FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LCC - LF - LM - PF - PM

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II

PRÁCTICA 1: ANÁLISIS COMBINATORIO

1. a) El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los miembros del consejo). Cuántas listas diferentes, formada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, puede presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?

   b) Tres miembros del consejo de directores (de la parte (a)) son médicos. Cuántas listas de la parte (a) tienen:

      1) un médico nominado para la presidencia?
      2) exactamente un médico en la lista?
      3) al menos un médico en la lista?

2. Un sábado, cuando iban de compras, Juana y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyería, justo antes de que sonara la alarma contra robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la patente (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del auto que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q y que el último dígito era un 3 o un 8. Juana dijo que la primera letra de la patente era una C o una G y que el primer dígito era un 7. Cuántas patentes diferentes tendrá que verificar la policía?

3. Para una carrera de 10 kilómetros, cada participante tiene la probabilidad de ganar uno de los trofeos de distinto tamaño que se entregarán a los primeros ocho corredores que lleguen a la meta.

   a) Si 30 personas entran a la carrera, de cuántas formas será posible entregar los trofeos?
   b) Si Roberta y Clara son dos de las participantes, de cuántas formas se pueden otorgar los trofeos de modo que ellas queden entre los tres primeros lugares?

4. Pamela tiene 15 libros distintos, de cuántas formas puede colocar sus libros en dos repisas de modo que haya al menos un libro en cada una? (Tenga en cuenta que los libros, en cualquier disposición, están ordenados uno junto a otro, y el primer libro de cada repisa queda en el lado izquierdo de la misma).

5. De cuántas formas es posible ordenar los símbolos $a, b, c, d, e, e, e, e, e$ de modo que ninguna e quede junto a otra?

6. Para la transmisión de mensajes en un sistema de comunicación se usa un alfabeto de 40 símbolos. Cuántos mensajes distintos de 25 símbolos puede generar el transmisor si los símbolos se pueden repetir en el mensaje? Cuántos, si 10 de los 40 símbolos sólo pueden aparecer como el primero o el último símbolo del mensaje, o en ambas posiciones a la vez, los restantes 30 símbolos pueden aparecer en cualquier parte, y las repeticiones de todos los símbolos están permitidas?

7. Un profesor de LCC tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres son de Racket, los otros cuatro de Python. De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros:

   a) si no hay restricciones?

   b) si los lenguajes deben alternar?

   c) si todos los libros de Racket deben estar juntos?

   d) si todos los libros de Racket deben estar juntos y los de Python también?

8. *a*) Cuántas disposiciones hay de todas las letras de la palabra SOCIOLOGICAL?

   b) En cuántas están juntas la A y la G?

   c) En cuántas están juntas todas las vocales?

9. Cuántas trayectorias distintas hay de $(0,0)$ a $(7,7)$ en el plano xy si una trayectoria se construye paso a paso, yendo ya sea un espacio hacia la derecha o un espacio hacia arriba? Cuántas de estas trayectorias hay de $(2,7)$ a $(9,14)$? Puede hacerse un enunciado general que incorpore estos dos resultados?

10. Una serie de letras de la forma *abcba*, en las que la expresión no cambia al invertir su orden, es un ejemplo de *palíndromo* de cinco letras.

    a) Si una letra puede aparecer más de una vez, cuántos palíndromos de cinco letras se pueden formar? De seis letras?

    b) Repita la parte (a) con la condición de que ninguna letra aparezca más de dos veces.

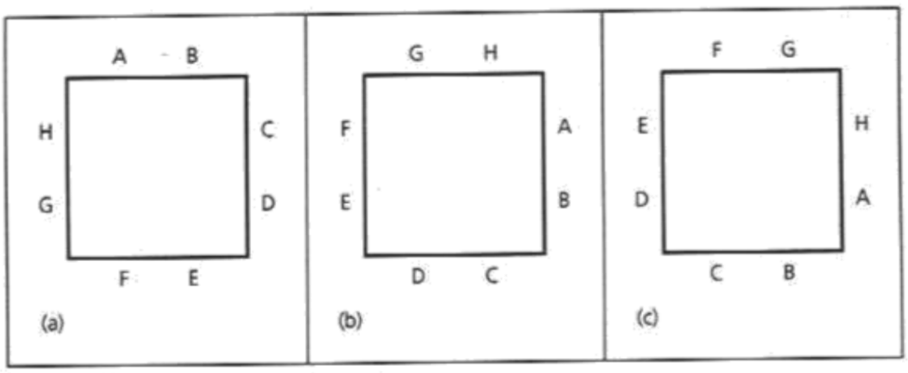
11. *a*) De cuántas formas puede un estudiante responder un examen de 10 preguntas de verdadero o falso?

    b) De cuántas formas puede un estudiante responder un examen de la parte (a) si es posible dejar una pregunta sin respuesta para evitar que se penalice una respuesta equivocada?

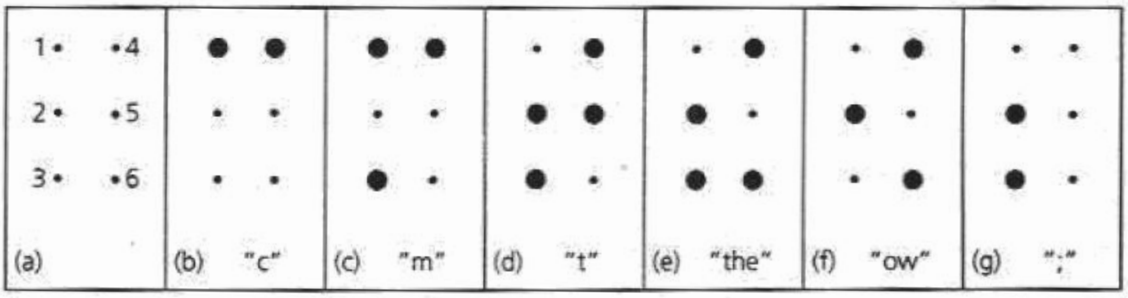
12. *a*) De cuántas formas se pueden sentar ocho personas, $A, B, \ldots, H$ alrededor de una mesa cuadrada de la Figura donde las subfiguras (a) y (b) se consideran iguales pero distintas de la (c)?

    b) Si dos de las ocho personas, digamos A y B, no se llevan bien, cuántas disposiciones diferentes en las que A y B no se sienten juntos son posibles?

    c) Cuántas de las disposiciones del item (b) evitan que A y B se sienten uno frente al otro?



13. En el sistema Braille, un símbolo, como una letra minúscula, un signo de puntuación, un sufijo, etc., se describe resaltando al menos uno de los puntos de la disposición de seis puntos que aparece en en la parte (a) de la figura. (Las seis posiciones Braille se enumeran en esta parte de la figura.) Por ejemplo, en la parte (b) los puntos de las posiciones 1 y 4 están resaltados y esta disposición de seis puntos representa la letra c. En las partes (c) y (d) de la figura, tenemos las representaciones de las letras m y t, respectivamente. El artículo definido "the" se muestra en la parte (e), mientras que la parte (f) contiene la forma para el sufijo "ow". Por último, el punto y coma (;) aparece en la disposición de seis puntos de la pate (g), donde los puntos de las posiciones 2 y 3 aparecen en relieve.



(NOTA: la interpretación de los símbolos del sistema Braille enunciada en el ejercicio corresponde al idioma inglés, y difiere de la utilizada en el "Braille español".)

a) ¿Cuántos símbolos diferentes podemos representar en el sistema Braille?

b) ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?

c) ¿Cuántos símbolos tienen un par de puntos en relieve?

d) ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

14. Un comité de 12 personas será elegido entre 10 hombres y 10 mujeres. ¿De cuántas formas se puede hacer la selección si (a) no hay restricciones? (b) debe haber seis hombres y seis mujeres? (c) debe haber un número par de mujeres? (d) debe haber más mujeres que hombres? (e) debe haber al menos ocho hombres?

15. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su selección si (a) no hay restricciones? (b) debe contestar las dos primeras preguntas? (c) debe responder al menos cuatro de las primeras seis preguntas?

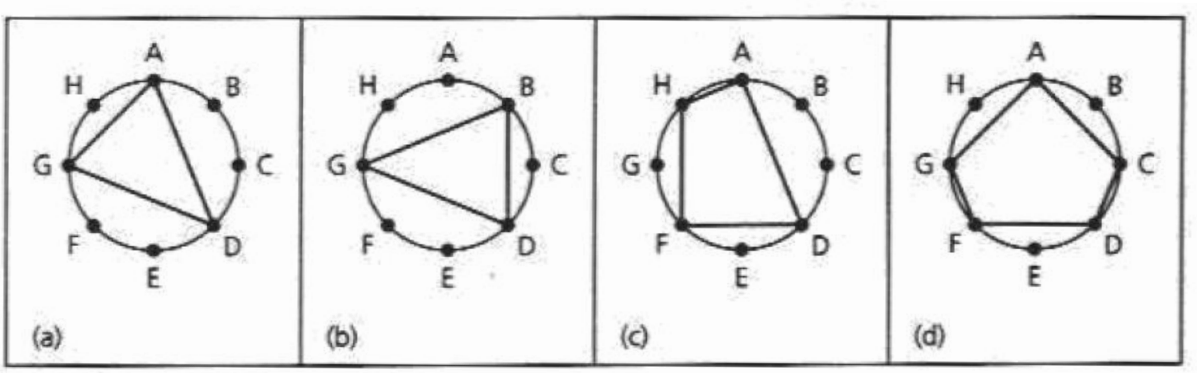
16. De cuántas formas es posible distribuir 12 libros diferentes entre cuatro niños de modo que (a) cada niño reciba tres libros? (b) los dos niños mayores reciban cuatro libros cada uno y los dos menores reciban dos libros cada uno?

17. ¿Cuántas disposiciones de las letras de MISSISSIPPI no tienen letras S consecutivas?

18. *a*) En un plano se tienen quince puntos, de los cuales no hay tres que estén alineados. ¿Cuántas rectas determinan?

    b) Se tienen veinticinco puntos en el espacio, de forma que cuatro de ellos cualesquiera no son coplanares. ¿Cuántos triángulos determinan? ¿Cuántos planos? ¿Cuántos tetraedros (sólidos piramidales con cuatro caras triangulares)?

19. En las cuatro partes de la siguiente figura, se han marcado ocho puntos equidistantes sobre la circunferencia de un círculo dado.



a) Para las partes (a) y (b) de la figura, tenemos dos triángulos diferentes (aunque congruentes). Estos dos triángulos (que se distinguen mediante sus vértices) surgen de dos selecciones de tamaño tres de los vértices A, B, C, D, E, F, G, H. ¿Cuántos triángulos diferentes (congruentes o no) podemos inscribir de esta forma en el círculo?

b) ¿Cuántos de los triángulos del item anterior son isósceles?

c) ¿Cuántos cuadriláteros diferentes podemos inscribir en el círculo usando los vértices marcados? (Uno de tales cuadriláteros aparece en la parte (c) de la figura.)

d) ¿Cuántos de los cuadriláteros del item anterior son cuadrados? ¿Cuántos de ellos son rectángulos no cuadrados?

e) En la parte (d) de la figura tenemos un pentágono inscrito en nuestro círculo. ¿Cuántos pentágonos podemos inscribir en el círculo dado usando los vértices marcados?

f) ¿Cuántos polígonos diferentes, de tres o más lados, podemos inscribir en el círculo dado usando tres o más de los vértices marcados?

20. Determine el coeficiente de x^9y^3 en los desarrollos de (a) $(x+y)^{12}$, (b) $(x+2y)^{12}$ y (c) $(2x-3y)^{12}$.

21. Determine el coeficiente de $w^2x^2y^2z^2$ en los desarrollos de (a) $(w+x+y+z+1)^{10}$, (b) $(2w-x+3y+z-2)^{12}$ y (c) $(v+w-2x+y+5z+3)^{12}$.

22. Muestre que para todos los enteros $n \geq 2$, $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$.

23. Para cualquier n entero positivo, determine

$$(a) \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}. \qquad\qquad (b) \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}.$$

24. Muestre que para todos los enteros positivos n y m, $n\binom{m+n}{m} = (m+1)\binom{m+n}{m+1}$.

25. Con n un entero positivo, evalúe la suma

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^k\binom{n}{k} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

26. Determine x si $\sum\limits_{i=0}^{50} \binom{50}{i} 8^i = x^{100}$.

27. ¿De cuántas formas es posible distribuir 10 monedas (idénticas) entre cinco niños si (a) no hay restricciones? (b) cada niño recibe al menos una moneda? (c) el niño mayor recibe al menos dos monedas?

28. Una tienda de helados tiene disponibles 31 sabores de helado. ¿De cuántas formas se puede obtener una docena de conos de helado si (a) no queremos el mismo sabor más de una vez? (b) un sabor puede ordenarse hasta 12 veces? (c) un sabor puede ordenarse hasta 11 veces?

29. Determine el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$, donde

$$(a) \quad x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 5 \qquad\qquad (b) \quad x_i \geq -3,\ 1 \leq i \leq 5.$$

30. ¿De cuántas formas se pueden colocar 12 canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si (a) todas las canicas son negras? (b) cada canica es de distinto color?

31. Dados m, n enteros positivos con $m \geq n$ muestre que el número de formas de distribuir m objetos idénticos en n recipientes distintos, sin que quede un recipiente vacío, es $C(m-1, m-n) = C(m-1, n-1)$.

Principio de las Casillas

32. Demuestre que si se escogen siete números del 1 al 12, dos de estos sumarán 13.

33. Demuestre que si se escogen ocho números positivos cualesquiera, dos de ellos tendrán el mismo resto al ser divididos por 7.

34. Si se pintan 50 bicicletas usando siete colores, ¿cuantas bicicletas, al menos, tendrán el mismo color?

35. Demuestre que debe haber por lo menos 90 maneras de escoger seis números del 1 al 15 de modo que todas las selecciones al sumarse den el mismo resultado.

36. ¿Cuántos amigos debe tener usted para garantizar que por lo menos cinco de ellos cumplen los años en un mismo mes?

37. Demuestre que si se escogen 14 números cualesquiera del 1 al 25, uno de ellos es múltiplo del otro.