Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2 (4ta parte)

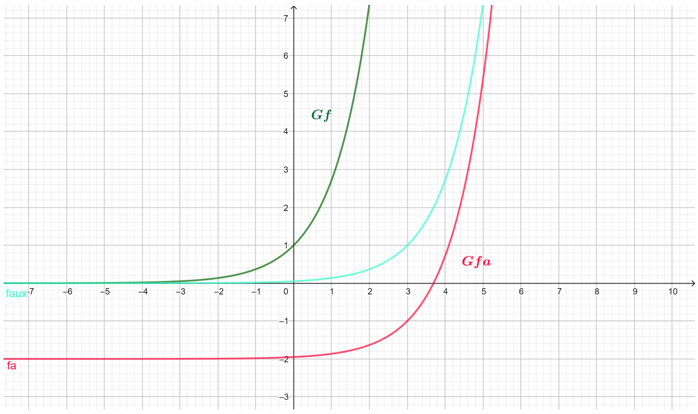
☞ **26.** Determinar la ley, dominio y recorrido de las funciones cuyas gráficas se obtienen de la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ mediante:

-a- traslación vertical hacia abajo en 2 unidades más una traslación horizontal a la derecha en 3 unidades.

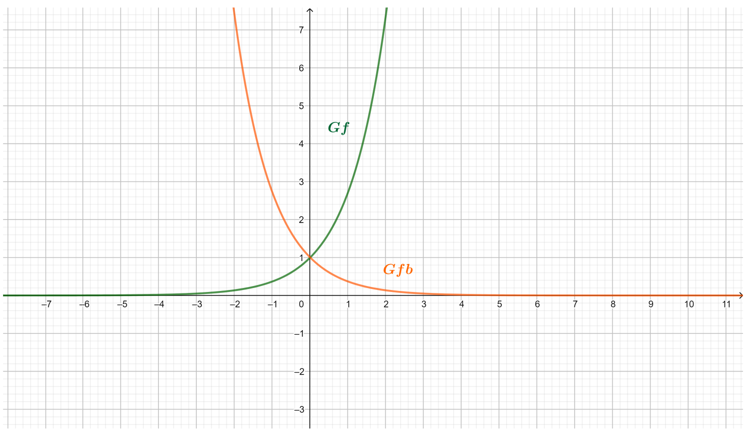
-b- reflexión con respecto al eje de las ordenadas.

-c- reflexión con respecto al eje de las abscisas.

https://www.geogebra.org/classic/b94vg9x2
Si $f(x) = e^x$, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$.
a) $fa(x) = f(x-3) - 2 = e^{x-3} - 2$, entonces $\mathrm{Dom}(fa) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(fa) = (-2, +\infty)$.

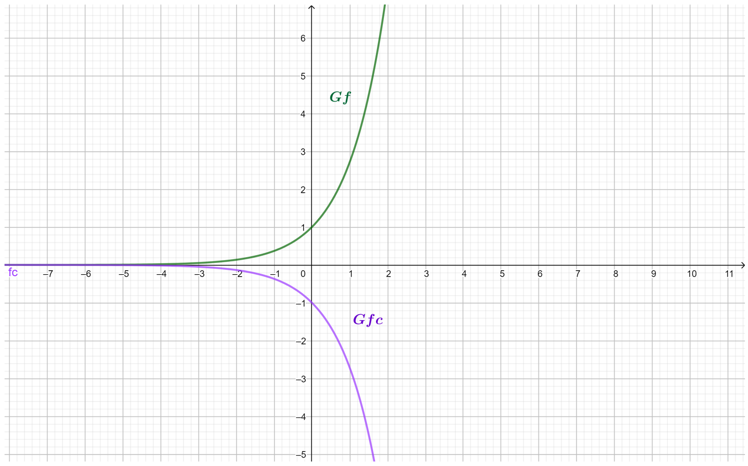


b) $fb(x) = f(-x) = e^{-x}$, entonces $\mathrm{Dom}(fb) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(fb) = \mathbb{R}^+$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

c) $fc(x) = -f(x) = -e^x$, entonces $\mathrm{Dom}(fc) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(fc) = \mathbb{R}^-$.



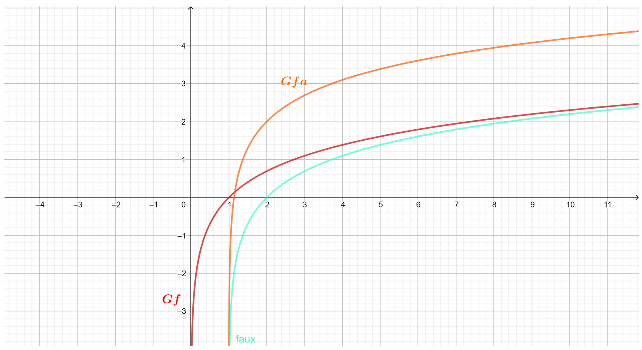
☞ **27.** Determinar la ley, dominio y recorrido de las funciones cuyas gráficas se obtienen de la gráfica de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ mediante:

-a- traslación vertical hacia arriba en 2 unidades más una traslación horizontal a la derecha en 1 unidad.

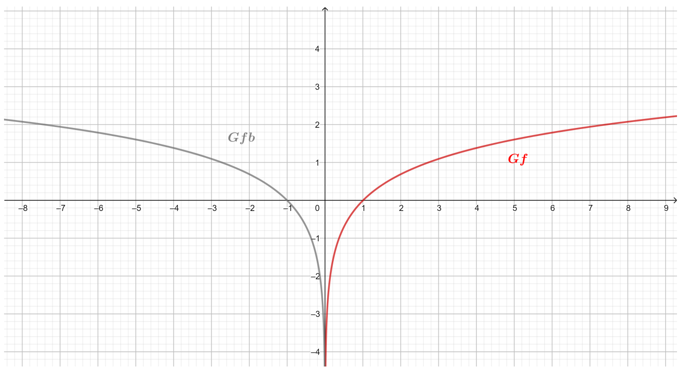
-b- reflexión con respecto al eje de las ordenadas.

-c- reflexión con respecto al eje de las abscisas.

https://www.geogebra.org/classic/j5qyuxsb
Si $f(x) = \ln x$, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$.
a) $fa(x) = f(x-1) + 2$, entonces $\mathrm{Dom}(fa) = (1, +\infty)$ y $\mathrm{Rec}(fa) = \mathbb{R}$.

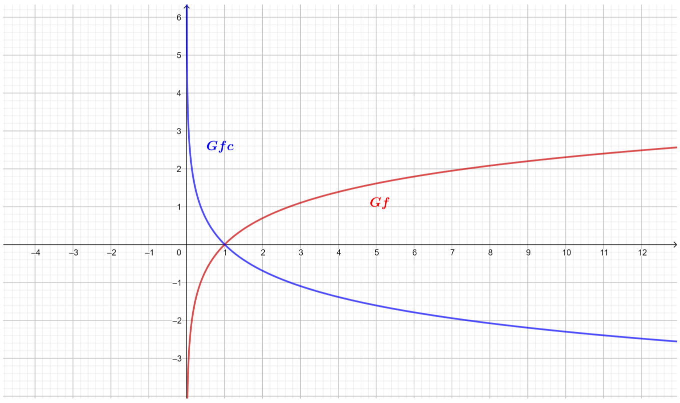


b) $fb(x) = f(-x) = \ln(-x)$, entonces $\mathrm{Dom}(fb) = \mathbb{R}^-$ y $\mathrm{Rec}(fb) = \mathbb{R}$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

c) $fc(x) = -f(x) = -\ln x$, entonces $\mathrm{Dom}(fc) = \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{Rec}(fc) = \mathbb{R}$.



☞ **29.** Hallar dominio e imagen de la siguiente función y representarla gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

$$f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

✎ Para analizar las propiedades de la función $f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ podemos observar que se trata de una composición:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x) = \arccos(x) \\ h_1(x) = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 = g_1 \circ h_1.$$

Veamos el dominio de $f_1 = \{x \in \mathrm{Dom}(h_1) : h_1(x) \in \mathrm{Dom}(g_1)\}$

Siendo h_1 una función lineal, $\mathrm{Dom}(h_1) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(h_1) = \mathbb{R}$.

La función g_1 es la inversa de la función coseno en el dominio restringido, $[0, \pi]$. Luego,

$$\begin{array}{r} \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \\ \arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \end{array}$$

Entonces, $\mathrm{Dom}(g_1) = \mathrm{Rec}(\cos) = [-1, 1]$ y $\mathrm{Rec}(g_1) = \mathrm{Dom}(\cos) = [0, \pi]$.

Ahora podemos analizar el dominio de f_1 recordando que es una composición.

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(f_1) = \mathrm{Dom}\,(g_1 \circ h_1) = &\ \{x \in \mathrm{Dom}(h_1) \ : \ h_1(x) \in \mathrm{Dom}(g_1)\} = \\ = &\ \{x \in \mathbb{R} \ : \ h_1(x) \in [-1,1]\} = \\ = &\ \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \le \frac{x}{2} \le 1\right\} = \\ = &\ \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \le x \le 2\} = [-2, 2]. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{Rec}(g_1) = [0, \pi]$, se sabe que $\mathrm{Rec}(f_1) \subset [0, \pi]$.
Sea $z \in [0, \pi]$.
Como $\arccos$ es biyectiva (por tener inversa), sabemos que $\exists\, y \in [-1, 1]$ tal que $g_1(y) = z$. Luego, considerando $x = 2y \in \mathbb{R}$, resulta

$$f_1(x) = (g_1 \circ h_1)(x) = g_1\left(h_1(x)\right) = g_1\left(\frac{x}{2}\right) = g_1\left(\frac{2y}{2}\right) = g_1\left(y\right) = z,$$

es decir, $z \in \mathrm{Rec}(f_1)$. Luego $[0, \pi] \subset \mathrm{Rec}(f_1)$.

Por lo tanto, $\mathrm{Rec}(f_1) = [0, \pi]$.

Para analizar monotonía de la función f_1 podemos utilizar alguna identidad trigonométrica. Por ejemplo,

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Primero, vamos a mostrar que la función coseno es decreciente en $[0, \pi]$ y luego, que dicha propiedad la hereda su función inversa.
Para esto, consideremos $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$. Utilizando (1), resulta

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right). \tag{2}$$

Como $\cos(x_2) < \cos(x_1) \Leftrightarrow \cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$, vamos a analizar el signo de la parte derecha de la igualdad (2).

$$x_1,\ x_2 \in [0, \pi] \Rightarrow 0 < x_2 - x_1 \leq \pi \Rightarrow 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0. \tag{3}$$

Además,

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0. \tag{4}$$

Por lo tanto, de (3) y (4), vemos que $\cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$ y entonces la función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.

Para analizar si su inversa también es decreciente, sean $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. LLamando a sus imágenes $y_1 = \arccos(x_1)$ e $y_2 = \arccos(x_2)$, tenemos que $y_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2$.

Luego, por definición de función inversa, $\cos(y_1) = x_2$ y $\cos(y_2) = x_2$.
Por como habíamos elegido a x_1 y x_2, resulta $\cos(y_1) < \cos(y_2)$ y como la función coseno vimos que es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$, debe entonces ser $y_1 > y_2$, es decir,

$$\arccos(x_1) > \arccos(x_2)$$

resultando así la función $\arccos$ estrictamente decreciente en $[-1, 1]$.

Por último, sean $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Dom}(f_1) = [-2, 2]$, tales que $x_1 < x_2$. Luego,

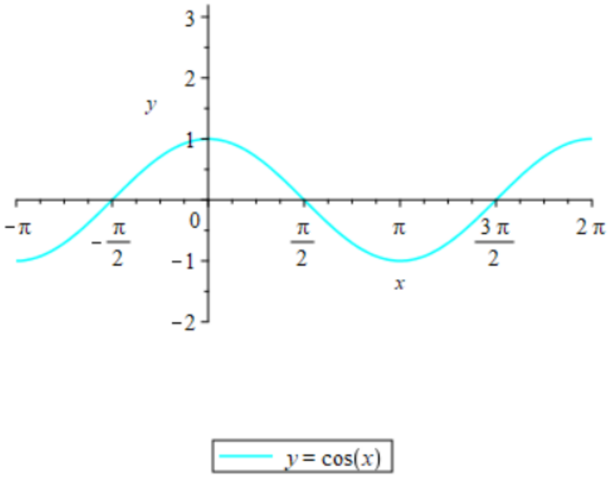
$$x_1 < x_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{1}{2}>0} \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\arccos \text{decrec}} \arccos\left(\frac{x_1}{2}\right) > \arccos\left(\frac{x_1}{2}\right) \Rightarrow f_1(x_1) > f_1(x_2),$$

es decir, f_1 es estrictamente decreciente en su dominio $[-2, 2]$.

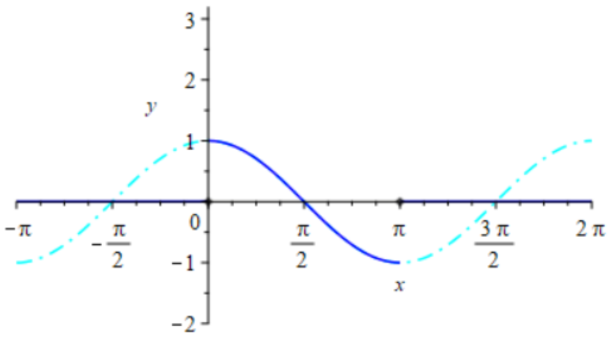
Para realizar la gráfica de f_1 podemos comenzar con la gráfica de la función coseno, que ya es conocida, y realizar adecuadas transformaciones.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

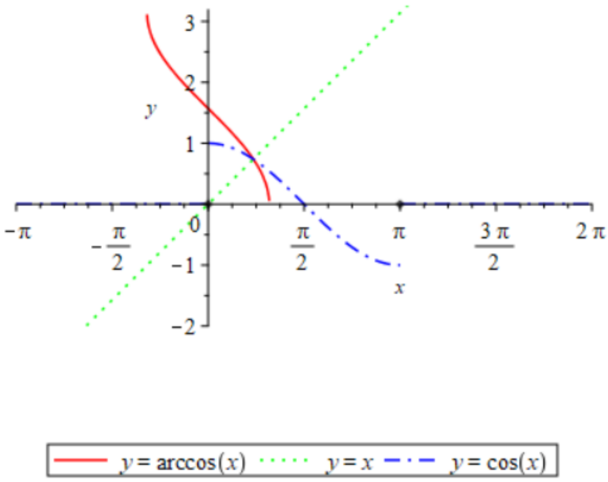
Partiendo de la gráfica conocida



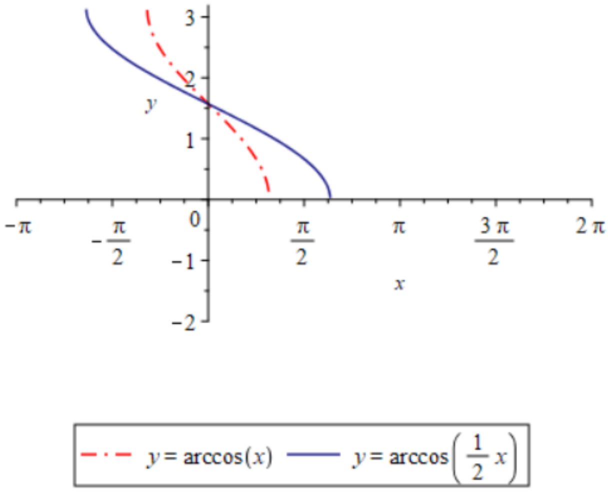
Se restringe el dominio para conseguir la biyectividad



Se rebate respecto de la recta identidad para obtener la inversa



Se dilata horizontalmente para conseguir la gráfica deseada

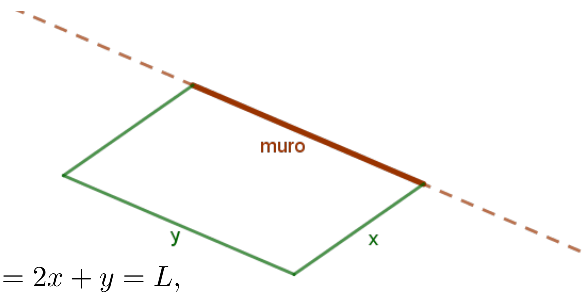


☞ **30.** Un granjero posee L metros de alambre para cercar un terreno de pastoreo rectangular, adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones deberá dar a dicho terreno para que posea el área máxima?

✎ Consideremos un terreno de pastoreo rectangular de largo y y ancho hasta el muro x. El perímetro total del terreno de pastoreo rectangular sería

$$p_t = 2x + 2y,$$

pero como está el muro, sobre ese costado no es necesario poner alambre para cercarlo. Entonces, el perímetro del borde con alambre, p_c, resulta



$$p_c = 2x + y = L, \tag{5}$$

considerando que utilizaremos todo el alambre disponible así queda lo más grande posible. Lo que se quiere maximizar es el área del terreno de pastoreo, a_p, que al ser un terreno rectangular, se calcula como $a_p = x \cdot y$. Despejando de (5), para que solo nos quede una variable, resulta

$$\left.\begin{array}{rl} y = & L - 2x \\ a_p = & x \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \; a_p = x(L-2x). \tag{6}$$

A partir de la relación obtenida en (6), podemos pensar que el área depende de la longitud $x > 0$, como una función cuya ley es

$$a(x) = Lx - 2x^2$$

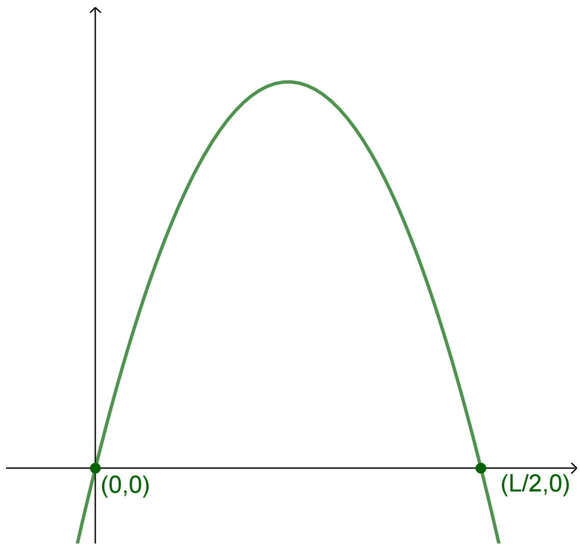
con $\mathrm{Dom}(a) = (0, x_{max})$ donde x_{max} será tal que $a(x)$ siga siendo positiva (pues representa un área).
Como resulta una función cuadrática, podemos graficarla. Al ser el coeficiente que acompaña a x^2 negativo, las ramas de la parábola están hacia abajo. Para ayudarnos a realizar la gráfica, calculemos el lugar en donde ésta interseca al eje horizontal.

$$¿\; \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ tal que } a(x) = 0 \;?$$

$$x_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-L \pm L}{-4} \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\wedge\; x_2 = \frac{L}{2}.$$

Es decir, la gráfica de la función área, $a(x)$, interseca al eje horizontal en el origen y en el punto $B(L/2, 0)$.

https://www.geogebra.org/classic/nq5buf6s



Luego, podemos observar que la máxima área la vamos a obtener en el vértice de la parábola. Las coordenadas de dicho vértice son

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + L/2}{2} = \frac{L}{4} \qquad\qquad y_v = a(x_v) = a(\frac{L}{4}) = L\frac{L}{4} - 2(\frac{L}{4})^2 = \frac{L^2}{8}$$

Por lo tanto, conseguiremos el área máxima cuando utilicemos

$$\hat{x} = \frac{L}{4}.$$

Entonces, recordando la relación (5), resulta necesario que la otra dimensión del terreno sea

$$\hat{y} = L - 2\hat{x} = L - 2\frac{L}{4} = \frac{L}{2}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119