Integración de funciones racionales propias.

Pablo Torres

Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Curso de Análisis Matemático I
Primer cuatrimestre 2020

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$.

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (justificación en AMII).

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1)$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$.

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$.

Luego, si $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Luego, si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces, $ln|x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ en el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Luego, si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces, $ln|x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ en el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c.$$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Luego, si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces, $ln|x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ en el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c.$$

$$\int \frac{k}{x+b} dx = k \cdot ln|x+b| + c \quad (x \neq -b).$$

Función racional propia.

Sea $f(x) = ln|x|$. Tenemos que:

- Si $x > 0$, $f(x) = ln(x)$ y $f'(x) = \frac{1}{x}$ (justificación en AMII).
- Si $x < 0$, $f(x) = ln|x| = ln(-x)$ y $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Luego, si $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces, $ln|x|$ es una primitiva de $\frac{1}{x}$ en el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c.$$

$$\int \frac{k}{x+b} dx = k \cdot ln|x+b| + c \quad (x \neq -b).$$

$$\int \frac{k}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \cdot ln|ax+b| + c, \quad (a \neq 0,\ x \neq -\frac{b}{a}).$$

Función racional propia.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinómios con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Función racional propia.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinómios con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^4 + x^3 - x + 1}$ es una función racional propia.

Función racional propia.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinómios con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^4 + x^3 - x + 1}$ es una función racional propia.

Si $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$, sabemos que existen únicos polinomios C y R tales que

$$P = C \cdot Q + R,$$

donde $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$.

Función racional propia.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinómios con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^4 + x^3 - x + 1}$ es una función racional propia.

Si $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$, sabemos que existen únicos polinomios C y R tales que

$$P = C \cdot Q + R,$$

donde $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$.

Luego,

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q},$$

donde $\dfrac{R}{Q}$ es una función racional propia.

Función racional propia.

Definición: Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinómios con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^4 + x^3 - x + 1}$ es una función racional propia.

Si $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$, sabemos que existen únicos polinomios C y R tales que

$$P = C \cdot Q + R,$$

donde $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$.

Luego,

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q},$$

donde $\dfrac{R}{Q}$ es una función racional propia.

A continuación, realizaremos un análisis por casos según las raices de Q.

Función racional propia.

Caso 1: Q solo tiene raices simples.

Función racional propia.

Caso 1: Q solo tiene raices simples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Función racional propia.

Caso 1: Q solo tiene raices simples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n).$$

Será entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

Función racional propia.

Caso 1: Q solo tiene raices simples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Será entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

Ejemplo: Deseamos hallar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{2x - 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$$

Función racional propia.

Caso 1: Q solo tiene raices simples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Será entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

Ejemplo: Deseamos hallar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{2x - 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$$

No es difícil ver que

$$Q(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 1).$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x - 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x - 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Observemos que

$$\frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Observemos que

$$\frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} =$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x-3)(x+1) + A_3(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Observemos que

$$\frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} =$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x-3)(x+1) + A_3(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x^2-2x-3) + A_3(x^2-4x+3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Función racional propia.

Deseamos obtener coeficientes A_1, A_2 y A_3 tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Observemos que

$$\frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} =$$

$$= \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x-3)(x+1) + A_3(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{A_1(x^2-1) + A_2(x^2-2x-3) + A_3(x^2-4x+3)}{(x-3)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + (-2A_2-4A_3)x + (-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Función racional propia.

Debe ser,

$$\frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_2-4A_3)x+(-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Función racional propia.

Debe ser,

$$\frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_2-4A_3)x+(-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Luego,

$$\left\{\begin{array}{r} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_2-4A_3=2 \\ -A_1-3A_2+3A_3=-14 \end{array}\right.$$

Función racional propia.

Debe ser,

$$\frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_2-4A_3)x+(-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Luego,

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_2-4A_3=2 \\ -A_1-3A_2+3A_3=-14 \end{cases}$$

Resolviendo, resulta

$$A_1=-1,\ A_2=3,\ A_3=-2.$$

Función racional propia.

Debe ser,

$$\frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_2-4A_3)x+(-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Luego,

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_2-4A_3=2 \\ -A_1-3A_2+3A_3=-14 \end{cases}$$

Resolviendo, resulta

$$A_1=-1,\ A_2=3,\ A_3=-2.$$

Finalmente,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}$$

Función racional propia.

Debe ser,

$$\frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2+(-2A_2-4A_3)x+(-A_1-3A_2+3A_3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

Luego,

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_2-4A_3=2 \\ -A_1-3A_2+3A_3=-14 \end{cases}$$

Resolviendo, resulta

$$A_1=-1,\ A_2=3,\ A_3=-2.$$

Finalmente,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{-1}{x-3}+\frac{3}{x-1}+\frac{-2}{x+1}.$$

Función racional propia.

En consecuencia,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}dx$$

Función racional propia.

En consecuencia,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}dx = \int \frac{-1}{x-3} + \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+1}dx$$

Función racional propia.

En consecuencia,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}dx = \int \frac{-1}{x-3} + \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+1}dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x-3}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx$$

Función racional propia.

En consecuencia,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}dx = \int \frac{-1}{x-3} + \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+1}dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x-3}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx = -ln|x-3| + 3\,ln|x-1| - 2\,ln|x+1| + c.$$

Función racional propia.

Consideremos ahora que queremos hallar

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$$

Función racional propia.

Consideremos ahora que queremos hallar

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$$

Realizando la división de polinomios resulta

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}_{P(x)} = \underbrace{x}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - 3x^2 - x + 3)}_{Q(x)} + \underbrace{2x - 14}_{R(x)}$$

Función racional propia.

Consideremos ahora que queremos hallar

$$\int \frac{x^4-3x^3-x^2+5x-11}{x^3-3x^2-x+3}dx.$$

Realizando la división de polinomios resulta

$$\underbrace{x^4-3x^3-x^2+5x-11}_{P(x)} = \underbrace{x}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^3-3x^2-x+3)}_{Q(x)} + \underbrace{2x-14}_{R(x)}$$

$$\frac{x^4-3x^3-x^2+5x-11}{x^3-3x^2-x+3} = x + \frac{2x-14}{x^3-3x^2-x+3}$$

Función racional propia.

Consideremos ahora que queremos hallar

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx.$$

Realizando la división de polinomios resulta

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}_{P(x)} = \underbrace{x}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - 3x^2 - x + 3)}_{Q(x)} + \underbrace{2x - 14}_{R(x)}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = x + \frac{2x - 14}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$$

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 11}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx = \frac{x^2}{2} - ln|x - 3| + 3\ ln|x - 1| - 2\ ln|x + 1| + c.$$

Función racional propia.

Caso 2: Q tiene raíces múltiples.

Función racional propia.

Caso 2: Q tiene raíces múltiples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\dots(x-\alpha_n)^{r_n}.$$

Función racional propia.

Caso 2: Q tiene raíces múltiples.

El polinomio Q factorizado es (si su coeficiente principal es 1):

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\dots(x-\alpha_n)^{r_n}.$$

Será entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} +$$

$$+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_1)^{r_2}} +$$

$$\dots$$

$$+\frac{A_{n1}}{x-\alpha_n} + \dots + \frac{A_{nr_n}}{(x-\alpha_n)^{r_n}}.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Deseamos hallar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Deseamos hallar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

No es difícil ver que

$$Q(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4 = (x-1)^2(x+2)^2.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Deseamos hallar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

No es difícil ver que

$$Q(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4 = (x-1)^2(x+2)^2.$$

Deseamos obtener coeficientes A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22} tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2}.$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2 + A_{12}(x+2)^2 + A_{21}(x-1)^2(x+2) + A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2 + A_{12}(x+2)^2 + A_{21}(x-1)^2(x+2) + A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A_{11}(x^3+3x^2-4) + A_{12}(x^2+4x+4) + A_{21}(x^3-3x+2) + A_{22}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2+A_{12}(x+2)^2+A_{21}(x-1)^2(x+2)+A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x^3+3x^2-4)+A_{12}(x^2+4x+4)+A_{21}(x^3-3x+2)+A_{22}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2+A_{12}(x+2)^2+A_{21}(x-1)^2(x+2)+A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x^3+3x^2-4)+A_{12}(x^2+4x+4)+A_{21}(x^3-3x+2)+A_{22}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2+A_{12}(x+2)^2+A_{21}(x-1)^2(x+2)+A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x^3+3x^2-4)+A_{12}(x^2+4x+4)+A_{21}(x^3-3x+2)+A_{22}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{r} A_{11}+A_{21}=1\\ 3A_{11}+A_{12}+A_{22}=2\\ 4A_{12}-3A_{21}-2A_{22}=1\\ -4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22}=1 \end{array}\right.$$

Función racional propia.

$$\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+2}+\frac{A_{22}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x-1)(x+2)^2+A_{12}(x+2)^2+A_{21}(x-1)^2(x+2)+A_{22}(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A_{11}(x^3+3x^2-4)+A_{12}(x^2+4x+4)+A_{21}(x^3-3x+2)+A_{22}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}=$$

$$=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(3A_{11}+A_{12}+A_{22})x^2+(4A_{12}-3A_{21}-2A_{22})x+(-4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{r} A_{11}+A_{21}=1 \\ 3A_{11}+A_{12}+A_{22}=2 \\ 4A_{12}-3A_{21}-2A_{22}=1 \\ -4A_{11}+4A_{12}+2A_{21}+A_{22}=1 \end{array}\right.$$

$$A_{11}=\frac{14}{27},\ A_{12}=\frac{13}{27},\ A_{21}=\frac{5}{9},\ A_{22}=-\frac{1}{9}.$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right] dx$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{14}{27}\; ln|x-1|$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{14}{27}\ ln|x-1| \quad \underbrace{-\frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)}}_{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}+c}$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{14}{27}\ ln|x-1| \quad \underbrace{-\frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)}}_{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=-\frac{1}{x-1}+c} \quad + \frac{5}{9}\ ln|x+2|$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{14}{27}\, ln|x-1| \quad \underbrace{-\frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)}}_{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}+c} \quad + \frac{5}{9}\, ln|x+2| \quad \underbrace{+\frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)}}_{\int \frac{1}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}+c}$$

Función racional propia.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = \frac{\frac{14}{27}}{x-1} + \frac{\frac{13}{27}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{9}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{9}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{14}{27}\frac{1}{x-1} + \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{9}\frac{1}{x+2} + \left(-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{(x+2)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{14}{27}\ ln|x-1| \quad \underbrace{-\frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)}}_{\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1}+c} \quad + \frac{5}{9}\ ln|x+2| \quad \underbrace{+\frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)}}_{\int \frac{1}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}+c} \quad + c.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x + 8} dx$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x + 8} dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

$$P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3, \; Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x + 8.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{2x^4+4x^3-6x^2-8x+8}dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

$$P(x) = x^5+3x^4+3x^2+x-3,\ Q(x) = 2x^4+4x^3-6x^2-8x+8.$$

El coeficiente principal de Q no es 1. Tomemos entonces

$$Q_1(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{2x^4+4x^3-6x^2-8x+8}dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

$$P(x) = x^5+3x^4+3x^2+x-3,\ Q(x) = 2x^4+4x^3-6x^2-8x+8.$$

El coeficiente principal de Q no es 1. Tomemos entonces

$$Q_1(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4 = \frac{1}{2}Q(x).$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x + 8} dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

$$P(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3, \; Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x + 8.$$

El coeficiente principal de Q no es 1. Tomemos entonces

$$Q_1(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{2} Q(x).$$

Luego,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P(x)}{2Q_1(x)} dx$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{2x^4+4x^3-6x^2-8x+8}dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

$$P(x) = x^5+3x^4+3x^2+x-3,\ Q(x) = 2x^4+4x^3-6x^2-8x+8.$$

El coeficiente principal de Q no es 1. Tomemos entonces

$$Q_1(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4 = \frac{1}{2}Q(x).$$

Luego,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)}{2Q_1(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{P(x)}{Q_1(x)}dx.$$

Función racional propia.

Ejemplo: Hallar

$$\int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{2x^4+4x^3-6x^2-8x+8}dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

$$P(x) = x^5+3x^4+3x^2+x-3,\ Q(x) = 2x^4+4x^3-6x^2-8x+8.$$

El coeficiente principal de Q no es 1. Tomemos entonces

$$Q_1(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+4 = \frac{1}{2}Q(x).$$

Luego,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)}{2Q_1(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{P(x)}{Q_1(x)}dx.$$

Observemos que, del ejemplo anterior,

$$Q_1(x) = (x-1)^2(x+2)^2$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

Como $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q_1)$, podemos realizar la división de poinomios y obtenemos

$$\underbrace{x^5+3x^4+3x^2+x-3}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)}_{Q_1(x)} + \underbrace{x^3+2x^2+x+1}_{R(x)}$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4} dx.$$

Como $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q_1)$, podemos realizar la división de poinomios y obtenemos

$$\underbrace{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)}_{Q_1(x)} + \underbrace{x^3 + 2x^2 + x + 1}_{R(x)}$$

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4} = x + 1 + \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4} dx.$$

Como $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q_1)$, podemos realizar la división de poinomios y obtenemos

$$\underbrace{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)}_{Q_1(x)} + \underbrace{x^3 + 2x^2 + x + 1}_{R(x)}$$

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4} = x + 1 + \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}$$

Del ejemplo anterior,

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4} dx$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

Como $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q_1)$, podemos realizar la división de poinomios y obtenemos

$$\underbrace{x^5+3x^4+3x^2+x-3}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)}_{Q_1(x)} + \underbrace{x^3+2x^2+x+1}_{R(x)}$$

$$\frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = x+1+\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$$

Del ejemplo anterior,

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x$$

Función racional propia.

Calculemos entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx.$$

Como $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q_1)$, podemos realizar la división de poinomios y obtenemos

$$\underbrace{x^5+3x^4+3x^2+x-3}_{P(x)} = \underbrace{(x+1)}_{C(x)} \cdot \underbrace{(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)}_{Q_1(x)} + \underbrace{x^3+2x^2+x+1}_{R(x)}$$

$$\frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4} = x+1+\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}$$

Del ejemplo anterior,

$$\int \frac{P(x)}{Q_1(x)} = \int \frac{x^5+3x^4+3x^2+x-3}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{14}{27}\ ln|x-1| - \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5}{9}\ ln|x+2| + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)} + c.$$

Función racional propia.

Finalmente,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{P(x)}{Q_1(x)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{14}{27}ln|x-1| - \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5}{9}\ ln|x+2| + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)} + c\right]$$

Función racional propia.

Finalmente,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{P(x)}{Q_1(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{14}{27} ln|x-1| - \frac{13}{27}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5}{9}\ ln|x+2| + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+2)} + c\right] =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{14}{54}\ ln|x-1| - \frac{13}{54}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5}{18}\ ln|x+2| + \frac{1}{18}\frac{1}{(x+2)} + c.$$