Resolución de algunos ejercicios de la práctica 3 (tercera parte)

Continuidad

☞**29.** Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ y $g(x) = x+3$.

-a- ¿Es correcto decir que $f = g$?

-b- ¿Cómo son los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$? Justificar la respuesta.

-a- $f(x) \neq g(x)$, pues aunque $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3$ si $x \neq 2$, el $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, mientras que $g(x) = x+3$ tiene $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

-b- Por carácter local del límite, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 2$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

☞**30.** Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

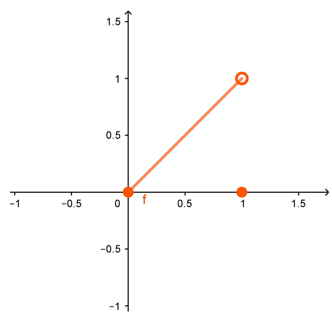
-a- $f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$. f_1 es continua en $x_0 = 1$ sí y sólo si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Observemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} 2-x$ luego existe límite en $x_0 = 1$ y coincide con $f(1) = 2-1 = 1$, luego f_1 es continua en $x_0 = 1$.

-b- $f_2(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$. f_2 es continua en $x_0 = 0$ sí y sólo si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Observemos que $\lim\limits_{x\to 0^-} -4 = -4 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1$ luego no existe límite en $x_0 = 0$, por lo tanto f_2 no es continua en $x_0 = 0$.

☞**31.** Dar un ejemplo de una función cuyo dominio sea el intervalo $[0,1]$, que sea continua en el intervalo $(0,1)$ pero no en el intervalo $[0,1]$.

Podemos pensar en una función tal que sea continua en $(0,1)$ pero $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$ o bien $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$.

Un ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**32.** Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

-a- $f_1(x) = [x]$. La función $[x] = k$ en cada intervalo $[k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$, es constante y luego continua, pero no es continua en $x = k$ para ningún $k \in \mathbb{Z}$ pues

$$\lim_{x \to k^-} [x] = k - 1 \neq \lim_{x \to k^+} [x] = k$$

Luego $[x]$ presenta una discontinuidad inevitable de salto finito (uno) en cada $k \in \mathbb{Z}$.
Por lo tanto $[x]$ es continua $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

-b- $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+7x-4}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$.

La función f_2 está definida en todo $\mathbb{R}$. Si $x \neq -4$, $f_2(x) = \dfrac{2x^2+7x-4}{x+4} = \dfrac{(x+4)(2x-1)}{x+4} = 2x-1$ es continua por ser lineal. En $x = -4$, calculamos $\displaystyle\lim_{x \to -4} \frac{2x^2+7x-4}{x+4} \overset{CLL}{=} \lim_{x \to -4} 2x - 1 = -9 \neq f(-4) = 3$ luego f_2 presenta una discontinuidad evitable en $x = -4$. Por lo tanto f_2 es continua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

-c- $f_3(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-6x+4}$ es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{2, 1\}$ por ser una función racional.

-d- $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

La función f_4 está definida en todo $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R} - \{1\}$ es continua por ser una función racional. En $x = 1$, calculamos $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} \overset{CLL}{=} \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3 \neq f_4(1) = -5$ luego f_4 presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$. Por lo tanto f_4 es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

-e- $f_5(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

f_5 está definida en $\mathbb{R}$. En $(-\infty, 3)$ es continua por ser una función cuadrática. En $(3, +\infty)$ es continua por ser lineal. En $x = 3$, calculamos $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} x^2 - 2 = 7 = \lim_{x \to 3^+} 2x + 1$ y coincide con $f_5(3) = 3^2 - 2 = 7$. Por lo tanto f_5 es continua.

☞**33.** Dadas las funciones

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad f_2(x) = \frac{|3-x|}{x-3}, \qquad f_3(x) = 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

determinar para cuáles de ellas se puede definir una función $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que coincida con f_i, es decir,

$$F_i(x) = f_i(x) \quad \forall\, x \in Dom(f_i),\ i = 1, 2, 3.$$

-a- $f_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{2\}$ por ser una función racional, además existe $\displaystyle\lim_{x \to 2} f_1(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \overset{CLL}{=} \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$, entonces podemos definir una función F_1 continua

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

en $\mathbb{R}$ que coincida con f_1 en $\mathbb{R}-\{2\}$, como sigue:

$$F_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$

-b- $f_2(x)=\dfrac{|3-x|}{x-3}=\operatorname{sgn}(x-3)$ con $\operatorname{Dom}(f_2)=\mathbb{R}-\{3\}$, como la función f_2 presenta una discontinuidad inevitable en $x=3$ (de salto finito) no es posible definir F_2 continua en $\mathbb{R}$ que coincida con f_2 en $\mathbb{R}-\{3\}$.

☞**34.**

-a- Probar que si f es una función continua en el punto $x=a$, entonces la función $|f|$ también lo verifica.

-b- Mostrar, mediante un ejemplo, que la afirmación recíproca no es cierta. Es decir, si $|f|$ es continua en el punto $x=a$, no necesariamente f es continua en $x=a$.

-a- Sea f es una función continua en $x=a$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, por proposición 2, entonces $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$, luego $|f|$ es continua en $x=a$.

-b- La afirmación recíproca no es cierta, basta considerar $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\geq 0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$, resulta $|f(x)|=1$ es continua en $a=0$, pero f no es continua en $a=0$.

☞**35.** En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h=f\circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

-a- $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-x$.

-b- $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$, $g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

-c- $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

-a- Sean $f(x)=x+1$ con $\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec}(f)=\mathbb{R}$ y $g(x)=x^2-x$ con $\operatorname{Dom}(g)=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec}(g)=[-\frac{1}{4},+\infty)$. La función compuesta $h=f\circ g$ tiene como $\operatorname{Dom}(h)=\{x\in\operatorname{Dom}(g): g(x)\in\operatorname{Dom}(f)\}=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$, la ley es $h(x)=f(g(x))=x^2-x+1$ resulta continua por ser polinómica ($h=f\circ g$ es continua en a sii g es continua en a y f es continua en $g(a)$).

-b- Sean $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ con $\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec}(f)=\mathbb{R}_0^+$ y $g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, con $\operatorname{Dom}(g)=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Rec}(g)=\mathbb{R}$.

Observemos que f es continua en $\mathbb{R}^-$ por ser constante y en $\mathbb{R}^+$ por ser lineal y como $\lim\limits_{x\to 0^-}0=0=\lim\limits_{x\to 0^+}x=f(0)=0$, resulta entonces f continua.

g es continua en $\mathbb{R}^-$ por ser lineal y en $\mathbb{R}^+$ por ser cuadrática y como $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=g(0)=0$, resulta entonces g continua.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

La función compuesta $h = f \circ g$ tiene como

$$\mathrm{Dom}(h) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

y la ley es

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) < 0 \\ g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

resulta continua en $\mathbb{R}^-$ por ser constante y en $\mathbb{R}^+$ por ser cuadrática y además en 0 pues $\lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = h(0) = 0$. Por lo tanto h es continua.

☞**36.** Sea la función g definida por $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

-a- Determinar su dominio.

-b- Trazar la gráfica de la función g.

-c- Calcular $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

-d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x = 1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? En caso afirmativo, escribir su ley.

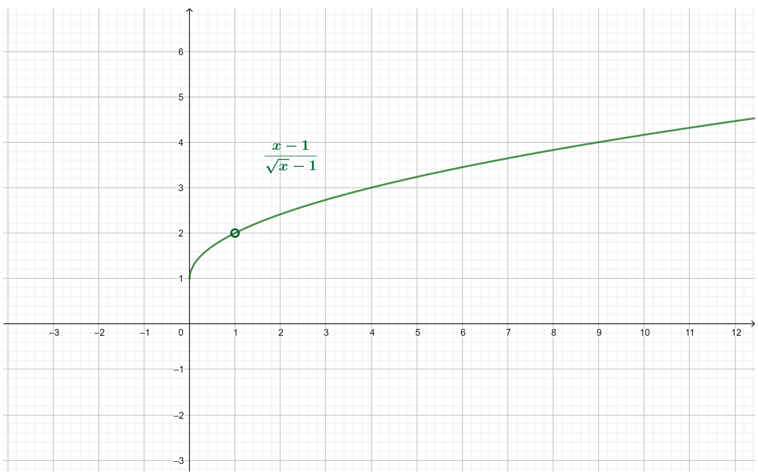
-a- Sea $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, entonces el dominio es

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(x-1) \cap \{x \in \mathrm{Dom}(\sqrt{x}-1) : \sqrt{x} \neq 1\} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}_0^+ - \{1\}) = \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$$

-b- Para trazar la gráfica de la función g observemos que si $x \geq 0$ y $x \neq 1$, podemos escribir

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

luego la G_g coincide con la gráfica de $\sqrt{x}+1$ si $x \neq 1$.



-c- Siendo $g(x) = \sqrt{x}+1$ si $x \neq 1$, tenemos $\lim\limits_{x\to 1} g(x) \stackrel{CLL}{=} \lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+1 = 2$.

-d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x = 1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? Si, es posible definir f continua tal que $f(x) = g(x)$ para $x \neq 1$, como $f(x) = \sqrt{x}+1$ para todo $x \geq 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**37.** Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función f será continua en $\mathbb{R}$ si es continua en cada $x \in \mathbb{R}$.
Si, $x \neq 0$, como $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ es el producto de x^2 (que es continua por ser polinómica) y $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (que es continua por ser la composición de funciones continuas en $x \neq 0$), luego f resulta continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
Para ver la continuidad en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \overbrace{x^2}^{\nearrow 0} \overbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}^{\text{acotada}} = 0 = f(0) = a.$$

Luego debe ser $a = 0$, resultando f continua en $\mathbb{R}$. (Aunque como habíamos visto la función $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$).

☞**38.** Determinar los valores de a y b para los cuales se verifica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax^2) - b}{2x^4} = -1.$$

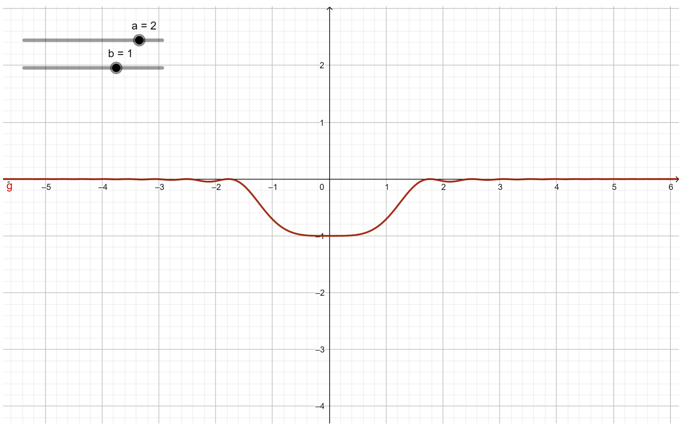
$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos(ax^2) - b}^{\nearrow ??}}{\underbrace{2x^4}_{\searrow 0}} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos(ax^2) - b) = 0 \Rightarrow b = 1$$

Además, $a \neq 0$ pues sino $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos(ax^2)}^{=1} - 1}{2x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$

Luego $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax^2) - 1}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(ax^2) - 1)(\cos(ax^2) + 1)}{(2x^4)(\cos(ax^2) + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2(ax^2)}{(2x^4)(\cos(ax^2) + 1)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(ax^2)}{ax^2}}_{\searrow 1} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(ax^2)}{(ax^2)}}_{\searrow 1} \frac{-a^2}{2\underbrace{(\cos(ax^2) + 1)}_{\searrow 2}} = \frac{-a^2}{4} = -1 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

https://www.geogebra.org/classic/ezmze2x9



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**39.** Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función f será continua en $\mathbb{R}$ si es continua en cada $x \in \mathbb{R}$.
Si, $x < 1$, $f(x) = 2x$ es continua por ser una función lineal.
Si, $1 < x < 2$, $f(x) = ax^2 + b$ es continua por ser una función cuadrática.
Si, $x > 2$, $f(x) = 4x$ es continua también por ser lineal.
Es continua en $x = 1$ sí y sólo si

$$\lim_{x\to 1^-} 2x = 2 = \lim_{x\to 1^+} ax^2 + b = a + b = f(1)$$

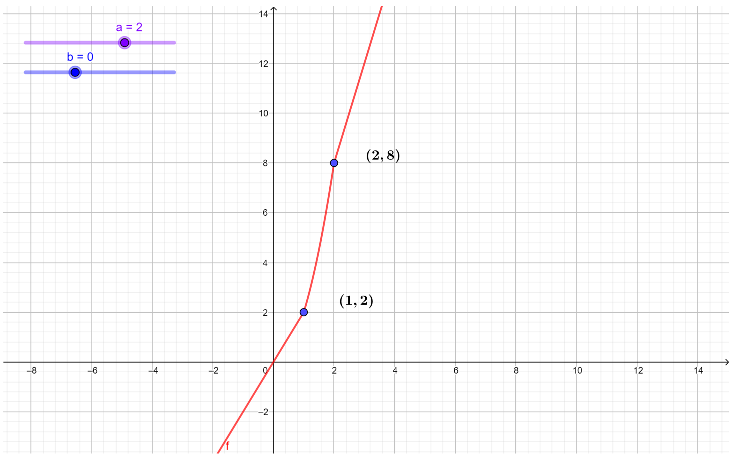
Es continua en $x = 2$ sí y sólo si

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2 + b = a(2)^2 + b = f(2) = \lim_{x\to 2^+} 4x = 8$$

Luego f será continua en $\mathbb{R}$ sí y sólo si

$$a + b = 2 \quad \text{y} \quad 4a + b = 8 \Leftrightarrow a = 2 \quad \text{y} \quad b = 0$$

https://www.geogebra.org/classic/k8jqszfz



Teoremas de valor intermedio

☞**40.** Dada la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

analizar si el teorema de Bolzano asegura la existencia de un punto $c \in (-1, 4)$ tal que $f(c) = 0$.

La función f está definida en $[-1, 4]$, veamos si verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano, para ello: f es continua en $-1 \leq x < 0$ por ser constante, es continua en $0 < x \leq 4$ por ser cuadrática, pero no es continua en $x = 0$ pues

$$\lim_{x\to 0^-} 3 = 3 \neq \lim_{x\to 0^+} 2 - x^2 = 2.$$

Sin embargo, f es continua en $[0, 4]$ pues $\lim_{x\to 0^+} 2 - x^2 = 2 = f(0)$, además $f(0)f(4) = 2 \cdot (-14) < 0$ luego el Teorema de Bolzano asegura que

existe $c \in (0, 4) \subset (-1, 4)$ tal que $f(c) = 0$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

☞**41.** Considerar la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^3-x^2+1$ para $x\in\mathbb{R}$.

-a- Demostrar que existe un número $c\in[n,n+1]$ para algún $n\in\mathbb{Z}$ tal que $f(c)=0$.

-b- Aproximar c con un error menor que $0{,}01$.

-c- Probar que existe un número $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $f(\beta)=20$.

La función $f(x)=x^3-x^2+1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular lo es en cualquier intervalo $[n,n+1]$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.

a- Observamos que $f(-1)=-1$, $f(0)=1$ y f continua en $[-1,0]$ luego (TB)

existe $c\in(-1,0)$ tal que $f(c)=0$

b- Por método de bisección, un número $c_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\in(a,b)=(-1,0)$ aproxima al cero c de la función f con error $|c_{n+1}-c|<\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, luego buscamos n tal que

$$\frac{b-a}{2^{n+1}}<0{,}01\Leftrightarrow\frac{0-(-1)}{2^{n+1}}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow 100<2^{n+1}$$

basta considerar $n=6$ pues $100<2^7=128$.
c- Hallar β tal que $f(\beta)=20$, es equivalente a buscar β tal que $g(\beta)=f(\beta)-20=0$.
$g(x)=x^3-x^2-19$ es continua en $\mathbb{R}$, luego en cualquier intervalo cerrado, además $g(3)=3^3-3^2-19=-1$ y $g(4)=4^3-4^2-19=29$ luego (TB) existe $\beta\in(3,4)$ tal que $g(\beta)=0$ o sea

existe $\beta\in(3,4)$ tal que $f(\beta)=20$

☞**42.** Demostrar que existe un único número $c\in\mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\cos x-\sqrt{x}=0$$

Consideremos $f(x)=\cos x-\sqrt{x}$ definida y continua en $\mathbb{R}_0^+$.
Busquemos un intervalo $[a,b]$ en donde se pueda aplicar el Teorema de Bolzano.

- $f(0)=1>0$ y $f(1)=\overbrace{\cos 1}^{<1}-\overbrace{\sqrt{1}}^{1}<0$
- f es continua en $[0,1]$, pues lo es en todo su dominio por ser la resta de dos funciones continuas.

Luego, por el Teorema de Bolzano, existe $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$ o equivalentemente la ecuación $\cos x-\sqrt{x}=0$ tiene una solución en (0,1).

¿Cómo podemos probar que esta solución es única?
Podemos observar que como $\cos x$ y $-\sqrt{x}$ son funciones estrictamente decrecientes en $[0,1]$, resulta f estrictamente decreciente, por lo tanto f no tiene otra raíz en $[0,1]$.
Además $-1\le\cos x\le 1$ para todo x, y $\sqrt{x}>1$ si $x>1$, luego $f(x)<0$ para todo $x\ge1$, por lo tanto f no tiene otra raíz si $x\ge 1$.

☞**43.** Un **punto fijo** de una función f es un número $\xi\in$ *Dom*(f) tal que $f(\xi)=\xi$.

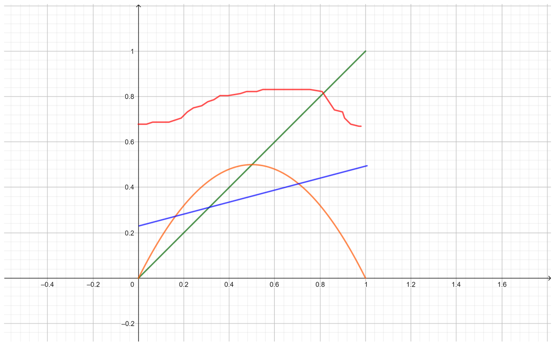
-a- Representar gráficamente una función continua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{Im}(f)\subseteq[0,1]$ y determinar gráficamente si f tiene un punto fijo.

-b- ¿ Es posible trazar la gráfica de una función continua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que su imagen está contenida en $[0,1]$ y que no tenga un punto fijo?

-c- Demostrar que si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función continua, tal que $\mathbf{Im}(f)\subseteq[0,1]$, entonces f tiene un punto fijo.
Sugerencia: Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, donde $g(x)=f(x)-x$.

a,b- https://www.geogebra.org/classic/wjjbzfn6

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



c- Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua, tal que $\mathrm{Rec}(f)\subseteq[0,1]$.
Definimos una función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, como $g(x)=f(x)-x$, entonces resulta:
– $g(0)=f(0)-0\geq 0$. Si $g(0)=0=f(0)$, entonces 0 es punto fijo de f (1).
Sino, será $g(0)>0$.
– $g(1)=f(1)-1\leq 0$. Si $g(1)=0=f(1)-1$, entonces 1 es punto fijo de f (2).
Sino, será $g(1)<0$.
– g continua en $[0,1]$ por ser resta de funciones continuas.
Podemos aplicar (TB) a la función $g(x)=f(x)-x$, es decir,

existe $c\in(0,1)$ tal que $g(c)=0=f(c)-c$ (3).

Resultando en cualquiera de los casos (1), (2) o (3), que

existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c$

es decir la función

f tiene un punto fijo en $[0,1]$

☞**44.** Demostrar que si la función f es continua y no tiene ceros en el intervalo $[a,b]$ entonces $f(x)>0$ para todo $x\in[a,b]$, o bien $f(x)<0$ para todo $x\in[a,b]$.

Sea f una función continua y que no se anula en $[a,b]$, debemos demostrar que $\forall x\in[a,b]$, $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa.
Por contrarecíproco, suponemos que existen $x_1,\ x_2\in[a,b]$ tales que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos distintos. Por ejemplo,

$f(x_1)>0$ y $f(x_2)<0$

Como f es continua en $[a,b]$, en particular, f es continua en $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$ y $f(x_1)f(x_2)<0$, luego por (TB)

existe $c\in(x_1,x_2)$ tal que $f(c)=0$

pero esto contradice la hipótesis de que f no tiene ceros en $[a,b]$. Por lo tanto,

$f(x)>0$ para todo $x\in[a,b]$, o bien $f(x)<0$ para todo $x\in[a,b]$

☞**45.** En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

-a- $f_1(x)=2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

-b- $f_2(x)=x^2+4,\ x\leq 0$.

-c- $f_3(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\leq 1,\\ x^2 & \text{si } 1<x\leq 3,\\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x>3.\end{cases}$

Recordemos: Teorema (Continuidad de la función inversa). Si f es creciente y continua en un intervalo $[a,b]$, entonces:

1- existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a),f(b)]$,

2- f^{-1} es creciente en $[f(a),f(b)]$,

3- f^{-1} es continua en $[f(a),f(b)]$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Vale un teorema análogo para f decreciente y continua en $[a, b]$.

-a- Sea $f_1(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$, con $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathrm{Rec}(f_1) = \mathbb{R}$
f_1 es continua por ser lineal, además f_1 es estrictamente creciente pues

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2)$$

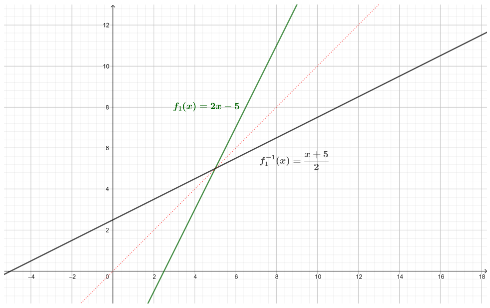
Entonces existe la inversa f_1^{-1} con

$$\mathrm{Dom}(f_1^{-1}) = \mathrm{Rec}(f_1) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{Rec}(f_1^{-1}) = \mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}$$

y la ley

$$f_1(x) = 2x - 5 = y \quad \Leftrightarrow \quad f_1^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

Por teorema de continuidad de la inversa, resulta f_1^{-1} estrictamente creciente y continua.



https://www.geogebra.org/classic/mmzu5x4v

-c- Sea $f_3(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$ con $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R}$

Continuidad, f_3 es continua, en efecto:
– f_3 es continua en $x < 1$ por ser lineal.
– f_3 es continua en $1 < x < 3$ por ser cuadrática.
– f_3 es continua en $x > 3$ por ser composición de continuas.
– f_3 es continua en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x - 1 = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = f_3(1)$.
– f_3 es continua en $x = 3$ pues $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9 = \lim\limits_{x \to 3^+} 3\sqrt{3x} = f_3(3)$.

Monotonía, f_3 es estrictamente creciente pues:
– Si $x_1 < x_2 \leq 1 \Leftrightarrow f_3(x_1) = 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 = f_3(x_2)$, o sea f_3 es estrictamente creciente en $(-\infty, 1]$.
– Si $1 < x_1 < x_2 \leq 3 \Leftrightarrow f_3(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f_3(x_2)$, o sea f_3 es estrictamente creciente en $(1, 3]$.
– Si $3 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow f_3(x_1) = 3\sqrt{3x_1} < 3\sqrt{3x_2} = f_3(x_2)$, o sea f_3 es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.
– Además, si $x_1 \leq 1 < x_2 \leq 3 < x_3 \Leftrightarrow f_3(x_1) = 2x_1 - 1 \leq 1 < x_2^2 = f_3(x_2) \leq 9 < 3\sqrt{3x_3} = f_3(x_3)$.

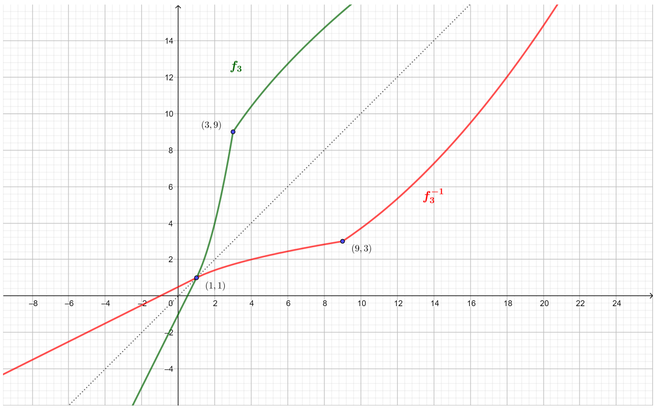
Entonces el

$$\mathrm{Rec}(f_3) = (-\infty, 1] \cup (1, 9] \cup (9, +\infty) = \mathbb{R}$$

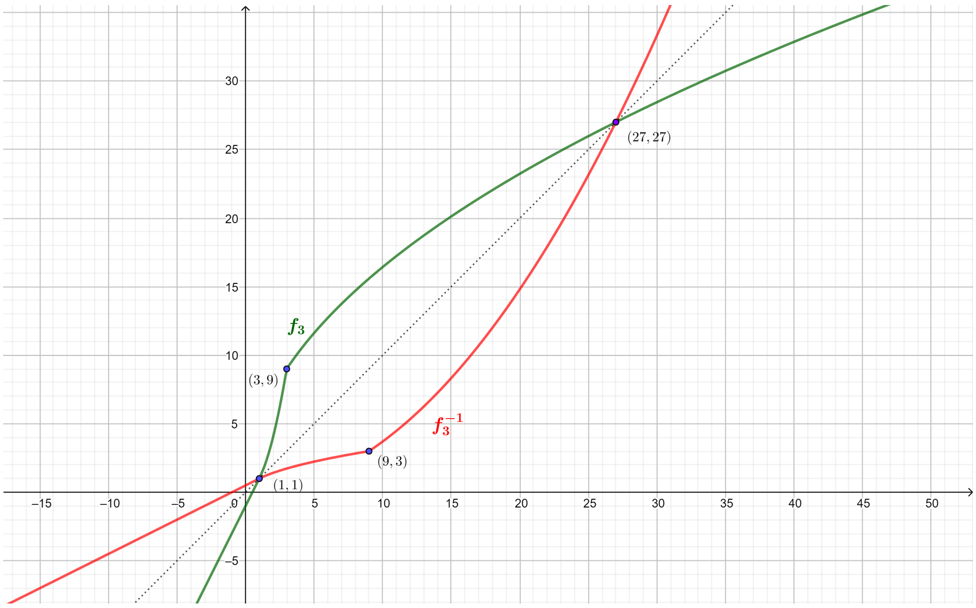
Luego existe la inversa f_3^{-1} con $\mathrm{Dom}(f_3^{-1}) = \mathrm{Rec}(f_3) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Rec}(f_3^{-1}) = \mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R}$
Y la ley

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases} \qquad f_3^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 < x \leq 9, \\ \dfrac{x^2}{27} & \text{si } x > 9. \end{cases}$$

Por teorema de continuidad de la inversa, resulta f_3^{-1} estrictamente creciente y continua https://www.geogebra.org/classic/efwh4ruf



Y alejándonos las gráficas: https://www.geogebra.org/classic/wub2hxvw



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119