Números Complejos

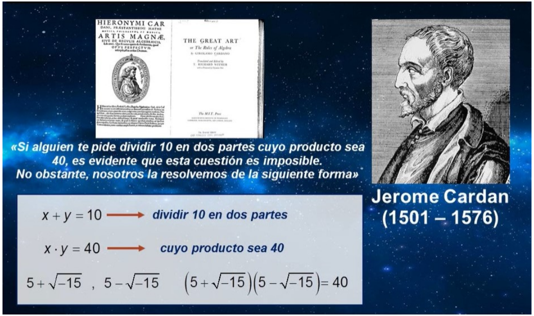
Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

5 de abril de 2021

Motivación: ¿qué sentido tiene la raíz cuadrada de un número negativo?

En la obra *Stereometría* de Herón de Alejandría (Grecia, aprox. 10-75) alrededor de la mitad del siglo I, encontramos la primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo. En este trabajo aparece la operación $\sqrt{81-144}$ aunque es tomada como $\sqrt{144-81}$, no sabemos con seguridad si por error del propio Herón o del personal encargado de transcribirlo.



Los números complejos como pares ordenados

Un *número complejo* es un par ordenado $z = (a; b)$ de números reales. Los números a y b son las componentes del complejo z y se denominan *parte real* y *parte imaginaria* de z, respectivamente. En símbolos: $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$.

Observación: que el par sea *ordenado* significa que $(a; b) \neq (b; a)$. Por ejemplo, $(-1; 2) \neq (2; -1)$ como podemos apreciar en el siguiente gráfico:

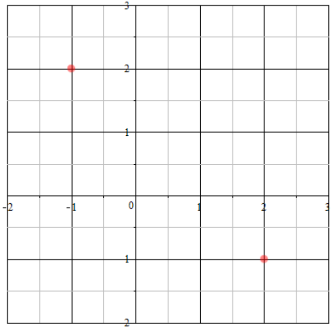


Figura: 1

Igualdad de números complejos. Operaciones: suma y producto

Dados dos números complejos $z = (a; b)$ y $w = (c; d)$ decimos que $z = w$ si y solo si:

$$\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Definimos además la suma y el producto de números complejos de la siguiente manera:

<u>Suma</u>: $z + w = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$
<u>Producto</u>: $z.w = (a; b)(c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

Veamos un ejemplo: Dados $z = (1; 3)$ y $w = (-2; -1)$, hallar $z + w$ y $z.w$. Entonces:

$$\begin{aligned} z + w &= (1; 3) + (-2; -1) = (1 + (-2); 3 + (-1)) = (-1; 2) \\ z.w &= (1; 3)(-2; -1) = (1(-2) - 3(-1); 1(-1) + 3(-2)) = (1; -7) \end{aligned}$$

El conjunto de los números complejos con las operaciones antes definidas se denota por $\mathbb{C}$.

Teorema (1)

Sean z, u, w números complejos cualesquiera. Entonces valen:

- **Ley conmutativa de la suma y del producto**: $z + w = w + z$, $zw = wz$.
- **Ley asociativa de la suma y del producto**: $z + (u + w) = (z + u) + w$, $z(uw) = (zu)w$.
- **Ley distributiva del producto respecto de la suma**: $z(u + w) = zu + zw$.
- **Existencia de elemento neutro para la suma y elemento identidad para el producto**: *Existen* $(0; 0) \in \mathbb{C}$ *y* $(1; 0) \in \mathbb{C}$ *tales que* $(0; 0) + z = z$ *y* $(1; 0)z = z$.
- **Existencia de elemento opuesto**: *Si* $z = (a; b)$, *existe* $-z = (-a; -b) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + (-z) = (0; 0)$.
- **Existencia de elemento inverso**: *Si* $z = (a; b) \neq 0$, *existe* $z^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2})$ *tal que* $zz^{-1} = (1; 0)$.

Demostración del Teorema (1).

Demostraremos solo la primera propiedad y el resto de ellas, quedan como ejercicio.

- **Ley conmutativa de la suma**: Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$. Entonces:

$$\begin{aligned} z + w &= (a, b) + (c, d) \\ &\underset{\text{por def de suma en } \mathbb{C}}{=} (a + c, b + d) \\ &\underset{\text{por conm de la suma en } \mathbb{R}}{=} (c + a, d + b) \\ &\underset{\text{por def de suma en } \mathbb{C}}{=} (c, d) + (a, b) \\ &= w + z \end{aligned}$$

$\square$

Operaciones: resta y cociente

A partir de este teorema, podemos definir la resta y el cociente de números complejos.
Sean z, $w \in \mathbb{C}$, si $-w$ es el opuesto de w se define

$$z - w = z + (-w).$$

Si $w \neq (0;0)$ y w^{-1} es el inverso de w, se define

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

$\mathbb{C}$ como extensión de $\mathbb{R}$

Sea $\mathbb{C}_0$ el subconjunto de $\mathbb{C}$ constituido por los números complejos de la forma $(a;0)$ con $a \in \mathbb{R}$, esto es, los que tienen parte imaginaria nula. Entonces las operaciones de suma y producto son cerradas en $\mathbb{C}_0$, es decir, la suma y el producto de dos elementos de $\mathbb{C}_0$ es nuevamente un elemento de $\mathbb{C}_0$. En efecto,

$$(a;0) + (c;0) = (a+c;0)$$
$$(a;0)(c;0) = (ac;0)$$

De la misma manera, la resta y la división también son cerradas en $\mathbb{C}_0$ (ejercicio), siendo $-(a;0) = (-a;0)$ y, si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $(a;0)^{-1} = (a^{-1};0)$.

De esta manera, los números de $\mathbb{C}_0$ se comportan *como si fueran números reales*. Por este motivo, no haremos diferencia entre el número real x y el complejo $(x;0)$. Así diremos que $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ vía la identificación

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow (x;0) \in \mathbb{C}$$

De esta manera, $0 \longleftrightarrow (0;0)$, $1 \longleftrightarrow (1;0)$, $-1 \longleftrightarrow (-1;0)$, etc.

La unidad imaginaria

Así como hemos identificado cada número complejo de la forma $(x;0)$ con el número real x, denotándolo directamente por x, definiremos un número complejo particular de gran importancia: la unidad imaginaria definida por $i = (0;1)$. Observemos que i es solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ que no tiene solución en el cuerpo de los números reales. En efecto:

$$i^2 = i.i = (0;1)(0;1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1;0) = -1$$

con las identificaciones anteriores. Observemos además que

$$(a;b) = (a;0) + (0;b) = (a;0) + (b;0)(0;1) = a + bi.$$

Identificando $(a;0)$ con a, $(b;0)$ con b y $(0;1)$ con i, hemos probado el siguiente:

Forma binómica de los números complejos

Teorema (2)

Todo número complejo $(a; b)$ *puede expresarse en la forma binómica* $a + bi$ *con* a, $b \in \mathbb{R}$.

La ventaja de esta notación es que facilita los cálculos algebraicos. En efecto, aplicando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, resulta:

$$\begin{aligned} (a; b)(c; d) &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd; ad + bc) \end{aligned}$$

como habíamos definido inicialmente.

Observemos que con la introducción de los números complejos podemos resolver cualquier ecuación cuadrática. Comencemos considerando las ecuaciones del tipo $x^2 + a^2 = 0$. Entonces resulta claro que $z = ia$ es solución de la ecuación ya que $z^2 = a^2 i^2 = -a^2$.

Raíz cuadrada de un número real negativo

De esta manera podemos definir la raíz cuadrada de un número real negativo. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es la raíz cuadrada de $w \in \mathbb{C}$ si $z^2 = w$. Resulta entonces que dado $a \in \mathbb{R}$ con $a < 0$, se tiene

$$z^2 = a \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{|a|}i$$

Así, por ejemplo, las raíces cuadradas de -4 son $2i$ y $-2i$, y las raíces cuadradas de -9 son $3i$ y $-3i$.

Utilizando la resolvente, tenemos que las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es un número real negativo, tenemos dos soluciones complejas.

Ejemplo

Hallar las soluciones de la ecuación $-2x + x^2 + 5 = 0$.

Solución: Reconociendo que $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$, planteamos

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{(-16)}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{|-16|}i}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{16}i}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i
\end{aligned}
$$

Así, encontramos que las soluciones de la ecuación dada son $x_1 = 1 + 2i$ y $x_2 = 1 - 2i$.

Conjugado de un número complejo

Introduciremos ahora la noción de complejo conjugado. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se denomina conjugado de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$.

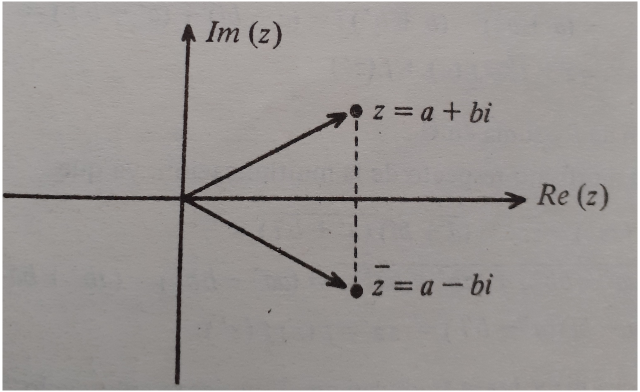


Figura: 2

Tenemos el siguiente:

Teorema (3)

Sean z, $w \in \mathbb{C}$, entonces vale que:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
- $\overline{z} = z$ *si y solo si* $z \in \mathbb{R}$
- $z.\overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$.

Demostración.

Demostraremos la segunda propiedad y el resto de ellas quedan como ejercicio.

- Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Entonces, por un lado, tenemos que

$$\overline{z.w} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i. \quad (1)$$

Continuación de la prueba del ítem 2, Teorema (3).

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{z}.\overline{w} &= \overline{(a+bi)}.\overline{(c+di)} = (a-bi).(c-di) = \\ &= (ac-bd)+(-ad-bc)i = (ac-bd)-(ad+bc)i. \end{aligned} \tag{2}$$

Claramente, (1) coincide con (2). $\square$

La cuarta propiedad enunciada en este teorema ($z.\overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$) es de gran importancia a la hora de calcular el recíproco de un número complejo. En efecto, sea $z = a + bi \neq 0$, entonces vale que:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

que es la expresión que ya conocíamos para el inverso de z.

De la misma manera procedemos para calcular el cociente entre dos números complejos, esto es, multiplicamos y dividimos por el conjugado del divisor.

Ejemplo

Si $z = 2 + i$ y $w = 3 - 4i$, entonces $\overline{w} = 3 + 4i$ y así:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} \\
&= \frac{(2+i)}{(3-4i)} \cdot \frac{(3+4i)}{(3+4i)} \\
&= \frac{2+11i}{3^2+(-4)^2} \\
&= \frac{2}{25} + \frac{11}{25} i
\end{aligned}$$

Potencia entera de un número complejo

Primero, para todo $z \in \mathbb{C}$, definimos $z^0 = 1$, $z^1 = z$ y si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ utilizamos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$z^n = z^{n-1} \cdot z.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, entonces para todo $z \neq 0$, definimos $z^k = (z^{-1})^{-k}$.

La potencia entera de complejos así definida goza de las siguientes propiedades (análogas a las de los números reales).

Teorema (4)

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- *1.* $z^k z^n = z^{k+n}$
- *2.* $(z^k)^n = z^{kn}$
- *3.* $(zw)^n = z^n w^n$
- *4. Si* $w \neq 0$, $(\frac{z}{w})^n = \frac{z^n}{w^n}$

La demostración queda como ejercicio.

Forma polar y trigonométrica de un número complejo.

Dado que todo número complejo es un par ordenado $(a; b)$ de números reales, existe una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano, que recibe entonces el nombre de plano complejo.

Dado $z = (a; b)$, a z le asociamos el punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(a; b)$ y el vector $\overrightarrow{OP}$, donde $O = (0; 0)$ es el origen de coordenadas.

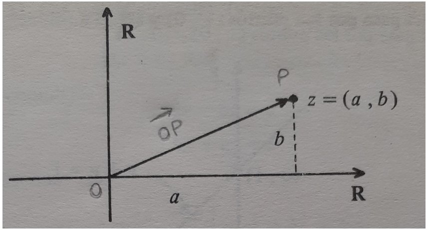


Figura: 3

Cuando trabajamos con números complejos denominamos como eje real al eje de las abscisas, dado que aquí yacen los puntos que representan a números reales, y por eje imaginario al eje de las ordenadas, dado que aquí están los puntos que representan a números imaginarios puros, es decir, números complejos con parte real nula. En la gráfica siguiente se muestran los puntos P del plano, correspondientes a los complejos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = -3 - 2i$ y $z_4 = 3 - 2i$.

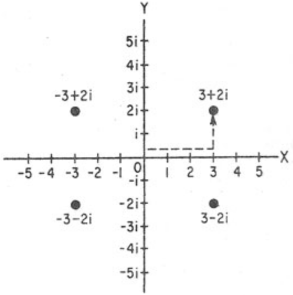


Figura: 4

Dado un complejo $z = a + bi$ se denomina módulo de z, y se denota $|z|$ a la longitud del segmento OP, donde P es el punto del plano asociado a z. Si $z \neq 0$ entonces se denomina argumento de z al ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el eje positivo de las abscisas.

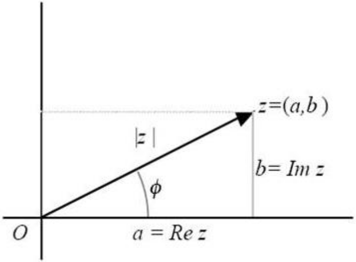


Figura: 5

El número complejo $z = 0$ no tiene argumento. Un número complejo no nulo tiene infinitos argumentos, dependiendo de cuántas "vueltas" demos alrededor del origen para medir el ángulo.

En cualquier caso, si ϕ y θ son dos argumentos del mismo complejo z debe valer

$$\phi = \theta + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Existe un único argumento ϕ de z que verifica $0 \leq \phi < 2\pi$ y se denomina argumento principal. Denotamos por $arg(z)$ al argumento principal de z.

Ejemplo

Si $z = 2 + 2i$ entonces $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{9\pi}{4}$ y $\gamma = \frac{17\pi}{4}$ son argumentos de z, pero ϕ es el argumento principal.

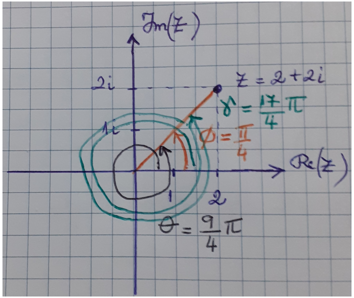


Figura: 6

Observando la siguiente figura (y teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas) tenemos que:

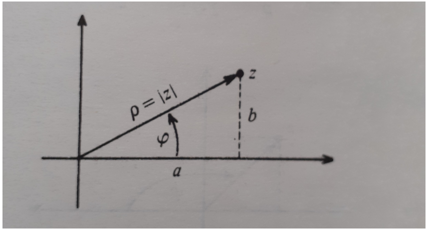


Figura: 7

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = z \cdot \overline{z} \tag{3}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}, \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{b}{|z|} \text{ y } \tan(\varphi) = \frac{b}{a} \tag{4}$$

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases} \tag{5}$$

donde $\rho = |z|$ y por lo tanto

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \tag{6}$$

Esta última expresión de z se denomina forma trigonométrica de z. Utilizando la forma trigonométrica, es fácil probar el siguiente:

Teorema (5)

Sean z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. $|z.w| = |z| \, . \, |w|$;
2. $arg(z) + arg(w)$ *es un argumento de* $z.w$.

Demostración del Teorema (5).

Sean $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ y $w = |w|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ dos complejos dados en su forma trigonométrica (donde $\varphi = arg(z)$ y $\theta = arg(w)$, respectivamente). Calculemos:

$$
\begin{aligned}
z.w &= |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \,.\, |w|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\
&= |z|\,|w|\left((\cos\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta) + i(\cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)\right) \\
&= |z|\,|w|\left(\cos(\varphi+\theta)\right) + i \operatorname{sen}(\varphi+\theta))
\end{aligned}
$$

(en esta prueba hemos usado las conocidas fórmulas para el coseno y el seno del ángulo suma). Ahora, está claro que $|z.w| = |z| \,.\, |w|$ y que $\varphi + \theta = arg(z) + arg(w)$ es un argumento para $z.w$. □

Observando (6), vemos que para definir z solamente necesitamos conocer su módulo $|z| = \rho$ y uno de sus argumentos φ. Resumimos esa información escribiendo

$$z = \rho_\varphi \tag{7}$$

Esta última forma de expresar al número complejo z se denomina forma polar de z.

Ahora, si $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$ entonces

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \rho &= \delta \\ \varphi &= \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{8}$$

Si z está dado en su forma binómica, obtenemos la forma polar calculando su módulo y su argumento por las fórmulas (3) y (4). Si z está dado en forma polar, podemos obtener la forma binómica a partir de la forma trigonométrica (6). La forma polar nos da una manera muy sencilla de realizar productos, cocientes, y calcular potencias n-ésimas de números complejos. De hecho, tenemos el siguiente teorema cuya demostración se deja como ejercicio:

Teorema (6)

Sean $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$ dos complejos dados en forma polar. Entonces:

1. $zw = (\rho\delta)_{\varphi+\theta}$
2. *Si* $w \neq 0$, $\left(\frac{z}{w}\right) = \left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{\varphi-\theta}$
3. $z^n = (\rho^n)_{n\varphi}$

Raíces n-ésimas de un número complejo

Dado un número complejo z, decimos que w es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$. El ítem 3 del Teorema (6) nos permitirá calcular de manera fácil raíces n-ésimas. Comencemos analizando un ejemplo. Supongamos que tenemos $z = 16_{\frac{\pi}{4}}$ y queremos calcular las raíces cuartas de z. Si $w = \rho_\phi$ es una de esas raíces, debe ser $w^4 = (\rho^4)_{4\phi} = z$. De la igualdad de complejos dados en forma polar (8), obtenemos

$$\rho^4 = 16 \Rightarrow \rho = 2$$

y

$$4\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \phi = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Si bien en la última expresión k varía en todo $\mathbb{Z}$, solo para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ obtenemos complejos distintos. De hecho tomando $k = 4$, obtenemos el argumento $\frac{33\pi}{16} = \frac{\pi}{16} + 2\pi$ que es congruente al argumento obtenido para $k = 0$. Luego las cuatro raíces cuartas de z son $w_0 = 2_{\frac{\pi}{16}}$, $w_1 = 2_{\frac{9\pi}{16}}$, $w_2 = 2_{\frac{17\pi}{16}}$ y $w_3 = 2_{\frac{25\pi}{16}}$.

Si graficamos las cuatro raíces cuartas obtenidas, podemos apreciar que son los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia de radio 2.

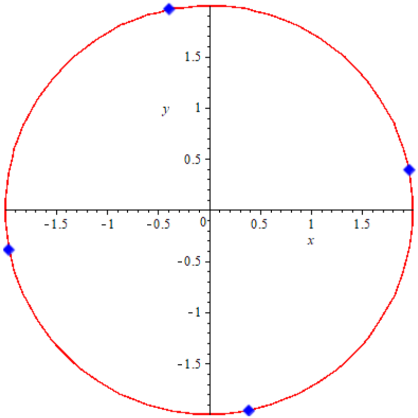


Figura: 8

Siguiendo exactamente el mismo razonamiento es posible probar el siguiente teorema, denominado fórmula de De Moivre:

Teorema (7)

Sea $z = \rho_\phi$ un número complejo en forma polar. Entonces si $w = \delta_\theta$ es una raíz n-ésima de z resulta

$$\delta = \sqrt[n]{\rho} \text{ y } \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \text{ con } k = 0, 1, ..., n-1.$$

Demostración.

La demostración formal requiere el uso del método de inducción matemática que será abordado hacia el final de este curso, razón por la cual, admitimos el resultado y dejamos su verificación como ejercicio a futuro. $\square$

Si se grafican las n raíces n-ésimas w_0, w_1,..., w_{n-2}, w_{n-1}, puede verse que son los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en una circunferencia de radio $R = \sqrt[n]{\rho}$.

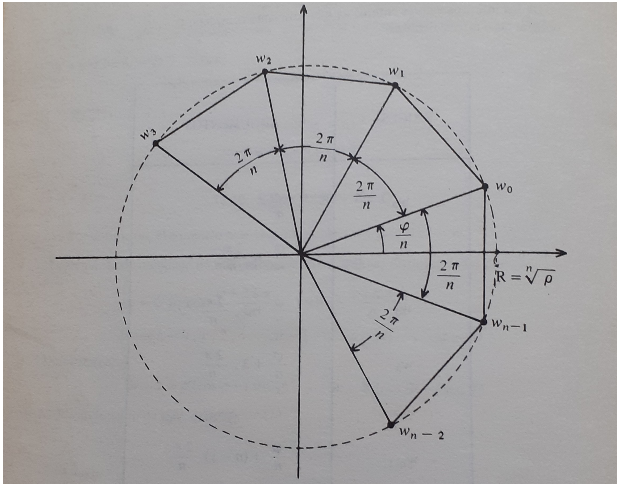


Figura: 9

Ejemplo

Calculemos las soluciones de la ecuación $z^3 + 1 = 0$. Como $z^3 = -1$, debemos encontrar las raíces cúbicas de -1, esto es, $z = \sqrt[3]{-1}$. (Verificar que -1, escrito en forma polar, es 1_π).

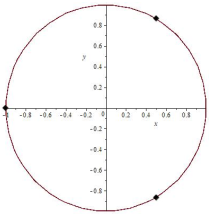
$$\sqrt[3]{-1} = \left\{ \sqrt[3]{1}_{\frac{\pi + 2k\pi}{3}} : k = 0, 1, 2 \right\} = \left\{ 1_{\frac{(2k+1)}{3}\pi} : k = 0, 1, 2 \right\}$$

$k = 0 \to 1_{\frac{\pi}{3}}$, $k = 1 \to 1_\pi$, $k = 2 \to 1_{\frac{5\pi}{3}}$

Entonces hallamos que las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
w_1 &= \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1 \\
w_2 &= \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Si graficamos las soluciones obtenidas, apreciamos que yacen en un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio 1.



También a partir de la obtención de raíces de números complejos, podemos resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos. En efecto, puede verse (con la misma demostración que para los coeficientes reales) que las raíces de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$, con a, b y $c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$, son

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observemos que aquí no ponemos el símbolo $\pm$ pues todo complejo tiene exactamente dos raíces cuadradas.