hypersphere

October 15, 2019

1 Calcul du volume de l'hyper-sphère de dimension d

Le but de l'exercice est de calculer le volume de l'hypersphère en dimension d définie par :

$$\mathcal{S}_d = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^d \ : \ \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = 1\}$$

Le volume de la sphère se définit par :

$$\int_{\mathcal{S}_d} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathcal{S}_d}(x) dx$$

On se restreint à l'hyper-cube $[0;1]^d$, le volume total se déduisant par symmétrie. Deux méthodes sont explorées :

- Méthodes des rectangles
- Monte Carlo

1.1 Exercice 1 : Méthodes des rectangles

On approxime une fonction $f : [0;1]^d \to \mathbb{R}$ par sa somme de Riemann d'ordre N :

$$\int_{[0;1]^d} f(p)dp \approx \left(\frac{1}{N}\right)^d \sum_{p_1,\ldots,p_d} f(p_1, \ldots, p_d), \tag{1}$$

où $p_i \in \{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}, \forall i = 1, \ldots, d$.

Question 1 Coder `quadrillage(d, N)` qui renvoie le pavage du premier quadrant en dimension d, *i.e* les points de $\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}^d$. Il y en a N^d distincts, le résultat doit être sous la forme d'un `numpy.array` de shape `(N^d,d)`. Afficher ce quadrillage avec à l'aide de matplotlib.

Question 2 Coder la fonction indicatrice de la sphère de dimension d

$$f : p \in [0;1]^d \mapsto f(p) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(p) \tag{2}$$

Question 3 Écrire une fonction `Rectangle(d,N)` qui prend en entrée une dimension d et un entier N et renvoie une estimation du volume contenu dans l'hypershpère en dimension d par la méthode des rectangles, pour $d \geq 1$.

Question 4 Approximer le volume de l'hyper-sphère pour $d = 1, 2, 3$ et 4. Afficher l'évolution du volume en fonction de d. Que constatez-vous quand N augmente ?

2 Exercice 2 : Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo consiste dans le fait de tirer au hasard des points dans un volume de type $[0, 1]^d$, de manière uniforme (pour la méthode la plus simple), et de déduire le volume de l'hypersphère (plus exactement, la partie de l'hypersphère contenue dans le premier cadran) comme la proportion de points vérifiant l'inégalité $\sum_i x_i^2 \leq 1$.

Question 1 Écrire une fonction `MonteCarlo(d, N)` qui prend en entrée une dimension d et un entier N et renvoie une estimation du volume contenu dans l'hypershpère P d en dimension d comme proportion de points tirés de manière uniforme vérifiant l'inégalité $\sum_i x_i^2 \leq 1$

Question 2 Trouver une estimation du volume pour $d = 1$ à 9. Afficher l'évolution du volume en fonction de d. Que constatez-vous?