Resolución de algunos ejercicios pertenecientes a la Práctica 2 (2da parte)

☞**12. a-** A partir de la gráfica de la función valor absoluto representar gráficamente la siguiente función e indicar su dominio y recorrido:

$$f_2 \colon [-2,3] \to \mathbb{R} \text{ donde } f_2(x) = 1 - |x|.$$

b- A partir de la gráfica de la función f_2 representar gráficamente la siguiente función e indicar su dominio y recorrido:

ii) $f_4(x) = |f_2(x)|$.

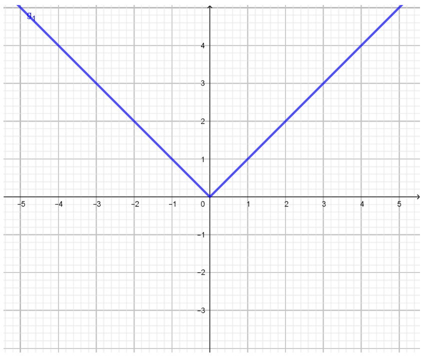
c- Utilizando las gráficas de las funciones $\{f_i : i = 2 \, o \, 4\}$ obtenidas en $a)$ y $b)$ indicar, para cada una:

$i)$ Los conjuntos $A_i = \{x \in \mathbb{R} \colon f_i(x) = 0\}$ y $B_i = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 < f_i(x) \leq 5\}$.

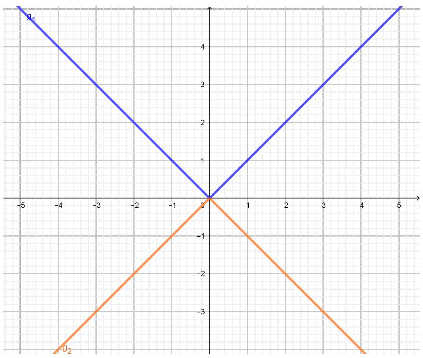
$ii)$ Los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

-a- Para la función f_2, debemos considerar cuáles son los sucesivos "movimientos"que debemos aplicar a la gráfica de la función valor absoluto para obtener la gráfica de f_2. Para esto, iremos construyendo funciones auxiliares.

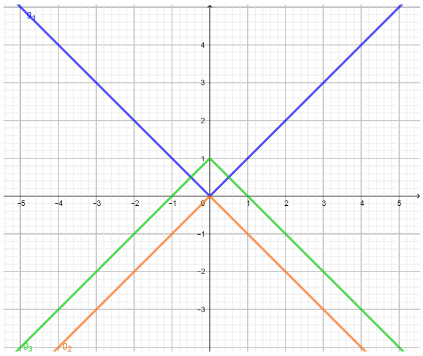
Primero llamemos $g_1(x) = |x|$



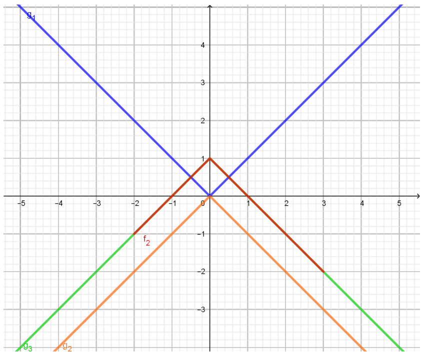
luego llamamos $g_2(x) = -|x|$. Como $g_2(x) = -g_1(x)$, la gráfica de g_2 se obtiene reflejando la gráfica de g_1 respecto del eje x.



Ahora, consideramos $g_3(x) = -|x| + 1$. Y como $g_3(x) = g_2(x) + 1$, la gráfica de g_3 se obtiene trasladando verticalmente la gráfica de g_2 una unidad hacia arriba.



Observemos que las funciones f_2 y g_3 son distintas. Pues f_2 y g_3 tienen distinto dominio, $\mathrm{Dom}(g_3) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(f_2) = [-2, 3]$ como indica su definición. Por esto, para obtener la gráfica de f_2 a partir de la de g_3, debemos restringir el dominio de g_3 al intervalo $[-2, 3]$.



Por último, veamos analíticamente el recorrido de f_2:

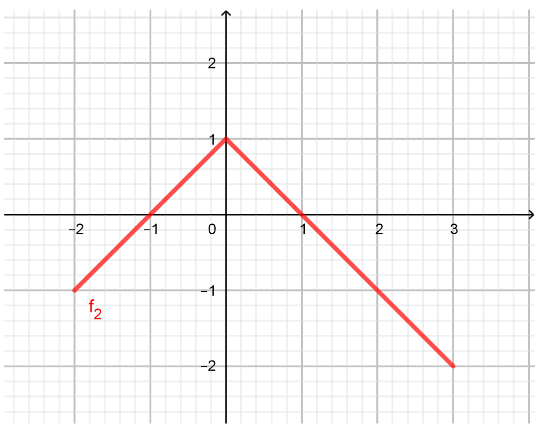
$-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -|x| \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 3 \leq 1 - |x| \leq 0 + 1 \Leftrightarrow -2 \leq 1 - |x| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq f_2(x) \leq 1.$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Rec}(f_2) = [-2, 1].$$

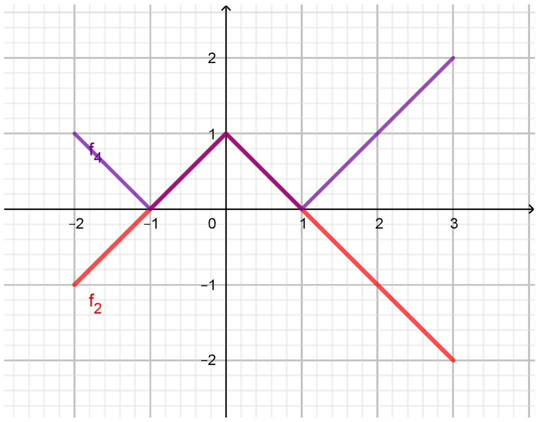
-b- $f_4(x) = |f_2(x)|$

Comencemos con la gráfica de f_2.



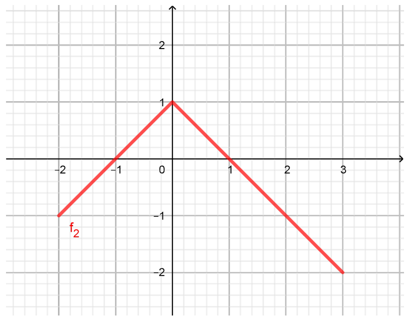
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

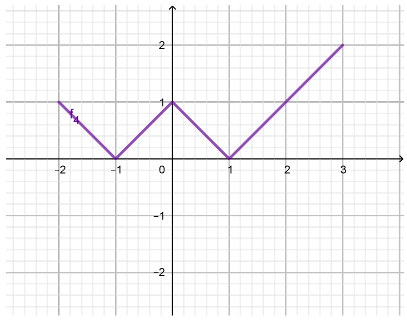
Entonces la gráfica de f_4 coincide con la gráfica de f_2 cuando $f_2(x) \geq 0$ y se refleja respecto del eje x cuando $f_2(x) < 0$.



Además, $\mathrm{Dom}(f_4) = [-2, 3]$ y $\mathrm{Rec}(f_4) = [0, 2]$.

-c- i) $A_i = \{x \in \mathbb{R} \colon f_i(x) = 0\}$ y $B_i = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 < f_i(x) \leq 5\}$

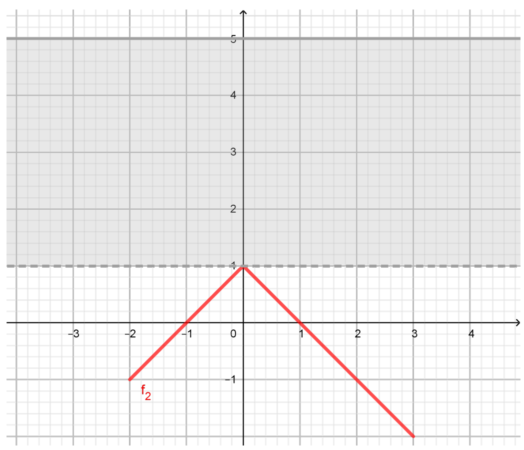


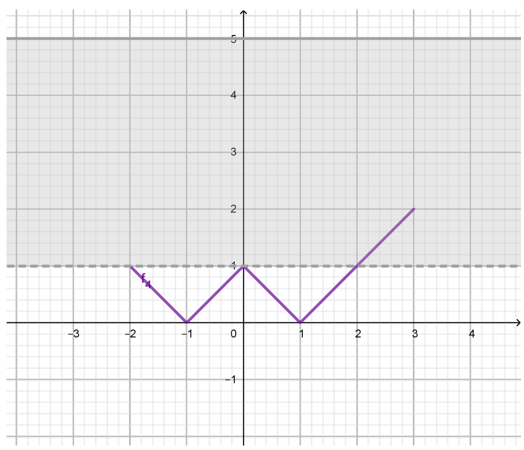


Observemos que los conjuntos A_i corresponden a los puntos para los cuales la gráfica interseca al eje x. En la gráfica de f_2, vemos que los valores de x para los cuales $f_2(x) = 0$ son $x = -1$ y $x = 1$. En la gráfica de f_4, vemos que $f_4(x) = 0$ si $x = -1$ o $x = 1$. Entonces,

$$A_2 = \{-1, 1\} \qquad \text{y} \qquad A_4 = \{-1, 1\}$$

Consideremos ahora los conjuntos B_i. En palabras, el conjunto B_i es el conjunto de números reales, tales que su imagen por la función f_i está en la banda $1 < y \leq 5$.





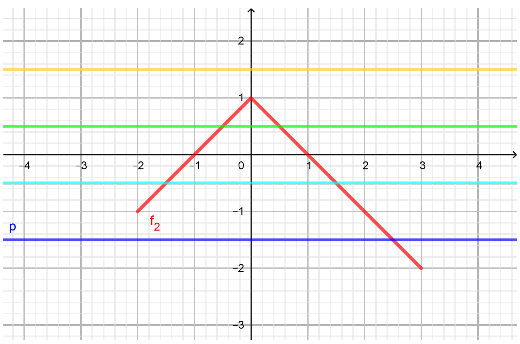
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

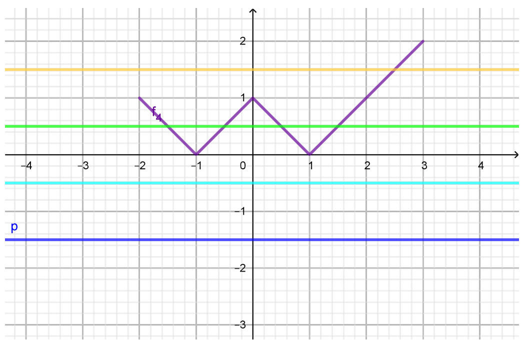
Podemos ver que la gráfica de f_2 no interseca la banda, mientras que la gráfica de f_4 interseca la banda para los valores $2 < x \leq 3$. Resulta,

$$B_2 = \emptyset \qquad \text{y} \qquad B_4 = (2, 3]$$

-c- ii) Valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

La ecuación $f_i(x) = k$ representa la intersección entre la gráfica de f_i y la recta $y = k$, es decir la recta horizontal con ordenada k. Si queremos hallar los valores de k para los cuales existan exactamente dos soluciones, debemos hallar los valores de k para los cuales la recta interseca a la gráfica en exactamente dos puntos.





En ambas gráficas se dibujaron las rectas correspondientes a los valores $k = \frac{3}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$ y $k = -\frac{3}{2}$.

En la gráfica de f_2, podemos ver que la ecuación $f_2(x) = k$ tiene exactamente dos soluciones cuando k está en el intervalo $[-1, 1)$.

Considerando ahora la gráfica de f_4, la única recta que interseca exactamente dos veces a la gráfica de f_4 es el eje x, es decir la recta $y = 0$. Entonces la ecuación tiene exactamente dos soluciones cuando $k = 0$.

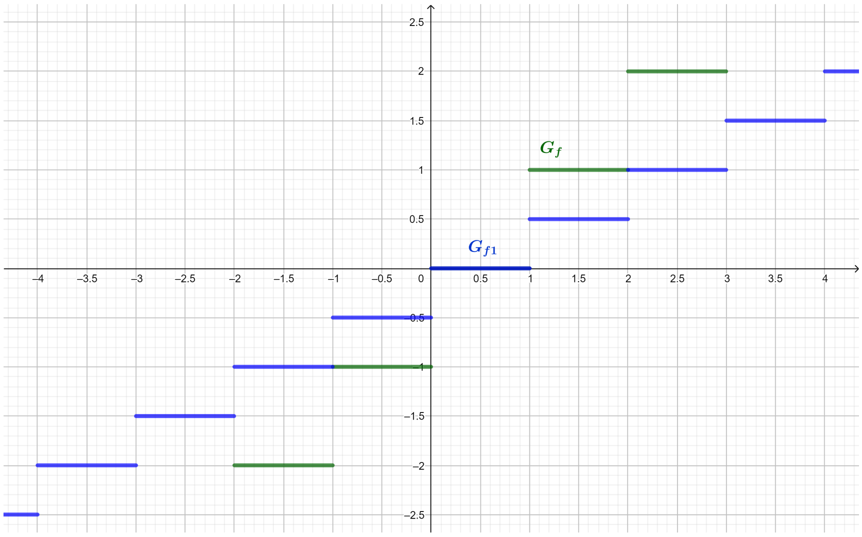
☞ **13.** A partir de la gráfica de la función parte entera, representar gráficamente las siguientes funciones:

I. $f_1(x) = \frac{1}{2}[x]$ II. $f_2(x) = [\frac{1}{2}x]$ III. $f_3(x) = [x] + \frac{1}{2}$ IV. $f_4(x) = [x + \frac{1}{2}]$

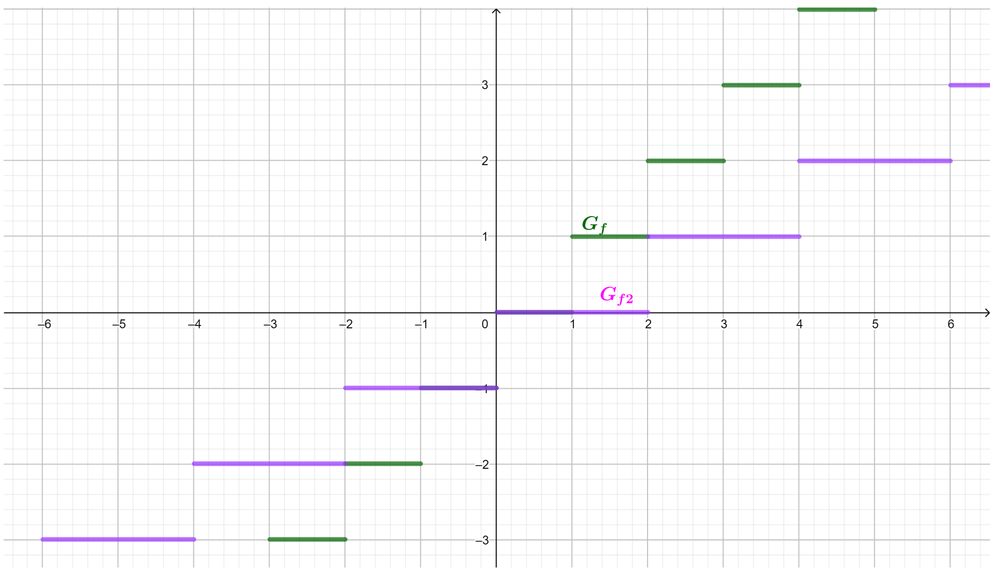
Llamamos $f(x) = [x]$, recordemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{Z}$. Haremos transformaciones de la gráfica de f para obtener las gráficas de las funciones f_i.

I. Si $f_1(x) = \frac{1}{2}[x]$, el $\mathrm{Dom}(f_1) = \mathbb{R}$ y el $\mathrm{Rec}(f_1) = \left\{\frac{z}{2} : z \in \mathbb{Z}\right\}$, la gráfica sufre una contracción (aplastamiento).

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

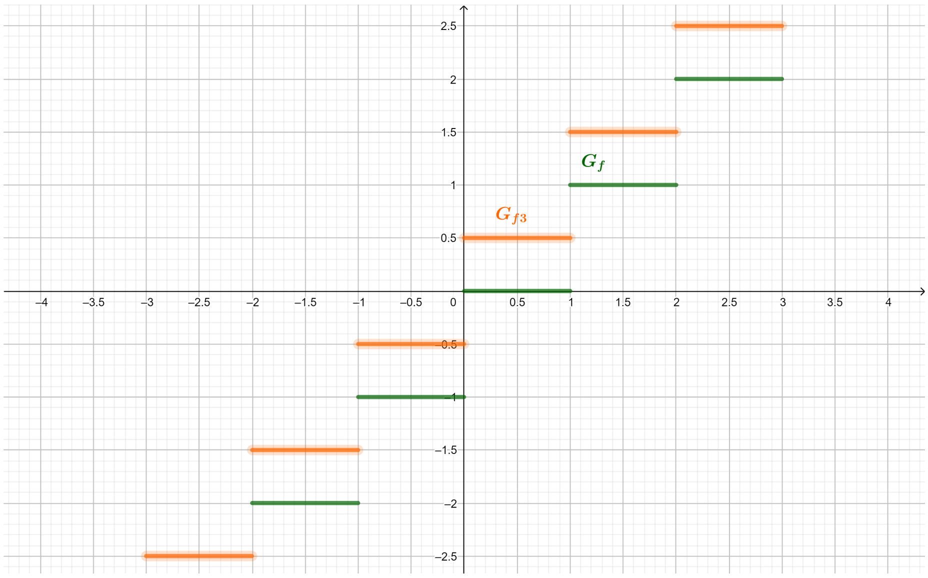


II. Si $f_2(x) = [\frac{1}{2}x]$, el $\mathrm{Dom}(f_2) = \mathbb{R}$ y el $\mathrm{Rec}(f_2) = \mathbb{Z}$, la gráfica sufre una dilatación (estiramiento) horizontal.

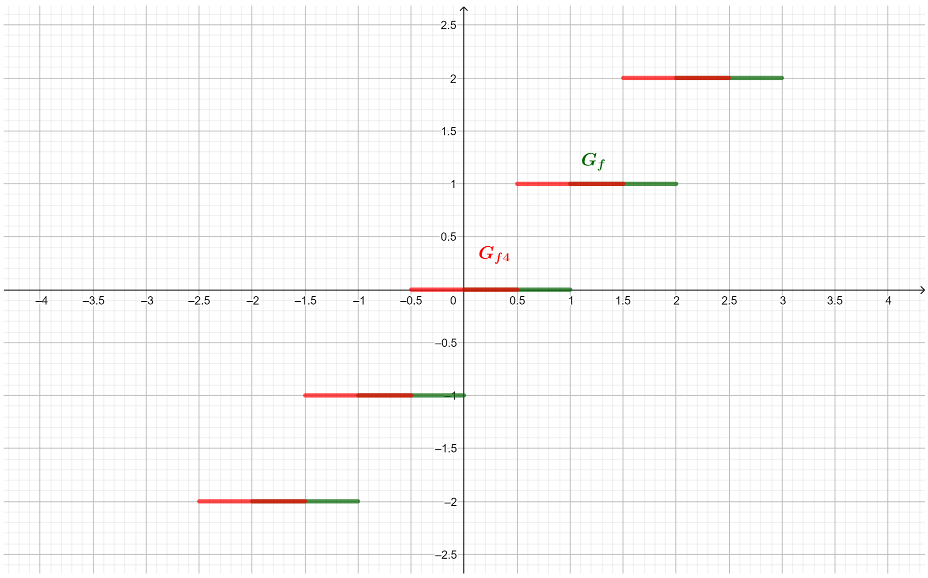


III. Si $f_3(x) = [x] + \frac{1}{2}$, el $\mathrm{Dom}(f_3) = \mathbb{R}$ y el $\mathrm{Rec}(f_3) = \left\{z + \frac{1}{2} : z \in \mathbb{Z}\right\}$, la gráfica sufre una traslación vertical, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ unidades hacia arriba.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



IV. Si $f_4(x) = [x + \frac{1}{2}]$, el $\mathrm{Dom}(f_4) = \mathbb{R}$ y el $\mathrm{Rec}(f_4) = \mathbb{Z}$, la gráfica sufre una traslación horizontal, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ unidades hacia la izquierda.



☞ **15. a)** A partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ se pide representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera:

II. $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) Utilizar las representaciones gráficas previas para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:

I. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

✎ **a)** Cómo podemos representar gráficamente a $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

En una primera instancia podríamos pensar en, por ejemplo, seguir los siguientes pasos:

- Comenzamos con la gráfica de $f(x) = x^2$.
- Seguimos con $g_1(x) = -f(x) = -x^2$ (reflexión de la gráfica de f respecto del eje x).
- Seguimos con $g_2(x) = g_1(x) - 3 = -x^2 - 3$ (traslación vertical de la gráfica de g_1 hacia abajo en 3 unidades).
- Finalizamos con $f_2(x) = g_2(x) + 4x = -x^2 + 4x - 3$.

Sin embargo, todo este procedimiento no sirve ya que este último paso (sumar $4x$) no corresponde a una de las transformaciones para graficar funciones a partir de otras ya conocidas.

Qué hacemos entonces? Debemos de alguna manera reescribir la ley de la función $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ para que pueda ser representada mediante transformaciones de la gráfica de $f(x) = x^2$.
Observemos que f_2 es una función cuadrática (polinomio de grado 2). Lo que podemos hacer entonces es el procedimiento conocido como **completar cuadrados** para reescribir la ley de, $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$.
En primer lugar, sacamos de factor común el coeficiente principal, es decir el que acompaña a x^2 (en este caso -1):

$$f_2(x) = -(x^2 - 4x + 3).$$

Recordemos que $(x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$, la idea va a ser formar un trinomio cuadrado perfecto en el paréntesis. En este caso, h será tal que $2hx = -4x$ o sea $h = -2$. Luego, reescribamos f_2 del siguiente modo:

$$f_2(x) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{h} \cdot x + 3).$$

Ya tenemos $x^2 + 2hx$ dentro del paréntesis. Nos está faltando sumar h^2 para que sea un trinomio cuadrado perfecto. Como no podemos alterar el resultado, sumamos y restamos h^2:

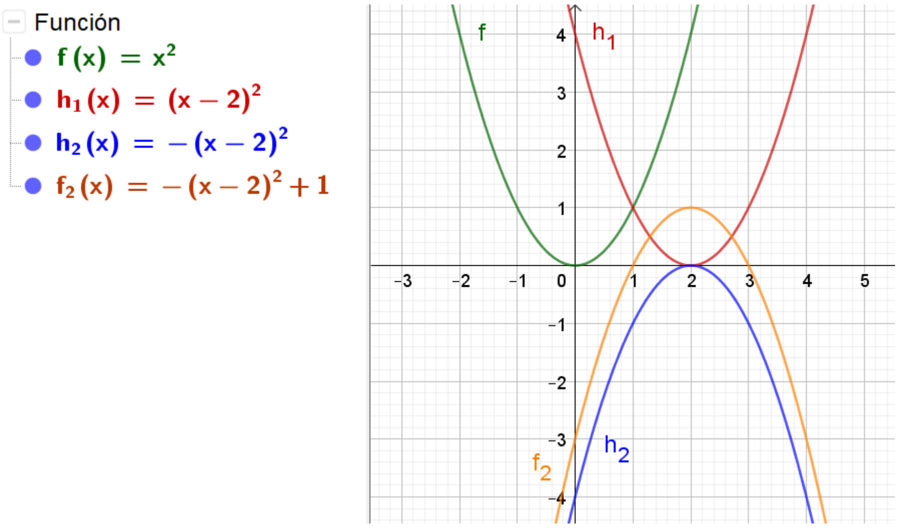
$$f_2(x) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{h} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{h^2} - \underbrace{(-2)^2}_{h^2} + 3) = -(x^2 + 2 \cdot \underbrace{(-2)}_{h} \cdot x + \underbrace{(-2)^2}_{h^2} - 1).$$

Ahora sí, los tres primeros términos en la expresión que está entre paréntesis corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, y entonces los reemlazamos por $x^2 + 2hx + h^2 = (x+h)^2$ y distribuimos el factor común (-1)
Finalmente obtenemos

$$f_2(x) = -x^2 + 4x - 3 = \cdots = -((x + \underbrace{(-2)}_{h})^2 - 1) = -(x-2)^2 + 1.$$

Y ahora sí, estamos en condiciones de graficar f_2 a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$:

- Comenzamos con la gráfica de $f(x) = x^2$.
- Seguimos con $h_1(x) = f(x-2) = (x-2)^2$ (traslación horizontal de la gráfica de f hacia la derecha en 2 unidades).
- Seguimos con $h_2(x) = -h_1(x) = -(x-2)^2$ (reflexión de la gráfica de h_1 respecto del eje x).
- Finalizamos con $f_2(x) = h_2(x) + 1 = -(x-2)^2 + 1$ (traslación vertical de la gráfica de h_2 hacia arriba en 1 unidad).



b) I. Lo que estamos buscando son los valores de x para los cuales $f_2(x) \geq 0$.
Gráficamente, esto se puede ver como los valores de x (abscisa) para los cuales la imagen de f_2 (ordenada) está por encima o justo sobre el eje x. Entonces, utilizando la representación gráfica del apartado anterior, deducimos que el conjunto solución de $f_2(x) \geq 0$ es el intervalo cerrado $[1, 3]$.

☞ **16. a)** Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x) = -x^2 + x + 4\alpha$ no posee ceros reales.

b) Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3\alpha x + 4$ interseca a la gráfica de la función $g(x) = x$ en dos puntos distintos.

c) Demostrar la siguiente proposición:

$$x \in \mathbb{R} \implies 4x^2 - x \geq -\frac{1}{16}.$$

✎ **a)** Buscamos α tales que $f(x) = -x^2 + x + 4\alpha$ no tenga ceros reales.
Recordemos que para hallar los ceros de f o las raíces de la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, a partir de la resolvente $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la ecuación no tendrá soluciones reales sí y sólo si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
En este caso, $a = -1, b = 1, c = 4\alpha$, entonces buscamos α tal que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)4\alpha = 1 + 16\alpha < 0 \Longrightarrow \alpha < -\frac{1}{16}$$

Luego el conjunto solución es

$$S = (-\infty, -\frac{1}{16}).$$

b) Buscamos α tales que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones distintas.
Es decir, queremos encontrar, α tal que $x^2 + 3\alpha x + 4 = x$ para dos valores diferentes de x, o lo que es lo mismo, que la ecuación cuadrática $x^2 + 3\alpha x + 4 - x = 0$ tenga dos soluciones diferentes, nuevamente a partir de la resolvente la ecuación $x^2 + (3\alpha - 1)x + 4 = 0$ tiene dos soluciones reales distintas sí y sólo $\Delta = b^2 - 4ac = (3\alpha - 1)^2 - 16 > 0$.
Por lo tanto, el resultado deseado lo conseguiremos resolviendo:

$$\Delta = (3\alpha - 1)^2 - 16 > 0 \Rightarrow (3\alpha - 1)^2 > 16 \Rightarrow |3\alpha - 1| > 4 \Rightarrow$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$$\Rightarrow (3\alpha - 1 > 4) \vee (3\alpha - 1 < -4) \Rightarrow \left(\alpha > \frac{5}{3}\right) \vee (\alpha < -1)$$

Luego el conjunto solución es

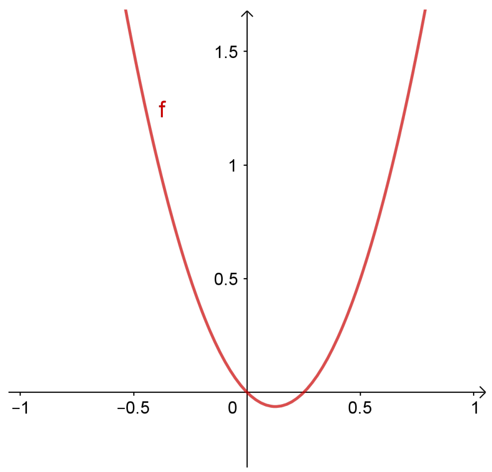
$$S = (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty).$$

c) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^2 - x$.
Dado que es una función cuadrática con $a = 4 > 0$, podemos asegurar que tendrá un mínimo en $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{8}$ y el valor mínimo será

$$y_v = f(x_v) = 4 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}.$$

Por lo tanto, $\min f(x) = -\dfrac{1}{16} \Rightarrow f(x) \geq -\dfrac{1}{16}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, demostramos que

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4x^2 - x \geq -\frac{1}{16}.$$



☞ **17.** Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $30m/seg$ por lo que la altura h que alcanza t segundos después está dada por la expresión

$$h = (30t - 4{,}9t^2)m.$$

Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, representando gráficamente la altura h como función del tiempo t.

✎ La altura h como función del tiempo t,

$$h(t) = (30t - 4,9t^2)m = (-4,9t^2 + 30t)m$$

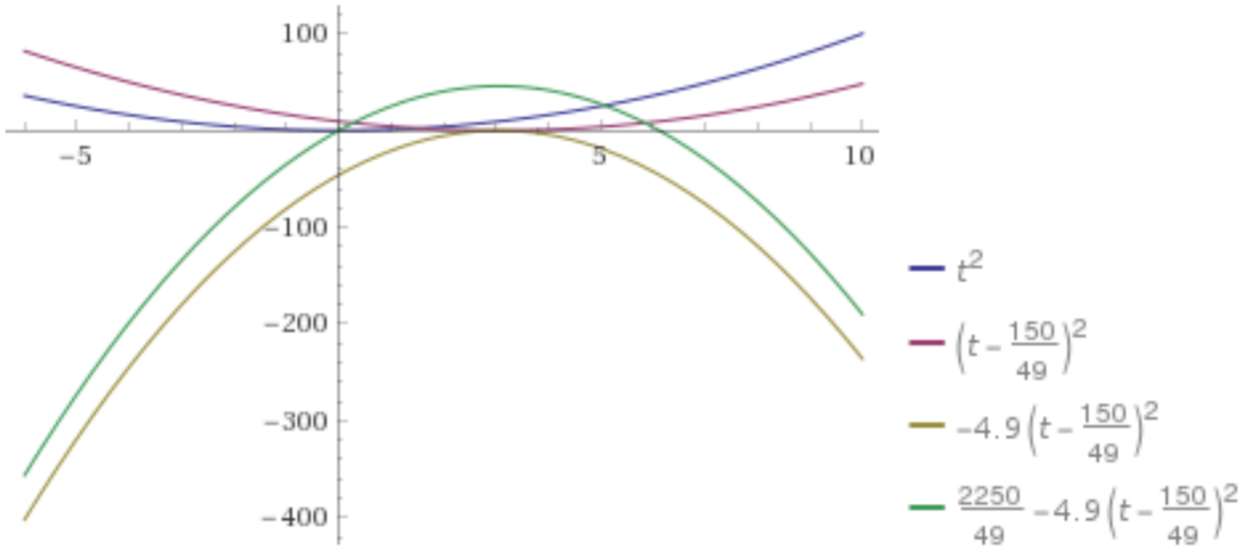
es una función cuadrática con $a = -4,9 < 0 \Rightarrow \exists \max h(t)$.
Para graficarla, completamos cuadrados, y obtenemos la expresión:

$$h(t) = -4,9\left(t - \frac{150}{49}\right)^2 + \frac{2250}{49}$$

A continuación se muestran los pasos para graficar $h(t)$ a partir de la función $f(t) = t^2$:
Siendo

$$h(t) = -4,9\left(t - \frac{150}{49}\right)^2 + \frac{2250}{49}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



El máximo está en $t_v = \dfrac{150}{49}$ y vale $h(t_v) = \dfrac{2250}{49}$.
Observación: Además de utilizar un método gráfico, como pedía el ejercicio, podíamos hacer dos cosas diferentes para encontrar el máximo.
Por un lado, se podría encontrar el máximo de forma analítica, buscando la abcsisa t_v en el vértice de la parábola:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2(-4,9)} = \frac{150}{49}$$

Para obtener el máximo, evaluamos la función en este valor, es decir, calculamos:

$$h(t_v) = \frac{2250}{49} \simeq 45{,}918m$$

Por otro lado, una vez que tenemos la función escrita en forma de binomio al cuadrado

$$h(t) = -4,9\left(t - \frac{150}{49}\right)^2 + \frac{2250}{49}$$

podíamos darnos cuenta del resultado sin hacer la gráfica, notando que el primer término de $h(t)$, es decir, $-4,9\left(t - \dfrac{150}{49}\right)^2$ es siempre negativo (dado que es un número negativo multiplicado por un número al cuadrado), es decir que el máximo debe darse cuando ese término es cero, y por lo tanto deducimos que el valor máximo debe ser $h(t_v) = \dfrac{2250}{49}$.

☞ **18.** Entre todos los pares de números reales x e y tales que $x + y = 1$, hallar aquéllos pares para los cuales el producto $x \cdot y$ es máximo.

✎ Debemos encontrar dos números tales que su multiplicación sea máxima, sujeto a la condición de que $x + y = 1$, es decir

$$\text{máx} \quad x \cdot y$$
$$s/a \;\; x + y = 1$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

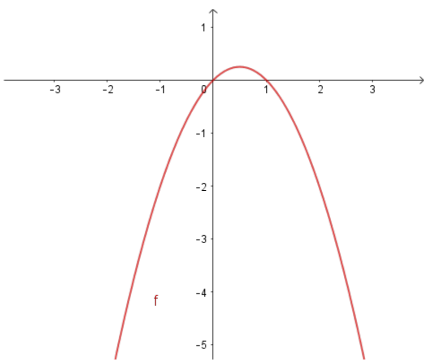
Entonces, hasta ahora tenemos un problema que está involucrando a dos incógnitas, es decir, x e y. Sin embargo, si miramos la condición s/a, podemos elaborar una expresión que dependa sólo de una incógnita. En efecto,

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \quad (1)$$

Luego, si en $x \cdot y$ reemplazamos por la expresión en (1), tenemos que

$$x \cdot y = x \cdot (1 - x) = x - x^2 \quad (2)$$

Ahora tenemos una expresión que depende solo de x, por lo que podemos considerar la función f cuya ley es $f(x) = x - x^2$.
Por lo tanto, la función f es una función cuadrática con $a = -1 < 0$ y $b = 1$.
Notemos que el x que maximiza a $f(x) = x - x^2$ es la abscisa del vértice de la parábola, es decir, de la gráfica de f.



Luego,

$$x = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ahora, para determinar el valor de y, volvemos a (1)

$$y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, los números cuya suma es uno y que maximizan el producto son

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119