Límite y continuidad: Secciones 1.9 y 1.10

Límite de funciones trigonométricas y el Principio de Intercalación

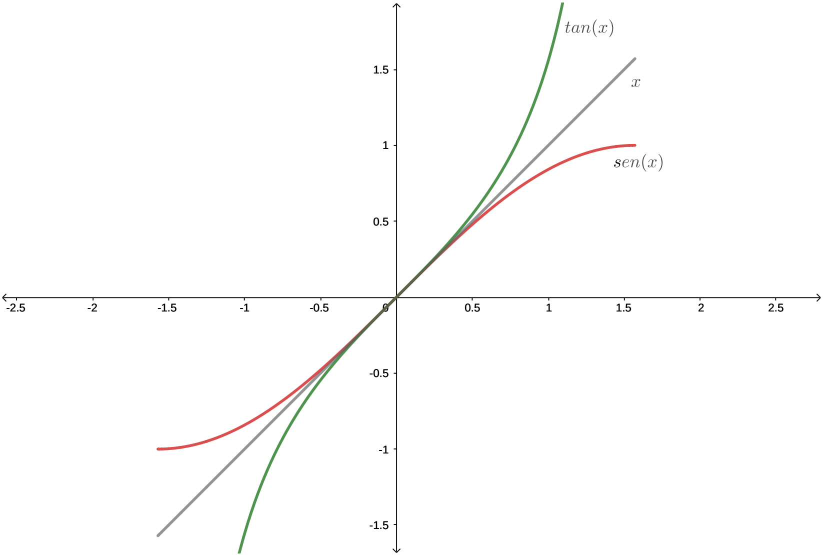
Pablo Torres

Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Curso de Análisis Matemático I
Primer cuatrimestre 2020

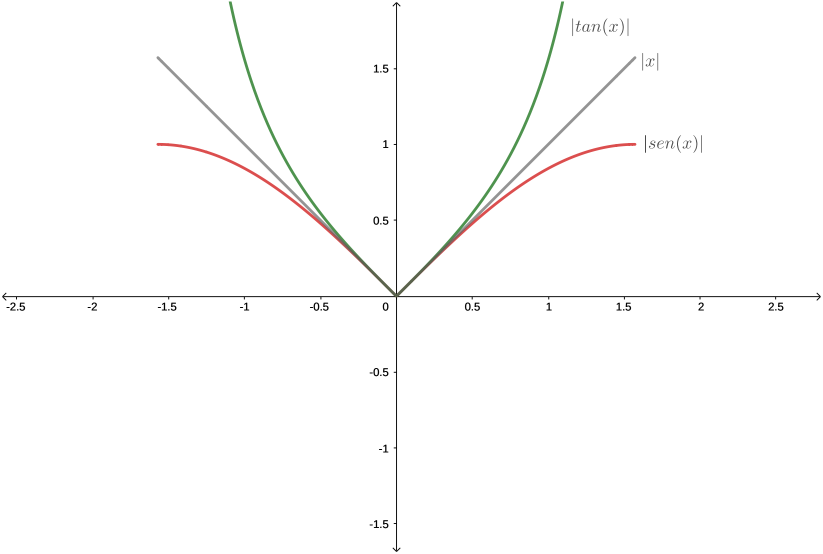
Límite de funciones trigonométricas

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



Límite de funciones trigonométricas

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

$$|sen(x)| \leq |x| \leq |tan(x)|,$$

y las igualdades valen solo si $x = 0$.

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$*,*

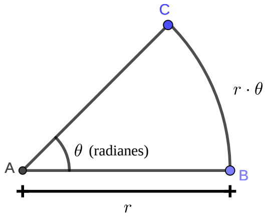
$$|sen(x)| \leq |x| \leq |tan(x)|,$$

y las igualdades valen solo si $x = 0$*.*

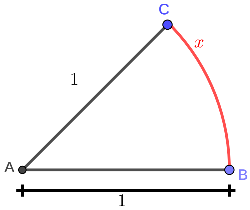
Si $x = 0$, es claro que vale el enunciado. Más aún, si $x = 0$, valen las igualdades ya que

$$sen(0) = 0 = tan(0).$$

Límite de funciones trigonométricas

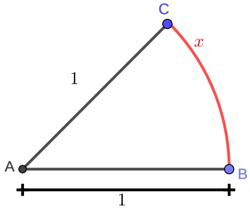


Límite de funciones trigonométricas



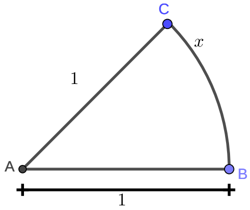
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



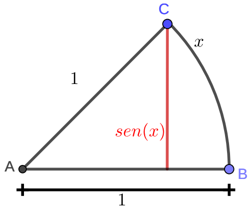
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



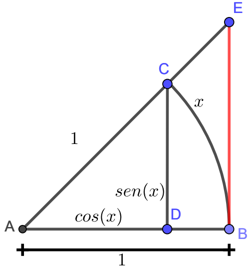
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



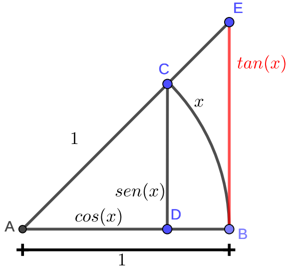
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



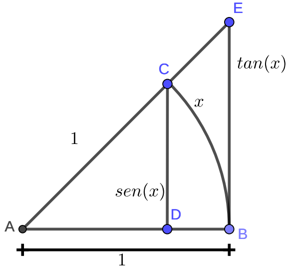
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



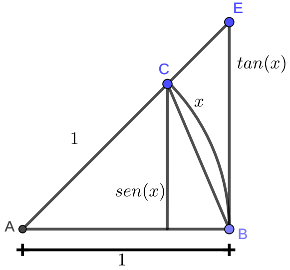
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



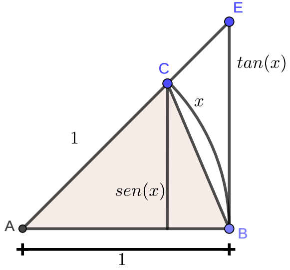
Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



Límite de funciones trigonométricas

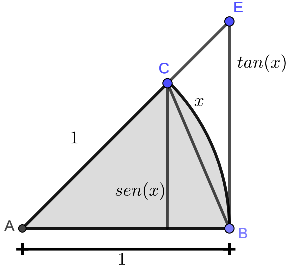
$0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\text{área } \widehat{\text{ABC}} = \frac{sen(x)}{2}$$

Límite de funciones trigonométricas

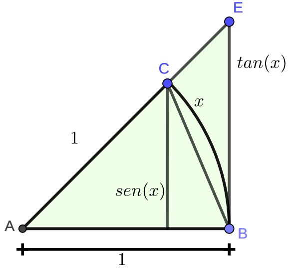
$0 < x < \frac{\pi}{2}$



área sector circ. ABC $= \dfrac{x}{2}$

Límite de funciones trigonométricas

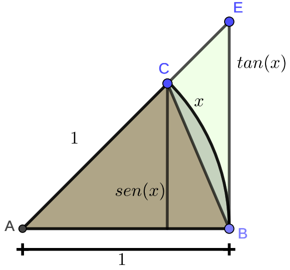
$0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\text{área } \widehat{\text{ABE}} = \frac{tan(x)}{2}$$

Límite de funciones trigonométricas

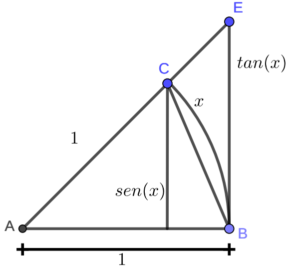
$0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\frac{sen(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tan(x)}{2}$$

Límite de funciones trigonométricas

$0 < x < \frac{\pi}{2}$



$$\frac{sen(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tan(x)}{2}$$

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$.

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $0 < sen(-x) < -x < tan(-x)$,

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $0 < sen(-x) < -x < tan(-x)$,

i.e. $0 < -sen(x) < -x < -tan(x)$.

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $0 < sen(-x) < -x < tan(-x)$,

i.e. $0 < -sen(x) < -x < -tan(x)$.

Como $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, tenemos que

$$|sen(x)| = -sen(x), \; |x| = -x, \; |tan(x)| = -tan(x).$$

Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < sen(x) < x < tan(x)$ ($|sen(x)| < |x| < |tan(x)|$).

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, entonces $0 < -x < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $0 < sen(-x) < -x < tan(-x)$,

i.e. $0 < -sen(x) < -x < -tan(x)$.

Como $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, tenemos que

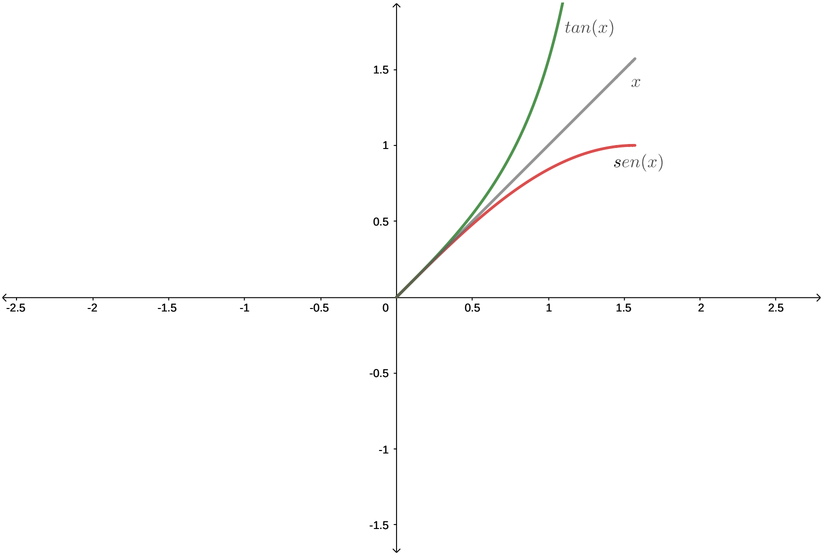
$$|sen(x)| = -sen(x), \ |x| = -x, \ |tan(x)| = -tan(x).$$

En consecuencia, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$,

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

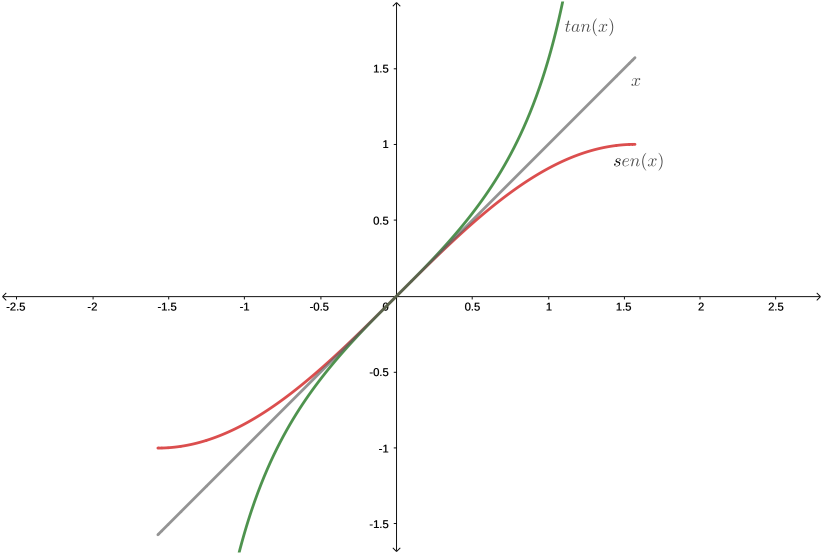
Límite de funciones trigonométricas

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $sen(x) < x < tan(x)$.



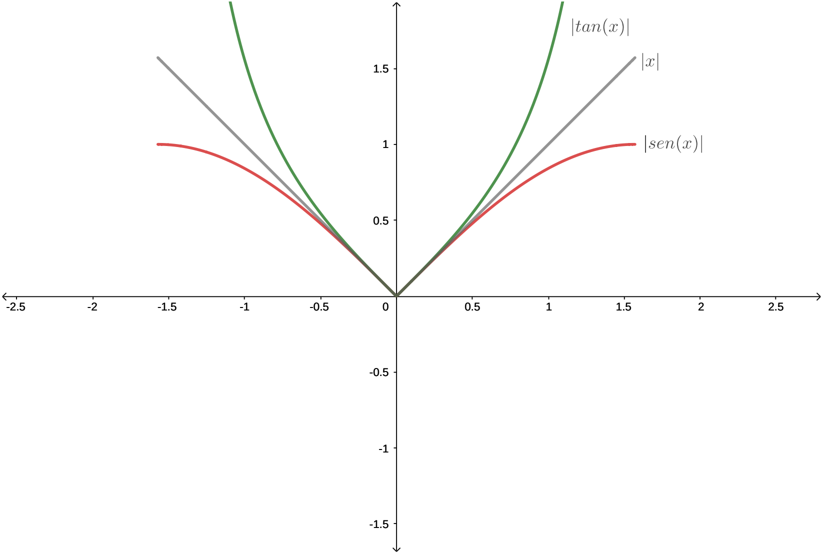
Límite de funciones trigonométricas

Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| \leq |x| \leq |tan(x)|$.



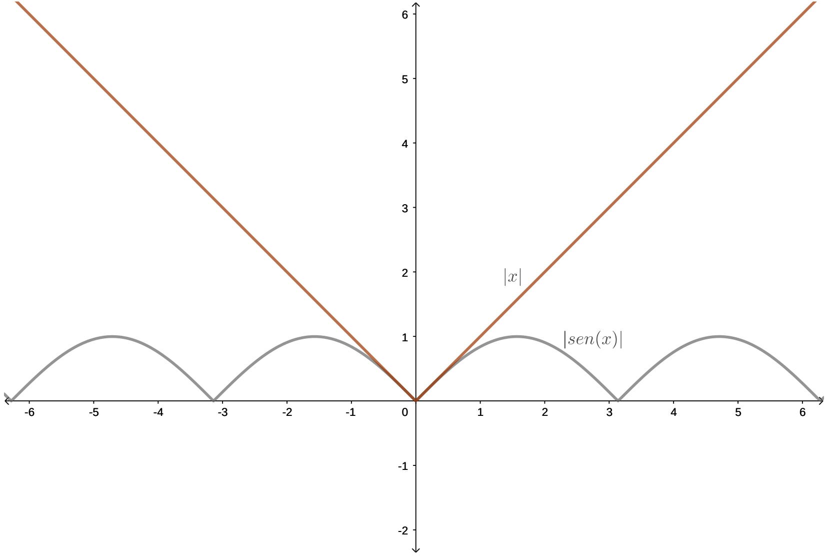
Límite de funciones trigonométricas

Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| \leq |x| \leq |tan(x)|$.



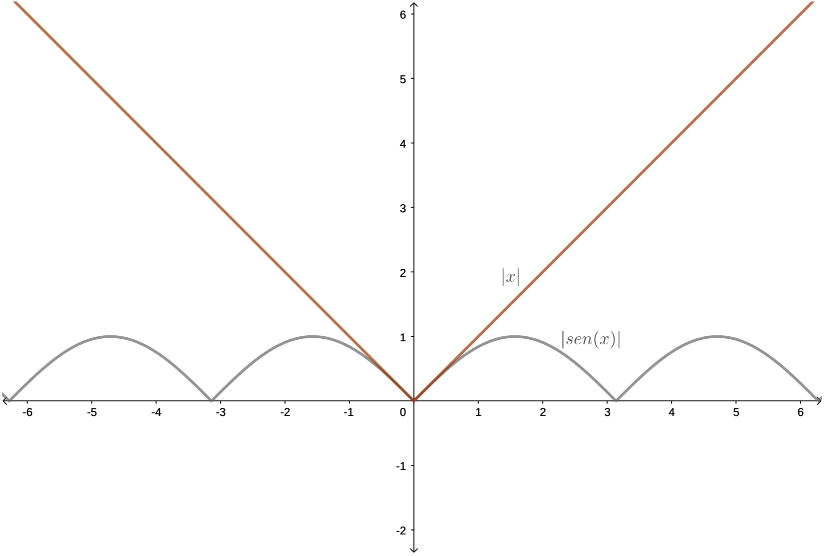
Límite de funciones trigonométricas

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|sen(x)| \leq |x|$.



Límite de funciones trigonométricas

Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.



Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $0 < |x|$ (i.e. $x \neq 0$) entonces

$$|sen(x)| < |x|.$$

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $0 < |x|$ (i.e. $x \neq 0$) entonces

$$|sen(x)| < |x|.$$

Veamos que

$$\lim_{x \to 0} sen(x) = 0.$$

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $0 < |x|$ (i.e. $x \neq 0$) entonces

$$|sen(x)| < |x|.$$

Veamos que

$$\lim_{x \to 0} sen(x) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $0 < |x|$ (i.e. $x \neq 0$) entonces

$$|sen(x)| < |x|.$$

Veamos que

$$\lim_{x \to 0} sen(x) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta$$

Límite de funciones trigonométricas

Hemos visto que si $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen(x)| < |x|$.

Si $\frac{\pi}{2} \leq |x|$ entonces

$$|sen(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $0 < |x|$ (i.e. $x \neq 0$) entonces

$$|sen(x)| < |x|.$$

Veamos que

$$\lim_{x \to 0} sen(x) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies |sen(x) - 0| = |sen(x)| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0 \right| = \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) \right|$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0 \right| = \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \left| \frac{x}{2} \right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Límite de funciones trigonométricas

También
$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left|sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right)$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0 \right| = \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \left| \frac{x}{2} \right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x-0| = |x| < \delta \implies \left|sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left|sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0 \right| = \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \left| \frac{x}{2} \right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando álgebra de límites,

$$\lim_{x \to 0} cos(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

También

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x-0| = |x| < \delta \implies \left|sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando álgebra de límites,

$$\lim_{x\to 0} cos(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

También
$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x-0| = |x| < \delta \implies \left|sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|sen\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando álgebra de límites,

$$\lim_{x\to 0} cos(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} 2\cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 1 - 2\cdot \lim_{x\to 0} sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

También
$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Veamos, dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \epsilon$, entonces

$$0 < |x - 0| = |x| < \delta \implies \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) - 0 \right| = \left| sen\left(\frac{x}{2}\right) \right| < \left| \frac{x}{2} \right| < |x| < \delta = \epsilon.$$

Por otro lado, $cos(x) = cos\left(2\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando álgebra de límites,

$$\lim_{x\to 0} cos(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 1 - 2 \cdot \lim_{x\to 0} sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} sen(x)} = \lim_{x \to 0} sen(x + a)$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x\to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} sen(x)} = \lim_{x\to 0} sen(x+a) = \lim_{x\to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right)$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x\to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} sen(x)} = \lim_{x\to 0} sen(x+a) = \lim_{x\to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$

  $= \lim_{x\to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x\to 0} sen(a)cos(x)$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x\to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} sen(x)} = \lim_{x\to 0} sen(x+a) = \lim_{x\to 0} (sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)) =$

  $= \lim_{x\to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x\to 0} sen(a)cos(x) =$

  $= cos(a) \lim_{x\to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x\to 0} cos(x)$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} sen(x)} = \lim_{x \to 0} sen(x+a) = \lim_{x \to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$

  $= \lim_{x \to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x \to 0} sen(a)cos(x) =$

  $= cos(a) \lim_{x \to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x \to 0} cos(x) = cos(a) \cdot 0 + sen(a) \cdot 1 = \boldsymbol{sen(a)}.$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x\to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} sen(x)} = \lim_{x\to 0} sen(x+a) = \lim_{x\to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$

  $= \lim_{x\to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x\to 0} sen(a)cos(x) =$

  $= cos(a) \lim_{x\to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x\to 0} cos(x) = cos(a)\cdot 0 + sen(a)\cdot 1 = \boldsymbol{sen(a)}.$

- $\boldsymbol{\lim_{x\to a} cos(x)} = \lim_{x\to 0} cos(x+a)$

LÍMITE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TEOREMA

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $$\boldsymbol{\lim_{x \to a} sen(x)} = \lim_{x \to 0} sen(x+a) = \lim_{x \to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$$

  $$= \lim_{x \to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x \to 0} sen(a)cos(x) =$$

  $$= cos(a) \lim_{x \to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x \to 0} cos(x) = cos(a) \cdot 0 + sen(a) \cdot 1 = \boldsymbol{sen(a)}.$$

- $$\boldsymbol{\lim_{x \to a} cos(x)} = \lim_{x \to 0} cos(x+a) = \lim_{x \to 0} \left(cos(a)cos(x) - sen(a)sen(x)\right)$$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} sen(x)} = \lim_{x \to 0} sen(x + a) = \lim_{x \to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$

  $= \lim_{x \to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x \to 0} sen(a)cos(x) =$

  $= cos(a) \lim_{x \to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x \to 0} cos(x) = cos(a) \cdot 0 + sen(a) \cdot 1 = \boldsymbol{sen(a)}.$

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} cos(x)} = \lim_{x \to 0} cos(x + a) = \lim_{x \to 0} \left(cos(a)cos(x) - sen(a)sen(x)\right) =$

  $= cos(a) \lim_{x \to 0} cos(x) - sen(a) \lim_{x \to 0} sen(x)$

Límite de funciones trigonométricas

Teorema

Sea $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} sen(x) = sen(a), \qquad \lim_{x \to a} cos(x) = cos(a).$$

Prueba:

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} sen(x)} = \lim_{x \to 0} sen(x+a) = \lim_{x \to 0} \left(sen(x)cos(a) + sen(a)cos(x)\right) =$

  $= \lim_{x \to 0} cos(a)sen(x) + \lim_{x \to 0} sen(a)cos(x) =$

  $= cos(a) \lim_{x \to 0} sen(x) + sen(a) \lim_{x \to 0} cos(x) = cos(a) \cdot 0 + sen(a) \cdot 1 = \boldsymbol{sen(a)}.$

- $\boldsymbol{\lim_{x \to a} cos(x)} = \lim_{x \to 0} cos(x+a) = \lim_{x \to 0} \left(cos(a)cos(x) - sen(a)sen(x)\right) =$

  $= cos(a) \lim_{x \to 0} cos(x) - sen(a) \lim_{x \to 0} sen(x) = cos(a) \cdot 1 - sen(a) \cdot 0 = \boldsymbol{cos(a)}.$

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)}$

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*, entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,
- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)}$

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,

- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a)$.

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*, entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,
- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a)$.

Corolario

Si $a \neq k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*, entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} cot(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{cos(x)}{sen(x)}$

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*, entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,
- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a)$.

Corolario

Si $a \neq k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*, entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} cot(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{cos(x)}{sen(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} cos(x)}{\lim\limits_{x \to a} sen(x)} = \frac{cos(a)}{sen(a)} = cot(a)$,

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a)$,
- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a)$.

Corolario

Si $a \neq k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} cot(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{cos(x)}{sen(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} cos(x)}{\lim\limits_{x \to a} sen(x)} = \frac{cos(a)}{sen(a)} = cot(a)$,
- $\lim\limits_{x \to a} csc(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{sen(x)}$

Límite de funciones trigonométricas

Corolario

Si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} tan(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} sen(x)}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{sen(a)}{cos(a)} = tan(a),$
- $\lim\limits_{x \to a} sec(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} cos(x)} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a).$

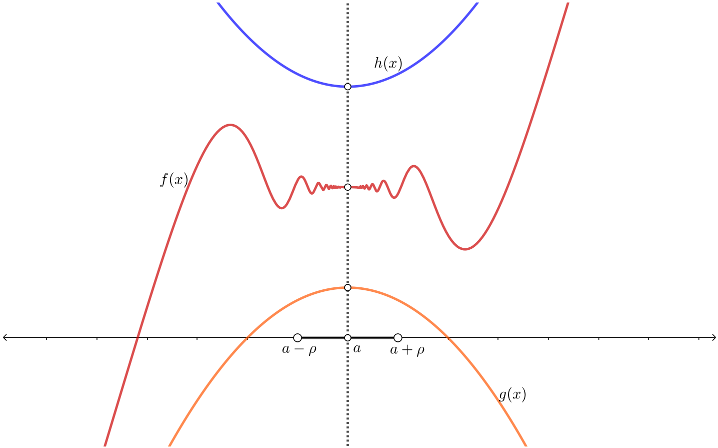
Corolario

Si $a \neq k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

- $\lim\limits_{x \to a} cot(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{cos(x)}{sen(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} cos(x)}{\lim\limits_{x \to a} sen(x)} = \frac{cos(a)}{sen(a)} = cot(a),$
- $\lim\limits_{x \to a} csc(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{sen(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} 1}{\lim\limits_{x \to a} sen(x)} = \frac{1}{sen(a)} = csc(a).$

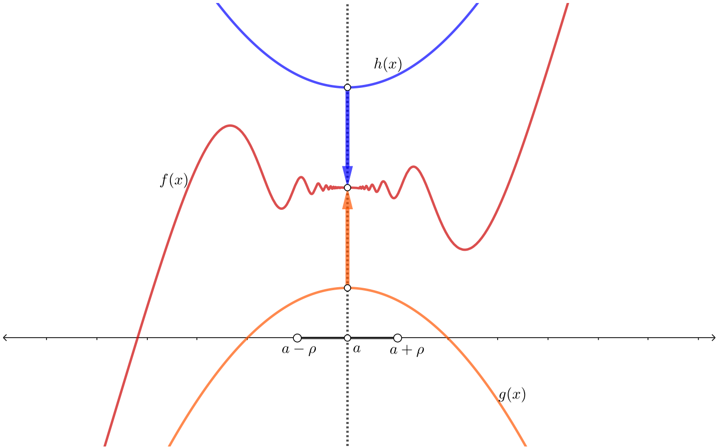
Principio de Intercalación

Si $x \in E'(a, \rho)$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.



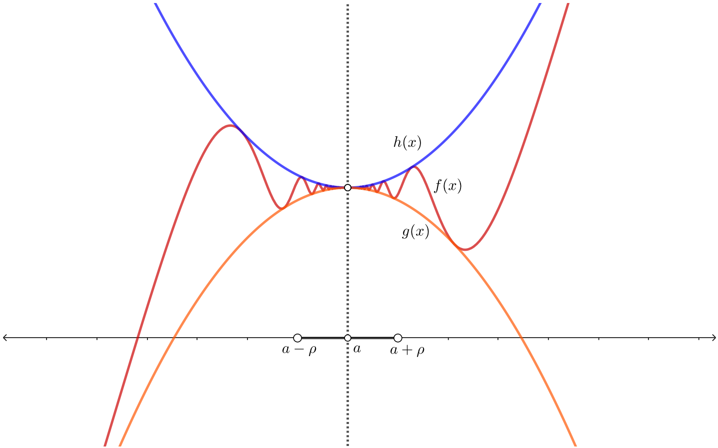
Principio de Intercalación

Si $x \in E'(a, \rho)$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.



Principio de Intercalación

Si $x \in E'(a,\rho)$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$.



Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación)

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y $E'(a,\rho)$ un entorno reducido de a, tales que para todo $x \in E'(a,\rho)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación)

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y $E'(a, \rho)$ un entorno reducido de a, tales que para todo $x \in E'(a, \rho)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además, g y h tienen el mismo límite finito ℓ en el punto a, i.e.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación)

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y $E'(a,\rho)$ un entorno reducido de a, tales que para todo $x \in E'(a,\rho)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además, g y h tienen el mismo límite finito ℓ en el punto a, i.e.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición.

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x-a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$.

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ \\ \end{cases}$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < g(x) < \ell+\epsilon,$$

$$0 < |x-a| < \delta_h \implies |h(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < h(x) < \ell+\epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} \ell-\epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell+\epsilon \\ \end{cases}$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < g(x) < \ell+\epsilon,$$

$$0 < |x-a| < \delta_h \implies |h(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < h(x) < \ell+\epsilon.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} \ell-\epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell+\epsilon \\ g(x) \le f(x) \le h(x) \end{cases}$$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell + \epsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < g(x)$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < g(x) < \ell+\epsilon,$$

$$0 < |x-a| < \delta_h \implies |h(x)-\ell| < \epsilon \implies \ell-\epsilon < h(x) < \ell+\epsilon.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} \ell-\epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell+\epsilon \\ g(x) \le f(x) \le h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x-a| < \delta \implies \ell-\epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x)$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell + \epsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$.

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell + \epsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$.

En consecuencia,
$0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x-a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell + \epsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x-a| < \delta \implies \ell - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$.

En consecuencia,
$0 < |x-a| < \delta \implies \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Principio de Intercalación

Prueba Probaremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ por definición. Sea $\epsilon > 0$.

Sabemos que existen $\delta_g > 0$ y $\delta_h > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_g \implies |g(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon,$$

$$0 < |x - a| < \delta_h \implies |h(x) - \ell| < \epsilon \implies \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h, \rho\}$. Entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} \ell - \epsilon < g(x) \\ h(x) < \ell + \epsilon \\ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \end{cases}$$

Ergo, $0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$.

En consecuencia,
$0 < |x - a| < \delta \implies \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Luego, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y ρ un número real positivo, tales que para todo $x \in (a, a + \rho)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y ρ un número real positivo, tales que para todo $x \in (a, a+\rho)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además,

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f*,* g *y* h *tres funciones,* a *un número real y* ρ *un número real positivo, tales que para todo* $x \in (a, a+\rho)$ *se verifica que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además,

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = \ell.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f*,* g *y* h *tres funciones,* a *un número real y* ρ *un número real positivo, tales que para todo* $x \in (a-\rho, a)$ *se verifica que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f, g y h tres funciones, a un número real y ρ un número real positivo, tales que para todo $x \in (a-\rho, a)$ se verifica que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además,

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^-} h(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Teorema (Principio de Intercalación (límite lateral))

Sean f, g *y* h *tres funciones,* a *un número real y* ρ *un número real positivo, tales que para todo* $x \in (a - \rho, a)$ *se verifica que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y además,

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^-} h(x) = \ell.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Consideremos primero $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Consideremos primero $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Luego,

$$0 < sen(x) < x < tan(x)$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Consideremos primero $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Luego,

$$0 < sen(x) < x < tan(x) \implies \frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tan(x)}{sen(x)}$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Consideremos primero $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Luego,

$$0 < sen(x) < x < tan(x) \implies \frac{sen(x)}{sen(x)} < \frac{x}{sen(x)} < \frac{tan(x)}{sen(x)} \implies$$

$$\implies 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \implies 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)} \ (*).$$

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ($0 < |x| < \frac{\pi}{2}$), entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Ahora, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1.$$

Prueba Hemos visto que si $x\in E'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $(0<|x|<\frac{\pi}{2})$, entonces

$$|sen(x)|<|x|<|tan(x)|.$$

Ahora, si $-\frac{\pi}{2}<x<0$. Luego,

$$tan(x)<x<sen(x)<0$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(0 < |x| < \frac{\pi}{2})$, entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Ahora, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Luego,

$$tan(x) < x < sen(x) < 0 \implies \frac{tan(x)}{sen(x)} > \frac{x}{sen(x)} > \frac{sen(x)}{sen(x)}$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(0 < |x| < \frac{\pi}{2})$, entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Ahora, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Luego,

$$tan(x) < x < sen(x) < 0 \implies \frac{tan(x)}{sen(x)} > \frac{x}{sen(x)} > \frac{sen(x)}{sen(x)} \implies$$

$$\implies \frac{1}{cos(x)} > \frac{x}{sen(x)} > 1$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ($0 < |x| < \frac{\pi}{2}$), entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

Ahora, si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Luego,

$$tan(x) < x < sen(x) < 0 \implies \frac{tan(x)}{sen(x)} > \frac{x}{sen(x)} > \frac{sen(x)}{sen(x)} \implies$$

$$\implies \frac{1}{cos(x)} > \frac{x}{sen(x)} > 1 \implies 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba Hemos visto que si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(0 < |x| < \frac{\pi}{2})$, entonces

$$|sen(x)| < |x| < |tan(x)|.$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \implies 1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)} \ (**).$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Además, $\lim_{x \to 0} cos(x) = 1 \neq 0$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Además, $\lim\limits_{x\to 0} cos(x) = 1 \neq 0 \implies \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$.

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

Además, $\lim_{x \to 0} cos(x) = 1 \neq 0 \implies \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$.

Aplicando el Principio de Intercalación ($g(x) = 1$, $f(x) = \frac{x}{sen(x)}$, $h(x) = \frac{1}{cos(x)}$, $\rho = \frac{\pi}{2}$),

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(x)} = 1$$

Principio de Intercalación

Proposición

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Prueba

De $(*)$ y $(**)$ tenemos que, si $x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$1 < \frac{x}{sen(x)} < \frac{1}{cos(x)}.$$

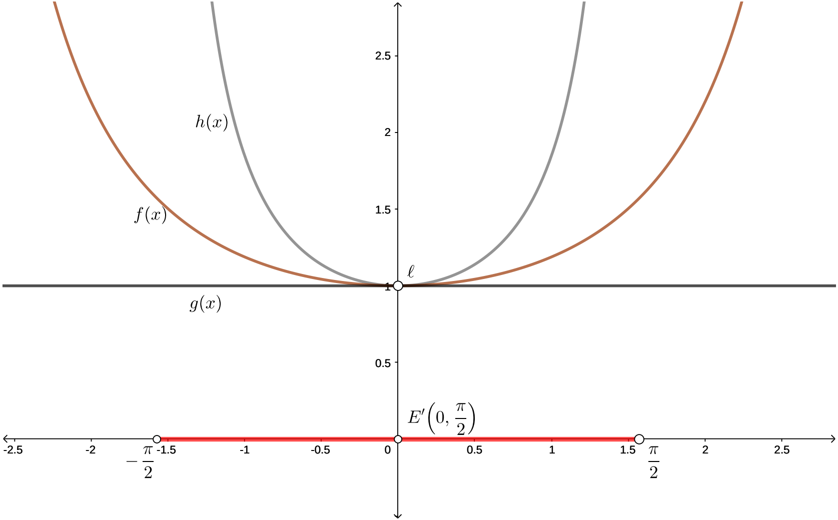
Además, $\lim_{x\to 0} cos(x) = 1 \neq 0 \implies \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$.

Aplicando el Principio de Intercalación ($g(x) = 1$, $f(x) = \frac{x}{sen(x)}$, $h(x) = \frac{1}{cos(x)}$, $\rho = \frac{\pi}{2}$),

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} = 1 \neq 0 \implies \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

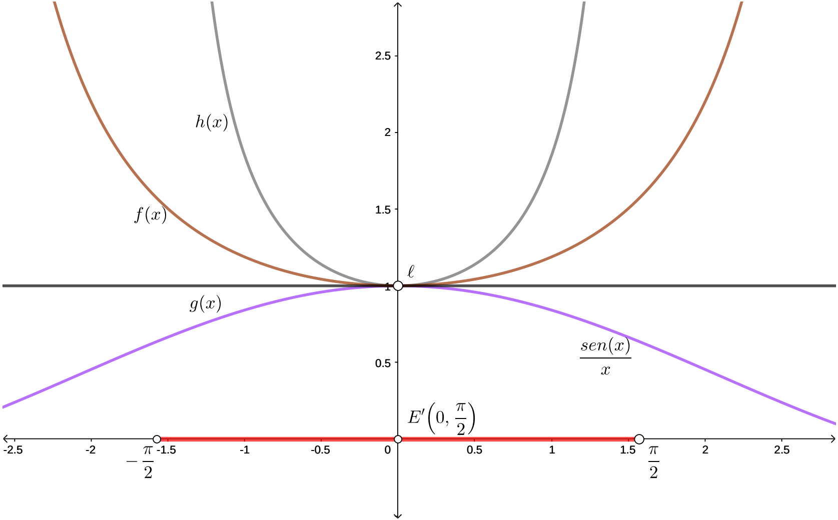
Principio de Intercalación

$$x \in E'\left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ g(x) = 1,\ f(x) = \frac{x}{sen(x)},\ h(x) = \frac{1}{cos(x)}$$



Principio de Intercalación

$$x \in E'\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right),\ g(x) = 1,\ f(x) = \frac{x}{sen(x)},\ h(x) = \frac{1}{cos(x)}$$



Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

En primer lugar observemos que, como $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a, entonces la función $\frac{sen(f(x))}{f(x)}$ está bien definida en ese entorno reducido.

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

En primer lugar observemos que, como $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a, entonces la función $\frac{sen(f(x))}{f(x)}$ está bien definida en ese entorno reducido. Sea $E'(a, \rho)$ dicho entorno reducido, i.e.

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

En primer lugar observemos que, como $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a, entonces la función $\frac{sen(f(x))}{f(x)}$ está bien definida en ese entorno reducido. Sea $E'(a, \rho)$ dicho entorno reducido, i.e.

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Para probar que $\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$, lo haremos por definición,

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Si $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

En primer lugar observemos que, como $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido del punto a, entonces la función $\frac{sen(f(x))}{f(x)}$ está bien definida en ese entorno reducido. Sea $E'(a, \rho)$ dicho entorno reducido, i.e.

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Para probar que $\lim\limits_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1$, lo haremos por definición, i.e. probaremos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{sen(f(x))}{f(x)} - 1 \right| < \epsilon.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$,

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$, i.e. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta_1 \implies \left|\frac{sen(x)}{x} - 1\right| < \epsilon \ (**).$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim\limits_{w \to 0} \frac{sen(w)}{w} = 1$, i.e. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim\limits_{w \to 0} \frac{sen(w)}{w} = 1$, i.e. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

Por otro lado, sabemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, i.e. para todo $\epsilon_f > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_f \implies |f(x)| < \epsilon_f.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim\limits_{w\to 0} \frac{sen(w)}{w} = 1$, i.e. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left|\frac{sen(w)}{w} - 1\right| < \epsilon \; (**).$$

Por otro lado, sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, i.e. para todo $\epsilon_f > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_f \implies |f(x)| < \epsilon_f.$$

En particular, tomando $\epsilon_f = \delta_1$,

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

Hemos probado que $\lim_{w \to 0} \frac{sen(w)}{w} = 1$, i.e. existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

Por otro lado, sabemos que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, i.e. para todo $\epsilon_f > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_f \implies |f(x)| < \epsilon_f.$$

En particular, tomando $\epsilon_f = \delta_1$, existe $\delta_{f1} > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x - a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x - a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$).

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x - a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$). Entonces,

$0 < |x - a| < \delta$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x-a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x-a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$). Entonces,

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} 0 < |x-a| < \rho \\ 0 < |x-a| < \delta_{f1} \end{cases}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x-a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left|\frac{sen(w)}{w} - 1\right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x-a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$). Entonces,

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} 0 < |x-a| < \rho \\ 0 < |x-a| < \delta_{f1} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 < |f(x)| \ (*) \\ |f(x)| < \delta_1 \ (***) \end{cases}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x-a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left|\frac{sen(w)}{w} - 1\right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x-a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$). Entonces,

$$0 < |x-a| < \delta \implies \begin{cases} 0 < |x-a| < \rho \\ 0 < |x-a| < \delta_{f1} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 < |f(x)| \ (*) \\ |f(x)| < \delta_1 \ (***) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 < |\underbrace{f(x)}_{w}| < \delta_1$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

$$0 < |x - a| < \rho \implies 0 < |f(x)| \ (*).$$

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera).

$$0 < |w| < \delta_1 \implies \left| \frac{sen(w)}{w} - 1 \right| < \epsilon \ (**).$$

$$0 < |x - a| < \delta_{f1} \implies |f(x)| < \delta_1 \ (***).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{f1}, \rho\}$ ($\delta > 0$). Entonces,

$$0 < |x - a| < \delta \implies \begin{cases} 0 < |x - a| < \rho \\ 0 < |x - a| < \delta_{f1} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 < |f(x)| \ (*) \\ |f(x)| < \delta_1 \ (***) \end{cases} \implies$$

$$\implies 0 < |\underbrace{f(x)}_{w}| < \delta_1 \underset{(**)}{\implies} \left| \frac{sen(f(x))}{f(x)} - 1 \right| < \epsilon.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera). Existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{sen(f(x))}{f(x)} - 1 \right| < \epsilon.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-a-

Sea $\epsilon > 0$ (cualquiera). Existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{sen(f(x))}{f(x)} - 1 \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$.

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0, \ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{\frac{5\cdot 2x}{2}}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{\frac{5 \cdot 2x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{5} \frac{sen(2x)}{2x}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{\frac{5\cdot 2x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \frac{sen(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{\frac{5\cdot 2x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \frac{sen(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \cdot 1$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-a-

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x}.$$

Para aplicar el resultado anterior consideramos $a = 0$ y $f(x) = 2x$. Sabemos que $f(x) \neq 0,\ \forall x \neq 0$ y además $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Podemos entonces aplicar el resultado anterior y obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{\frac{5 \cdot 2x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{5} \frac{sen(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x \to 0} 6x^2 \; cot(x) \csc(2x)$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x \to 0} 6x^2 \; cot(x) \csc(2x) = \lim_{x \to 0} 6x^2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x \to 0} 6x^2 \; cot(x) \csc(2x) = \lim_{x \to 0} 6x^2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 6x^2 \cdot cos(x) \cdot \frac{1}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x\to 0} 6x^2\ cot(x)\csc(2x) = \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot cos(x) \cdot \frac{1}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} 3\,cos(x) \cdot \frac{x}{sen(x)} \cdot \frac{2x}{sen(2x)}$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x\to 0} 6x^2 \; cot(x)\csc(2x) = \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot cos(x) \cdot \frac{1}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} 3\, cos(x) \cdot \frac{x}{sen(x)} \cdot \frac{2x}{sen(2x)} =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} 3\, cos(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{2x}{sen(2x)}\right)$$

Práctica 3 - Ejercicio 13-b-c-

$$\lim_{x\to 0} 6x^2\ cot(x)\csc(2x) = \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 6x^2 \cdot cos(x) \cdot \frac{1}{sen(x)} \cdot \frac{1}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} 3\,cos(x) \cdot \frac{x}{sen(x)} \cdot \frac{2x}{sen(2x)} =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} 3\,cos(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{2x}{sen(2x)}\right) = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3.$$