x) \wedge q(x)] \iff [\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)]$
4. $[\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)] \implies \forall x\,[p(x) \vee q(x)]$ (no vale la recíproca)

Ejercicio

1. $\forall x\, [p(x) \wedge (q(x) \wedge r(x))] \iff \forall x\, [(p(x) \wedge (q(x)) \wedge r(x)]$
2. $\exists x\, [p(x) \to q(x)] \implies \exists x\, [\neg p(x) \vee q(x)]$
3.
   - $\forall x\, \neg\neg p(x) \iff \forall x\, p(x)$
   - $\forall x\, \neg[p(x) \wedge q(x)] \iff \forall x\, [\neg p(x) \vee \neg q(x)]$
   - $\forall x\, \neg[p(x) \vee q(x)] \iff \forall x\, [\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$
4. El ítem anterior también es cierto reemplazando todos los $\forall$ por $\exists$
5. etc.

Negación de cuantificadores

Hay dos reglas fundamentales para negar los cuantificadores existenciales y universales

1. $\neg[\exists x\, p(x)] \iff \forall x\, \neg p(x)$
2. $\neg[\forall x\, p(x)] \iff \exists x\, \neg p(x)$

Ejemplo

Usando las reglas anteriores:

1. $\neg[\exists x\, \neg p(x)] \iff \forall x\, \neg\neg p(x) \iff \forall x\, p(x)$
2. $\neg[\forall x\, \neg p(x)] \iff \exists x\, \neg\neg p(x) \iff \exists x\, p(x)$

Ejemplo

Consideremos la proposición (con universo los enteros):

Si x es impar, entonces $x^2 - 1$ es par

la cual en símbolos puede representarse por

$$\forall x\, [p(x) \to q(x)] \qquad \text{en donde } \begin{cases} p(x) : x \text{ es impar} \\ q(x) : x^2 - 1 \text{ es par} \end{cases}$$

Para determinar la negación:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x\, [p(x) \to q(x)]) &\iff \exists x\, \neg[p(x) \to q(x)] \iff \exists x\, \neg[\neg p(x) \vee q(x)] \\ &\iff \exists x\, [\neg\neg p(x) \wedge \neg q(x)] \iff \exists x\, [p(x) \wedge \neg q(x)] \end{aligned}$$

En palabras:

Existe un x tal que x es impar y $x^2 - 1$ es impar.

Observación

Si $p(x, y)$ es una proposición abierta en dos variables, entonces

$$\forall x \, \forall y \; p(x, y) \iff \forall y \, \forall x \; p(x, y)$$

- De hecho, en general simplificamos los cuantificadores anteriores escribiendo simplemente $\forall x, y \; p(x, y)$.
- El resultado anterior también es cierto para cuantificadores universales sobre proposiciones con un número arbitrario de variables (y para cualquier permutación de las variables cuantificadas).
- Ejercicio: ¿es cierto lo anterior para cuantificadores existenciales?

Reglas de inferencia

- Las reglas de inferencia nos permiten decidir cuándo un argumento es válido sin tener que recurrir a extensas tablas de verdad (es lo que usamos en la práctica, de manera más coloquial cuando demostramos teoremas o resolvemos ejercicios).
- Un *argumento válido* es una tautología

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k) \rightarrow q$$

  - premisas: $p_1, p_2, \ldots, p_k$
  - conclusión: q
- En un argumento válido, si sabemos que todas las premisas son verdaderas, automáticamente sabremos que la conclusión es verdadera.

Ejemplo

Demostrar la siguiente implicación lógica:

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \implies \neg p.$$

- Hay que probar que el condicional

  $$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \to \neg p \qquad (*)$$

  es una tautología.
- Si usáramos tablas de verdad, necesitaríamos $2^5 = 32$ filas y varias columnas...
- Sin embargo, podemos tratar de probar que (*) siempre toma el valor verdadero sin usar tablas de verdad.

Ejemplo (cont.)

- Para que (*) sea falso debemos tener que el *antecedente* es verdadero y el *consecuente* es falso:
  - $(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u$ es verdadero, o sea,

    $$p \to r, \qquad r \to s, \qquad t \vee \neg s, \qquad \neg t \vee u, \qquad \neg u$$

    son todas verdaderas.
  - $\neg p$ falso, o sea p verdadero.
  - Si p verdadero y $p \to r$ verdadero, r debe ser verdadero.
  - Si r verdadero y $r \to s$ verdadero, dice que s verdadero.
  - s verdadero dice que $\neg s$ es falso, y como $t \vee \neg s$ es verdadero, t debe ser verdadero.
  - Ídem, t verdadero y $\neg t \vee u$ verdadero nos dice que u es verdadero.
  - Luego tenemos que u y $\neg u$ deben ser ambas verdaderas, lo cual sabemos que no es cierto.
- Es decir, no hay ninguna posibilidad de que si hiciéramos la tabla de verdad, en la última columna nos aparezca algún falso, ¡en ninguna fila!

Modus Ponens

Sabemos (ejercicio) que

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

es una tautología. Esto nos dice que si sabemos que p es verdadera y $p \to q$ es verdadera, entonces q debe ser verdadera. Esta *regla de inferencia* suele representarse con una tabla:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

A veces también se escribe como

$$\frac{p \to q \qquad p}{q}$$

Modus Tollens

- Regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

- Tautología asociada: $[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p$ (ejercicio).
- Para probar que el condicional anterior es una tautología podemos usar las reglas de sustitución con la equivalencia lógica $(p \to q) \iff (\neg q \to \neg p)$ y luego la regla de inferencia Modus Ponens.
- Informalmente el Modus Tollens se usa del siguiente modo: cuando queremos probar la implicación lógica $p \implies q$, uno supone que q es falso y prueba que p es falso también.

Más reglas de inferencia

Ley de silogismo

- Regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

- Tautología asociada

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Reglas de conjunción/disyunción

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Reglas de inferencia sobre bicondicionales

Introducción del bicondicional

- Regla de inferencia

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \to p \end{array}}{p \leftrightarrow q}$$

- Tautología asociada: $[(p \to q) \land (q \to p)] \to (p \leftrightarrow q)$

Eliminación del bicondicional

- Reglas de inferencia:

$$\frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg p \end{array}}{\neg q} \qquad \frac{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \lor q \end{array}}{p \land q} \qquad \text{etc.}$$

- Tautologías asociadas: ejercicio.

Reducción al absurdo

- Regla de inferencia:

$$\frac{p \to F_0}{\neg p}$$

- Tautología asociada: $(p \to F_0) \to \neg p$

p	F_0	$p \to F_0$	$\neg p$
0	0	1	1
1	0	0	0

- Este tipo de argumentos son muy comunes en matemática: cuando queremos probar que "algo" es cierto, suponemos que es falso y tratamos de llegar a una contradicción.

Ejemplo

Las reglas de inferencia se pueden combinar para obtener argumentos válidos. Volvamos al ejemplo que dimos al principio de esta sección.

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \implies \neg p$$

Usando las reglas de inferencia y las reglas de sustitución lo podemos pensar del siguiente modo.

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ t \vee \neg s \\ \neg t \vee u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to s \\ s \to t \\ t \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to t \\ t \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to u \\ \neg u \\ \hline \neg p \end{array}$$

Usamos: Ley de silogismo, las Leyes lógicas $p' \vee q' \iff q' \vee p'$ y $p \to q \iff \neg p \vee q$ y finalmente Modus Tollens

Ejemplo de la vida real

Analicemos la demostración de que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

- Queremos ver $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Suponemos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- Escribimos $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, fracción irreducible.
- Caso 1: m impar, sigue que $m^2 = 2n^2$ es par. Absurdo.
- Caso 2: m par, sigue que n es impar (pues la fracción es irreducible) y que m^2 es múltiplo de 4, pero $m^2 = 2n^2$ no es divisible por 4. Absurdo.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \implies F_0$
- Concluimos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. QED

- $\dfrac{\neg p \to F_0}{p}$
- Reglas de sustitución
- Análisis por casos

$$\begin{array}{l} p \to r \\ q \to r \\ p \vee q \\ \hline r \end{array}$$

Ejercicio: probar que esta es una regla de inferencia válida.

- Ley de silogismo