Análisis Matemático I - 2021
(Lic. y Prof. en Matemática, Lic. en Cs. de la Computación, Lic. y Prof. en Física)

Unidad 3 – Límite y Continuidad

1. Límite Finito en un Punto

La idea de límite aparece en muchas situaciones. Por ejemplo, en geometría elemental, se define la longitud de una circunferencia como el límite al que tiende la longitud de la sucesión de polígonos regulares inscriptos en ella, de una cantidad de lados cada vez más grande. La misma idea es utilizada para definir el área de círculos.
En Física, para definir a la velocidad instantánea, se recurre al límite de la velocidad media, cuando el intervalo de tiempo considerado se hace cada vez menor.
Estas ideas pueden hacerse precisas cuando se "entienden" los conceptos de límites de funciones de variable real. Comenzaremos ahora a estudiar límites de funciones.

1.1. Distancia de Puntos y Entornos

Como adelantamos, nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función real se "aproximan" a un número determinado, a medida que los valores de la variable independiente se "aproximan" a un valor determinado en el dominio.
Para eso entonces, necesitamos contar con algún elemento que nos permita hablar de a qué distancia se encuentran elementos, tanto del dominio de la función, como de su recorrido.
Teniendo siempre en cuenta la representación de los números reales en la recta numérica, en todo momento será indistinto hablar del *número* x o del *punto* x. Así, como tanto el dominio como el recorrido de las funciones son subconjuntos de $\mathbb{R}$, recurriremos al valor absoluto para cuantificar la distancia en que se encuentran dos puntos, recordando que, para $x,y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x-y|$$

Definición. Llamamos *entorno* (o *entorno abierto*) de un número real a, de radio δ, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$, y lo notamos por $E(a,\delta)$. Esto es,

$$\begin{aligned} E(a,\delta) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a-\delta < x < a+\delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -\delta < x-a < \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \delta\}\ . \end{aligned}$$

Además, llamamos *entorno reducido* del punto a y de radio δ, al conjunto $E(a,\delta) - \{a\}$, y lo notamos por $E'(a,\delta)$. Esto es,

$$\begin{aligned} E'(a,\delta) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \delta \text{ y } x \neq a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < |x-a| < \delta\} \end{aligned}$$

El entorno del punto a y radio δ es el conjunto de números reales (puntos) x, cuya distancia al número (punto) a es menos que δ. En el entorno reducido, se excluye al número a. Por eso, es el entorno de números a distancia de a menor a δ, y mayor a 0.

Nota. Sean a un número real y dos números reales positivos δ_1 y δ_2. Entonces, si δ es un número positivo tal que $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$E(a,\delta) \;\subseteq\; E(a,\delta_1) \cap E(a,\delta_2) \;,$$

y

$$E'(a,\delta) \;\subseteq\; E'(a,\delta_1) \cap E'(a,\delta_2) \;.$$

En efecto,

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |x-a| < \delta_1 \;\text{ y }\; |x-a| < \delta_2 \;,$$

y

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < |x-a| < \delta_1 \;\text{ y }\; 0 < |x-a| < \delta_2 \;.$$

Más adelante esta observación nos permitirá asegurar que, si una propiedad se cumple en un $E(a,\delta_1)$ y otra en un $E(a,\delta_2)$, entonces, ambas simultáneamente, se cumplen en cualquier $E(a,\delta)$, para cualquier $\delta \leq \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Lo propio para entornos reducidos.

1.2. Definición de Límite Finito en un Punto

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ \quad 4 & \text{si } x = 3 \end{cases} \;.$$

El gráfico de la función f se muestra en la Figura 1. En él podemos observar que los valores de la función f se acercan al número 5, cuando los valores de x se acercan a 3.

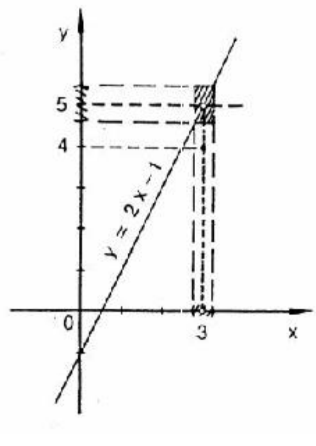

Figura 1: Figura 1

Si se desea, por ejemplo, que la distancia entre los valores de la función $f(x)$ y el número 5, sea menor que 0.0001, basta considerar las siguientes proposiciones:

$$|f(x)-5| < 0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |(2x-1)-5| < 0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |2x-6| < 0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |2(x-3)| < 0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; 2|x-3| < 0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |x-3| < 0{,}00005$$

y concluir que, si

$$0 < |x-3| < 0{,}00005 \;\Rightarrow\; |f(x)-5| \;<\; 0{,}0001 \;.$$

Dicho de otra forma, para valores de x dentro del entorno reducido de 3 y radio 0,00005, los valores correspondientes de $f(x)$ se encuentran en el entorno de 5 y radio 0,0001. Notemos que primero elegimos el número 0,0001 y a partir de él obtuvimos el número 0,00005.
En general, para cualquier $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, para asegurarnos de obtener valores de $f(x)$ a distancia menor que ε del número 5, siempre que se consideren valores de x a distancia menor que δ del número 3 (exluyendo al propio 3). En efecto,

$$0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-5| < \varepsilon.$$

Para indicar que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a 5, cuando los valores de x se aproximan a 3, se utiliza el símbolo

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \;,$$

que en el caso descripto queda

$$\lim_{x\to 3} 2x-1 = 5 \;.$$

Definición. Dada una función real f y un número real a, de manera que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que un valor ℓ es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a, y notamos con el símbolo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \;,$$

si, para cualquier valor $\varepsilon > 0$, prefijado, existe un número positivo δ, tal que,

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| < \varepsilon \;.$$

En términos de entornos, si

$$x \in E'(a,\delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in E(\ell,\varepsilon) \;.$$

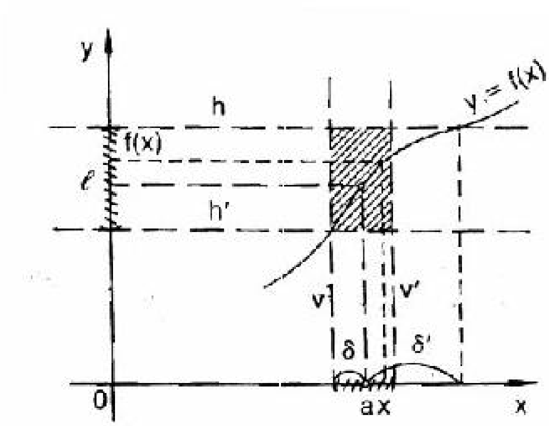

Figura 2: Figura 2

En la Figura 2 se ilustran los elementos mencionados en la definición de límite.

En forma proposicional,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ : \ \left(0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \right) \ .$$

Nota. No se exige que el número a esté en el dominio de la función f. Sí que la función f esté definida en un entorno reducido del punto a.

Nota. Las siguientes simbologías son equivalentes.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ , \quad \lim_{x \to 0} f(x + a) = \ell \ , \quad \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0 \ .$$

Nota. Observemos que, para una misma función, el número δ, en general depende tanto del valor ε, como del punto a. Además, si en un punto a, para un ε, un número δ satisface la definición de límite, entonces, cualquier $\delta' < \delta$, también es válido. Y por otro lado, si un valor δ es útil para un ε, también es útil para un $\varepsilon' > \varepsilon$.
En efecto, para tales δ', δ, ε y ε'

$$0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon < \varepsilon' \ .$$

La idea es, tomar ε tan chico como se quiera, o sea, *arbitrariamente chico*.

1.3. Algunos Límites Finitos

Apelando a la noción de cercanía de los valores de las funciones al valor límite, utilicemos la definición anterior para probar algunos límites de funciones elementales.

Ejemplo (La función constante). $f(x) = c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} c = c \ .$$

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $\delta > 0$, se verifica que $0 < |x - a| < \delta$ implica

$$|f(x) - c| \ = \ |c - c| \ = \ 0 \ < \ \varepsilon \ .$$

Ejemplo (La función lineal). $f(x) = mx + h$ con $m \neq 0$.

$$\lim_{x \to a} (mx + h) = ma + h \ .$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \ = \ |(mx + h) - (ma + h)| \ = \ |mx + h - ma - h| \ = |m(x - a)| \ = \ |m||x - a|$, basta considerar $\delta < \frac{\varepsilon}{|m|}$ y así,

$$0 < |x - a| < \delta < \frac{\varepsilon}{|m|} \ \Rightarrow \ |mx + h - (ma + h)| = |m||x - a| < \varepsilon \ .$$

Ejemplo. En particular si consideramos $f(x) = 3x + 1$.

$$\lim_{x \to 2} 3x + 1 = 7 \ .$$

En efecto, notemos que en este caso,

$$|f(x)-\ell| \;=\; |(3x+1)-7| \;=\; |3x-6| \;=|3(x-2)| \;=3|x-2|.$$

Entonces, dado $\varepsilon>0$, si elegimos $\delta<\frac{\varepsilon}{3}$ y x es tal que $0<|x-2|<\delta<\frac{\varepsilon}{3}$, será

$$|f(x)-\ell| \;=\; 3|x-2| \;<\; 3\frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon\ .$$

Ejemplo (La función cuadrática).

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9\ .$$

En efecto

$$|x^2-\ell| \;=\; |x^2-9| \;=\; |(x-3)(x+3)| \;=|x-3|\;|x+3|\ .$$

Supongamos que elegimos $\delta=1$, y sea x tal que $|x-3|<\delta=1$. Entonces

$$\begin{aligned} |x-3| \;&<\; \delta \;\Rightarrow\; -1<x-3<1 \\ &\Rightarrow\; 2<x<4 \;\Rightarrow\; 5<x+3<7 \\ &\Rightarrow\; |x+3|<7\ . \end{aligned}$$

Entonces, eligiendo $\delta\le \min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$, se tiene $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$ y $|x+3|<7$, y entonces

$$|x^2-9| \;=\; |x-3|\;|x+3| \;<\; |x-3|\cdot 7 \;<\; \delta\cdot 7 \;<\; \frac{\varepsilon}{7}\cdot 7 \;=\; \varepsilon\ .$$

Más aún, para cualquier número real a,

$$\lim_{x\to a}\; x^2 = a^2\ .$$

Esta última afirmación más general se propone como ejercicio.

Ejemplo (La función recíproca).

$$\lim_{x\to 2}\; \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

En efecto, comencemos observando que

$$|f(x)-\ell| \;=\; \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| \;=\; \left|\frac{2-x}{2x}\right| \;=\; \frac{|x-2|}{|2x|}\ .$$

En este caso, si elegimos $\delta=1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |x-2| \;&<\; \delta \;\Rightarrow\; -1<x-2<1 \\ &\Rightarrow\; 1<x<3 \;\Rightarrow\; 2<2x<6 \\ &\Rightarrow\; |2x|>2\ . \end{aligned}$$

Entonces, en este caso, dado $\varepsilon>0$, eligiendo $\delta\le\min\{1,2\varepsilon\}$, se tiene que $|x-2|<2\varepsilon$ y $|2x|>2$,y en consecuencia

$$|f(x)-\ell| \;=\; \frac{|x-2|}{|2x|} \;<\; \frac{|x-2|}{2} \;<\; \frac{2\varepsilon}{2} \;=\varepsilon\ .$$

Más aún, si $a\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\; \frac{1}{x} = \frac{1}{a}\ .$$

Esta última afirmación es más complicada que las anteriores y nuevamente se propone como ejercicio.

Luego, como consecuencia de un tereoma que demostraremos, concluiremos que la función recíproca no tiene límite (finito) en el punto 0.

1.4. Unicidad del Límite

Teorema 1 (Unicidad del límite). *Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos números reales tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell_2 \ ,$$

entonces se verifica que $\ell_1 = \ell_2$.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, (cuya existencia garantizamos por ser ℓ_1 y ℓ_2 límites de la función en el punto a) tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ y } \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Entonces, si consideramos $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y consideramos cualquier $x \in E'(a,\delta)$, tendremos

$$|\ell_1 - \ell_2| \ = \ |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \ \leq \ |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \ .$$

De la arbitrariedad de ε, por consecuencia de la Propiedad Arquimedeana, surge

$$|\ell_1 - \ell_2| = 0 \implies \ell_1 = \ell_2 \ .$$

Q.E.D.

Observación. Propiedad Arquimediana: dados $x, y \in \mathbb{R}$, $z > 0$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $x \leq y < x + \frac{z}{n} \Rightarrow x = y$. En particular, para $x = 0$, $y = |l_1 - l_2|$, $z = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

1.5. No Existencia de Límite

Recordemos la forma proposicional de la definición de límite:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ : \ \ (0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon) \ ,$$

y neguemos esta última propocisión para afirmar que un valor ℓ **no** es límite de la función f en el punto a.

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0 \ , \ \exists x \ : \ \ (\ 0 < |x-a| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon \ ) \ .$$

Ejemplo. Consideremos la función *signo*

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \ = \ \frac{x}{|x|} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \ .$$

La función f no tiene límite en el punto $a = 0$.

Notemos que el motivo de esto **no** es que la función no está definida en 0, pues la condición de existencia de límite en el punto 0 no exige que este valor esté en el dominio de f. Mostraremos esto en dos partes. En una primera etapa probaremos que $\ell = 1$ no es límite de la función en el punto 0, y luego que ningún otro número real $\ell \neq 1$ lo es.
Para mostrar que $\ell = 1$ no es el límite buscado, consideremos un entorno de 1 de rado $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Aquí, en cualquier entorno reducido del punto 0, existen puntos a la izquierda de 0, para los cuales se tiene $f(x) = -1$, y luego, para ellos,

$$|f(x) - \ell| \;=\; 2\; \geq \frac{1}{2}\;,$$

y entonces $\ell = 1$ no puede ser límite de la función en el punto 0. Ver parte izquierda de la Figura 3.
Para mostrar que ningún $\ell \neq 1$ es límite, consideremos $\varepsilon = \frac{|1-\ell|}{2} > 0$, pues $\ell \neq 1$. Observemos en este caso que en cualquier entorno reducido de 0 existen puntos a su derecha, para los cuales

$$|f(x) - \ell| \;=\; |1 - \ell| \;>\; \frac{|1-\ell|}{2} \;=\; \varepsilon\;.$$

Ver la parte derecha de la Figura 3.
Luego, la función f no admite a ningún número real como límite de la función en el punto 0.

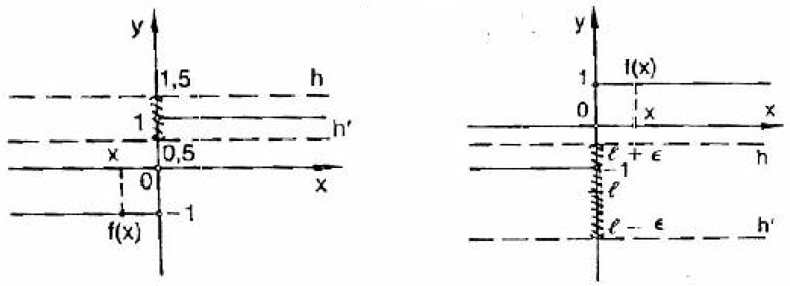

Figura 3: Figura 3

1.6. Límites Laterales

Hasta ahora al hablar de límite en el punto a hemos considerado puntos próximos a éste a ambos lados. Es decir, números reales en un entorno reducido del punto a, a la izquierda y a la derecha. En ocasiones interesa sólo el comportamiento de la función en puntos del dominio a un solo lado de un punto dado.
Por ejemplo, para la funición f de la parte anterior hemos probado que no existe límite finito en el punto $a = 0$. Sin embargo, puede pensarse en el comportamiento de la función en el conjunto de los números reales positivos, a la derecha del punto 0, exclusivamente. A la derecha de 0, para cualquier x próximo a 0, se satisface la definición de límite con el número $\ell = 1$. Se dice en esta situación que la función tiene límite 1 a la derecha de 0, y se nota

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1\;.$$

De forma similar, si se consideran puntos negativos, la función tiene límite -1 a la izquierda de 0, y en este caso se nota

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1\;.$$

Definición (Límites laterales).

1. Se dice que un número ℓ es el límite por derecha de la función f en el punto a, y se nota
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\ ,$$
si para cualquier $\varepsilon>0$, existe un número $\delta>0$, tal que
$$a<x<a+\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\ .$$

2. Se dice que un número ℓ es el límite por izquierda de la función f en el punto a, y se nota
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell\ ,$$
si para cualquier $\varepsilon>0$, existe un número $\delta>0$, tal que
$$a-\delta<x<a\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\ .$$

A los límites anteriores se los conoce como límites laterales de la función en el punto a.

Ejemplo. 1) $\lim_{x\to 1^-} x^2=1$ y $\lim_{x\to 1^+} x^2=1$ 2) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ 3) $\lim_{x\to 2^-}[x]=1$ y $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$

Proposición 1. *Sean a un número real y f una función. Entonces, existe el límite*
$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell\ ,$$
si y solamente si, existen los límites laterales, y ambos valen ℓ. Esto es, si y sólo si
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell \quad y \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\ .$$

Demostración: $\Rightarrow$) Si
$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell\ ,$$
entonces, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que
$$0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\ .$$
Pero entonces, para ese δ, si x verifica
$$a-\delta<x<a\ \Rightarrow\ 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon$$
y
$$a<x<a+\delta\ \Rightarrow\ 0<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\ ,$$
con lo que se verifican las afirmaciones para los límites laterales
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\ .$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si valen
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\ ,$$

entonces, para $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que

$$a-\delta_1 < x < a \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \quad \text{y} \quad a < x < a+\delta_2 \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$a-\delta \ > \ a-\delta_1 \quad \text{y} \quad a+\delta \ < \ a+\delta_2$$

y se tiene que si x verifica

$$a-\delta < x < a \ \Rightarrow\ a-\delta_1 < x < a \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ ,$$

$$a < x < a+\delta \ \Rightarrow\ a < x < a+\delta_2 \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ ,$$

con lo que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

y entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ .$$

Q.E.D.

Nota. En vista de que la existencia e igualdad de límites laterales en un punto es condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de límite allí, la no existencia de alguno de los límites laterales, o la diferencia entre ambos en el caso de existir, implica la no existencia de límite finito de la función en el punto.

Ejemplo (Función parte entera).

$$\lim_{x\to 1^-} [x\,] = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} [x\,] = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{no existe} \ \lim_{x\to 1} [x] \ .$$

De la misma manera se concluye que si $n \in \mathbb{Z}$, no existe $\lim\limits_{x\to n} [x]$.

1.7. Algunos Teoremas de Límite Finito

Proposición 2. *Sean f una función y a un número real tal que existe*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ .$$

Entonces, existe

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell| \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si x verifica

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

Como además

$$\big||f(x)|-|\ell|\big| < |f(x)-\ell| \ ,$$

para el mismo δ, vale

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ \big||f(x)|-|\ell|\big| < |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

Nota. Vale la recíproca de la propoisición anterior?

1. La función signo, $f(x) = \frac{x}{|x|}$, es un ejemplo de una función para la cual existe
$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = |1| = 1 \ ,$$
sin que exista el límite de ella en el punto 0, y la vuelta de la proposición anterior no necesariamente vale.

2. En la proposición anterior sí vale la vuelta en el caso $\ell = 0$,
$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to a} f(x) = 0 \ .$$
En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - 0| = \big||f(x)| - 0\big| < \varepsilon \ .$$

Teorema 2 (Carácter local del límite). *Sean a un número real y dos funciones f y g para las cuales se verifican*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ \text{ y } \ f(x) = g(x) \ \textit{en algún } E'(a,\rho) \ \textit{(entorno reducido de } a\textit{)}.$$
Entonces g tiene límite en el punto a y vale
$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$, tal que
$$0 < |x-a| < \delta' \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
Por hipótesis, existe $\rho > 0$ tal que
$$0 < |x-a| < \rho \ \Rightarrow \ f(x) = g(x) \ .$$
Tomando en cuenta esas afirmaciones, y eligiendo $\delta \le \text{mín}\{\delta', \rho\}$, vale
$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ y } f(x) = g(x) \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
Así, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ para el cual
$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$
que es lo que queríamos probar. *Q.E.D.*

Ejemplo. Existe el límite de la función $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, en el punto $a = 1$?
Para cualquier $x \neq 1$, vale
$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = f(x)$$
y además (límite de función lineal)
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 \ ,$$
por lo tanto existe el límite de $g(x)$ y vale
$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función definida en A (no necesariamente es A el dominio de f). Diremos que la función f está acotada en el conjunto A, si existe un número real $M > 0$, tal que, para todo $x \in A$ se tiene

$$|f(x)| \leq M \ .$$

De manera alternativa, decimos que f está acotada en el conjunto A si el conjunto

$$\{f(x) \ : \ x \in A\}$$

es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Ejemplo.

1. La función $f(x) = 2x+6$ está acotada en el intervalo $[1,2]$, por $M = 10$.
2. La función $f(x) = 2x+6$ está acotada en el intervalo $[-10,4]$, por $M = 14$.
3. La función $f(x) = 2x+6$ no está acotada en $\mathbb{R}$.
4. La función $g(x) = \sin x$ está acotada en todo $\mathbb{R}$, por $M = 1$.
5. La función $h(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada en $[-1,1]-\{0\}$.

Teorema 3. *Sean f una función y a un número real tal que existe*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a,\delta)$ en el cual la función f está acotada.

Demostración: Como f tiene límite ℓ en el punto a, en particular, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E'(a,\delta)$,

$$|f(x) - \ell| \ < \ 1 \ .$$

Con lo cual, en ese entorno,

$$\begin{aligned} |f(x)-\ell| \ < \ 1 \quad & \Rightarrow \ \text{-}1 < f(x)-\ell < 1 \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1 \\ & \Rightarrow \ -|\ell| - 1 < \ell - 1 < f(x) < \ell + 1 < |\ell| + 1 \\ & \Rightarrow \ -(|\ell|+1) < f(x) < |\ell| + 1 \Rightarrow |f(x)| < |\ell| + 1 \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Observación. Hemos usado la propiedad de valor absoluto: $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene límite (finito) en el punto $x = 0$. Si lo tuviera, existiría un entorno reducido de 0 en el cual la función f estaría acotada (ver ejemplo anterior).

Nota. La recíproca del teorema anterior no es cierta, hay funciones acotadas en todo entorno reducido de a que no tienen límite en a, por ejemplo, la función signo en $a = 0$.

Teorema 4. *Sean f una función, a un número real tal que existe*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ ,$$

y dos números, k y h, tales que

$$h < \ell < k \ .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a,\delta)$, donde para todo x allí se verifica

$$h < f(x) < k \ .$$

Demostración: Mostraremos primero que existe un entorno reducido del punto, para el cual se verifica la desigualdad derecha de la tesis, o sea, $f(x) < k$. Luego probaremos que existe otro entorno reducido para la desigualdad izquierda, $l < f(x)$. Y finalmente el resultado será consecuencia de considerar el entorno reducido intersección de los dos encontrados.
Siendo $k > \ell$, como

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ ,$$

eligiendo $\varepsilon = k - \ell > 0$, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x \in E'(a,\delta_1)$,

$$|f(x) - \ell| < k - \ell \ .$$

Con lo cual, en ese entorno $E'(a,\delta_1)$,

$$\begin{aligned} f(x) - \ell \leq |f(x) - \ell| \ &< \ k - \ell \\ \Rightarrow \ \ f(x) \ &< \ k - \ell + \ell \ = \ k \qquad (1) \end{aligned}$$

Ahora, como $\ell > h$, si elegimos $\varepsilon = \ell - h > 0$, sabemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $x \in E'(a,\delta_2)$,

$$|f(x) - \ell| < \ell - h \ .$$

Con lo cual, en $E'(a,\delta_2)$

$$\begin{aligned} h - \ell \ < \ f(x) - \ell \ &< \ \ell - h \\ \Rightarrow \ \ h \ < \ f(x) \ &< \ 2\ell - h \qquad (2) \end{aligned}$$

Considerando, $\delta = \text{mín}(\delta_1,\delta_2)$ de (1) y (2) vale que si

$$x \in E'(a,\delta) \Rightarrow h < f(x) < k.$$

Q.E.D.

Corolario 1. *(Teorema de conservación del signo) Sean f una función, a un número real tal que existe*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0 \ .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a,\delta)$, donde $f(x) \neq 0$; y vale, por ejemplo,

$$|f(x)| > \frac{|\ell|}{2} \ .$$

Demostración: Si $\ell > 0$, consideramos $h = \frac{\ell}{2} < \ell$, y si $\ell < 0$, tomamos $k = \frac{\ell}{2} > \ell$, y aplicamos el teorema anterior.
Además, por la Proposición 2, vale

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell| \ \neq 0 \ ,$$

siendo $\frac{|\ell|}{2} < |\ell|$, sigue la segunda afirmación del enunciado. *Q.E.D.*

1.8. Álgebra de Límites

Teorema 5. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que existen los límites en el punto a, y valen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \ .$$

Entonces, se verifican:

1. *la función $f+g$ tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 \ ;$$

2. *si $c \in \mathbb{R}$, la función cf tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (cf)(x) = c\ell_1 \ ;$$

3. *la función $f-g$ tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2 \ ;$$

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (\ell_1+\ell_2)| &= |(f(x)-\ell_1) + (g(x)-\ell_2)| \\ &\leq |f(x)-\ell_1| + |g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

2. Si $c = 0$ el resultado es trivial, sea entonces $c \neq 0$; dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{|c|} \ .$$

Entonces, para los x tales que $0 < |x-a| < \delta$,

$$|(cf)(x) - (c\ell_1)| = |c(f(x)-\ell_1)| = |c| \ |f(x)-\ell_1| < |c| \ \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \ .$$

3. Por los apartados anteriores,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f-g)(x) &= \lim_{x\to a} (f+(-1)g)(x) = \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)\lim_{x\to a} g(x) = \ell_1 - \ell_2 \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 6. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

y g está acotada en un entorno reducido $E'(a,\rho)$. Entonces, la función fg tiene límite en el punto a, y vale

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0 \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta' > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta' \ \Rightarrow \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \rho \ \Rightarrow \ |g(x)| \leq M \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\rho, \delta'\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$, se tiene

$$|(fg)(x) - 0| \ = \ |f(x)g(x)| \ = \ |f(x)| \ |g(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{M} M \ = \ \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

Observar que en el teorema anterior, no se exige la existencia de límite de la función g.

Teorema 7. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que existen los límites en el punto a, y valen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \ .$$

1. *Entonces existe el límite de la función fg en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \ell_1\ell_2 \ .$$

2. *Si además, $\ell_2 \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ tiene límite en el punto a y vale*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \ .$$

Demostración:

1. En primer lugar, recordemos (por teorema 3) que como f tiene límite ℓ_1 en el punto a, está acotada en un $E'(a,\rho)$, por un número $M > 0$, esto es,

$$0 < |x-a| < \rho \ \Rightarrow \ |f(x)| \leq M \ .$$

Si $\ell_2 = 0$, el enunciado es del teorema anterior. Supongamos entonces $\ell_2 \neq 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, sean δ_1 y δ_2 tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2\ |\ell_2|} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2\ M} \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (\ell_1\ell_2)| \ &= \ |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\
&\leq \ |f(x)g(x) - f(x)\ell_2| + |f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\
&= \ |f(x)(g(x) - \ell_2)| + |(f(x) - \ell_1)\ell_2| \\
&= \ |f(x)| \ |g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1| \ |\ell_2| \\
&< \ M \ \frac{\varepsilon}{2\ M} \ + \ \frac{\varepsilon}{2\ |\ell_2|} \ |\ell_2| \ = \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

2. Mostraremos primero el caso particular
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{\ell_2}\ .$$
Comencemos notando que, como $\ell_2\neq 0$, por la prueba del Corolario 1, existen un entorno $E'(a,\rho)$, dentro del cual es $|g(x)|>m$, para algún $m>0$, por ejemplo, $\frac{|\ell_2|}{2}$.
Por otro lado, para $\varepsilon>0$, existe $\delta'>0$, tal que
$$0<|x-a|<\delta'\ \Rightarrow\ |g(x)-\ell_2|<m\ |\ell_2|\ \varepsilon\ .$$
Entonces, para $\delta\leq \min\{\rho,\delta'\}$, y x tal que $0<|x-a|<\delta$,
$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\frac{1}{\ell_2}\right| &= \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|=\left|\frac{\ell_2-g(x)}{g(x)\ell_2}\right| = \\ &= |g(x)-\ell_2\ |\frac{1}{|g(x)|}\ \frac{1}{|\ell_2|}\ <\ m\ |\ell_2|\varepsilon\ \frac{1}{m}\ \frac{1}{|\ell_2|}\ =\ \varepsilon.\end{aligned}$$
Para concluir, por el primer apartado,
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ =\ \lim_{x\to a}\ f(x)\left(\frac{1}{g}\right)(x)\ =\ \ell_1\ \frac{1}{\ell_2}\ =\ \frac{\ell_1}{\ell_2}\ .$$

Q.E.D.

Nota. El teorema anterior no afirma nada sobre el cociente en el caso en el que el denominador tenga límite cero. Ya sabemos que no existe el límite de la función $\frac{1}{x}$ en el punto $a=0$, pero sí el límite de la función $\frac{x^2-1}{x-1}$ en el punto $a=1$.

Nota. Combinando los resultados de esta parte con los límites hechos por definición al comienzo podemos afirmar las siguientes proposiciones.

1. Para todo $n\in\mathbb{N}$, y $a\in\mathbb{R}$, existe
$$\lim_{x\to a}\ x^n=a^n\ .$$
2. Dado un polinomio $p(x)=\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$ y $a\in\mathbb{R}$, existe
$$\lim_{x\to a}\ p(x)\ =\ \alpha_na^n+\alpha_{n-1}a^{n-1}+...+\alpha_1a+\alpha_0\ =\ p(a)\ .$$
3. Dada una función racional
$$\frac{p(x)}{q(x)}\ =\ \frac{\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_mx^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+...+\beta_1x+\beta_0}\ ,$$
y $a\in\mathbb{R}$, existe
$$\lim_{x\to a}\ \frac{\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_mx^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+...+\beta_1x+\beta_0}\ =\ \frac{\alpha_na^n+\alpha_{n-1}a^{n-1}+...+\alpha_1a+\alpha_0}{\beta_ma^m+\beta_{m-1}a^{m-1}+...+\beta_1a+\beta_0}\ =\ \frac{p(a)}{q(a)}\ ,$$
siempre que $q(a)\neq 0$.
4. En particular, podemos generalizar la afirmación para $a\neq 0$ y $n\in\mathbb{Z}$.

Proposición 3. *Los resultados del Álgebra de Límites son válidos si se reemplazan los símbolos $x\to a$ por $x\to a^+$ o $x\to a^-$.*

1.9. Límite de Funciones Trigonométricas

Para probar la existencia de límites de las funciones trigonométricas, probaremos primero el siguiente resultado, del cual en esta parte sólo utilizaremos la desigualdad izquierda. Ambas serán útiles más adelante.

Proposición 4. *Si* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

$$|\sin x| \ \leq \ |x| \ \leq \ |\tan x| \ ,$$

y las igualdades valen sólo para $x = 0$.

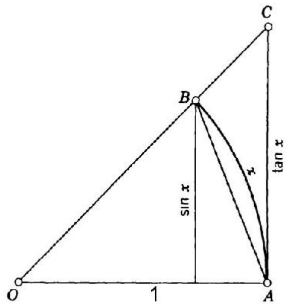

Figura 4: Figura 4

Demostración: En primer lugar notemos que para $x = 0$, el resultado vale por igualdad en los dos casos. Para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, comparemos áreas en la Figura 4. Allí, si $0 < |x| < 2\pi r$ es la longitud del arco,

$$\text{área}\, \overset{\triangle}{AOB} \ < \ \text{área sect. circ. } AOB \ < \ \text{área}\, \overset{\triangle}{AOC} \ ,$$

que puesto en valores queda

$$\frac{|\sin x|}{2} \ < \ \frac{|x|}{2} \ < \ \frac{|\tan x|}{2} \ ,$$

desigualdades que inmediatamente implican las propuestas en el enunciado. *Q.E.D.*

Nota. La desigualdad

$$|\sin x| < |x|$$

es cierta para todo $x \neq 0$. Para completar con los valores $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$|\sin x| \ \leq \ 1 < \ \frac{\pi}{2} \ \leq \ |x| \ .$$

La desigualdad izquierda de la proposición anterior nos permite afirmar que

$$\lim_{x \to 0} \ \sin x = 0 \ .$$

En efecto, para $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta < \varepsilon$, y entonces para los x tales que

$$0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ |\sin x - 0| = |\sin x| \ \leq \ |x| \ < \ \delta \ < \varepsilon \ .$$

De la misma manera podemos afirmar que

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \ ,$$

eligiendo, de nuevo, $\delta < \varepsilon$ se tiene

$$0 < |x-0| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \ \leq \ \left|\frac{x}{2}\right| \ < \ |x| \ < \ \delta \ < \varepsilon \ .$$

A continuación veamos que

$$\begin{aligned}
\cos x \ &= \ \cos\left(2\frac{x}{2}\right) \\
&= \ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \ 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \ 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \ ,
\end{aligned}$$

identidad útil para arribar a

$$\lim_{x\to 0} \ \cos x = 1 \ .$$

En efecto, utilizando Álgebra de Límites,

$$\lim_{x\to 0} \ \cos x \ = \ 1 - 2\cdot 0^2 \ = \ 1 \ .$$

Finalmente, concluimos el siguiente resultado.

Teorema 8. *Para $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to a} \ \sin x = \sin a \quad \textit{y} \quad \lim_{x\to a} \ \cos x = \cos a \ .$$

Demostración: Utilizando lo anterior, más las fórmulas para la suma de senos y cosenos, y el Álgebra de Límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \sin x &= \lim_{x\to 0} \sin(x+a) \\
&= \ \lim_{x\to 0}(\sin x \ \cos a + \cos x \ \sin a) \\
&= \ 0\cdot\cos a + 1\cdot\sin a \ = \sin a \ ,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \cos x &= \lim_{x\to 0} \cos(x+a) \\
&= \ \lim_{x\to 0}(\cos x \ \cos a - \sin x \ \sin a) \\
&= \ 1\cdot\cos a - 0\cdot\sin a \ = \cos a \ .
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolario 2.

1. *Para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,*

$$\lim_{x\to a} \tan x = \tan a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \sec x = \lim_{x\to a} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos a} = \sec a \ .$$

2. *Para $a \neq k\pi$,*

$$\lim_{x\to a} \csc x = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin a} = \csc a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} \cot x = \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a \ .$$

1.10. El Principio de Intercalación

Teorema 9 (Principio de intercalación). *Sean f, g y h tres funciones y a un número real, tales que, en algún entorno reducido $E'(a,\rho)$ se tiene*

$$g(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; h(x) \;,$$

y además las funciones g y h tienen límite en el punto a, siendo

$$\lim_{x\to a} g(x) \;=\; \lim_{x\to a} h(x) \;=\; \ell \;.$$

Entonces la función f también tiene límite en el punto a y vale

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \;.$$

Demostración: Sean $\varepsilon > 0$ y los números positivos δ_1 y δ_2, para los cuales valen

$$0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |g(x)-\ell| < \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |h(x)-\ell| < \varepsilon \;.$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\rho,\delta_1,\delta_2\}$, y x tal que

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \begin{cases} g(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; h(x) \\ \ell-\varepsilon \;<\; g(x) \\ h(x) \;<\ell+\varepsilon \end{cases}$$

combinando las tres desigualdades, se tiene que

$$\begin{aligned} &\ell-\varepsilon \;<\; g(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; h(x) \;<\; \ell+\varepsilon \\ &\;\Rightarrow\; \ell-\varepsilon \;<\; f(x) \;<\; \ell+\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| \;<\; \varepsilon \;. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición 5. *El Principio de Intercalación es válido también si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.*

Proposición 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \;.$$

Demostración: Por la Proposición 4, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, y $x \neq 0$, valen

$$|\sin x| < |x| < |\tan x| \;.$$

Entonces, para los x tales que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donde $\sin x > 0$ y $\tan x > 0$; se tiene

$$\begin{aligned} &|\sin x| < |x| < |\tan x| \\ &\;\Rightarrow\; \sin x < x < \tan x \quad \text{dividimos por}(\sin x > 0) \\ &\;\Rightarrow\; \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\ &\;\Rightarrow\; 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \;, \end{aligned}$$

Y para los x tales que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, donde $\sin x < 0$ y $\tan x < 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
&|\sin x| < |x| < |\tan x| \\
&\quad \Rightarrow \quad -\sin x < -x < -\tan x \quad \text{dividimos por}(-\sin x > 0) \\
&\quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\
&\quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \ .
\end{aligned}$$

Como además sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \cos x \ = \ 1 \ \neq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \ ,$$

utilizando el Teorema 9 se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0 \ ,$$

por lo que existe el límite y vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Q.E.D.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119