UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Projeto MS728

Otimização e diversificação de portfólio de investimentos

Marco Antônio Furtado Kaneko - RA: 221487
Nicolas Toledo de Camargo - RA: 242524
Luis Gustavo Lopes Leal Silva - RA: 251363

Junho 2023

1 Introdução

1.1 Portfólio de investimentos

Um portólio de investimentos, também chamado de carteira ou cesta de investimentos, é uma coleção de ativos financeiros de diferentes categorias como ações, títulos, fundos imobiliários, tesouro direto, etc.

É essencial que haja essa diversificação no portfólio para reduzir a exposição a riscos específicos de um único investimento e aproveitar oportunidades de crescimento em diferentes setores e classes de ativos.

Por isso é de suma importância o processo de decisão sobre quais ativos serão alocados em uma carteira e o quanto será investido em cada um deles, levando em consideração os objetivos financeiros, horizonte de tempo e até a tolerância a riscos por parte do investidor.

1.2 Problema

Através de programação inteira:

I) Dado um investimento inicial de I unidades monetárias, um tempo t meses para ser analisado e a proporção máxima de recursos alocados para cada setor e ativo, obter uma nova melhor carteira para aquela configuração.

II) Dada uma carteira já existente, um investimento de I' unidades monetárias, um tempo t' meses para ser analisado, a proporção máxima de recursos alocados para cada setor e ativo, otimizar a carteira já existente considerando as mesmas ações anteriores.

A melhor carteira é aquela que nos dará maior retorno do investimento inicial e com menor risco possível.

2 Modelagem

2.1 Ideia

- As variáveis de decisão devem representar as quantidade inteiras a serem compradas de cada ativo.

- As restrições devem limitar os recursos alocados tanto para alocação total, para factibilidade, quanto para cada setor e ativo. Ao limitar o investimento em cada setor e ativo, forçamos uma diversificação no portfólio, fazendo a otimização nos retornar mais ativos diferentes e de diferentes setores, diminuindo o risco da aplicação.

- A função objetivo deve ser maximizar nosso retorno esperado após um período t considerando o risco do investimento e a configuração anterior da carteira, se não for uma carteira nova.

2.2 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão para nosso problema serão as quantidades de cada ação que devem ser compradas (em unidades).

Por exemplo, se tivermos 3 ações para serem avaliadas, teremos as variáveis de decisão x_1, x_2 e x_3, que são as quantidades da ação 1, 2 e 3 a serem compradas, respectivamente.

Portanto teremos n variáveis para um problema com n ações.

2.3 Restrições

As restrições para nosso modelo serão: restrição de recurso total, restrições de recursos alocados para cada setor industrial e restrições de recursos alocados para cada ativo avaliado.

Para restrição de recurso total alocado, temos que o somatório do produto de cada ação pelo seu preço atual deve ser menor que o investimento total inicial:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ \leq I \text{ , onde } c_i \text{ é o preço atual da ação i.}$$

Para restrições de recursos alocados de cada setor industrial, temos que somatório do produto de cada ação do setor k pelo seu preço atual deve ser menor que o produto da proporção predefinida para setor k com a investimento inicial. Repita para todos setores:

$$\sum_{i'=1}^{n'} c_{i'} x_{i'} \ \leq p_k I \text{ , para } i' \in k \text{ , para k = 1,2, } \ldots \text{, K}$$

onde $c_{i'}$ é o preço atual da ação i' e p_k a proporção predefinida máxima para alocação no setor k.

Para as restrições de recursos alocados de cada ativo individual, simplesmente impomos um lower e upper bound para cada ação. Sendo o lower igual a zero e o upper igual ao produto da razão da proporção máxima predefinida daquela ação com seu custo pelo investimento inicial. Em adição da restrição de integralidade:

$$0 \leq x_i \leq \frac{q_i}{c_i} I, \text{ i=1,2, } \ldots \text{,n, } x_i \in \mathbb{Z}^+$$

onde q_i é o a proporção máxima de recurso alocado para ação i.

Ilustrando com um pequeno exemplo: 5 ações das quais: 1,3 e 5 pertencem ao setor 1;
2 e 4 pertencem ao setor 2

$$
\begin{aligned}
C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 &\leq I \\
C_1x_1 \qquad + C_3x_3 \qquad + C_5x_5 &\leq p_1 I \\
+C_2x_2 \qquad + C_4x_4 \qquad &\leq p_2 I \\
0 \leq x_i \leq \frac{q_i}{c_i} I, \text{ i=1,2, 3, 4, } x_i &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

2.4 Função objetivo

A função objetivo deverá ser maximização do somatório do produto do peso da ação i por sua variável de decisão:

$$max \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \text{ , onde } r_i \text{ é o peso da ação i.}$$

Este peso r_i, a princípio, tínhamos pensado em usar a predição no momento t da regressão linear feita a partir de dados de preços históricos, então teríamos a maximização direta do retorno esperado.

Mas por inspiração de outros modelos (Seção 5), decidimos usar r_i como a predição no momento t da regressão linear mas normalizada pela taxa livre de risco e seu desvio padrao, multiplicada por um peso de proporção de uma carteira anterior:

$$r_i = \frac{r_i' - (1 + l\frac{t}{12})c_i}{\sigma_i}(1 - w_i),$$

onde: r_i' é a predição da regressão linear,

l é a taxa livre de risco anual,

c_i é preço atual,

w_i é a proporção que a ação i tomou na carteira anterior,

σ_i é o desvio padrão histórico, para i=1,2,...,n

Esta transformação é uma das formas de um índice chamado Índice Sharpe na matemática financeira, é uma medida que indica o excesso de rendimento por unidade de risco de um investimento, ou seja, quanto maior, melhor.

A taxa de livre risco representa uma taxa de retorno de algum investimento não volátil, por exemplo os títulos do Tesouro que com quase certeza você terá este retorno positivo mesmo que ele não seja muito grande.

A parte $(1 + l\frac{t}{12})c_i$ representa qual seria o retorno esperado se, o dinheiro que poderia ser gasto comprando uma unidade da ação, fosse investido em um titulo de livre risco (considerando juros anual simples e t em meses).

A diferença $r_i' - (1 + l\frac{t}{12})c_i$ será positiva se o retorno esperado da ação for maior que o retorno esperado sem risco, e negativa caso contrário. Fazendo com que ações com peso negativo não sejam consideradas, já que seria melhor investir em algo com livre risco que você teria maior retorno.

Dividimos pelo desvio padrão dos dados para dar uma ideia da medida de risco da ação e podemos interpretar como um tipo de balanceamento da qualidade da regressão. Se a regressão não for muito precisa, o desvio padrão dos dados tende a ser mais alto, então ao dividir por ele estamos diminuindo este peso da regressão não muito boa, ao passo que se a regressão for precisa, o desvio padrão tende a ser menor e penalizará menos seu peso.

O peso w_i é útil se estivermos otimizando uma carteira já criada, indica qual foi a proporção da ação na carteira anterior, note que se for uma carteira nova essa medida vale zero e não altera o índice Sharpe. Mas se estivermos otimizando uma carteira já feita, $1 - w_i \leq 1$ e as ações que já estão na carteira terão seus pesos um pouco penalizados na otimização, visando diversificar mais o portfólio.

3 Implementação

3.1 Dados

Os dados utilizados em nossas simulações foram referentes as empresas pertencentes ao grupo Standard and Poor's 500, que é constituinte das 500 maiores empresas no mercado de valores dos Estados Unidos da América.[1]

3.2 Códigos

Os códigos foram desenvolvidos inteiramente em python e estão sendo entregues junto ao relatório para teste, as bibliotecas utilizadas foram : pandas, yfinance, numpy, sklearn, pulp, random e matplotlib.

Para a resolução do problema inteiro utilizamos o método 'Branch and Cut'. Os arquivos criados são para extração de dados, construção do modelo, e simulações.[2]

3.2.1 Extração de dados

Em extracao.py, usamos as informações fornecidas pelo banco de dados contendo o nome, sigla e setor de cada empresa para extrair seus preços atuais e preços históricos usando a biblioteca yfinance. Com isso, exportamos uma tabela contendo as siglas, setor e preço atual (da data da coleta), exportando também uma matriz com o histórico de preços (até cinco anos) de todas ações. É possível extrair dados de mercados diferentes se tiver um banco de dados do mercado em mãos.

	Symbol	Sector	Current Price
0	MMM	Industrials	99.64
1	AOS	Industrials	69.14
2	ABT	Health Care	108.47
3	ABBV	Health Care	143.44
4	ACN	Information Technology	287.48
..	...	...	...
496	YUM	Consumer Discretionary	138.45
497	ZBRA	Information Technology	279.33
498	ZBH	Health Care	135.02
499	ZION	Financials	27.24
500	ZTS	Health Care	179.72

[501 rows x 3 columns]

(a) DataFrame dos dados.

	0	1	2	...	498	499	500
0	205.730103	60.719460	56.982651	...	118.512321	45.953506	74.190063
1	194.559647	58.364502	55.305073	...	108.378342	46.933651	78.183319
2	181.350006	57.818962	54.929218	...	101.881966	45.021118	80.745605
3	160.589554	55.942982	53.544815	...	107.609566	46.745811	80.835068
4	164.050125	57.511398	56.676640	...	104.189835	46.992054	81.048088
..	...	...	...	...	...	...	...
59	116.580856	56.702374	108.751648	...	127.257141	47.936050	145.893127
60	111.875626	67.399109	110.000275	...	127.097443	51.836464	165.135345
61	106.126801	65.338310	101.214180	...	123.634056	49.746506	166.642105
62	103.536186	68.842667	100.756470	...	129.199997	29.413530	166.083313
63	104.629562	68.290001	110.470001	...	138.440002	27.379251	175.779999

[64 rows x 501 columns]

(b) Matriz preços últimos 64 meses.

Figure 1: Visualização dos dados usados.

3.2.2 Criação do modelo

O arquivo modelagem.py é aonde é criada a função para formatar o modelo e otimizá-lo dados os seguintes inputs: investimento inicial, proporção limite por ativo, proporção limite por setor, tabela com as siglas, setores e preços atuais dos ativos, matriz com os preços históricos, tempo investido, taxa de livre risco, investimento total acumulado e quantidade de cada ação acumulada. Sendo os últimos dois parâmetros utilizados quando queremos otimizar uma carteira já existente com os mesmos ativos do banco de dados. Note que pode ser necessário atualizar as tabelas quando se quer otimizar uma carteira, já que se passou um período de tempo e temos mais dados.

A formulação do PI foi feita usando a biblioteca 'pulp', que nos permite resolver usando um solver Branch and Cut. Para isso, adicionamos as informações: número de variáveis com seus limites inferiores e superiores, os coeficientes da função objetivo e os coeficientes das restrições com seu valor independentes b_k, a um objeto 'problem' com configuração para maximização e selecionamos um solver que nos retornará a solução.

```
import numpy as np
import pulp
from pulp import LpProblem, LpVariable, LpInteger, LpMaximize, LpStatus
# cria matria de coefientes de restricoes A
A_num_colunas=frame.shape[0]
    # numero vars de decisao
A_num_linhas = 1 + sectors.shape[0]
    # restricao recurso total = 1
    # restricao recurso para cada setor = numero setores

A0 = np.zeros([A_num_linhas,A_num_colunas])

A0[0,:]= frame['Current Price'] # coefientes para restricao de recursos total

i = 1
ordem_setores=[]
for sector in sectors_indexes:
    ordem_setores.append(sector)
    for index in sectors_indexes[sector]:
        A0[i,index] = frame['Current Price'][index] # coefientes para restricao de cada setor
    i+=1

def criar_b(recurso_total, vetor_limite,sector_num):
     # vetor_limite = vetor com proporcao limite de cada setor
    vetor_limite=np.array(vetor_limite).reshape(sector_num,1)
    b = np.zeros([1 + sector_num ,1])
    b[0]=recurso_total
    b[1:]=vetor_limite*recurso_total
    return b

b= criar_b(investimento, proporcao_limite_por_setor,sector_num)
        # cria vetor b

# Cria problema de maximizacao
problem = LpProblem("Large LP", LpMaximize)

# Define numero vars e restricoes
num_variables = A0.shape[1]
num_constraints = A0.shape[0]

# Cria variaveis
ativos = frame['Symbol']
variables = [LpVariable(f'{ativos[i]}', lowBound=0,upBound=(proporcao_limite_por_ativo[i]*investimento/A0[0][i]), cat=LpInteger) for i in range(num_variables)]
```

```
#define seus lower e upper bounds, e que sao inteiras

# Define funcao objetivo
if investimento_total_anterior[0] != 0:
    proporcao_carteira_anterior=[]
    for i in range(num_variables):
        vetor_valor_anterior = vetor_valor_anterior.reshape(A_num_colunas,1)
        proporcao_carteira_anterior.append(((A0[0][i]* vetor_valor_anterior[i] ) /investimento_total_anterior )[0])
else:
    proporcao_carteira_anterior=np.zeros(A_num_colunas)
objective_coeffs = [indice_sharpe_obj[i][0][0]*(1-proporcao_carteira_anterior[i]) for i in range(num_variables)]
problem += sum(variables[i] * objective_coeffs[i] for i in range(num_variables))
#adiciona funcao obj ao problema

# Adiciona restricoes
for j in range(num_constraints):
    constraint_coeffs = [A0[j][i] for i in range(num_variables)]
    constraint = sum(variables[i] * constraint_coeffs[i] for i in range(num_variables)) <= b[j]
    problem += constraint

# Selecionar solver Branch n Cut
solver = pulp.PULP_CBC_CMD(msg=False)

# Resolver o problema inteiro
problem.solve(solver)
```

Listing 1: Parte do Código que cria o modelo.

3.2.3 Simulações de carteiras

O arquivo portifolio.py é o principal que o usuário utilizará para criar sua carteira otimizada. Ao rodar o arquivo, o script fará algumas perguntas no prompt para receber os inputs necessários. Se não quiser considerar ações específicas dos dados fornecidos, ele utilizará todos os dados para sua otimização.

Se quiser considerar proporção limite de recursos diferentes para cada ativo e setor, será necessário o input de cada valor separadamente ou de um vetor com os valores.

Para realizar otimização de carteira já existente, será necessário fornecer o investimento total e quantidade total de cada ação que já está na carteira. Note que neste versão só foi implementada otimização com ações do mesmo banco de dados (pode ser necessário atualizar os preços), é possível alterar para utilizar diferentes bancos de dados mas seria necessária mudança na implementação.

Os outros arquivos de simulações servem para criar diversas carteiras semelhantes, com a diferença sendo a proporção limite por setor e ativo. O objetivo é achar qual a melhor proporção, considerando esta a que maximiza o índice Sharpe da carteira. Um arquivo simula a mesma proporção de 0,05 a 1, de 5 em 5 por cento, para todos setores/ativos e o outro arquivo cria valores aleatórios de 0 a 1.

```
I) Dados considerados:

Extrair dados dos ativos de que arquivo? tickers_data.csv

Precos historicos de que arquivo? tickers_historical_array.npy

Considerar ações específicas? (S / N) S

Quantas ações serão consideradas? 6

Digite a sigla da ação 1: GOOGL

Digite a sigla da ação 2: BKNG

Digite a sigla da ação 3: NVDA

Digite a sigla da ação 4: TSLA

Digite a sigla da ação 5: AMZN

Digite a sigla da ação 6: NFLX
```

```
II) Variáveis da carteira:

Tempo investido em meses: 12

Dinheiro investido: 10000

Taxa anual livre de risco: 0.05

Limites para gasto proporcianais dos ativos IGUAIS ou DIFERENTES? (I / D): D

Proporcao limite para gasto para GOOGL: 0.8

Proporcao limite para gasto para BKNG: 0.6

Proporcao limite para gasto para NVDA: 0.9

Proporcao limite para gasto para TSLA: 1

Proporcao limite para gasto para AMZN: 0.6

Proporcao limite para gasto para NFLX: 0.3

Limites de gasto proporcianais dos setores IGUAIS ou DIFERENTES? (I / D): I

Proporcao de gasto igual para setores: 0.9

Otimizar carteira anterior ou obter carteira nova? (ANTERIOR / NOVA): NOVA
```

```
III) Portifolio recomendado:

Carteira da iteração:

Sigla                   Setor  Quantidade  Proporcao
GOOGL Communication Services         8.0   0.098264
 TSLA Consumer Discretionary        18.0   0.318402
 AMZN Consumer Discretionary        49.0   0.578935
Retorno esperado = $ 15524.85
Dinheiro gasto = $ 9956.01
Ganho de $ 5568.84
Retorno = 0.56 , Volatilidade=0.94 , Indice Sharpe = 0.59
```

Figure 2: Exemplo de criação carteira nova.

```
I) Dados considerados:

Extrair dados dos ativos de que arquivo? tickers_data.csv

Precos historicos de que arquivo? tickers_historical_array.npy

Considerar ações específicas? (S / N) S

Quantas ações serão consideradas? 6

Digite a sigla da ação 1: GOOGL

Digite a sigla da ação 2: BKNG

Digite a sigla da ação 3: NVDA

Digite a sigla da ação 4: TSLA

Digite a sigla da ação 5: AMZN

Digite a sigla da ação 6: NFLX
```

```
II) Variáveis da carteira:

Tempo investido em meses: 18

Dinheiro investido: 15000

Taxa anual livre de risco: 0.1

Limites para gasto proporcianais dos ativos IGUAIS ou DIFERENTES? (I / D): I

Proporcao de gasto igual para ativos: 0.3

Limites de gasto proporcianais dos setores IGUAIS ou DIFERENTES? (I / D): I

Proporcao de gasto igual para setores: 0.6

Otimizar carteira anterior ou obter carteira nova? (ANTERIOR / NOVA): ANTERIOR

Quantidade de investimento anterior: 10000

Digitar quantidade de cada açao separadamente ou o vetor?: (SEPARADO / VETOR) SEPARADO

Quantidade possuida de GOOGL: 8

Quantidade possuida de BKNG: 0

Quantidade possuida de NVDA: 0

Quantidade possuida de TSLA: 18

Quantidade possuida de AMZN: 49

Quantidade possuida de NFLX: 0
```

```
III) Portifolio recomendado:

Carteira da iteração:

Sigla                   Setor  Quantidade  Proporcao
GOOGL Communication Services        36.0   0.294792
 TSLA Consumer Discretionary        25.0   0.294817
 AMZN Consumer Discretionary        38.0   0.299313
Retorno esperado = $ 21561.7
Dinheiro gasto = $ 13333.83
Ganho de $ 8227.87
Retorno = 0.62 , Volatilidade=0.94 , Indice Sharpe = 0.66

Carteira acumulada:

Sigla                   Setor  Quantidade  Proporcao na carteira
GOOGL Communication Services        44.0               0.216181
 TSLA Consumer Discretionary        43.0               0.304251
 AMZN Consumer Discretionary        87.0               0.411162
```

Figure 3: Rebalanceamento da carteira anterior.

4 Simulações

Neste seção, considerando todas as ações do banco de dados, iremos mostrar as simulações realizadas alterando os limites máximos de proporção de ações e ativos, em busca da proporção que maximiza o índice Sharpe da carteira.

O índice Sharpe da carteira tem a mesma ideia de ser uma medida do retorno pelo risco, mas agora consideramos o retorno e risco total da carteira, não mais individualmente como na função objetivo.

$$S = \frac{R}{\sigma}$$

onde: R é a proporção do retorno,

σ é a volatilidade do portfólio,

O retorno R é a porcentagem de retorno total da carteira. Exemplo: se investir 1000 u e a carteira projetar retorno de 1500, $R = \frac{1500}{1000} - 1 = 0.5$

A variação do portfólio (σ^2) é calculada pelo produto do vetor transposto da proporção dos ativos na carteira pela matriz de correlação dos ativos pelo vetor da proporção dos ativos novamente.

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Se H, com M linhas e N colunas, é a matriz do histórico de preços com as colunas normalizadas de N ativos em M períodos, $\frac{1}{N} H^T H$ é a matriz correlação de preço dessa ações. Por fim, a o desvio padrão do portfólio (σ) é a raiz quadrada de σ^2.

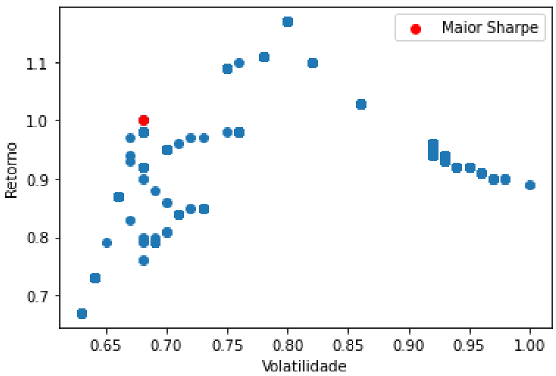
Esse índice S vai ser calculado para cada carteira simulada para achar a que o tem maior.

4.1 Simulações arbitrárias

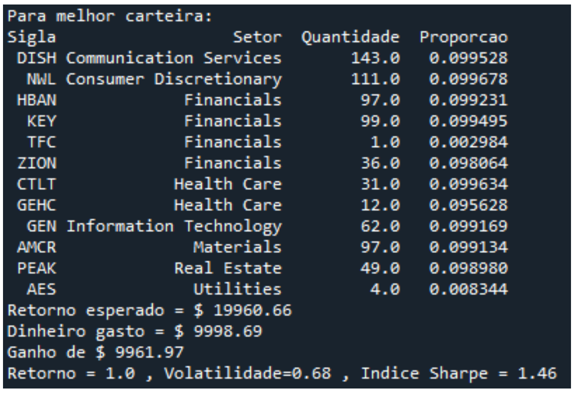
Essas simulações buscam as melhores proporções equilibradas máximas para os ativos e setores.

Os inputs foram: 12 meses de investimento, 10000 de recursos iniciais e taxa livre de risco de 5%. Foram simuladas todas as combinações de proporções iguais para setores e proporções iguais para ativos de 5% em 5%.

Foram armazenados os dados para cada carteira criada e plotamos um gráfico de retorno x volatilidade com eles, destacando a carteira com maior índice Sharpe.



(a) Gráfico das simulações arbitrárias.



```
Para melhor carteira:
Sigla                    Setor  Quantidade  Proporcao
 DISH Communication Services       143.0   0.099528
  NWL Consumer Discretionary       111.0   0.099678
 HBAN               Financials        97.0   0.099231
  KEY               Financials        99.0   0.099495
  TFC               Financials         1.0   0.002984
 ZION               Financials        36.0   0.098064
 CTLT              Health Care        31.0   0.099634
 GEHC              Health Care        12.0   0.095628
  GEN Information Technology        62.0   0.099169
 AMCR                Materials        97.0   0.099134
 PEAK              Real Estate        49.0   0.098980
  AES                Utilities         4.0   0.008344
Retorno esperado = $ 19960.66
Dinheiro gasto = $ 9998.69
Ganho de $ 9961.97
Retorno = 1.0 , Volatilidade=0.68 , Indice Sharpe = 1.46
```

(b) Melhor carteira.

Figure 4: Simulações arbitrárias.

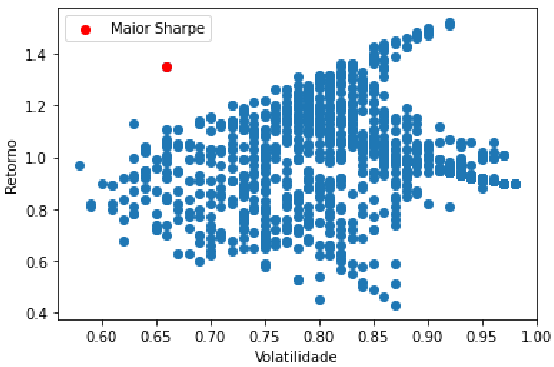
Esta carteira possui as proporções: máximo de 10% para cada ativo e máximo de 30% para cada setor.

Conclui-se que essas são as melhores proporções para esses dados se o usuário quiser considerar limites máximos equilibrados.

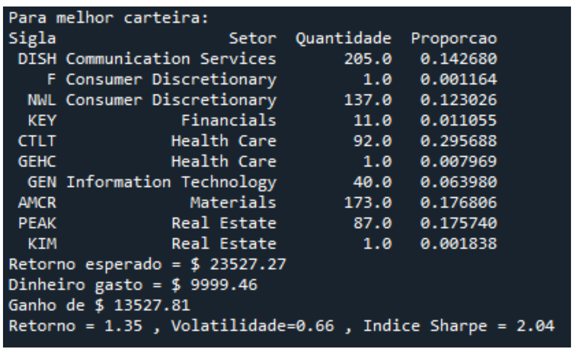
4.2 Simulações aleatórias

Temos que levar em conta que talvez a carteira com maior Sharpe não possui proporções equilibradas, então simulamos 1000 proporções máximas aleatórias no intervalo (0,1].

Novamente, foram armazenados os dados para cada carteira criada e plotamos um gráfico de retorno x volatilidade com eles, destacando a carteira com maior índice Sharpe.



(a) Gráfico das simulações aleatórias



```
Para melhor carteira:
Sigla                    Setor  Quantidade  Proporcao
 DISH Communication Services       205.0   0.142680
    F Consumer Discretionary         1.0   0.001164
  NWL Consumer Discretionary       137.0   0.123026
  KEY               Financials        11.0   0.011055
 CTLT              Health Care        92.0   0.295688
 GEHC              Health Care         1.0   0.007969
  GEN Information Technology        40.0   0.063980
 AMCR                Materials       173.0   0.176806
 PEAK              Real Estate        87.0   0.175740
  KIM              Real Estate         1.0   0.001838
Retorno esperado = $ 23527.27
Dinheiro gasto = $ 9999.46
Ganho de $ 13527.81
Retorno = 1.35 , Volatilidade=0.66 , Indice Sharpe = 2.04
```

(b) Melhor carteira

Figure 5: Simulações aleatórias.

Note que a melhor carteira com proporções aleatórias possui maior índice Sharpe que a melhor com proporções iguais, então é possível concluir que proporções iguais não é a melhor opção se seu objetivo for maximizar o Sharpe da carteira.

As proporções da melhor carteira estão nos arquivos do relatório pois possui um vetor longo.

5 Inspirações

A construção de nosso modelo e forma de análise foram inspiradas em alguns modelos reais de otimização de portfólio, que vamos comentar brevemente nesta seção.

5.1 Maximização de índice sharpe

Maximização de ındice Sharpe é na verdade um método comum em diversos modelos, pois o índice Sharpe é muito popular por ser uma medida que leva em conta o retorno e risco da aplicação.

O modelo mais clássico de maximização de índice Sharpe seria apenas usar o Sharpe como coeficiente da função objetivo, junto de algumas restrições. Essa abordagem simplesmente busca maximizar o índice Sharpe na construção do portfólio.

Outras abordagens utilizam o Sharpe para uma pós análise da carteira, que é o que o próximo modelo que iremos comentar.

5.2 Modelo de Média-Variância de Markowitz

O modelo média-variância foi desenvolvido durante a década de 1950 por Harry Markowitz e posteriormente aprimorado por William Sharpe e outros pesquisadores na década de 1960.

Em reconhecimento às suas contribuições, Markowitz e Sharpe foram laureados com o Prêmio Nobel de Economia em 1990.

Este modelo requer o investimento, as ações , seus preços histórico e restrições de proporções limites. Com isso, ele faz todas as combinações factíveis de carteiras construindo o que Markowitz chama de 'fronteira eficiente'.

Com cada carteira dessas, pode ser calculado o índice Sharpe da carteira levando em conta a média histórica dois ativos, suas variâncias e a covariância do portfólio.

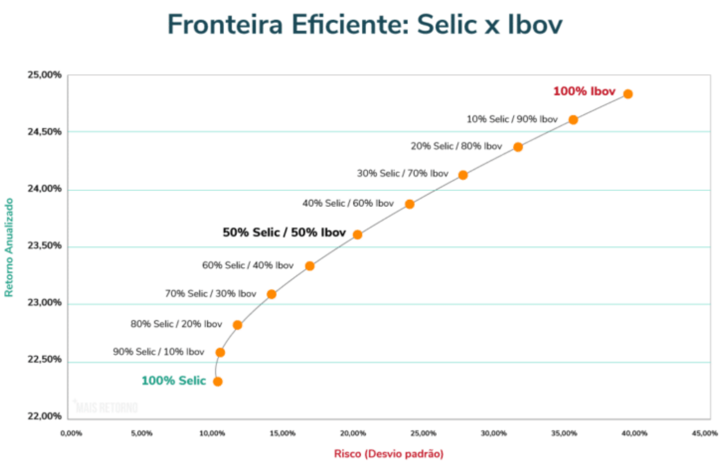


Figure 6: Exemplo de fronteira eficiente de Markowitz [3].

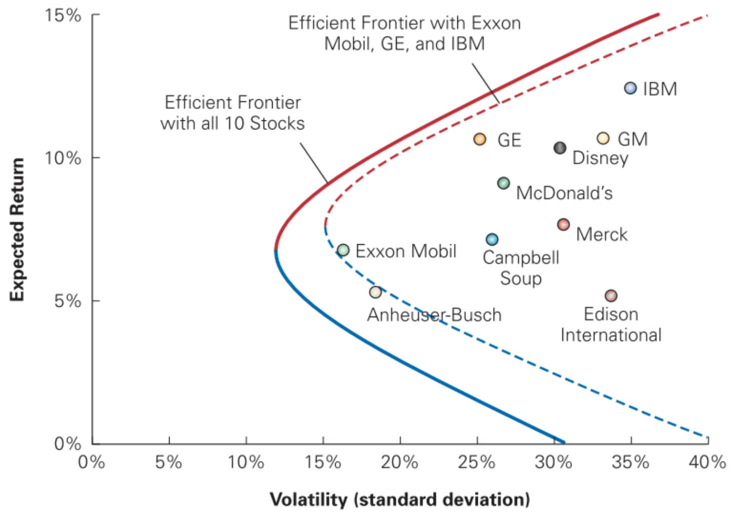


Figure 7: Exemplo de fronteiras eficientes de Markowitz para diferentes restrições de alocação [4].

Perceba que nosso modelo acha apenas a carteira que corresponde as proporções dos ativos que maximizam nossa função objetivo, então não há como ter uma análise de todas as possibilidades para cada restrições de alocação, como na fronteira eficiente de Markowitz.

6 Conclusão

Este projeto trata de otimizar e rebalancear uma carteira de investimentos. Tratamos como um problema linear inteiro de maximização em que os coeficientes de custo indicam a relação retorno/risco e nossas restrições são relacionadas às alocações máximas.

Tendo em vista o escopo do curso e o problema real, aqui tratamos de uma simplificação. O problema real envolve muito obstáculos adicionais como o número de transações, trocas de curto e longo período, rebalanceamento com ativos de outros mercados, nível de aversão a risco do investidor etc.

No entanto, mesmo esta simplificação nos oferece uma oportunidade de ilustrar como a programação inteira pode ser aplicada de forma eficiente. Introduzindo o quão complicado campo de finanças e investimentos pode ser.

7 Referências

[1] Dados S and P 500: https://github.com/datasets/s-and-p-500-companies/blob/main/data/constituents.csv

[2] Códigos da implementação

[3] Gráfico do exemplo: https://maisretorno.com/portal/termos/m/markowitz

[4] Gráfico do exemplo: https://lamfo-unb.github.io/2020/01/22/Markowitz-selecao-carteiras/