Formalizamos los conceptos de hoy.

Sean a y b números reales con $a < b$. Se denomina **partición** del intervalo $[a, b]$ a una colección finita de puntos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tales que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

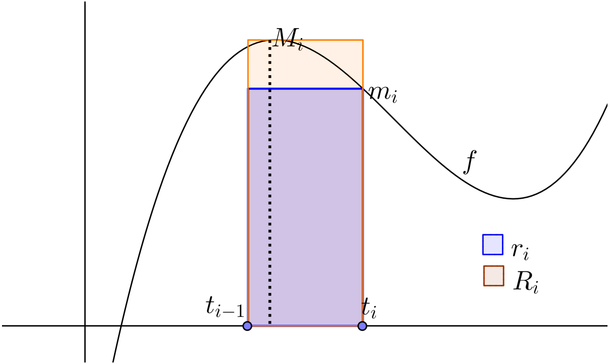
Formalizamos los conceptos de hoy.

Sean a y b números reales con $a < b$. Se denomina **partición** del intervalo $[a, b]$ a una colección finita de puntos $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tales que $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, es decir, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$. Sea $P = \{t_0 = a, t_1, \cdots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada $i = 1, \cdots, n$ sean

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$



M_i
m_i
f
r_i
R_i
t_{i-1}
t_i

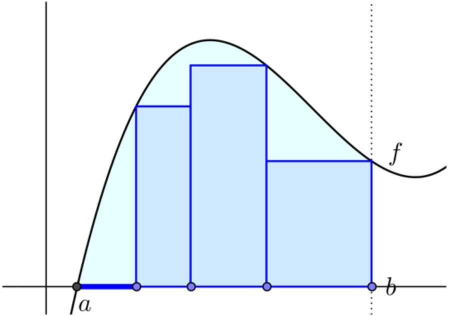
Se denomina **suma inferior de f para la partición P**, y se denota $L(f, P)$, a

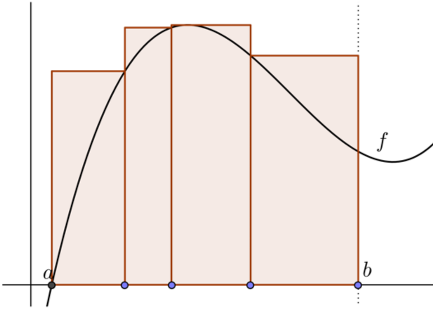
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) m_i.$$

Se denomina **suma superior de f para la partición P**, y se denota $U(f, P)$, a

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) M_i.$$

- En el caso que $f \geq 0$, $L(f, P)$ coincide con la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y $U(f, P)$ coincide con la suma de las áreas de los rectángulos superiores a la gráfica de f.





- La condición de que f sea acotada en $[a, b]$ es fundamental para que existan los valores m_i y M_i. Por otra parte, como no estamos pidiendo que f sea continua, m_i y M_i no tienen por qué ser el mínimo y el máximo de la función en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

- La condición de que f sea acotada en $[a, b]$ es fundamental para que existan los valores m_i y M_i. Por otra parte, como no estamos pidiendo que f sea continua, m_i y M_i no tienen por qué ser el mínimo y el máximo de la función en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.
- Como claramente $m_i \leq M_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$, se tiene que

$$m_i \leq M_i \;\Rightarrow\; (t_i - t_{i-1})m_i \leq (t_i - t_{i-1})M_i \;\Rightarrow\; L(f, P) \leq U(f, P)$$

para cualquier partición P de $[a, b]$.