PRÁCTICA 2 - Funciones reales

1. a. Expresar la longitud del lado l de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del mismo. Expresar el perímetro y el área del cuadrado como una función de la longitud d de su diagonal.

   b. Una caja prismática sin tapa, de $2m^3$ tiene base cuadrada. Expresar el área de la superficie de la caja en función de la longitud de uno de los lados de su base e indicar su dominio.

   c. Un rectángulo tiene un perímetro de $20m$. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

2. Describir el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Calcular el valor de la función en los puntos indicados en cada caso:

   a. $m(x) = 3, \qquad x = -1, x = \pi.$

   b. $p(x) = \frac{1}{x}, \qquad x = -2, x = \frac{1}{2}.$

   c. $q(x) = \begin{cases} 2x+1 & -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 3, \end{cases} \qquad x = -1, x = 0, x = 2.$

   d. $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = |x+5| + |x-2|, \end{array} \qquad x = 0, x = 4, x = -5, x = t+2.$

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \mapsto f(x) = x^2$, determinar para cada una de las siguientes igualdades el conjunto de números reales para el cual es válida:

   $i)\ f(-x) = f(x), \qquad ii)\ f(-x) = -f(x), \qquad iii)\ f(2x) = 4f(x).$

4. (a) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$, hallar el dominio y simplificar la expresión de la ley de cada una de las funciones

$$g_i(h) = \frac{f_i(3+h) - f_i(3)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

$$i)\ f_1(x) = x^2, \qquad ii)\ f_2(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0).$$

   (b) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$ recién definidas, simplificar el valor de la expresión

$$\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

5. Representar gráficamente las siguientes funciones:

   -I- $f_1(x) = x + 3.$

   -II- $f_2(x) = |5 - 2x|.$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

6. Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

   I. $f_1(x) = |x-1|$. II. $f_2(x) = |x| + |x-1|$.

7. Determinar si las siguientes funciones son monótonas, indicando si lo son en forma estricta.

   I. $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0, \\ -x, & x > 0. \end{cases}$ II. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$

8. Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad.

   I. $f_1(x) = 4$. II. $f_2(x) = x^2 + x$. III. $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

9. a. Mostrar que, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico, la única función $f : A \to \mathbb{R}$ que es par e impar simultáneamente es la función nula.

   b. Siendo p_1, p_2 dos funciones pares e i_1, i_2 dos funciones impares definidas en A, determinar, de ser posible, la paridad en cada uno de los siguientes casos:

      I. $f_1 = p_1 + p_2$. III. $f_3 = i_1 + i_2$. V. $f_5 = p_1 i_1$.
      II. $f_2 = p_1 + i_1$. IV. $f_4 = p_1 p_2$. VI. $f_6 = i_1 i_2$.

   c. Sea f una función dada, con dominio simétrico.

      (I) Demostrar que la funciones p e i, que tienen el mismo dominio que f y están definidas por

      $$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \ , \quad \text{e} \quad i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

      son una función par y una función impar respectivamente.

      (II) Verificar que $f(x) = p(x) + i(x)$.

      (III) Mostrar que, si puede descomponerse a la función f como

      $$f(x) = p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x) \ ,$$

      con p_1, p_2 pares e i_1, i_2 impares, entonces, necesariamente,

      $$p_1 = p_2 \ , \quad \text{e} \quad i_1 = i_2 \ .$$

      Luego, una función f de dominio simétrico siempre puede escribirse como la suma de una función par con una impar, y esta representación es única.

   d. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 3$, hallar su descomposición como la suma de una función par p con una impar i y representar gráficamente las tres funciones f, p e i.

10. Dada la función $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x-1|$, se define la función $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ par y tal que para todo $x \in [0, 2]$ sea $g(x) = f(x)$.
    a) Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus dominios y recorridos.
    b) Encontrar la ley de la función g.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

11. En cada uno de los siguientes casos esbozar, de ser posible, la gráfica de una función que cumpla con las propiedades especificadas. En el caso de no ser posible, justifique el porqué.

    -a- f es una función creciente en $[-1,1]$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

    -b- r es una función impar y decreciente en $\mathbb{R}$.

    -c- s es una función periódica de período p y estrictamente creciente.

12. -a- A partir de la gráfica de la función valor absoluto representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

    $$i)\, f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ donde } f_1(x)=|x+1|, \qquad f_2\colon[-2,3]\to\mathbb{R} \text{ donde } f_2(x)=1-|x|.$$

    -b- A partir de la gráfica de la función f_2 representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

    I. $f_3(x)=f_2(x-1)$. II. $f_4(x)=|f_2(x)|$. III. $f_5(x)=f_2(-x)$.

    -c- Utilizando las gráficas de las funciones $\{f_i:\ i=1,...,5\}$ obtenidas en $a)$ y $b)$ indicar, para cada una:
    $i)$ Los conjuntos $A_i=\{x\in\mathbb{R}\colon f_i(x)=0\}$ y $B_i=\{x\in\mathbb{R}\colon 1<f_i(x)\le 5\}$.
    $ii)$ Los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x)=k$ admite exactamente dos soluciones reales.

13. A partir de la gráfica de la función parte entera, representar gráficamente las siguientes funciones:

    I. $f_1(x)=\frac{1}{2}[x]$. III. $f_3(x)=[x]+\frac{1}{2}$.
    II. $f_2(x)=\left[\frac{1}{2}x\right]$. IV. $f_4(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

14. ¿Qué propiedades tiene una función no constante, cuya representación gráfica, desplazada 3 unidades hacia la derecha no se modifica?

15. $a)$ A partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x)=x^2$ se pide representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera:

    I. $f_1(x)=|x^2+x-6|$. II. $f_2(x)=-x^2+4x-3$.

    $b)$ Utilizar las representaciones gráficas previas para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:

    I. $-x^2+4x-3\ge 0$. II. $\dfrac{x^2+x-6}{-x^2+4x-3}\ge 0$.

16. $a)$ Hallar los valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x)=-x^2+x+4\alpha$ no posee ceros reales.
    $b)$ Hallar los valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x)=x^2+3\alpha x+4$ interseca a la gráfica de la función $g(x)=x$ en dos puntos distintos.
    $c)$ Demostrar la siguiente proposición:

    $$x\in\mathbb{R}\Rightarrow 4x^2-x\ge-\frac{1}{16}.$$

17. Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $30m/seg$ por lo que la altura h que alcanza t segundos después está dada por la expresión

$$h = (30t - 4{,}9t^2)m.$$

Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, representando la gráfica de la altura h como función del tiempo t.

18. Entre todos los pares de números reales x e y tales que $x + y = 1$, hallar aquéllos para los cuales el producto $x.y$ es máximo.

19. Entre todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados tales que uno de sus vértices es el origen de coordenadas y el vértice opuesto está situado sobre el segmento que une los puntos (0,4) y (4,0), hallar el que posea mayor área.

20. Dadas las funciones:

$$f_1(x) = \frac{x-2}{x}, \qquad f_2(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

se pide:

a) Representarlas gráficamente a partir de la gráfica de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

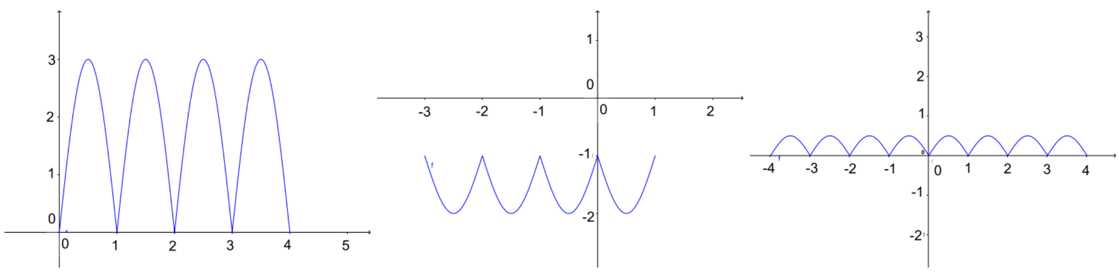
b) Determinar los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f_1(x) < 3\}\ , \qquad y \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \geq 1\}.$$

21. Sea $f(x) = |\operatorname{sen} \pi x|$ definida en el intervalo $[-2, 2]$. Se pide:

-a- Graficar f y analizar paridad e inyectividad.

-b- Dar la ley de las siguientes funciones como corrimientos de la función f:



(a) (b) (c)

22. Representar gráficamente las siguientes funciones.

$$h_1(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad h_2(x) = \cos|x - \pi|.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

23. Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio y su imagen.

I- $f_1(x) = \Big| -1 + |x| \Big|$.   II- $f_2(x) = (-1)^{[x]}$.

24. Hallar el dominio y la ley de cada una de las funciones compuestas $h = f \circ g$ y $r = g \circ f$ si:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2$.
b) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $g(x) = f^{-1}(x)$.
c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ $g(x) = f(x)$.

25. Dadas las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x^2 + 3 \text{ si } x \leq 0, \qquad f_2(x) = \frac{x-2}{x+2} \text{ si } x > -2, \qquad f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se pide:

-a- Demostrar que la función f_i es inyectiva.
-b- Simbolizando con g_i la inversa de la función f_i, describir su dominio.
-c- Hallar una expresión para obtener $g_i(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g_i.
-d- A partir de la gráfica de la función f_i, representar gráficamente la función g_i.

26. Determinar la ley, dominio y recorrido de las funciones cuyas gráficas se obtienen de la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ mediante:

-a- traslación vertical hacia abajo en 2 unidades más una traslación horizontal a la derecha en 3 unidades.
-b- reflexión con respecto al eje de las ordenadas.
-c- reflexión con respecto al eje de las abscisas.
-d- reflexión con respecto a la recta $y = 4$.
-e- reflexión con respecto a la recta $x = 2$.

27. *a*) Graficar las siguientes funciones por corrimientos.

I- $f_1(x) = 2^{x+2} + 1$.   III- $f_3(x) = 1 - 2^{-x}$.
II- $f_2(x) = \log_2(|x|)$.   IV- $f_4(x) = \left|1 - 2^{-x+1}\right| - 1$.

b) Determinar dominio, recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones obtenidas en a).

28. Representar gráficamente la siguiente función:

$$g_1(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ e^{-x+1} - 1 & \text{si } 1 < x. \end{cases}.$$

29. Hallar dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

$$f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad f_2(x) = \arctan\left|\frac{x-1}{3}\right|.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

30. Un granjero posee L metros de alambre para cercar un terreno de pastoreo rectangular, adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones deberá dar a dicho terreno para que posea el área máxima?

31. En una cartulina rectangular de dimensiones 10 por 24 cm se cortan cuadrados iguales de lado x en cada esquina, con el fin de doblarla y hacer una caja sin tapa.

   -a- Realizar un dibujo para explicar el procedimiento.

   -b- Expresar el volumen de la caja en función de x. ¿Cuál es el dominio de esta función?

   -c- ¿Para cuál valor de x la superficie lateral de la caja es máxima? Definir adecuadamente la función que se utiliza.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119