Sección 2.4- Grimaldi- pág. 114

1. Sean $p(x): x \leq 3$, $q(x): x+1$ impar, proposiciones abiertas en el universo de los enteros.

   a) $p(1)$ **verdadero**.
   Puesto que si en $p(x)$ reemplazamos el valor de x por 1, se obtiene $1 \leq 3$ y esta afirmación es verdadera.

   b) $q(1)$ **falso**.
   Puesto que si en $q(x)$ reemplazamos el valor de x por 1, se obtiene $1+1=2$ que no es impar.

   c) $\neg p(3)$ **falso**.
   Puesto que $p(3): 3 \leq 3$ **verdadero**.

   d) $q(6)$ **verdadero**.
   Puesto que $q(6): 6+1=7$ impar.

   e) $p(7) \vee q(7)$ **falso**.
   Puesto que $p(7): 7 \leq 3$ **falso** y $q(7): 7+1=8$ **falso**.

   f) $p(3) \wedge q(4)$ **verdadero**.
   Puesto que $p(3): 3 \leq 3$ **verdadero** y $q(4): 4+1=5$ **verdadero**.

   g) $p(4)$ **falso**.
   Puesto que $p(4): 4 \leq 3$.

   h) $\neg(p(-4) \vee q(-3))$ **falso**.
   Puesto que $p(-4): -4 \leq 3$ **verdadero** y $q(-3): -3+1=-2$ **falso**, entonces $(p(-4) \vee q(-3))$ **verdadero**.

   i) $\neg p(-4) \wedge \neg q(-3)$ **falso**.
   Puesto que como $p(-4): -4 \leq 3$ **verdadero** y $q(-3): -3+1=-2$ **falso**, tenemos que $\neg p(-4)$ **falso** y $\neg q(-3)$ **verdadero**. Notar que i) es equivalente a h) utilizando la ley de De Morgan.

7. Para el universo de los enteros, consideramos las siguientes proposiciones abiertas,

$$\begin{aligned}
&p(x): x > 0 \\
&q(x): x \text{ es par} \\
&r(x): x \text{ es un cuadrado perfecto} \\
&s(x): x \text{ es (exactamente) divisible entre 4} \\
&t(x): x \text{ es (exactamente) divisible entre 5}
\end{aligned}$$

   a) iii) Si x es par, entonces x no es divisible entre 5.
   Para escribir de forma simbólica la siguiente proposición debemos identificar que proposiciones de las dadas aparecen.
   Como un primer paso podemos pensar :
   Si x es par, entonces x no es divisible entre 5.
   x es par corresponde a $q(x)$ y x no es divisible entre 5 corresponde a $\neg t(x)$.
   Por último, teniendo en cuenta el significado de la implicancia, podemos escribir la proposición de la siguiente manera

$$\forall x\, q(x) \rightarrow \neg t(x)$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

v) Existe al menos un entero par divisible entre 5.
Pensándolo de manera análoga al item iii), podemos escribir la proposición de la siguiente manera

$$\exists x\, q(x) \wedge t(x)$$

b) iii) Si x es par, entonces x no es divisible entre 5, o bien en forma simbólica $\forall x\, q(x) \rightarrow \neg t(x)$.
Esta proposición es **falsa**, puesto que existe $x = 10$ tal que es par y es divisible entre 5.

v) Existe al menos un entero par divisible entre 5, o bien en forma simbólica $\exists x\, q(x) \wedge t(x)$.
Esta proposición es **verdadera**, por el mismo motivo que item iii), existe $x = 10$ tal que es par y es divisible entre 5.

c)d) iii) $\forall x\, [s(x) \rightarrow \neg t(x)]$.
Para todo entero, si x es divisible entre 4 entonces no es divisible entre 5.
Esta proposición es **falsa**, por ejemplo $x = 20$ es divisible entre 4 y 5.

12. Sea $p(x, y) : x$ divide a y, en el universo de para cada una de las variables x, y, es el conjunto de los enteros.

a) viii) $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$ **falso**.
Puesto que para todo y existe $x = 0$ entero, tal que 0 no divide a y. Por ejemplo si $y = 0$ tenemos que 0 no divide a 0.

x) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ [(p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)]$ **verdadero**.
Puesto que si x divide a y e y divide a z entonces por propiedad transitiva x divide a z. Esto es cierto puesto que,
Si x divide a y entonces $y = x.n_1$ donde $n_1 \in \mathbb{Z}$.
Si y divide a z entonces $z = y.n_2$ donde $n_2 \in \mathbb{Z}$.
Luego $z = y.n_2 = x.n_1.n_2 = x.n$ donde $n = n_1.n_2 \in \mathbb{Z}$, con lo cual x divide a z.

18. c) $\forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)]$.
Debemos negar la siguiente proposición, es decir

$$\neg \forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Esto es equivalente a

$$\exists x\, \neg\, [p(x) \rightarrow q(x)]$$

Utilizando la equivalencia lógica vista para la implicancia,

$$\exists x\, \neg\, [\neg p(x) \vee q(x)]$$

quedando,

$$\exists x\, \neg\neg p(x) \wedge \neg q(x)$$

Por último, por doble negación, resulta

$$\exists x\, p(x) \wedge \neg q(x).$$