

MS317 – Matemática Financeira

Projeto 1

Fernando Gubitoso Marques

RA: 171524

Henrique Reis Campos

RA: 172232

Nicolas Toledo de Camargo

RA: 242524

Victor Cesar Casquet

RA: 177905

1 Problema Proposto

Deseja-se computar o montante ao final de aplicações periódicas à taxa de juros aparentes compostos de 0.93% ao mês entre janeiro de 2023 e janeiro de 2024 e calcular a taxa de juros real neste período. O aporte mensal do investimento é de R\$ 2 400.00.

2 Solução

2.1 Valor das Aplicações

A cada mês, investe-se o valor de R\$ 2 400.00, resultando em um investimento de R\$ 28 880.00 no decorrer do ano de 2023. Este valor será comparado ao montante final após o fim do processo para avaliar o lucro deste processo.

2.2 Calculando a Taxa de Inflação

Para prever a taxa de inflação ao longo do ano de 2023, utilizou-se os dados¹ do IPCA do IBGE, consistindo da variação da inflação ente janeiro de 2012 e setembro de 2022. Os valores acumulados, portanto refletem a taxa de inflação para cada mês em relação a janeiro de 2012. Assim, se d_i é o i -ésimo dado do IPCA, a inflação neste mês é

$$\text{infl}(t) = \sum_{j \leq t} d_j$$

Calculados os valores para este período, podemos estimar a taxa de inflação para o ano de 2023 a partir de uma regressão linear.

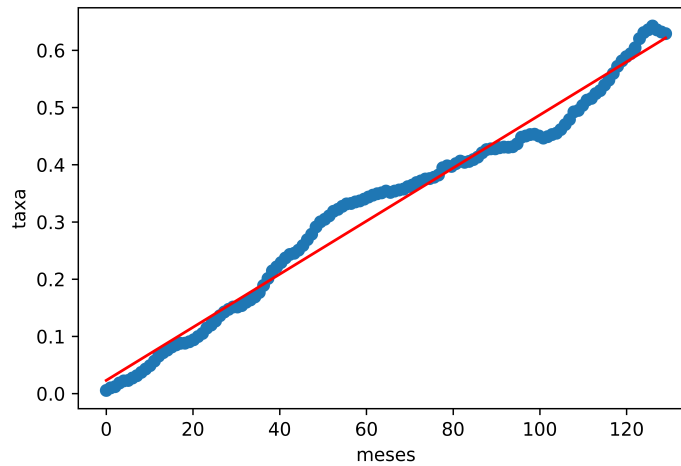


Figura 1: Regressão linear da taxa de juros. Note que o mês 0 representa jan/2012

Portanto a inflação é dada por

$$\text{infl}(t) = 0.0046t + 0.0231$$

¹Fonte, acessado em 18/10/2022

2.3 Juros Aparentes vs Reais

Se o valor aplicado em cada um desses períodos é p_1, p_2, \dots, p_k , com uma taxa i_k em cada período e um intervalo entre duas aplicações $k-1$ e k de $n(k)$, então o montante final de uma aplicação periódica de juros compostos é

$$M_c = p_1 \left(1 + \frac{i_1}{100}\right)^{n_1} + p_2 \left(1 + \frac{i_2}{100}\right)^{(n-n_1)} + \dots + p_k \left(1 + \frac{i_k}{100}\right)^{(n-(\sum_{j=1}^{k-1} n_j))}$$

No nosso caso todas as parcelas, taxas periódicas e períodos são iguais, então temos

$$M_a = p \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{i}{100}\right)^{(n-j \cdot \frac{n}{k})} \quad (1)$$

Então, a uma taxa de 0.93% ao mês e aplicações mensais de R\$ 2400.00 ao mês, o montante ao final de 2023 seria de

$$M = \text{R\$ } 30\,601.73$$

No entanto, devido à inflação, o valor real do poder aquisitivo do dinheiro investido é menor. Portanto, ao valor $i_a = 0.93\%$ dá-se o nome de juros aparentes. Para calcular o poder aquisitivo ao final do investimento, é necessário calcular a taxa de juros reais, conforme a relação

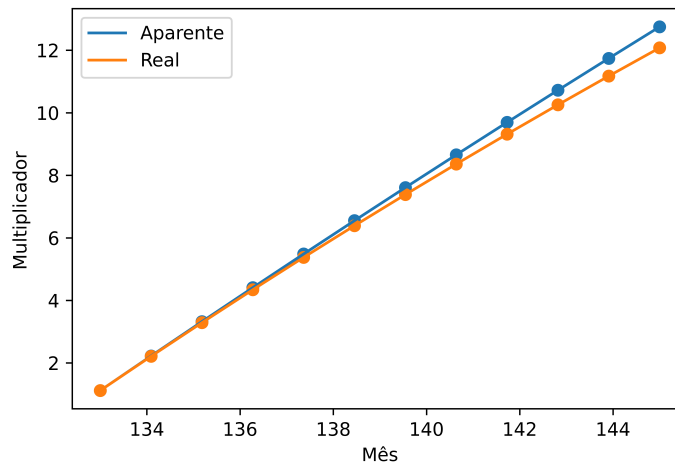
$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + \text{infl}} - 1$$

2.4 Montante final

Como o investimento se inicia em janeiro de 2023 – o 133º mês desde janeiro de 2012 – e termina em janeiro de 2024 – o 145º mês desde janeiro de 2012 – precisamos considerar a inflação entre estes dois pontos. Portanto, consideraremos a inflação

$$\text{infl} = \text{infl}(145) - \text{infl}(133)$$

Aplicando a equação (1), podemos *plotar* os multiplicadores da parcela periódica reais e aparentes ao longo do ano, conforme a figura abaixo:



Ao final do período, obtemos os montantes real R\$30 601.73 e aparente R\$28 987.64. E quando analisamos as taxas de juros em relação ao total investido, temos o aparente 6.25% e o real 0.65%.

Os multiplicadores do rendimento total da parcela periódica ou seja, dos 2400 reais mensais, foram 12.75 (Aparente) e 12.08 (Real).

Outros dados extraídos da análise são:

- Montante aparente: R\$ 30 601.73
- Montante real: R\$ 28 987.64
- Multiplicador aparente: 12.75
- Multiplicador real: 12.08
- Juros aparente: 6.25%
- Juros real: 0.65%

Portanto, o investimento de 28800 reais rendeu um lucro real de R\$ 187.64