Exemple

« Donner le tableau de signes de $f(x) = -4(x-2)(x+3)$. »

Réponse :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Application à la résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du second degré, on ramènera celle-ci à une comparaison entre $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ et 0. On utilisera alors du tableau de signes de $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ pour trouver les solutions.

Exemple

« Résoudre $-4(x-2)(x+3) \leq 0$. »

Réponse : Nous avons donné le tableau de signes de $f(x) = -4(x-2)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau, $-4(x-2)(x+3)$ est inférieur ou égal à 0 si $x \in]-\infty\,;\,-3\,] \cup [\,2\,;\,+\infty\,[$.

Fonction polynôme de degré 3

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 3, toute fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

où a, b, c et d sont des réels et a **est non nul**.

Exemple

La fonction $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3$ est une fonction polynôme de degré 3.

Forme développée et forme factorisée

Tout comme pour les fonctions polynômes de degré 2, une fonction polynôme de degré 3 peut éventuellement s'écrire sous forme factorisée :

$$f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$$

avec a, x_1, x_2 et x_3 des nombres réels et a est non nul.

Remarque

Pour vérifier qu'une forme factorisée et qu'une forme développée d'un polynôme de degré 3 sont identiques, il faudra ici aussi appliquer la règle de la distributivité.

Exemple

Montrer que l'on peut réécrire la fonction $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 20x - 16$ sous la forme :

$$f(x) = 2\,(x-4)\,(x+2)\,(x+1)$$

.

Réponse :

$$\begin{aligned}
2(x-4)(x+2)(x+1) &= 2(x-4)(x^2+x+2x+2) \\
&= 2(x-4)(x^2+3x+2) \\
&= 2(x^3+3x^2+2x-4x^2-12x-8) \\
&= 2(x^3-x^2-10x-8) \\
&= 2x^3-2x^2-20x-16
\end{aligned}$$

Remarque

Un polynôme de degré 3 n'a pas forcément une forme factorisée.

Racines d'un polynôme de degré 3

On appelle racine d'un polynôme de degré 3 les solutions de l'équation : $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Dans le cas où le polynôme est donnée sous forme factorisée $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$ les racines seront x_1, x_2 et x_3.

Tableau de signes de $A\,(X-X_1)\,(X-X_2)\,(X-X_3)$

Dans le cas où la fonction polynôme de degré 3 a trois racines, son tableau de signes sera :