Resolución algunos ejercicios de la práctica 3 (primera parte)

Límite

☞**1.** Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

a- $|x-3|<2 \Rightarrow |x|<5$.

b- $|x-3|<\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|}<2$.

Para mostrar la validez del enunciado, debemos mostrar que si x verifica la primera desigualdad entonces verifica la segunda, o si pensamos en los conjuntos solución, debemos ver que $S_1 \subseteq S_2$.

a- $|x-3|<2 \Rightarrow -2<x-3<2 \Rightarrow -5 < 1<x<5 \Rightarrow |x|<5$.
Vemos entonces que $S_1=(1,5) \subseteq S_2=(-5,5)$

b- $|x-3|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x-3<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$ entonces $S_1=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$. Por otro lado $\frac{1}{|x-2|}<2 \Rightarrow |x-2|>\frac{1}{2} \Rightarrow x-2>\frac{1}{2}$ o $x-2<-\frac{1}{2} \Rightarrow x>\frac{5}{2}$ o $x<\frac{3}{2}$ luego $S_2=(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$.
Vemos entonces que $S_1 \subseteq S_2$.

☞**2.** a- En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta>0$ tal que

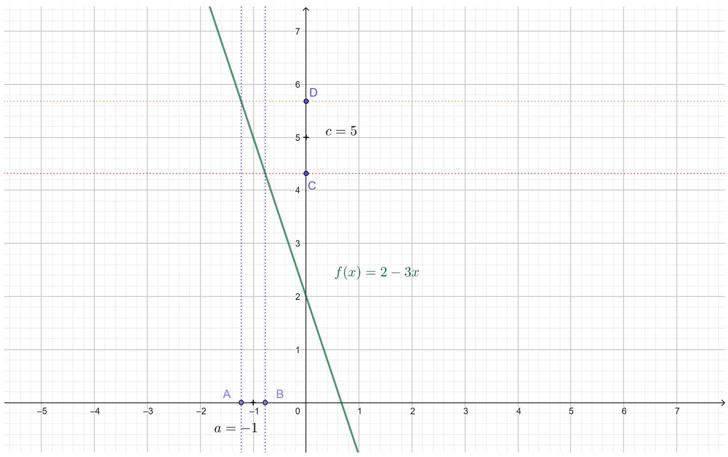
$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\epsilon$$

Siendo $f(x)=2-3x$, para los siguientes valores: $a=-1$, $c=5$ y $\epsilon=0{,}1$

b- Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

a- Queremos hallar un número $\delta>0$ tal que $0<|x-(-1)|<\delta \Rightarrow |2-3x-5|<0{,}1$, o sea $\exists\delta>0$ tal que $0<|x+1|<\delta \Rightarrow |-3x-3|<0{,}1$.
La segunda desigualdad será válida $|-3x-3|=|(-3)(x+1)|=3|x+1|<0{,}1$ sí y sólo si es válida $|x+1|<\dfrac{0{,}1}{3}$ luego bastará considerar $0<\delta<\dfrac{0{,}1}{3}$.

b- Gráficamente https://www.geogebra.org/classic/k9daqfps

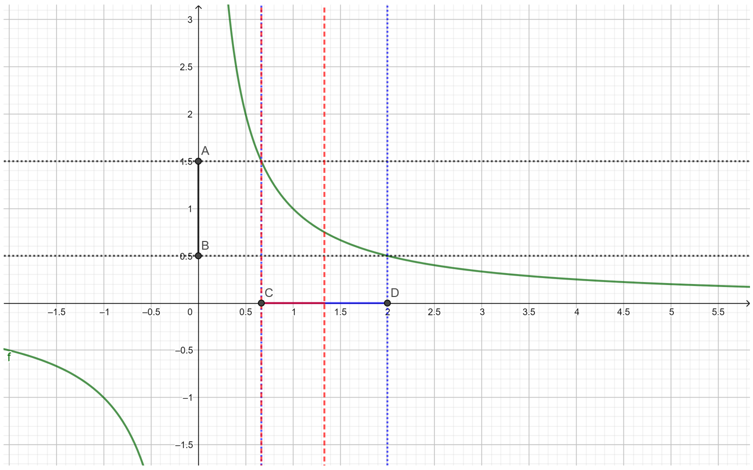


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**3.** Utilizando la representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

a- explicitar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - 1| < 1/2\}$
b- determinar un número $\delta > 0$, tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1/2$
c- comprobar analíticamente la validez de la afirmación anterior.

a- A partir de la representación gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ encontramos que $\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - 1| < \frac{1}{2}\} = (\frac{2}{3}, 2)$ buscando las preimágenes de $f^{-1}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ y $f^{-1}(1 - \frac{1}{2}) = 2$



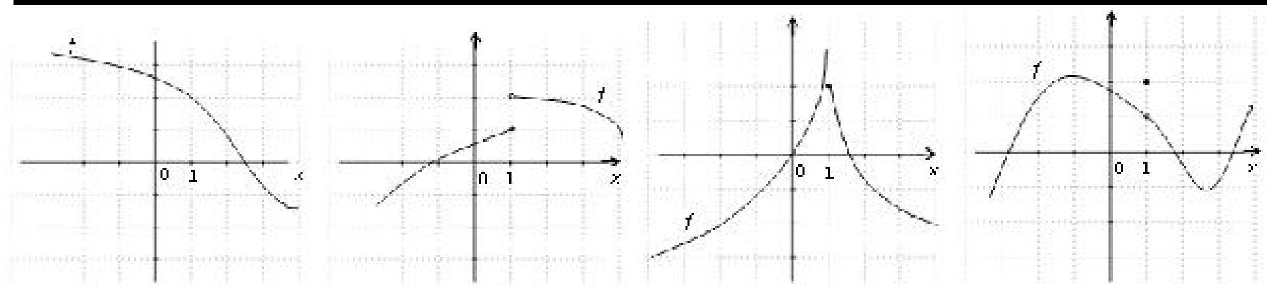
https://www.geogebra.org/classic/jhjjhchr

b- Para hallar $\delta > 0$ tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - 1| < \frac{1}{2}$ debemos encontrar un δ tal que si $x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \Rightarrow |\frac{1}{x} - 1| < \frac{1}{2}$.
Observamos que si consideramos $0 < \delta = \text{mín}(|1 - \frac{2}{3}|, |2 - 1|) = \frac{1}{3}$ se verifica que

$$|x - 1| < \frac{1}{3} \Rightarrow |\frac{1}{x} - 1| < \frac{1}{2}$$

c- En efecto si x es tal que verifica $|x - 1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x - 1 < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} < 2 \overset{\text{recprocos}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{x} - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x) - 1| < \frac{1}{2}$

☞**4.** Resolver para cada una de las funciones cuyas gráficas se esbozan a continuación, lo que se pide en cada item.
a- Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L$.
b- En caso de una respuesta afirmativa en -a-, representar el número L sobre el eje de las ordenadas y, en caso de una respuesta negativa, explicar las razones de la misma.



a- i) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L = 2$ y coincide con $f(1) = 2$.
ii) No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ pues se observa que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$
iii) No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ pues se observa que no existe $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$
iv) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L = 1$ aunque $f(1) = 2 \neq L$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

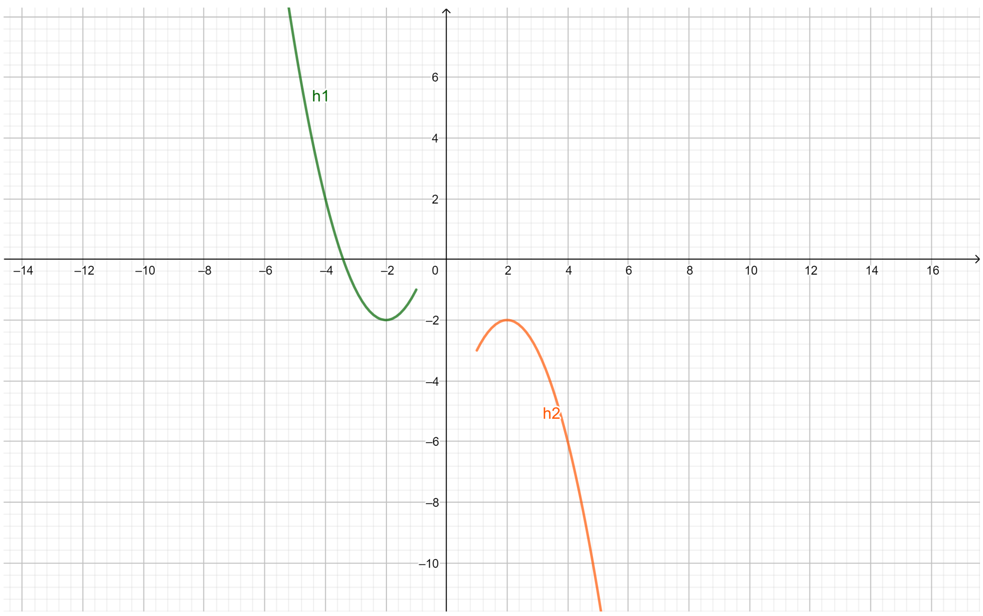
☞**6.** Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1, \\ ax + b & \text{si } |x| \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 6 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a- Representar gráficamente la función h para $x < -1$ y $x > 1$.
b- A partir de la gráfica obtenida, determinar a y b de manera que existan $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

a- Para graficar h completamos cuadrados:

i) Si $x < -1$, $h(x) = x^2 + 4x + 2 = x^2 + 2(2)x + 2^2 - 2^2 + 2 = (x+2)^2 - 2$, luego $V = (-2, -2)$, eje de simetría $x = -2$, su gráfica es (parte) de una parábola con ramas hacia arriba.
ii) Si $x > 1$, $h(x) = -x^2 + 4x - 6 = -(x^2 - 4x + 6) = -(x^2 - 2(2)x + 2^2 - 2^2 + 6) = -((x-2)^2 + 2) = -(x-2)^2 - 2$, luego $V = (2, -2)$, eje de simetría $x = 2$, su gráfica es (parte) de una parábola con ramas hacia abajo.
https://www.geogebra.org/classic/pz3mgsh3



b- A partir de las gráficas observamos que a debe ser negativo y que $-3 < b < -1$, pues para que exista $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ deben existir y coincidir los límites por izquierda y por derecha en $x = -1$, es decir:

$$\lim_{x \to -1^-} (x+2)^2 - 2 = -1 = \lim_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$$

y para que exista $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ deben existir y coincidir los límites por izquierda y por derecha en $x = 1$, es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} ax + b = a + b = \lim_{x \to 1^+} -(x-2)^2 - 2 = -3$$

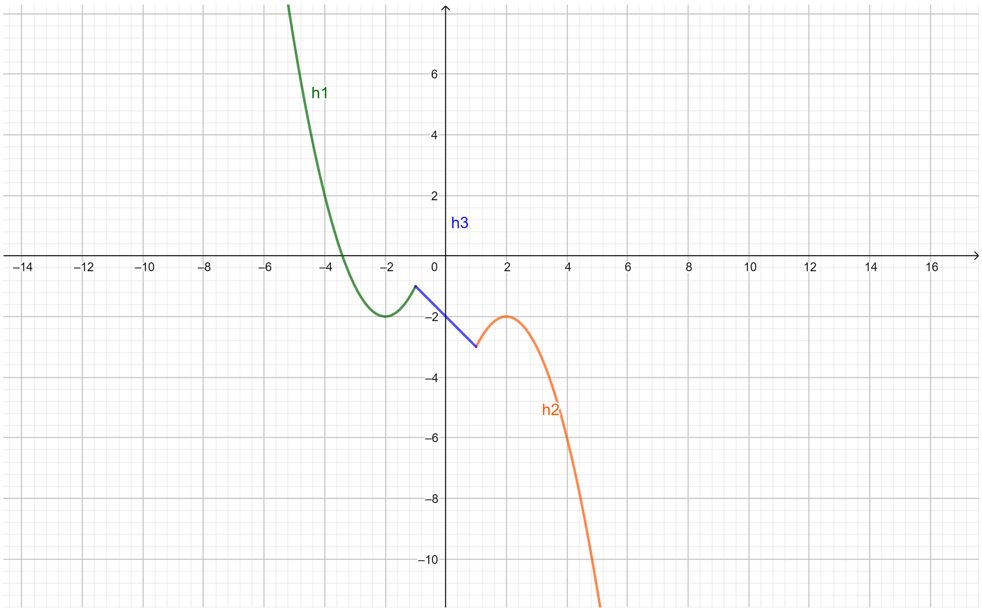
Luego a, b deben ser tales

$$-a + b = -1 \qquad \text{y} \qquad a + b = -3$$

despejando obtenemos los valores de $a = -1$, $b = -2$ y la ley de h:

$$h(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 2 & \text{si } x < -1, \\ -x - 2 & \text{si } |x| \leq 1, \\ -(x-2)^2 - 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

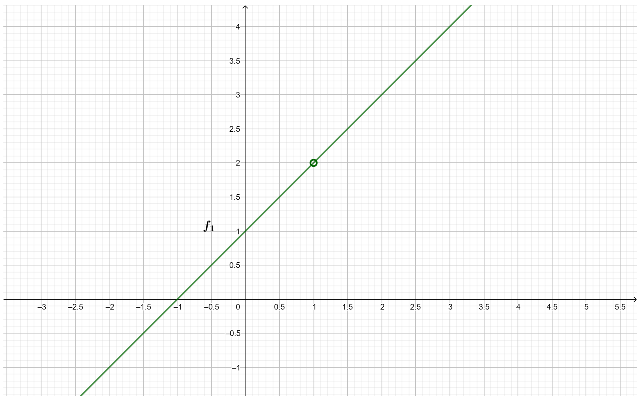


☞**7.** Para cada una de las siguientes funciones determinar su dominio y su gráfica. A partir de la gráfica indicar el valor de cada límite.

a- $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)$.

c- $f_3(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$

a- $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R} - \{1\}$, para graficar observamos que si $x \in \mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R} - \{1\}$, podemos escribir $f_1(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ luego la gráfica es la lineal $x+1$ sin el punto $(1,2)$.
https://www.geogebra.org/classic/zvxb4rbr

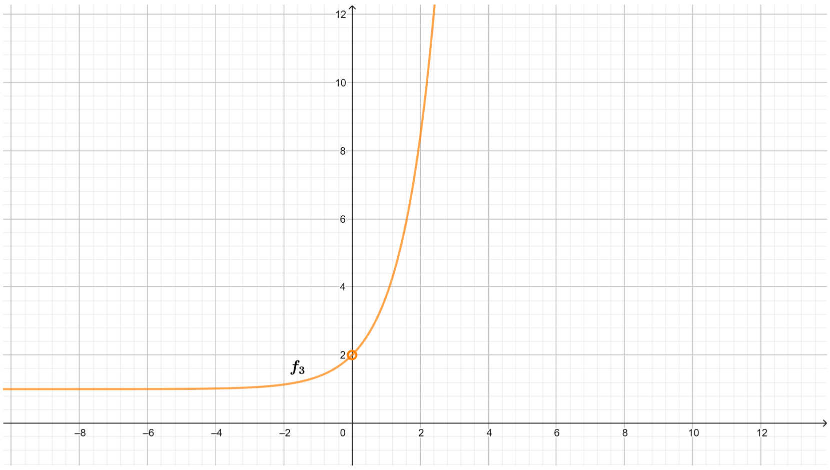


A partir de la gráfica vemos que $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 2$.

c- $f_3(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$, $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} - \{0\}$, para graficar observamos que si $x \in \mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R} - \{0\}$, podemos escribir $f_3(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1} = e^x+1$, luego la gráfica es la exponial subida una unidad sin el punto $(0,2)$.

https://www.geogebra.org/classic/ywyd6qwx

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



A partir de la gráfica vemos que $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 2$.

☞**8.** Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites. a- $\lim_{x\to 4}(9-x) = 5$ b- $\lim_{x\to 4} \frac{8}{x} = 2$

a- $\lim_{x\to 4}(9-x) = 5 \Leftrightarrow$

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que se verifica } 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(9-x)-5| < \epsilon$$

Entonces como $|(9-x)-5| = |9-x-5| = |-x+4| = |x-4|$, bastará considerar $0 < \delta = \epsilon$ se tiene que

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |(9-x)-5| < \epsilon$$

b- $\lim_{x\to 4} \frac{8}{x} = 2 \Leftrightarrow$

$$\text{dado } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que se verifica } 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\frac{8}{x} - 2| < \epsilon$$

Entonces como $|\frac{8}{x} - 2| = |\frac{8-2x}{x}| = |2\frac{4-x}{x}| = \frac{|2||4-x|}{|x|} = 2\frac{|x-4|}{|x|}$ (*).

Ahora observemos que si consideramos $0 < \delta_1 = 1$ tal que $0 < |x-4| < \delta_1$ entonces $3 = 4 - \delta_1 < x < 4 + \delta_1 = 5$, vemos que $0 <3 < x < 5$ y tomando recíprocos y considerando $x = |x|$, tenemos $\frac{1}{5} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{3}$, entonces volviendo a (*),

$$|\frac{8}{x} - 2| = 2\frac{|x-4|}{|x|} < 2|x-4|\frac{1}{3}$$

Luego, bastará considerar $0 < \delta < \min(1, \frac{3}{2}\epsilon)$ se tiene que

$$0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |\frac{8}{x} - 2| < \epsilon$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119