Polinomios

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

10 de abril de 2021

Porque estudiar funciones polinómicas?

- Permiten que expresemos matemáticamente las leyes elementales de la química o de la física.
- Por ejemplo en MRUA, expresamos la posición en función del tiempo, es un polinomio de grado 2.
- En medicina, se busca la curva que mejor se adapte a los datos$\longrightarrow$ modelizar el ritmo circadiano en pacientes cardiacos, resulta ser un polinomio de grado cuatro (permite optimizar las dosis del medicamento contra la hipertensión).
- Podemos expresar el peso de una persona en función del tiempo.

Funciones polinómicas se utilizan para aproximar curvas más complejas,.... es muy sencillo trabajar con ellas.

Definición

Llamamos función polinómica (o simplemente polinomio), a una función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, ..., n \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Cada término de la forma $a_k x^k$ se denomina un **monomio** y k es el **grado del monomio**. Cada a_k es un coeficiente de p.

Dado un polinomio p, si **n** es el mayor natural tal que $a_n \neq 0$
$\cdots \longrightarrow a_n$ coeficiente principal, Grado$(p) = n$

$$\text{Notamos:} \quad \mathbb{C}[x] = \{p : p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, ..., n\}$$

Polinomio Nulo- Igualdad entre polinomios

Si $a_k = 0$ para cada $k = 0 \cdots n$ entonces $P(x)$ se denomina **polinomio nulo**, y se denota $P = \overline{0}$. **El polinomio nulo no tiene grado**.
Si P es un polinomio de grado 0, P es una funcion constante, es decir, $\exists k \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $P = \overline{k}$.

Definicion de igualdad entre polinomios

Dos polinomios $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{C}[x]$ son IGUALES si tiene igual grado: $n = m$, y $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, ..., n$.

Ejemplo 1: $p(x) = \frac{3}{4}x^4 + ix^3 - sen(\frac{\pi}{4})x$ y $q(x) = 0,75x^4 + ix^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.
$p(x) = q(x)$?

Operaciones entre polinomios- Suma

Con respecto de la suma y el producto en $\mathbb{C}[x]$, valen las mismas propiedades, que ya vieron en el curso de ingreso con los polinomios a coeficientes reales.

Ejemplo 2. Si $P(x) = 2x^3 + 3ix^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 + x^2 + x$, entonces:

$$
\begin{array}{rcccccc}
P(x): & & 2x^3 & +3ix^2 & & +1 \\
+Q(x): & x^4 & +0x^3 & +x^2 & +x & +0 \\
\hline
(P+Q)(x) = & x^4 & +2x^3 & +(3i+1)x^2 & +x & +1
\end{array}
$$

Operaciones entre polinomios- Suma

Definición

Dados los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0$, se define el polinomio $P + Q$ como:

- Si $n = m$, $(P + Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$.
- Si $n > m$, $P + Q = P + Q'$, donde $Q' = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + b_m x^m + b_0$.
- Si $m > n$, $P + Q = P' + Q$, donde P' se define de manera análoga a Q'.

Operaciones entre polinomios- Diferencia-Polinomio opuesto

Para cada polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ existe el **polinomio opuesto de** P: $-P(x) = -a_n x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$. Al tener

cada polinomio un opuesto, puede definirse la operación **diferencia** entre polinomios, en la forma habitual, es decir: $p - q = p + (-q)$.

Definición

Dados dos polinomios P y Q, se define la diferencia entre P y Q por $P - Q = P + (-Q)$, donde $(-Q)$ es el polinomio opuesto de Q.

Ejemplo 3. Si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 + x^2 + x$, entonces:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
P(x): & & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\
-Q(x): & -x^4 & +0x^2 & -x^2 & -x & +0 \\
\hline
(P-Q)(x) = & -x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -x & +1
\end{array}
$$

Operaciones entre polinomios- Producto entre polinomios:

Recordemos que para multiplicar dos polinomios, esencialmente aplicamos la propiedad distributiva y las propiedades de la potencia de números complejos.

Ejemplo 4. Si $P(x) = x^5 - ix^2 + 2x$ y $Q(x) = x^2 + 3$, entonces
$P(x)Q(x) = (x^5 - ix^2 + 2x)(x^2 + 3) = (x^5 - ix^2 + 2x)x^2 + (x^5 - ix^2 + 2x)3 =$

$(x^7 - ix^4 + 2x^3) + (3x^5 - 3ix^2 + 6x) = x^7 + 3x^5 - ix^4 + 2x^3 - 3ix^2 + 6x.$

Definición

Dados los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y
$Q(x) = b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0$, se define el polinomio PQ como:

$$(PQ)(x) = (a_n b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

$$(PQ)(x) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \cdot (\sum_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum_{j=0}^{m} [(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \cdot b_j x^j] = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$$

Teorema (1)

Las operaciones suma y producto en $\mathbb{C}[x]$ *verifican las siguientes propiedades:*

Suma: Es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro (el polinomio nulo $\bar{0}$*), y elementos opuestos.*

Producto: Es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro (el polinomio constante igual a 1: $\bar{1}$*).*

Ambas: Distributiva del producto respecto de la suma.

Queda como ejercicio su prueba

Grado del polinomio suma y grado del polinomio producto

Proposición

Siendo $p, q \in \mathbb{C}[x]$, ambos no polinomios nulos, valen:

$$\left[\begin{array}{l} gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q) \\ gr(p+q) \leq max\{gr(p), gr(q)\} \end{array}\right.$$

Demostración.

Si $gr(p) = n$ y $gr(q) = m$, se tiene que $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. Suponemos $n \leq m$.

- Si hacemos el producto $(p \cdot q)(x)$ obtenemos el polinomio $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j}$ que claramente tiene grado $n+m$ ya que $a_n b_m \neq 0$.
- Si consideramos la suma $[p+q](x)$ obtenemos el polinomio $\sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) \cdot x^i$.

  Aca nos encontramos con que podría ocurrir que $n = m$ y al mismo tiempo $a_n = -b_n$, con lo cual el coeficiente que correspondería a x^n es cero y en consecuencia se tendría $gr(p+q) < n$. En el caso $n < m$, $gr(p+q) = m$.

Divisibilidad .....*existe el polinomio inverso de uno dado?*

Siendo que no hemos definido el inverso multiplicativo de un polinomio...., $\cdots$ ¿existe algún polinomio q que tenga inverso multiplicativo? Es decir existe q^{-1} para algún polinomio q?

Teorema (2)

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, no nulo. Entonces, $\quad p$ tiene inverso $\Leftrightarrow gr(p) = 0$.

Demostración.

Si) $gr(p) = 0 \Rightarrow p = \bar{k}$, para algún $k \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Entonces $q(x) = k^{-1}$ es el polinomio inverso de p ya que $p \cdot q = k \cdot k^{-1} = \bar{1}$.

Solo si) Por hipotesis p admite polinomio inverso $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{C}[x], q \neq \bar{0} \ / \ p \cdot q = \bar{1}$.
Entonces $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q) = gr(\bar{1}) = 0$.
Siendo $gr(p)$ y $gr(q)$ números no negativos surge que ambos deben ser iguales a 0, en particular $gr(p) = 0$. $\square$

¿Podrá definirse una operación **cociente** entre polinomios?

A partir del teorema anterior, vemos que no es posible intentar la definición de cociente entre polinomios en general, es decir que no puede realizarse la división de cualquier polinomio por cualquier otro, *pretendiendo obtener siempre un resultado exacto en* $\mathbb{C}[x]$. Se advierte un comportamiento de los polinomios con respecto a la división semejante al de los números enteros.
Revisemos un poco que ocurre con ellos en este sentido. Estan lo que llamamos "divisiones exactas", $6 \div 3, 20 \div 5$, correspondiéndose a los casos en que el dividendo es múltiplo del divisor.
En $\mathbb{Z}$ hay divisiones no pueden realizarse pretendiendo obtener un resultado que sea un número entero, por ejemplo, . $6 \div 4, \;\; 82 \div 3, \;\; 23 \div 5$, se efectuan trabajando con enteros mediante un procedimiento que convenimos en llamar "división con resto".

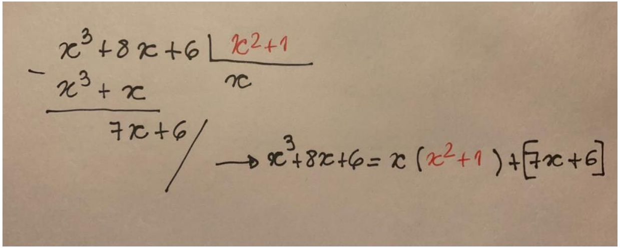
$$\boxed{\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}, \qquad \text{donde} \quad 0 \leq \text{resto} < \text{divisor}}$$

Se obtiene, trabajando en $\mathbb{Z}$ que $6 = 4 \cdot 1 + 2, \;\; 82 = 3 \cdot 27 + 1, \;\; 23 = 5 \cdot 4 + 3$

Que pasa cuando queremos dividir un polinomio p por un polinomio q? Pensemos por ejemplo el polinomio divisor $q(x) = x^2 + 1$ y distintos polinomios dividendos..

Dividendo $p_1(x) = x^3 + x$ $\qquad p_1(x) = x^3 + x = x \cdot (x^2 + 1) + 0$

Dividendo: $p_2(x) = x^3 + 8x + 6$



$$p_2(x) = x^3 + 8x + 6 = x^3 + x + 7x + 6 = x \cdot (x^2 + 1) + [7x + 6]$$

Ejemplos de division entre polinomios

$$p_1(x) = x^3 + x = (x^2 + 1) \cdot x + 0$$
$$p_2(x) = x^3 + 8x + 6 = x \cdot (x^2 + 1) + [7x + 6]$$

Tomando como divisor el polinomio $q(x) = x^2 + 1$ vemos que p_1 es múltiplo de él y por lo tanto la divisiones es exacta, $\cdots$ *cosa que no ocurre con* p_2.
En la práctica, para dividir polinomios se emplea una disposición de los cálculos, a partir de la cual se obtiene en cada caso el cociente y el resto.
En nuestros ejemplos resultaría (después de realizar todo el proceso de división):

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}, \quad \text{siendo } r = \bar{0} \text{ o } 0 \leq gr(\text{resto}) < gr(\text{divisor})}$$

La posibilidad de realizar cualquier división en $\mathbb{C}[x]$, usando el esquema de "división con resto" queda garantizada por el siguiente

Teorema (3)

Sean, $p, q \in \mathbb{C}[x]$*,* $q \neq \bar{0}$*. Entonces existen únicos* $c, r \in \mathbb{C}[x]$*, tales que* $p = c \cdot q + r$*, siendo* $r = \bar{0}$ *o* $0 \leq gr(r) < gr(q)$

Demostración.

Primero veamos la existencia de tales polinomios c y r y para ello consideremos el conjunto P, cuya definición depende de los polinomios p y q:

$$P = \{p - q \cdot h \ : \ h \in \mathbb{C}[x]\} \subseteq \mathbb{C}[x]$$

Existen dos posibilidades:

1) $\bar{0} \in P$

2) $\bar{0} \notin P$

Demostración del Teorema (cont.)

Caso 1): existe un $\hat{h} \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p - q \cdot \hat{h} = \bar{0}$, o sea que $p = q \cdot \hat{h}$, por lo que, considerando $c = \hat{h}$ y $r = \bar{0}$, queda probada la existencia de cociente y resto.

Caso 2) se tiene que $\forall \; h \in \mathbb{C}[x], \qquad p - q \cdot h \neq \bar{0}$

Entonces todo polinomio de P tiene grado y habrá un número que será el menor de todos los grados de los polinomios de P, digamos t.

Sea $h_0 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p - q \cdot h_0$ es de grado mínimo en P, es decir que verifica

$$gr(\underbrace{p - q \cdot h_0}_{\tilde{r}}) \leq gr(p - q \cdot h) \qquad \forall h \in \mathbb{C}[x]$$

Si llamamos $\tilde{r}$ al polinomio $p - q \cdot h_0$, resulta $p = q \cdot h_0 + \tilde{r}$, con $\tilde{r} \neq \bar{0}$ y $\mathrm{gr}(\tilde{r}) = t$.

Bastará probar que $gr(\tilde{r}) < gr(q)$ para que quede demostrado esta parte del teorema.

Demostración del Teorema (cont.)

Lo probaremos por contradicción, notemos

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i \cdot x^i, \quad \tilde{r}(x) = \sum_{i=0}^{t} r_i \cdot x^i, \qquad t = gr(\tilde{r}), \quad m = gr(q)$$

Supongamos $t \geq m$. Construimos el polinomio r_0 sgte

$$r_0(x) = \tilde{r}(x) - \frac{r_t}{q_m} \cdot x^{t-m} \cdot q(x)$$

Observe que

- $gr(r_0) \leq t$
- $r_0(x) = p(x) - q(x) \cdot h_0(x) - \frac{r_t}{q_m} \cdot x^{t-m} \cdot q(x) = p(x) - q(x) \cdot \underbrace{\left(h_0(x) + \frac{r_t}{q_m} \cdot x^{t-m} \right)}_{\in \mathbb{C}[x]}$

$r_0 \in P$ y $gr(r_0) \leq t$ Ahora, observemos que el término de r_0 que corresponde a x^t:
$r_t x^t - \frac{r_t}{q_m} \cdot x^{t-m} \cdot q_m x^m = r_t x^t - r_t x^t = 0 x^t$ por lo que $gr(r_0) < gr(\tilde{r})$¡Contradicción!

Demostración del Teorema (cont.)

Dado que todo este razonamiento se basa en la suposición de que $gr(\tilde{r}) \geq gr(q)$ resulta que $gr(\tilde{r}) < gr(q)$.

Esto completa la prueba sobre la existencia de un polinomio cociente y un polinomio resto.

Veamos ahora la unicidad. Para ello supongamos que tenemos c_1, r_1 y c_2, r_2 tales que

$$p = q \cdot c_1 + r_1, \qquad r_1 = \bar{0} \quad \vee \quad gr(r_1) < gr(q) \tag{1}$$

$$p = q \cdot c_2 + r_2, \qquad r_2 = \bar{0} \quad \vee \quad gr(r_2) < gr(q) \tag{2}$$

Restando m.a.m $\quad \bar{0} = q \cdot (c_1 - c_2) + r_1 - r_2$ y por lo tanto $q \cdot (c_1 - c_2) = (r_2 - r_1)(*)$

Si $r_2 - r_1 \neq \bar{0}$ entonces por un lado, de (1) y (2) resulta $gr(r_2 - r_1) < gr(q)$.

Por el otro resulta $q \cdot (c_1 - c_2) \neq \bar{0}$, de donde

$$gr\left[q \cdot (c_1 - c_2)\right] = gr(q) + gr(c_1 - c_2) \geq gr(q)$$

Vale decir que $gr\left[q \cdot (c_1 - c_2)\right] > gr(r_2 - r_1)$ ¡Contradicción!(*).

Entonces $r_2 - r_1 = \bar{0}$ y se deduce, por un lado que $r_1 = r_2$.

Demostración del Teorema (cont.)

Por el otro surge que $q \cdot (c_1 - c_2) = \bar{0}$ y como $q \neq \bar{0}$ tiene que ser $(c_1 - c_2) = \bar{0}$ por lo que $c_1 = c_2$.

La unicidad queda así probada. $\square$

Corolario

Sean p y $q \in \mathbb{C}[x]$, $q \neq \bar{0}$ tales que $p = c \cdot q + r$, siendo $r = \bar{0}$ o $0 \leq gr(r) < gr(q)$, entonces $gr(c) = gr(p) - gr(q)$.

Demostración.

Tanto en el caso $r = \bar{0}$ como en el caso $gr(r) < gr(q)$ se tiene que
$gr(p) = gr(c) + gr(q)$. $\square$

Hay una situación particular cuando se está dividiendo polinomios que resulta de especial interés: cuando el divisor es de grado igual a 1.

En este caso hay un algoritmo (regla de Ruffini) más rápido que el esquema general de división, lo cual es muy util ya que frecuentemente hay necesidad de efectuar tales divisiones. Veamos primero la justificación teórica del método de división anunciado:

Teorema (Regla de Ruffini)

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces* $p = c \cdot q + r$, *con*

$$r = a_0 + \alpha \cdot b_0$$
$$c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

siendo $b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$

.

y $b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1}$ *para* $i = 0, ..., n-2$

Demostración.

Siendo $gr(q) = 1$ resulta por el corolario anterior, $gr(c) = n - 1$ y $gr(r) = 0$ o sea que r es un polinomio constante (o el polinomio nulo).

Sólo falta verificar que r y los b_i son los del enunciado.

Para ello hagamos "cuentas":

Demostración del Teorema (cont.)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= c(x)\cdot(x-\alpha)+r=\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\cdot(x-\alpha)+r\\
&= (b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})\cdot(x-\alpha)+r\\
&= (b_0x+b_1x^2+\cdots+b_{n-1}x^n)-(b_0\alpha+b_1\alpha x+b_2\alpha x^2+\cdots+b_{n-1}\alpha x^{n+1})+r\\
&= (r-b_0\alpha)+(b_0-b_1\alpha)x+\cdots+(b_{n-2}-b_{n-1}\alpha)x^{n-1}+b_{n-1}x^n
\end{aligned}
$$

Dado que, por hipótesis, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ resulta que

$$
\left\{\begin{array}{lcc}
a_n & = & b_{n-1}\\
a_{n-1} & = & b_{n-2}-b_{n-1}\alpha\\
 & \vdots & \\
a_1 & = & b_0-b_1\alpha\\
a_0 & = & r-b_0\alpha
\end{array}\right.
\quad \text{de donde} \quad
\left\{\begin{array}{lcc}
b_{n-1} & = & a_n\\
b_{n-2} & = & a_{n-1}+\alpha b_{n-1}\\
 & \vdots & \\
b_0 & = & a_1-\alpha b_1\\
r & = & a_0-\alpha b_0
\end{array}\right.
$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

En la práctica suelen disponerse los coeficientes según el siguiente esquema, que como se ve responde a lo demostrado en el teorema:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & \\
\alpha & & \alpha b_{n-1} & \dots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
 & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1} + \alpha b_{n-1}}_{b_{n-2}} & \dots & \underbrace{a_2 + \alpha b_2}_{b_1} & \underbrace{a_1 + \alpha b_1}_{b_0} & \underbrace{a_0 + \alpha b_0}_{r}
\end{array}
$$

Teorema (Teorema del resto)

Si $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces $p(z)$ es igual al resto de la división de p por $x - z$.

Demostración.
Por el Teorema 3 $p(x) = (x-z)\cdot c(x) + r, \quad r \in \mathbb{C}$
Entonces, si consideramos $x = z$ resulta

$$p(z) = \underbrace{(z-z)}_{0} \cdot c(z) + r = r$$

. $\square$

A partir del teorema anterior, dados $p \in \mathbb{C}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, podemos calcular el valor $p(z)$ de dos maneras distintas: por cálculo directo o hallando el resto de la división de p por $x - z$. Según cuáles sean el polinomio y el complejo, será más rápido uno u otro método.
Por ejemplo, si $p(x) = 5x^4 + (5+i)x^2 - (3-i)$ y queremos calcular los valores que asume en los complejos: 0, 1 y $2-i$, sin duda los dos primeros serán calculados más rápido por reemplazo directo.
En efecto:

$$p(0) = 50^4 + (5+i)0^2 - (3-i) = -3+i$$

$$p(1) = 51^4 + (5+i)1^2 - (3-i) = 5+5+i-3+i = 7+2i$$

Raíz (o cero) de un polinomio

El cálculo de $p(2-i)$, sin embargo, parece más cómodo realizarlo así:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 0 & 5+i & 0 & -i \\ \\ 2-i & & 10-5i & 15-20i & 21-58i & -16-137i \\ \hline & 5 & 10-5i & 20-19i & 21-58i & -16-138i \end{array}$$

resultando $p(2-i) = -16-138i$.

Definición

Diremos que z **es raíz** (o cero) de un polinomio p si $p(z) = 0$.

Teorema (4)

Si $p \in \mathbb{C}[x]$ *y* $z \in \mathbb{C}$, *entonces* z *es raíz de* $p \Leftrightarrow x - z$ *divide a* p

Ejercicio.

Factorear polinomios

Uno de los procedimientos más habituales que se llevan a cabo al trabajar con polinomios es el de "factorearlos".

Una vez más la analogía con los enteros puede ayudar a comprender porqué: si tuviéramos que trabajar con la fracción $\frac{340}{8500}$ sin calculadora seguramente empezaríamos por "simplificar" todos los factores comunes que puedan encontrarse en el numerador y denominador Es decir, pensaríamos: $\frac{340}{8500} = \frac{10 \cdot 34}{10 \cdot 850} = \frac{34}{850} = \frac{2 \cdot 17}{2 \cdot 425} = \frac{17}{425} = \frac{17}{17 \cdot 25} = \frac{1}{25}$ o bien,

factoreando en factores primos: $\frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

Si tuviéramos que efectuar la suma $\frac{2x^4+2x^3-10x^2+2x-12}{x^6+6x^4-31x^2-36} + \frac{5}{x^2+9}$ resultaría útil advertir

$\frac{2x^4+2x^3-10x^2+2x-12}{x^6+6x^4-31x^2-36} = \frac{2 \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x^2+1)}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2+9) \cdot (x^2+1)} = \frac{2 \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x^2+9)}$ ya que así se reducen

notablemente los cálculos:

$$\frac{2 \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (x^2+9)} + \frac{5}{x^2+9} = \frac{2 \cdot (x+3) + 5 \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x^2+9)} = \frac{7x+16}{(x+2) \cdot (x^2+9)}$$

Descomposición factorial de un polinomio

En el ejemplo anterior se ve que, en ciertos casos, es conveniente factorear polinomios con los que se está trabajando.
El teorema 4 establece un vínculo entre el problema de factorear un polinomio y el de encontrar una raíz del mismo... Si z es raiz de p, tenemos que $p(x) = (x - z) \cdot C(x)$
¿Todos los polinomios tienen raíces? ¿Cuántas? ¿Cuáles? ¿Cómo las encontramos?
En algunos casos podremos encontrar facilmente todas o algunas raíces de un polinomio. Por ejemplo: si el grado del polinomio es 0, 1 o 2 o bien si el polinomio es del tipo $p(x) = x^n + k$, $k \in \mathbb{C}$ podemos encontrar todas sus raíces; un polinomio del tipo $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ o más en general, del tipo $\sum_{i=p}^{n} a_i x^i, \quad 1 \leq p \leq n$ tiene al número 0 entre sus raíces. Pero no siempre es tan sencillo. Para abordar este aspecto más general será necesario contar con algunas herramientas teóricas. Empezaremos mencionando una propiedad muy importante:

Teorema Fundamental del Álgebra

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ tiene, al menos, una raíz en $\mathbb{C}$.

Del Teorema Fundamental del Álgebra se desprende el siguiente, que da respuesta a algunas de las anteriores preguntas

Teorema (Descomposición factorial de un polinomio)

Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, de grado $n \geq 1$ admite una única descomposición factorial de la forma:
$p(x) = a_n(x - \beta_1)^{l_1}(x - \beta_2)^{l_2} \ldots (x - \beta_r)^{l_r}$, donde $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$ son r raíces distintas de $p(x)$, $l_i \in \mathbb{N}$, y además $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$.

La demostración formal de la existencia de tal descomposición y su unicidad se hace usando el método de inducción (la omitiremos). Daremos una idea sobre cómo surge la descomposición.
Por el Teorema Fundamental del Álgebra, $gr(p) \geq 1 \Rightarrow p$ tiene una raíz α_1 (al menos).

Luego, por el Teorema 3 es $p(x) = (x - \alpha_1) \cdot c_1(x)$, siendo $gr(c_1) = n - 1$.
Si $gr(c_1) \geq 1$, entonces por el T. Fundamental del Álgebra, c_1 tiene una raíz α_2 (al menos).
De nuevo, por el Teorema 3 es $c_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot c_2(x)$, siendo $gr(c_2) = n - 2$.
Continuando con este razonamiento se obtiene $c_{n-1}(x) = (x - \alpha_n) \cdot c_n(x)$, siendo $gr(c_n) = n - n = 0$
Entonces

$$
\begin{aligned}
p(x) = (x - \alpha_1) \cdot c_1(x) &= (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot c_2(x) \\
&= (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \cdot c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Comparando los términos de mayor grado de ambar expresiones de $p(x)$ se deduce que $c_n = a_n$. Por otro lado, algunas de las raíces obtenidas en las sucesivas divisiones podrían ser coincidentes. En tal caso, agrupando los factores correspondientes a raíces iguales se obtiene la expresión de la tesis. Los naturales l_i, que expresan cuántas veces se repitió la raíz α_i, son llamados "multiplicidad de la raíz α_i". Está claro que su suma debe ser igual a n.

Corolario del Teorema de descomposición factorial de un polinomio

Corolario

Usando las mismas notaciones que en el teorema podemos afirmar que:
1) *las únicas raíces de* p *son* $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$
2) *todo polinomio de grado* n *tiene a lo sumo* n *raíces distintas*
3) *si contamos cada raíz tantas veces como su multiplicidad, entonces podemos afirmar que todo polinomio de grado* n *tiene exactamente* n *raíces en* $\mathbb{C}$
4) *si* $k \in \mathbb{C}, \quad k \neq 0$*, entonces el polinomio* $k \cdot p$ *tiene las mismas raíces que* p

Demostración.

todas son inmediatas a partir del teorema. $\square$

Del teorema de la descomposición factorial se desprende que conociendo todas las raíces de un polinomio con sus respectivas multiplicidades y algún dato que permita calcular a_n se puede obtener la ley del mismo.

Ejemplo: Sabiendo que p es el polinomio que tiene a i y $2-i$ como raíces simples, a 1 como raíz doble y tal que $p(-1)=i$ obtener la ley de p.

En principio $p(x)=a_4\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2$.
Además, $p(-1)=a_4\cdot(-1-i)\cdot(-1-2+i)\cdot(-1-1)^2=a_4\cdot 4\cdot(4+2i)=16+8i=i$

luego $a_4=\frac{i}{16+8i}=\frac{1}{40}-\frac{1}{20}i$ y

$$p(x)=(\frac{1}{40}-\frac{1}{20}i)\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2$$

.

Conviene notar que si alguno de los datos anteriores falta no se obtendría un único polinomio.
Si, por ejemplo no se hubiera conocido que $p(-1)=i$, entonces cualquier polinomio de la forma

$$p(x)=a_4\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2 \quad \text{, con } \; a_4\in\mathbb{C}-\{0\}$$

cumpliría los requisitos.

Corolario del Teorema de descomposición factorial de un polinomio

Otra interesante consecuencia del Teorema de descomposición factorial es el siguiente

Corolario

Si $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) = n \geq 2$ y α es una raíz de p, entonces las restantes raíces de p son las raíces del polinomio c tal que $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$

Demostración.

$gr(p) = n \Rightarrow p$ tiene n raíces y c tiene $n - 1$ raíces.
Además si β es raíz de $c(x)$, entonces β es raíz de $p(x)$.
Por lo tanto $\{\text{raíces de } p\} = \{\text{raíces de } c\} \cup \{\alpha\}$. $\square$

Raíces de polinomios a coeficientes enteros-Teorema de Gauss

Teorema (Teorema de Gauss)

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad n > 0$.
Si $\frac{r}{s}$ *es raíz de* p, *(siendo* $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, *primos relativos) entonces (*a_0 *es múltiplo de* r *y* a_n *es múltiplo de* s*).*

Demostración.

$\frac{r}{s}$ es raíz de $p \quad \Rightarrow \quad p(\frac{r}{s}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\frac{r}{s})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{r^i}{s^i} = 0$
Multiplicando a ambos miembros de la última igualdad por s^n resulta

$$s^n \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{r^i}{s^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i s^{n-i} = a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + \cdots + a_n r^n = 0 \qquad (3)$$

de donde surge que $-a_0 s^n = r(a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n r^{n-1})$.
Si $r = 0 \Rightarrow a_0 s^n = 0 \Rightarrow a_0 = 0 (s \neq 0)$, verificándose en este caso la tesis ya que $a_0 = 0$ es múltiplo de $r = 0$.
Si $r \neq 0 \Rightarrow \frac{-a_0 s^n}{r} = \underbrace{a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n r^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}}$, por ser $r, s, a_i \in \mathbb{Z}$.

Demostración cont.

Al ser $\frac{a_0 \cdot s^n}{r} \in \mathbb{Z}$, todo factor primo de r deberá simplificarse con algún factor de a_0 o de s, pero siendo r y s primos entre sí, éstos no tienen factores comunes. Entonces todo factor primo de r deberá simplificarse con algún factor de a_0, o dicho de otra forma, todo factor primo de r es factor de a_0. Por lo tanto r divide a a_0, o dicho de otro modo, a_0 es multiplo de r.

La demostración de que s divide a a_n es análoga a la anterior partiendo de (3) y despejando así:

$$s(a_0 s^{n-1} + a_1 r s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}) = -a_n r^n$$

$\square$

El teorema de Gauss asegura que, para polinomio a coeficientes enteros, vale:

$$\{ \text{ raíces racionales de } p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \} \subset \{ \tfrac{r}{s} : r, s, \in \mathbb{Z}, s \neq 0, r | a_0, s | a_n \}$$

Siendo el conjunto F finito, en la práctica encontraremos todos sus elementos y analizaremos, uno por uno si es raíz de p.

Ejemplo: Obtener la descomposición factorial de
$p(x) = 5x^7 - 25x^6 + 10x^5 + 170x^4 - 455x^3 + 515x^2 - 280x + 60$

	5	-25	10	170	-455	515	-280	60
2		10	-30	-40	260	-390	250	-60
	5	-15	-20	130	-195	125	-30	0
2		10	-10	-60	140	-110	30	
	5	-5	-30	70	-55	15	0	
1		5	0	-30	40	-15		
	5	0	-30	40	-15	0		
1		5	5	-25	15			
	5	5	-25	15	0			
1		5	10	-15				
	5	10	-15	0				
1		5	15					
	5	15	0					
-3		-15						
	5	0						

Entonces las raíces de

$$p(x) = 5x^7 - 25x^6 + 10x^5 + 170x^4 - 455x^3 + 515x^2 - 280x + 60$$

son: 2 (raíz de multiplicidad 2), 1 (raíz de multiplicidad 4) y -3 (raíz simple).

La descomposición factorial de p es:

$$p(x) = 5(x-2)^2(x-1)^4(x+3)$$

Aplicando el teorema de Gauss para factorizar un polinomio a coeficientes racionales

Observemos también, que el teorema de Gauss nos sirve para factorizar polinomios a coeficientes racionales.
Ejemplo: Factorizar el polinomio $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}$.

El mecanismo general es multiplicar y dividir P por el denominador común de todos sus coeficientes para obtener coeficientes enteros. En este caso, multiplicando por 12:

$$P(x) = \frac{12}{12}\,(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12})\ =\ \frac{1}{12}\,(6x^3 - 7x^2 + 1)$$

.

Aplicando el teorema de Gauss para factorizar un polinomio a coeficientes racionales

Aplicando el teorema de Gauss a $C(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$, obtenemos que las posibles raíces racionales de C son $1, -1$, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$.

Evaluando P en cada una de las opciones, vemos que 1, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces de C.
Luego $C(x) = 6(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ y por lo tanto

$$P(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$$

.

Raíces de un polinomio a *coeficientes reales*

El siguiente teorema y sus corolarios brindan información al respecto del conjunto de raíces de un polinomio a *coeficientes reales*:

Teorema

Si un polinomio que tiene todos sus coeficientes reales tiene una raíz compleja α entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz del mismo.

Demostración.

Sean

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, n \quad n > 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Debemos ver que $p(\alpha) = 0 \Rightarrow p(\overline{\alpha}) = 0$. Usando las propiedades de la conjugación de complejos y la hipótesis resulta

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{\alpha}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

$\square$

Raíces de un polinomio a *coeficientes reales*

Corolario

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$.

i) El conjunto $\{\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R} / p(\alpha) = 0\}$ *tiene un número par de elementos.*

ii) Si n *es impar entonces* $\{\alpha \in \mathbb{R} / p(\alpha) = 0\} \neq \emptyset$

Las pruebas son inmediatas a partir del teorema.

<u>Ejemplo:</u> ¿Cuál es el polinomio de menor grado que tiene a 3, -4 y $1 - 6i$ como raíces, siendo el coeficiente del término de mayor grado igual a 8?

De acuerdo al teorema de descomposición factorial resulta

$p(x) = 8(x-3)(x+4)(x-(1-6i)) \in \mathbb{C}[x]$

Ejemplo

Ejemplo: Nos preguntamos ahora: ¿Cuál es el polinomio de menor grado que tiene a 3, -4 y $1-6i$ como raíces, siendo *todos sus coeficientes reales* y el coeficiente del término de mayor grado igual a 8?
Combinando el Teorema de descomposición factorial con el Teorema anterior se ve que, en este caso, deberá ser

$$\begin{aligned} p(x) &= 8(x-3)(x+4)(x-(1-6i))(x-(1+6i)) \\ &= 8(x-3)(x+4)[(x-1)^2-(6i)^2] \\ &= 8(x-3)(x+4)[(x-1)^2+36] \\ &= 8(x-3)(x+4)[x^2-2x+37] \in \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

Corolario

Todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$, de grado positivo, admite una descomposición factorial en factores lineales y cuadráticos, siendo cada uno de ellos a coeficientes reales.
En símbolos: si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$p(x) = a_n(x-\beta_1)^{l_1} \cdots (x-\beta_s)^{l_s}(x^2+\gamma_1 x+\lambda_1)^{h_1} \cdots (x^2+\gamma_t x+\lambda_t)^{h_t}$$

siendo todos los $\beta_i, \gamma_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\qquad l_1 + l_2 + \cdots + l_s + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_t = n$

Demostración.

Sabemos por el Teorema de descomp. factorial, que $p(x) = a_n(x-\beta_1)^{l_1} \cdots (x-\beta_r)^{l_r}$, siendo los β_i todas las raíces de p (diferentes entre sí). Algunas de ellas pueden ser números reales (digamos las s primeras) y las restantes complejas (en el contexto de este corolario, cuando digamos *compleja* interpretaremos *no real*).
Sea $\beta_k = a + ib$ una raíz compleja de p ($a, b \in \mathbb{R}$). Entonces su conjugado también lo es, o sea estará entre las restantes raíces de p.

Demostración (cont).

Consideremos el producto

$$\begin{aligned}(x-\beta_k)\cdot(x-\bar{\beta}_k) &= (x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib))\\ &= [(x-a)-ib]\cdot[(x-a)+ib]\\ &= (x-a)^2+b^2\\ &= x^2-2ax+a^2+b^2 \quad \in \mathbb{R}[x]\end{aligned}$$

Se advierte que las multiplicidades de β_k y $\bar{\beta}_k$ deben coincidir, formándose entre los dos factores lineales que las involucran un *factor cuadrático a coeficientes reales*. Este se repetirá tantas veces como las multiplicidades de β_k y $\bar{\beta}_k$. □