Les calculatrices, téléphones et documents ne sont pas autorisés. Une attention particulière sera donnée à la clarté de la rédaction.

Question de cours

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

> ***Solution:*** *Voir cours*

Exercice

Donner, en **justifiant soigneusement**, le domaine de définition, de dérivabilité, ainsi que les dérivées des deux fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(e^{x^3+1})$

> ***Solution:*** *On étudie la fonction*
>
> $$\begin{array}{rccc} f & : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cos(e^{x^3+1}) \end{array}.$$
>
> *On peut écrire $f = u \circ v \circ w$ avec :*
>
> - $\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ *, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$.*
> - $\begin{array}{rccc} v & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^x \end{array}$ *, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
> - $\begin{array}{rccc} w & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3+1 \end{array}$ *, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $w'(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
>
> *Donc, par composition de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}$. En utilisant successivement deux fois la formule de dérivation de fonctions composées on trouve :*
>
> $$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= (u \circ (v \circ w))'(x) \\ &= (v \circ w)'(x) \cdot u' \circ (v \circ w)(x) \\ &= w'(x) \cdot (v' \circ w)(x) \cdot u' \circ (v \circ w)(x) \\ &= -3x^2 \cdot e^{x^3+1} \cdot \sin(e^{x^3+1}) \end{aligned}$$

2. $g : x \mapsto \ln\left(\arctan(\sqrt{x})\right)$

> ***Solution:*** *On étudie la fonction*
>
> $$\begin{array}{rccc} g & : & D_g & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln\left(\arctan(\sqrt{x})\right) \end{array}.$$

On peut écrire $g = u \circ v \circ w$ avec :

- $u \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$, *définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^\star$*, avec* $u'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$.
- $v \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$, *définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*, avec* $v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
- $w \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$, *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^\star$*, avec* $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Les fonctions $\ln$ *et* $\sqrt{\cdot}$ *ayant des valeurs interdites, l'ensemble de definition de* g *est donné par l'intersection suivante :*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \, : \, \arctan(\sqrt{x}) > 0\} \cap \mathbb{R}_+.$$

Or, $\arctan(\sqrt{x}) > 0 \iff \sqrt{x} > 0 \iff x > 0$. *Donc* $D_g = \mathbb{R}_+^\star \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^\star$. *L'ensemble de dérivabilité est donné par :*

$$D_{g'} = \{x \in \mathbb{R} \, : \, \arctan(\sqrt{x}) > 0\} \cap \mathbb{R}_+^\star = D_g$$

Pour le calcul on a 2 options :

1. *la formule de dérivation de fonctions composées (comme à la question 1)*
2. *Les formules du formulaire. Pour une fonction* $h > 0$ *et dérivable on a :* $(\ln h)' = \frac{h'}{h}$.

En utilisant la deuxième option (plus rapide), il vient :

$$\begin{aligned} \textit{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad g'(x) &= \frac{(\arctan \circ w)'(x)}{(\arctan \circ w)(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}^2+1}}{\arctan(\sqrt{x})} \qquad \textit{or, } \sqrt{x}^2 = |x| = x \textit{ sur } \mathbb{R}_+^\star \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)\arctan(\sqrt{x})} \end{aligned}$$

3. (Bonus) Donner l'équation du développement limité à l'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \cos(e^{x^2+1})$, ainsi que l'équation de sa tangente en 0.

Solution: $f \, : \, x \mapsto \cos(e^{x^3+1})$ *est dérivable en* 0*, elle admet donc un* $DL_1(0)$. *De plus* $f'(0) = 0$ *(cf. question 1) donc :*

$$f(x) = \cos(e) + x\epsilon(x), \quad \textit{où : } \epsilon(x) \to 0.$$

L'équation de la tangente en 0 est donnée par $T_0 : x \mapsto \cos(e)$ *(droite horizontale passant par* $\cos(e)$*).*