PRÁCTICA 4 - Cálculo Diferencial

1. En cada uno de los siguientes casos, calcular el cociente incremental en el punto $a \in \mathbb{R}$ indicado, determinar si la función es derivable en a y, si existe, calcular su derivada en el punto a.

   -a- $H(t) = \sqrt{5-4t}$, $a = -1$.

   -b- $\varphi(z) = z + \dfrac{9}{z}$, $a = -3$.

   -c- $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$.

   -d- $g(t) = |t|$, $a = 0$.

2. Se sabe que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, donde $f(t) = t^3 - t^2 - t$, indica la posición de una partícula en el instante t. Se pide:

   -a- Calcular la velocidad promedio en un intervalo de tiempo $[a, a+h]$ (cociente incremental) para cada $a \in \mathbb{R}^+$.

   -b- Hallar la velocidad de la partícula en cada tiempo $a > 0$, utilizando la definición de derivada de una función en un punto.

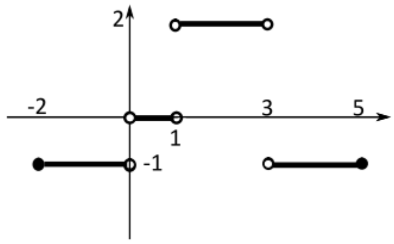
   -c- Hallar el o los valores de a para los cuales la velocidad es nula.

3. Utilizar la siguiente información para trazar la gráfica de la función f en el intervalo $[-2, 5]$:

   -a- $f(-2) = 3$,

   -b- f es continua,

   -c- la gráfica de f' es la que se muestra en la figura.



4. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ ax + b, & x < 2. \end{cases}$$

   determinar los posibles valores de a y b para los cuales la función g es derivable en el punto 2 y calcular, a continuación, la función derivada de la función g.

5. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0, \\ x^3 + 1, & x < 0. \end{cases}$$

   -a- Mostrar que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$.

   -b- Analizar la existencia de las derivadas laterales de la función f en el punto 0.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-c- Analizar la derivabilidad de la función f en el punto 0.

6. Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   -a- A partir de la definición de derivada en un punto demostrar que la función f es derivable en su dominio y, además, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

   -b- Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $8x + 2y + 5 = 0$.

   -c- Mostrar que la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto cualquiera se interseca con la misma en un único punto.

7. Sea $f: D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$ simétrico con respecto al origen.

   -a- Probar que si f es una función par y derivable en un punto $x \in D$ entonces es también derivable en el punto $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = -f'(x)$.

   -b- Probar que si f es una función impar y derivable en un punto $x \in D$ entonces es también derivable en el punto $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = f'(x)$.

   -c- De lo anterior, obtener que la función derivada de una función par (impar) es una función impar (par).

8. Hallar la función derivada de cada una de las siguientes funciones, indicando su dominio.

   -a- $f_1(x) = x^2 + x + 2$;

   -b- $f_2(x) = \dfrac{-3x}{x+1}$;

   -c- $f_3(x) = x^4 + 2\operatorname{sen} x$;

   -d- $f_4(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$;

   -e- $f_5(x) = x^5 \cos x$;

   -f- $f_6(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x^{-2}\tan x$.

9. Una pelota es lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de $49\mathrm{m/seg}$. La altura en el instante t viene dada por la función

$$x(t) = -4{,}9t^2 + 49t.$$

   -a- Determinar la altura máxima alcanzada por la pelota.

   -b- Calcule la velocidad de la pelota cuando se encuentra a $19{,}6\mathrm{m}$ del suelo y va hacia arriba.

10. Un objeto se mueve por una línea recta con velocidad dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.

11. Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

12. Sea la función

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x, & x \leq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2} + bx + c, & x > 0. \end{cases}$$

   -a- Determinar los valores de b y c para que la función h sea derivable en $\mathbb{R}$. Justificar.

   -b- Para los valores encontrados en el ítem anterior, realizar la gráfica de la función h'.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

13. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 12x$ que sean paralelas al eje x.

14. Probar que en la parábola $y = rx^2 + sx + 1$, la cuerda que une los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, es paralela a la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = \dfrac{a+b}{2}$.

15. Sea f una función tal que $f(1) = 3$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ y $f''(1) = 4$. Se define la función $g(x) = x^2 f(x)$. Calcular: $g(1)$, $g'(1)$ y $g''(1)$.

16. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función:

-a- $f_1(x) = \left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^4$,

-b- $f_2(x) = \cos x \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$,

-c- $f_3(x) = \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)}{x}$,

-d- $f_4(x) = \left(\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{-2}$,

-e- $f_5(x) = \tan \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

-f- $f_6(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 (3 - 2x)^2$.

17. Siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, calcular la derivada de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica la igualdad:

-a- $g(x) = f(f(a) + x)$,

-b- $g(x) = f(f(a)x)$,

-c- $g(x) = f(x + f(x))$,

-d- $g(x) = (x - a)f(x)$,

-e- $g(x) = (x - a)f(a)$,

-f- $g(x) = f\left((x - 3)^2\right)$.

18. Si $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(4) = 0$, $g'(4) = -1$ y la función h está definida por $h(x) = [f(g(x))]^2 + x$, hallar $h'(4)$.

19. Sea $f(x) = \tan x$ definida para todo $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Si su función inversa es $f^{-1}(y) = \arctan y$, con $y \in \mathbb{R}$, demostrar que:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

20. Sea la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x + 1$, para todo $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

-a- Demostrar que f admite inversa.

-b- Calcular $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

21. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función.

-a- $f_1(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 3\left(x^{-\frac{3}{2}} + \pi^{\frac{1}{7}}\right)$,

-b- $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$,

-c- $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,

-d- $f_4(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

-e- $f_5(x) = \ln(x+1) + x^2 e^{-3x}$,

-f- $f_6(x) = \operatorname{sen}\left(x + \sqrt{2x+1}\right)$,

-g- $f_7(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$,

-h- $f_8(x) = xe^{-x^2} + \ln(x^2)e^x$,

-i- $f_9(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$,

-j- $f_{10}(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

22. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b.

23. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

-a- Dibujar la gráfica de f para el intervalo $[0, 2]$.

-b- Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

24. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$ pero que f' no tiene raíces en el intervalo $[-1, 1]$. Explicar por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.

25. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.

26. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse si el rectángulo tiene como lados:

-a- 10 y 10,

-b- 12 y 18.

27. Un cubo se expande de tal forma que su arista cambia a razón de $5\mathrm{cm}$ por segundo. Cuando su arista es de $4\mathrm{cm}$, hallar la razón de cambio del volumen.

28. Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 mm por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de $3\mathrm{cm}$?

29. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ de tal forma que la abscisa cambia a razón de 3 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?

30. En lo alto de un farol brilla una luz a 6 metros del suelo. Una mujer de estatura $1,60$ metros se aleja caminando desde el farol.

-a- Hallar la razón en que aumenta su sombra si se aleja a razón de $1,20$ metros por segundos.

-b- Si ahora la mujer camina hacia la luz, hallar la razón en que su sombra decrece si camina a razón de 1 metro por segundo.

31. Un depósito de $3\mathrm{m}$ de altura tiene la forma de un cono con el vértice hacia abajo. El radio en la parte superior es de $1{,}25\mathrm{m}$. Se le echa agua a razón de $0{,}15\mathrm{m}^3$ por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el agua si la profundidad de ésta es de $1{,}5\mathrm{m}$?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119