Resolución de algunos ejercicios del Parcial 1

☞ Sea $f(x) = 3x + 2$ con $Dom(f) = [-1, 2]$.

a) Probar de forma analítica que f admite inversa.

b) Sin usar la ley de f^{-1}, realizar las gráficas de f y de f^{-1}. Justificar cómo se obtienen estás gráficas (sin el uso de software).

c) Hallar el dominio de f^{-1} a partir de la gráfica realizada en el item anterior.

d) Determinar analíticamente el dominio de f^{-1} y la ley de f^{-1}.

e) Analizar la veracidad de los siguientes enunciados:

i) $(f^{-1} \circ f)(0) = 2$.
ii) $Dom(f^{-1} \circ f) = [-1, 8]$.
iii) $(f \circ f^{-1})(7) = 7$.

✎ **a)** Para probar que f admite inversa debemos probar que f es inyectiva. Veamos esto.
Sean $x_1, x_2 \in Dom(f) = [-1, 2]$, luego:

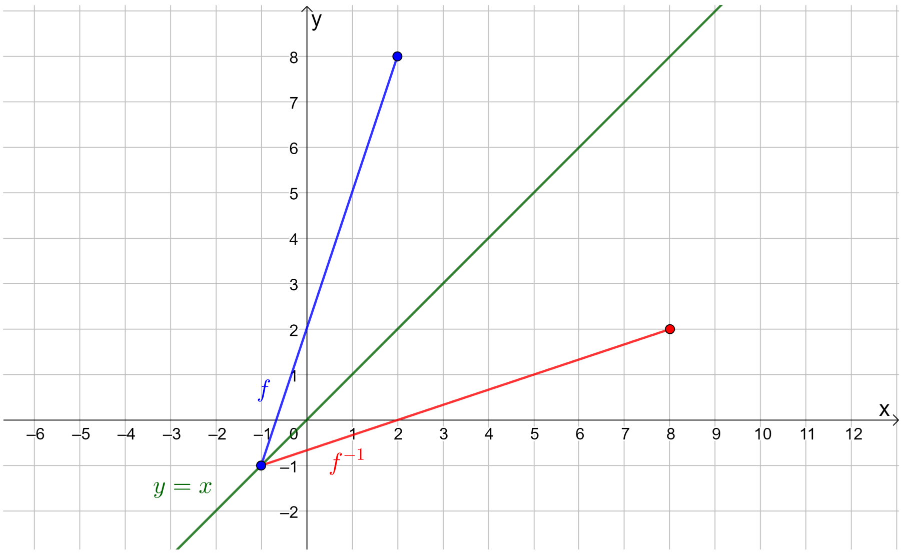
$$f(x_1) = f(x_2) \implies 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \overset{(1)}{\implies} 3x_1 = 3x_2 \overset{(2)}{\implies} x_1 = x_2.$$

(1) Propiedad cancelativa de la suma.

(2) Propiedad cancelativa del producto.

Resulta f inyectiva y por lo tanto admite inversa.

b) Dado que f es una función lineal definida en $Dom(f) = [-1, 2]$, su gráfica es un segmento que une los puntos $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ y $(2, f(2)) = (2, 8)$.
La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando respecto de la recta identidad $y = x$ a la gráfica de f, es decir que es un segmento que une los puntos $(-1, -1)$ y $(8, 2)$.



c) A partir de la gráfica vemos que $Dom(f^{-1}) = Rec(f) = [-1, 8]$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

d) Veamos en primer lugar que $Rec(f) = [-1, 8]$.

- $\subseteq$) Sea $y \in Rec(f)$. Luego $\exists x \in Dom(f) = [-1, 2]$ tal que $f(x) = y$.
  $-1 \leq x \leq 2 \implies -3 \leq 3x \leq 6 \implies -1 \leq \underbrace{3x + 2}_{y} \leq 8 \implies -1 \leq y \leq 8$.

  Por lo tanto $Rec(f) \subseteq [-1, 8]$. (A)

- $\supseteq$) Sea $y \in [-1, 8]$. Sea $x = \dfrac{y-2}{3}$. Veamos que $x \in Dom(f) = [-1, 2]$ y que $f(x) = y$.

  $-1 \leq y \leq 8 \implies -3 \leq y - 2 \leq 6 \implies -1 \leq \underbrace{\dfrac{y-2}{3}}_{x} \leq 2 \implies -1 \leq x \leq 2$.

  $$f(x) = f\left(\underbrace{\frac{y-2}{3}}_{x}\right) = \cancel{3}\frac{y-2}{\cancel{3}} + 2 = y - \cancel{2} + \cancel{2} = y.$$

  Es decir que $\exists x \in Dom(f) = [-1, 2]$ tal que $f(x) = y \implies y \in Rec(f)$.
  Por lo tanto $Rec(f) \supseteq [-1, 8]$. (B)

De (A) y (B) resulta $Rec(f) = [-1, 8] \implies Dom(f^{-1}) = Rec(f) = [-1, 8]$.

Ahora obtengamos la ley de f^{-1}. Recordemos que $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.
$f(x) = 3x + 2 = y \iff 3x = y - 2 \iff x = \dfrac{y-2}{3}$.
$\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3} \iff f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.
En definitiva resulta:

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 8] &\to [-1, 2] \\ x &\to f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}. \end{aligned}$$

e) i) $(f^{-1} \circ f)(0) = 2$ es falso ya que $(f^{-1} \circ f)(x) = x \; \forall x \in Dom(f)$ por ser f^{-1} la inversa de f.
ii) $Dom(f^{-1} \circ f) = [-1, 8]$ es falso ya que $Dom(f^{-1} \circ f) = Dom(f) = [-1, 2]$ puesto que $f^{-1} \circ f$ es la función identidad en $Dom(f)$.
iii) $(f \circ f^{-1})(7) = 7$ es verdadero ya que $f \circ f^{-1}$ es la función identidad en $Dom(f^{-1}) = [-1, 8]$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞

a) Sea f la función definida por $f(x) = e^{-x} + \cos(x)$.

Analice la monotonía de la función f en el intervalo $[0, \pi]$.

Use la monotonía de la función exponencial y del coseno para justificar adecuadamente.

b) Sean f y g dos funciones crecientes en sus respectivos dominios.

Demuestre que la función $h = f \circ g$ también es creciente en su dominio.

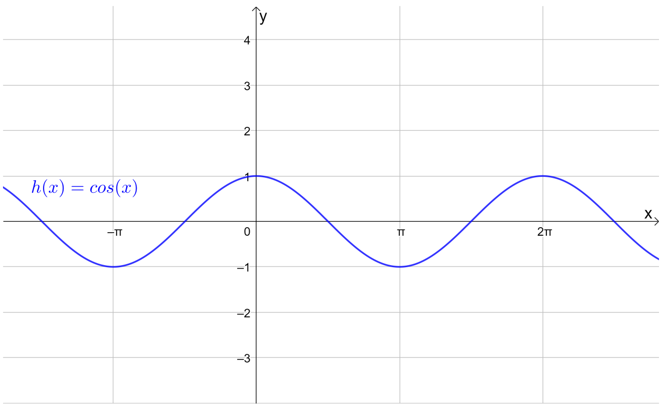
✎ **a)** Veamos que $f(x) = e^{-x} + \cos(x)$ es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$.

- $g(x) = e^{-x}$ es decreciente en $\mathbb{R}$ puesto que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

  $x_1 < x_2 \implies -x_1 > -x_2 \overset{(1)}{\implies} e^{-x_1} > e^{-x_2}$.

  (1) e^x función creciente en $\mathbb{R}$.

- $h(x) = \cos(x)$ es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$:



Ahora veamos que $f = g + h$ es decreciente en $[0, \pi]$. Sean $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, luego:

$x_1 < x_2 \overset{(2)}{\implies} g(x_1) > g(x_2) \ \wedge \ h(x_1) > h(x_2) \overset{(3)}{\implies} g(x_1) + h(x_1) > g(x_2) + h(x_2) \implies f(x_1) > f(x_2)$.

(2) g y h funciones decrecientes en $[0, \pi]$.

(3) Teorema 7-2 (unidad 1).

b) Sean f y g dos funciones crecientes en sus respectivos dominios. Veamos que la función $h = f \circ g$ también es creciente en su dominio. Para ello sean $x_1, x_2 \in Dom(f \circ g)$, luego:

$x_1 < x_2 \overset{(4)}{\implies} g(x_1) < g(x_2) \overset{(5)}{\implies} f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \implies (f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$.

(4) g creciente en su dominio y $x_1, x_2 \in Dom(f \circ g) \implies x_1, x_2 \in Dom(g)$.

(5) f creciente en su dominio y $x_1, x_2 \in Dom(f \circ g) \implies g(x_1), g(x_2) \in Dom(f)$.

☞ Sea $[x]$ la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. Considerar el conjunto de números reales:

$$B = \left\{ \frac{1}{[x]} + 4 : x \geq 1 \right\}.$$

a) Demostrar que si $x \geq 1$ entonces $0 \leq \dfrac{1}{[x]} \leq 1$.

b) Probar que B está acotado superiormente e inferiormente.

c) En base a la respuesta del item anterior: ¿B tiene supremo? ¿B tiene ínfimo? Justificar adecuadamente las respuestas.

d) ¿B tiene máximo? ¿B tiene mínimo? Justificar adecuadamente las respuestas.

✎ **a)** Sea $x \geq 1$. Queremos ver que $0 \leq \dfrac{1}{[x]} \leq 1$.

Por definición de parte entera, siendo $x \geq 1$ resulta $[x] \geq 1 > 0$.

Al ser $0 < 1 \leq [x]$, por Teorema 7-10 (unidad 1) resulta $0 < \dfrac{1}{[x]} \leq \dfrac{1}{1} \implies 0 < \dfrac{1}{[x]} \leq 1 \implies 0 \leq \dfrac{1}{[x]} \leq 1$ como queríamos ver.

b) En el item anterior probamos que si $x \geq 1$, entonces $0 \leq \dfrac{1}{[x]} \leq 1 \implies 4 \leq \dfrac{1}{[x]} + 4 \leq 5$.

Siendo $B = \left\{ \dfrac{1}{[x]} + 4 : x \geq 1 \right\}$, resulta que 5 es una cota superior de B y 4 es una cota inferior de B y por lo tanto B está acotado superiormente e inferiormente.

c) Siendo $B \neq \emptyset$ pues por ejemplo $\dfrac{1}{[1]} + 4 = \dfrac{1}{1} + 4 = 5 \in B$ y B acotado superiormente, resulta por Axioma 10 (axioma del supremo, unidad 1) que B tiene supremo. Por otro lado, nuevamente siendo $B \neq \emptyset$ y B acotado inferiormente, resulta por Teorema 12 (unidad 1) que B tiene ínfimo.

d) B tiene máximo y es $max(B) = 5$ puesto que satisface la definición de máximo:

- $b \leq 5 \; \forall b \in B$ por lo probado en el item b).
- $5 \in B$ por lo visto en el item c).

Para ver que B no tiene mínimo, en primer lugar veamos que $inf(B) = 4$ ya que satisface la definición de ínfimo:

- $b \geq 4 \; \forall b \in B$ por lo probado en el item b).
- Si $c > 4$, entonces c no es una cota inferior de B puesto que:

  $c > 4 \implies c - 4 > 0 \overset{(1)}{\implies} \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < c - 4 \implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} + 4 < c \overset{(2)}{\implies} \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{[n]} + 4 < c \implies \exists b \in B$ tal que $b < c$.

  (1) Corolario 5-iii (de la Propiedad Arquimediana, unidad 1).

  (2) $[n] = n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, $4 \notin B$ ya que por lo visto en el item a) si $x \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{[x]} > 0 \implies \dfrac{1}{[x]} + 4 > 4$.

Siendo $inf(B) = 4$ y $4 \notin B$ resulta que B no tiene mínimo.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119