Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2021

Unidad 2: Teorema Fundamental del cálculo infinitesimal.

Esta sección va a mostrar uno de los resultados más importantes del cálculo infinitesimal. Muestra la relación entre derivadas e integrales, temas que integran el programa de este primer año y que son fundamentales en matemática y en muchas otras ciencias por sus amplias aplicaciones.

Supongamos que f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

El resultado que veremos es que F va a tener características "buenas".

Teorema 28. *Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \tag{1}$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

Demostración:

Supongamos que $c \in [a, b]$. Como f es integrable en $[a, b]$, entonces por definición, f es acotada. Por lo tanto existe M tal que

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Sea $h > 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt = \int_c^{c+h} f(t)\, dt.$$

De la acotación dada arriba, se tiene

$$-M \leq f(x) \leq M \qquad \text{para todo } x,$$

y se sigue del Teorema 27 de la Unidad 1 que

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f(t)\, dt \leq Mh;$$

es decir que

$$- M\,h \leq F(c+h) - F(c) \leq M\,h. \tag{2}$$

Si $h < 0$ puede deducirse una desigualdad semejante; en efecto, $c + h < c$ y

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\,dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)\,dt.$$

Aplicamos nuevamente el Teorema 27 al intervalo $[c+h, c]$ de longitud $-h$, obtenemos

$$-M(-h) = Mh \leq \int_{c+h}^{c} f(t)\,dt \leq -Mh,$$

de donde multiplicando por -1 tendremos

$$Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq -Mh. \tag{3}$$

Las desigualdades (2) y (3) implican la siguiente desigualdad:

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M\,|h|.$$

Por lo tanto para $\varepsilon > 0$, se tiene

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon,$$

si vale $|h| < \varepsilon/M$, lo cual demuestra que

$$\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c),$$

es decir F es continua en c. □

Visto el resultado anterior, es natural preguntar cómo resulta F bajo la condición f continua. En efecto F resulta derivable y su derivada es particularmente sencilla.

Teorema 29. *Sea f integrable en el intervalo $[a,b]$ y sea F definida por la ecuación (1). Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces F es derivable en c y*

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por derecha o por izquierda respectivamente).

Demostración:

Supondremos que $c \in (a,b)$. Queda como **ejercicio** pensar en los casos $c = a$ o b. Por definición,

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

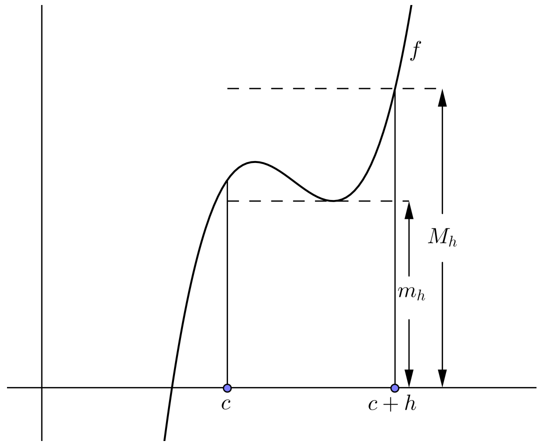
si este límite existe.

Supongamos primero $h > 0$. Luego

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

Definamos m_h y M_h respectivamente por

$$m_h = \text{ínf}\{f(x) \,:\, c \leq x \leq c+h\}, \qquad M_h = \sup\{f(x) \,:\, c \leq x \leq c+h\}.$$



Se sigue del Teorema 27 de la Unidad 1, que

$$m_h\, h \leq \int_c^{c+h} f(t)\, dt \leq M_h\, h,$$

lo cual implica

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h. \tag{4}$$

Si $h \leq 0$ razonamos como sigue. Definimos m_h y M_h de manera similar:

$$m_h = \text{ínf}\{f(x) \,:\, c+h \leq x \leq c\}, \qquad M_h = \sup\{f(x) \,:\, c+h \leq x \leq c\}.$$

Entonces

$$m_h\,(-h) \leq \int_{c+h}^{c} f(t)\, dt \leq M_h\,(-h),$$

y puesto que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\, dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)\, dt,$$

se obtiene

$$m_h\, h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h\, h.$$

Como $h < 0$, la división por h invierte nuevamente las desigualdades y obtenemos la relación en (4). Observemos que esta relación se cumple para cualquier función integrable. Puesto que tenemos la hipótesis de continuidad en c, obtenemos

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

lo cual prueba que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

$\square$

Aunque el teorema anterior trata solamente de la función que se obtiene al variar el límite superior de la integral, podemos hacer algo similar con el límite inferior. Para eso, en las hipótesis de antes, definamos G por

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt,$$

entonces

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Luego si f es continua en c entonces derivamos la expresión anterior respecto de x y obtenemos

$$G'(c) = -f(c).$$

Esta última relación permite extender el teorema anterior al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

esté definida incluso para $x < a$. En tal caso, escribimos

$$F(x) = -\int_x^a f(t)\,dt,$$

de modo que si $c < a$, tenemos

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c), \tag{5}$$

exactamente lo mismo que antes. (!!)

Observemos que en cualquier caso, la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Además si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$ la función F resultará *derivable* en todos los puntos de $[a, b]$ y

$$F' = f.$$

En general es muy difícil decidir cuándo una función dada f es la derivada de alguna otra función. Sin embargo si f es continua, por el teorema anterior sabemos que f es la derivada de la función F.

Corolario 30. *Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Demostración:

Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces $F' = f = g'$ sobre $[a, b]$. En consecuencia existe una constante c tal que $F = g + c$. Tal número c puede calcularse fácilmente haciendo

$$F(a) = 0 = g(a) + c,$$

de modo que $c = -g(a)$. Así tenemos

$$F(x) = g(x) - g(a), \qquad \text{para todo x},$$

y en particular para $x = b$ se tiene

$$\int_a^{x=b} f(t)\, dt = F(b) = g(b) - g(a),$$

□

Observemos que usando este corolario y sin calcular sumas superiores ni inferiores, obtenemos

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Análogamente, se pueden tratar otras potencias: si n es un número natural y $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, entonces $g'(x) = x^n$, de modo que

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Por otro lado, para cualquier número natural n, la función $f(x) = x^{-n}$ no está acotada en ningún intervalo que contenga 0, pero si a y b son ambos positivos, o ambos negativos, entonces

$$\int_a^b x^{-n}\, dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Naturalmente esta fórmula se cumple solamente para $n \neq -1$. *No conocemos ninguna expresión sencilla para*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx.$$

Estudiaremos esta integral más adelante.

Observación. La conclusión del corolario a veces se confunde con la definición de la integral. Debemos remarcar siempre el buen concepto de integrabilidad. Observemos que una función puede ser integrable sin ser la derivada de ninguna función. Por ejemplo definamos $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \neq 1 \\ 1 & \text{si} & x = 1 \end{cases}.$$

Luego f es integrable pero *no* puede ser una derivada... (¿por qué? **ejercicio**).

Leamos bien la hipótesis del Teorema... f es continua. Y en ese caso sabemos que $f = g'$ para alguna función g; pero sabemos esto solamente por el teorema.

La función $1/x$ proporciona un excelente ejemplo: si $x > 0$, entonces $f(x) = g'(x)$, donde

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

y hasta el momento no conocemos ninguna función con esta propiedad.

Otras aplicaciones del Corolario.

Recordemos las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$sen'(x) = cos(x), \qquad \cos'(x) = -sen(x), \qquad tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}, \qquad cotan'(x) = -\frac{1}{sen^2(x)}.$$

Observemos que mientras las funciones seno y coseno son continuas y están definidas en todos los números reales, no ocurre lo mismo con las funciones tangente y cotangente (¿cuál es el dominio de estas funciones?).

Acabamos de decir que una función f puede ser de la forma g' aunque f no sea continua, y en este caso vale un reultado similar al del teorema dado. Sin embargo la demostración es diferente y hace uso de la definición misma de integrales.

Teorema 31. *Sea f integrable sobre $[a, b]$ y supongamos que $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Demostración:

Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Por el Teorema del Valor Medio existe un punto $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Sean $m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, entonces ocurre

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

lo que coincide con

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumemos estas ecuaciones sobre i para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

de donde se deduce que para cualquier partición P se tiene

$$L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P).$$

Luego tomando supremo a la izquierda e ínfimo a la derecha, resulta que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

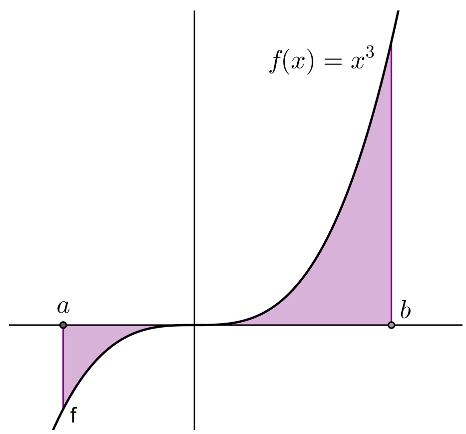
□

Volvamos al tema del área. Como ya indicamos la integral de una función en un intervalo $[a, b]$ no representa siempre el área limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal y las verticales por $(a, 0)$ y $(b, 0)$. Por ejemplo si $a < 0 < b$ y tomamos $f(x) = x^3$, entonces la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

no representa el área de la región indicada en la siguiente figura. En efecto el área (que es siempre no negativa!) viene dada por

$$-\int_a^0 x^3\, dx + \int_a^b x^3\, dx = \frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4}.$$

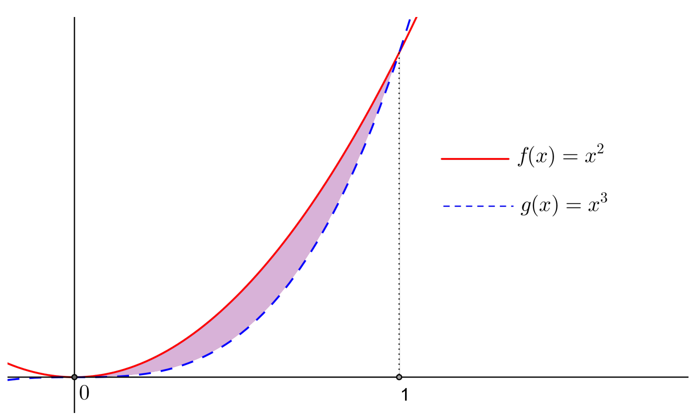


Supongamos que queremos hallar el área entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$. Lo que hay que pensar es cómo son estas funciones. Claramente ambas son positivas en $(0, 1]$ y puesto que $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $0 \leq x^3 \leq x^2$. Luego para hallar el área entre estas dos funciones en el intervalo $[0, 1]$ procedemos calculando el área bajo la gráfica de x^2 en el $[0, 1]$ y restamos el área bajo la gráfica de x^3 en el $[0, 1]$, es decir

$$\text{área } R(f, 0, 1) - \text{ área } R(g, 0, 1),$$

la cual es

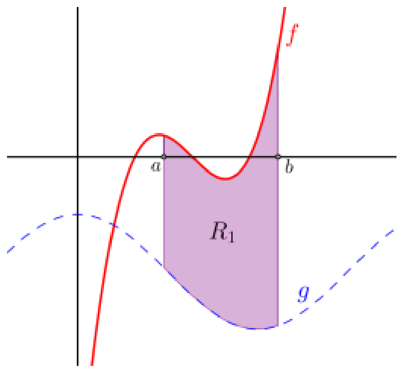
$$\int_0^1 x^2\, dx - \int_0^1 x^3\, dx = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

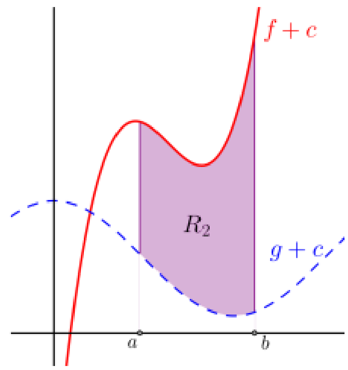


Esta área podría haberse expresado por

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx.$$

Si $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces esta integral coincide con el área limitada por f y g, aunque f y g sean algunas veces negativas, como se puede ver en la figura siguiente.





Si c es un número tal que $f+c$ y $g+c$ son no negativas sobre $[a,b]$, entonces la región limitada por f y g, R_1, tiene la misma área que la región R_2, limitada por $f+c$ y $g+c$. Luego,

$$\begin{aligned}
\text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \textstyle\int_a^b (f+c)(x)\,dx - \int_a^b (g+c)(x)\,dx \\
&= \textstyle\int_a^b [(f+c)-(g+c)](x)\,dx \\
&= \textstyle\int_a^b (f-g)(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Veamos el siguiente problema: hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2.$$

Lo primero es *determinar precisamente* la región. Para ello planteamos

$$x^3 - x = x^2.$$

Y encontramos las soluciones de esta ecuación, esto es

$$0 = x^3 - x - x^2 = x(x^2 - 1 - x).$$

Está claro que una de las soluciones es $x = 0$ y las restantes son las soluciones de la ecuación cuadrática, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

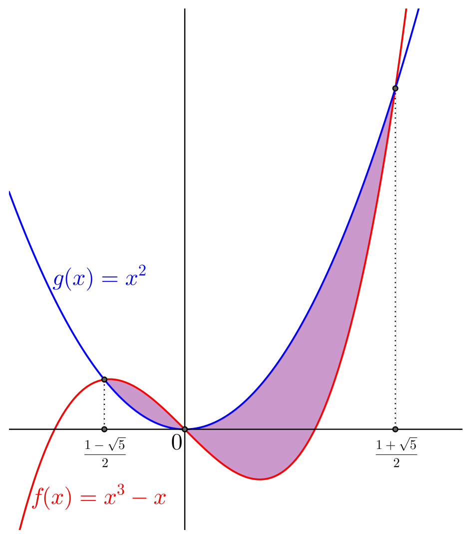
Entre estos puntos queda determinada entonces la región buscada. Observemos que

- $x^3 - x \geq x^2$ en el intervalo $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$,
- $x^2 \geq x^3 - x$ en el intervalo $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Claramente $f - g$ no cambia de signo sobre los intervalos $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Para comprobar las desigualdades de arriba elegimos puntos en esos intervalos y realizamos las operaciones, por ejemplo en $-1/2$ y en 1 y se tiene

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0, \qquad 1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0,$$

con lo que probamos lo dicho antes.



Entonces el área que buscamos resulta de las siguientes integrales

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)\, dx + \int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2 - (x^3 - x)]\, dx,$$

lo cual nos hace calcular por un lado:

$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} = 0 - \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})^4 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})^2 - \frac{1}{3}(1-\sqrt{5})^3,$

y por otro lado

$[x^2 - (x^3 - x)]\Big|_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3}(1+\sqrt{5})^3 - \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})^4 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2.$

Sumamos ambos resultados y obtenemos el área buscada.

Como se vio en este ejemplo, uno de los mayores problemas que se encuentran al intentar hallar el área de una región puede ser explicitar precisamente esa región.

El deseo de definir el área fue la motivación para la definición de integral, pero la integral no suministra en realidad la mejor manera de definir áreas, si bien nos sirve para calcularlas en muchos casos (basta pensar en el ejemplo anterior, donde de alguna manera intuitivamente hemos expresado el área de la región como una diferencia de dos áreas, y hemos utilizado la integral para calcularlas, aunque no hemos dado una definición adecuada de cuál es el área de la región en cuestión).

Sin embargo el uso más destacado de la integral, es el que resulta del Teorema 29 : si f es continua, la integral suministra una función y tal que

$$y'(x) = f(x),$$

la cual resulta ser una "ecuación diferencial". El teorema fundamental del cálculo infinitesimal dice que esta ecuación diferencial tiene solución.

Puesto que las funciones derivables van a ser importantes en los cálculos siguientes, es importante darse cuenta que ellas se pueden combinar para producir otras funciones, cuyas derivadas pueden hallarse mediante la regla de la cadena.

Recordemos entonces primero la regla de la cadena: $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.

Veamos los siguientes ejemplos.

1. Sea f dada por

$$f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt.$$

Esta f resulta de la composición de las funciones

$$C(x) = x^3 \qquad \text{y} \qquad F(x) = \int_a^{x} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt.$$

Y como $f(x) = F(C(x))$, resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x))C'(x) \\ &= F'(x^3)3x^2 \\ &= \tfrac{1}{1+sen^2(x^3)}3x^2. \end{aligned}$$

2. Sea f ahora dada por

$$f(x) = \int_{x^3}^{a} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt.$$

Entonces

$$f'(x) = -\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt \right)'.$$

Y por lo tanto la derivada resulta

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + sen^2(x^3)} 3x^2.$$

3. Tomemos f ahora como la otra composición, es decir $f(x) = C(F(x))$, esto es

$$f(x) = \left(\int_a^{x} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt \right)^3,$$

con lo cual la derivada resulta $f'(x) = C'(F(x))F'(x)$ y obtenemos

$$f'(x) = 3 \left(\int_a^{x} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt \right)^2 \frac{1}{1 + sen^2(x)}.$$

Vemos que se pueden tener ejemplos muy variados de este tipo. En cualquier caso, al aplicar la regla de la cadena es importante comprender el orden de la composición.