Conjuntos 2/2

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

10 de mayo de 2021

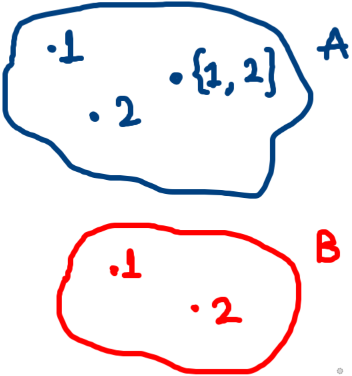
Repaso de la clase anterior

- Pertenencia (elemento) "$\in$" vs. Contención (subconjunto) "$\subseteq$"
- Definición por extensión (Ax. extensionalidad)
- Definición por compresión (Ax. especificación), conjuntos universales $\mathscr{U}$
- Paradojas / Ax. de regularidad: $\forall A$, $A \notin A$
- Ax. del conjunto vacío $\varnothing$
- Ax. de pares $\{x, y\}$
- Ax. del conjunto de partes $\mathscr{P}(A)$
- Cardinalidad $|A|$
- Operaciones con conjuntos: $A \cup B$ (ax. de unión), $A \cap B$, $A - B$, $\overline{A}$
- Leyes de la teoría de conjuntos

Ejemplo

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 2, \{1, 2\}\} \qquad B = \{1, 2\}$$



Se tiene que

- $B \in A$
  (no confundir con ax. reg.)
- $B \subseteq A$
- $A \notin B$
- $A \not\subseteq B$

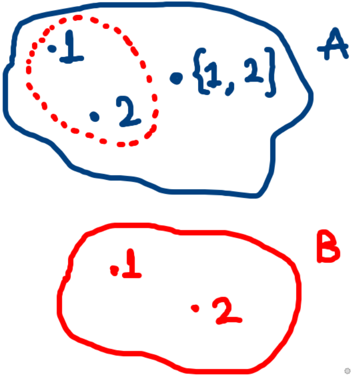
Ejemplo

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 2, \{1, 2\}\} \qquad B = \{1, 2\}$$

Se tiene que

- $B \in A$
  (no confundir con ax. reg.)
- $B \subseteq A$
- $A \notin B$
- $A \not\subseteq B$

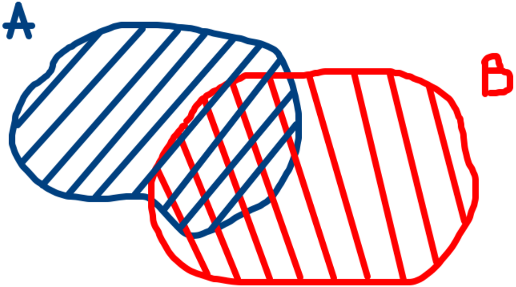


Ejemplo

El cardinal de la unión de dos conjuntos finitos A y B se puede calcular como

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

En efecto, la cantidad de elementos en $A \cup B$ se puede obtener sumando la cantidad de elementos en A y la cantidad de elementos en B, observando que de este modo estaríamos contando dos veces los elementos de $A \cap B$, por eso tenemos que restar el término $|A \cap B|$ en la fórmula (1).



Corolario

Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

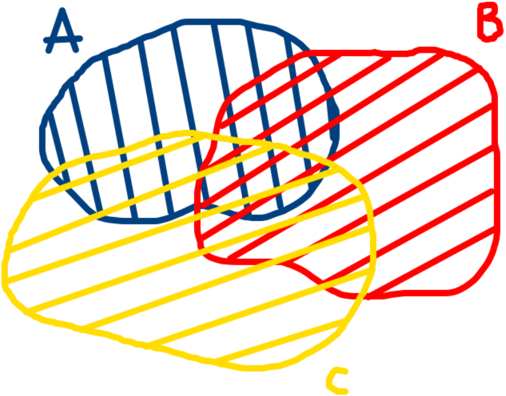
Demostración.

Sigue del ejemplo anterior, observando que como en este caso $A \cap B = \varnothing$ tenemos que $|A \cap B| = 0$. $\square$

Ejemplo

Si A, B y C son tres conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Ejemplo (cont.)

El resultado anterior también lo podemos demostrar usando lo que ya sabemos sobre el cardinal de la unión de dos conjuntos $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ y las leyes de la teoría de conjuntos:

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\
&\qquad\qquad - [|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|] \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$

Ejercicio

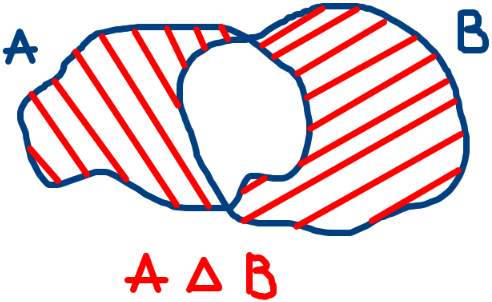
Encontrar una fórmula para $|A \cup B \cup C \cup D|$.

Diferencia simétrica

Definición

La *diferencia simétrica* entre los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



Teorema

Dados los conjuntos A, B y C se tiene:

1. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
3. $A \triangle B = B \triangle A$.
4. $A \triangle \varnothing = A$.
5. $A \triangle A = \varnothing$. *Más aún,* $A \triangle B = \varnothing \iff A = B$.
6. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Demostración.

Veamos la primera afirmación a modo de ejemplo y dejemos las demás como ejercicio para practicar. Antes de seguir con la prueba, enunciamos el siguiente resultado auxiliar (cuya demostración queda como ejercicio).

Lema

Si X e Y son tomados de un conjunto universal $\mathscr{U}$, entonces $X - Y = X \cap \overline{Y}$.

Demostración del Teorema (cont.)

Supongamos que $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Por un lado tenemos que

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A) \stackrel{\text{Lema}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} && \text{Lema} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && \text{De Morgan} \\
&= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] && \text{Distr.} \\
&= [\overline{A} \cap (A \cup B)] \cup [\overline{B} \cap (A \cup B)] && \text{Conmut.} \\
&= [(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)] && \text{Distr.} \\
&= [\varnothing \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup \varnothing] && \text{Clase ant.} \\
&= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) && \text{Neutro} \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) && \text{Conmut.} \quad \square
\end{aligned}
$$

¿Qué es un par ordenado?

- IMPORTANTE: los conjuntos no están ordenados: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Dicho de otro modo, si tenemos un conjunto con dos elementos $A = \{a, b\}$ no podemos saber cuál es el primer elemento y cual es el segundo elemento de A. De hecho, ni siquiera tiene sentido preguntarnos esto.
- Hay un artificio que, con las herramientas que tenemos hasta ahora, nos permite construir pares *ordenados* de dos elementos.

Definición

El *par ordenado* de los elementos a y b se define como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Se dice además que a (resp. b) es el *primer* (resp. *segundo*) elemento del par ordenado (a, b).

Proposición (Propiedad fundamental de los pares ordenados)

Dados a, b, c, d tenemos que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d.$$

Demostración.

- $\Longleftarrow$: Trivial.
- $\Longrightarrow$: Supongamos que $(a, b) = (c, d)$, es decir, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.
- Como estos conjuntos son iguales tenemos dos posibilidades:
  1. $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$, o bien
  2. $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$.
- Pero además, sabemos que $\{a\} \subset \{a, b\}$ y $\{a, b\} \not\subseteq \{a\}$, lo cual nos dice que el segundo caso es imposible.
- Luego $\{a\} = \{c\}$, lo cual implica $a = c$.
- Como además sabemos que $\{a, b\} = \{c, d\}$, concluimos que $b = d$. $\square$

Importante

A partir de ahora, trataremos de evitar pensar al par ordenado (a, b) como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. En su lugar lo pensaremos a partir de su propiedad fundamental:

- el par ordenado (a, b) se construye a partir de los elementos a y b;
- el primer elemento de (a, b) es a;
- el segundo elemento de (a, b) es b.

Notación

A veces también nos referimos se dice que a (resp. b) es la *primera* (resp. *segunda*) *coordenada* del par ordenado (a, b).

Ejercicio*

Explicar por qué $(a, b) = \{a, \{b\}\}$ hubiera sido una mala definición de par ordenado (no podríamos demostrar la propiedad fundamental).

Producto cartesiano

Definición

Dados dos conjuntos A y B, el *producto cartesiano* $A \times B$ se define como el conjunto de todos los posibles pares ordenados en los cuales la primer coordenada es un elemento de A y la segunda un elemento de B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Observación*

La existencia del conjunto $A \times B$ queda garantizada por el axioma de especificación, ya que los elementos de $A \times B$ son en realidad elementos de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. Más precisamente,

$$A \times B = \{X \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) : \exists(a \in A)\exists(b \in B),\ X = \{\{a\}, \{a, b\}\}\}.$$

Ahora sí les prometo que esta es la última vez que usamos la definición de (a, b).

Ejemplo

- El plano se define como el producto cartesiano de dos rectas
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
- El espacio tridimensional se puede definir como el producto cartesiano
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$
Observar que también tendría sentido definir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. De hecho, en la práctica identificaremos $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ y simplemente usaremos *ternas ordenadas*
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
- Se trabaja similarmente con $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^n, \dots$

Ejemplo

Si tenemos dos conjuntos A y B tales que $A \cap B \neq \varnothing$ podemos usar pares ordenados para construir una "unión disjunta" formal de A y B, la cual suele denotarse por

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Ejemplo concreto

Si $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{z, t\}$, entonces

$$A \sqcup B = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (z, 1), (t, 1)\}.$$

- Un elemento de la forma $(a, 0)$ se "piensa" como un elemento de A.
- Un elemento de la forma $(b, 1)$ se "piensa" como un elemento de B.

Uniones e intersecciones generalizadas

Axioma de unión (generalizado)

Si $\mathscr{F}$ es un conjunto de conjuntos, existe un conjunto $\bigcup \mathscr{F}$, llamado la *unión de* $\mathscr{F}$, cuyos elementos son exactamente los elementos de todos los conjuntos que conforman $\mathscr{F}$. En símbolos

$$x \in \bigcup \mathscr{F} \iff \exists (A \in \mathscr{F}),\, x \in A$$

Ejemplo

$$\bigcup \{\{1,2,3\},\{2,3,4,5\}\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Otras notaciones

Existen notaciones más amigables para las uniones arbitrarias.

- Si $\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathscr{F}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para algún } i = 1, 2, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

- Si I es un conjunto de índices y $\mathscr{F} = \{A_i : i \in I\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathscr{F}$ por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

- Caso particular, cuando $I = \mathbb{N}$, se suele denotar

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

Importante

A veces la notación de subíndices presenta dificultades cuando recién empezamos a usarla. Hay que tener en cuenta que lo importante es el conjunto I del cual se toman los índices, y no la letra particular $i \in I$ que usemos para denotarlos. Por ejemplo, si $I = \mathbb{N}$ tenemos que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{etc.}$$

Ejemplo/Ejercicio

- Si A es un conjunto, entonces $\bigcup \mathscr{P}(A) = A$.
- Si $\mathscr{F}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup \mathscr{F} = \bigcup_{A\in\mathscr{F}} A$.

Intersecciones arbitrarias

Análogamente a la uniones arbitrarias, podemos definir la intersección arbitraria de una familia de conjuntos.

Definición

Si $\mathscr{F}$ es un conjunto de conjuntos, el conjunto $\bigcap \mathscr{F}$, llamado *la intersección de* $\mathscr{F}$, es el conjunto cuyos elementos son exctamente los elementos que están en todos los conjuntos que conforman $\mathscr{F}$ a la vez. En símbolos

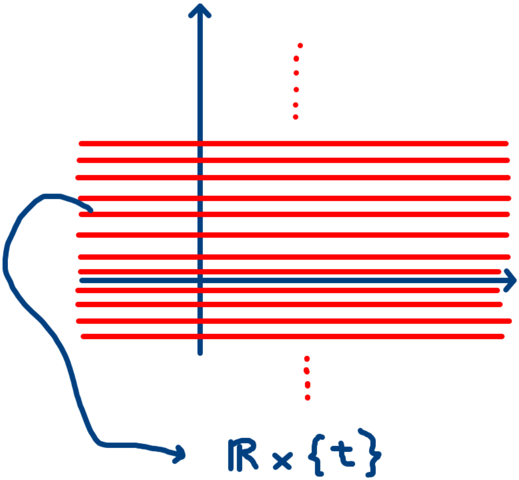
$$x \in \bigcap \mathscr{F} \iff \forall (A \in \mathscr{F}),\, x \in A.$$

Notaciones alternativas

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$.

Ejemplo

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{R} \times \{t\}$$



Ejemplo/Ejercicio

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = [-n, n] = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}.$$

Probar que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1].$$