# Conjuntos 1/2

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

3 de mayo de 2021

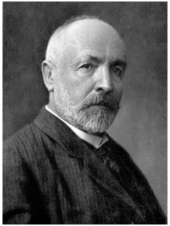
# ¿Qué es un conjunto?

- Podríamos decir que un conjunto es una colección bien definida de elementos, pero...
- ¿Qué es una colección? ¿Qué significa que esté bien definida?
- Podríamos pensar en una familia de elementos que comparten cierta propiedad pero... ¿Qué sería una familia? ¿Y una propiedad? ¿Y qué sería un elemento?
- Estos son algunos de los problemas con los que se encontraban los matemáticos a principios del siglo XX.
- En definitiva, no importa mucho qué son los conjuntos si sabemos cómo trabajar con ellos.
- De hecho toda la matemática (clásica) está basada en la teoría de conjuntos. TODAS las cosas que estudiamos en matemática (clásica) SON conjuntos.

# Teoría de conjuntos *naive* vs. Teoría de conjuntos *axiomática*

Hay esencialmente dos enfoques para estudiar teoría de conjuntos:

- Naive set theory. Uno de sus precursores fue Georg Cantor. Es una teoría más intuitiva pero da lugar a ciertas paradojas.
- Axiomatic set theory. La más conocida es ZFC, se la debemos a Zermelo-Fraenkel. Es una teoría formal basada en la lógica. Resuelve las paradojas de la teoría naive pero es mucho, mucho más abstracta.



G. Cantor

E. Zermelo

A. Fraenkel

Nosotros trataremos de seguir un enfoque naive, pero siendo conscientes de que hay cosas que no se pueden definir (axiomas) y de que pueden aparecer paradojas sin nos descuidamos.

NAIVE

SET THEORY

*by*

PAUL R. HALMOS

*Professor of Mathematics*
*University of Indiana*

VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY

New York Cincinnati Toronto London Melbourne

*Every mathematician agrees that every mathematician must know some set theory; the disagreement begins in trying to decide how much is some.*

*P. Halmos (Naive Set Theory)*

# Conjuntos y pertenencia

- **Nociones primitivas:** conjunto y elemento de un conjunto. Si $x$ es un elemento del conjunto $A$ (o $x$ pertenece a $A$), escribimos

$$x \in A.$$

- Es decir, $x \in A$ es una proposición: puede ser verdadera o falsa. Su negación $\neg(x \in A)$, es decir $x$ no pertenece a $A$, la abreviaremos por

$$x \notin A.$$

- En realidad, en teoría de conjuntos todos los objetos son conjuntos, pero además algunos conjuntos pueden ser elementos de otros conjuntos.
- Es tradición usar la notación de letras mayúsculas

$$\begin{array}{ll} A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots & \text{para conjuntos y letras minúsculas} \\ a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots & \text{para los elementos de estos conjuntos.} \end{array}$$

- Esta notación no es universal. Por ejemplo, $A \in x$ tiene perfecto sentido (aunque preferimos no usar esta notación).

## Ejemplo (informal)

- $A = \{4, 8, 10\}$ es un conjunto y sus elementos son 4, 8 y 10.
- $B = \{\{4\}, \{8\}, \{10\}\}$ es otro conjunto y sus elementos son $\{4\}$, $\{8\}$ y $\{10\}$.
- De hecho, valen:

$$4 \in A, \qquad 4 \in \{4\} \in B, \qquad \{4\} \notin A.$$

- Este ejemplo es informal porque todavía no explicamos por qué existe un conjunto cuyos elementos sean exactamente 4, 8 y 10, ni por qué existe un conjunto cuyos elementos sean $\{4\}$, $\{8\}$ y $\{10\}$.
- Tampoco sabemos que exista un conjunto $\{4\}$ cuyo único elemento sea el 4.
- No sabemos todavía de la existencia de un conjunto $\mathbb{N}$ cuyos elementos sean los números naturales. De hecho, ni siquiera sabemos qué es un número natural.
- ¡Todas estos problemas los podremos resolver con teoría de conjuntos!

# Igualdad de conjuntos (axioma de extensionalidad)

Empecemos por el problema más sencillo: ¿cuándo son iguales dos conjuntos?

## Axioma de extensionalidad

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En símbolos:

$$A = B \iff \forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

## Definición de conjuntos por extensión

- El axioma de extensionalidad nos dice que podemos definir los conjuntos *por extensión*.
- $\{4, 8, 10\}$ es el (único) conjunto cuyos elementos son exactamente 4, 8 y 10.
- También se puede usar la definición por extensión con conjuntos infinitos, aunque esto no es muy frecuente.
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

# Definición por comprensión

## Axioma de especificación

Si $A$ es un conjunto y $p(x)$ es una proposición abierta sobre los elementos de $A$, podemos formar el conjunto de los elementos $x$ de $A$ tales que $p(x)$ es verdadera. Este conjunto lo denotaremos por

$$\{x \in A : p(x)\}.$$

A veces también se denota $\{x \in A \mid p(x)\}$.

## Definición de conjuntos por comprensión

El axioma de especificación nos da una nueva forma de definir conjuntos (además de la definición por extensión). Ahora también podemos definir un conjunto por *comprensión*, especificando alguna propiedad que caracterice unívocamente a todos sus elementos. Por ejemplo, si ya tuviéramos definidos los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$:

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$ es el conjunto de los números naturales pares.
- $\{n \in \mathbb{Z} : (n-1)^2 \leq 9\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq 9\} = [-2, 4]$.

# Paradoja de Russell

El axioma de especificación no debe confundirse con el llamado axioma universal de especificación, el cual **es inconsistente** (es decir, nos permitiría demostrar afirmaciones falsas). Si $p(x)$ es una proposición abierta en $x$, **no tenemos permitido formar el conjunto**

$$\{x : p(x)\}.$$

## Ejemplo (paradoja de Russell)

Supongamos que tenemos el axioma universal de especificación y formemos el conjunto

$$A = \{x : x \notin x\}.$$

- ¿Qué podemos decir de la proposición $A \in A$?
- Si $A \in A$ es verdadera, entonces se satisface $A \notin A$, que debería ser falso.
- Por otro lado, si $A \notin A$, entonces $A \in A$ por definición, lo cual nos lleva nuevamente a una contradicción.
- Moraleja: $\{x : x \notin x\}$ no puede ser un conjunto.

En matemática, por un *conjunto* (también: *clase*, *familia*) entendemos una colección de objetos definida por una propiedad P: los objetos x tales que P(x) es verdadera (o como suele decirse, los objetos que *tienen* la propiedad P).

Así, la propiedad del ejemplo anterior define el conjunto de los vegetales.

Sin embargo, esta noción intuitiva de conjuntos conduce inmediatamente a paradojas lógicas, como la siguiente, debida a Bertrand Russell "Es hombre y no se afeita por sí mismo" es, sin duda, una propiedad; por lo tanto, define un conjunto C: el conjunto de los hombres que no se afeitan por sí mismos. Ahora bien, Russell afirma que hay un barbero que afeita a *todos* los hombres que no se afeitan por sí mismos y *solamente* a tales hombres. Si investigamos si el barbero pertenece o no al conjunto C surge el problema. En efecto, si el barbero pertenece a C, entonces no se afeita por sí mismo; luego es un hombre afeitado por el barbero, es decir, por sí mismo, con lo cual no pertenece al conjunto C. Por otra parte, si el barbero no pertenece a C, entonces se afeita por sí mismo; luego es un hombre afeitado por el barbero, con lo cual no se afeita por sí mismo y así, pertenece a C.

Paradojas análogas a las precedentes condujeron a Russell y otros matemáticos a realizar un estudio exhaustivo de las bases de la matemática y la lógica, elaborando las llamadas teorías axiomáticas de conjuntos. En estas investigaciones Kurt Gödel ha desempeñado un papel decisivo.

Hay muchas versiones coloquiales de la paradoja de Russell, como lo es la paradoja del barbero (texto tomado del libro *Notas de Álgebra I* de E. Gentile)

# Algunas otras cosas raras

- **Axioma de regularidad (o fundación).** Hay un axioma que prohíbe la existencia de conjuntos extraños que sean elementos de sí mismos. Es decir, $x \in x$ siempre es una proposición falsa. Equivalentemente, $x \notin x$ siempre es verdadera.
- En realidad, el axioma de regularidad es un poco más fuerte. No lo enunciaremos pues no lo vamos a usar explícitamente.
- Observar que el axioma de regularidad nos dice que no hay ningún conjunto que contenga a todos los conjuntos. En efecto, este conjunto podría presentarse tautológicamente, usando el axioma de especificación, como

$$\{A : A = A\}$$

y por lo tanto sería un elemento de sí mismo.

# Conjuntos universales

- A veces por practicidad, utilizaremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ del cual tomaremos todos los elementos con los que trabajaremos en un determinado contexto.
- Esto ayuda a simplificar la notación cuando usamos, por ejemplo, el axioma de especificación (es decir, cuando describimos los conjuntos por comprensión).
- Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{x : 2 < x \leq 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
- Pero si $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, entonces $\{x : 2 < x \leq 7\} = (2, 7]$ (intervalo semiabierto)
- Si no esta claro cuál es el conjunto universal, escribir $\{x : 2 < x \leq 7\}$ es ambiguo y por tanto desaconsejado.

# Axioma del conjunto vacío

Todo muy lindo, pero hasta ahora nuestra teoría de conjuntos no tiene ningún conjunto... El siguiente axioma nos garantiza la existencia de un conjunto a partir del cual se puede construir todo lo demás.

## Axioma del conjunto vacío

Existe un conjunto $\varnothing$ que no tiene ningún elemento. Formalmente

$$\exists \varnothing \forall x \, (x \notin \varnothing).$$

Otras notaciones para este conjunto vacío son $\emptyset$, $\{\}$ ó 0 (en desuso). El conjunto vacío tiene la siguiente importante propiedad.

## Teorema

*El conjunto vacío es único. En otras palabras, si $A$ es un conjunto sin elementos, entonces $A = \varnothing$.*

Antes de demostrar nuestro primer teorema sobre conjuntos, establecemos una notación que nos será muy útil en el futuro.

# Contención / Subconjuntos

Con los axiomas que tenemos hasta ahora podemos definir la noción de que un conjunto esté contenido o incluido en otro.

### Definición

Decimos que un conjunto $A$ *está contenido* en un conjunto $B$, o que $A$ es un *subconjunto* de $B$, si todo elemento de $A$ es también un elemento de $B$. Usaremos la notación

$$A \subseteq B$$

para indicar que $A$ es un subconjunto de $B$. En símbolos:

$$A \subseteq B \iff \forall x \, (x \in A \implies x \in B).$$

### Notación

Para indicar que $A$ no es un subconjunto de $B$, es decir $\neg(A \subseteq B)$, usamos la notación

$$A \not\subseteq B.$$

## Definición

Decimos que un conjunto $A$ está *contenido estrictamente* en un conjunto $B$ si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. O sea, $A$ es un subconjunto de $B$ pero $B$ tiene más elementos que $A$. Para la contención estricta usaremos la notación

$$A \subset B.$$

## Importante

Las notaciones $\subseteq$ y $\subset$ no son adoptadas en todos los libros de matemática. Las notaciones

- $A \subset B$ para la contención
- $A \subsetneqq B$ para la contención estricta

son también muy comunes (cuidado con el libro que lean).

## Ejemplos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$$
$$C = \mathbb{N}$$

Se verifica que:

- $A \subset B$ y por lo tanto $A \subseteq B$
- $A \in B$
- $A \subset \mathbb{N}$
- $B \nsubseteq \mathbb{N}$

# Algunas propiedades

## Teorema

1. *Para todo conjunto $A$ se tiene que $A \subseteq A$.*
2. *Dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales si y sólo si $A$ es un subconjunto de $B$ y $B$ es un subconjunto de $A$. En otras palabras,*

$$A = B \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)].$$

## Demostración.

1. Ejercicio.
2. Para probar $\implies$ podemos reescribir el lado derecho como $(A \subseteq A) \wedge (A \subseteq A)$, lo cual sabemos que es verdadero por el ítem anterior. Para ver $\impliedby$ debemos ver que $A$ y $B$ tienen los mismos elementos. Si $x \in A$, como $A \subseteq B$, tenemos que $x \in B$. Análogamente, si $x \in B$, vemos que $x \in A$. Luego $A = B$ por el axioma de extensionalidad. $\square$

## Teorema

*Sean $A$, $B$, $C$ tres conjuntos. Se tiene:*

1. *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$;*
2. *Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.*

## Demostración.

1. Tenemos que probar que todo elemento de $A$ es elemento de $C$. Sea $x \in A$, como $A \subseteq B$ concluimos que $x \in B$. Además, como $B \subseteq C$, sigue que $x \in C$, que es lo que queríamos probar.
2. Ejercicio. $\square$

### Lema

*Si* $\varnothing$ *es un conjunto vacío y* $A$ *es cualquier conjunto, entonces* $\varnothing \subseteq A$*. Más aún, si* $A$ *es un conjunto no vacío, entonces* $\varnothing \subset A$*.*

### Demostración.

Usando la definición de contención, debemos probar

$$\forall x \, (x \in \varnothing \implies x \in A)$$

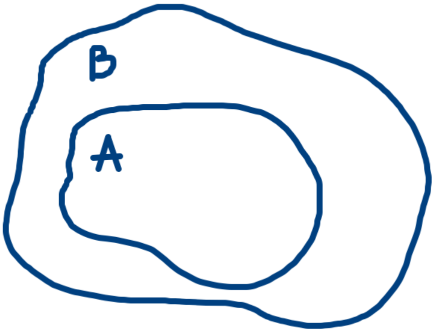
la cual es trivialmente verdadera (ya que para cada $x$, el antecedente de la implicación es falso). $\square$

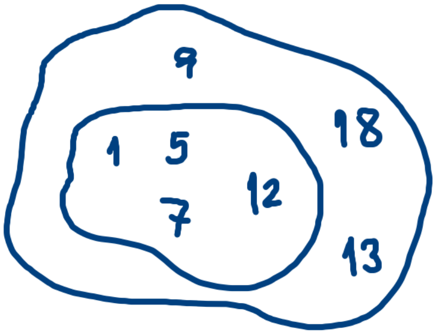
### Demostración del Teorema de Unicidad del Vacío.

Sean $\varnothing$ y $\varnothing'$ dos conjuntos vacíos. Por el lema anterior tenemos que $\varnothing \subseteq \varnothing'$ y $\varnothing' \subseteq \varnothing$. Usando el teorema de la doble contención sigue que $\varnothing = \varnothing'$. $\square$

# Diagramas de Venn

A veces se usan los llamados diagramas de Venn para representar gráficamente ciertas propiedades de los conjuntos y ayudarnos a ganar intuición. Por ejemplo, la contención $A \subset B$ la dibujamos como se muestra en la figura (donde también dibujamos el ejemplo concreto en que $A = \{1, 5, 7, 12\}$ y $B = \{1, 5, 7, 9, 12, 13, 18\}$)



# Cardinalidad

- Decimos que un conjunto $A$ es *finito* si podemos contar cuántos elementos tiene y decimos que $A$ es *infinito* si no es finito (esta es una definición informal, cuando veamos funciones podremos dar una definición precisa).
- La *cardinalidad* de un conjunto finito $A$ se define como la cantidad de elementos de $A$ y se denota por $|A|$.

## Ejemplo

Sean

$$A = \{1, 7, 19\}, \qquad B = \{2, 5, A, 39\}, \qquad C = \mathbb{N}, \qquad D = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

- $|A| = 3$.
- $|B| = 4$. Atención $|B| \neq 6$.
- $C$ es un conjunto infinito.
- $|D| = 5$.

### Teorema

*Si $A$ y $B$ son dos conjuntos finitos, se tiene:*

1. $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$;
2. $A \subset B \implies |A| < |B|$.

### Demostración (informal).

Probamos 1) y dejamos 2) como ejercicio. Si tenemos que contar los elementos del conjunto $B$, del cual $A$ es subconjunto, podemos empezar contando los elementos que están en $A$ y luego seguir con los elementos de $B$ que no están en $A$. Claramente obtendremos que $|B|$ es un número mayor o igual que $|A|$. $\square$

### Corolario

$|\varnothing| = 0$.

### Demostración.

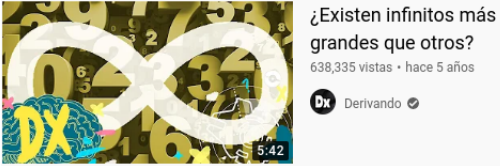
Ejercicio. $\square$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

- También tiene sentido hablar de la cantidad de elementos de un conjunto infinito (y comparar estas cardinalidades), pero es una teoría más complicada que no estudiaremos todavía.
- A modo de ejemplo, tratemos de pensar qué cardinalidad es más grande, ¿la de $\mathbb{N}$ o la de $\mathbb{Z}$?

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \end{array}$$

- Otros ejemplos más complicados (que no veremos en este curso):
  - $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$
  - $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
  - $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$



# Axioma de pares

Con el siguiente axioma y el único conjunto que conocemos hasta ahora (el conjunto vacío), podemos empezar a construir conjuntos mucho más interesantes.

### Axioma de pares

Dados (dos conjuntos) $x$ e $y$, existe un conjunto $\{x, y\}$ que contiene a $x$ e $y$ como sus únicos elementos.

### Ejercicio*

Mostrar que sería suficiente con pedir que exista *un* conjunto que tenga a $x$ e $y$ como elementos y luego usar el axioma de especificación para para construir $\{x, y\}$.

### Ejemplo

Con el axioma de pares podemos construir conjuntos con un solo elemento, llamados *singuletes*. En efecto, el conjunto

$$\{x\}$$

se construye a partir del axioma de pares tomando $y = x$.

Observación

El axioma de pares nos permite construir conjuntos de la forma

$$\{x, \{y, z\}\}$$

pero **no nos permite** construir conjuntos con tres elementos

$$\{x, y, z\}.$$

Necesitaremos más axiomas para poder hacer esto.

# Conjunto de partes

## Ejemplos

¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A = \{x, y, z\}$?

- Sabemos que si $B \subseteq A$, entonces $|B| \leq |A| = 3$. Esto nos dice que una buena forma de contar los subconjuntos de $A$ es mirando los subconjuntos de 0, 1, 2 y 3 elementos.
- Subconjuntos de 0 elementos: $\varnothing$
- Subconjuntos de 1 elemento: $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$
- Subconjuntos de 2 elementos: $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$
- Subconjuntos de 3 elementos: $\{x, y, z\}$
- Luego, $A$ tiene $8 = 2^3$ subconjuntos.

## Axioma del conjunto de partes

Si $A$ es un conjunto, existe un conjunto $\mathscr{P}(A)$ formado exactamente por los subconjuntos de $A$. Este conjunto es llamado el *conjunto de partes* de $A$.

## Observación

- Los elementos de $\mathscr{P}(A)$ **no son** elementos de $A$.
- Para todo $A$, se tiene que $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ y $A \in \mathscr{P}(A)$.

## Teorema

*Si $A$ es un conjunto finito con $n$ elementos, entonces*

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^n.$$

## Demostración.

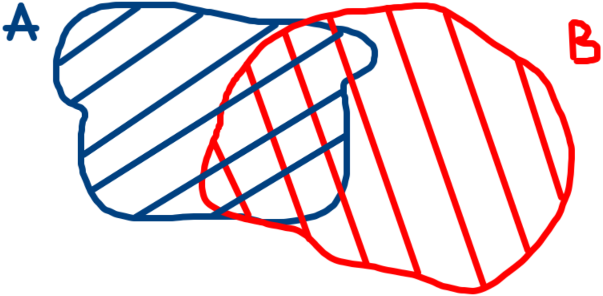
Lo veremos más adelante $\square$

# Operaciones con conjuntos

## Axioma de unión

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, existe un conjunto $A \cup B$, que llamaremos *la unión de $A$ y $B$*, cuyos elementos son los elementos de $A$ y $B$. Más formalmente,

$$\forall x\,(x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)).$$



### Teorema

*Si $A$, $B$ y $C$ son conjuntos, se tienen.*

1. $A = A \cup A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
4. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

### Demostración.

1. Ejercicio.
2. Ejercicio.
3. Ejercicio (no deberían ser difíciles).

## Demostración (cont.)

4.
- Para ver $\implies$ tenemos que ver la doble contención.
- Sabemos que $B \subseteq A \cup B$ por la parte 3).
- Para probar que $A \cup B \subseteq B$ empezamos con un elemento $x \in A \cup B$.
- Si $x \in B$ ya está.
- De lo contrario $x \in A$. Pero como $A \subseteq B$, concluimos también que $x \in B$.
- Para ver $\impliedby$ tomamos $x \in A$. Como $x \in A \cup B$ y $A \cup B = B$, sigue que $x \in B$.
- Por lo tanto $A \subseteq B$.

5.
- Hay que probar la doble contención.
- Veamos que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ y dejemos como ejercicio la otra inclusión.
- Si $x \in A \cup (B \cup C)$ hay dos posibilidades:
- **Caso 1:** $x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.
- **Caso 2:** $x \in B \cup C$. También se abren dos posibilidades:
  - **Subcaso 2a:** $x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.
  - **Subcaso 2b:** $x \in C \implies x \in (A \cup B) \cup C$.
- Como estudiamos todos los casos, el teorema queda demostrado. $\square$

## Ejemplo

- Con el axioma de unión (y el axioma de pares) ya podemos construir conjuntos con 3 elementos.
$$\{x, y, z\} = \{x\} \cup \{y, z\}$$
- Y con 4 elementos
$$\{x, y, z, w\} = \{x, y\} \cup \{z, w\}$$
- Pensar como ejercicio cómo podemos construir conjuntos con $5, 6, \ldots$ elementos.

# Los números naturales

Con los axiomas que tenemos hasta ahora ya estamos en condiciones que construir nuestra versión de los números naturales (y el cero). Los números naturales se definen de la siguiente forma usando el axioma de pares y el axioma de unión:

$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing && \\
1 &= \{\varnothing\} && \text{Axioma de pares} \\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} && \text{Axioma de pares} \\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} && \text{Axioma de unión} \\
&\vdots &&
\end{aligned}$$

En general, si $n$ es un número natural se define

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

## Observación

- Con nuestra definición cada número natural $n$ es un conjunto con $n$ elementos, o de cardinalidad $n$.
- Hemos construidos todos los números naturales: $1, 2, 3, 4, \ldots$ pero todavía no sabemos de la existencia del *conjunto de los números naturales*. Para esto es necesario un axioma más.

## Axioma del infinito

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ cuyos elementos son exactamente los números naturales.

## Comentario

- A partir de la construcción de los números naturales es posible, usando solamente teoría de conjuntos, construir los enteros, los racionales, los reales, complejos, etc.
- Algunas construcciones de estas ya las hemos visto (por ejemplo, definimos los números complejos a partir de los números reales). Otras, como por ejemplo la construcción de $\mathbb{R}$, requieren de una matemática más avanzada y no las veremos en este curso.

# Intersección de conjuntos

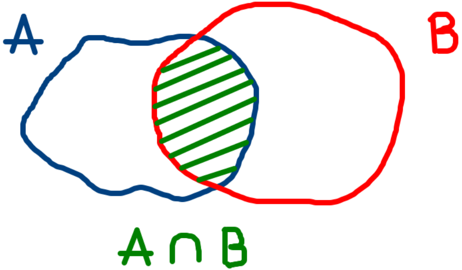
La intersección de dos conjuntos se puede **definir** a partir del axioma de especificación (no hace falta introducir un nuevo axioma para asegurar su existencia).

## Definición

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos se define su intersección como

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \wedge x \in B\}.$$

En palabras, $A \cap B$ está formado por los elementos que $A$ y $B$ tienen en común.



### Teorema

*Si $A$, $B$ y $C$ son conjuntos, se tienen.*

1. $A = A \cap A$.
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subseteq B$
4. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

### Demostración.

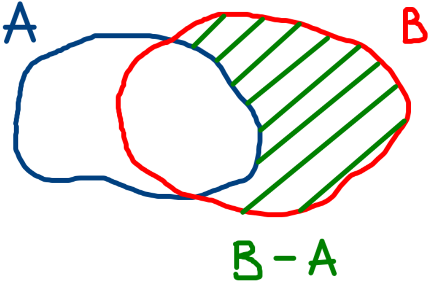
Ejercicio. $\square$

# Diferencia de conjuntos

## Definición

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos, el *conjunto diferencia* $B - A$ está formado por los elementos de $B$ que no están en $A$. En símbolos,

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}.$$




## Notación alternativa

A veces el conjunto diferencia también se denota por

$$B \setminus A$$

## Teorema

*Sean $A$, $B$ y $C$ tres conjuntos. Se cumplen:*

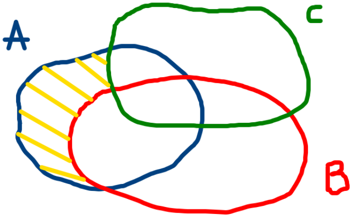
1. $A - A = \varnothing$.
2. $A - \varnothing = A$.
3. $B - A \subseteq B$. *En particular,* $\varnothing - A = \varnothing$.
4. $B - A = A - B \implies A = B$.
5. $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.

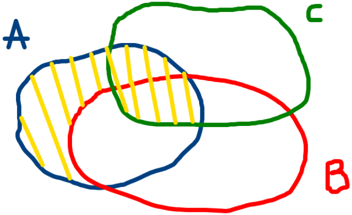
## Demostración.

- Dejamos las primeras tres como ejercicio.
- Para ver 4), como siempre, haremos $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Sea $x \in A$ y supongamos por el absurdo que $x \notin B$.
- Sigue que $x \in A - B$, pero por hipótesis $A - B = B - A$. Luego $x \in B - A$ y por ende $x \notin A$, absurdo. Por lo tanto $A \subseteq B$.
- Análogamente vemos que $B \subseteq A$.

## Demostración (cont.)

- Para probar 5) empezamos con un elemento $x \in (A - B) - C$.
- Tenemos que $x \in (A - B)$ y $x \notin C$.
- Esto dice que $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. En particular $x \notin B - C$.
- Concluimos que $x \in A - (B - C)$. $\square$



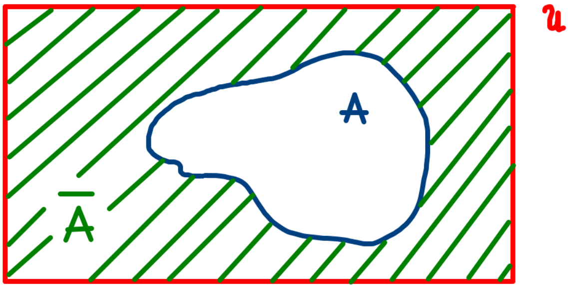



# Complemento (relativo)

## Definición

Dado un conjunto $A \subseteq \mathscr{U}$, definimos el complemento de $A$ (relativo al conjunto universal $\mathscr{U}$) como el conjunto

$$\overline{A} = \mathscr{U} - A = \{x \in \mathscr{U} : x \notin A\}.$$




### Otras notaciones frecuentes

- $A^c$
- $\complement A$
- $\complement_{\mathscr{U}} A$
- $A'$

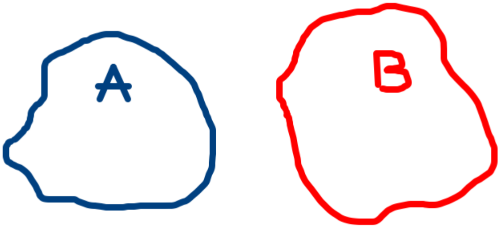
### Definición

Dos conjuntos $A$ y $B$ se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$.

### Ejemplo/Ejercicio

Dado $A \subseteq \mathscr{U}$,

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$, es decir, $A$ y su complemento son disjuntos.
- $A \cup \overline{A} = \mathscr{U}$.



# Leyes de la teoría de conjuntos

## Teorema

*Dados tres conjuntos $A, B, C$ tomados de un universo $\mathscr{U}$, se tienen:*

1. $\overline{\overline{A}} = A$ *(ley del doble complemento)*
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(leyes de De Morgan)*
3. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ *(leyes conmutativas)*
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(leyes asociativas)*
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(leyes distributivas)*
6. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$ *(leyes idempotentes)*

7. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$ (leyes de identidad)
8. $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (B \cup A) = A$ (leyes de absorción)

**Demostración.**

- Ejercicio (algunas pruebas ya las hicimos).
- Tratar de dibujar en cada caso el diagrama de Venn que represente cada ley de la teoría de conjuntos. $\square$

**Observación**

Hay una similitud muy grande entre las leyes de la teoría de conjuntos y las leyes de la lógica. Esta analogía no es casual y se estudia en materias más avanzadas.