PRÁCTICA 7 - Vectores y Recta en el Plano

1. Determine $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$ y $|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$ si se sabe que $|\overrightarrow{u}|=3$, $|\overrightarrow{v}|=5$ y el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es igual a $\frac{\pi}{2}$.

2. Los puntos $A\,(1,3)$, $B\,(5,1)$ y $C\,(-2,0)$ son vértices de un paralelogramo $ABCD$. Hallar las coordenadas del vértice D.

3. Clasificar el triángulo determinado por los puntos $A\,(6,0)$, $B\,(3,0)$ y $C\,(6,3)$.

4. Sean $\overrightarrow{v}=(-1,1,2)$ y $\overrightarrow{w}=(3,0,-4)$. Hallar:

   a) $|\overrightarrow{v}|$, $|2\overrightarrow{v}|$, $|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}|$.
   b) Los versores asociados a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

5. Dados los puntos $A\,(3,-1,2)$, $B\,(3,0,0)$ y $C\,(0,-1,3)$, calcular:

   a) $\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{OA}$;
   b) $2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{OC}$;
   c) $\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{OA}\right)\overrightarrow{BA}$;
   d) $-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{OC}$.

6. Asumiendo que $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{v}|=2$ y el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es igual a $\frac{\pi}{6}$, calcular:

   a) $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u}$;
   b) $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$;
   c) $3\overrightarrow{u}\times 2\overrightarrow{v}$;
   d) $(3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\times(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.

7. Determinar analíticamente que condiciones deben verificar los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ para que se cumpla:

   a) $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$;
   b) $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|>|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$;
   c) $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|<|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|$.

8. Pruebe que cualesquiera sean los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, vale la desigualdad
$$|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\leq|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|.$$
   ¿Cuándo vale la igualdad?

9. Calcule $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}$ sabiendo que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$, $|\overrightarrow{u}|=3$, $|\overrightarrow{v}|=1$ y $|\overrightarrow{w}|=4$.

10. Pruebe el **Teorema del coseno:** *Si A, B y C son los vértices de un triángulo y α es el ángulo correspondiente al vértice A, entonces vale la siguiente igualdad*

$$\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{AB}\right|^2 - 2\left|\overline{AC}\right|\left|\overline{AB}\right|\cos\alpha.$$

11. Dados los puntos $A = (0, -1, -2)$, $B = (2, 0, 1)$ y $C = (1, -1, 0)$, hallar un vector $\overrightarrow{v}$ que cumpla la condición indicada en cada caso:

    a) $\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v} = 0.$
    b) $-2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{OC} = (1, 1, 1)$

12. Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \alpha\overrightarrow{j}$ sea ortogonal a:

    a) $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$;
    b) $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{k}$.

13. En cada uno de los siguientes casos, encontrar las componentes de un vector $\overrightarrow{u}$ que verifique las condiciones indicadas y analizar si el mismo es único o no.

    a) $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ y es un versor paralelo a $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$;
    b) $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ y sus cosenos directores son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
    c) $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{u} = a\,(0, -1, 0) + b\,(1, -1, 1)$, $a, b \in \mathbb{R}$;
    d) $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, es normal al vector $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -1)$ y su tercera componente es -3.

14. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, 3, -1)$, hallar:

    a) el vector $\overrightarrow{x}$ tal que $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) - 2\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w})\,\overrightarrow{x} - 3\overrightarrow{w}$;
    b) el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ y $(a, a, -1)$ son coplanares.

15. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, -3)$, calcular las componentes de los vectores $\text{proy}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{v}$.

16. Calcule el área del triángulo con vértices $A\,(5, 3, -1)$, $B\,(1, -2, 4)$ y $C\,(6, 4, -2)$.

17. Pruebe el **Teorema del seno:** *Si A, B y C son los vértices de un triángulo y α, β y γ son los ángulos correspondientes a los A, B y C respectivamente, entonces vale la siguiente igualdad*

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\left|\overline{BC}\right|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\left|\overline{AC}\right|}{\operatorname{sen}\beta}.$$

18. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

    a) $|\overrightarrow{u}|\,\overrightarrow{v} + |\overrightarrow{v}|\,\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $|\overrightarrow{u}|\,\overrightarrow{v} - |\overrightarrow{v}|\,\overrightarrow{u}$;
    b) Si $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$ y $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
    c) $|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|^2 + (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})^2 = |\overrightarrow{u}|^2\,|\overrightarrow{v}|^2$.

19. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, 3, -1)$, derterminar si existen números reales a, b tales que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. ¿Qué pasa si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$, $\overrightarrow{v} = (-5, 1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (4, 2, 1)$?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

20. Dados $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ verifique que

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

21. Verifique que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

22. Pruebe que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son coplanares si y solo si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = 0$.

23. El volumen del tetraedro, tres de cuyos vértices son $A = (2, 1, -1)$, $B = (3, 0, 1)$ y $C = (2, 1, 5)$ es 5 unidades. Determine las coordenadas del cuarto vértice D, sabiendo que pertenece al eje y. ¿Existe solución única?

24. Considere la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   a) Determinar si alguno de los puntos $P(1, 5)$ y $Q(3, -2)$ pertenece a r.
   b) ¿Para qué valor del parámetro t se obtiene el punto $R(-2, 17)$?
   c) Determinar para qué valores del parámetro t se obtienen los puntos de intersección de la recta con cada uno de los ejes coordenados.
   d) Calcular el área del triángulo que forma la recta con los ejes coordenados.
   e) Escribir otras ecuaciones paramétricas de la misma recta.
   f) Determinar la ecuación general de la recta.

25. Sea r la recta de ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

   a) Determinar si los puntos $P_1\,(2, 0)$, $P_2\,(-1, 7)$, $P_3\,(2, 2)$, $P_4\,(-4, -9)$, $P_5\left(3, \frac{3}{2}\right)$, $P_6\,(0, -4)$ pertenecen a r.
   b) Sabiendo que $Q_i \in r$, determinar la coordenada que falta: $Q_1\,(4, y_1)$, $Q_2\,(0, y_2)$, $Q_3\,(x_3, 5)$, $Q_4\left(x_4, \sqrt{2}\right)$.

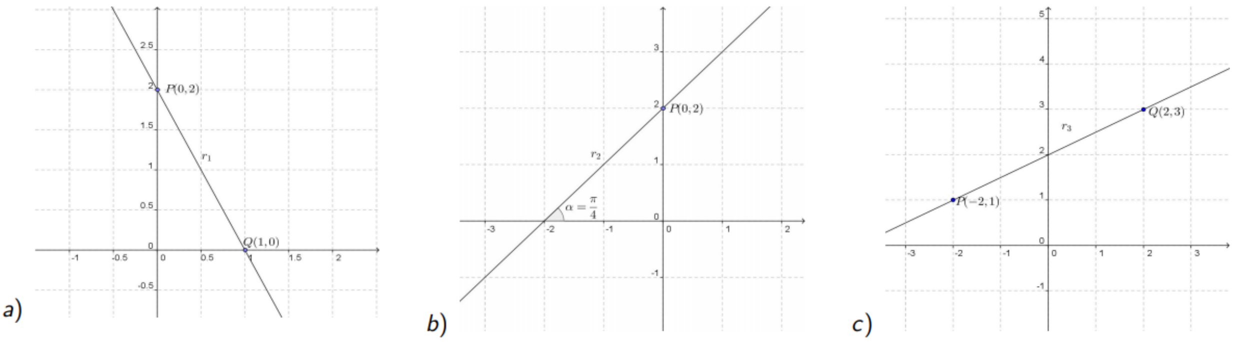
26. Encontrar las ecuaciones paramétrica y general de las siguientes rectas y representarlas gráficamente.

   a) La recta r_1 pasa por el punto $P\,(-1, 2)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = (1, -2)$.
   b) La recta r_2 pasa por los puntos $P\,(-1, -1)$ y $Q\,(1, 2)$.
   c) La recta r_3 es paralela a r_1 y pasa por el punto $R\,(1, 1)$.
   d) La recta r_4 es perpendicular a r_1 y pasa por el punto $R\,(1, 1)$.
   e) La recta r_5 es paralela al eje x y pasa por el punto $T\,(1, 2)$.
   f) La recta r_6 es perpendicular al eje x y pasa por el punto $T\,(1, 2)$.

27. Encontrar las ecuaciones segmentaria, normal y explícita de cada una de las rectas r_1, r_2 y r_3 del ejercicio 26. Determinar además en cada caso a partir de las ecuaciones obtenidas:

   a) un versor normal a la recta;
   b) los puntos de intersección de la recta con cada uno de los ejes;
   c) la pendiente de cada recta.

28. Determinar las ecuaciones de las rectas r_1, r_2 y r_3 cuyas gráficas se muestran a continuación. En cada caso usar el tipo de ecuación más adecuado.



29. Dados los puntos $A\,(3,-2)$ y $B\,(8,4)$, determinar la ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa de un triángulo ABC isósceles y rectángulo en A.

30. Determinar el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

    a) $r_1)\ 3x - y + 2 = 0, \qquad r_2)\ 2x + y - 2 = 0.$
    b) $r_1)\ x + 2y + 1 = 0, \qquad r_2)\ 2x - y - 2 = 0.$

31. Sean r_1 y r_2 rectas de ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ respectivamente. Demostrar que r_1 y r_2 son perpendiculares si y solo si $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

32. Demostrar que la ecuación de la recta que contiene a los puntos $P\,(x_0, y_0)$ y $Q\,(x_1, y_1)$, $x_0 \neq x_1$, es

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x_1 - x_0)\,.$$

    Utilizar esta ecuación para determinar la ecuación explícita de las siguientes rectas:

    a) r_1 es la recta que pasa por $P\,(1,2)$ y por $Q\,(3,5)$.
    b) r_2 es la recta que corta al eje y en el punto de ordenada $y = 5$ y pasa por $Q\,(1,2)$.
    c) r_3 es la recta de pendiente $m = 2$ y pasa por $P\,(1,2)$.

33. Sean $r_1)\ y = m_1x + h_1$, $r_2)\ y = m_2x + h_2$ dos rectas dadas en sus ecuaciones explícitas.

    a) Probar que $\cos\left(\widehat{r_1, r_2}\right) = \frac{1+m_1m_2}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$.
    b) Probar que r_1 y r_2 son perpendiculares si solo si $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.
    c) Determinar el valor de α para que las rectas

$$r_1)\ y = \frac{\alpha}{1-\alpha}x + 2\frac{\alpha+2}{\alpha-1} \qquad\qquad r_2)\ y = \frac{3\alpha}{3\alpha+1}x + 1$$

    sean perpendiculares.

34. Determinar la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 dadas en cada caso. Si son concurrentes, determinar el punto de intersección de las mismas.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

a) $r_1)\ -3x - y + 17 = 0,$ $\quad r_2)\ x - 3y - 2 = 0;$

b) $r_1)\ x + 2y = 0,$ $\quad r_2)\ 2x - 4y + 3 = 0;$

c) $r_1) \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$ $\quad r_2) \begin{cases} x = 7 - \frac{15}{2}s \\ y = 1 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R};$

d) $r_1)\ 3x + 4y - 1 = 0,$ $\quad r_2)\ -4x + 3y + 5 = 0;$

e) $r_1)\ y + \sqrt{2} = 0,$ $\quad r_2)\ 3y - 1 = 0;$

f) $r_1) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$ $\quad r_2) \begin{cases} x = 4 - 6s \\ y = -3 - 15s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

35. Dadas las rectas

$$r_1)\ x - 2y - 2 = 0 \qquad r_2)\ 3x - 2y + 6 = 0 \qquad r_3)\ x + y - 1 = 0$$

a) Hallar las coordenadas de los vértices A_1, A_2, A_3 del triángulo que ellas determinan.

b) Determinar las longitudes de los lados del triángulo.

c) Determinar los ángulos internos del triángulo.

36. Determinar la ecuación de una recta que contenga a la intersección de $r_1)\ 2x - y + 2 = 0$ y $r_2)\ x - y + 1 = 0$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{3}{2}$.

37. Determinar la distancia del punto $P\,(1, 2)$ a cada una de las siguientes rectas:

a) $r_1)\ 2x + \sqrt{5}y - 2\sqrt{5} = 0;$

b) $r_2) \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R};$

c) $r_3)\ 3x - 4y + 5 = 0.$

38. Mostrar que lo siguientes pares de rectas son paralelas y determinar la distancia entre ellas.

a) $r_1)\ 12x - 5y - 39 = 0,$ $\quad r_2)\ -12x + 5y - 13 = 0;$

b) $r_1) \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$ $\quad r_2) \begin{cases} x = 1 + 5s \\ y = -2 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$

39. Dadas las rectas $r_1)\ 4x + 3y + 9 = 0$ y $r_2)\ x - 3y + 1 = 0$, determinar un punto $P \in r_2$ tal que:

a) $d\,(P, r_1) = 4;$

b) $\overline{OP} \cap r_1 = \emptyset$, siendo O el origen de coordenadas.

40. El punto $G\,(-1, 0)$ es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados pertenece a la recta $r_1)\ x + 3y - 5 = 0$. Determinar las ecuaciones de las rectas a las cuales pertenecen los otros tres lados.

41. Los puntos $A\,(2, 3)$ y $B\,(6, 4)$ son vértices de un rectángulo. Hallar las coordenadas de los otros vértices, sabiendo que una de las diagonales está contenida en la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 5t \end{cases},$ $t \in \mathbb{R}$.