PRÁCTICA 6 - El principio de inducción matemática

1. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son inductivos. Justificar.

   a) $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.
   b) $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
   c) Un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ que contenga al 1.
   d) Un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.
   e) $\{x \in \mathbb{R} : x + 4 \text{ es múltiplo de } 5\}$.
   f) $\{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{n},\, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Calcular

   a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$. *b*) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$. *c*) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$. *d*) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$.

3. Dado un natural m, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$; $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

   a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. *b*) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$. *c*) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

4. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$.
   b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$.

5. Calcular

   a) $2^5 - 2^4$.
   b) $2^{n+1} - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   c) $(2^2)^n + (2^n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
   d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Probar que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.
   b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
   c) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
   d) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2$.
   e) $\sum\limits_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n+1)! - 1$.

7. Analizar a veracidad de las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $8|(3^{2n} - 1)$.

   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^n$.

8. Demostrar que las siguientes igualdades son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   a) Suma de una **Progresión aritmética**:

   $$a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + (n - 1)d) = \frac{[a + (a + (n - 1)d)]n}{2}$$

   b) Suma de una **Progresión geométrica**: si $r \neq 1$,

   $$a + ar + ar^2 + ... + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

9. Probar las siguientes propiedades de lo símbolos sumatoria y productoria: sean $x_0, x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ valores reales dados. Entonces:

   a) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a \cdot x_i + y_i) = a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$.

   b) Si $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\sum\limits_{i=j+1}^{n+j} x_{i-j} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

   c) (Propiedad telescópica) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0$.

   d) $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} y_i$.

   e) $\prod\limits_{i=1}^{n} c \cdot x_i = c^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$.

10. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

    a) $x > -1 \Rightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

    b) Si $n \geq 2$, entonces $1 + 2^2 + ... + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3} < 1 + 2^2 + ... + (n + 1)^2$.

11. ¿Para qué valores naturales de n resulta $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$? Demostrar su respuesta.

12. Dada la proposición: $P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$, demostrar que si $P(k)$ es verdadera para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $P(k + 1)$ es verdadera. Analizar luego si esta propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Observemos que:

    $$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

    $$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

    $$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

    Conjeturar una ley que generalice estos casos particulares y demostrarla utilizando el principio de inducción matemática.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

14. Leer la siguiente demostración por inducción de la siguiente proposición:

    Todo conjunto de n bolas de billar está formado por bolas del mismo color.

    Base de la inducción: para $n = 1$ la afirmación es trivialmente verdadera.

    Paso de inducción: supongamos que tenemos $k+1$ bolas de billar que numeramos $1, 2, ..., k, (k+1)$. De acuerdo con la hipótesis de inducción, las bolas $1, 2, 3, ..., k$ son del mismo color; además, por la misma razón, las bolas $2, 3, ..., k, (k+1)$ son del mismo color.

    En consecuencia, las bolas $1, 2, 3, ..., k, (k+1)$ son del mismo color.

    ¿Dónde está el error en esta demostración?

15. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

    a) $n = n^2$. *b*) $n = n+1$. *c*) $3^n = 3^{n+2}$. *d*) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

16. Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

    a) Demostraremos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
    Supongamos que $5k+3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k+3 = 5p$. Probemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5: como

    $$5(k+1)+3 = (5k+5)+3 = (5k+3)+5 = 5p+5 = 5(p+1),$$

    entonces obtenemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

    b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo $n, a^n = 1$.
    Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces

    $$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

    Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo entero no negativo n.