

Relaciones

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

21 de mayo de 2021

Producto cartesiano de dos conjuntos no vacíos

Recordemos que dados dos conjuntos A y B , un par ordenado es un objeto de la forma (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. El elemento a es la primera componente de (a, b) y b es la segunda componente de (a, b) .

Observar que si (a, b) y (c, d) son pares ordenados, entonces $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B , llamaremos producto cartesiano de A y B y lo indicaremos con $A \times B$ al conjunto formado por los pares ordenados (a, b) tales que a es un elemento del conjunto A y b es un elemento del conjunto B .

Con las notaciones usuales de la teoría de conjuntos esto se escribe como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo: $A = \{1, 2\}$ $B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

$$B \times A = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1), (x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$$

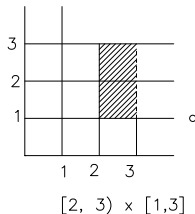
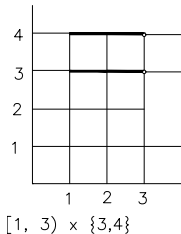
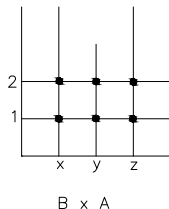
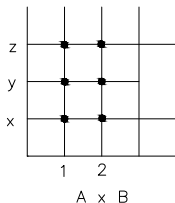
- ▶ Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ entonces $A \times B = \emptyset$.
- ▶ En general, $A \times B \neq B \times A$.
- ▶ Si A y B finitos, $|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$.
- ▶ Si $A = \mathbb{R} = B$, $A \times B = \mathbb{R}^2$.
- ▶ $A \times B$ representado por pares ordenados, y/o con graficos cartesianos.

Ejemplo de Producto Cartesiano

$$A = \{1, 2\} \text{ y } B = \{x, y, z\}$$

$$C = [1, 3) \text{ y } D = \{3, 4\} \quad A \times C = \{(x, 3), (x, 4) \mid 1 \leq x < 3\}$$

$$E = [2, 3) \text{ y } F[1, 3]$$



Teorema (1)

Dados A , B y C conjuntos , se tiene:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración.

1. $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ si y solo si $x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ si y solo si $[x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C]$ si y solo si $[x \in A \wedge y \in B] \wedge [x \in A \wedge y \in C]$ si y solo si $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in (A \times C)$ si y solo si $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración del Teorema (cont.)

4. $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ si y solo si $x \in (A \cup B) \wedge y \in C$ si y solo si
 $[x \in A \vee x \in B] \wedge y \in C$ si y solo si $[x \in A \wedge y \in C] \vee [x \in B \wedge y \in C]$ si y solo si
 $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C).$

Queda como ejercicio la prueba de 2 y 3



Relación binaria entre dos conjuntos

Definición

Dados dos conjuntos A y B , llamaremos relación de A en B a un subconjunto del producto cartesiano de A y B y lo indicaremos con \mathcal{R} .

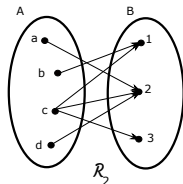
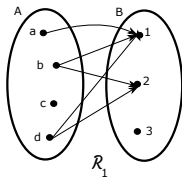
Dada \mathcal{R} una relación de A en B , $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, y

si $(a, b) \in \mathcal{R}$ se escribe $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \notin \mathcal{R}$ se escribe $a\not\mathcal{R}b$.

$A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ consideremos las relaciones de A en B :

$\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (d, 1), (d, 2)\}$ y

$\mathcal{R}_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 2)\}$



Cuando $A = B$, se dice que \mathcal{R} es una *relación en A* .

Dominio, Conjunto imagen de una relación \mathcal{R}

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de A en B ,

- el DOMINIO de \mathcal{R} es el conjunto

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathcal{R} \text{ , para algun } b \in B\}$$

- CONJUNTO IMAGEN de \mathcal{R} al conjunto

$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R} \text{ , para algun } a \in A\}$$

.

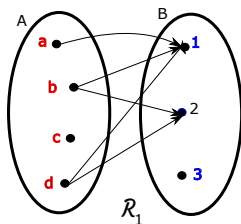
Observamos que $Dom(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}$ y $Im(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}$.

Ejemplo de Dominio y Conjunto imagen de una relación

$A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ consideremos las relaciones de A en B :

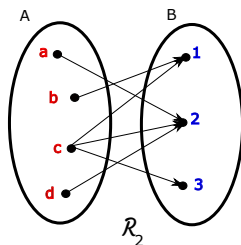
$\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (d, 1), (d, 2)\}$ y

$\mathcal{R}_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 2)\}$



$$\text{Dom}(\mathcal{R}_1) = \{a, b, d\}$$

$$\text{Im}(\mathcal{R}_1) = \{1, 2\}$$



$$\text{Dom}(\mathcal{R}_2) = \{a, b, c, d\}$$

$$\text{Im}(\mathcal{R}_2) = \{1, 2, 3\}$$

Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un elemento por una relación \mathcal{R}

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de A en B , $a \in A$ y $b \in B$

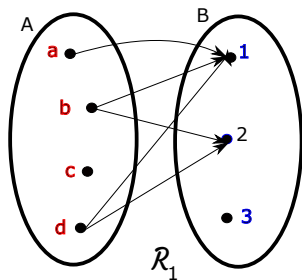
- el Conjunto imagen de a por \mathcal{R} es el conjunto

$$\mathcal{R}(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

- el conjunto pre-imagen de b por \mathcal{R} es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(b) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

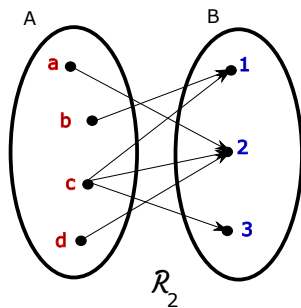
Ejemplo de Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un elemento



$$\mathcal{R}_1(\mathbf{b}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{R}_1^{-1}(\mathbf{1}) = \{a, b, d\}$$

$$\mathcal{R}_1^{-1}(\mathbf{3}) = \{ \}$$



$$\mathcal{R}_2(\mathbf{b}) = \{1\}$$

$$\mathcal{R}_2^{-1}(\mathbf{1}) = \{b, c\}$$

$$\mathcal{R}_2^{-1}(\mathbf{2}) = \{a, c, d\}$$

Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un subconjunto por una relación \mathcal{R}

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de A en B , $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$.

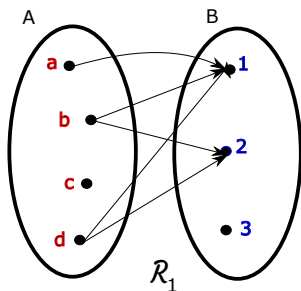
- el Conjunto imagen de X por \mathcal{R} es el conjunto

$$\mathcal{R}(X) = \{b \in B \mid (x, b) \in \mathcal{R} \text{ , para algun } x \in X\}$$

- el conjunto pre-imagen de Y por \mathcal{R} es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(Y) = \{a \in A \mid (a, y) \in \mathcal{R} \text{ , para algun } y \in Y \}$$

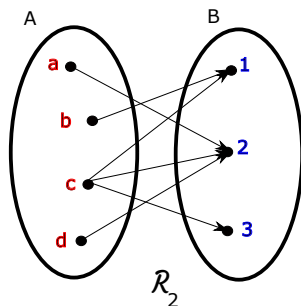
Ejemplo de Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un subconjunto



$$\mathcal{R}_1(\{a, b\}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{R}_1^{-1}(\{1, 3\}) = \{a, b, d\}$$

$$\mathcal{R}_1^{-1}(\{2, 3\}) = \{b, d\}$$



$$\mathcal{R}_2(\{b, d\}) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{R}_2^{-1}(\{1, 3\}) = \{b, c\}$$

$$\mathcal{R}_2^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, b, c, d\}$$

Ejemplos.. Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un conjunto

$A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 20\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 26\}$ \mathcal{R} y \mathcal{R}_1 relaciones de A en B .

► $x\mathcal{R}_1 y \iff y = x^2.$

$$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}.$$

$$\text{Dom}(\mathcal{R}_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \text{Im}(\mathcal{R}_1) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}.$$

$$\mathcal{R}_1(\{3, 6, 9\}) = \{9\} \qquad \mathcal{R}_1^{-1}(\{y \in B \mid y \text{ es par}\}) = \{0, 2, 4\}.$$

► $x\mathcal{R} y \iff 3.x = y.$

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x \in A \mid 0 \leq x \leq 8\} \qquad \text{Im}(\mathcal{R}) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}.$$

$$\mathcal{R}(\{3, 6, 9\}) = \{9, 18\} \qquad \mathcal{R}^{-1}(\{y \in B \mid y \text{ es par}\}) = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

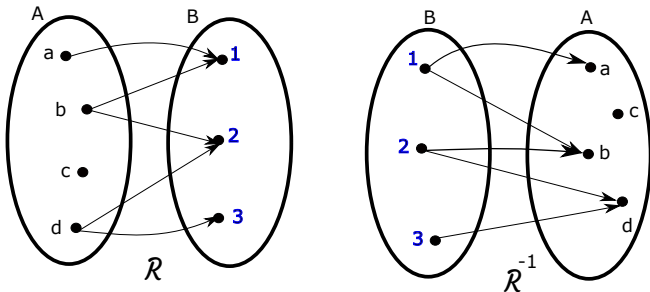
Relación inversa de una relación \mathcal{R}

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de A en B , definimos la relación INVERSA de \mathcal{R} como la relación de B en A , notada \mathcal{R}^{-1} dada por :

$$y \mathcal{R}^{-1} x \quad \text{si y solo si} \quad x \mathcal{R} y$$

es decir $\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$.



Relación inversa de una relación \mathcal{R}

Dada \mathcal{R} , una relación de A en B ,

- ▶ \mathcal{R}^{-1} es la relación INVERSA de \mathcal{R}
- ▶ $\mathcal{R}^{-1}(b)$ es la pre-imagen de $b \in B$ a través de la relación \mathcal{R} .
- ▶ $\mathcal{R}^{-1}(Y)$ es la pre-imagen del subconjunto $Y \subseteq B$ a través de la relación \mathcal{R} .

Teorema

Si \mathcal{R} es una relación de un conjunto A en un conjunto B , entonces $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$

Demostración.

$a(\mathcal{R}^{-1})^{-1}b$ si y solo si $b \mathcal{R}^{-1}a$ si y solo si $a\mathcal{R}b$



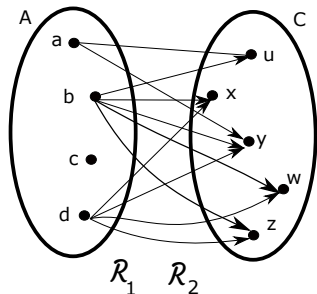
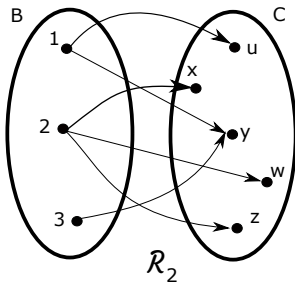
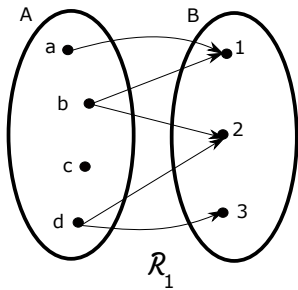
Composición de dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S}

Definición

Dadas \mathcal{R} , una relación de A en B , \mathcal{S} , una relación de B en C , la relación composición de \mathcal{R} con \mathcal{S} es la relación de A en C dada por la ley:

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y \quad \text{si y solo si} \quad \exists u \in B \mid x\mathcal{R}u \wedge u\mathcal{S}y$$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times C \mid (x, u) \in \mathcal{R}, (u, y) \in \mathcal{S} \text{ para algún } u \in B\}$$



Teorema sobre composición de relaciones

Teorema

Dadas \mathcal{R} , \mathcal{S} y \mathcal{T} , con \mathcal{R} una relación de A en B , \mathcal{S} , una relación de B en C , \mathcal{T} , una relación de C en D , entonces

- ▶ *la composición de relaciones es asociativa, $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.*
- ▶ $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$

La composición de relaciones NO es conmutativa, vemos un ejemplo:

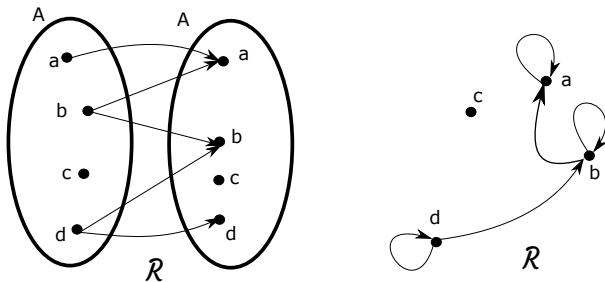
$$A = \{1, 2, 3, 4\} = B = C \quad \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \in A \times B \quad \text{y} \\ \mathcal{S} = \{(1, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \in B \times C.$$

Observemos que $(1, 4) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, y $(1, 4) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$

Propiedades de una relación definida en un conjunto

A partir de ahora vamos a enfocarnos solamente en relaciones de un conjunto en si mismo, es decir, para un conjunto A trabajaremos con relaciones en A .

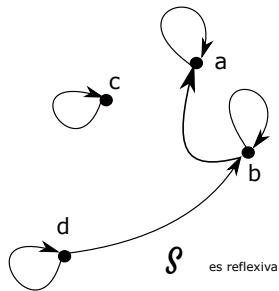
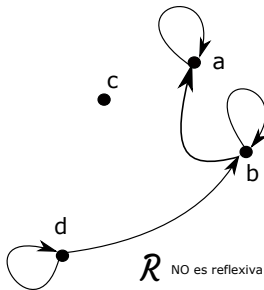
Si A es finito, la representación de \mathcal{R} se puede hacer en un diagrama de este tipo:



Cuando $A = B$, se dice que la *relación en A* .

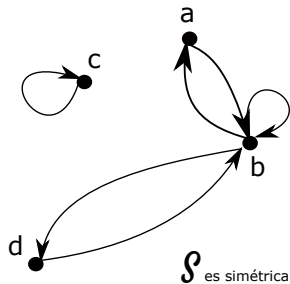
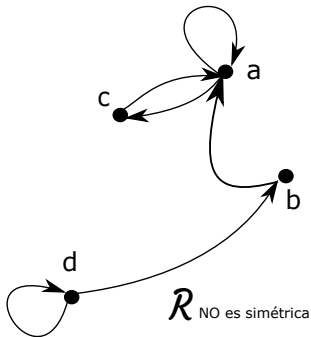
Relacion en A con propiedad reflexiva

\mathcal{R} es REFLEXIVA si $\forall a \in A, (a, a) \in \mathcal{R}$



Relacion en A con propiedad simétrica

\mathcal{R} es SIMETRICA si $\forall a, b \in A, (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$

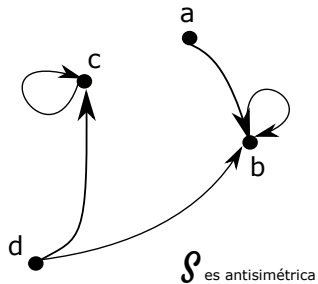
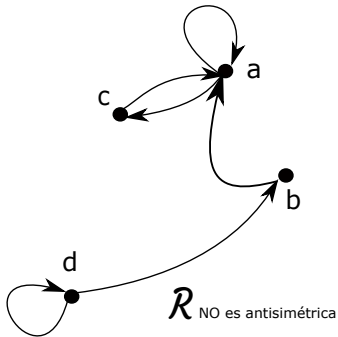


Relacion en A con propiedad antisimétrica

\mathcal{R} es ANTISIMETRICA si $\forall a, b \in A, a \neq b \ [(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}]$.

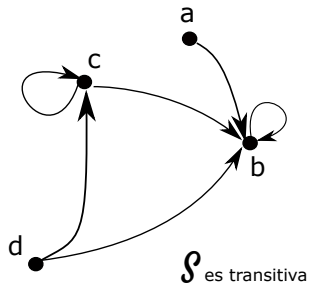
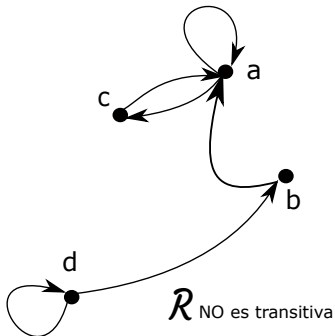
\mathcal{R} es antisimétrica si

$$\forall a, b \in A, [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow a = b$$



Relacion en A con propiedad transitiva

\mathcal{R} es TRANSITIVA si $\forall a, b, c \in A, [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.



Definición

Dada \mathcal{R} , una relación en A , diremos que es:

- ▶ \mathcal{R} es REFLEXIVA si $\forall a \in A, (a, a) \in \mathcal{R}$
- ▶ \mathcal{R} es SIMETRICA si $\forall a, b \in A, (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$.
- ▶ \mathcal{R} es ANTISIMETRICA si $\forall a, b \in A, a \neq b [(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}]$.
- ▶ \mathcal{R} es TRANSITIVA si $\forall a, b, c \in A, [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

Una forma equivalente de definir una \mathcal{R} ANTISIMETRICA es:

$$\forall a, b \in A, [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow a = b$$

.

Ejemplos de una relación definida en un conjunto

Dada \mathcal{R} , una relación en A , analicemos que propiedades se verifican...

1. $a\mathcal{R}_1b \Leftrightarrow a = b$ es decir, $\mathcal{R}_1 = \{(a, a) : a \in A\}$
 \mathcal{R}_1 es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.
2. $A = \mathbb{R}$, donde $a\mathcal{R}_2b \Leftrightarrow a < b$ es decir, la relación 'menor que' usual en \mathbb{R} .
 \mathcal{R}_2 es NO reflexiva, NO simétrica, antisimétrica y transitiva.
3. $A = \mathbb{Z}$, donde $a\mathcal{R}_3b \Leftrightarrow a - b$ es múltiplo de 3
 \mathcal{R}_3 es reflexiva, simétrica, NO antisimétrica y transitiva.
4. A un conjunto y la relación en $\mathcal{P}(A)$ definida por $X\mathcal{R}_4Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$. \mathcal{R}_3 es reflexiva, NO simétrica, antisimétrica y transitiva.
5. A el conjunto de rectas en plano xy y la relación \mathcal{R} en A definida por $r\mathcal{R}t \Leftrightarrow r \perp t$.

.....

Relaciones de Orden

Definición

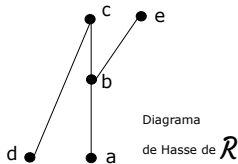
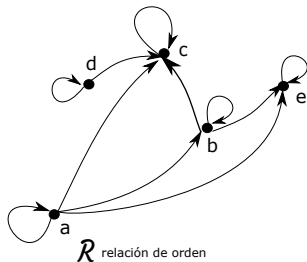
Dada \mathcal{R} , una relación en A , diremos que es una relación de **orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Cuando \mathcal{R} es una relación de orden en A , al par (A, \mathcal{R}) se le dice que es un conjunto ordenado, y es usual notar $x \prec y$ cuando $(x, y) \in \mathcal{R}$ y decir que **x precede a y** , o que x es anterior a y .

Dados $x, y \in A$ se dira que **x e y son comparables** si $x \prec y$ o $y \prec x$. En caso contrario, x e y son no comparables.

Diagrama de Hasse

Diagrama de un conjunto ordenado finito (Diagrama de Hasse) Para facilitar su comprensión, se acuerda la siguiente convención: no se dibujan las flechas correspondientes a $a \prec a$ ni la flecha $a \prec c$ cuando existe un b tal que $a \prec b$ y $b \prec c$ y estas flechas están dibujadas. Además, si $a \prec b$ se dibuja a abajo de b .



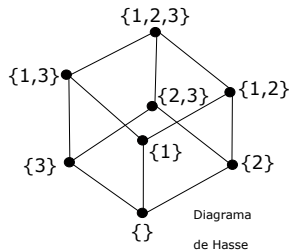
Ejemplos de relaciones de Orden

- La relación \subseteq en $\mathcal{P}(A)$ para algun conjunto A .

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$$

relación de orden contenido o igual en $\mathcal{P}(A)$



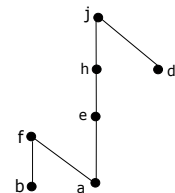
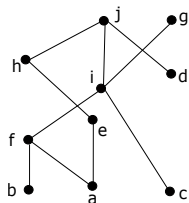
- La relación \leq usual en \mathbb{R} . (análogo la relación \geq).

Orden Inducido en un subconjunto

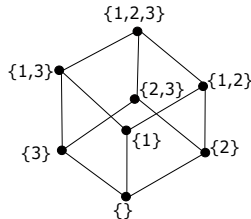
Definición

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $S \subseteq A$. El *orden inducido por R en S* es $R_S = R \cap (S \times S)$, es decir, si $x, y \in S$, $xR_S y$ si y solo si xRy .

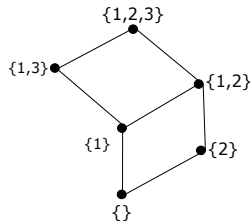
Un conjunto ordenado (S, R_S) es un *subconjunto ordenado de (A, R)* si $S \subseteq A$ y $R_S = \{(x, y) \in S \times S \mid (x, y) \in R\}$.



$S = \{a, b, e, d, f, h, j\}$



$A = \{1, 2, 3\} \quad (\mathcal{P}(A), \subseteq)$



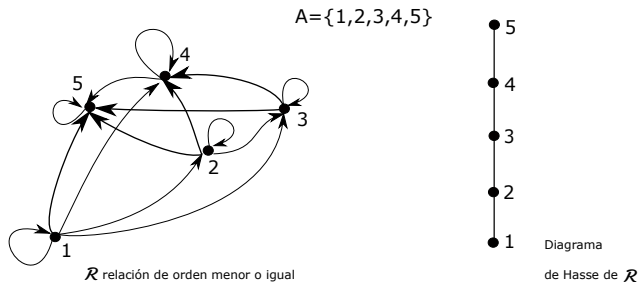
$S = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Orden lineal o total

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación en A , diremos que es una relación de **orden total** si todo para de elementos son comparables.

Su diagrama es de la forma :

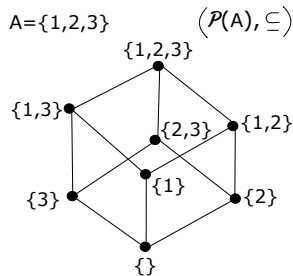
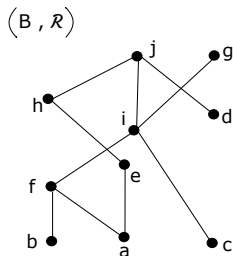


Elementos minimales y maximales de un Orden

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de orden en A , diremos que

1. $a \in A$ es un elemento minimal del Orden si $\forall x \in A : x \prec a$ se tiene que $x = a$.
2. $a \in A$ es un elemento maximal del Orden si $\forall x \in A : a \prec x$ se tiene que $x = a$.



Minimales de $(B, \mathcal{R}) = \{a, b, c, d\}$. Maximales de $(B, \mathcal{R}) = \{j, g\}$.

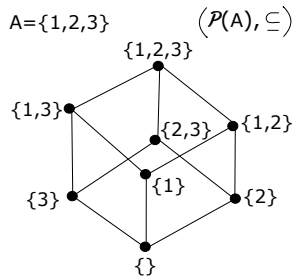
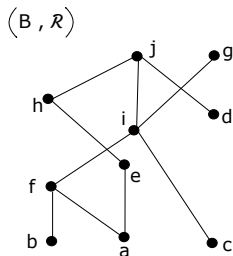
Minimales de $(\mathcal{P}(A), \subseteq) = \{\emptyset\}$, Maximales de $(\mathcal{P}(A), \subseteq) = \{A\}$.

Elementos mínimos y máximos de un Orden

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de orden en A , diremos que

1. $a \in A$ es un elemento mínimo del orden si todo $\forall x \in A$ tal que $a \prec x$.
2. $a \in A$ es un elemento máximo del orden si todo $\forall x \in A$ tal que $x \prec a$.



$(B, \mathcal{R}) = \{a, b, c, d\}$ no tiene máximo, ni mínimo.

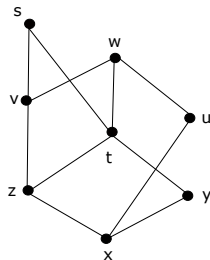
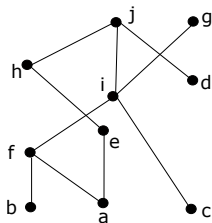
$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ tiene máximo: A , y tiene mínimo: $\{\}$.

Cotas inferiores y superiores de un Orden

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de orden en A y $S \subseteq A$ diremos que

1. a es una cota inferior de S en el orden si todo $\forall x \in S$ se tiene que $a \prec x$.
2. a es una cota superior de S en el orden si todo $\forall x \in S$ tal que se tiene que $x \prec a$.



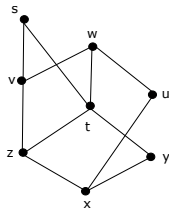
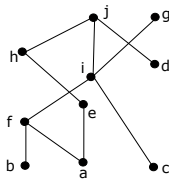
$S = \{f, e\}$ Cota superior de $S \rightarrow \{j\}$ y Cota inferior de $S \rightarrow \{a\}$
 $S' = \{v, z, t\}$ Cota superior de $S' \rightarrow \{s, w\}$ y Cota inferior de $S' \rightarrow \{x\}$

Infimo y supremo de un Orden

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación de orden en A y $S \subseteq A$ diremos que

1. x^* es el ínfimo de S si es la máxima cota inferior de S , es decir,
 $\forall x \in S, x^* \prec x$ y si $y \prec x \forall x \in S$ entonces $y \prec x^*$.
2. y^* es el supremo de S si es la mínima cota superior de S en el orden, es decir,
 $\forall x \in S, x \prec y^*$ y si $x \prec y \forall x \in S$, entonces $y^* \prec y$.



$S = \{f, e\}$ Cota sup. de $S \rightarrow \{j\} = \text{Supr.}$ y Cota inf. de $S \rightarrow \{a\} = \text{Inf.}$

$S' = \{v, z, t\}$ Cota sup. de $S' \rightarrow \{s, w\}$, \nexists Supr. y Cota inf. de $S' \rightarrow \{z, x\}$, $\text{Inf} \rightarrow z$

Observaciones

Dado (A, \mathcal{R}) conjunto parcialmente ordenado, con A conjunto finito. Entonces

- i) Existe un elemento minimal y un elemento maximal de \mathcal{R} .

Supongamos $A = \{a_i\}_{i=1, \dots, n}$.

Si no existe $x \in A - \{a_1\}$ tal que $x \prec a_1$, se tiene que a_1 es minimal. En caso contrario, si existe $x \prec a_1$, analizo este elemento x que renombro a_2 .

Si no existe $x \in A - \{a_1, a_2\}$ tal que $x \prec a_2$, se tiene que a_2 es minimal. En caso contrario, si existe $y \prec a_2$, analizo este elemento y que renombro a_3 .

Este procedimiento, a lo sumo se podrá hacer n veces, y termina al hallar un minimal de \mathcal{R} .

- ii) Si \mathcal{R} tiene un elemento mínimo (máximo), es único.

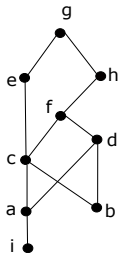
Supongamos m_1 y m_2 mínimos de \mathcal{R} .

Como m_1 es mínimo, $m_1 \prec x$ para todo $x \in A$. En particular, $m_1 \prec m_2$.

Como m_2 es mínimo, $m_2 \prec x$ para todo $x \in A$. En particular, $m_2 \prec m_1$.

Luego, $m_1 = m_2$.

Ejemplos



S	C. Superiores	Supremo	C.Inferiores	Infimo
$\{f, c, d\}$	f, g, h	f	a, b, i	\nexists
$\{c, e, f, g\}$	g	g	c, b, a, i	c
$\{i, a, b\}$	c, d, e, f, g, h	\nexists	\nexists	\nexists
$\{a, b, c, d\}$	f, h, g	f	\nexists	\nexists

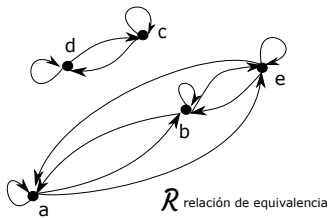
Relaciones de Equivalencia

Definición

Dada \mathcal{R} , una relación en A , diremos que es una relación de Equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Cuando \mathcal{R} es una relación de equivalencia en A , es usual notar $x \sim y$ cuando $(x, y) \in \mathcal{R}$ y decir que x es equivalente a y .

Dados $x \in A$ se define la clase de equivalencia de x al conjunto $\mathcal{R}(x)$ y se lo nota $[x]$. Es decir, $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in A \mid (y, x) \in \mathcal{R}\}$.



Ejemplos de relaciones de Equivalencia

1. La relación definida en \mathbb{R} donde $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
2. A las rectas del plano xy , la relación \mathcal{R} en A definida por $r\mathcal{R}t \Leftrightarrow r \parallel t$.
3. Para un $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, la relación "congruencia módulo m " está definida de la siguiente manera: $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ es múltiplo de m .
 - ▶ Reflexiva: si $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$. Como 0 es múltiplo de m , $x \sim x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.
 - ▶ Simétrica: si $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \sim y$, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = k_1 \cdot m$.
Luego $y - x = -k_1 \cdot m$.
Esto nos dice que $\exists k_2 = -k_1 \mid y - x = k_2 \cdot m \quad y \sim x$.
 - ▶ Transitiva: si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $x \sim y$ y $y \sim z$ $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x - y = k_1 \cdot m$ y $y - z = k_2 \cdot m$. Luego
 $x - z = x - y + y - z = k_1 \cdot m + k_2 \cdot m = (k_1 + k_2) \cdot m$, v.d $x - z$ es múltiplo de m ,
 $x \sim z$.

Teorema sobre clases de equivalencia

Dados $x \in A$ se define la clase de equivalencia de x al conjunto $\mathcal{R}(x)$ y se lo nota $[x]$. Es decir, $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in A \mid (y, x) \in \mathcal{R}\}$.

Teorema

Dada \mathcal{R} , una relación de equivalencia en A , con $a, b \in A$.

1. $[a] \neq \emptyset$
2. $(a, b) \in R$ si y solo si $[a] = [b]$.
3. $(a, b) \notin R$ si y solo si $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración.

Para ver que (1) es cierto, es suficiente observar que $a \in [a]$ ya que R es reflexiva.

(2) Sean ahora $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in R$. Si $x \in [a]$, por definición, $(a, x) \in R$ o, dado que R es simétrica, $(x, a) \in R$. Puesto que, por hipótesis $(a, b) \in R$ y R es transitiva, resulta $(x, b) \in R$ y por lo tanto $x \in [b]$. Esto prueba que $[a] \subseteq [b]$. La prueba de que $[b] \subseteq [a]$ es análoga.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$ tales que $[a] = [b]$. Esto implica, en particular, que $a \in [b]$ y, por definición de clases de equivalencia, $(a, b) \in R$.

(3) Finalmente, sean ahora $a, b \in A$. Si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, existe $x \in [a] \cap [b]$, por definición de clases de equivalencia, $(a, x) \in R$ y $(b, x) \in R$. Dado que R es simétrica, resulta $(a, x) \in R$ y $(x, b) \in R$, y como R es transitiva, $(a, b) \in R$.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$. Si $(a, b) \in R$, por (2) sabemos que $[a] = [b]$. En particular $a \in [a] \cap [b]$, vd, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. □

Observar que el resultado anterior nos dice que:

- ▶ Todo elemento de A pertenece a alguna clase.
- ▶ Dos clases de equivalencia, o bien son iguales, o bien son conjuntos disjuntos.

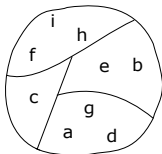
Es decir, una relación de equivalencia separa los elementos de A en conjuntos disjuntos dos a dos (las clases de equivalencias).

Definición

Dado un conjunto A , una colección de subconjuntos no vacíos de A , $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \dots\}$ es una **partición de A** si verifican

1. $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j = \emptyset$.
2. $\forall a \in A$ existe $X_i \in \mathcal{P}$ tal que $a \in X_i$.

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ una partición $\mathcal{P} = \{\{a, g, d\}, \{c\}, \{b, e\}, \{f, i, h\}\}$



A partir del teorema anterior, que una relación de equivalencia genera una partición del conjunto, a través de las clases de equivalencia. Además, si tenemos una partición de un conjunto, entonces existe una relación de equivalencia subyacente, como demuestra el teorema siguiente.

Teorema

Sea \mathcal{P} una partición del conjunto A . Existe una única relación de equivalencia en A cuyas clases de equivalencia son los elementos de \mathcal{P} .

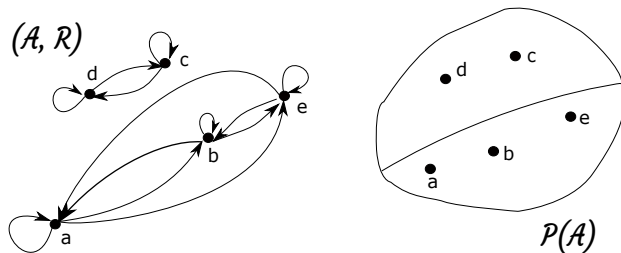
Demostración.

Definamos la relación R en A como sigue: $(a, b) \in R$ si y solo si existe $X_i \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in X_i$.

Se puede demostrar, que R es una relación de equivalencia (Ejercicio).



Conjunto cociente de una relacion de equivalencia



Definición

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A . Llamaremos *conjunto cociente de A por R* , y lo notaremos $A|_R$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A definidas por R , es decir:

$$A|_R = \{[a] : a \in A\}.$$