MATHEMATIQUES

1 STD2A

hilbRt

MATHÉMATIQUES

1STD2A

Cyrus Zalian-Rahatabad

hilbRt

SOMMAIRE

01 **Géométrie dans l'espace (p.6)**
Repèrage / Calcul de longueurs et de milieux / Vecteurs

02 **Perspective & Sections (p.32)**
Perspectives parallèles / Perspective cavalière / Sections planes / Section d'un cylindre

03 **Figures régulières (p.60)**
Transformations du plan / Frises / Polygones réguliers / Pavages

04 **Suites (p.104)**
Définition / Représentation graphique / Suites arithmétiques / Suites géométriques

05 **Fonctions (p.142)**
Fonction polynôme de degré 2 et 3 / Résolution graphique et algébrique d'équations

06 **Dérivation (p.186)**
Fonction dérivée / Taux d'accroissement / Tangente / Sens de variation

07 **Statistiques (p.220)**
Tableau croisé d'effectifs et de fréquences / Probabilités conditionnelles

08 **Probabilités (p.250)**
Variables aléatoires / Arbre de probabilités / Épreuve de Bernoulli

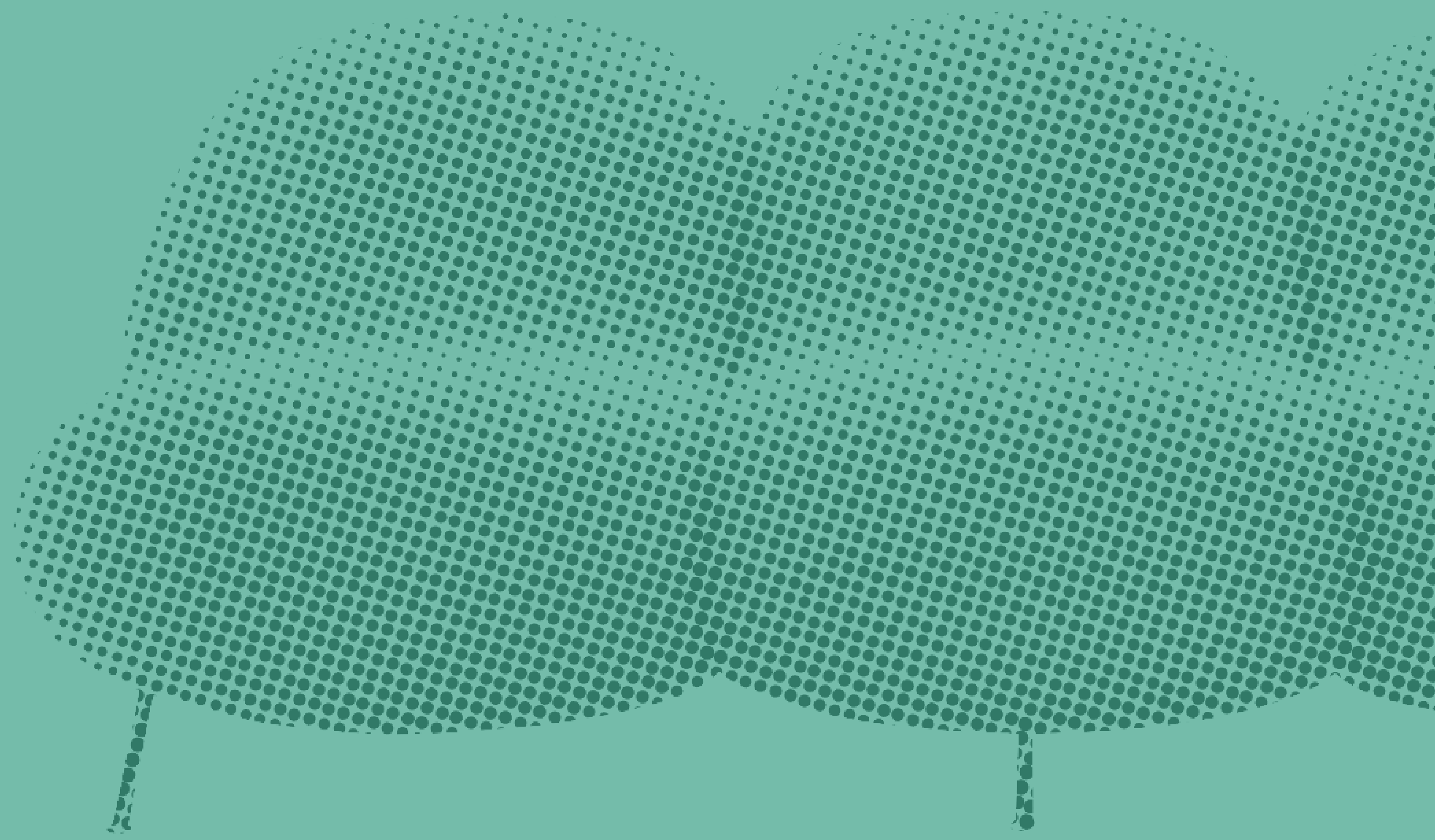
09 **Automatismes (p.276)**
Proportions / Taux d'evolution / Calculs / Equations / Lecture graphique / Statistiques

MATHEMATIQUES 1STD2A
PROGRAMME 2019

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Objectifs du chapitre : Repérage dans l'espace / Calcul de longueurs / Coordonnées d'un milieu / Vecteurs dans l'espace / Opérations sur les vecteurs dans l'espace / Translation dans l'espace.

01



ISKOS BERLIN
Bababa Sofa
2017

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Affiche Channel, Andy WARHOL, 1985

2. Affiche Container Corporation of America, Herbert BAYER, 1951

3. Affiche Vins Camp Romain, Claude GADOUD, 1930

4. Marshmallow Sofa, George NELSON, 1956

5. Showroom Citroën C_42, Manuelle GAUTRAND, 2007

6. Affiche hommage à Shigeo Fukuda, Peut DERELI, 2009

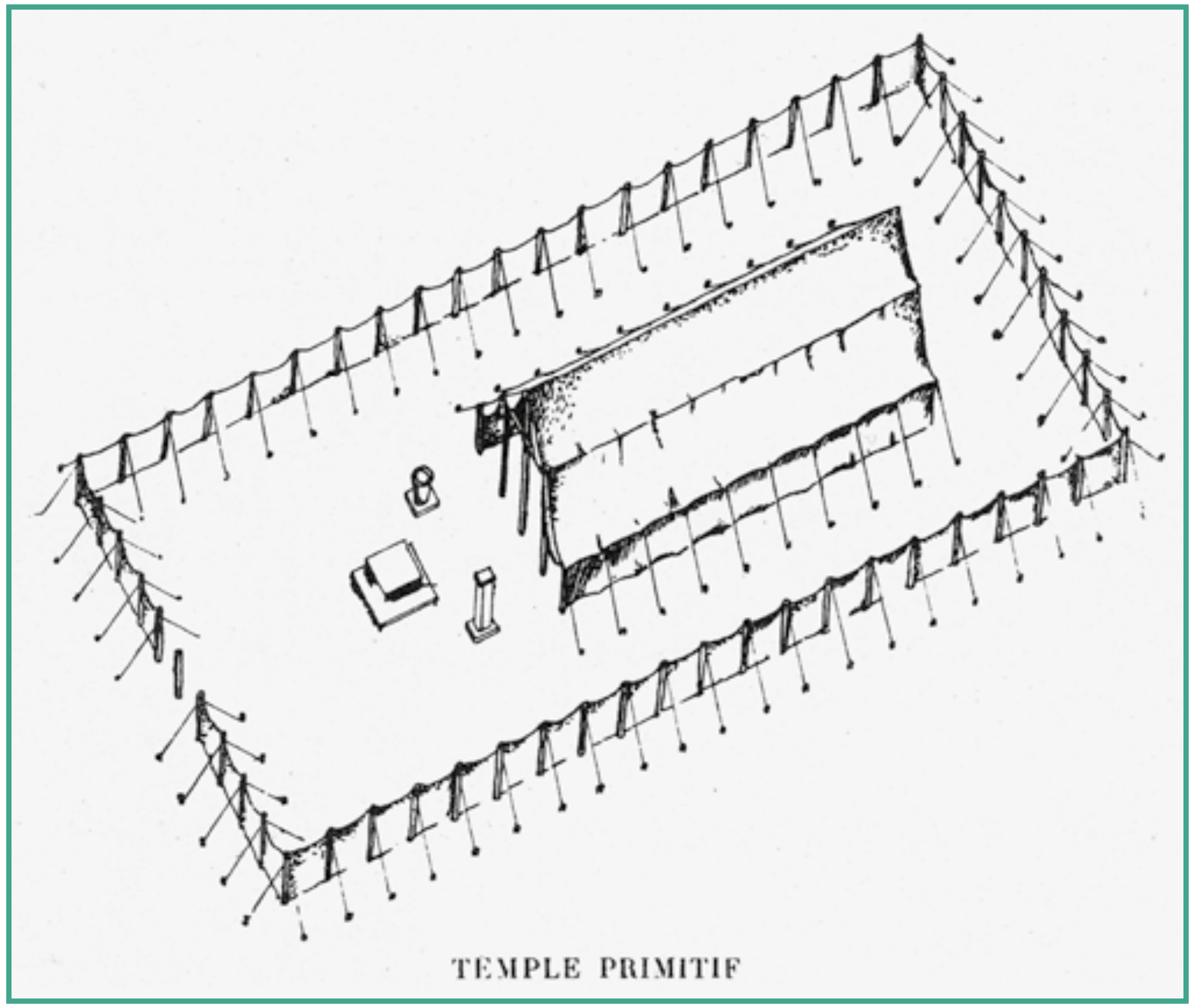
7. Ball Lamp, Verner PANTON, 1969

8. Bababa Sofa, Boris BERLIN et Aleksej ISKOS., 2017

9. Tissu #5, Sonia DELAUNAY, 1885 - 1979

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.

TRACÉ RÉGULATEUR



Ci-dessus :
Le temple primitif - la tente juive dans le désert
Le Corbusier, Vers une architecture, 1926

Le Corbusier développe pour la première fois la notion de *tracé régulateur* dans son ouvrage *Vers une architecture*, publié en 1923. Dans ce livre, en analysant des exemples d'architecture primitive et historique, il observe l'utilisation instinctive des proportions et des lignes directrices.

Il insiste ainsi sur l'importance des proportions harmonieuses et de l'utilisation des lignes géométriques pour créer des espaces architecturaux équilibrés et esthétiques.

1. Coordonnées et milieux

a. On considère le tracé régulateur représenté à la page suivante. On se place dans le repère (O , I , J). Le quadrilatère OMRQ est un rectangle. Donner les coordonnées des points M, N et P.

b. Justifier que le quadrilatère OMNP est un carré.

c. Quelle est la nature du quadrilatère NPQR ?

d. Le point D est situé à l'intersection des diagonales du quadrilatère NPQR. En déduire ses coordonnées. Justifier vos calculs.

e. Le point G est situé à l'intersection des diagonales du quadrilatère OMNP. En déduire ses coordonnées. Justifier vos calculs.

f. Quelle est la nature du quadrilatère GNDP ? Justifier votre réponse.

e. Soit S et T les points situés, respectivement, à l'intersection des diagonales des quadrilatères GNDP et OMRQ. Donner les coordonnées des points S et T. Qu'en déduisez-vous ?

2. Longueur d'un segment

a. Calculer la longueur du segment [ON].

b. Calculer la longueur du segment [NQ].

c. Calculer la longueur du segment [GD].

3. Translation et vecteur

a. Quel est l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$?

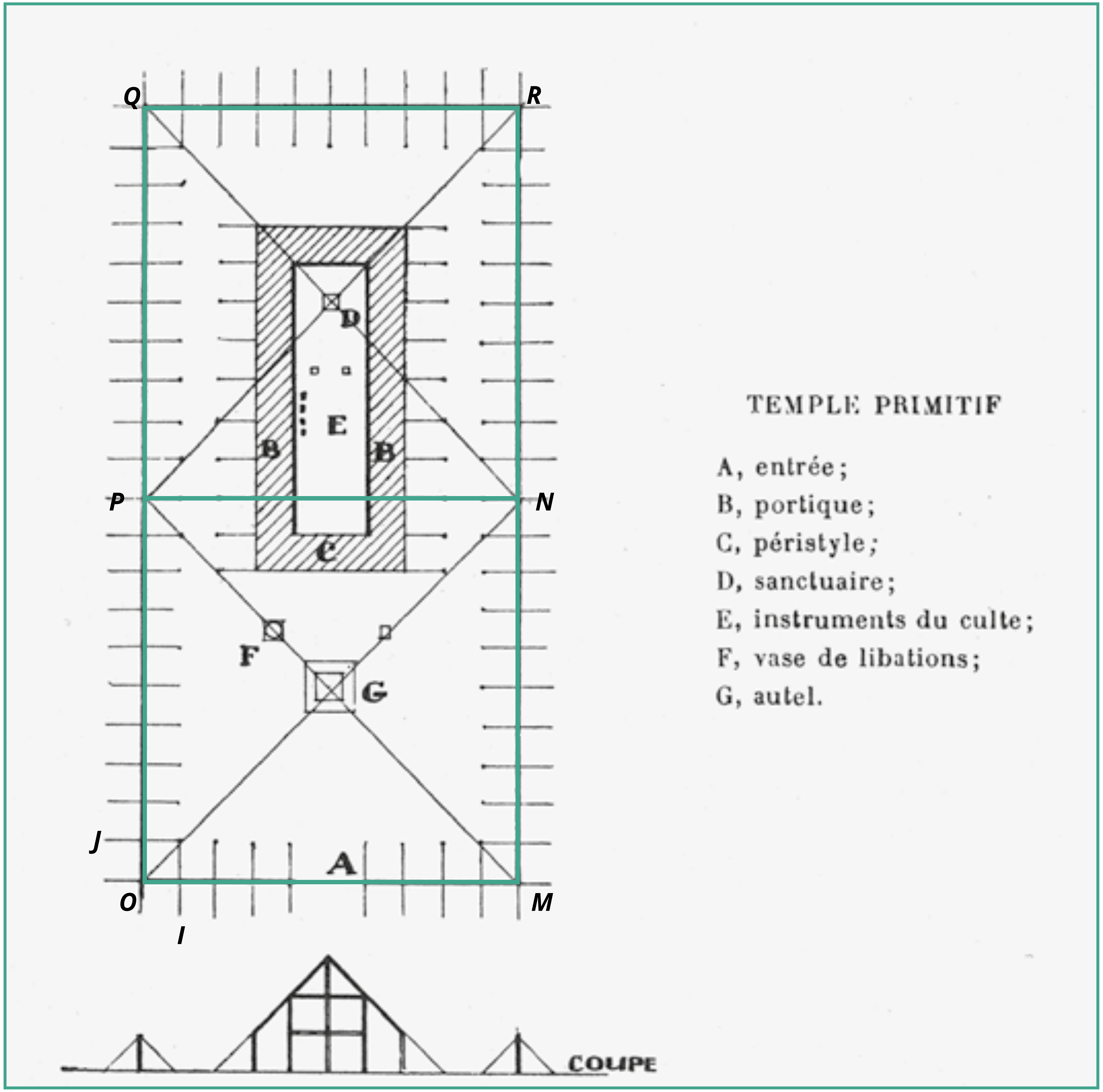
b. Quel est l'image du point P par la translation de vecteur $\overrightarrow{ON}$?

c. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ON}$.

d. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OR}$.

e. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$.

f. Tracer sur votre feuille les vecteur $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{PD}$.



Ci-dessus :
Cabanon de Le Corbusier,
Roquebrune-Cap-Martin, France, 1951

À gauche :
Tracé régulateur - Le temple primitif,
Le Corbusier, Vers une architecture, 1926

02. COURS

Repérage dans l'espace

Définition

Pour définir un repère dans l'espace :

- on prend un point O, **l'origine**,
- trois points I, J, K qui définissent les axes du repère (OI), (OJ), (OK), respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la côte.

Remarques

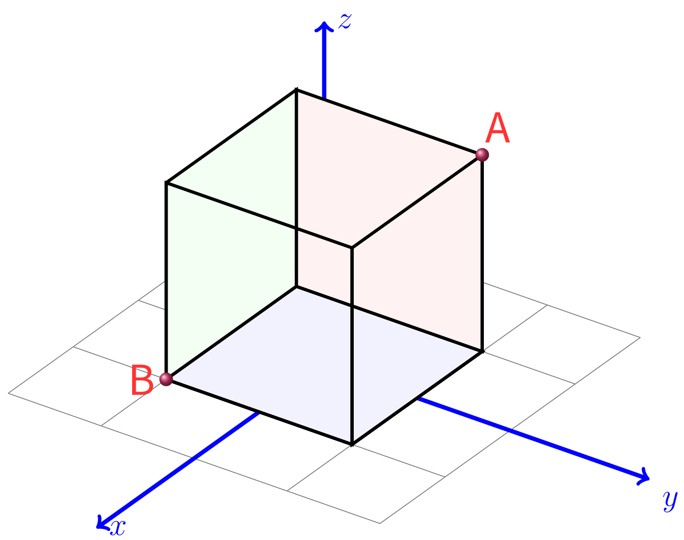
— On garde la même terminologie que pour le plan. Ainsi, un repère sera :

- orthogonal si ses axes sont orthogonaux ;
- orthonormal s'il est orthogonal est que les unités de chaque axe sont égales.

— On peut également définir un repère à partir de l'origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Exemple

Dans la figure ci-dessous, représentant un cube, donner les coordonnées des points A et B :



Réponse : $A(-1;1;1)$ et $B(1;-1;0)$.

Milieu d'un segment

Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ deux points de l'espace. Le milieu M de [AB] a pour coordonnées :

$$\boxed{\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}}$$

Longueur d'un segment

Soit $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ deux points de l'espace. La longueur AB est donnée par :

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}}$$

Exemple

« Donner le milieu et la longueur du segment [AB] avec $A(-2;3;4)$ et $B(2;-5;6)$. »

Réponse : Le milieu aura pour coordonnées $(0;-1;5)$ et la longueur sera de :

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{84}$$

.

Calcul vectoriel dans l'espace

Translation

Une translation est une transformation géométrique qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

Vecteur associé à une translation

Une translation dans l'espace peut être caractérisée par un vecteur :

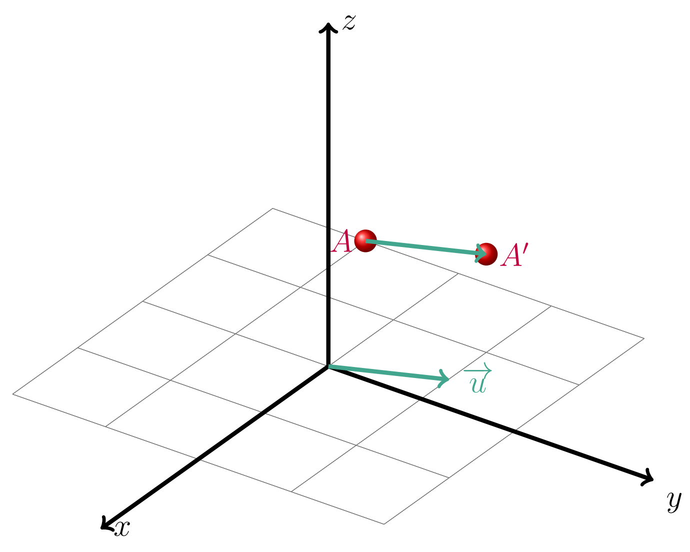
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

qui correspond à un déplacement de x suivant l'axe (OI), y suivant l'axe (OJ), z suivant l'axe (OK).

Exemple

« Tracer la représentation du vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\,)$ et le point A' issue de la translation de A(-2;-1;0) de vecteur $\overrightarrow{u}$. »

Réponse :



Égalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Somme de vecteurs

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}}$$

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et un nombre réel k, alors :

$$\boxed{k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}}$$

Exemple

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\-8\\-3\end{pmatrix}$.
2. Donner les coordonnées du point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$ où A(4;3;1).

Réponse :

1.

$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}2\times 2+1\\2\times 3-8\\2\times 7-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\-2\\11\end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix}x_{A'}-4\\y_{A'}-3\\z_{A'}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\\z_{A'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4\\3+3\\7+1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\\z_{A'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}$$

03. EXERCICES

Préambule

01

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $A(1\,;\,2)$, $B(-2\,;\,3)$, $C(4\,;\,-1)$, $D(0\,;\,3)$, $E(-2\,;\,0)$.
2. Calculer la longueur AB.
3. Déterminer les coordonnées du milieu de [AB].

02

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $A(1\,;\,2)$, $B(-2\,;\,3)$, $C(4\,;\,-1)$, $D(0\,;\,3)$, $E(-2\,;\,0)$.
2. Calculer la longueur AB.
3. Déterminer les coordonnées du milieu de [AB].

03

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $A(0\,;\,0)$, $B(4\,;\,0)$, $C(0\,;\,3)$.
2. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
3. Vérifier que le triangle ABC est bien un triangle rectangle.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

04

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $P(3\,;\,2)$, $Q(-1\,;\,5)$, $R(4\,;\,-2)$, $S(1\,;\,3)$, $T(-2\,;\,-1)$.
2. Calculer la longueur PQ.
3. Déterminer les coordonnées du milieu de [PQ].
4. Vérifier si les points P, Q et R sont alignés.

05

Dans un repère normé $(O\,;\,I\,,\,J)$., pour lequel l'axe des ordonnées fait un angle de 45 degrés avec l'axe des abscisses, placer les points : $A(1\,;\,2)$, $B(-2\,;\,3)$, $C(4\,;\,-1)$.

06

Dans un repère normé $(O\,;\,I\,,\,J)$, pour lequel l'axe des ordonnées fait un angle de 30 degrés avec l'axe des abscisses, placer les points : $P(2\,;\,1)$, $Q(-1\,;\,4)$, $R(3\,;\,-2)$.

07

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$. Soit les points $M(1\,;\,4)$, $N(3\,;\,-2)$, $P(-2\,;3)$ et $Q(4\,;1)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

08

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$. Soit les points $A(2\,;\,5)$, $B(6\,;\,-1)$, $C(-3\,;4)$ et $D(1\,;-3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

09

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $A(2\,;\,3)$ et $B(5\,;\,-1)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer les points suivants : $C(-3\,;4)$ et $D(1\,;-2)$.
4. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
5. Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

10

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $X(0\,;\,5)$ et $Y(4\,;\,-3)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{XY}$.
3. Placer les points suivants : $U(-1\,;2)$ et $V(3\,;-4)$.
4. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UV}$.
5. Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{UV}$ sont colinéaires.

11

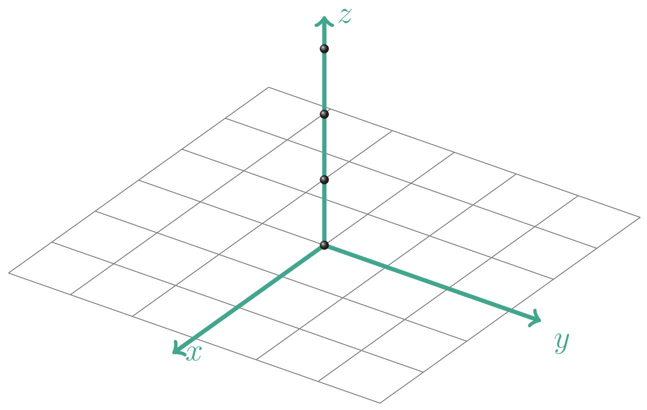
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$.

1. Placer les points suivants : $F(2\,;\,-3)$, $G(1\,;\,4)$, $H(-3\,;\,2)$, $I(0\,;\,-2)$, $J(3\,;\,1)$.
2. Calculer la longueur FG.
3. Déterminer les coordonnées du milieu de [FG].
4. Vérifier si les points F, G et H sont alignés.

Coordonnées dans l'espace

12

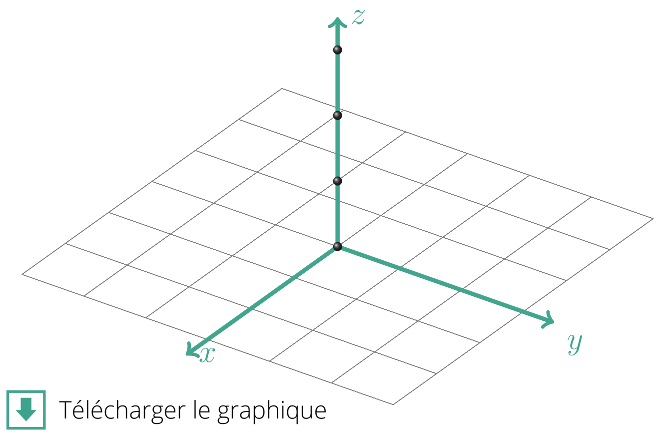
Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, placer les points : $A(1\,;\,2\,;\,0)$, $B(3\,;\,1\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,-3\,;\,1)$.



Télécharger le graphique

13

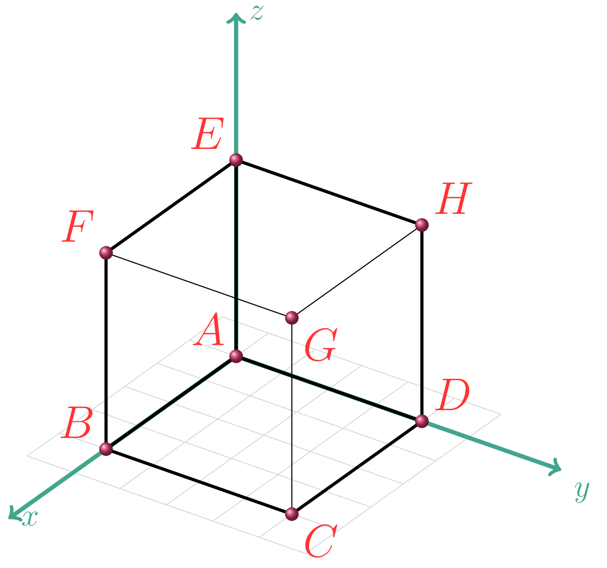
Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, placer les points : $A(0\,;\,2\,;\,1)$, $B(3\,;\,0\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,1\,;\,1)$.



Télécharger le graphique

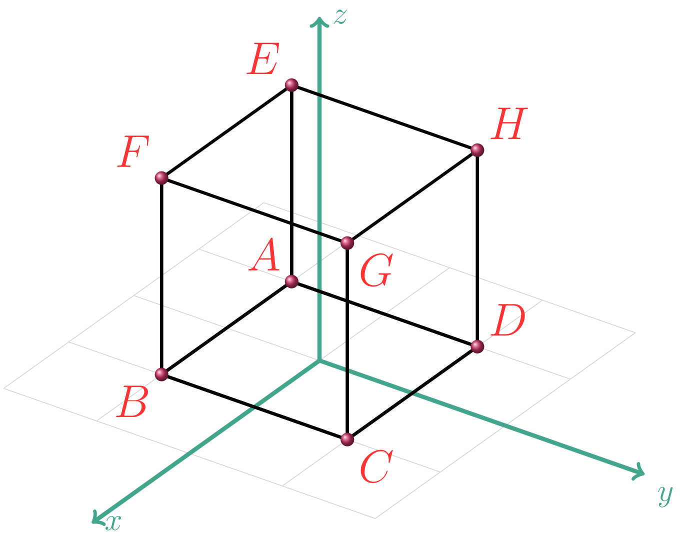
14

Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, indiquer les coordonnées des différents points visibles sur le cube ci-dessous :



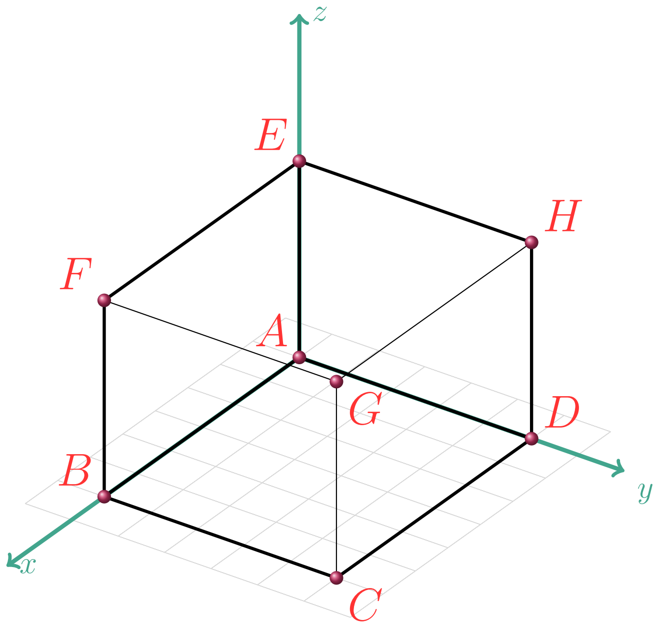
15

Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, indiquer les coordonnées des différents points visibles sur le cube ci-dessous :



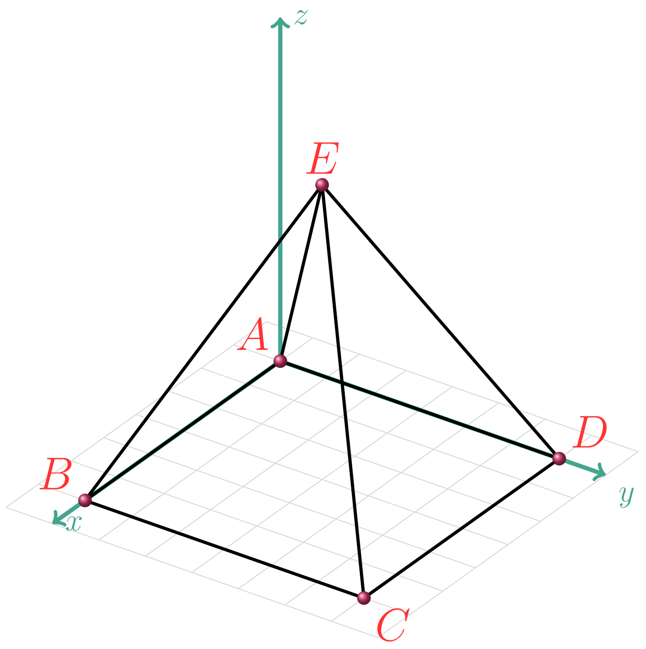
16

Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, indiquer les coordonnées des différents points visibles sur le parallélépipède rectangle ci-dessous :



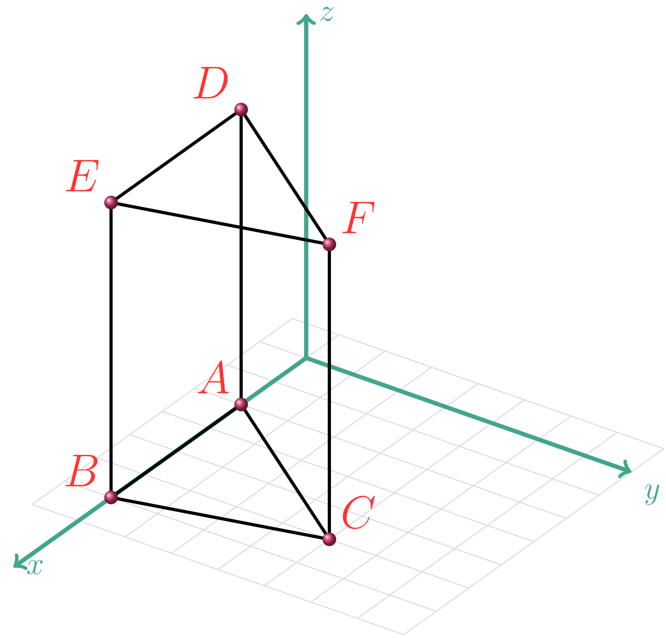
17

Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, indiquer les coordonnées des différents points visibles sur la pyramide à base carrée ci-dessous :



18

Dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage, indiquer les coordonnées des différents points visibles sur le prisme à base triangulaire ci-dessous :



19

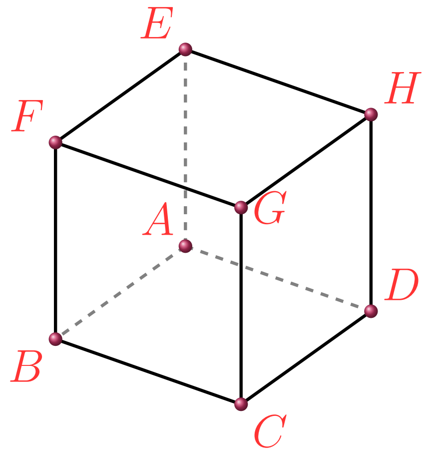
Soit O, I, J et K quatre points de l'espace. On se place dans le repère $(O\,;\,I\,,\,J\,;\,K)$. Donner les coordonnées des points O, I, J et K.

20

Soit O, I, J et K quatre points de l'espace. On se place dans le repère $\left(O\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{OI}\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{OK}\right)$. Donner les coordonnées des points O, I, J et K.

21

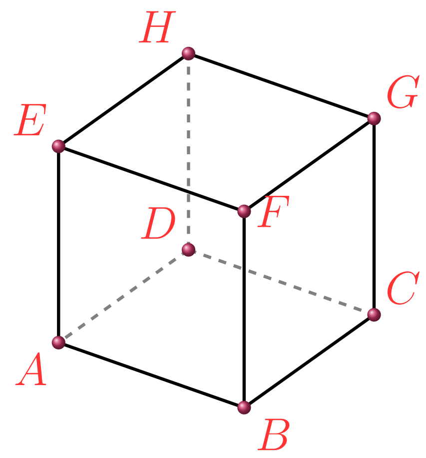
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.



Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.

22

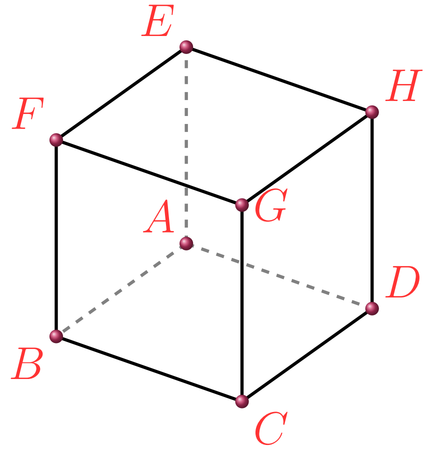
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.



Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.

23

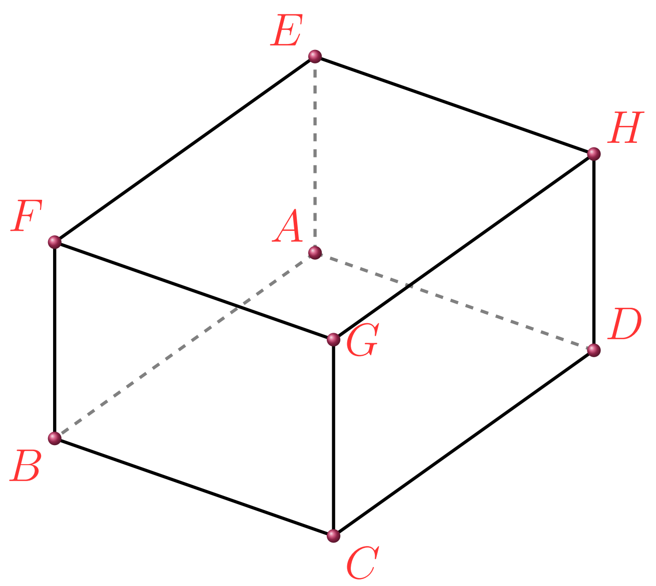
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous dont chaque arête mesure 5 unités. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\,;\,\frac{1}{5}\overrightarrow{AE}\right)$.



Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.

24

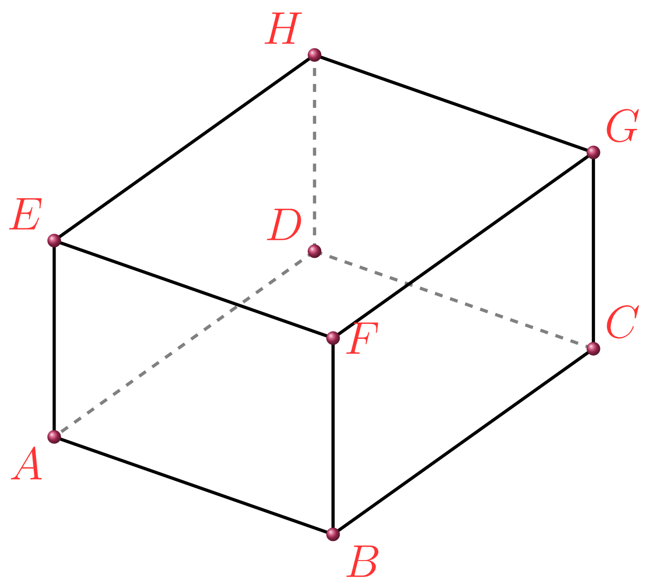
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que AB $= 5$, AD $= 3$ et AE $= 2$. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.

25

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que AB $= 5$, AD $= 3$ et AE $= 2$. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.



Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.

Milieu dans l'espace

26

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(-1\,;\,3\,;\,0)$ et $B(2\,;\,0\,;\,5)$.

Calculer les coordonnées du milieu M de [AB].

27

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(1\,;\,7\,;\,-3)$ et $B(2\,;\,5\,;\,-2)$.

Calculer les coordonnées du milieu M de [AB].

28

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(0\,;\,3\,;\,0)$, $B(8\,;\,5\,;\,1)$, $C(2\,;\,1\,;\,6)$ et $D(-6\,;\,-1\,;\,5)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

29

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(1\,;\,2\,;\,3)$, $B(5\,;\,4\,;\,7)$, $C(3\,;\,1\,;\,0)$ et $D(-1\,;\,-1\,;\,-4)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

30

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(1\,;\,5\,;\,1)$, $B(7\,;\,6\,;\,2)$, $C(-2\,;\,3\,;\,0)$ et $D(-6\,;\,-2\,;\,-1)$. Montrer que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

31

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(3\,;\,5\,;\,2)$, $C(1\,;\,2\,;\,4)$ et $D(4\,;\,7\,;\,6)$. Montrer que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

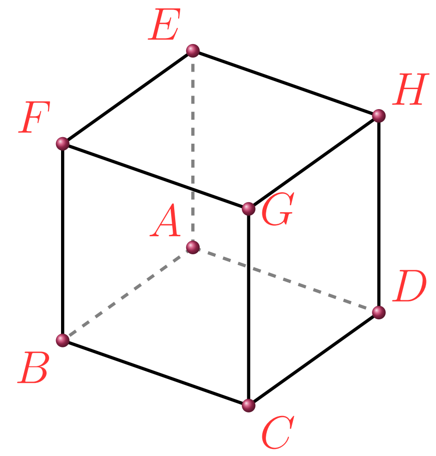
32

On considère deux points $A(6\,;\,1\,;\,10)$ et $B(8\,;\,5\,;\,6)$.

1. Donner les coordonnées du milieu de [AB].
2. En déduire que A et B appartiennent à une sphère dont on donnera le rayon et le centre.

33

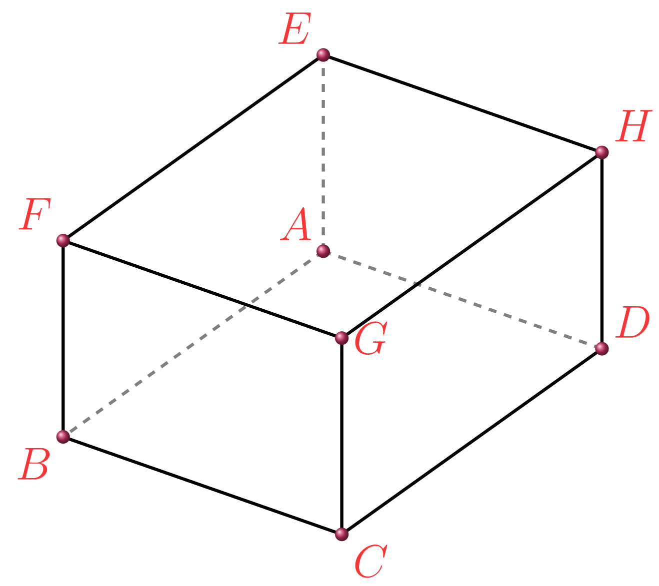
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées du point I milieu de $[AC]$.
2. Donner les coordonnées du point J milieu de $[AG]$.
3. Donner les coordonnées du point K milieu de $[EF]$.
4. Donner les coordonnées du point L milieu de $[EH]$.

34

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que AB $= 5$, AD $= 3$ et AE $= 2$. On se place dans le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.
2. Donner les coordonnées du point J milieu de $[AC]$.
3. Donner les coordonnées du point K milieu de $[EH]$.

Longueur dans l'espace

35

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(1\,;\,2\,;\,3)$ et $B(4\,;\,-1\,;\,6)$.

Calculer la longueur du segment [AB].

36

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $P(-2\,;\,3\,;\,1)$ et $Q(5\,;\,-4\,;\,2)$.

Calculer la longueur du segment [PQ].

37

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $C(0\,;\,3\,;\,0)$ et $D(0\,;\,0\,;\,5)$.

1. Calculer la longueur du segment [AB].
2. Calculer la longueur de la diagonale [AC].
3. Calculer la longueur de la diagonale [AD].

38

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(1\,;\,2\,;\,3)$, $B(4\,;\,-1\,;\,6)$ et $C(1\,;\,5\,;\,-2)$.

1. Calculer les longueurs des segments [AB], [AC] et [BC].
2. Vérifier que le triangle ABC est rectangle.

39

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J\,,\,K)$, on place les points $A(2\,;\,-1\,;\,4)$, $B(-2\,;\,3\,;\,1)$ et $C(1\,;\,1\,;\,7)$.

1. Calculer les longueurs des segments [AB], [AC] et [BC].
2. Vérifier que le triangle ABC est rectangle.

40

On considère trois points $A(2\ ;\ -3\ ;\ 8)$, $B(6\ ;\ -3\ ;\ 3)$ et $C(2\ ;\ -3\ ;\ 3)$.

1. Quelles sont les coordonnées du milieu M de [AB].
2. Montrer que A, B et C sont à égale distance de M.
3. En déduire que A, B et C sont sur une sphère dont on donnera le rayon et le centre.

41

On considère trois points $A(-1\ ;\ 8\ ;\ 3)$, $B(-3\ ;\ 3\ ;\ 3)$ et $C(-1\ ;\ 3\ ;\ 3)$.

1. Quelles sont les coordonnées du milieu M de [AB].
2. Montrer que A, B et C sont à égale distance de M.
3. En déduire que A, B et C sont sur une sphère dont on donnera le rayon et le centre.

42

On considère un prisme droit à base triangulaire.

1. $A(2\ ;\ 5\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$, $C(2\ ;\ 3\ ;\ 3)$. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C.
2. En supposant que la base soit parallèle au plan (x, y), donner les coordonnées de D, E et F, tel que $ABCDEF$ soit un prisme droit de hauteur 5 unités.

43

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J\ ,\ K)$, on considère les points $A(-3\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 5\ ;\ 1)$, $C(3\ ;\ 5\ ;\ 0)$ et $D(0\ ;\ 5\ ;\ -1)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

44

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J\ ,\ K)$, on considère les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $B(8\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $C(9\ ;\ 4\ ;\ 2)$ et $D(3\ ;\ 6\ ;\ 2)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle

45

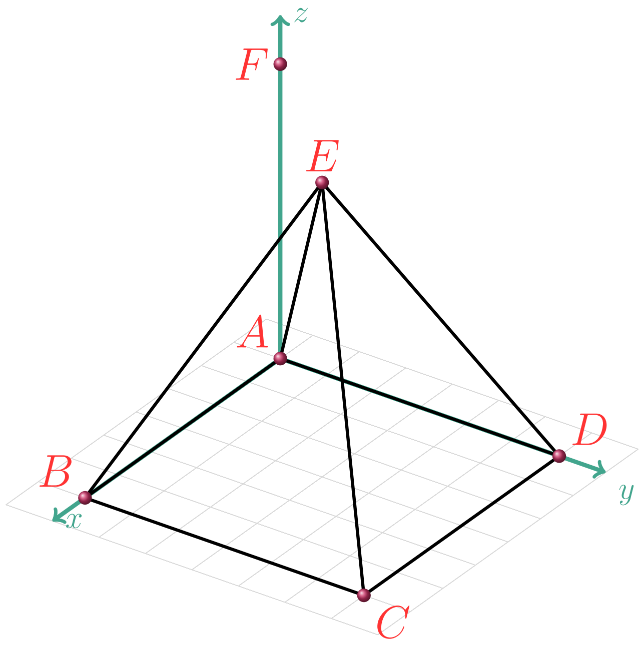
Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J\ ,\ K)$, on soit les points $A(-3\ ;\ -4\ ;\ 2)$, $B(2.5\ ;\ -4\ ;\ -3)$, $C(5\ ;\ -4\ ;\ 4)$ et $D(-0.5\ ;\ -4\ ;\ 9)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

46

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ,\ J\ ,\ K)$, on considère les points $A(4\ ;\ 3\ ;\ -1)$, $B(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $C(0\ ;\ 3\ ;\ 7)$ et $D(6\ ;\ 3\ ;\ 5)$. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

47

Soit la pyramide à base carrée $ABCDE$ ci-dessous.



On considère dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AF}\right)$ où $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$. On note H le milieu de [AC]

1. Vérifier que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.
2. Calculer les longueurs BH, BE et EH.
3. En déduire que BHE est un triangle rectangle en H.
4. Que peut-on dire du segment [EH] pour la pyramide $ABCDE$?
5. En déduire le volume de la pyramide $ABCDE$ – on rappelle que le volume de la pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{hauteur} \times \mathcal{A}_{\text{base}}$$

Coordonnées de vecteurs

48

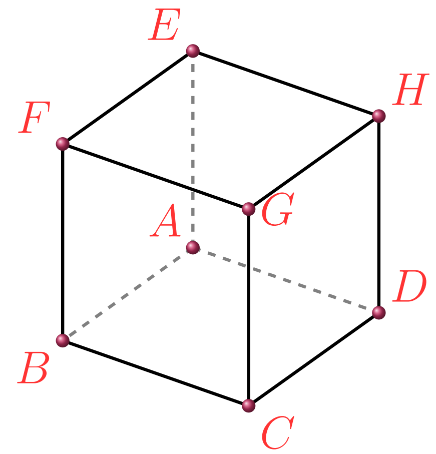
Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ avec $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-2\ ;\ 3\ ;\ 3)$, $C(4\ ;\ -1\ ;\ 8)$, $D(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$, $E(-2\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $F(8\ ;\ -3\ ;\ -7)$.

49

Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ avec $A(-2\ ;\ 1\ ;\ -6)$, $B(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $C(-3\ ;\ 5\ ;\ 7)$, $D(6\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $E(-2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $F(8\ ;\ -3\ ;\ -1)$.

50

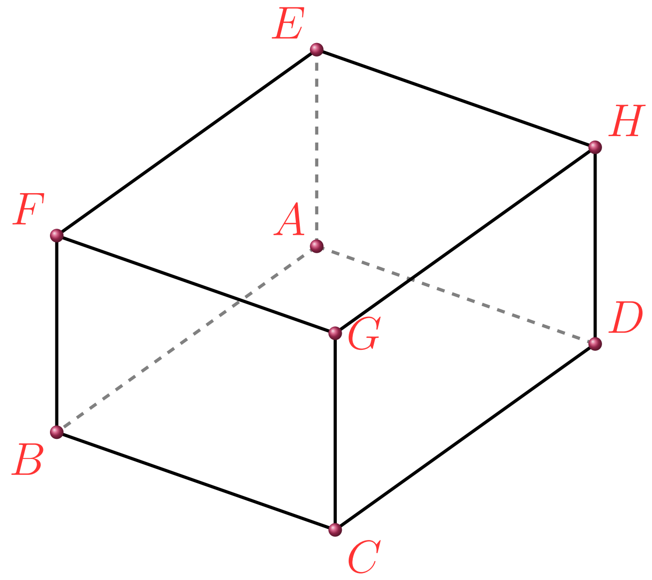
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous. On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$.
4. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$.
5. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EG}$.
6. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EH}$.
7. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$.

51

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que AB $= 5$, AD $= 3$ et AE $= 2$. On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FH}$.
4. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$.
5. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FB}$.
6. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FC}$.
7. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$.

Calcul avec des vecteurs

52

Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

53

Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

54

Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

55

Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\2\end{pmatrix}$.

56

Donner les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-1\end{pmatrix}$.

57

Donner les coordonnées de $-4\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}$.

58

Donner les coordonnées de $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-9\\6\\12\end{pmatrix}$.

59

Donner les coordonnées de $-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-25\\1\\10\end{pmatrix}$.

60

Donner les coordonnées de $3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}7\\8\\-4\end{pmatrix}$.

61

Donner les coordonnées de $4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix}$.

62

Donner les coordonnées de $4\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-12\\-9\\1\end{pmatrix}$.

63

Donner les coordonnées de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$.

64

Donner les coordonnées de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$ avec $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

Translation

65

Soit $A(2\,;\,1\,;\,7)$ et $B(3\,;\,-4\,;\,6)$ deux points de l'espace. Soit la translation de vecteur $\vec{u}$ transformant A en B. Donner les coordonnées de $\vec{u}$.

66

Soit $A(6\,;\,-2\,;\,5)$ et $B(4\,;\,-2\,;\,0)$ deux points de l'espace. Soit la translation de vecteur $\vec{v}$ transformant A en B. Donner les coordonnées de $\vec{v}$.

67

Soit $A(-5\,;\,3\,;\,1)$. On note B sa translation de vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-8\\-2\\4\end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de B.

68

Soit $A(1\,;\,-1\,;\,3)$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$. On note B la translation de A par le vecteur $\vec{u}$. Donner les coordonnées de B.

69

Soit $A(-7\,;\,2\,;\,-1)$. On note B sa translation de vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et C la translation de B par le vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de C.

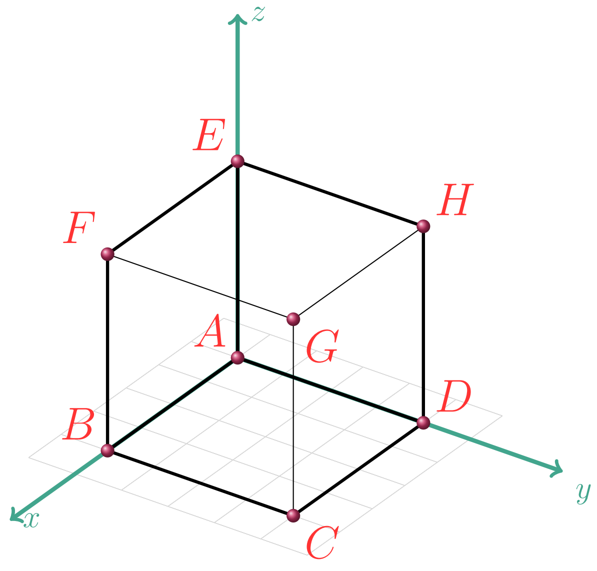
70

Soit $A(5\,;\,-2\,;\,4)$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

On note B la translation de vecteur $\vec{u}$ de A et C la translation de vecteur $\vec{v}$ de B. Donner les coordonnées de C.

71

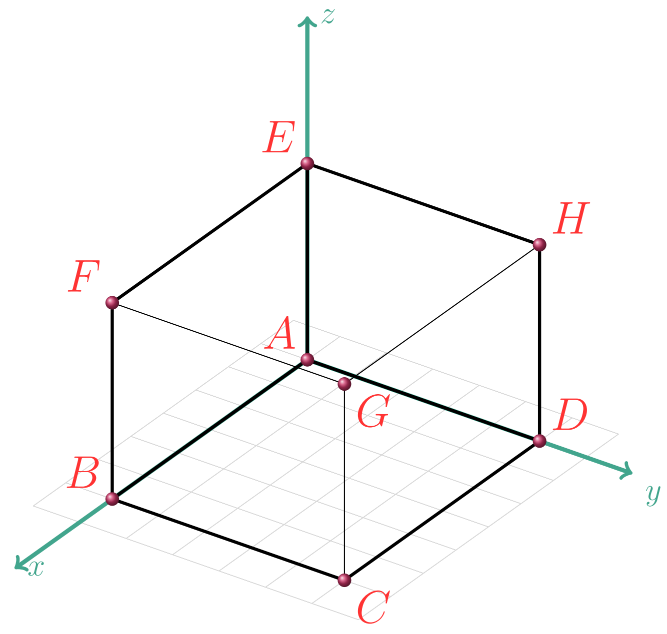
On considère le cube $ABCDEFGH$ dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage :



1. On pose I le point vérifiant $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Placer le point I sur le graphique.
2. On pose J le point vérifiant $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AE}$. Placer le point E sur le graphique.
3. On pose K le point vérifiant $\overrightarrow{DK}=2\overrightarrow{DC}$. Placer le point K sur le graphique.

72

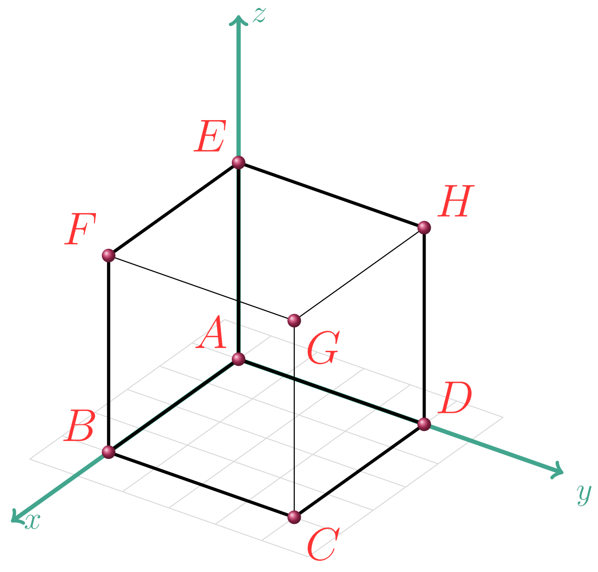
On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage :



1. On pose I le point vérifiant $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Placer le point I sur le graphique.
2. On pose J le point vérifiant $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AF}$. Placer le point E sur le graphique.
3. On pose K le point vérifiant $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{CD}$. Placer le point K sur le graphique.

73

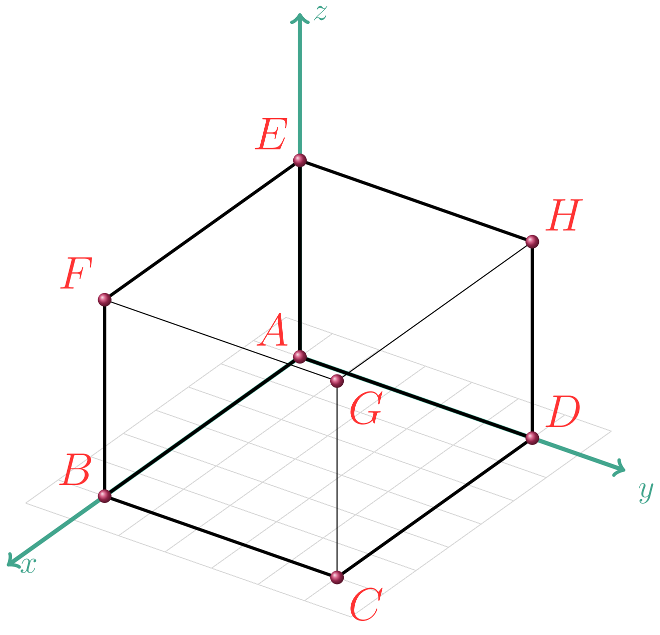
On considère le cube $ABCDEFGH$ dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage :



1. Quel est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?
2. Quel est l'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$?
3. Quel est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$?
4. Quel est l'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?

74

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ dans le repère orthonormé ci-dessous, où l'unité est donnée par le quadrillage :



1. Quel est l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?
2. Quel est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$?
3. Quel est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$?

Problèmes

75

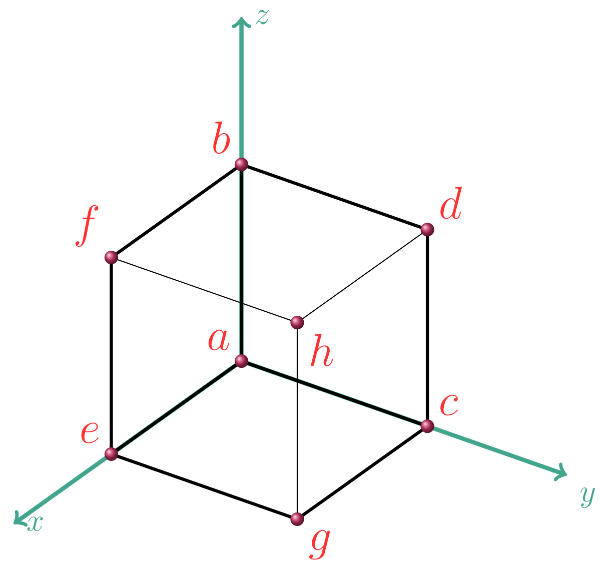
On considère une sphère de centre $O(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et de rayon 2 cm. On souhaite translater cette sphère de sorte que son nouveau centre soit en $O'(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$. Donner les coordonnées du vecteur correspondant.

76

1. Représenter un cube en perspective cavalière, dont le coin inférieur gauche de la face avant a pour coordonnées $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et dont chaque arête mesure 2 cm.
2. On souhaite translater ce cube d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées du nouveau coin inférieur gauche de la face avant.
3. Tracer le cube translaté.

77

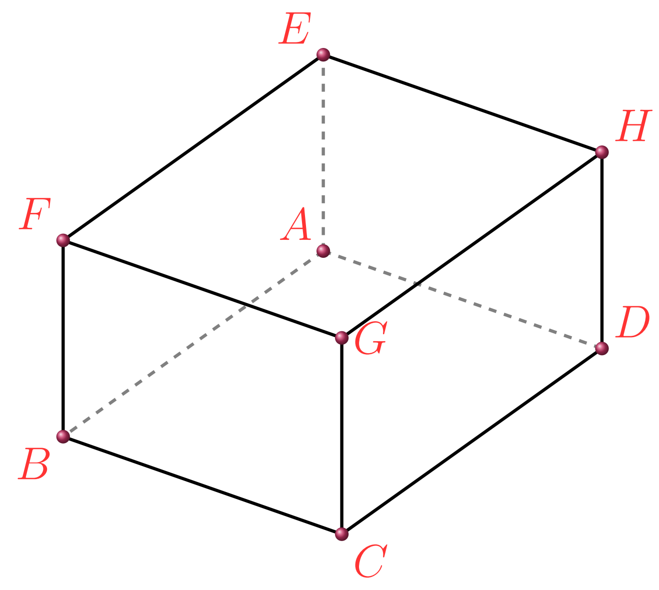
On se place dans le repère orthonormé d'origine a et d'axe (ae), (ac), (ab) représenté ci-dessous.



1. Donner les coordonnées des points a e, c et b.
2. Donner les coordonnées du point f.
3. (a) Calculer la longueur bc.
   (b) Calculer la longueur fc.
   (c) Quelle est la nature du triangle fbc ?
4. Quelle est l'image du point f par la projection orthogonale sur le plan (acd) ?
5. Soit n le milieu de $[ef]$, m le milieu de $[ab]$ et p le point de $[gh]$ tel que $\overrightarrow{hp} = \frac{1}{4}\overrightarrow{hg}$. Tracer la section du cube par le plan (nmp).

78

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que $\text{AB} = 6$, $\text{AD} = 4$ et $\text{AE} = 2$.



On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans ce repère.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. On considère le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$. Placer le point I sur le graphique.
4. Donner les coordonnées du point I.
5. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EI}$.
6. Soit J le point défini par $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Placer le point J sur le graphique.
7. Donner les coordonnées du point J.
8. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FJ}$.
9. Quelle est la nature du quadrilatère $EIJF$. Justifier.
10. Calculer la longueur des segments [EF] et [EI].
11. En déduire l'aire du quadrilatère $EIJF$.

79

On se place dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}\ ;\ \overrightarrow{OK}\right)$. On considère la sphère $\mathcal{C}$ de centre O passant par $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

1. Quel est le rayon de cette sphère ?
2. Donner l'aire de cette sphère.
3. On considère le point $B(2\ ;\ 0\ ;\ 3)$. Montrer que $B \in \mathcal{C}$.
4. Soit le point $C(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$. Quelle est la nature du triangle OCB ?
5. Soit le point $S(0\ ;\ 0\ ;\ -4)$.
   (a) Montrer que $C \in \mathcal{C}$.
   (b) Montrer que les points O, A et S sont alignés.
6. Soit le point $D(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 3)$. Montrer que $D \in \mathcal{C}$.
7. On considère la section de la sphère $\mathcal{C}$ par le plan DCB.
   (a) Quelle est la nature de cette section ?
   (b) Donner les caractéristiques de cette section.

80

On se place dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}\ ;\ \overrightarrow{OK}\right)$. On considère le cône $\mathcal{C}$ de sommet $S(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de base le cercle de centre O et de rayon [OI].

1. Quelle est la hauteur du cône $\mathcal{C}$?
2. Quel est le volume du cône $\mathcal{C}$?
3. Donner les coordonnées du point I.
4. Calculer la longueur du segment [SI].
5. Quelle est la nature du triangle SIO ?
6. On considère le point R image du point I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IS}$.
   (a) Reproduire le cône en perspective parallèle et placer le point R sur ce graphique.
   (b) Donner les coordonnées de R.
7. Soit le point $O'(0\ ;\ 0\ ;\ 2{,}5)$. Montrer que $\overrightarrow{O'R}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont colinéaires.

04. TP

Les images de synthèse tridimensionnelles

Dans l'ensemble de cette activité, nous nous placerons dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Préambule

1. Combien de points sont nécessaires pour définir un plan dans l'espace ?
2. En déduire le nombre de vecteurs nécessaires pour définir un plan.
3. Application : décrire les plans dirigés par les vecteurs suivants $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u}=(1;0;0)$ et $\vec{v}=(0;1;0)$
   (b) $\vec{u}=(1;0;0)$ et $\vec{v}=(0;0;1)$
   (c) $\vec{u}=(1;-1;0)$ et $\vec{v}=(0;-1;1)$

Principe du rendu tridimensionnel

Comme la perspective parallèle, le rendu tridimensionnel repose sur une *projection* :

— un plan $\mathcal{P}$ est choisit. Il correspond, par exemple, à l'objectif d'une caméra, ou à un tableau. Ce plan est défini par deux vecteurs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— L'objet est projeté sur ce plan suivant une direction donnée, le transformant alors en une représentation en 2D.

L'outil mathématique permettant d'effectuer cette projection s'appelle le produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}=(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}=(x'\,;\,y'\,;\,z')$ est donné par la formule :

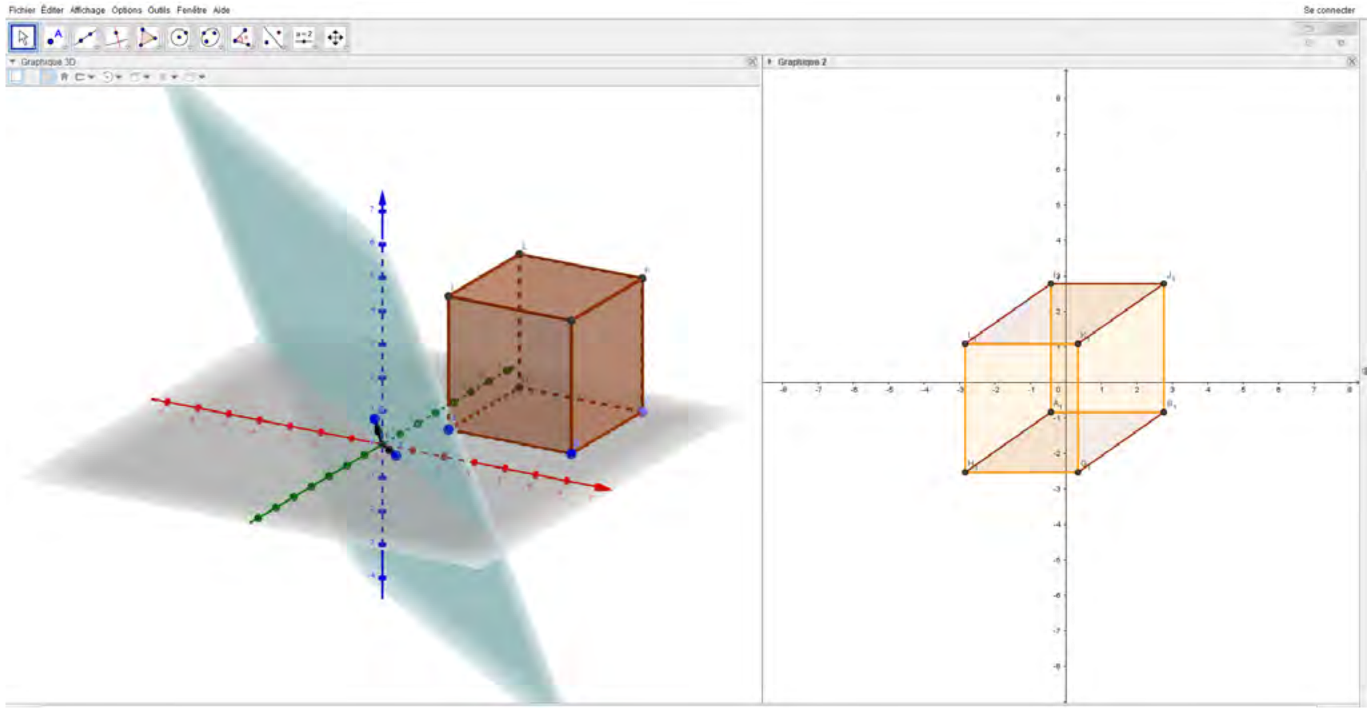
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

Prenons un cube ABCDEFGH tel que :

$A(1\,;2\,;0)$,	$C(5\,;6\,;0)$,	$E(1\,;2\,;4)$,	$G(5\,;6\,;4)$,
$B(5\,;2\,;0)$,	$D(1\,;6\,;0)$,	$F(5\,;2\,;4)$,	$H(1\,;6\,;4)$.

1. Donner les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, etc.
2. Calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}$ dans le cas où $\vec{u}=(1;-1;0)$ et $\vec{v}=(0;-1;1)$
3. On appelle x et y les deux résultats obtenus précédemment. Placer le point $A'(x\,;\,y)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
4. Reprendre la question précédente en remplaçant $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$, puis par $\overrightarrow{OC}$, etc.
5. Relier les points obtenus pour compléter la représentation du cube dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
6. Reprendre les trois questions précédents, mais cette fois avec les vecteurs $\vec{u}=(1;0;0)$ et $\vec{v}=(0;1;0)$. Qu'obtient-on ? Ce résultat était-il prévisible ?

Application sous Geogebra



Télécharger le fichier Geogebra

1. Ouvrir un graphique 3D et un graphique 2D côte-à-côte (aller dans *Affichage* > *Graphique 3D* et *Affichage* > *Graphique 2D*).
2. Sélectionner le graphique 3D, en cliquant dans la fenêtre correspondante et placer les points A et B du cube défini dans la première partie.
3. Tracer un cube en sélectionnant l'outil *cube* et en cliquant sur les points A et B.
4. Nous allons tout d'abord définir les vecteurs caractérisant le plan en entrant dans le champ de saisie *u=Vecteur(1,-1,0)* et *v=Vecteur(0,-1,1)*.
5. Tracer le plan défini par les vecteurs précédents, en entrant dans le champ de saisie : *P = Plan(u,v)*.

   Afin de créer la vue en perspective parallèle de ce cube :

6. cliquer dans la fenêtre Graphique 2D, et dans le champ de saisie, entrer : *A_1 = (ProduitScalaire(u, Vecteur(O, A)), (ProduitScalaire(v, Vecteur(O, A)))*. On demande de cette façon au logiciel de placer le point A_1 dont les coordonnées sont $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}$, dans le repère $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
7. Procéder de la même façon pour obtenir la projection des autres points du cube.
8. Modifier l'orientation du plan et commenter.

PERSPECTIVE & SECTIONS

Objectifs du chapitre : Connaître les principales caractéristiques de la perspective parallèle / Distinguer les différentes perspectives parallèles / Tracer un volume en perspective cavalière / Tracer la section d'un volume à faces planes par un plan / Tracer la section d'un cylindre par un plan.

02

Svilen GAMOLOV
Chaise MOHA
2014

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Lampe Fluoro, Tom DIXON, 2009

2. Fauteuil Bulle, Eero AARNIO, 1968

3. Lampe Moon, Verner PANTON, 1960

4. Lampe Anglepoise, George CARWARDINE, 1933

5. Théière en argent, Marianne BRANDT, 1924

6. Carafes à eau et à vin Mia et Tua, Mario BOTTA, 2000

7. Bol en bronze, Michael ANASTASSIADES, 2000

8. Cafetière, Wolfgang RÖSSER et Friedrich MARBY, 1924

9. Chaise MOHA, Svilen GAMOLOV, 2014

10. Horloge Vitra, Georges NELSON. 1948

11. Blob VB3, DMVA architecten, 2008

12. Lampe de chevet Parodia, Pier Giacomo CASTIGLIONI, 1983

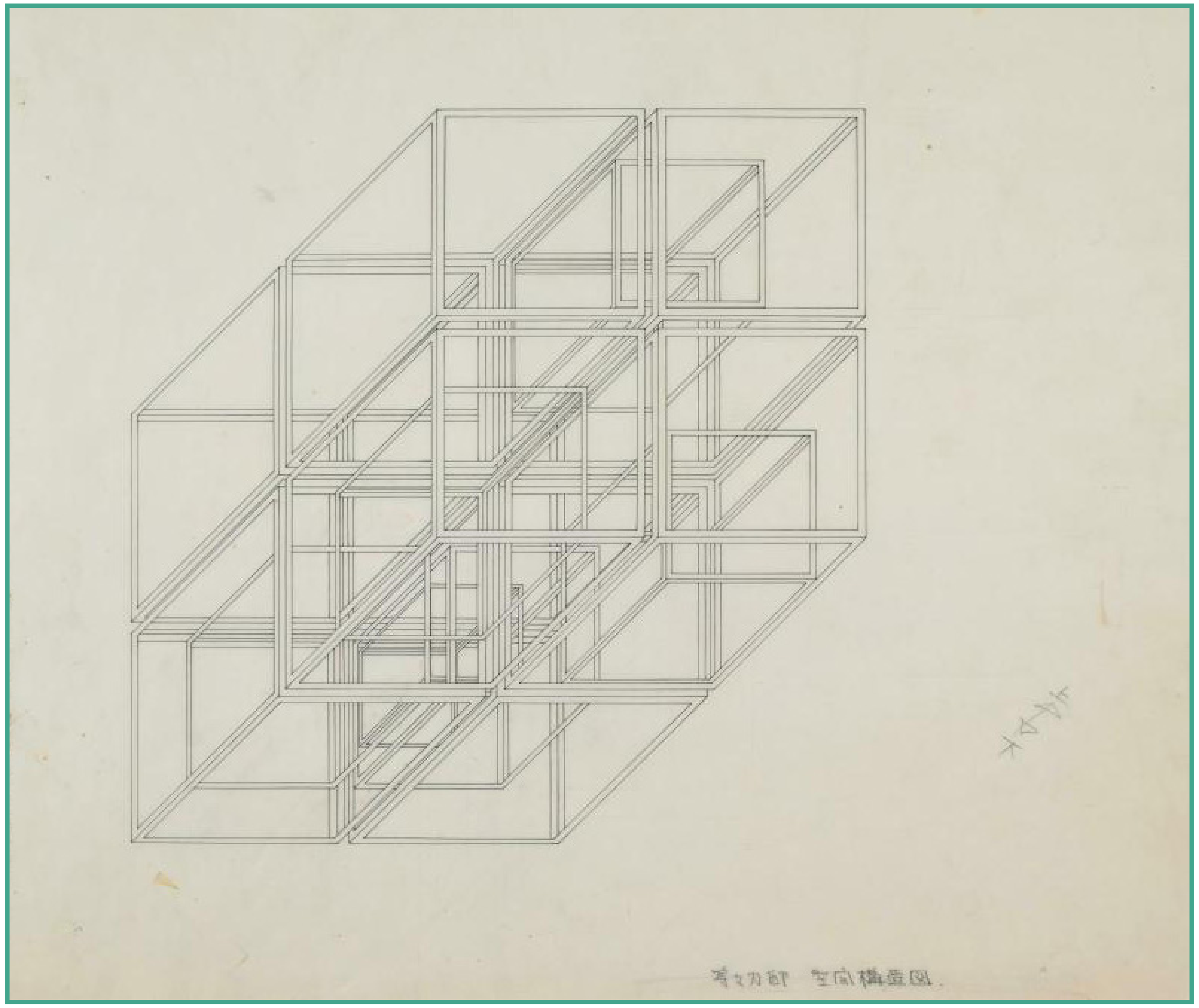
13. Suspension Fontana Arte, Gio PONTI, 1931

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.

HIROMI FUJII

À gauche :
Résidence Todoroki,
Tokyo, Japon, 1974

À droite :
Axonométrie Résidence Todoroki, Projet 1, Dessin conceptuel
Encre de Chine et graphite sur calque, 1973-1974



1. L’architecture minimaliste

Hiromi Fujii est un architecte japonais reconnu comme précurseur du mouvement déconstructiviste. À la fin des années 1960, il critique les fondements du modernisme et explore la neutralité en architecture, notamment par l’utilisation de la grille. Son travail minimaliste vise à ramener l’architecture à un état premier, libre de toute influence historique. Fujii crée des projets variés et complexes de 1968 à 2000, tels que le Projet Q, la Maison Todoroki et la série Mizoe.

2. Perspective axonométrique

L'architecture de la résidence Todoroki repose sur l'empilement de quatre cubes. Dans cette partie on analyse le dessin d'architecture *Axonométrie Résidence Todoroki, Projet 1, Dessin conceptuel* présenté à la page précédente.

a. Rappeler les principales propriétés d'angles et de longueurs du cube.

b. Que peut-on dire du traitement des segments perpendiculaires dans le dessin de Hiromi Fujii à la page précédente ? Dans quel cas la perpendicularité est-elle conservée ?

c. Le parallélisme est-il conservé dans ce même dessin d'architecture ?

d. Pourquoi peut-on dire que les rapports de longueurs ne sont pas conservés dans le premier dessin d'Hiromi Fujii ? Peut-on cependant voir une conservation des rapports de longueur dans certains cas ?

e. On appelle plan frontal une surface plane parallèle au plan de l'image. Repérer les éventuels plans frontaux dans le dessin d'architecture.

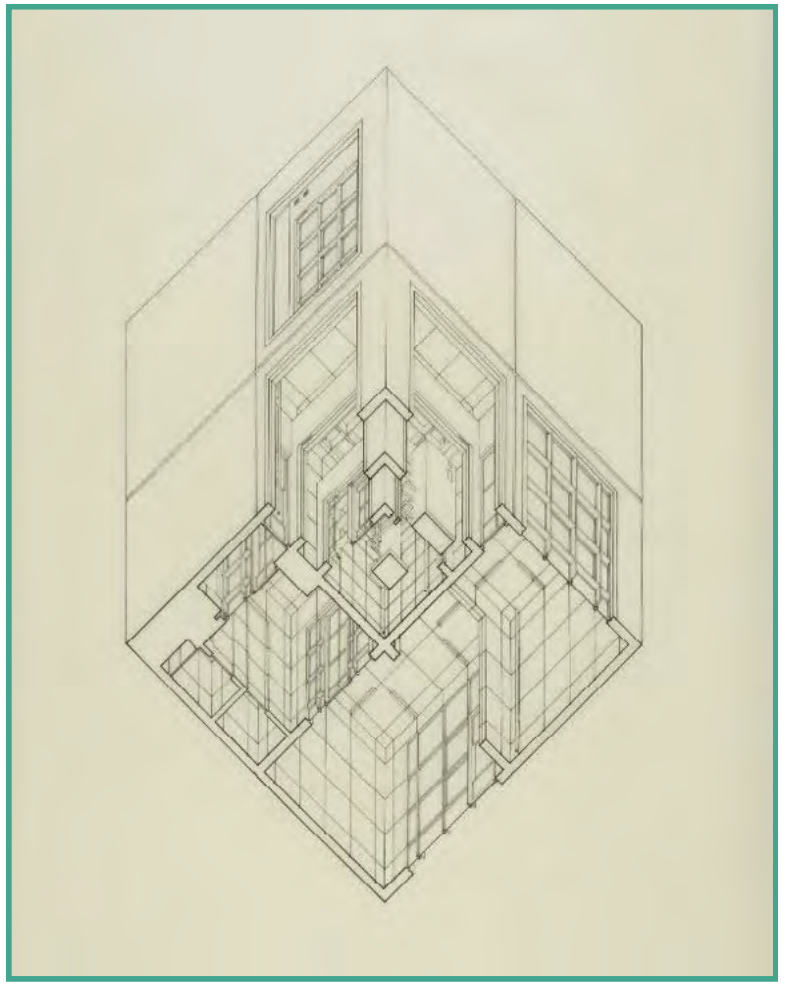
3. Une autre perspective

Dans cette partie on analyse le dessin d'architecture *Axonométrie Résidence Todoroki* présenté sur cette page.

a. Existe-t-il un ou des plans frontaux dans le dessin d'architecture ci-contre ?

b. Les observations faites sur le parallélisme, la perpendicularité, la conservation des longueurs sont-elles toujours de vigueur pour ce second dessin ?

c. Résumer les observations faites sur ces deux dessins en regroupant les points communs et les différences.



4. Perspective et tradition

Le *fukinuki yatai* est une technique artistique japonaise traditionnelle utilisée dans les peintures, notamment dans les rouleaux narratifs appelés *emaki,* principalement pendant les périodes Heian (794-1185) et Kamakura (1185-1333). Cette technique, qui signifie littéralement *maisons soufflées*, consiste à représenter des bâtiments sans toit ni plafond, offrant une vue en plongée sur l'intérieur des structures. Elle permet ainsi de voir simultanément l'intérieur et l'extérieur, et de montrer les interactions entre les personnages dans un cadre architectural détaillé.

En quoi le traitement de la perspective dans les *fukinuki yatai* est-il similaire à celui observé dans les dessins d'architecture de Hiromi Fujii ?

À gauche :
Résidence Todoroki, Tokyo, Japon, 1974

En haut :
Tosa Mitsuoki, Kashiwagi, Le Dit du Genji, XVIIe siècle

02. COURS

Perspective

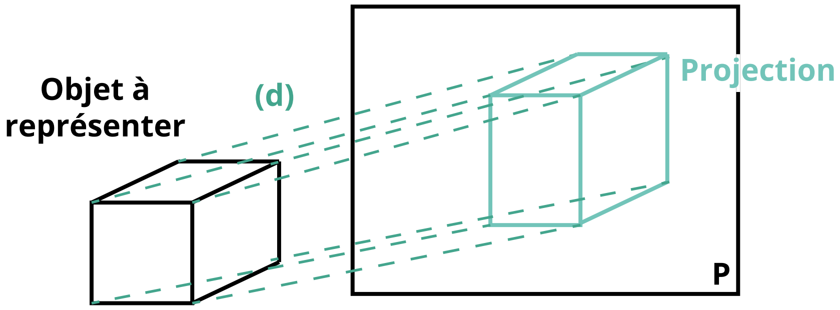
La perspective consiste à représenter sur une surface (soit en deux dimensions) la vue d'objets à trois dimensions. Nous nous intéresserons cette année aux perspectives parallèles, en particulier la perspective cavalière. La perspective centrale sera abordée en terminale.

La perspective parallèle

La perspective parallèle est une forme de perspective obéissant aux deux règles suivantes :

— la représentation d'une droite restera une droite,
— le parallélisme sera conservé.

La perspective parallèle peut être vue comme la projection sur un plan P suivant une direction donnée (d).



Exemple

Le dessin ci-dessous est une représentation en perspective parallèle : la représentation d'une droite reste une droite et le parallélisme est conservé.

Remarque

Ainsi, la perspective parallèle est similaire au phénomène d'ombre sur une surface produite par une source lumineuse à l'infini.

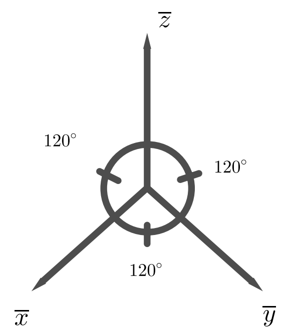
La surface où est projetée l'ombre est le plan mentionné ci-dessus, les rayons lumineux d'une source lumineuse à l'infini étant tous parallèles, on peut les modéliser par une droite (d) et ses parallèles.

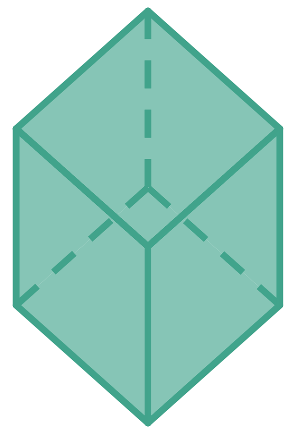
Caractérisation

Une perspective parallèle est entièrement déterminée par l'image d'un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz). Elle sera ainsi caractérisée par l'angle entre les images des axes et le rapport de réduction appliqué à chacun de ces axes.

Exemple

La perspective ci-dessous, appelée perspective isométrique, accorde la même importance à chacun des axes. Ainsi l'angle entre les images de (Ox), (Oy) et (Oz) est le même, égal à $120°$. Le rapport de réduction est le même suivant chaque axe.





Propriétés

— L'image d'une droite étant une droite, la perspective parallèle **«conserve» l'alignement**.
— L'image de deux droites parallèles sont **deux droites parallèles**.
— L'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image et plus généralement **les rapports de longueurs sont conservés**.
— Tout objet situé dans un plan parallèle au plan de projection a une image « en vraie grandeur ». Les angles et les distances sont alors conservés. **Un objet parallèle au plan de projection est dit frontal**.

Méthode

La conservation du parallélisme est le moyen le plus visible permettant de distinguer, au premier coup d'oeil, la perspective parallèle de la perspective centrale.

Remarque

Comme la perspective parallèle permet de donner une impression de relief tout en conservant les proportions dans une direction donnée, elle est particulièrement utilisée en dessin technique (ingénierie) et en architecture.

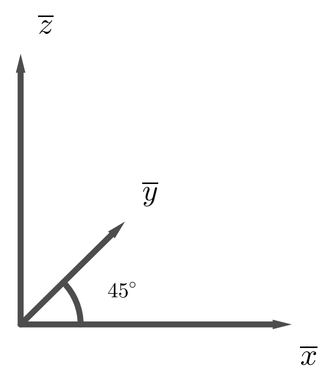
Une perspective parallèle : la perspective cavalière

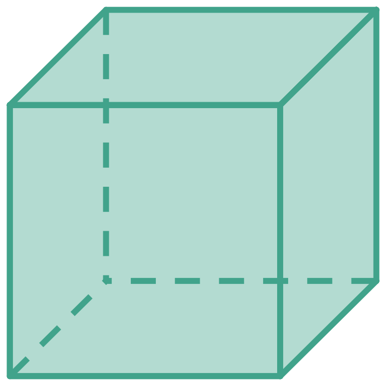
Définition

La perspective cavalière est une perspective parallèle pour laquelle le plan de projection est un plan de face, c'est-à-dire un plan perpendiculaire au sol.

Soit (Ox) l'axe horizontal, parallèle au sol, et (Oz) l'axe vertical, perpendiculaire au sol. En perspective cavalière l'angle entre ces deux axes reste de $90°$. Le rapport de réduction suivant ces deux axes est le même, ce qui veut dire que les objets ne sont pas déformés suivant ces deux directions.

L'axe (Oy), perpendiculaire à (Ox) et (Oz), fait un angle arbitraire avec l'axe (Ox). Le plus souvent cet angle est de $45°$ ou $30°$. Le rapport de réduction est lui aussi arbitraire, mais le plus souvent fixé à $0{,}5$ ou $0{,}7$.





Vocabulaire

On appelle **plan frontal** un plan parallèle au plan de face et **fuyante** toute droite orthogonale au plan de face (*ie.* parallèle à l'axe (Oy)).

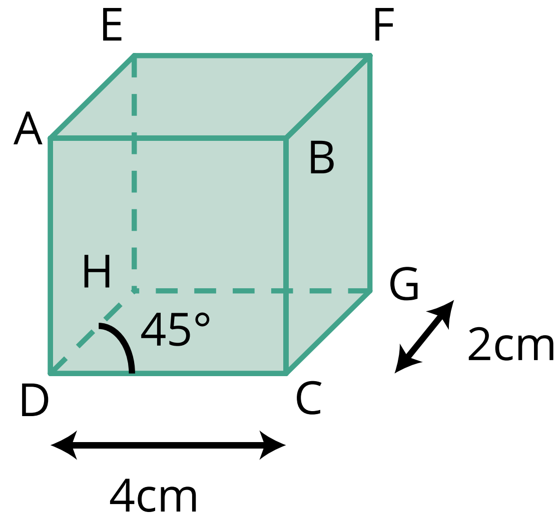
L'angle constant que font les fuyantes avec une droite horizontale sur le plan de représentation s'appelle **l'angle de fuite**.

Exemple

« Représenter un cube ABCDEFGH, de 4 cm en perspective cavalière où les plans ABCD et EFGH sont parallèles au plan de face. »

Réponse : Nous utiliserons les conventions suivantes
- angle de fuite de $45°$,
- rapport de réduction suivant l'axe (Oy) de $0{,}5$.

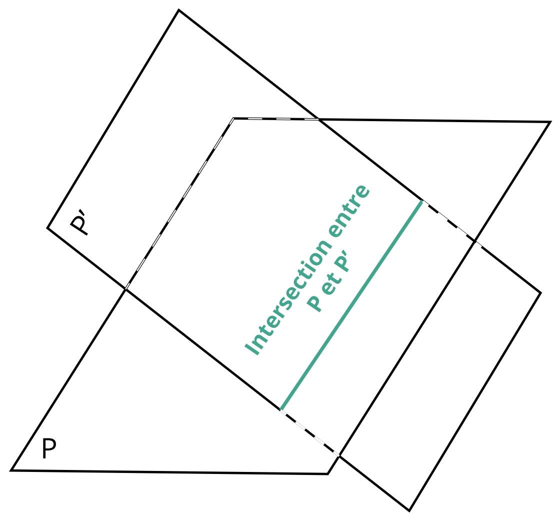
Comme les plans ABCD et EFGH sont des plans frontaux, ils ne sont pas déformés. Les angles droits sont conservés tout comme les longueurs. Les arêtes parallèles à l'axe (Oy) feront un angle de $45°$ avec l'axe (Ox) et mesureront $4 \times 0{,}5 = 2cm$. Nous obtenons alors le dessin ci-dessous.



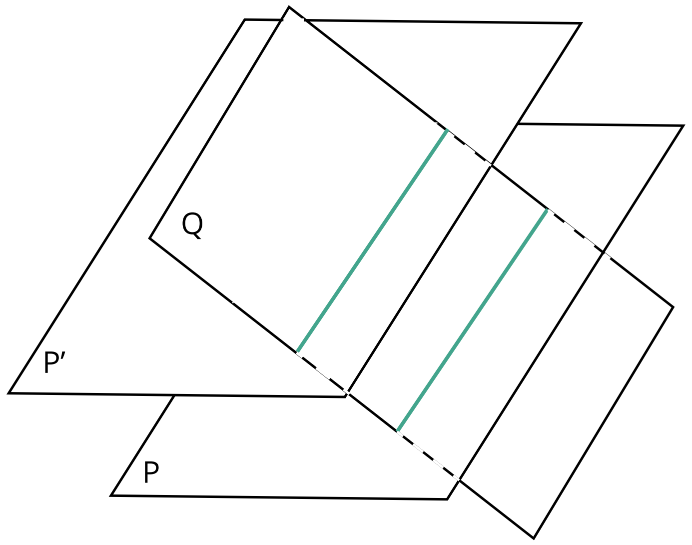
Sections

Rappels

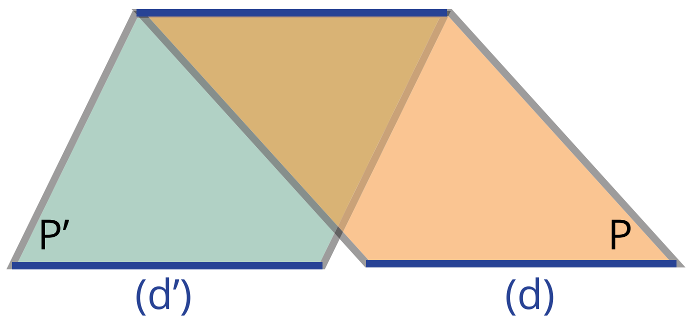
- Un plan est déterminé par trois points ou deux droites ou deux vecteurs.
- Deux plans sont parallèles disjoints s'ils n'ont aucun point en commun.
- Si deux plans ne sont pas parallèles leur intersection est une droite.



— Soit deux plans parallèles P et P'. Les droites d'intersections de chacun de ces plans avec un troisième plan Q sont parallèles



— **Théorème du toit :** soit deux plans sécants P et P'. Si P contient une droite (d) et P' une droite (d') qui sont parallèles, alors l'intersection de P et P' sera parallèle à (d) et (d').



Présentation

Pour tracer la section d'un volume par un plan, dans le cas où le volume étudié est constitué uniquement de faces planes, il nous faudra tracer, sur chacune des faces coupées par le plan, un segment, car l'intersection de deux plans est une droite.

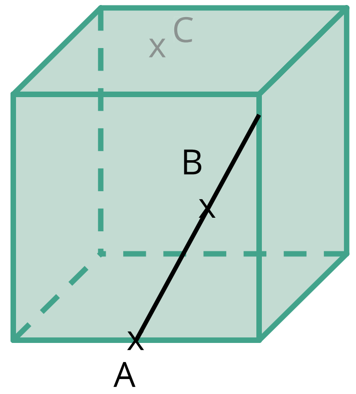
Pour tracer ce segment il nous faudra deux points. Ces deux points appartiendront à la fois à l'une, au moins, des faces du volume, et au plan d'intersection.

Pour chaque exercice de ce type, un certain nombre de ces points sera donné. Notre but est d'avoir deux points par face.

Méthode : cas des surfaces planes

— **Si on a déjà deux points sur une face qui appartiennent au plan de section :** il suffit de les relier.

Dans la figure ci-dessous, on considère la section du cube par le plan (ABC) où les points A et B sont situés sur la face avant et le point C est situé sur la face arrière.

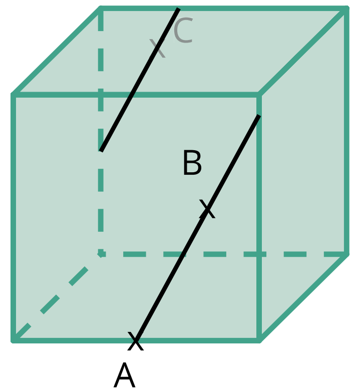


« Les points A et B appartiennent à la fois à la face du volume et au plan d'intersection. L'intersection entre deux plans étant une droite, on en déduit que la droite (AB) représente la section du volume et du plan sur la face avant. »

— Dans le cas où il n'y a qu'un point sur une face appartenant au plan de section, on **cherchera un plan parallèle pour lequel la droite d'intersection existe**. Si c'est le cas, il suffit de tracer la parallèle à cette droite passant par le point en question.

« La face avant et la face arrière du cube étant parallèles, alors, tout plan ABC qui coupe la face avant, coupera également la face arrière, et les droites d'intersections correspondantes seront parallèles. »

On sait que le point C appartient au plan de section et à la face arrière, donc la parallèle à (AB) devra passer par C. Nous obtenons ainsi la section du volume et du plan sur la face arrière.

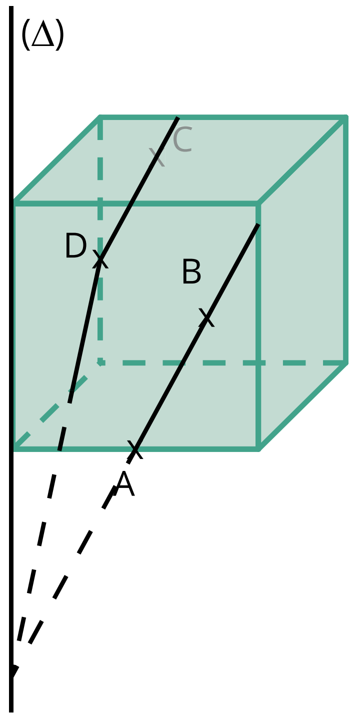


— Si une face n'a qu'un point appartenant au plan de section, mais pas de segment tracé sur une face parallèle nous devons utiliser **le théorème du toit**.

La face de gauche contient un point grâce à la dernière construction. Pour utiliser le théorème du toit nous devons :

1. Chercher un plan qui contient déjà un tracé de section et qui intersecte la face de gauche. La face de devant est une bonne candidate.
2. On trace l'intersection entre ces deux plans que l'on nommera (Δ). Ici l'intersection est évidente. Le théorème du toit est trivial.
3. On prolonge le segment (AB) jusqu'à qu'il coupe (Δ). On obtient ainsi un point qui appartient à la face de devant, au plan de section et à la face de gauche.
4. Il suffit alors de relier le nouveau point avec le point de la face de gauche car ils appartiennent

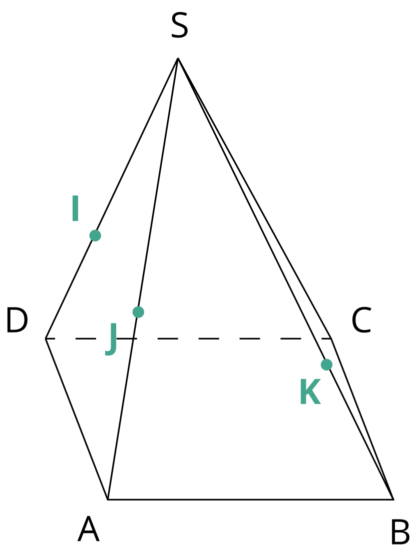
tous les deux au plan de section et à la face de gauche.



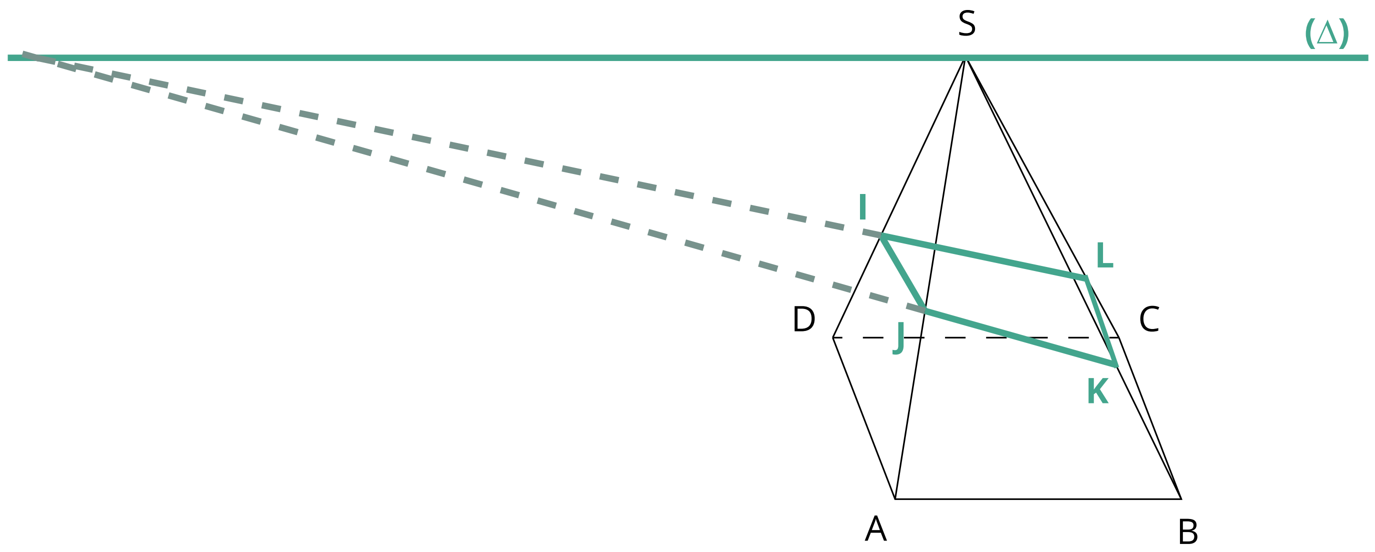
« D'après le théorème du toit : l'arête de droite de la face avant et l'arête de gauche de la face arrière sont deux droites parallèles, alors la droite d'intersection (Δ) *de ces deux plans est parallèle à ces deux arêtes. Le point situé à l'intersection de la droite* (Δ) *et de la droite (AB), appartient, par construction à la face de gauche et au plan de section. On en déduit la section de la face de gauche avec le plan de section. »*

Exemple

« Étudier la section de la pyramide par le plan (IJK). »

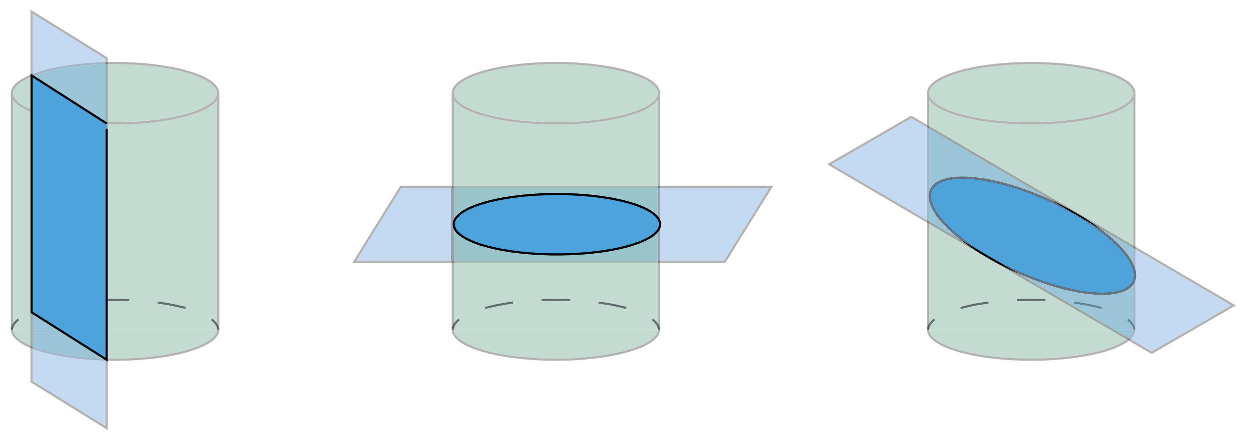


1. On commence par tracer les segments [IJ] et [JK].
2. Nous ne pouvons pas tracer de section sur la face (SCD) en traçant la parallèle à (JK) car la face (ABS) n'est pas parallèle à (SCD). Cependant nous pouvons utiliser le théorème du toit :
   — (SCD) et (SAB) sont sécants en S.
   — (AB) et (DC), qui appartiennent respectivement à (SAB) et (SCD), sont parallèles. D'après le théorème du toit, l'intersection de (SDC) et (SAB) est parallèle à ces deux droites.
   — Sachant que S est un point d'intersection des deux faces étudiées, nous pouvons tracer leur intersection qui sera parallèle à (AB) et (CD) et qui passera par S. On nomme celle-ci (Δ).
   — Il suffit alors de prolonger (JK) jusqu'à (Δ) pour trouver un point qui appartient à la fois au plan de section (puisqu'il est sur (JK)) et à la face (SCD) (puisqu'il est sur (Δ)).
   — On relie le point obtenu pour obtenir la section de la face (SCD) avec le plan (IJK).
3. On termine en reliant K et L sur la face (SCB).



Cas du cylindre

Trois cas sont à distinguer dans le cas de la section d'un cylindre de révolution par un plan :
— si le plan de section est perpendiculaire aux bases, la section sera un rectangle,
— si le plan de section est parallèle aux bases, la section sera un cercle
— et dans les autres cas la section sera une ellipse.

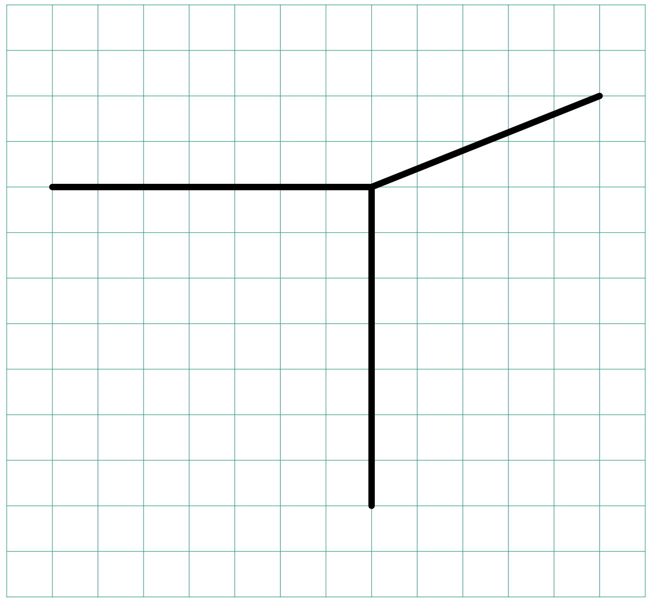


03. EXERCICES

Perspective

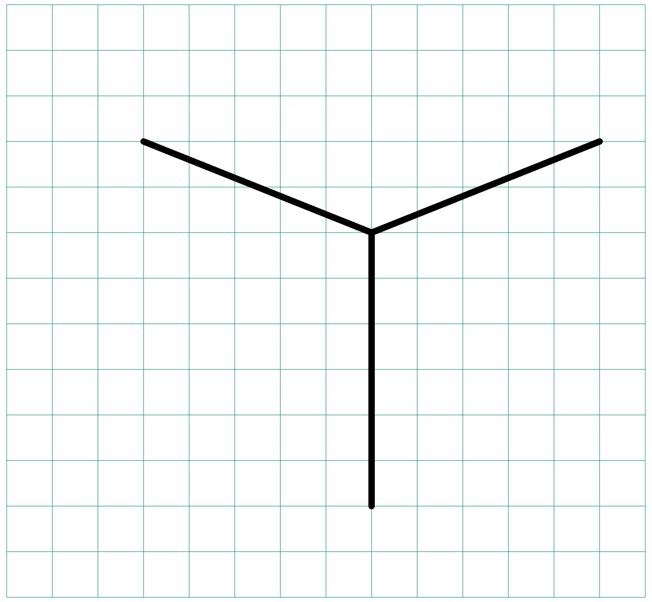
01

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un cube en perspective parallèle.



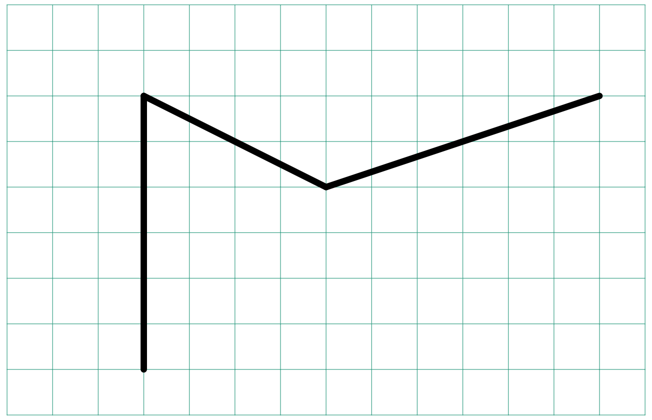
02

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un cube en perspective parallèle.



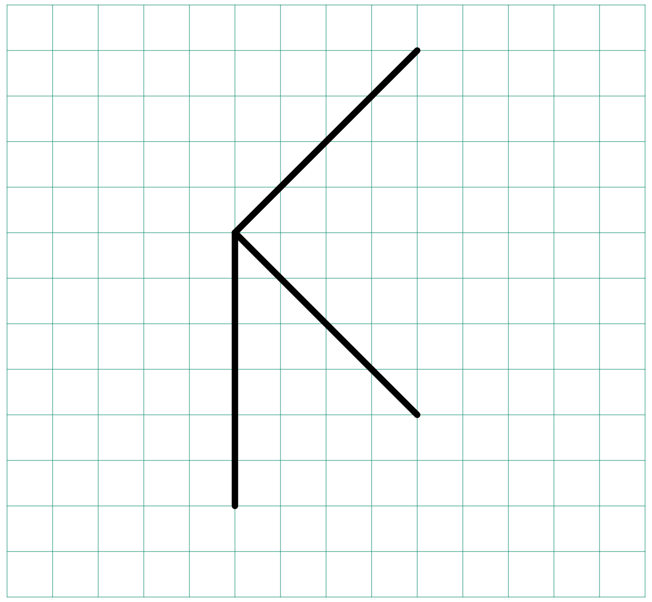
03

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un parallélépipède rectangle en perspective parallèle.



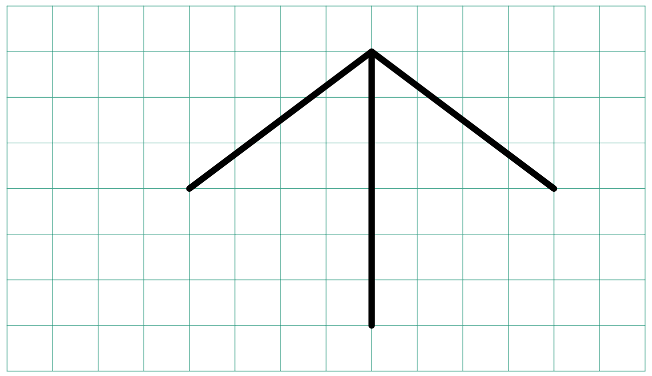
04

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un cube en perspective parallèle.



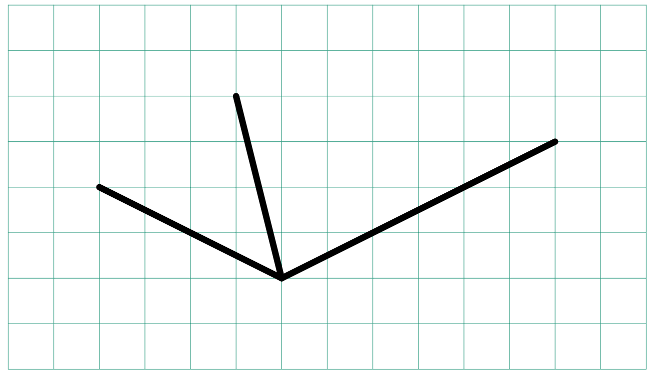
05

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'une pyramide à base carrée en perspective parallèle.



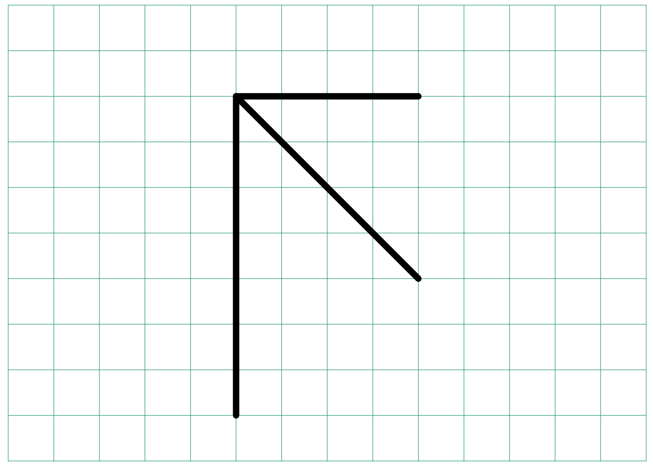
06

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un prisme triangulaire en perspective parallèle.



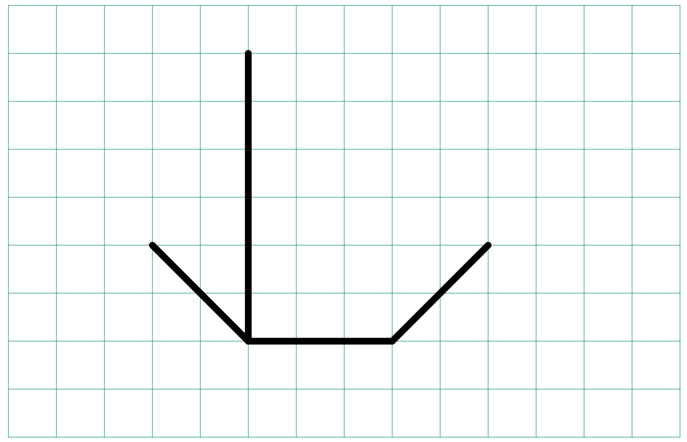
07

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un parallélépipède rectangle en perspective parallèle.



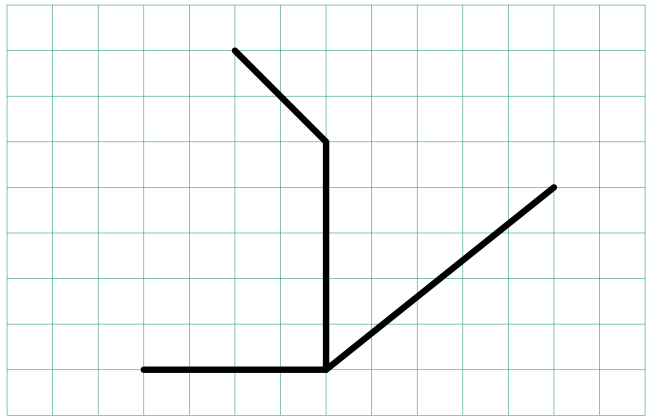
08

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un prisme hexagonal en perspective parallèle.



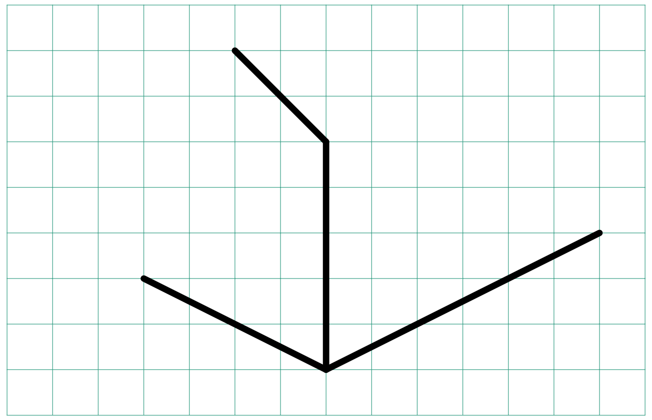
09

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous représentant une maison, formée d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme triangulaire pour toit, en perspective parallèle.



10

Reproduire et compléter le dessin ci-dessous représentant une maison, formée d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme triangulaire pour toit, en perspective parallèle.



11

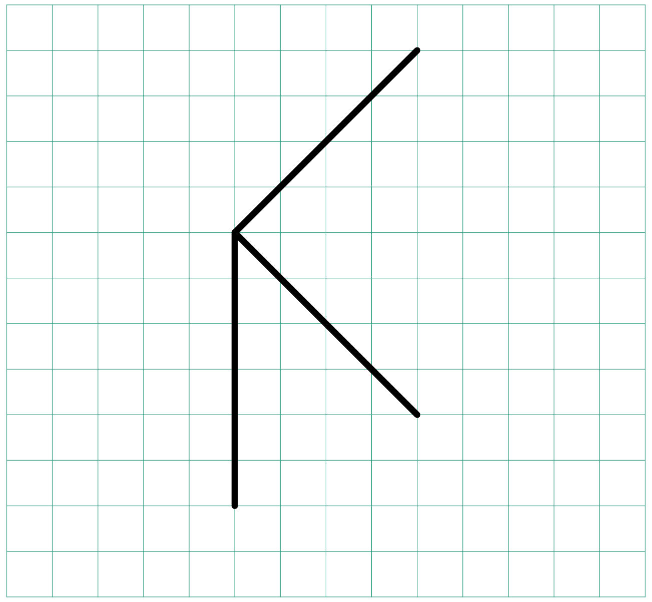
1. Rappeler les propriétés géométriques conservées par la perspective parallèle.
2. Donner des exemples de propriétés géométriques qui ne sont pas conservées par la perspective parallèle.

12

1. La perspective cavalière conserve-t-elle les mêmes propriétés géométriques que la perspective parallèle ?
2. Qu'est-ce qui différencie la perspective cavalière et la perspective parallèle ?

13

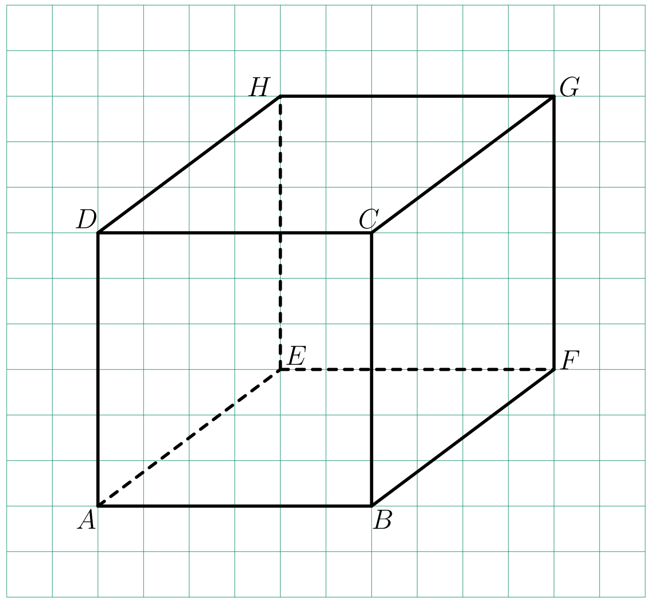
1. Reproduire et compléter le dessin ci-dessous d'un cube en perspective parallèle.



2. Le dessin ci-dessus est-il une perspective cavalière ? Justifier.

14

On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière. Quelle serait son image dans une perspective parallèle pour laquelle l'angle entre les images de (Ox), (Oy) et (Oz) est égal à 120° et le rapport de réduction égale à 1.

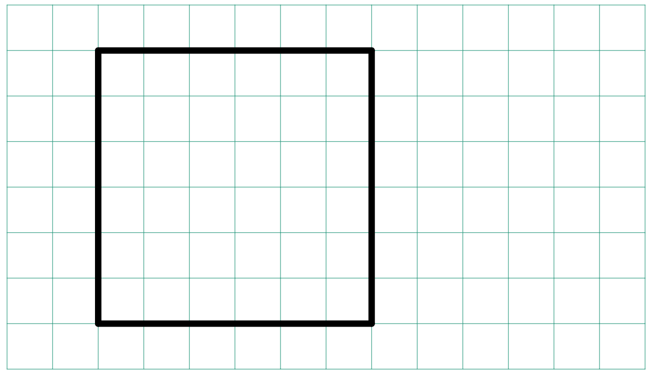


15

Proposer une perspective parallèle qui ne soit ni une perspective isométrique, ni une perspective cavalière. On explicitera l'image d'un repère orthonormé (Ox, Oy, Oz) par cette perspective pour la définir.

16

Compléter le dessin en perspective cavalière du cube dont la face avant est représentée ci-dessous. Expliciter les conventions utilisées pour l'angle de fuite et les rapports de réductions.



17

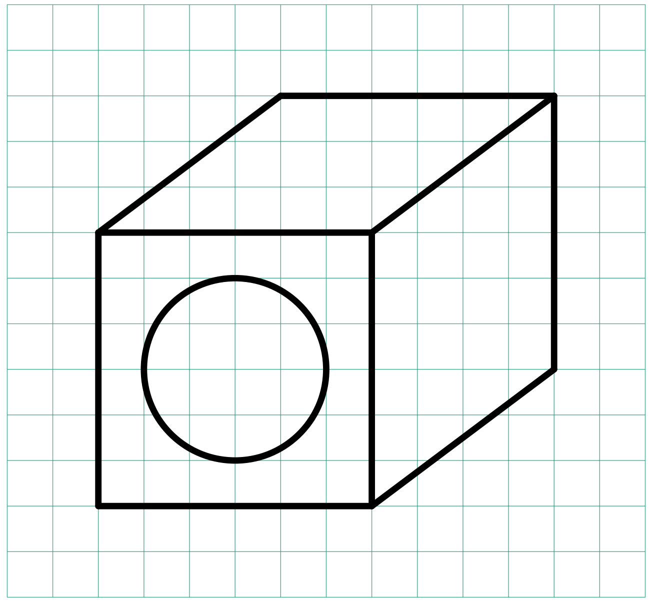
On considère une pyramide régulière SABCD à base carrée ABCD. On note [HS] la hauteur de la pyramide, où H se situe à l'intersection des diagonales de ABCD. On souhaite tracer une représentation en perspective cavalière de cette pyramide.

1. Quelle est la nature du triangle ASH ?
2. On suppose que la base carrée mesure 4cm. Calculer la longueur HS.
3. Représenter la pyramide en perspective cavalière avec un angle de fuite de 30° et un rapport de réduction de 0,5.

18

On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière. On souhaite dupliquer à l'identique sur la face du haut et la face de droite, le cercle présent sur la face avant.

1. Tracer le carré dans lequel le cercle est inscrit.
2. Reproduire ce carré sur la face du dessus et la face de droite.
3. Repérer 4 points appartenant à chacun des cercles que l'on souhaite tracer.
4. En suivant la même démarche avec le carré inscrit dans le cercle repérer 4 nouveaux points pour chacun de ces cercles.
5. Compléter le dessin.

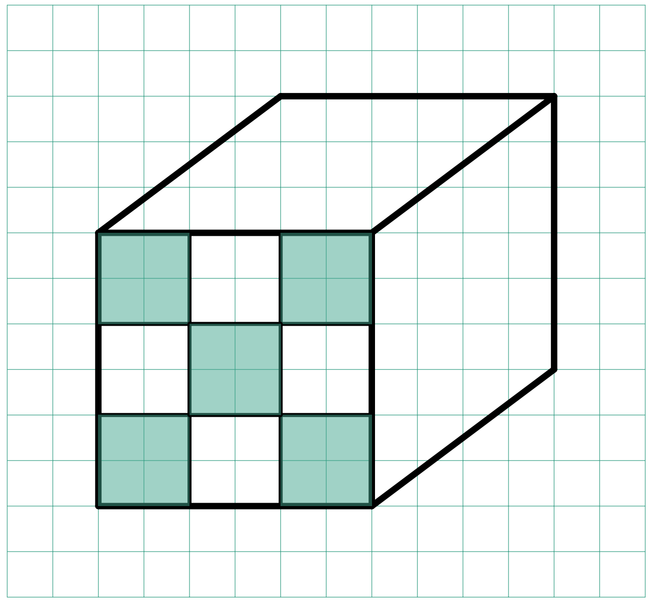


Télécharger le graphique

19

On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière. On souhaite dupliquer sur la face du haut et la face de droite, le damier représenté sur la face avant.

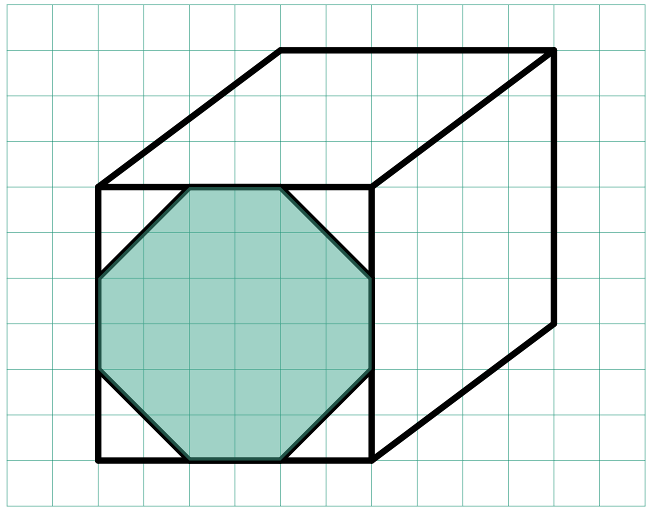
1. Placer les sommets des cases du damier sur chacune des faces.
2. Compléter le dessin.



20

On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière. On souhaite dupliquer à l'identique sur la face du haut et la face de droite, l'hexagone présent sur la face avant.

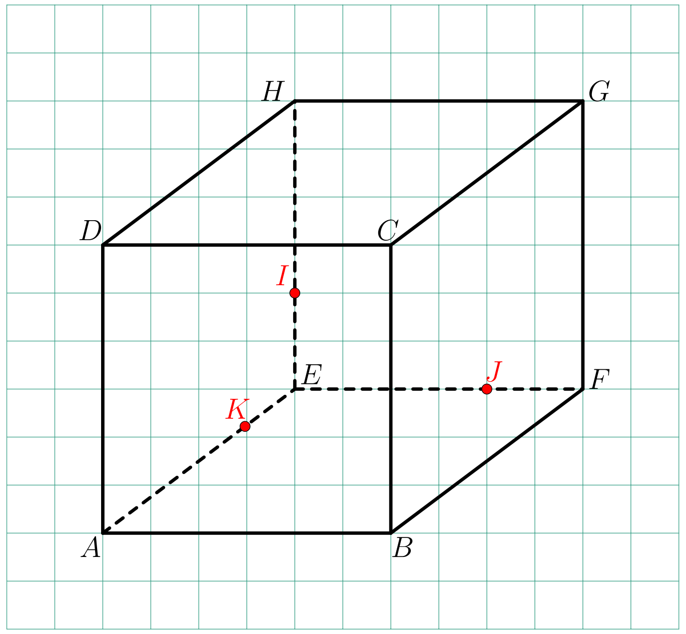
1. Placer les sommets des hexagones sur chacune des faces.
2. Compléter le dessin.



Section

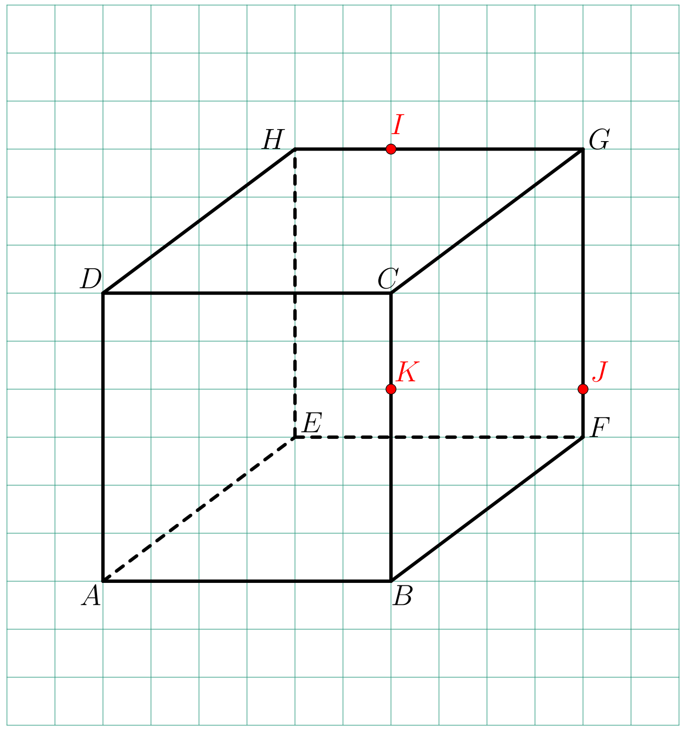
21

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).



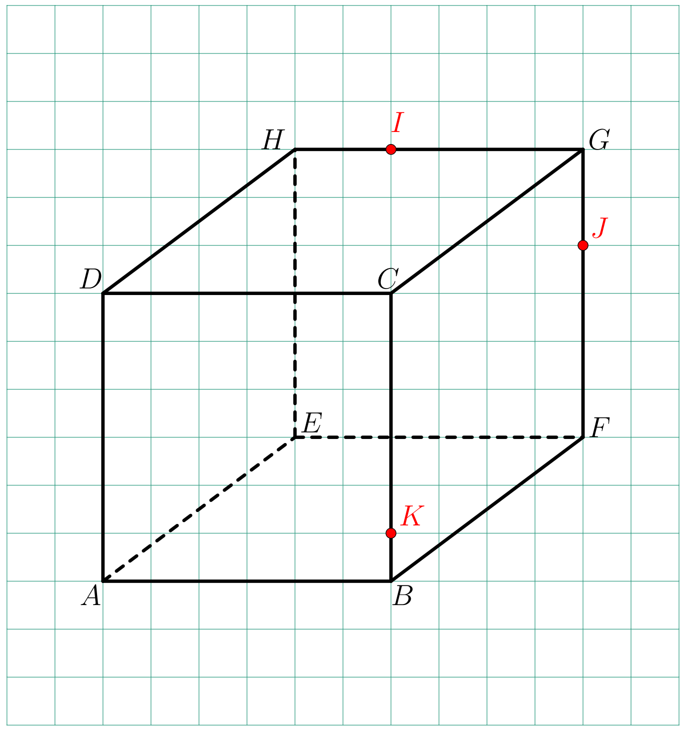
22

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



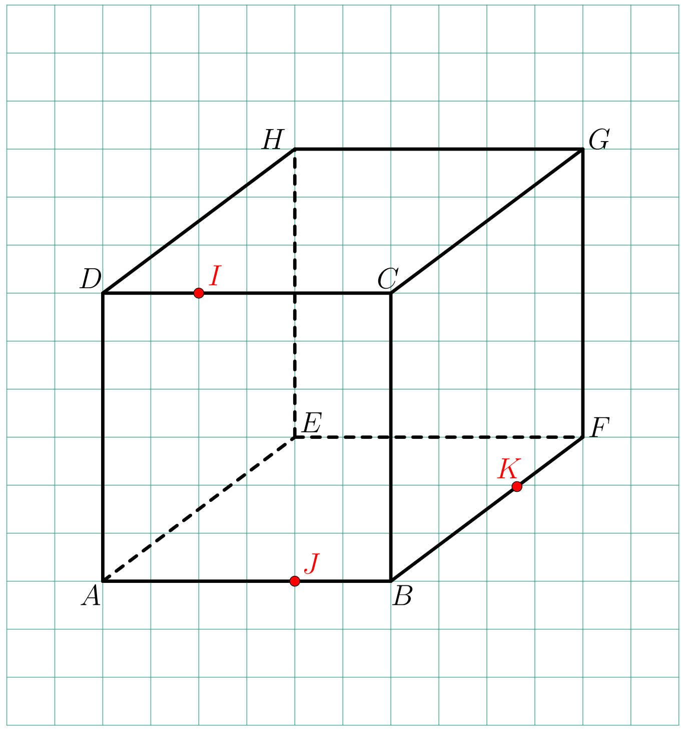
23

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



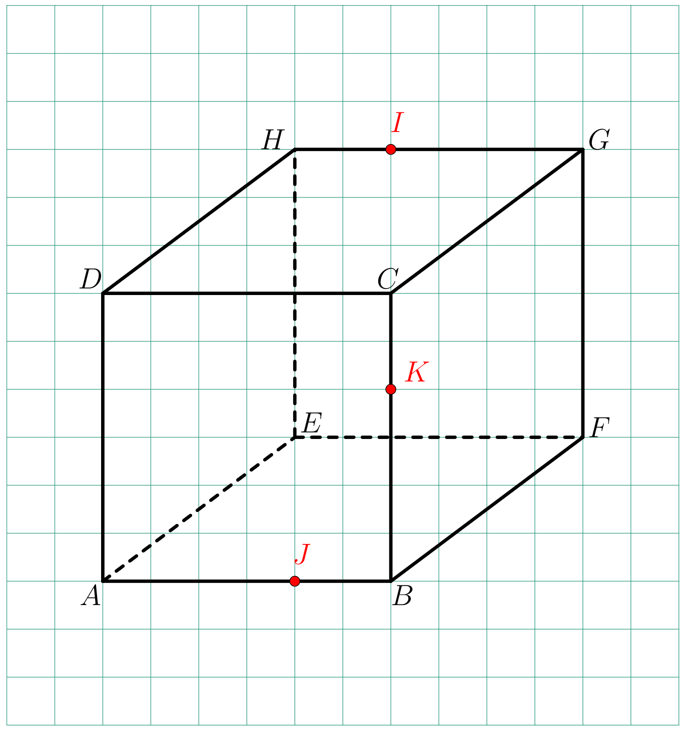
24

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



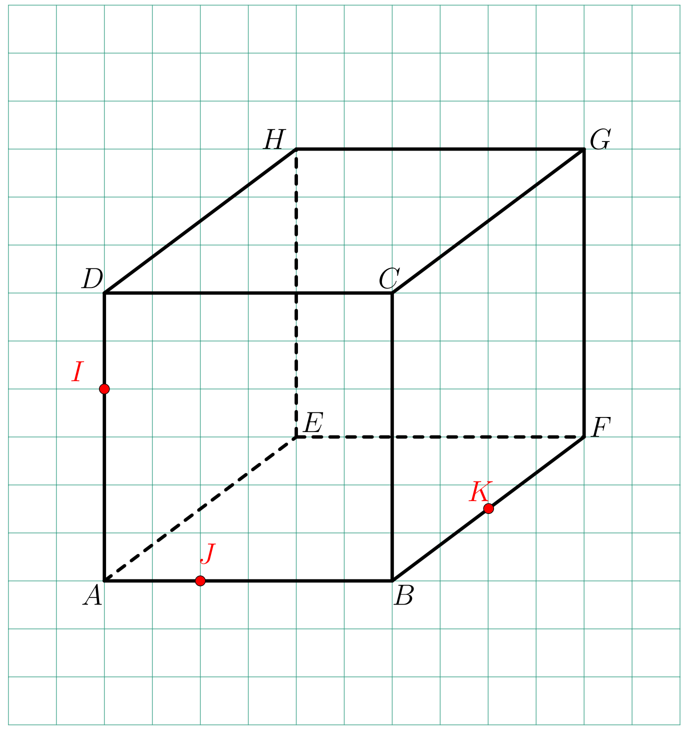
25

Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



26

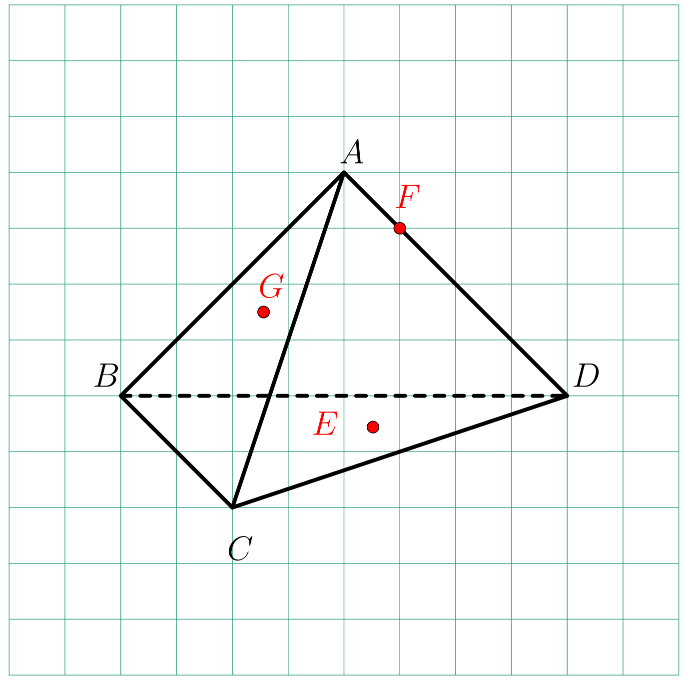
Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



27

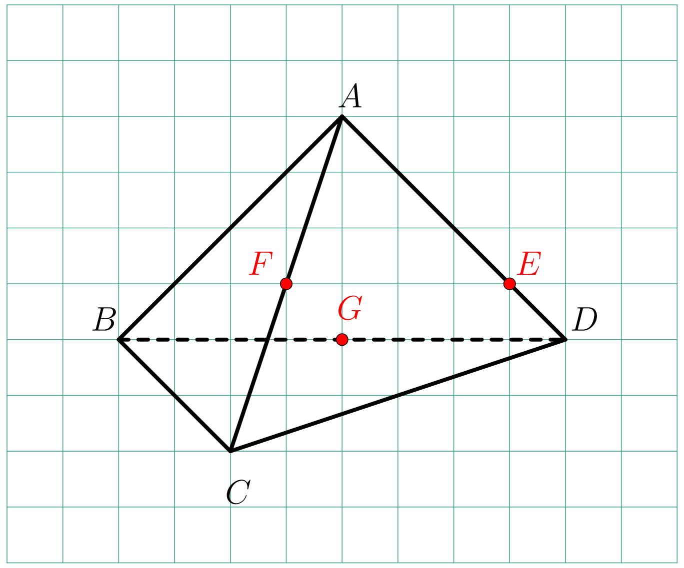
On considère le tétraèdre ABCD. Les points E, F et G sont respectivement des points de (BCD), [AD] et (ABD). Tracer la section du solide par le plan (EFG).

Télécharger le graphique



28

Tracer la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



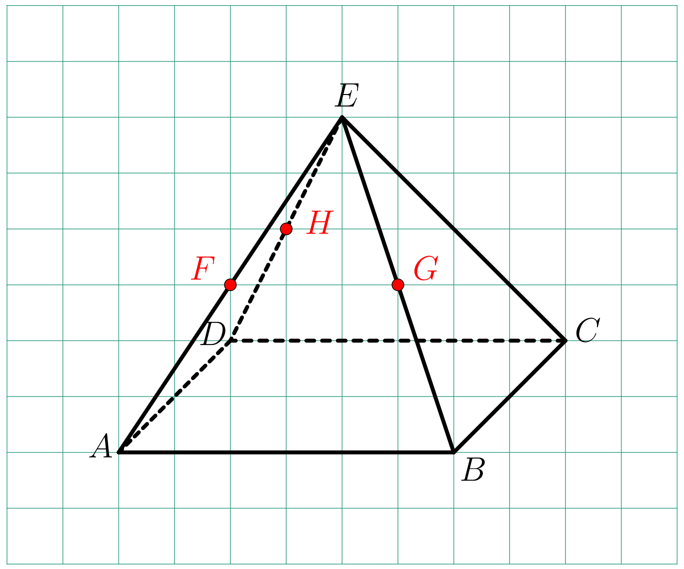
29

On considère une pyramide SABCD à base carrée ABCD.

1. Dessiner cette figure et placer les points I et J milieux respectifs des segments [SD] et [AB].
2. Construire en justifiant la section de la pyramide par le plan (CIJ).

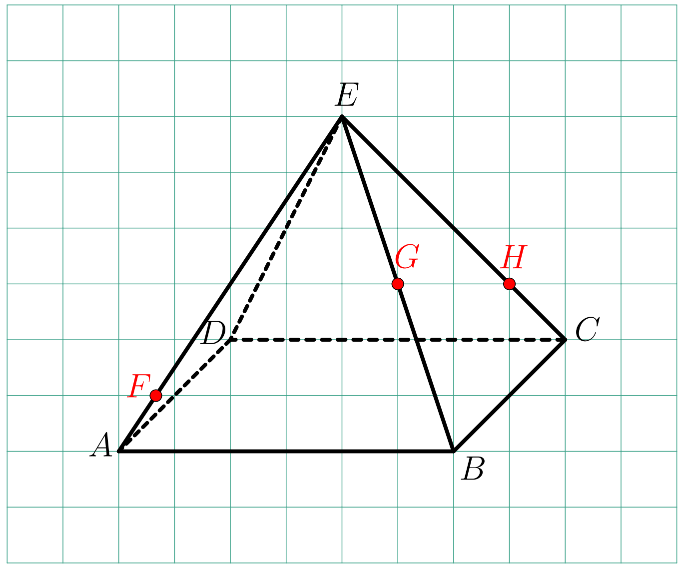
30

Tracer la section de la pyramide ABCDE par le plan (FGH), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



31

Tracer la section de la pyramide ABCDE par le plan (FGH), en décrivant chacune des étapes de construction de celle-ci.



32

$ABCDEFGH$ est un pavé droit, I le point du segment $[AE]$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et J le point du segment $[CG]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $EABF$.
2. Tracer l'intersection du plan (BIJ) avec la face $DCGH$.
3. Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (BIJ).

33

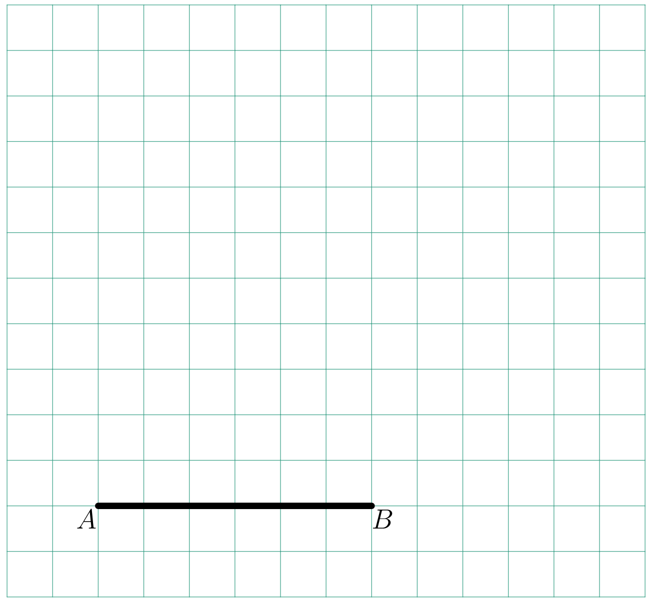
Reproduire la figure de l'exercice précédent.

1. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $EADH$.
2. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $DCGH$.
3. Tracer l'intersection du plan (DIJ) avec la face $BCGF$.
4. Terminer la construction de la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (DIJ).

Problèmes

34

1. Compléter le dessin ci-dessous afin de faire apparaître un cube ABCDEFGH en perspective cavalière. On placera la face ABCD dans un plan frontal et ABFE représentera la face de dessous. On utilisera 30° comme angle de fuite et 0,5 comme rapport de réduction.



2. On considère les points M, N et P tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$$

   (a) Placer ces points sur votre figure.
   (b) Tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (MNP).
3. L'arête du cube ABCDEFGH mesure 20cm.
   (a) Quelle est la nature de la section du cube ABCDEFGH par le plan (MNP).
   (b) Calculer la longueur de chaque côté de cette section.
   (c) Calculer l'aire de cette section.

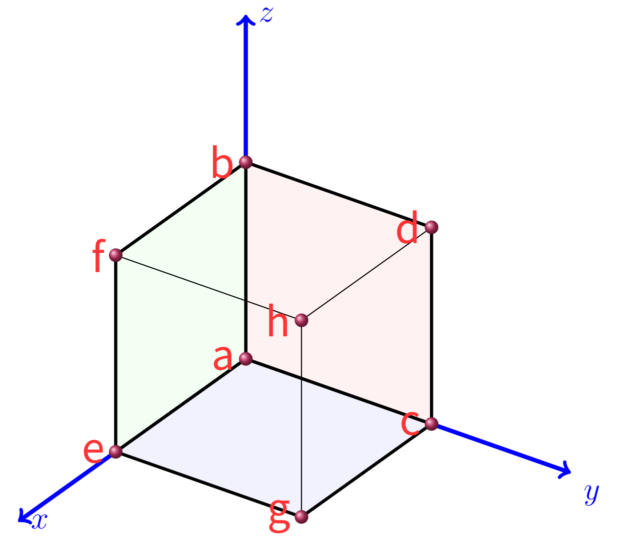
35

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 6 cm. La face ABFE représentera la face avant et ABCD représentera la face de dessous. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de [AE], [AB] et [BC].

1. (a) Dans un repère orthonormé d'origine A, d'axes (AB), (AD) et (AE), donner les coordonnées des points I, J et K.
   (b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$.
   (c) Donner les longueurs IJ et JK.
   (d) En déduire la nature du triangle IJK.
2. Construire la figure en perspective cavalière. La face ABFE sera dans le plan de face. On utilisera 30° comme angle de fuite et 0,5 comme rapport de réduction.
3. (a) Tracer sur cette figure la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK). Quel polygone régulier obtient-on ?
   (b) Reproduire en vraie grandeur, dans un repère à deux dimensions, cette section.

36

On se place dans le repère orthonormal d'origine a et d'axe (ae), (ac), (ab) représenté ci-dessous.



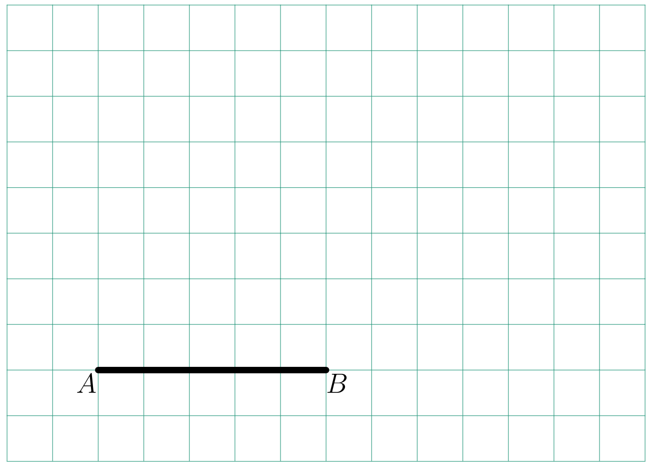
1. Donner les coordonnées des points a e, c et b.
2. Donner les coordonnées du point f.
3. (a) Calculer la longueur bc.
   (b) Calculer la longueur fc.
   (c) Quelle est la nature du triangle fbc ?
4. Quelle est l'image du point f par la projection sur le plan (acd) ?
5. Soit n le milieu de $[ef]$, m le milieu de $[ab]$ et p le point de $[gh]$ tel que $\overrightarrow{hp} = \frac{1}{4}\overrightarrow{hg}$.

(a) Construire la figure en perspective cavalière. La face $eghf$ sera dans le plan de face. On utilisera 30° comme angle de fuite et 0,5 comme rapport de réduction.

(b) Construire sur votre figure la section du plan (mnp) et du cube $abcdefgh$.

37

1. Compléter la représentation en perspective cavalière du cube ABCDEFGH dont l'arête [AB] est tracée ci-dessous. La face ABCD sera placée dans le plan frontal. La face ABFE sera la face du dessous. On prendra comme angle de fuite 60° et comme rapport de réduction 0,5.
2. Placer sur votre représentation le point I milieu du segment [DC].
3. Placer le point J défini par $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CG}$



4. On se place dans le repère orthonormal de l'espace (A;B;E;D).
   (a) Donner les coordonnées des point I et J
   (b) Le triangle FIJ est-il rectangle ? Justifier.
5. Tracer sur votre figure la section du cube ABCDEFGH par le plan (AIJ).

38

Un Rubik's Cube standard est un cube composé de 27 petits cubes (cubes unitaires) disposés en une grille de 3x3x3. Chaque face du Rubik's Cube est colorée différemment (généralement en blanc, rouge, bleu, orange, vert et jaune).

1. Représenter le Rubik's Cube en perspective cavalière. Pour cela :
   — Dessinez d'abord un cube de 3 unités de côté.
   — Tracez les lignes nécessaires pour diviser chaque face du cube en une grille de 3x3.
2. Un Rubik's Cube cassé a un coin (un cube unitaire) manquant. Ce cube manquant est situé sur la face avant dans le coin supérieur droit. Représenter ce nouveau Rubik's Cube en perspective cavalière ?
3. Calculer le volume d'un Rubik's Cube.
4. En notant que chaque petit cube a une arête de 1 unité, quelle est la somme des longueurs des arêtes de tous les petits cubes qui composent le Rubik's Cube ?

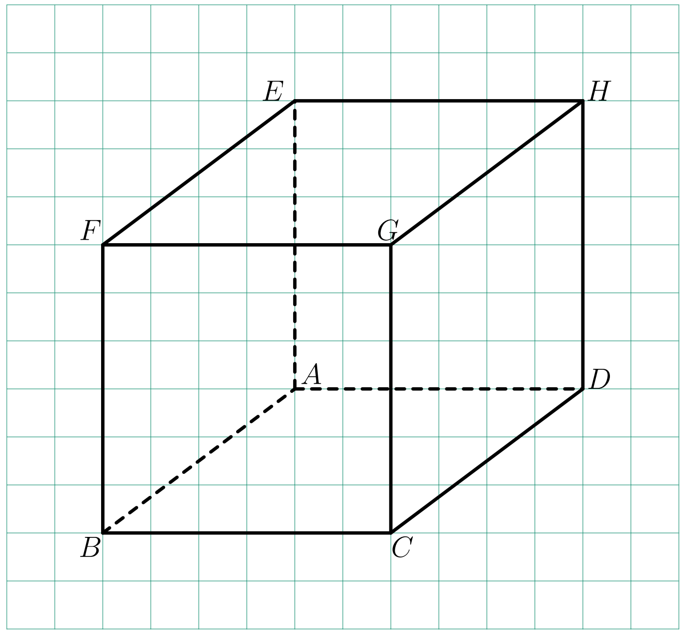
39

Partie A : L'enceinte Bluetooth Cube

On s'intéresse à un modèle d'enceinte portable cubique représenté ci-dessous. Ses dimensions en cm sont :

$$4{,}9 \times 4{,}9 \times 5{,}5.$$

On représente, sur la figure ci-dessous, cette enceinte par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, avec $AB = 4{,}9$, $AD = 4{,}9$ et $AE = 5{,}5$. L'objectif est d'étudier le bouton présent sur le coin biseauté du cube.



Considérons les points I, J et K situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$ tels que $AI = AJ = AK = 1$. L'espace est ainsi muni d'un repère orthonormé $\left(\vec{A}, \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK}\right)$.

Le bouton en question est décrit par le triangle MNP dont les coordonnées sont $M(4{,}9; 3{,}7; 5{,}5)$, $N(3{,}7; 4{,}9; 5{,}5)$ et $P(4{,}9; 4{,}9; 4{,}4)$.

1. Reproduire la figure ci-dessus.
2. Placer les points M, N et P sur la figure et colorier en rouge la section du cube délimitée par le triangle MNP.
3. Un bouton est considéré conforme si chacune de ses dimensions mesure au moins 1 cm.
   (a) Calculer les longueurs MN, MP et NP.
   (b) Déterminer si le bouton est conforme.

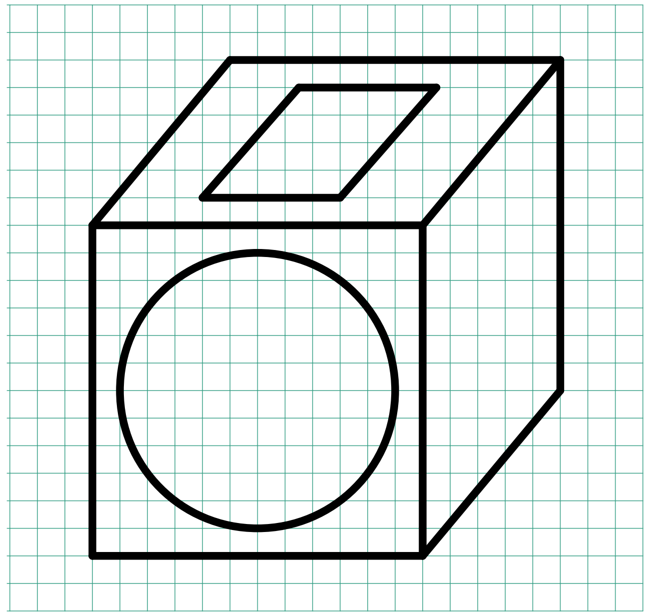
Partie B : L'enceinte Bluetooth NES Retro

On s'intéresse maintenant à un autre modèle d'enceinte. Cette enceinte, représentée ci-dessous est un cube de 8,1 cm de côté. Elle comprend :

— un bouton en forme de croix centré sur la face supérieure, constitué de deux rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes et mesurant chacun $2{,}2 \times 6{,}6$ cm ;

— des haut-parleurs sur les faces latérales, représentés par des cercles de rayon $3{,}3$ cm, centrés sur chaque face.

Le but de cette partie est de compléter la représentation en perspective parallèle de l'enceinte ci-dessous.



1. Compléter la construction de la croix sur la face supérieure en décrivant les étapes de votre construction.
2. Un des hauts parleurs est déjà représenté sur la figure ci-dessous. Représenter le haut-parleur de la deuxième face latérale visible – un carré circonscrit au cercle a déjà été représenté – en décrivant les étapes de votre construction.

04. TP

Illusion d'optique et perspective

Aakash Nihalani

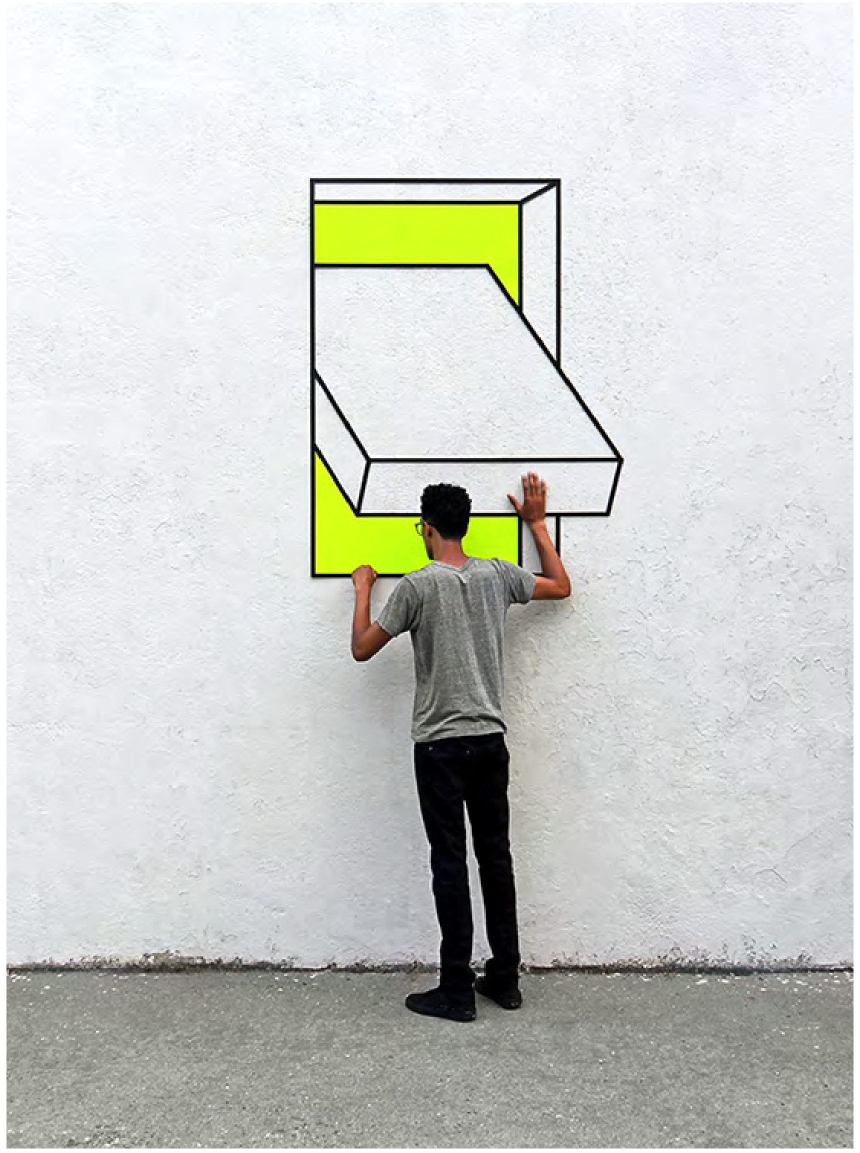
Né à Little India en 1986, Aakash Nihalani est fils d'immigrés indous. Il grandit ensuite dans le New Jersey jusqu'à son retour à New-York en 2004 pour intégrer l'école d'art. Aakash Nihalani propose une vision alternative des paysages urbains.

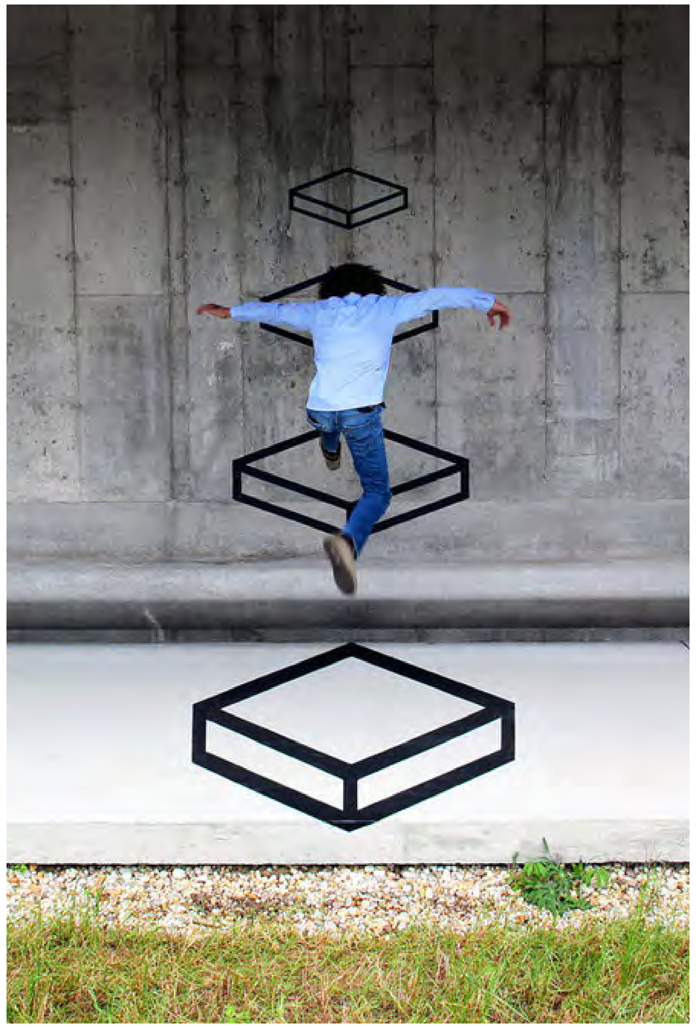
Ses œuvres de rues sont des trompes l'oeil et des illusions d'optiques composés de formes géométriques qui créent des décors fantasques et colorés. Armé non pas de pinceaux ni de bombes, mais de rubans adhésifs fluorescents, Aakash Nihalani pose une note de couleur lumineuse et brillante sur les mobiliers urbains, les pavés ou les murs d'immeubles.

Plus d'infos : http ://www.aakashnihalani.com/

Travail à effectuer

Proposer une œuvre en perspective parallèle, réalisable au ruban adhésif, en vous inspirant du travail d'Akash NIHALANI.





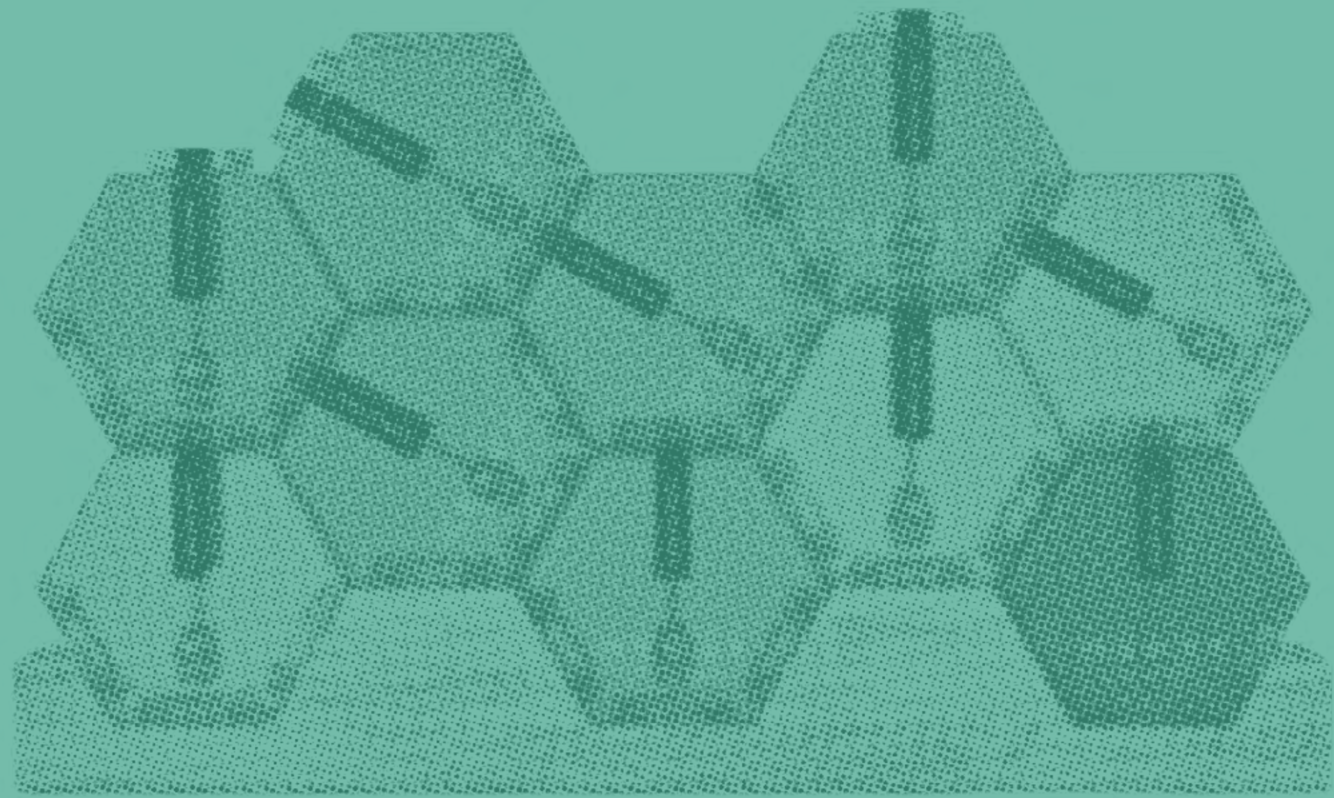
De gauche à droite et de haut en bas

Outlook	Spaced	Take Out 1	Take Out 2	Platforms
ruban adhésif, carton ondulé	peinture	ruban adhésif, carton ondulé	ruban adhésif, carton ondulé	ruban adhésif

FIGURES RÉGULIÈRES

Objectifs du chapitre : Construire l'image d'une figure par translation, symétrie centrale, réflexion et rotation / Retrouver les caractéristiques d'une transformation à partir d'une figure et de son image / Construire un polygone régulier / Donner les caractéristiques (longueurs, angles, aires) d'un polygone régulier / Définir une frise et un pavage / Repérer une maille élémentaire et un motif dans une frise ou un pavage / Donner les translations permettant de construire une frise ou un pavage.

03



Maksim ARBUSOV
Honey
2013

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Neon V2, Alex DIACONU, 2014

2. Honey, Maksim ARBUZOV, 2013

3. Carrelage Versatile, KUTAHYA, 2011

4. Sea Horse (No. 11), Maurits Cornelis ESCHER, 1937/1938

5. Séparation/brises-soleil terrasses RC13, Lorenzo Pennati, 2014

6. Pavement intérieur du Duomo de Sienne - Italie, XIVe au XIXe siècle

7. Pavage en origami / kusudamas, Ekaterina LUKASHEVA

8. BAUX Träullit, FORM US WITH LOVE, 2012

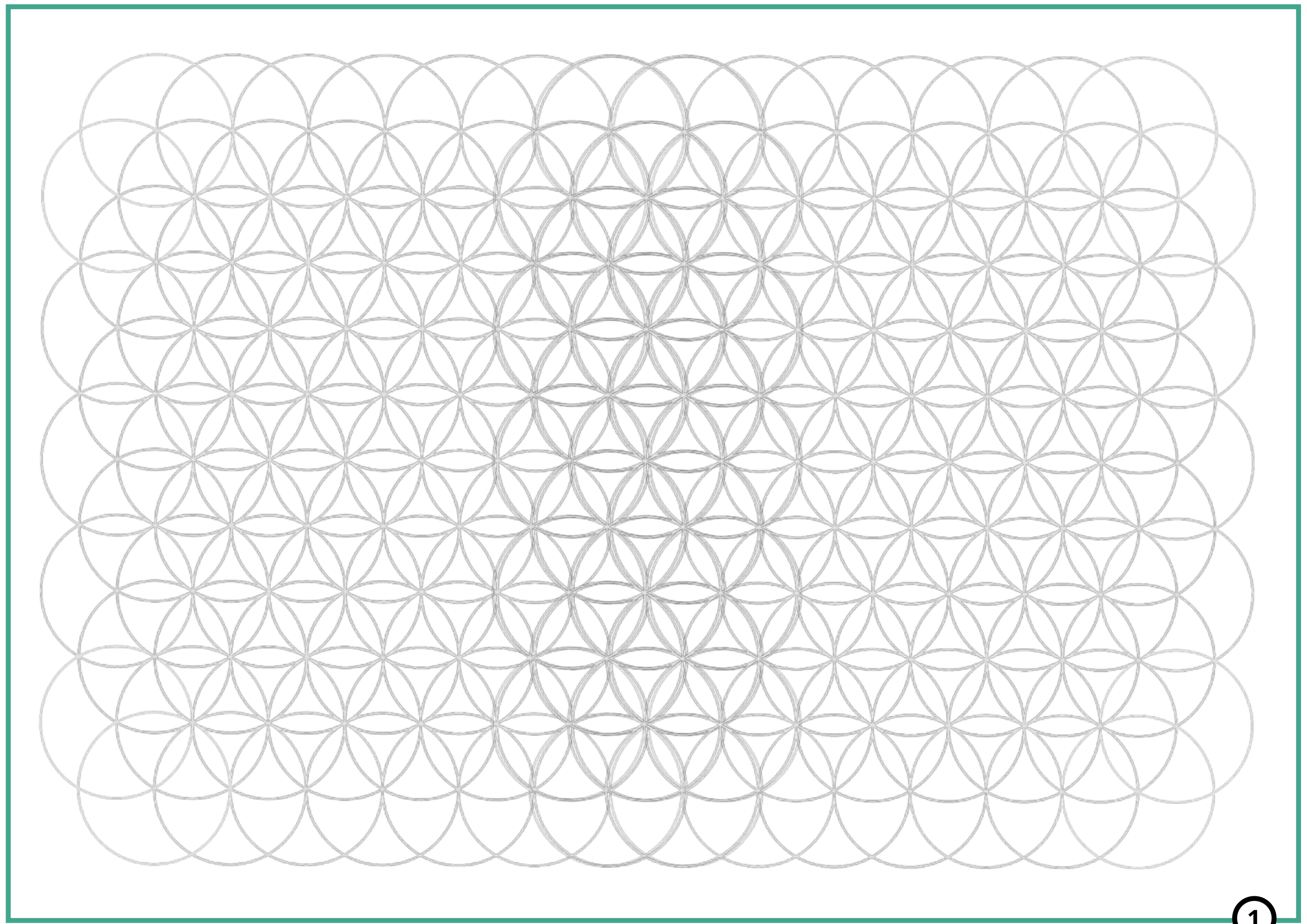
9. Table ISOM, Sebastian SCHERER, 2012

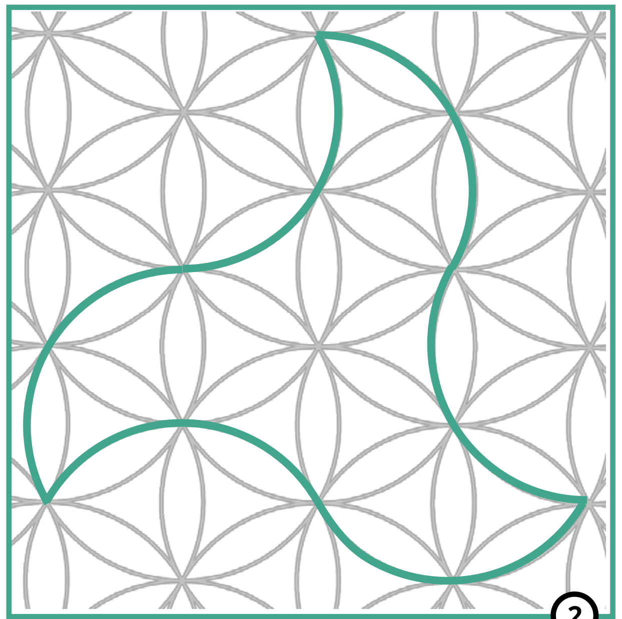
10. Chaussures Nike Roshe run metric, Dylan RAASCH, 2013

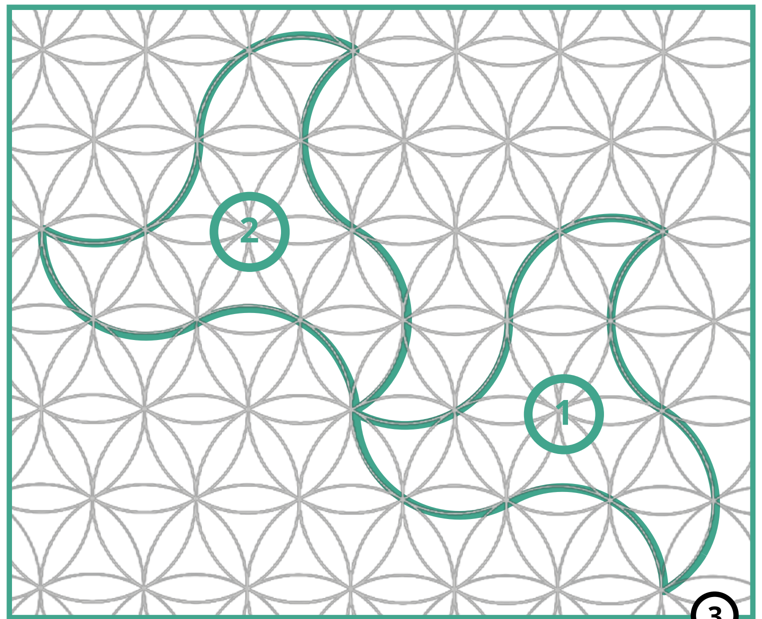
11. Fall 1995 (Front), Vivienne WESTWOOD, 1995

12. Affiche, Shigeo FUKUDA, 1975

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.







En haut :
Construction du pavage

À droite :
Zellige (mosaïque) du palais de l'Alhambra, Grenade, Espagne, XIIIe siècle

ZELLIGE

1. Les zelliges du palais de l'Alhambra

L'Alhambra est un des monuments majeurs de l'architecture arabo-musulmane. Situé à Grenade, en Espagne, il est renommé pour ses palais somptueux, ses jardins luxuriants, ses cours majestueuses et ses décorations murales magnifiques.

Les mosaïques, appelées aussi *zellige*, de l'Alhambra sont particulièrement remarquables. Les sols sont souvent ornés de motifs géométriques complexes, typiques de l'art islamique, créés à partir de carreaux de céramique colorés. Ces motifs incluent des entrelacements, des étoiles et des polygones, créant des effets visuels captivants qui symbolisent l'infini et la perfection divine. Dans cette activité, nous allons étudier un de ces pavages.

2. Construction du motif élémentaire

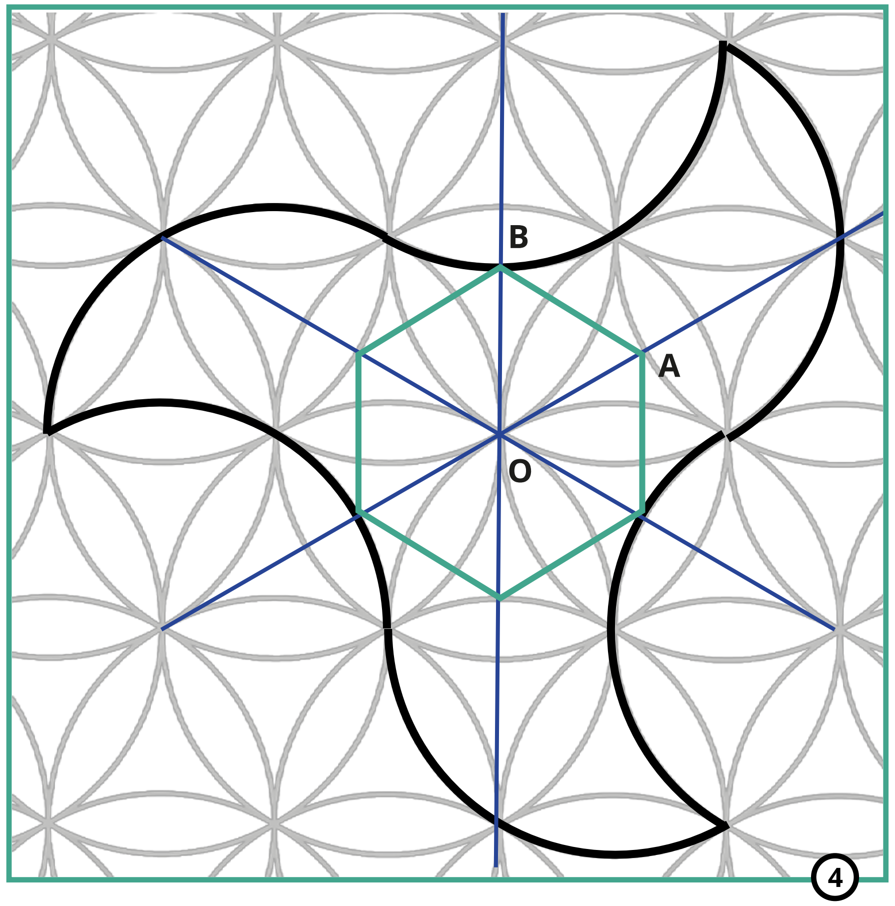
a. Construire un cercle de rayon 2,5cm au centre d'une feuille A3.

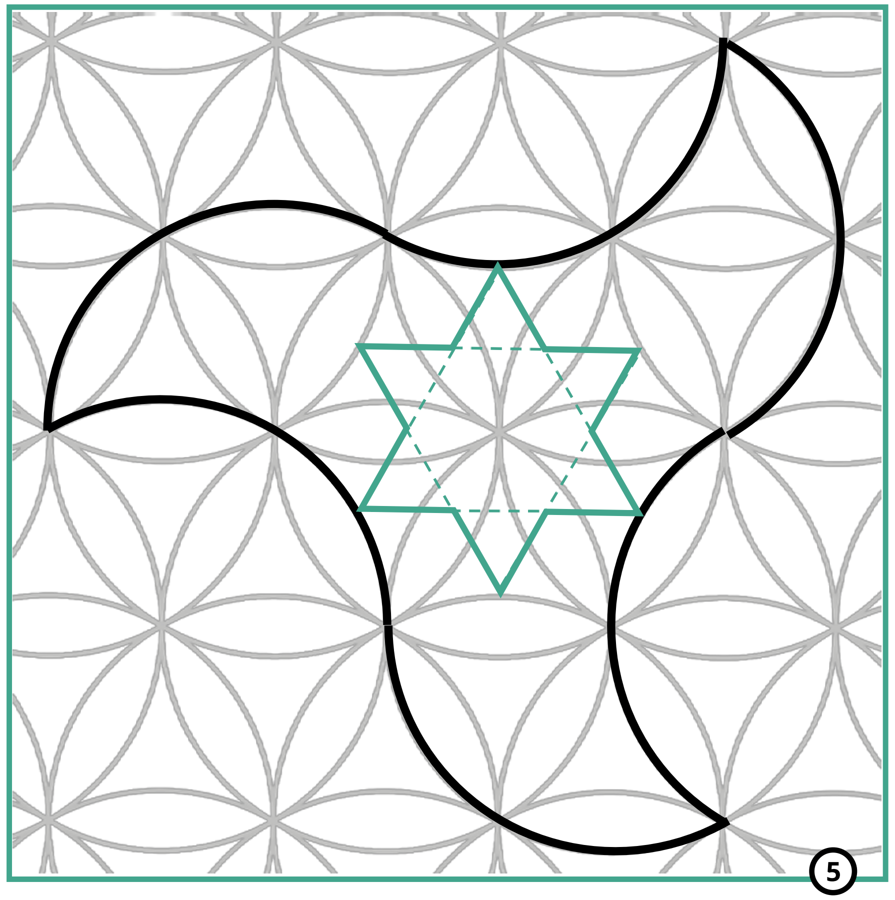
b. Construire une rosace en traçant 6 cercles de même rayon régulièrement espacés sur le premier cercle.

c. Répéter cette opération sur les nouveaux cercles jusqu'à obtenir la figure 1. représentée ci-contre.

d. Repasser au feutre ou au crayon de couleur le motif élémentaire comme représenté sur la figure 2. ci-contre.

e. Repasser les autres motifs élémentaires de la feuille.





3. Analyse du motif élémentaire

a. Sur le dessin 3. de la page précédente, par quelle transformation géométrique peut-on obtenir la figure 2 à partir de la figure 1 ?

b. Expliquer pourquoi on ne peut pas couvrir tout le pavage à partir du motif élémentaire et de translations ?

c. Donner le motif qui permet de réaliser le pavage à partir de translations.

d. Quelle transformation géométrique permet d'obtenir le motif à partir du motif élémentaire ?

e. Le pavage peut être construit à partir des vecteurs de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont des entiers relatifs. Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4. Étude de l'hexagone

a. Quelle est la figure géométrique représentée en vert sur la figure 4. ?

b. Donner la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$ en degrés.

c. Quelle est la nature du triangle OAB ?

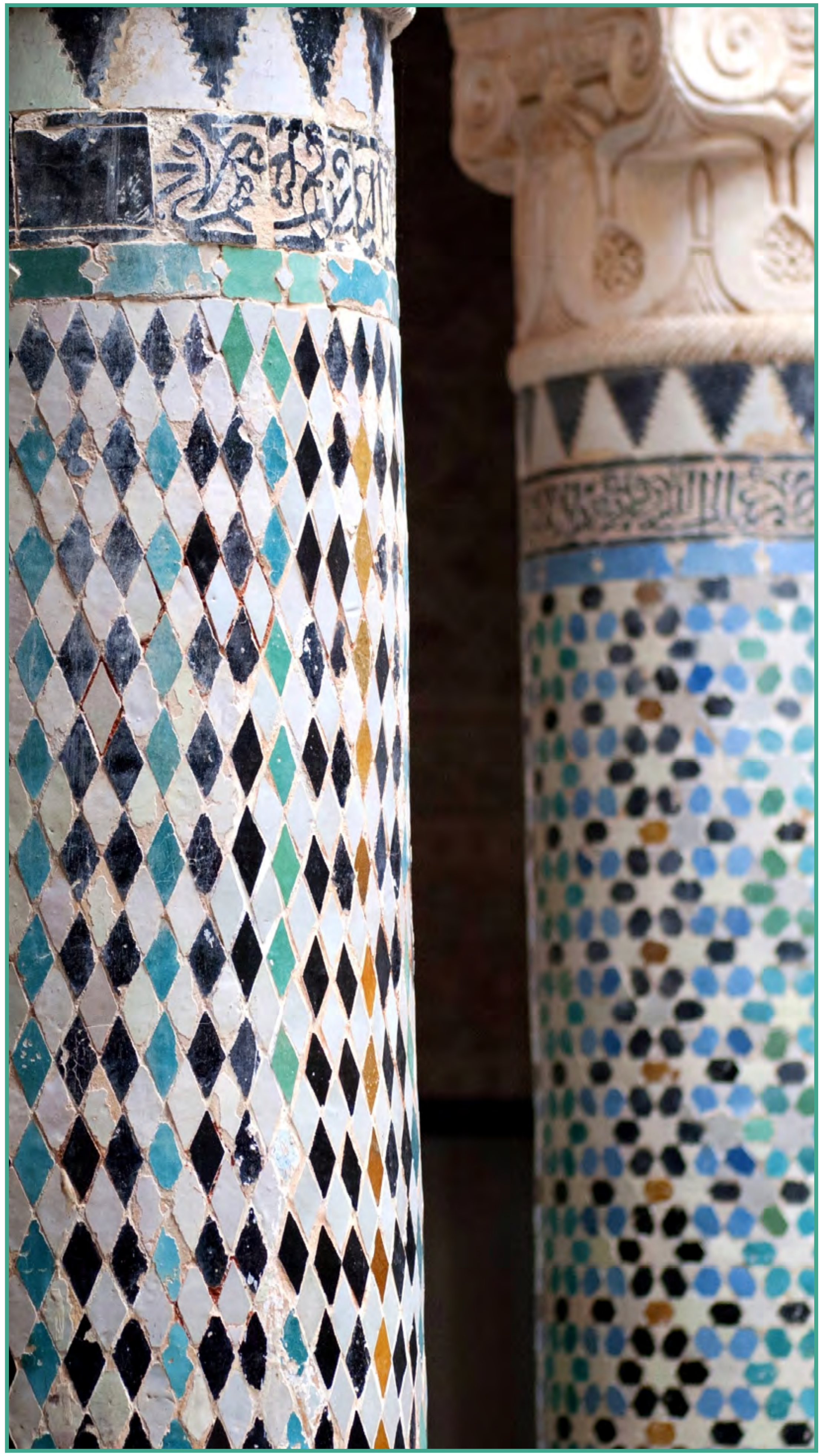
d. En déduire que le polygone représenté est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés sont de même longueur.

e. Citer les axes de symétrie ainsi que le centre de symétrie de ce polygone.

5. Étude de l'étoile

Le motif élémentaire peut, à la place de l'hexagone régulier, contenir une étoile (voir figure 5.). Quels sont les axes de symétrie de cette étoile ? Y a-t-il un centre de symétrie ?

À droite :
Zellige de la médersa mérinide de Salé, Salé, Maroc, XIVe siècle



02. COURS

Transformations du plan

Translation

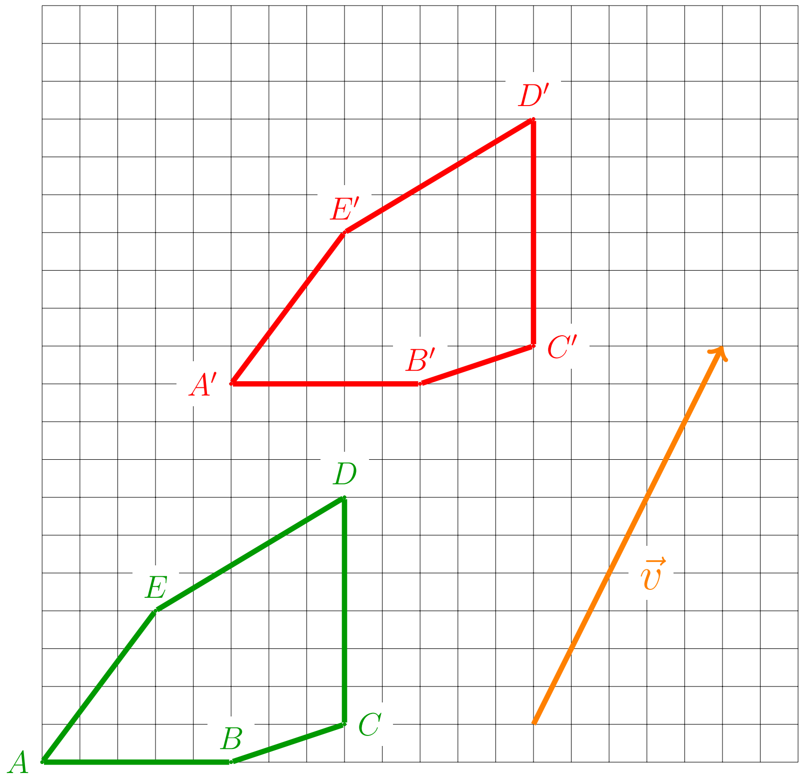
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On définit la **translation de vecteur** $\vec{u}$ par la transformation qui, à tout point M, associe un point M' tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$$

Pour construire l'image d'une figure par translation, il suffit de déplacer les points caractéristiques de cette figure en suivant le vecteur donné.

Exemple

La figure rouge suivante est la translation de la figure verte par le vecteur $\vec{v}$.



Rotation

Soit un point A et un nombre réel θ. On définit la **rotation de centre** A **et d'angle** θ la transformation qui, à tout point M, associe un point M' tel que :

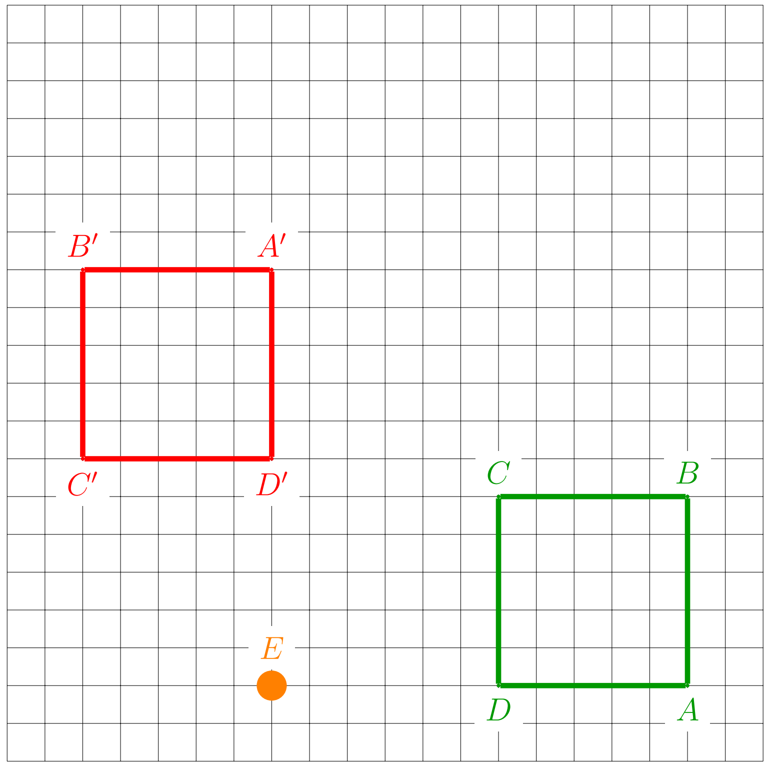
$$\boxed{AM = AM' \text{ et } \widehat{MAM'} = \theta}$$

Pour construire l'image M' de M par la rotation de centre A et d'angle θ :

— 1ère étape : on centre le compas sur A, et on l'ouvre jusqu'en M. On trace alors un cercle.
— 2ème étape : on place le rapporteur sur [AM], centré sur A, et on mesure un angle θ. L'intersection entre cet angle et le cercle donne le point M'.

Exemple

La figure rouge suivante est la rotation de la figure verte de centre E et d'angle $90°$ (sens antihoraire).



Symétrie axiale / Réflexion

Soit (Δ) une droite du plan. On définit la **symétrie ou la réflexion d'axe** (Δ) par la transformation qui, à tout point M, associe un point M' tel que :

$$\boxed{(\Delta) \text{ soit la médiatrice de } [MM']}$$

Rappel

Une médiatrice coupe un segment en son milieu et lui est perpendiculaire. Tout point situé sur la médiatrice est équidistant des extrémités du segment.

La symétrie d'axe (Δ) transformera M en M' de sorte que :

— $(MM') \perp (\Delta)$
— Si I est le point d'intersection de (MM') et (Δ) alors : $IM = IM'$

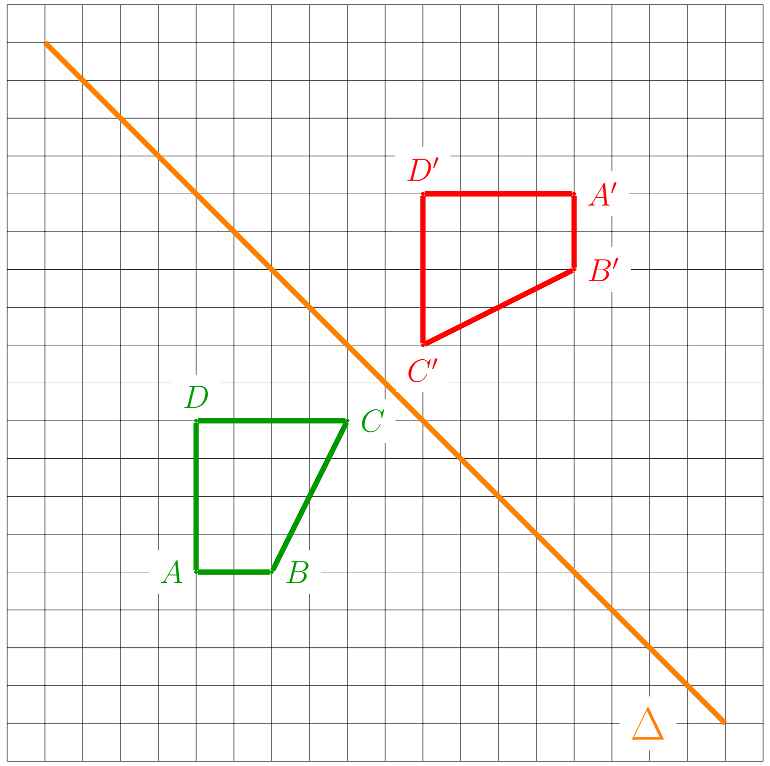
Construction

Pour construire l'image M' de M par la symétrie axiale (Δ) :

— 1ère étape : on trace la perpendiculaire à (Δ) passant par M. On la prolonge de l'autre côté de (Δ).
— 2ème étape : on place le compas sur l'intersection entre (Δ) et la perpendiculaire tracée. On ouvre le compas jusqu'au point M. On reporte la longueur de l'autre côté.

Exemple

La figure rouge suivante est la réflexion d'axe (Δ) de la figure verte.



Symétrie centrale

Soit un point A du plan. On définit la **symétrie centrale de centre** A la transformation qui, à tout point M, associe un point M' tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA}}$$

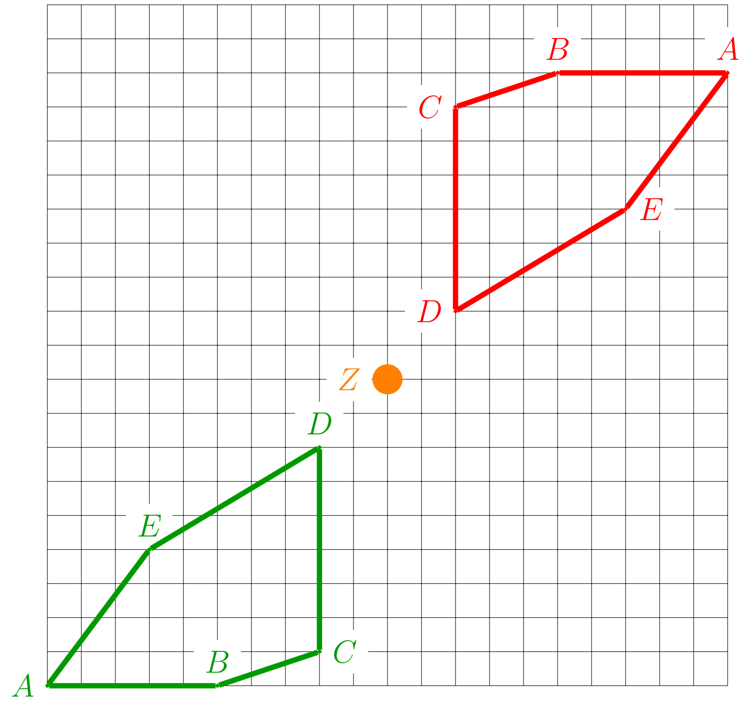
La symétrie de centre A transformera M en M' de sorte que :

— A, M et M' soient alignés
— A soit le milieu de $[MM']$.

Pour construire l'image M' de M par la symétrie centrale de centre A :
— 1ère étape : on trace la droite (AM).
— 2ème étape : on place le compas sur A. On ouvre le compas jusqu'au point M. On reporte la longueur de l'autre côté. L'intersection avec la droite tracée donne M'.

Exemple

La figure rouge suivante est la transformation par symétrie centrale de centre Z de la figure verte.

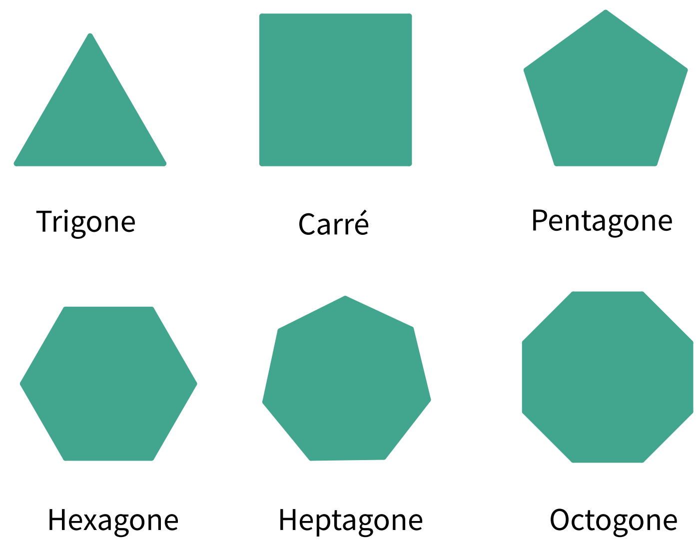


Polygones réguliers

Définition

On appelle **polygone régulier**, un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles formés par des côtés adjacents sont égaux.

Exemples



Propriété

Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans un cercle. Tous les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone ont la même mesure : $\dfrac{360°}{n}$.

Conséquence : construction d'un polygone régulier

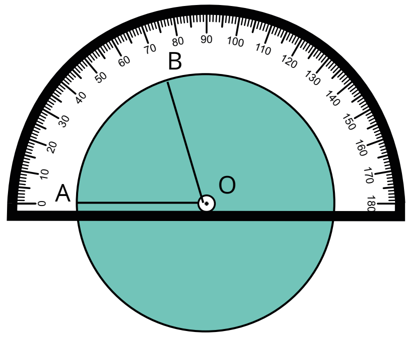
Pour construire un polygone régulier, on doit :

1. construire un cercle,
2. placer un sommet,
3. placer les suivants de sortes que l'angle au centre entre deux sommets consécutifs soit égal à $\frac{360°}{n}$.

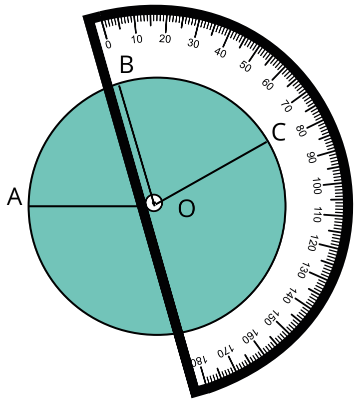
Exemple

« Construire un pentagone régulier. »

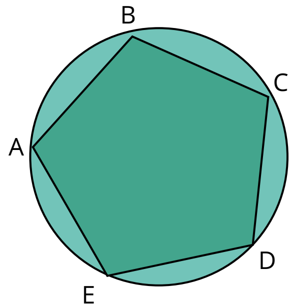
Réponse : Un pentagone ayant 5 côtés, les angles au centre déterminés par deux sommets consécutifs du polygone seront tous égaux à $\dfrac{360}{5} = 72°$.



On construit le cercle et l'un de ses rayons [OA]. On trace ensuite rayon [OB] tel que $\widehat{AOB} = 72°$



On trace ensuite le rayon [OC] tel que $\widehat{BOC} = 72°$



Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un pentagone

Propriété

Le centre du cercle est un centre de symétrie pour le polygone. Il existe également des axes de symétrie qui passent par ce centre.

Constructions particulières

Outre la méthode décrite, il existe d'autres façons de construire certains de ces polygones réguliers.

Dodécagone régulier : C'est le polygone régulier à 12 côtés. Il suffit de construire un hexagone régulier puis les médiatrices des côtés, qui coupent le cercle circonscrit aux autres sommets du dodécagone.

Octogone régulier : C'est le polygone régulier à 8 côtés. Il suffit de construire un carré puis les médiatrices des côtés, qui coupent le cercle circonscrit aux autres sommets de l'octogone.

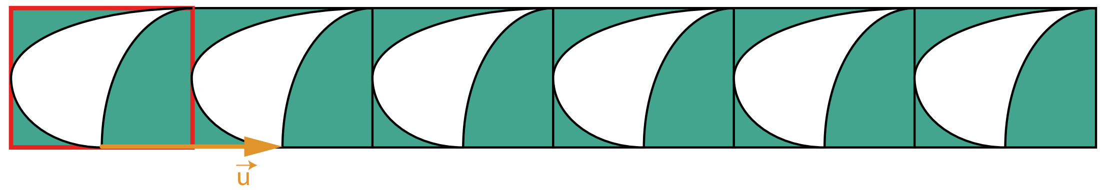
Frises

Définition

Une frise est la répétition d'un même **motif** indéfiniment dans une seule direction.

Exemple

Dans la frise ci-dessous, le motif est encadré en rouge. La frise est obtenue par translation de vecteurs $\lambda\vec{u}$ où λ est un entier.

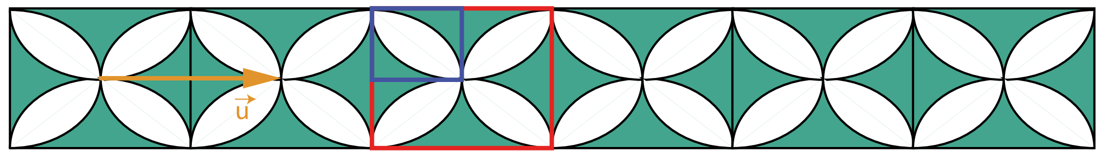


Propriétés

Le motif répété peut-être construit à partir de réflexions ou de symétries centrales d'une **maille élémentaire** (appelé certaines fois **motif élémentaire**).

Exemple

Dans la frise ci-dessous, la maille élémentaire est encadrée en bleu. Le motif et obtenu par deux symétries axiales, d'axes les médiatrices des côtés du rectangle rouge. La frise est obtenue par translation de vecteurs $\lambda\vec{u}$ où λ est un entier.



Pavages

On étend la notion de frises au plan (on passe de une à deux dimensions).

Définition

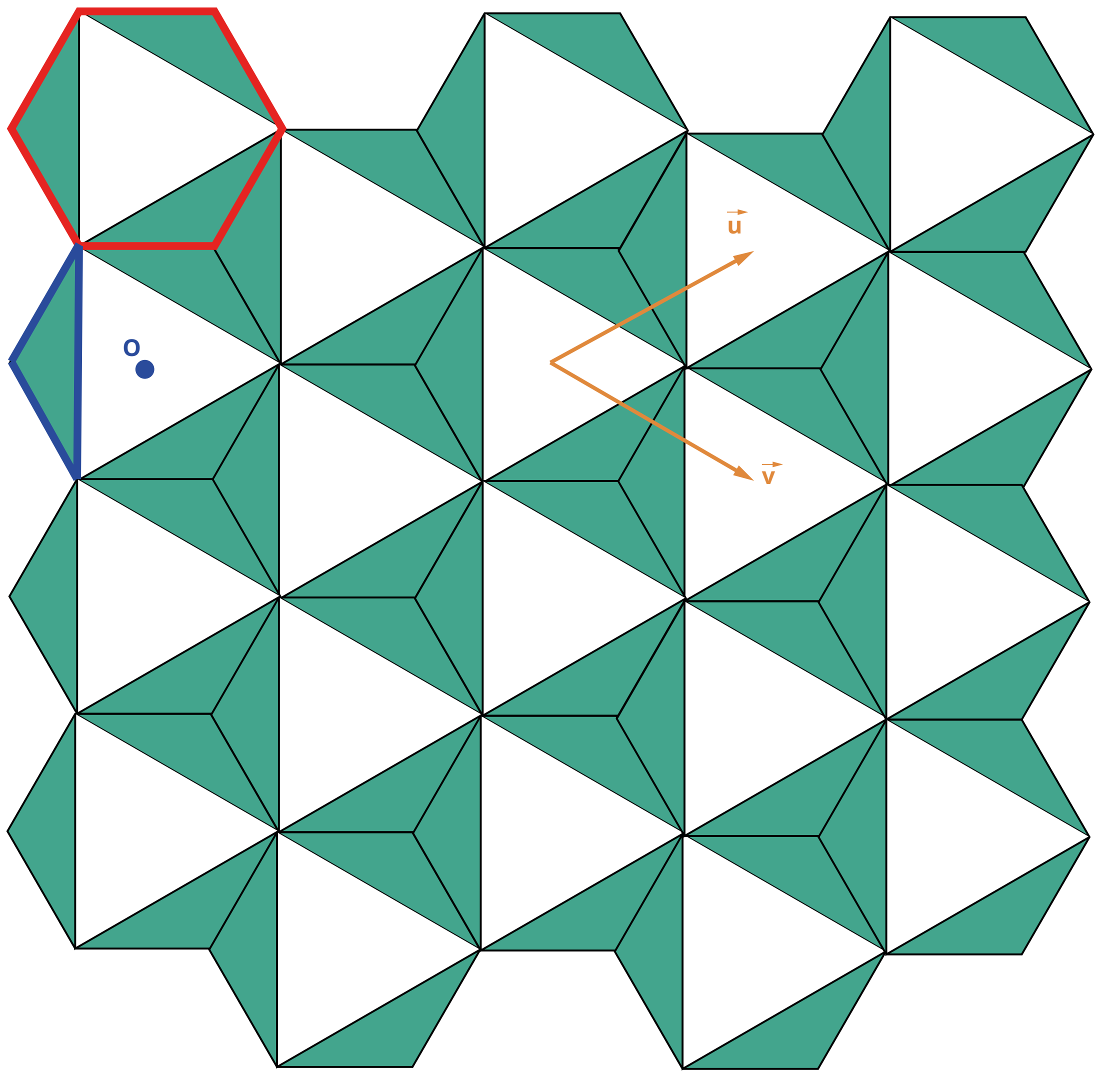
Un pavage est le recouvrement d'un espace donné, à l'aide de translations de figures identiques, appelées motifs, ayant en commun deux à deux uniquement des parties de leurs frontières.

Un motif peut être construit à l'aide de transformations simples (translation, rotation, symétrie centrale, symétrie axiale) d'un motif élémentaire.

Remarque

$$\text{Motif élémentaire} \xrightarrow{\text{symétries, rotations}} \text{Motif} \xrightarrow{a\vec{u}+b\vec{v}} \text{Pavage}$$

Exemple



Dans le pavage ci-dessus le motif élémentaire est encadré en bleu et le motif est encadré en rouge. Le motif se construit à partir de deux rotations de 120° autour du centre O.

Le pavage s'obtient par translations de vecteurs $a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont des entiers et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont représentés sur la figure.

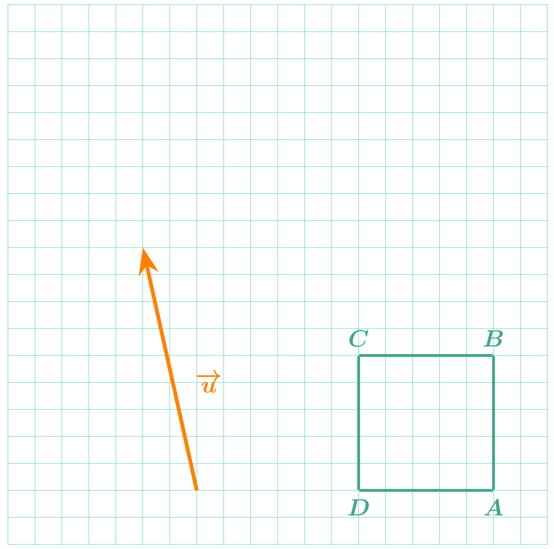
03. EXERCICES

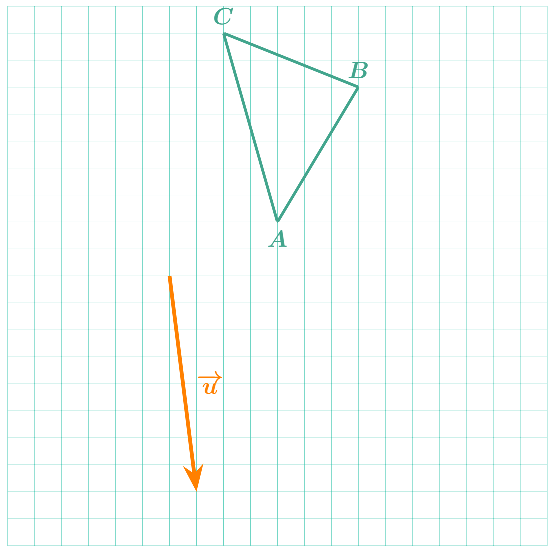
Transformations du plan

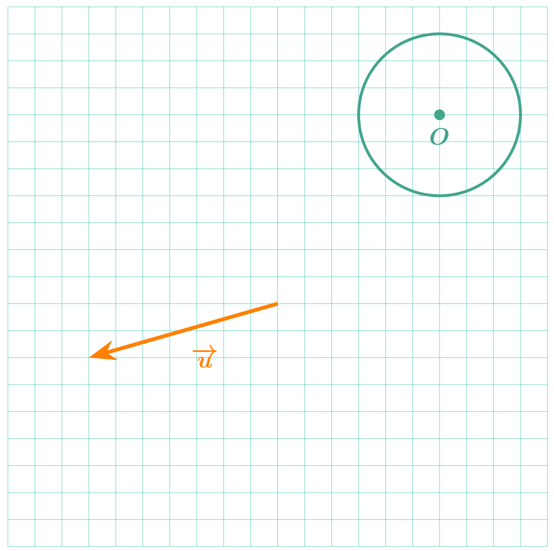
Télécharger l'ensemble des figures

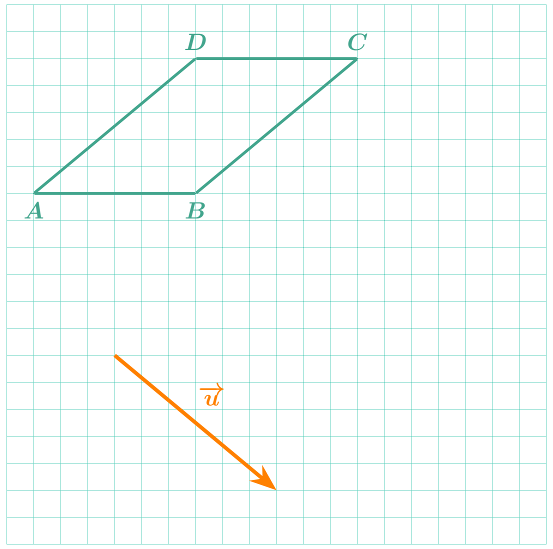
01

Pour chacune des figures suivantes, construire sa translation de vecteur $\vec{u}$.



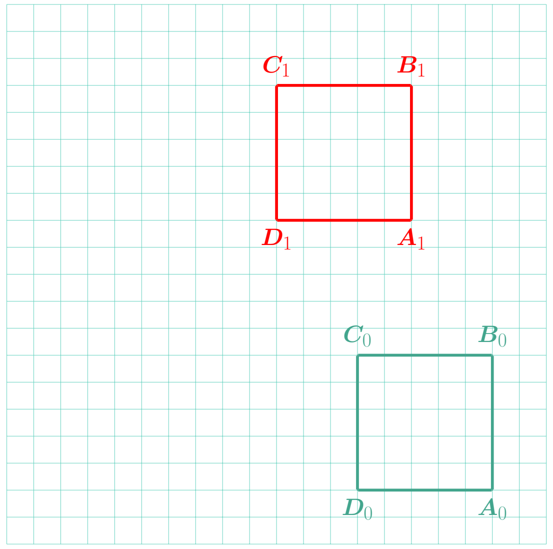


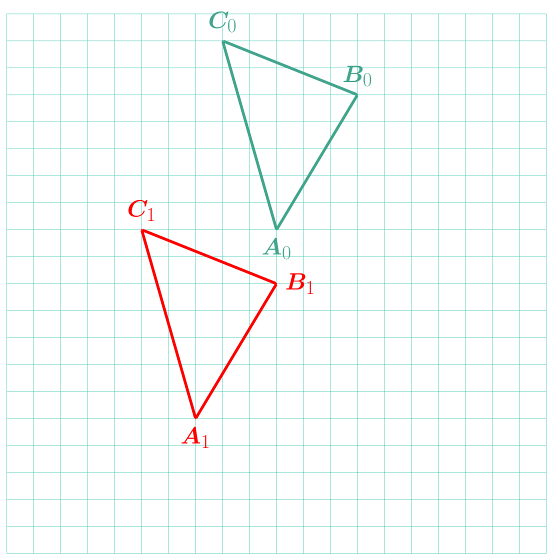


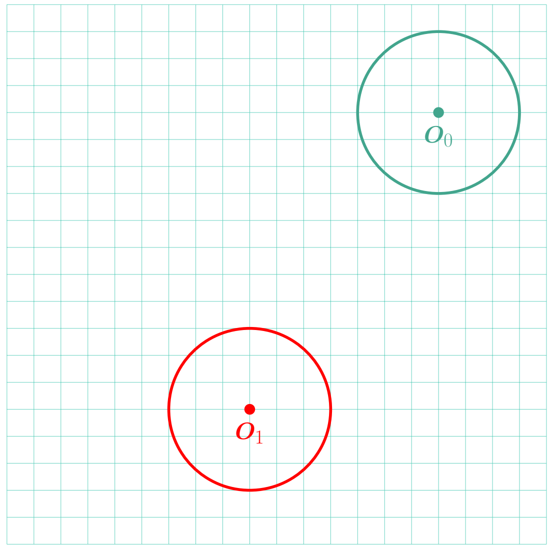


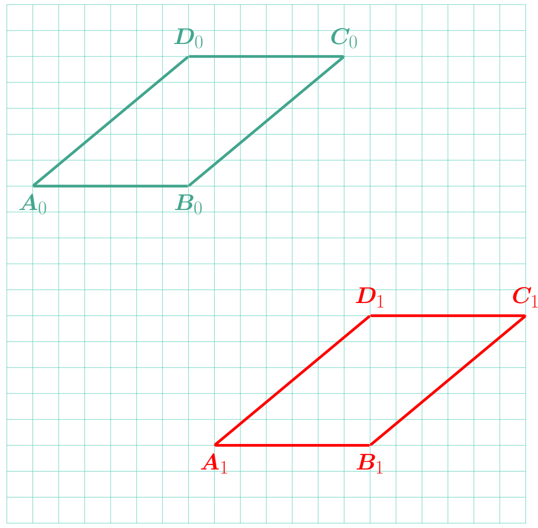
02

Pour chacune des figures suivantes, construire le vecteur $\vec{u}$ transformant la figure verte en la figure rouge par translation.



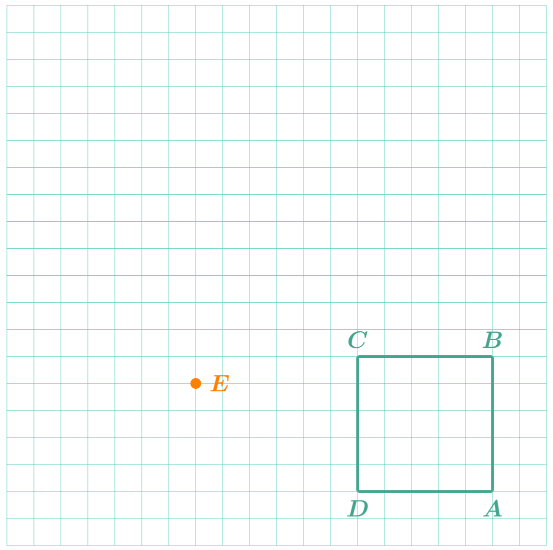


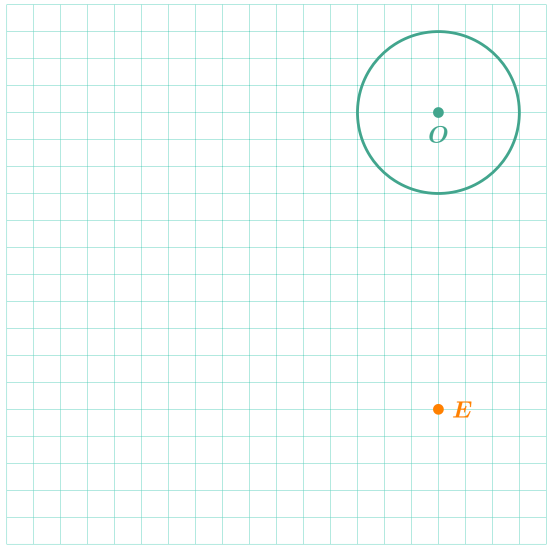


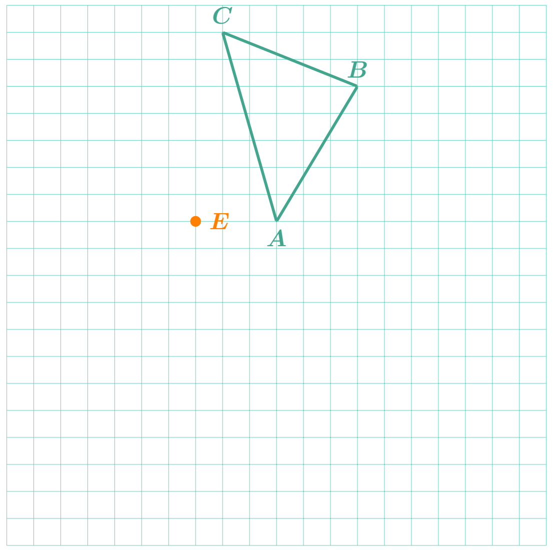


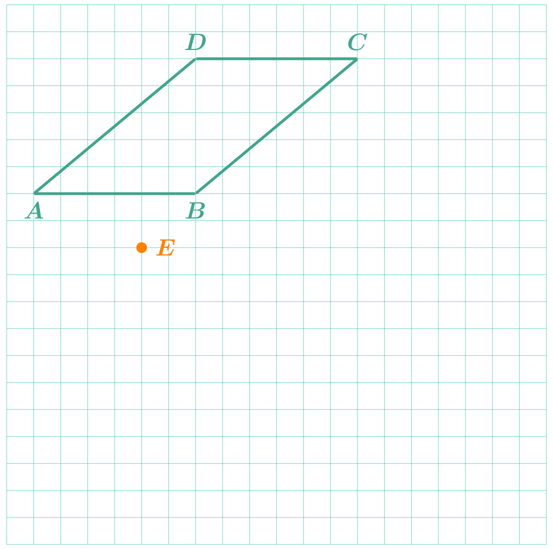
03

Construire la rotation de centre E et d'angle $45°$ (sens antihoraire) pour les deux premières figures, et d'angle $135°$ (horaire) pour les deux suivantes.



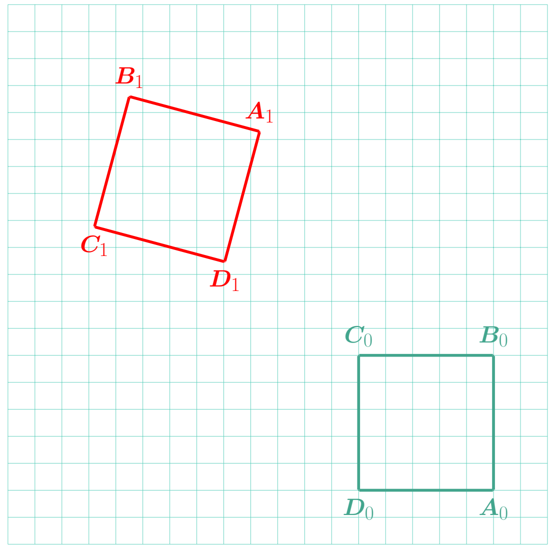


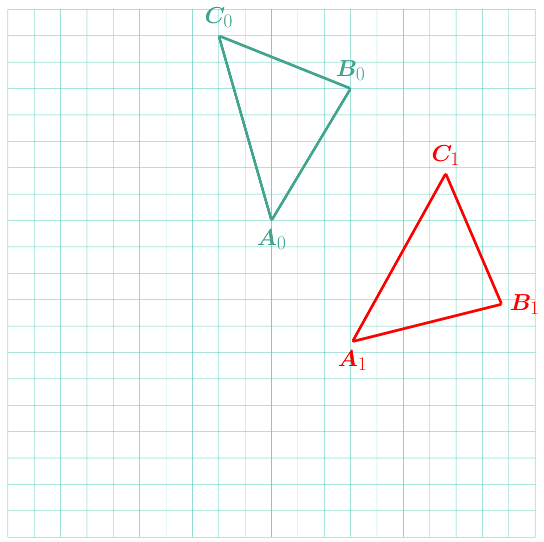




04

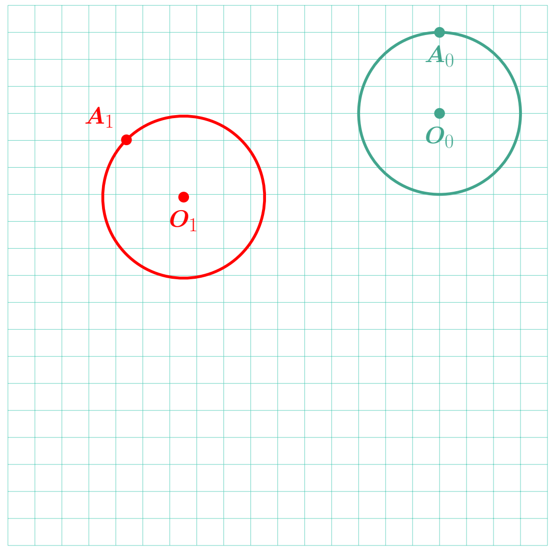
Pour chacune des figures suivantes, construire le centre E de la rotation transformant la figure verte en la figure rouge. Donner l'angle associé.

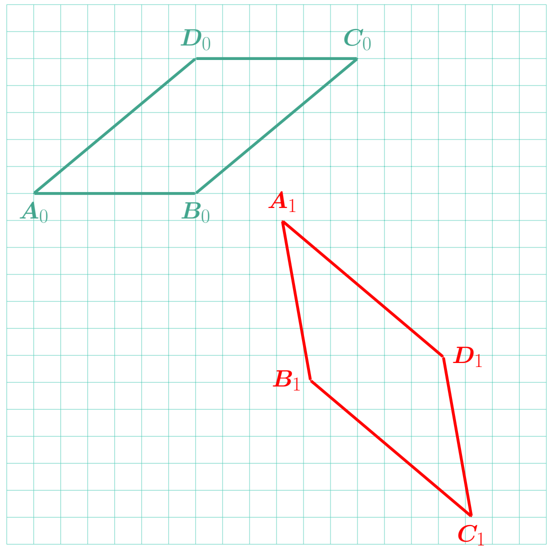




05

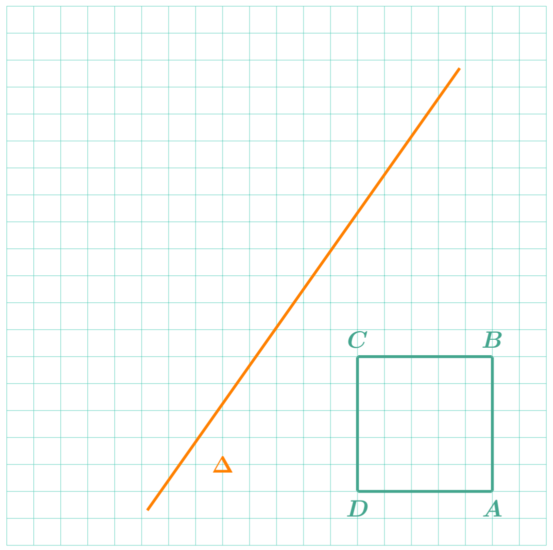
Même exercice que le précédent avec :

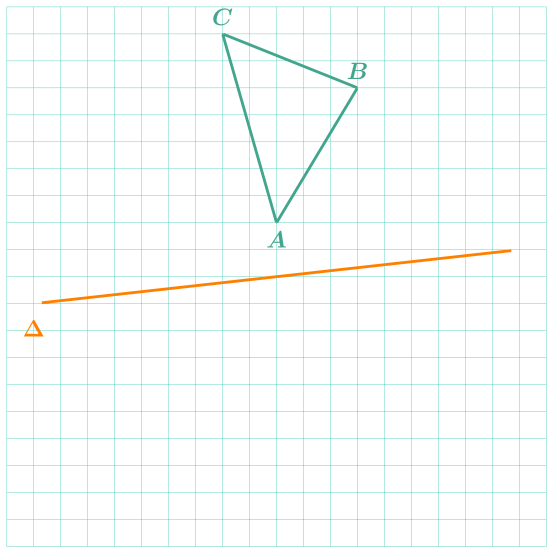


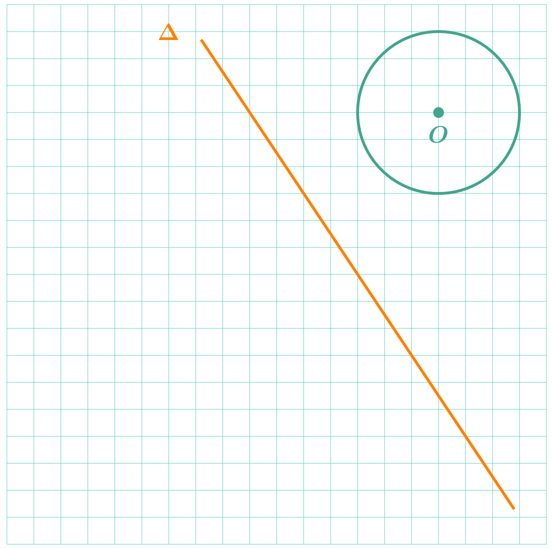


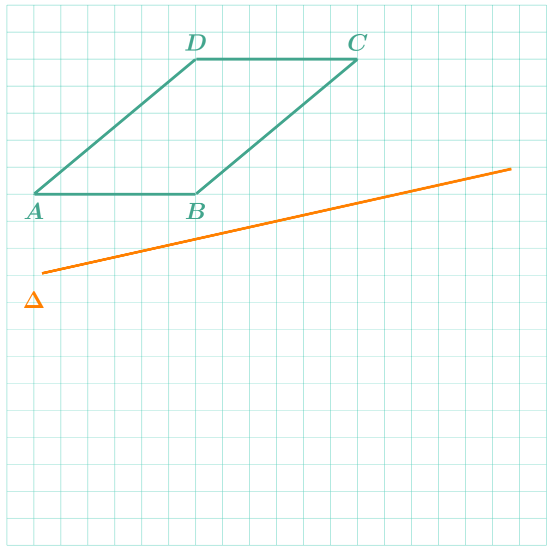
06

Pour chacune des figures suivantes, construire la réflexion d'axe (Δ).



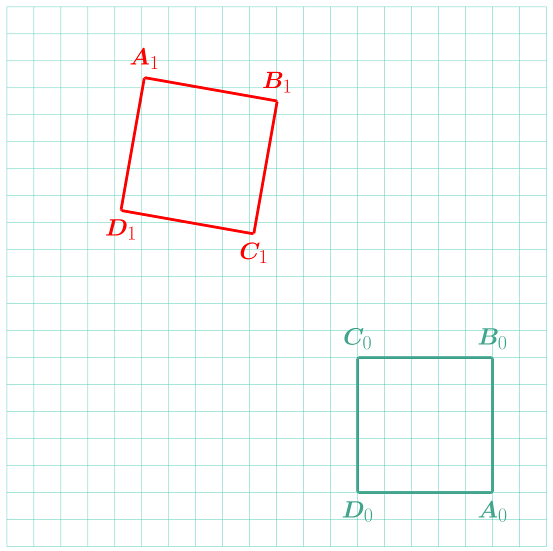


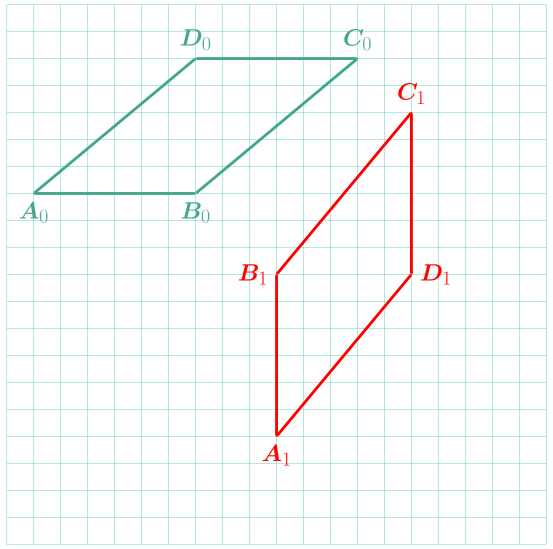




07

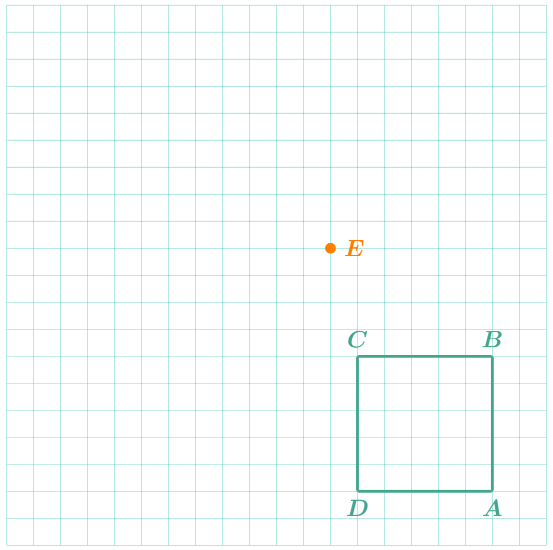
Construire l'axe (Δ) transformant la figure verte en la figure rouge par réflexion.

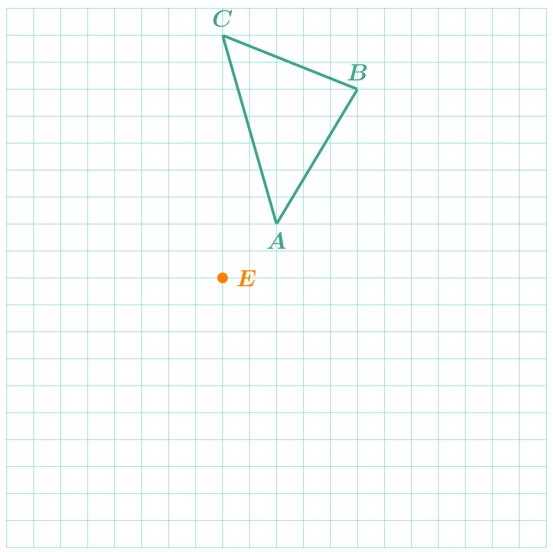


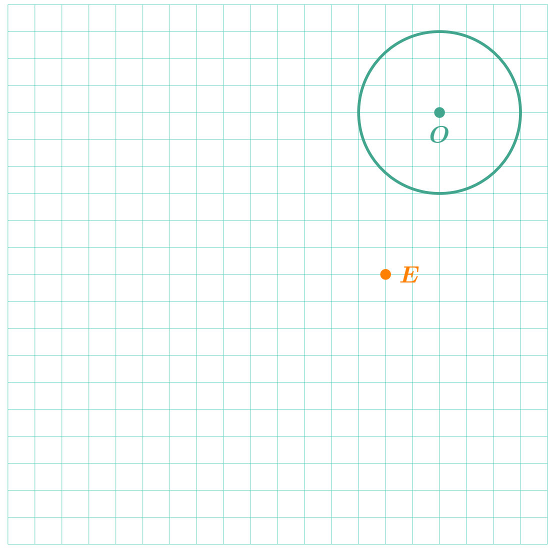


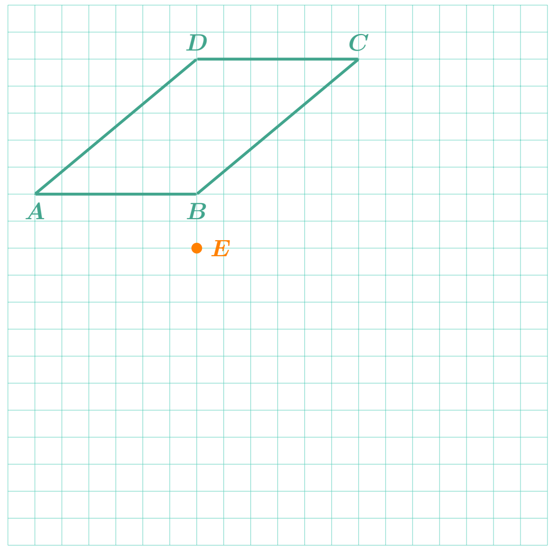
08

Pour chacune des figures suivantes, construire la symétrie centrale de centre E.



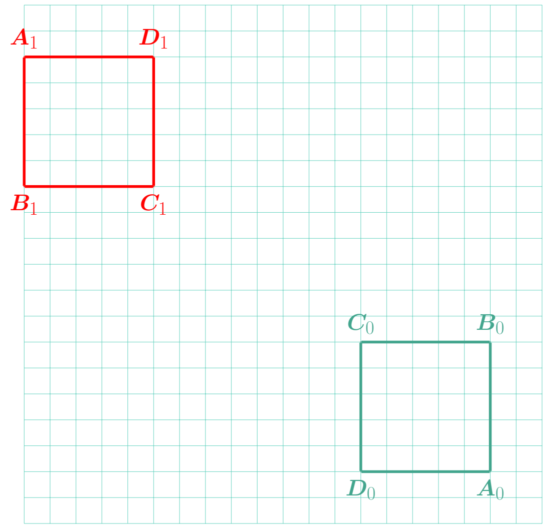


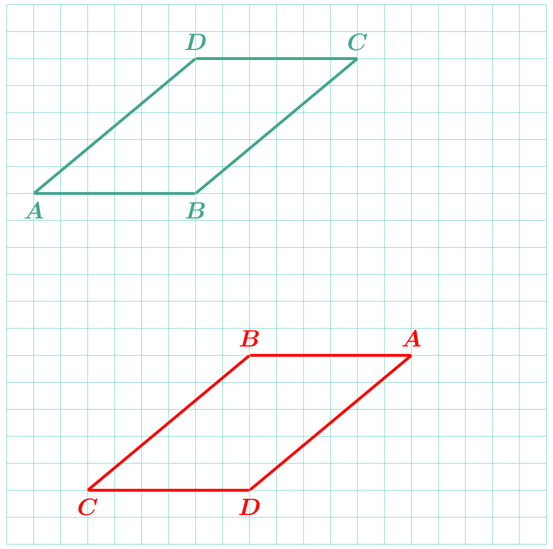




09

Pour chacune des figures suivantes, construire le centre E transformant la figure verte en la figure rouge par symétrie.





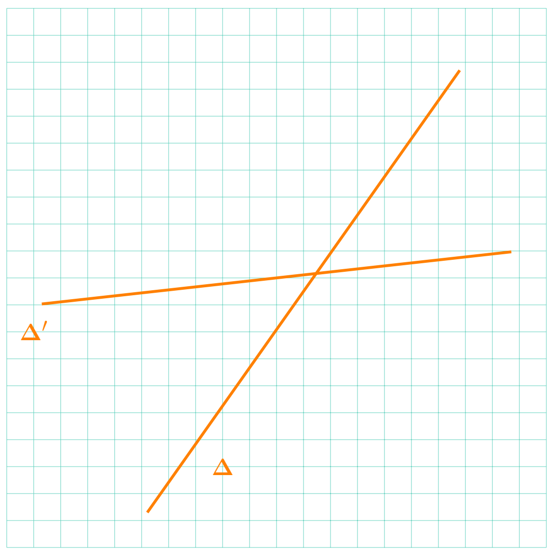
10

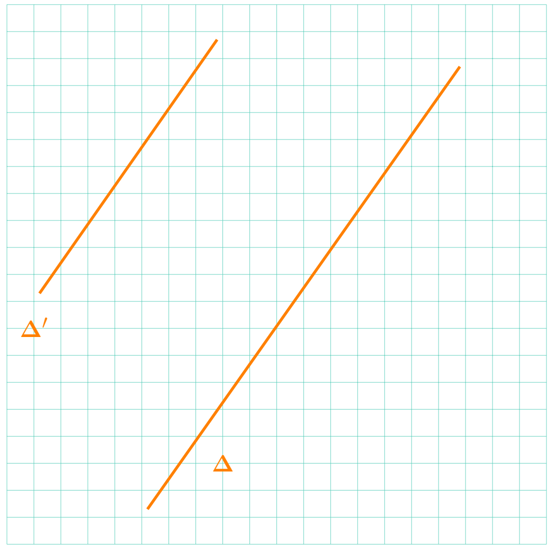
Compléter les phrases suivantes :

1. L'image d'un carré par une symétrie axiale sera . . . . car . . . .
2. L'image d'un cercle par une translation sera . . . . car . . . .
3. L'image d'un parallélogramme par une rotation sera . . . . car . . . .
4. L'image d'un losange par une symétrie suivie d'une autre symétrie sera . . . . car . . . .

11

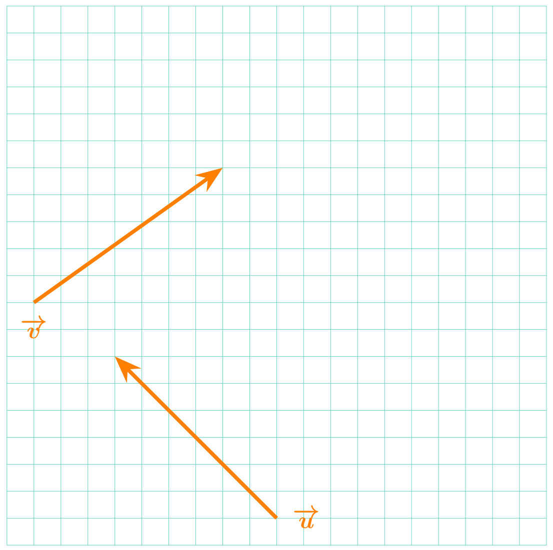
Donner l'équivalent des deux réflexions consécutives d'axes (Δ) et (Δ') représentées ci-dessous.

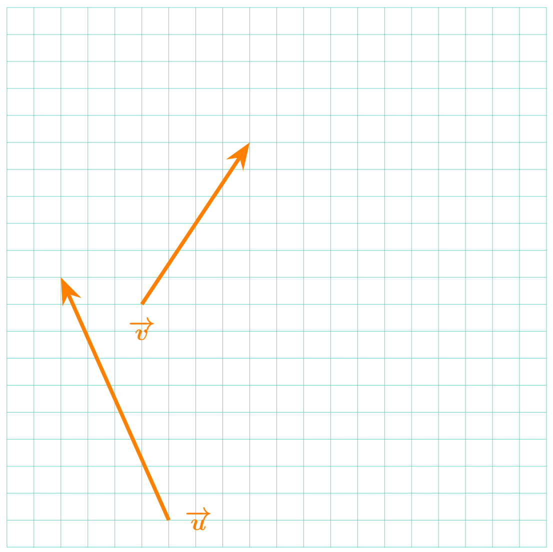




12

Donner l'équivalent des deux translations consécutives d'axes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentées ci-dessous.



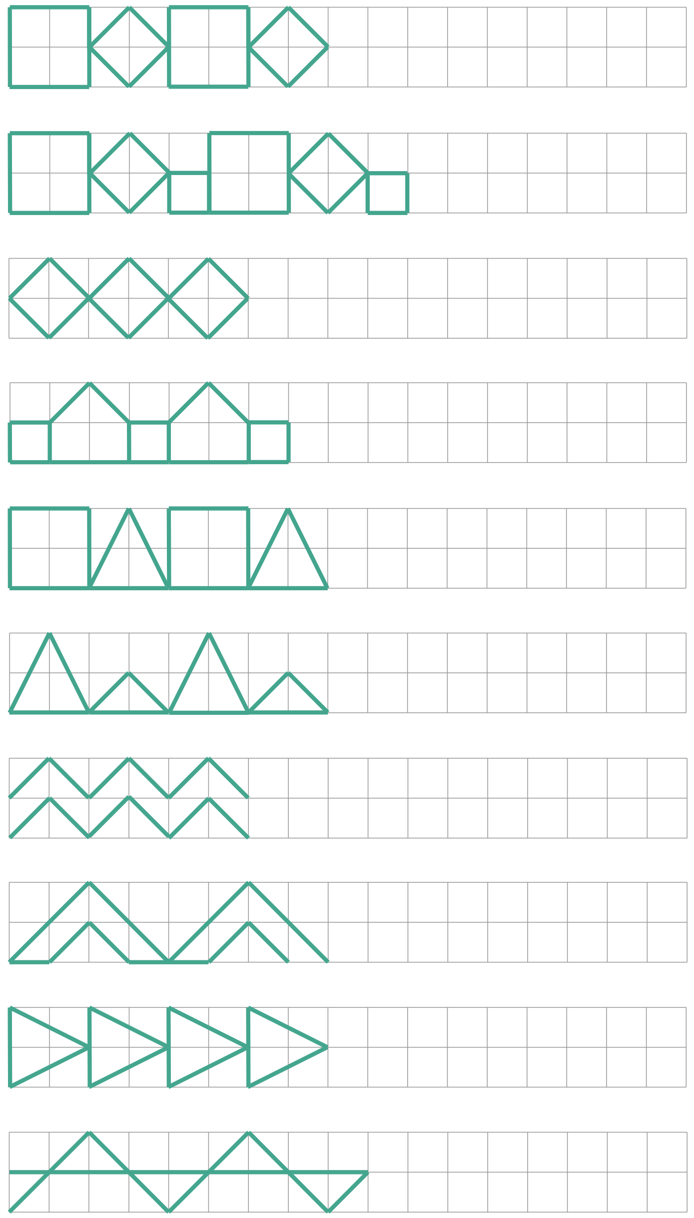


Frises

13

Pour chacune des frises ci-dessous :

1. repérer le motif,
2. tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif,
3. compléter la frise.

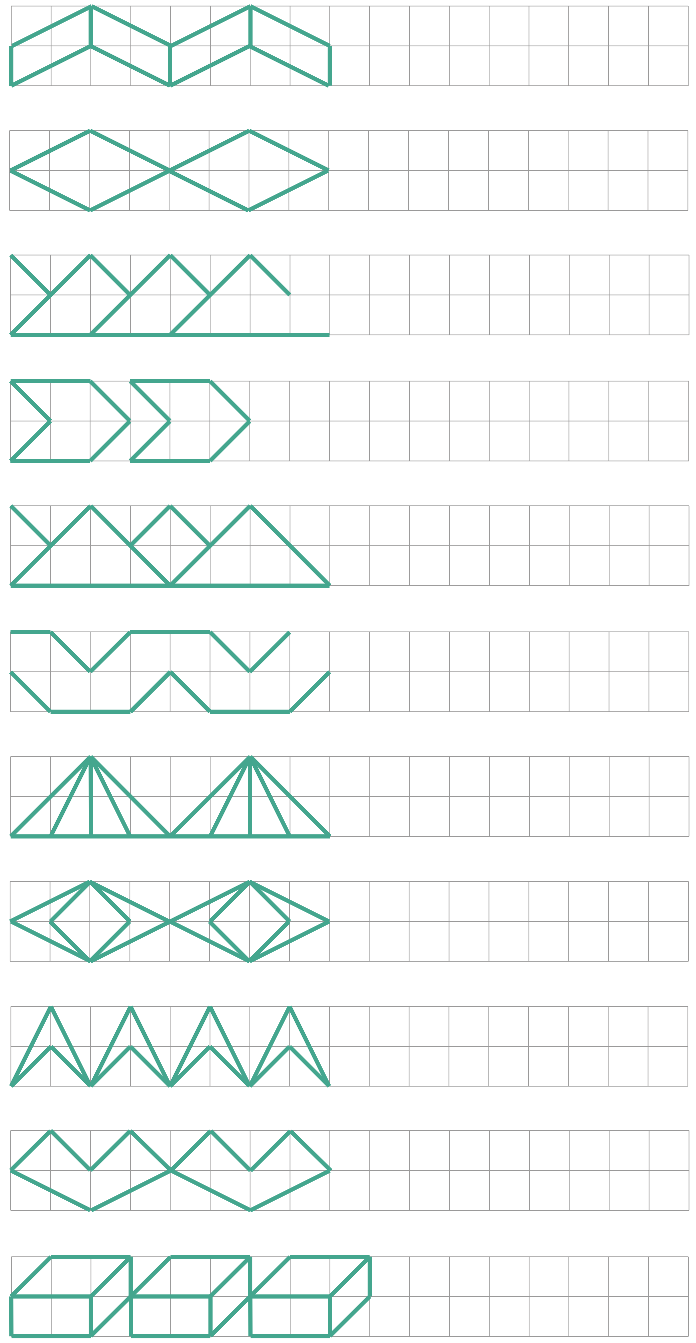


Télécharger la figure

14

Pour chacune des frises ci-dessous :

1. repérer le motif,
2. tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif,
3. compléter la frise.



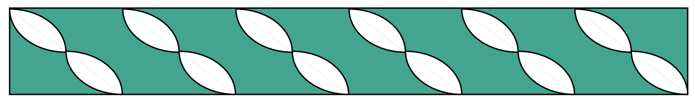
Télécharger la figure

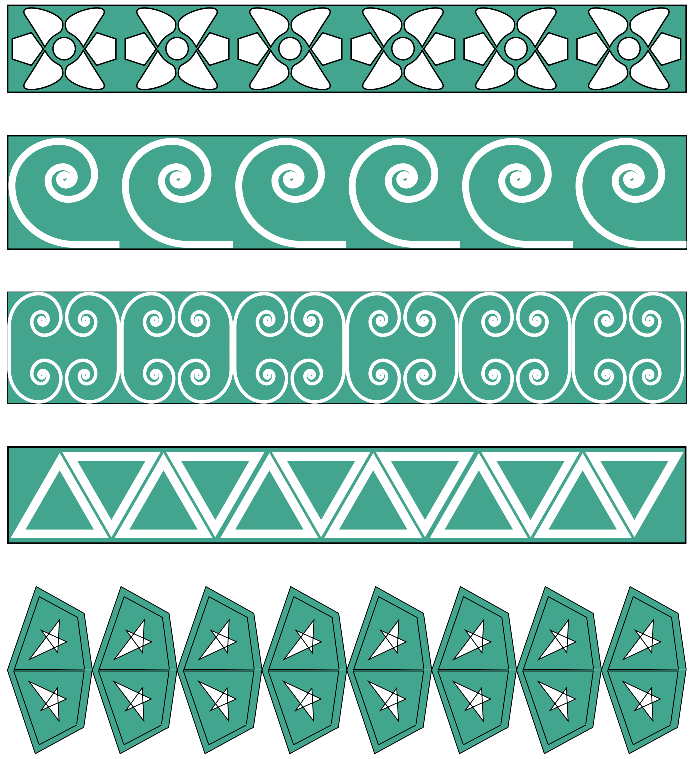
15

Pour chacune des frises ci-dessous :

1. repérer la maille élémentaire et le motif,
2. donner les transformations géométriques permettant de passer de la maille élémentaire au motif,
3. conclure en donnant les transformations géométriques permettant de construire la frise à partir du motif.

Télécharger les figures

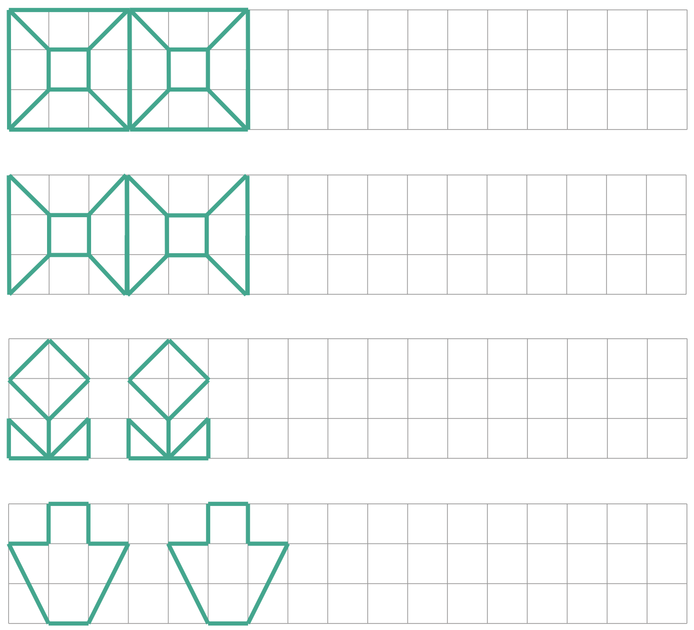




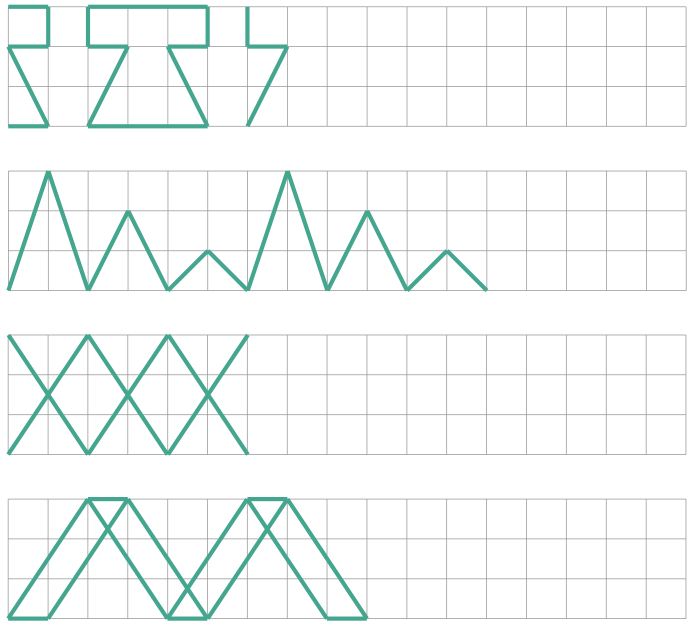
16

Pour chacune des frises ci-dessous :

1. repérer la maille élémentaire et le motif,
2. donner les transformations géométriques permettant de passer de la maille élémentaire au motif,
3. tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif,
4. compléter la frise.



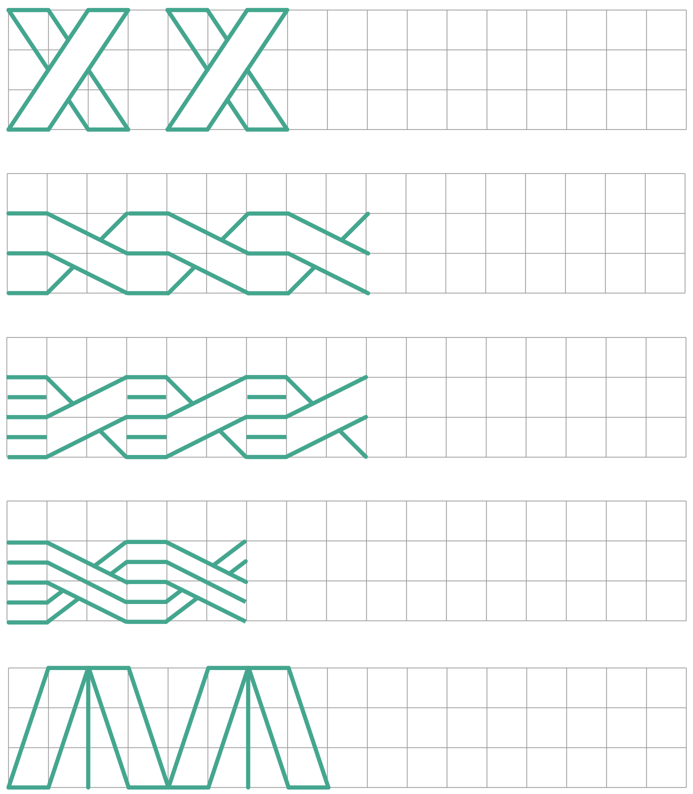
Télécharger la figure



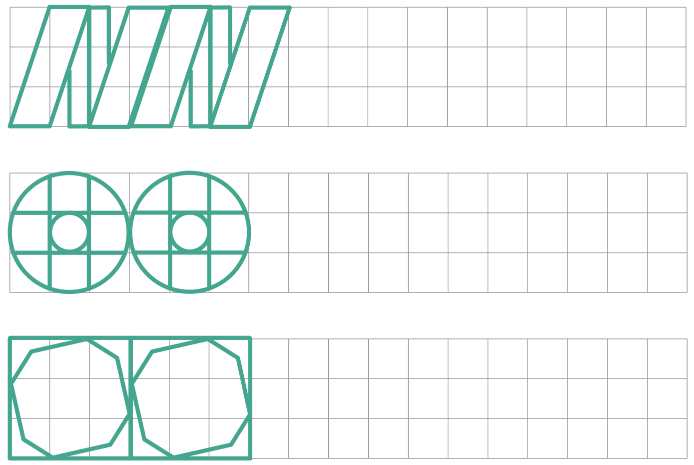
17

Pour chacune des frises ci-dessous :

1. repérer la maille élémentaire et le motif,
2. donner les transformations géométriques permettant de passer de la maille élémentaire au motif,
3. tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif,
4. compléter la frise.



Télécharger la figure



18

Construire une frise en utilisant une maille élémentaire en forme de carré.

19

Construire une frise en utilisant une maille élémentaire en forme de triangle équilatéral.

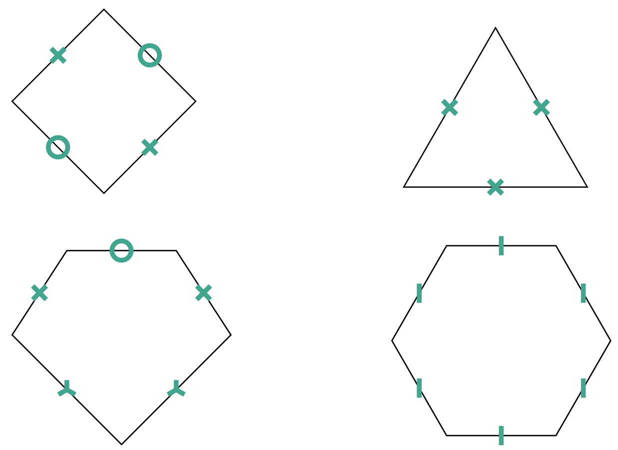
20

Construire une frise inspiré du mouvement *Arts & Crafts*.

Polygones réguliers

21

Les polygones ci-dessous sont-ils réguliers ? Justifie tes réponses.

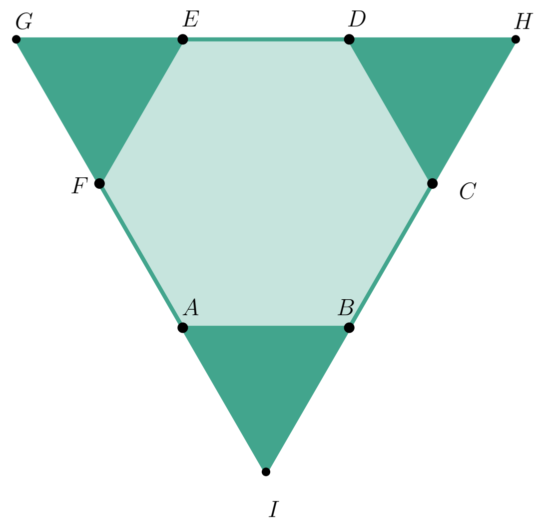


22

Les polygones ci-dessous sont-ils réguliers ? Justifie tes réponses.

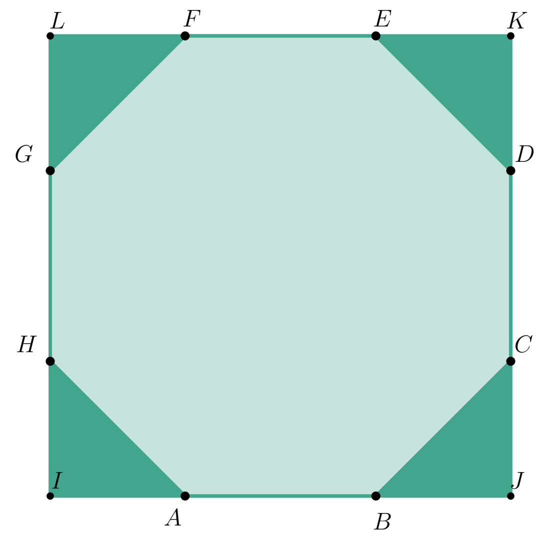
23

L'hexagone $ABCDEF$ est-il régulier, sachant que AF=FG=GE=ED=DH=HC=CB=BI=IA ?



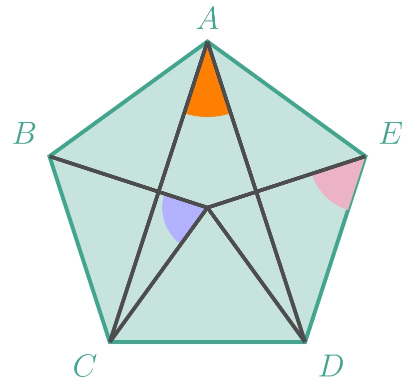
24

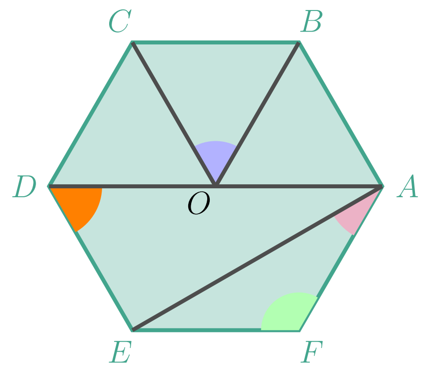
L'ocotogone $ABCDEFGH$ est-il régulier, sachant que AI=IH=HG=GL=LF=FE=EK=KD=DC=CJ=JB=BA ?

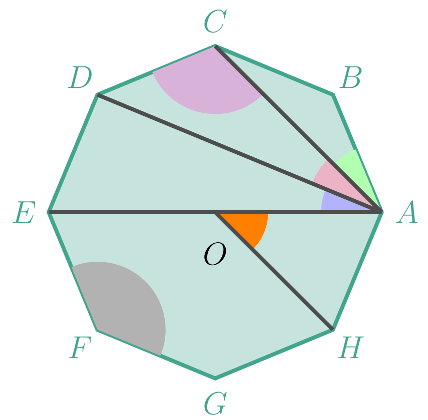


25

Chacune des figures ci-dessous est un polygone régulier. Donner les mesures des angles en couleur.

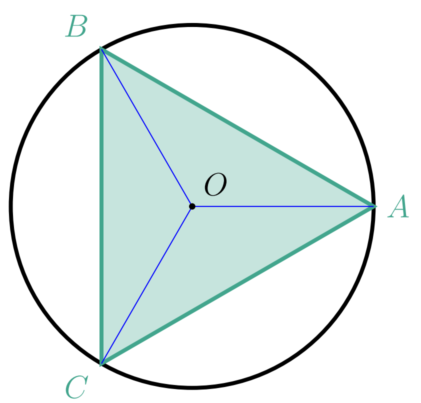






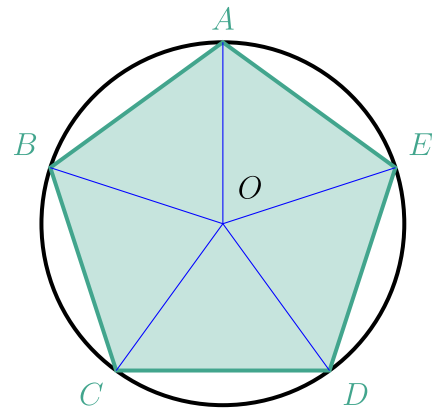
26

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est un triangle équilatéral, inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$? Justifier.



27

Sur la figure ci-contre, le pentagone $ABCDE$ est un pentagone régulier, inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

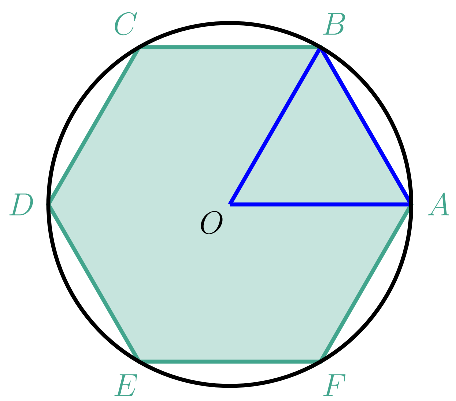


Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$? Justifier.

28

$ABCDEF$ est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$?
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABO}$.
3. En déduire la nature du triangle ABO.
4. Cela justifie une méthode de construction de l'hexagone déjà vue, laquelle ?
5. Exprimer le périmètre de l'hexagone régulier en fonction du rayon r du cercle.



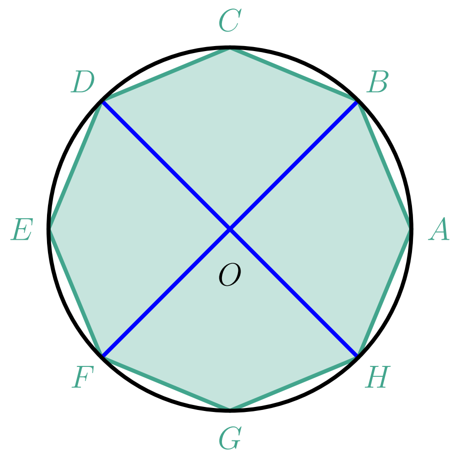
29

Soit A le point d'intersection de deux droites (d) et (d') perpendiculaires. Le cercle de centre A et de rayon 3 cm coupe (d) en B et C et (d') en D et E. Expliquer pourquoi le quadrilatère $BDCE$ est régulier.

30

La figure ci-dessous représente un octogone régulier $ABCDEFGH$ de centre O.

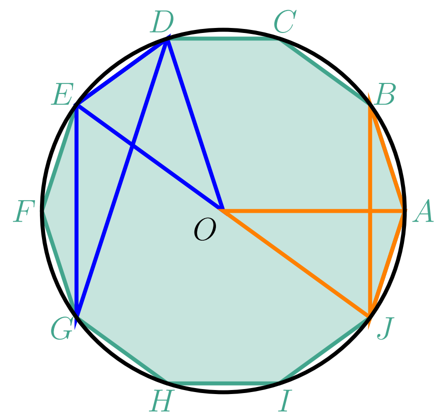
1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$? Justifie ta réponse.
2. Que peux-tu dire des droites (DH) et (BF) ? Justifie ta réponse.



31

La figure ci-dessous représente un décagone régulier $ABCDEFGHIJ$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{EOD}$?
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{EGD}$? Justifier.
3. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOJ}$?
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABJ}$?
5. Conclure.



32

On considère l'octogone régulier $ABCDEFGH$ ayant pour périmètre 32cm, inscrit dans un cercle de centre O. On appelle P le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

1. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOP}$?
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{OAP}$?
3. Prouver que la longueur OP exprimée en cm vaut $\dfrac{2}{\tan 22.5°}$.
4. Calculer la valeur exacte de l'aire de l'octogone $ABCDEFGH$ puis donner une valeur arrondie au cm².

33

1. Construire un hexagone régulier.
2. A partir de quel motif élémentaire peut-on construire cette figure par rotation ? Donner le centre et l'angle de ces rotations.
3. Citer l'ensemble des axes de symétrie et des centres de symétrie.
4. En déduire une autre façon de construire un hexagone régulier.

34

1. Construire un octogone régulier.
2. A partir de quel motif élémentaire peut-on construire cette figure par rotation ? Donner le centre et l'angle de ces rotations.
3. Citer l'ensemble des axes de symétrie et des centres de symétrie.
4. En déduire une autre façon de construire un octogone régulier.

35

On souhaite construire le cercle dans lequel le triangle régulier est inscrit.

1. Construire le triangle en question.
2. Comment retrouver le centre du cercle à partir des droites remarquables du triangle ?
3. Comment en déduire le rayon de ce cercle ?

36

On souhaite construire le cercle dans lequel le quadrilatère régulier est inscrit.

1. Construire le quadrilatère en question.
2. Comment trouver le centre du cercle à partir des droites remarquables du quadrilatère ?
3. Comment en déduire le rayon de ce cercle ?

37

On suppose que l'hexagone régulier est inscrit dans un cercle de 5cm de rayon.

1. Quelle est la longueur d'un côté de l'hexagone ?
2. En déduire le périmètre de l'hexagone.
3. Quelle est l'aire d'un hexagone (on utilisera un triangle équilatéral pour commencer) ?

38

On suppose que l'octogone régulier est inscrit dans un cercle de 5cm de rayon.

1. Tracer cet octogone en partant d'un carré.
2. Quelle est la longueur d'un côté du carré ?
3. En déduire la longueur d'un des côtés de l'octogone (on s'intéressera au triangle formé par trois côtés consécutifs).
4. En déduire le périmètre de l'octogone.
5. Quelle est l'aire de l'octogone (on calculera l'aire du carré pour commencer) ?

39

1. Construire le pentagone régulier $ABCDE$ inscrit dans un cercle de centre O et rayon 4cm.
2. Quelle est la longueur d'un côté du pentagone ?
3. En déduire le périmètre du pentagone puis son aire.
4. Construire les diagonales du pentagone régulier.
5. Nous allons maintenant nous intéresser au rapport de longueur entre une diagonale et un côté du pentagone.
   (a) Montrer que l'angle $\widehat{CDE}$ mesure $108°$.
   (b) En déduire que l'angle $\widehat{ECD}$ mesure $36°$.
   (c) En déduire la longueur EC.
   (d) Calculer le rapport de longueur entre une diagonale et un côté du pentagone. Le résultat obtenu est appelé le nombre d'or φ (voir Exercice 60 du chapitre *Suites*).

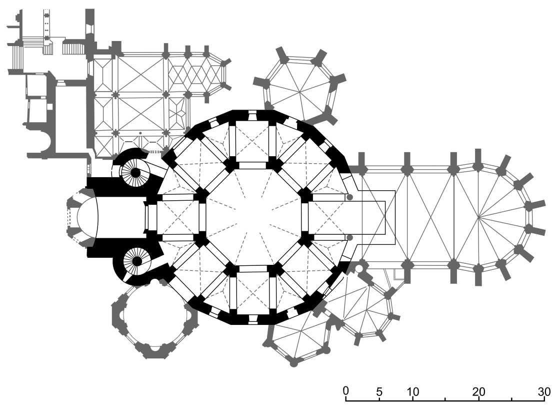
40

Dessiner un losange ABCO tel que $\widehat{\text{AOC}} = 120°$.

1. Construire son symétrique par la symétrie d'axe (OC), on notera E le symétrique de A et D le symétrique de B.
2. Construire son symétrique par la symétrie d'axe (OA). On notera F le symétrique de B.
3. Prouver alors que ABCDEF est un hexagone régulier

41

La chapelle « Palatine » a été construite au VIII^e siècle. Elle était la synthèse accomplie entre l'Antiquité et les dernières innovations techniques et stylistiques de l'époque. Elle constitue ainsi une référence qui a donné lieu à de nombreuses reprises. Ci-dessous figure un plan du plancher de la chapelle.



1. Repérer et nommer les deux polygones réguliers.
2. Quelle est la mesure de l'angle au centre pour chacun de ces polygones ?
3. Le polygone central est inscrit dans un diamètre de 16,54 mètres. Quelle est la longueur d'un côté de ce polygone ?
4. Quelle est l'aire de la partie centrale ?
5. Donner une construction géométrique permettant de passer du polygone central à celui du déambulatoire.

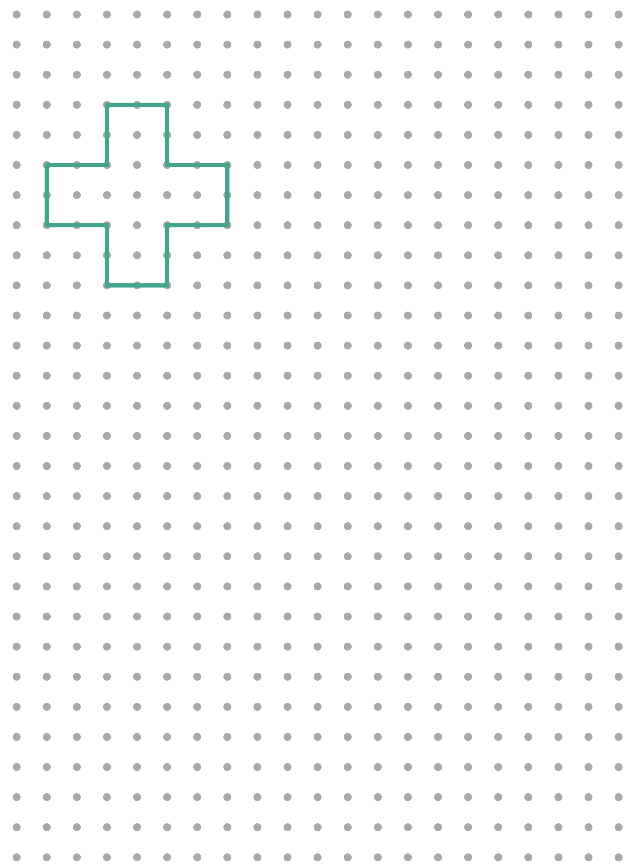
42

La construction d'Euclide – On considère le triangle AOF rectangle et isocèle en O ; G est le milieu de [AO] ; le cercle de centre G et passant par F coupe la demi-droite [AO) en C. Soit B et H les points d'intersections des cercles C_1 et C_2 de rayon OA et de centres respectifs A et C avec B dans le même demi-plan que F par rapport à (OA). Soit D et E les intersections respectives de la droite (AH) avec C_2 et de la droite (CH) avec C_1. Montrer que ABCDE est un pentagone régulier.

Pavages

43

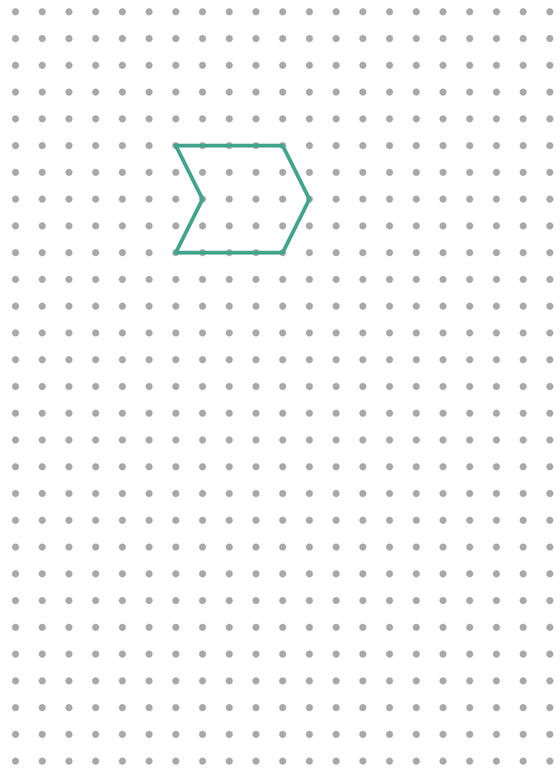
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

44

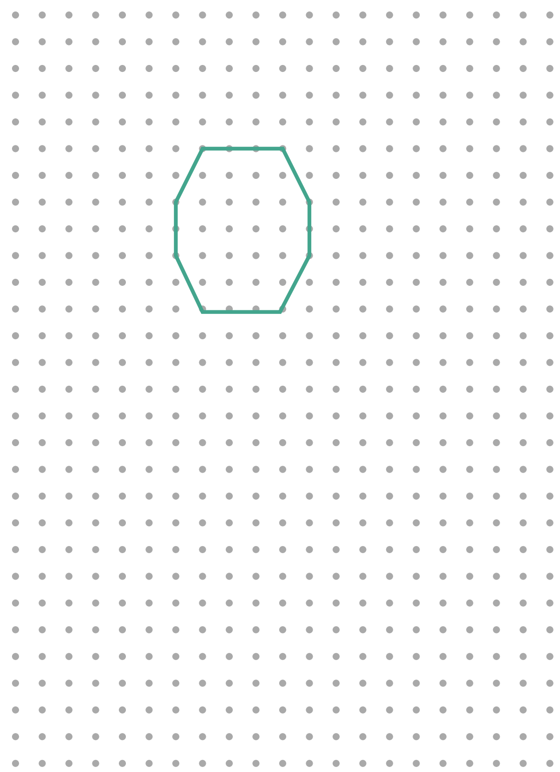
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

45

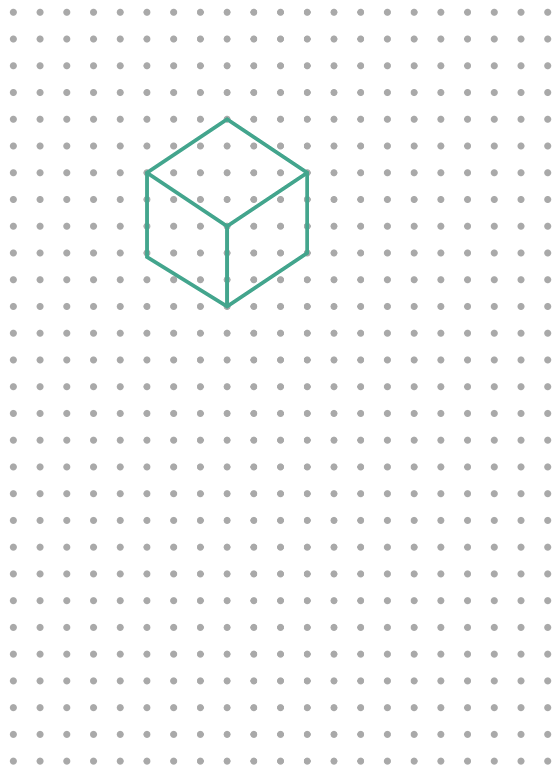
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

46

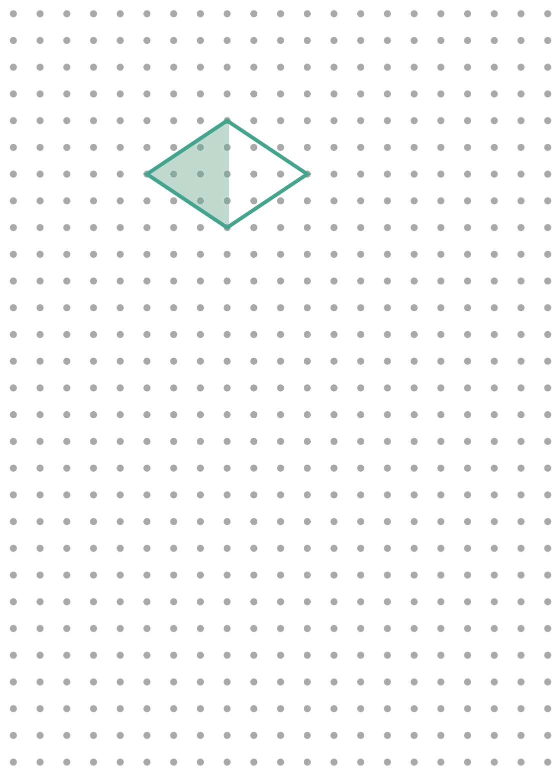
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

47

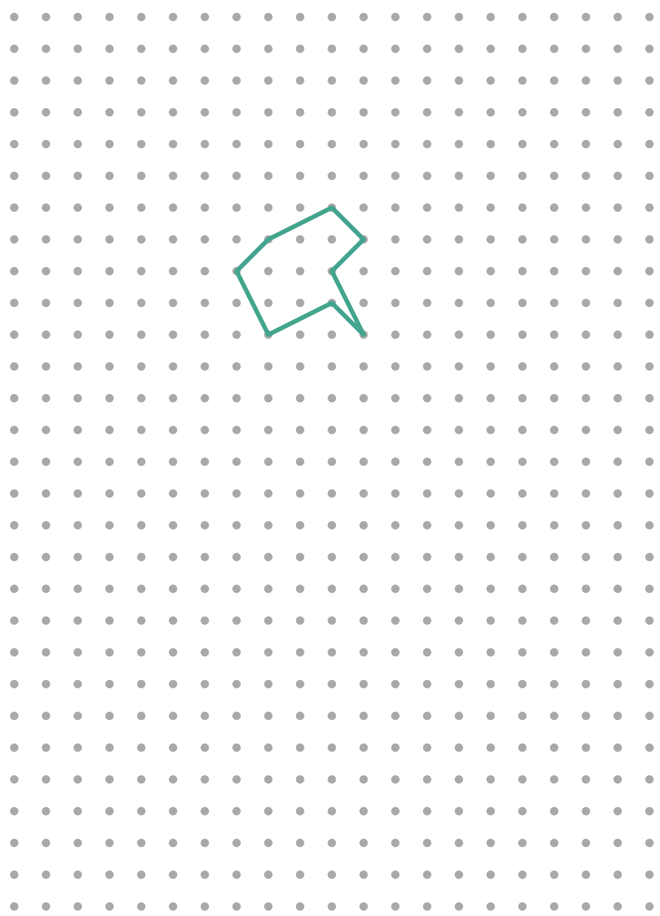
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

48

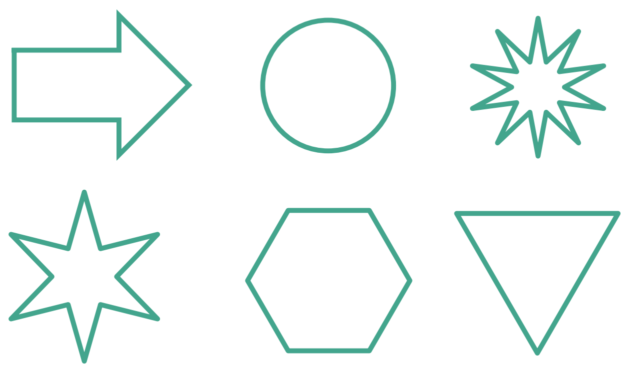
Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

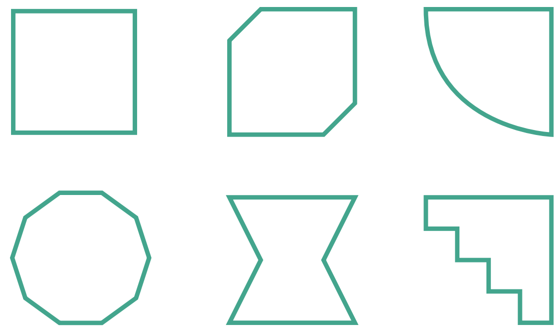
49

Parmi les figures ci-dessous, indiquer celles qui permettent de réaliser un pavage.



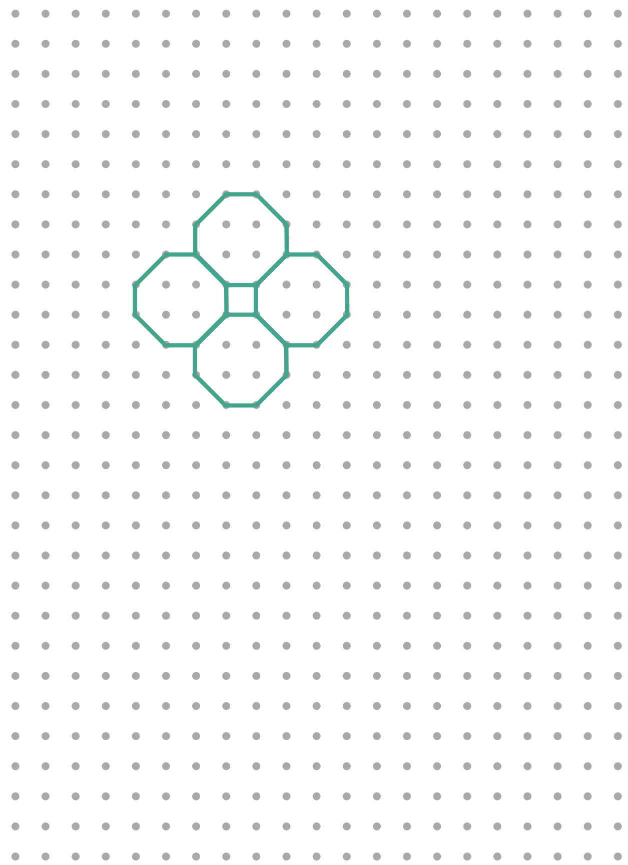
50

Parmi les figures ci-dessous, indiquer celles qui permettent de réaliser un pavage.



51

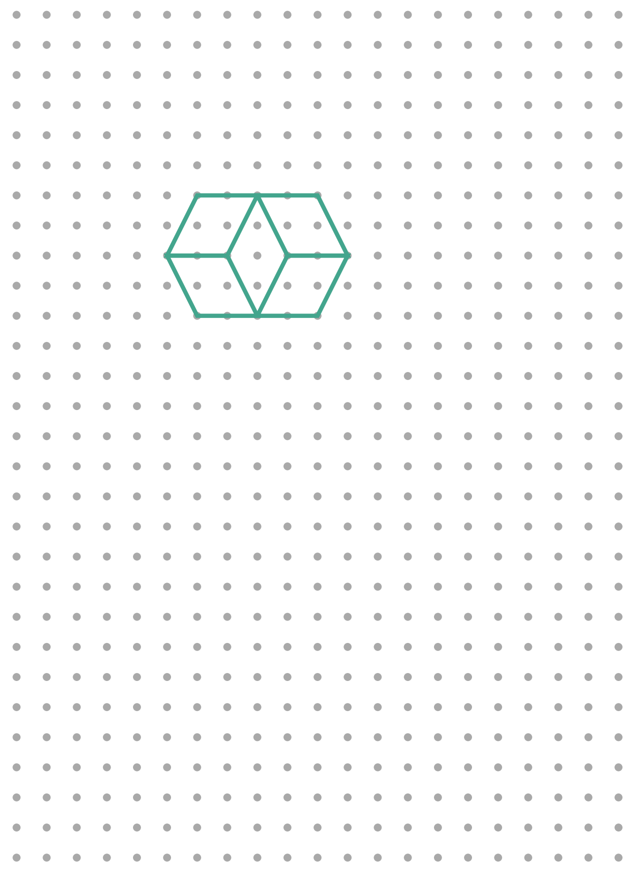
1. Repérer la maille élémentaire du motif donné.
2. Par quelles transformations obtient-on le motif à partir de la maille élémentaire.
3. Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage.
4. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

52

1. Repérer la maille élémentaire du motif donné.
2. Par quelles transformations obtient-on le motif à partir de la maille élémentaire.
3. Compléter la figure suivante afin de réaliser un pavage.
4. Tracer les deux vecteurs permettant de créer ce pavage par translation du motif donné.



Télécharger la figure

53

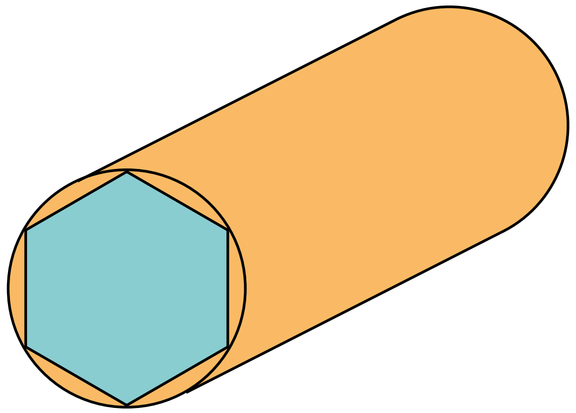
1. Un carré permet-il de réaliser un pavage du plan ? Et un triangle équilatéral ? Justifier.
2. On considère un hexagone régulier.
   - Combien mesurent les angles d'un hexagone régulier ?
   - Réalise un schéma qui montre qu'il est possible de paver le plan à l'aide d'hexagones réguliers identiques.
   - Combien faudra-t-il en disposer autour d'un sommet du pavage ?
3. Expliquer alors pourquoi il n'est pas possible de constituer un pavage du plan à l'aide de pentagones réguliers.
4. On considère un polygone régulier à n côtés.
   - Montre que la mesure en degrés de ses angles est $180° - \dfrac{360°}{n}$.

— Quelle condition la mesure des angles d'un polygone régulier doit-elle vérifier pour que l'on puisse réaliser un pavage du plan à l'aide de ce polygone ?
— Avec quels polygones réguliers est-il possible de paver le plan ?

Problèmes

54

On usine un cylindre de métal dont la section est un disque de 8 cm de diamètre afin d'obtenir une pièce métallique ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier. On appelle $ABCDEF$ l'hexagone régulier inscrit dans ce disque et O son centre.

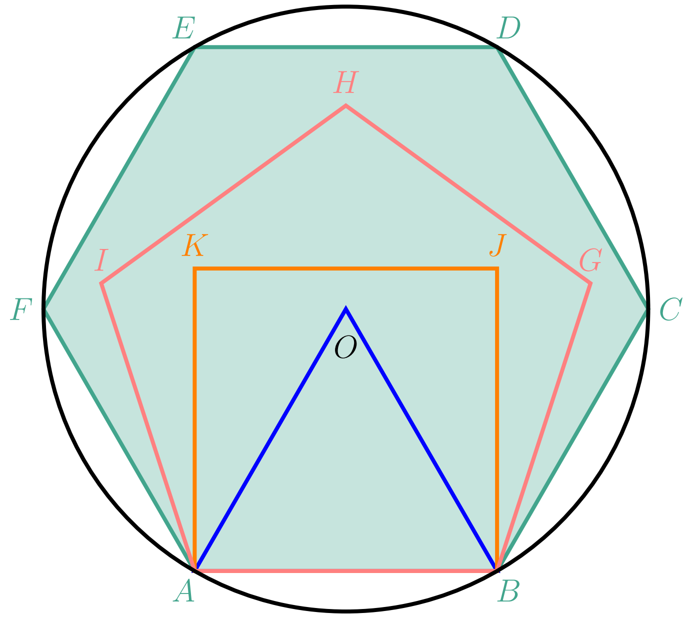


1. Représenter le disque de base et l'hexagone $ABCDEF$ en vraie grandeur.
2. Quelle est la nature du triangle AOB ? Calculer l'aire de ce triangle arrondie au cm².
3. En déduire la valeur de l'aire de l'hexagone $ABCDEF$ arrondie au cm².
4. La hauteur du cylindre est de 20 cm. Calcule le volume du cylindre, puis le volume de la pièce dont la base est l'hexagone $ABCDEF$, arrondis au cm³
5. Quel pourcentage de métal, arrondi au dixième, est perdu lors de l'usinage ?

55

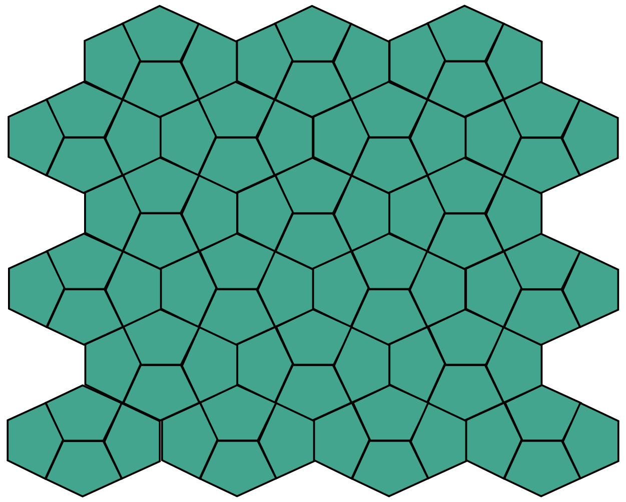
On considère la figure ci-dessous, où sont représentés un hexagone régulier $ABCDEF$, un pentagone régulier $ABGHI$, un carré $ABJK$ et un triangle équilatéral AOB.

1. Démontrer que O est le centre de sur cercle dans lequel $ABCDEF$ est inscrit.
2. Donner la mesure des angles $\widehat{OBJ}$, $\widehat{JBG}$ et $\widehat{GBC}$.
3. Reproduire la figure avec $AB = 6\text{cm}$.
4. Calculer les aires du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone.
5. Calculer les pourcentages de remplissage arrondis au dixième du carré dans l'hexagone.
6. Calculer les pourcentages de remplissage arrondis au dixième du triangle équilatéral dans le carré.



56

1. Construire un triangle ABC rectangle isocèle en B avec AB=6cm.
2. Construire à l'extérieur de ce triangle, le triangle ACD rectangle en D avec CD = 3cm.
3. Construire l'image de ABCD par la symétrie d'axe (AD). On notera E l'image de B par la symétrie et F l'image de C par cette symétrie.
4. Quelle est la nature du polygone ABCFE ?
5. Montrer que $AC = 6\sqrt{2}$.
6. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$? On arrondira le résultat à 10^{-1} degré.
7. Quelle est l'aire du polygone ABCFE ?
8. On peut paver le plan comme illustré ci-dessous, en utilisant pour maille élémentaire le polygone ABCFE obtenu.



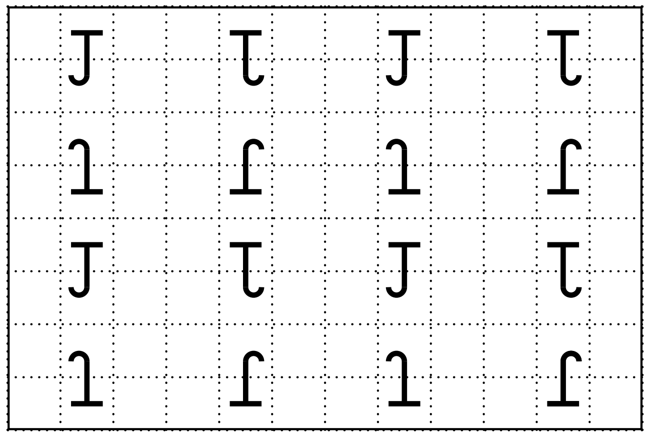
Télécharger la figure

(a) Repérer et reproduire le motif utilsé dans ce pavage.
(b) Quelles transformations permettent de passer de la maille élémentaire au motif ? Indiquer sur votre dessin les éléments caractérisitques de ces transformations.
(c) En plaçant des points sur la figure ci-dessus, définir les vecteurs permettant de paver le plan à l'aide du motif en question.

57

Partie A

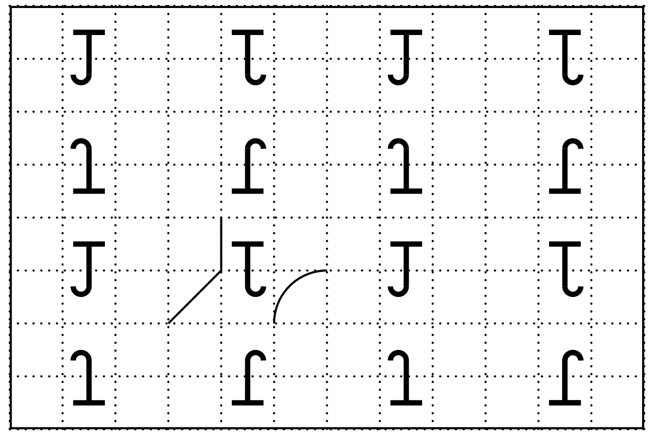
La figure ci-dessous représente un pavage proposé pour la moquette d'un ascenseur.



Le motif (la lettre J) a été jugé trop simple par le client. Le concepteur a donc ajouté au motif deux éléments : un quart de cercle, et deux segments adjacents. Sur la figure à la fin de cet exercice, compléter le pavage sachant que l'on utilise les mêmes transformations que celles du pavage initial.

Partie B

On considère un triangle OIJ rectangle en O, avec OI = 2 cm et OJ = 1 cm. En utilisant ce triangle rectangle, construire un pavage du plan sur une zone carrée de 8 cm de côté, à l'aide de la symétrie de centre O et des translations de vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.



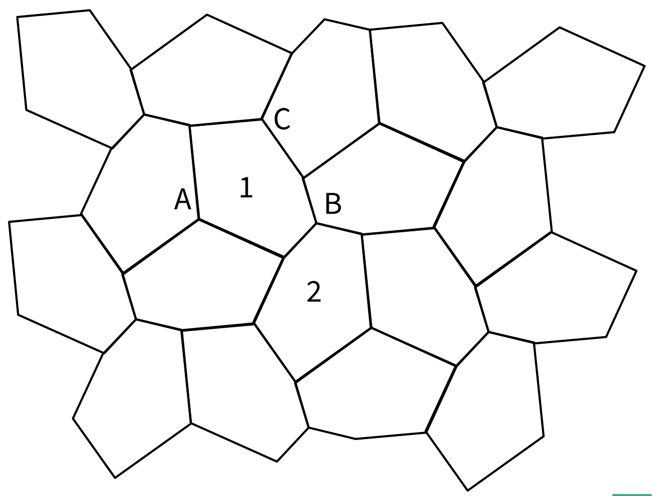
Télécharger la figure

58

Partie A : observation du pavage

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a construit le pavage ci-dessous. Ce pavage est constitué d'hexagones identiques.

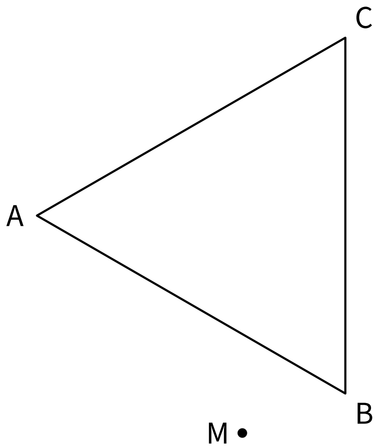
1. Quelle transformation permet de passer de l'hexagone 1 à l'hexagone 2. Préciser les caractéristiques de cette transformation.
2. Hachurer sur le pavage tous les hexagones qui sont l'image de l'hexagone 1 par une translation.



Télécharger la figure

Partie B : Construction d'un pavage différent

Sur la figure ci-dessous, un triangle équilatéral ABC est tracé. M est un point extérieur au triangle.



Télécharger la figure

1. Reproduire la figure.
2. Construire le symétrique M_1 de M par rapport à l'axe (AB), le symétrique M_2 de M par rapport à l'axe (BC), le symétrique M_3 de M par rapport à l'axe (AC). Tracer en couleur l'hexagone $AM_1BM_2CM_3$.
3. En utilisant des couleurs différentes, construire soigneusement l'image de cet hexagone par la rotation de centre A et d'angle 120 °, puis par la rotation de centre A et d'angle 240 °, le sens de rotation choisi étant le sens anti-horaire (le sens inverse des aiguilles d'une montre).

   Laisser les traits de construction apparents.
4. Donner deux vecteurs de base permettant de paver le plan à l'aide du motif obtenu.

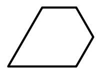
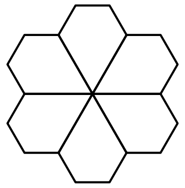
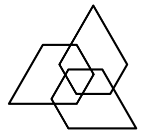
59

Partie A : Pentagone

1. Constructions :
   - Dessiner un segment $[OA]$ de longueur 6 cm.
   - Construire le triangle équilatéral OAD.
   - Soit I le milieu de $[AD]$. Construire à l'extérieur du triangle OAD les deux triangles équilatéraux IAB et ICD.
   - Tracer le pentagone $OABCD$.
2. Démontrer que que IBC est un triangle équilatéral.
3. Faire apparaître sur le dessin que le pentagone $OABCD$ est la juxtaposition de 7 triangles équilatéraux identiques.

Partie B : Pavage

1. On considère le motif élémentaire ainsi que les deux motifs « fleur » et « hélice » suivants :

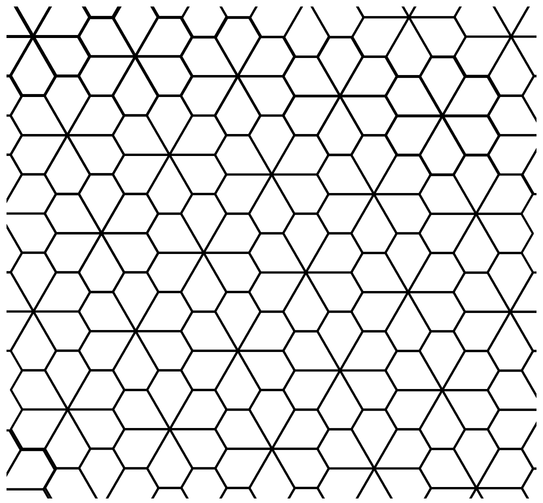
		
motif élémentaire	motif « fleur »	motif « hélice »

   (a) Par quelles transformations peut-on obtenir le motif « fleur » à partir du motif élémentaire ?

   (b) Par quelles transformations peut-on obtenir le motif « hélice » à partir du motif élémentaire ?
2. On considère le pavage ci-dessous :

   (a) Par quelles transformations peut-on obtenir ce pavage en utilisant le motif « fleur » ?

   (b) De même, par quelles transformations peut-on obtenir ce pavage en utilisant le motif « hélice » ?



Télécharger la figure

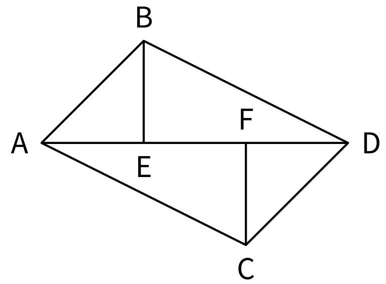
3. On appelle damier un pavage constitué de motifs bicolores disposés de telle sorte que deux motifs de même couleur ne peuvent être en contact que par un sommet, et non par une arête.

   Lequel des deux motifs composés (« fleur » ou « hélice ») permet-il d'obtenir un pavage de type damier ?

60

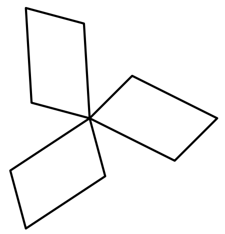
Partie A : motif Hélice

On considère le parallélogramme ABDC ci-dessous.



On sait que AE = EF = FD = EB = FC et que les droites (BE) et (FC) sont perpendiculaires à (AD).

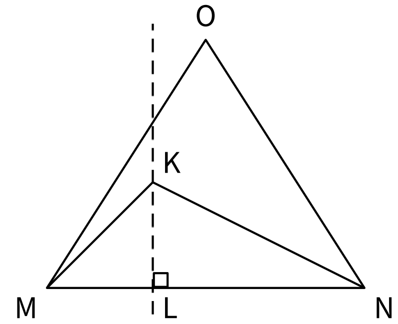
1. On considère le motif hélice ci-dessous. Sachant que les trois sommets de cette hélice forment un triangle équilatéral, par quelles transformations peut-on obtenir ce motif à partir du parallélogramme précédent ?
2. Par quelles transformations obtient-on le décor présenté à la fin de cet exercice, à partir du motif hélice ? On pourra placer et nommer des points pour définir précisément ces transformations.



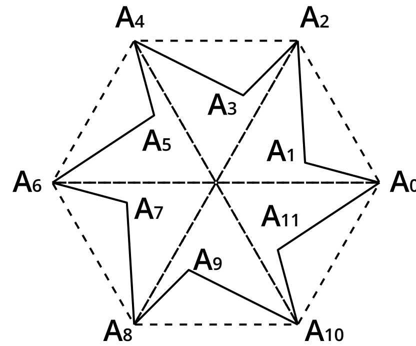
Partie B : motif Étoile

On considère un triangle équilatéral MNO (voir figure ci-dessous).

Soit L le point du segment [MN] tel que ML = $\frac{1}{3}$ MN. On considère la droite (d) perpendiculaire au segment [MN] en L. Soit K le point situé sur (d), à l'intérieur du triangle MNO, et tel que LK = ML.



1. On considère le polygone P = $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}$ ci-dessous, correspondant au motif étoile. Tous les triangles en pointillés sont identiques. Comment construire ce polygone P à partir du triangle MNK défini précédemment ?
2. Quelle est la nature du polygone H = $A_0A_2A_4A_6A_8A_{10}$? Justifier la réponse.
3. On suppose que le segment $[A_0A_2]$ mesure 3 centimètres. Déterminer l'aire du polygone P.



Partie C : pavage

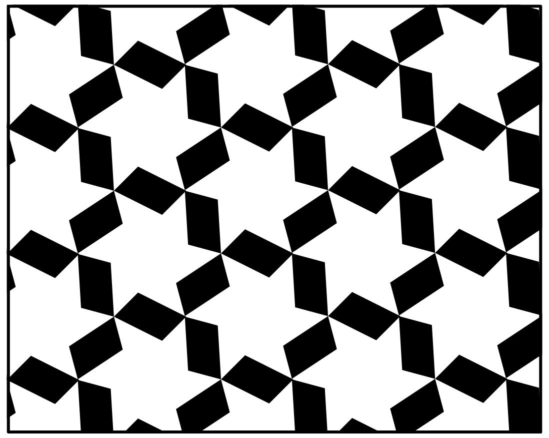
Un carreleur veut obtenir le résultat ci-dessous :

1. 1er cas : Il peut uniquement disposer de carreaux monochromes, de la forme qu'il souhaite. Peut-il réaliser ce pavage en utilisant ensemble des carreaux blancs tous identiques et des carreaux noirs tous identiques ?

   Si oui, préciser la forme et la couleur des carreaux nécessaires.

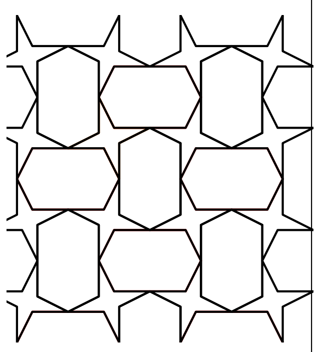
2. 2e cas : Il peut uniquement disposer d'une seule sorte de carreaux bicolores, blancs et noirs, tous identiques. Est-il possible d'obtenir le résultat souhaité ?

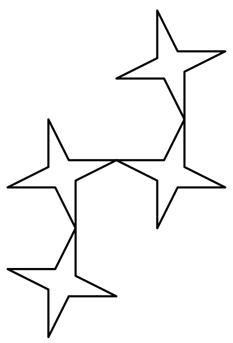
   Si oui, tracer sur un carreau qui convient et le colorier. Quelles transformations doit-on alors appliquer pour obtenir le pavage à partir de ce carreau ?



61

1. Repérer le motif élémentaire dans le *motif A* ci-dessous et donner les transformations qui permettent d'obtenir ce motif.
2. Comment obtient-on le pavage à partir du *motif A* ?

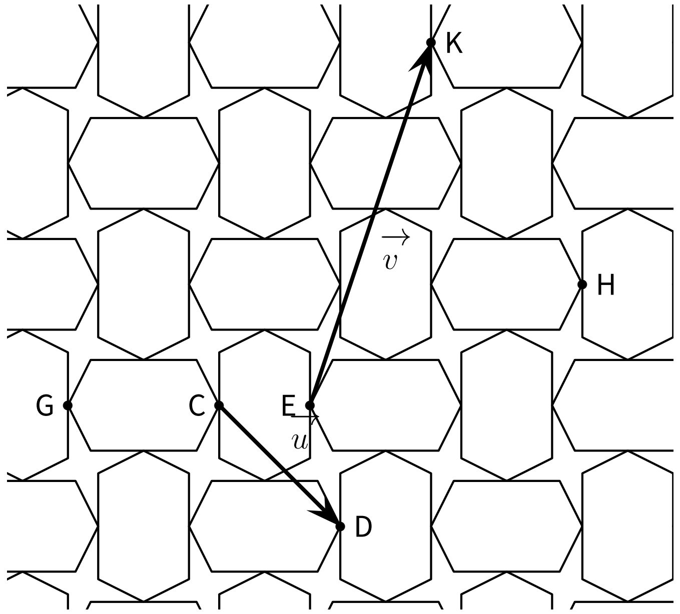




Partie du pavage	*(motif A)*

On considère les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés par $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EK}$.

3. Les points J, F et L sont les images respectives du point G par les translations de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $2\vec{u} + \vec{v}$. Placer les points J, F et L sur la figure ci-dessous.
4. Donner deux nombres entiers a et b tels que l'image du point D par la translation de vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ soit le point H. Représenter le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$ sur la figure.

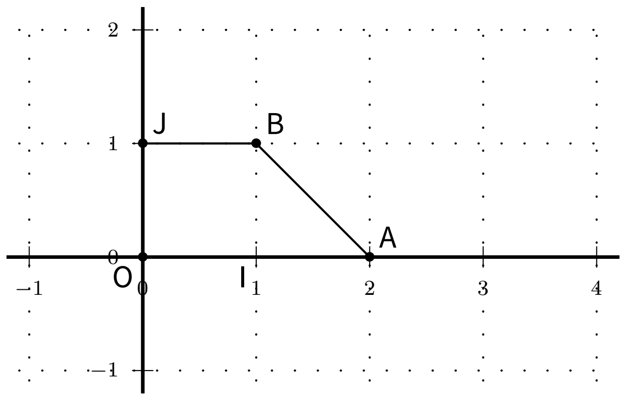


Télécharger la figure

62

Un parquet est composé de pièces de bois de forme identique (voir figure ci-dessous), appelées dans la suite « élément de base T ».

Le recouvrement du sol par ce parquet est une situation de pavage du plan. Dans un repère orthonormé du plan (O ; I ; J) la pièce de bois est représentée par le trapèze rectangle OABJ. Les points A et B ont pour coordonnées : A(2 ; 0) et B(1 ; 1).



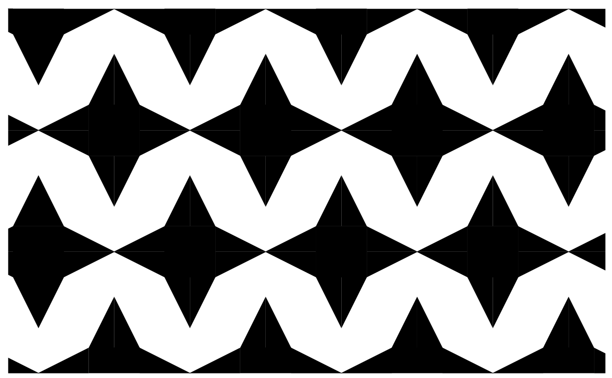
1. On utilise différentes transformations du plan pour réaliser le pavage.
   (a) Reproduire la figure et construire le symétrique de OABJ par rapport à l'axe (OA) en nommant respectivement C et D les symétriques de B et J.
   (b) Construire le symétrique du polygone ABJDC par rapport au point A.
   (c) Construire l'image, par la rotation de centre A et d'angle 90°dans le sens antihoraire, des deux polygones obtenus précédemment.

   Quelle est l'image du segment [AB] par cette rotation ? Justifier la réponse.

   L'ensemble constitue alors un motif M constitué de quatre pentagones.
   (d) Déterminer deux translations qui, appliquées successivement, permettent de paver le plan à partir du motif M : tracer un représentant des vecteurs de chacune de ces translations.

   Paver ainsi une zone rectangulaire de 18cm de longueur et 16cm de largeur.
2. Un autre motif de parquet est représenté ci-dessous.

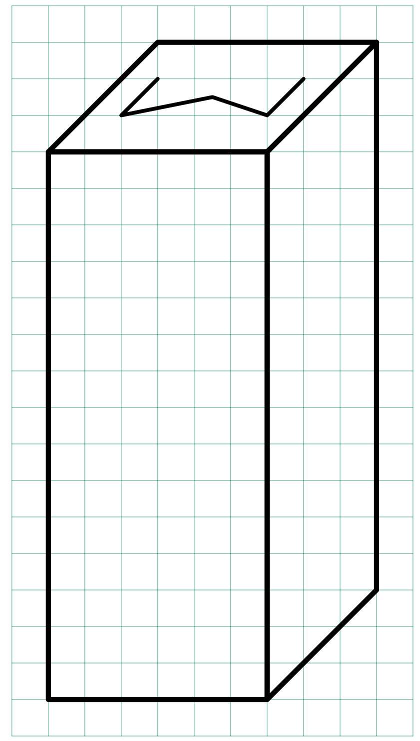
   Comment colorier l'élément de base T pour obtenir, par le même procédé de construction du motif M, le pavage fourni ?



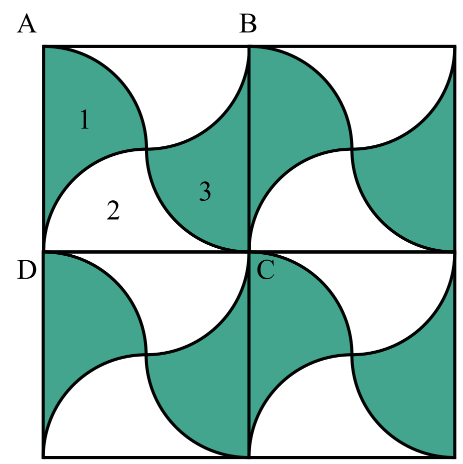
63

Une grande maison de mode, décide de lancer son nouveau parfum. Elle fait appel à une entreprise de design afin de finaliser le packaging de la boîte en carton contenant le flacon de parfum. Cette boîte peut être assimilée à un pavé droit de hauteur 15 cm et dont la base est un carré de 6 cm de côté.

1. Sur chacune des faces de la boîte, apparaît le logo de la maison. On a reporté ci-dessous ce logo sur la face supérieure de la boîte représentée en perspective cavalière. Reproduire ce dessin et représenter ce logo en vraie grandeur sur la face avant, en projetant parallèlement à la droite (MN), diagonale d'une des faces latérales.



2. Le carton utilisé pour la boîte est entièrement décoré comme dans la figure ci-dessous.
   (a) Caractériser la transformation géométrique permettant de passer de la figure 1 à la figure 2.
   (b) Caractériser la transformation géométrique permettant de passer de la figure 1 à la figure 3.
   (c) Indiquer deux translations permettant de paver le plan à partir du carré ABCD.



04. TP

Les colonnes de la Sagrada Familia

Introduction

La Sagrada Familia est une des œuvres majeures de l'architecte Antoni Gaudi. La construction de cette cathédrale a débuté à Barcelone en 1882 et devrait être achevée en 2026. Tout y est caractéristique de l'approche de Gaudi : la nature, les mathématiques et la métaphysique.

Dans cette activité, nous allons nous intéresser aux colonnes de ce monument dont la construction repose sur les polygones réguliers. La complexité de construction de ces colonnes est telle qu'il a fallu attendre jusqu'en 1980 pour reproduire fidèlement les schémas élaborés par Gaudi.

Construction et analyse des sections des colonnes de la Sagrada Familia

1. Construire au crayon un carré et placer le milieu O des diagonales.
2. Construire la rotation de centre O de ce carré par un angle de 45 degrés dans le sens horaire.
3. Relier dans une autre couleur progressivement les sommets des deux carrés. Quelle figure obtenez-vous ?
4. Quelle autre méthode de construction nous permet d'obtenir cette figure à partir d'un carré ?
5. Construire un octogone régulier. Placer le centre O du cercle inscrit.
6. Construire la rotation de centre O de cet octogone par un angle de 22,5 degrés dans le sens horaire.
7. Relier dans une autre couleur progressivement les sommets des deux octogones. Quelle figure obtenez-vous ?
8. Quelle autre méthode de construction nous permet d'obtenir cette figure à partir d'un carré ?
9. En continuant ainsi, quelle figure géométrique va-t-on obtenir au bout d'un très grand nombre d'étapes ?

C'est sur ce concept que repose les colonnes de la Sagrada Familia. Leur base est un polygone régulier qui se transforme, à force que l'on monte, en des polygones réguliers plus complexes, jusqu'à devenir des disques (voir Figure 2 et 3).

La construction architecturale utilisée pour parvenir à un tel résultat fut de dupliquer le polygone original et de le tourner au fur et à mesure de sa montée jusqu'à obtenir le nouveau polygone (voir Figure 4). On appelle cela le concept de la double hélice.

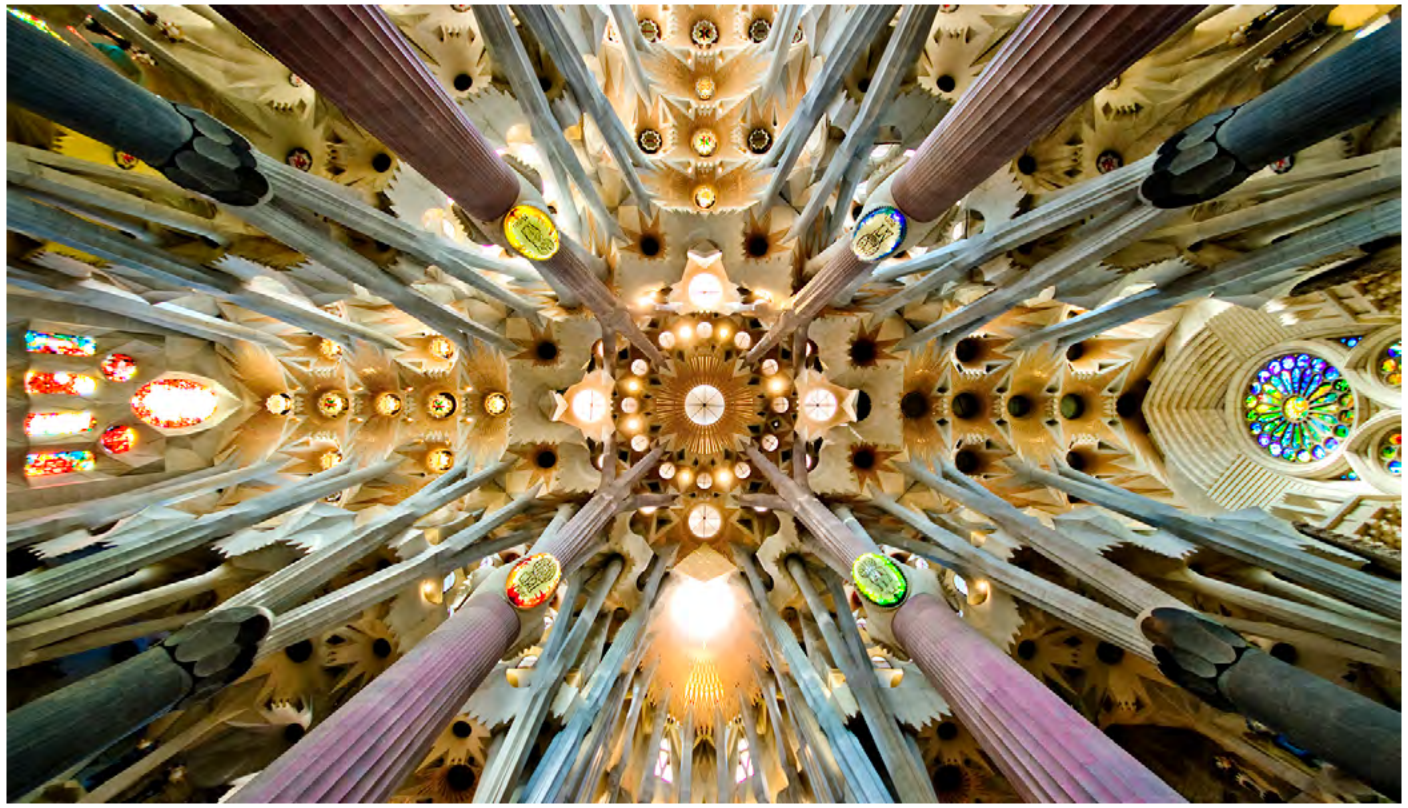
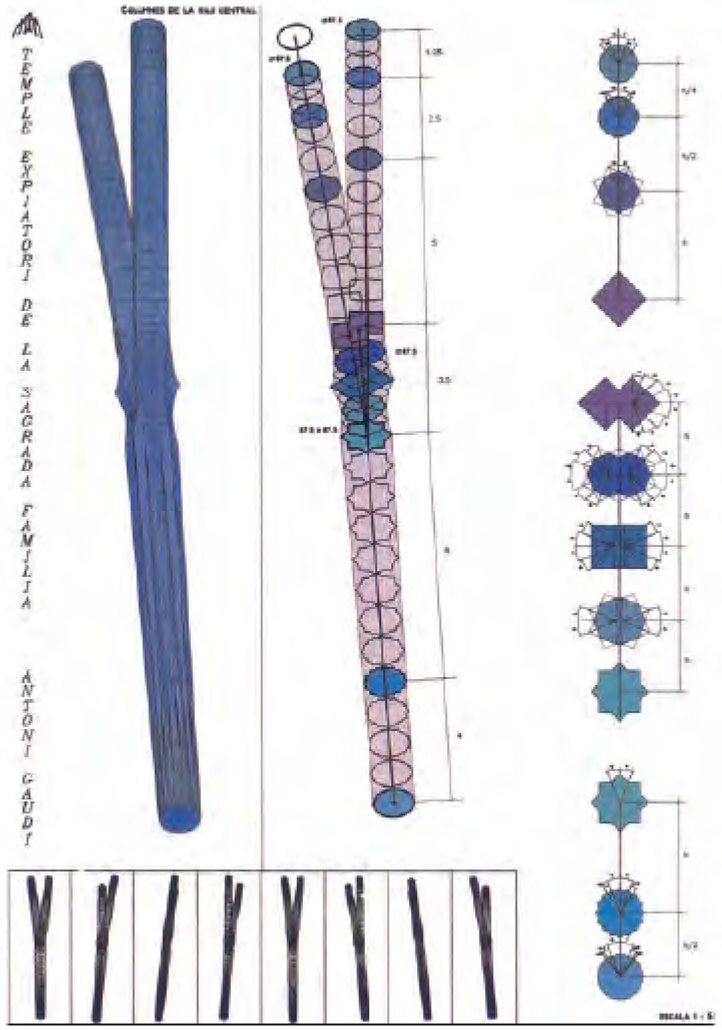


Figure 1 - Les colonnes de la Sagrada Familia

Figure 2 - Reproduction des colonnes de la Sagrada Familia [1]



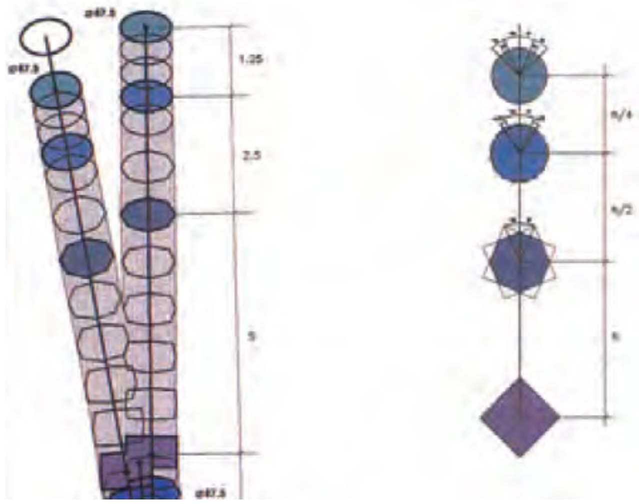


Figure 3 - Reproduction des colonnes de la Sagrada Familia (zoom partie supérieure) [2]

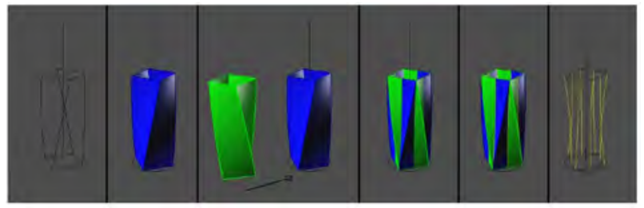


Figure 4 - Double hélice

Construction des colonnes

Nous allons maintenant tenter de reconstruire ces colonnes sous Blender.

1. Supprimer le cube.
2. Créer un plan.
3. Extruder ce plan d'une hauteur de 2 unités.
4. Sélectionner la face du dessus en mode Edit et la tourner de 22,5 degrés.
5. Masquer votre pavé.
6. Créer un nouveau plan et l'extruder d'une hauteur de 2 unités.
7. Sélectionner la face du dessus et la tourner de -22,5 degrés.
8. Utiliser un *modifier* de type **booléen** pour ne garder que l'intersection des deux colonnes.

Références

[1] J. Bonet, « El Templo de la Sagrada Familia : nuevas aportaciones alestudio de Gaudi » dans Loggia : Arquitectura y Restauracion, n. 09, Barcelona : 1999, pp. 22-29.

[2] M. Halabi, « The Sagrada Familia : The Starting Point of CAD/CAM in Architecture » dans Scientific Cooperations Journal of Civil Engineering and Architecture, Vol. 2, Issue 1, Février 2016

Les pavages de Penrose

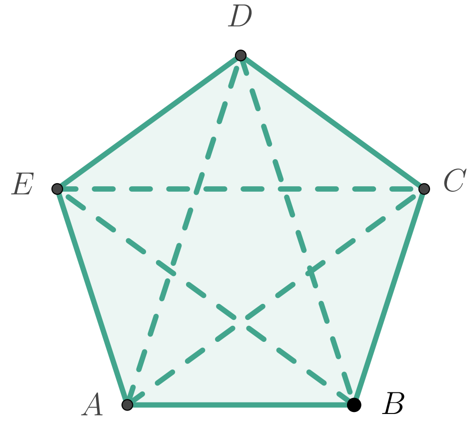
Les pavages étudiés dans ce chapitre sont dits périodiques. Ils reposent tous sur la répétition d'un motif suivant la combinaison de deux translations. Il existe cependant des pavages qu'il est impossible de construire à partir de translations d'un nombre fini de motifs élémentaires. On appelle ce type de pavages, des pavages non périodiques. Dans cette activité nous étudierons un exemple de pavage non périodique : les pavages de Penrose.

Triangle d'or, cerf-volant et fléchette

Dans cette première partie nous allons construire les motifs élémentaires du pavage de Penrose : le cerf-volant et la fléchette.

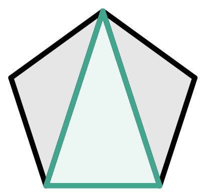
Pentagone régulier :

1. Construire un pentagone régulier.
2. Construire les diagonales du pentagone régulier.
3. Mesurer le rapport de longueur entre une diagonale et un côté du pentagone.
4. Nous allons maintenant démontrer que le rapport de longueur entre une diagonale et un côté du pentagone est égal au nombre d'or φ (voir exercice 60 du chapitre *Suites*). Pour cela nous considérerons un pentagone régulier dont chaque côté mesure 1cm.
   (a) Montrer que l'angle $\widehat{CDE}$ mesure $108°$.
   (b) En déduire que l'angle $\widehat{ECD}$ mesure $36°$.
   (c) En déduire la longueur EC.
   (d) Conclure.

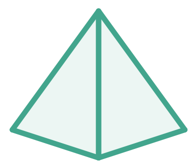


Triangles d'or et d'argent :

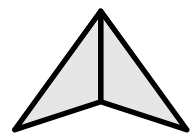
En découpant un pentagone comme illustré ci-dessous, nous obtenons trois triangles : deux triangles dits « d'argent » et un triangle dit « d'or ». En accolant, deux triangles d'or ou deux triangles d'argent, on obtient deux motifs qui sont à la base des pavages de Penrose : le cerf-volant et la fléchette.



Triangles d'or et d'argents



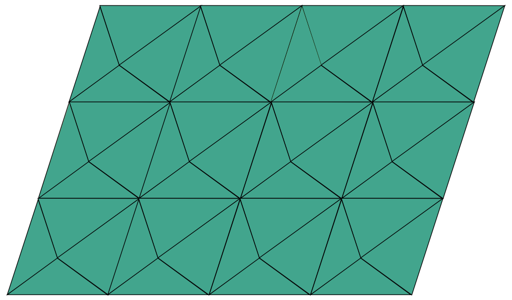
Fléchette



Cerf-volant

Pavages périodiques et non périodiques

Bien que les deux motifs créés précédemment soient ceux d'un pavage apériodique, il peuvent aussi engendrer un pavage périodique :



1. Dans le pavage ci-dessus :

   (a) Donner le motif élémentaire et y repérer les cerf-volant et fléchette.

   (b) Donner les deux vecteurs de bases permettant de paver le plan à partir de ce motif.

2. Proposer un autre motif en forme de parallélogramme en utilisant deux cerfs-volants et deux fléchettes

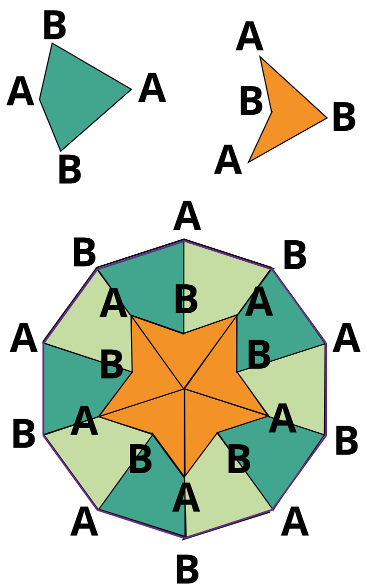
3. Construire le pavage correspondant.

4. Calculer le rapport entre le nombre de cerfs-volants et le nombre de fléchettes dans le motif et dans votre pavage.

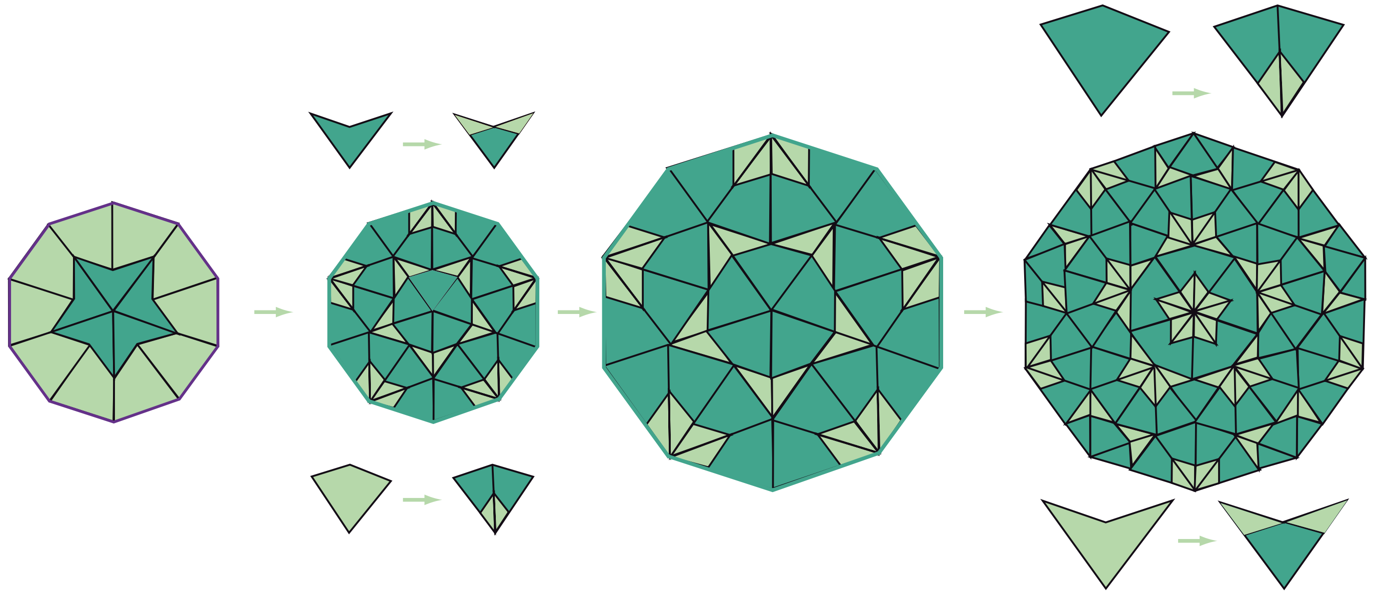
Afin de construire un pavage non périodique, il est nécessaire d'éviter de ne jamais former un parallélogramme avec nos deux motifs élémentaires. Pour s'en assurer, désignons par A et B les sommets de ces derniers et veillons à ne jamais accoler deux sommets qui non pas la même lettre, comme illustré ci-contre (qui n'est qu'un exemple parmi l'infinité de cas possibles) :
A partir de ce motif nous pouvons construire un pavage en :

— découpant chaque cerf-volant en en deux cerfs-volants et deux demi-fléchettes

— et une fléchette en un cerf-volant et deux demi-fléchettes.



On observe alors que les demi-fléchettes ainsi générées s'associent avec leur voisine pour reconstituer une fléchette complète. On peut alors répéter l'opération après avoir agrandi le pavage afin que les motifs soient de même dimensions que le pavage initial :



1. A chaque étape, les longueurs du cerf-volant et de la fléchette sont réduites du même rapport. Donner sa valeur.

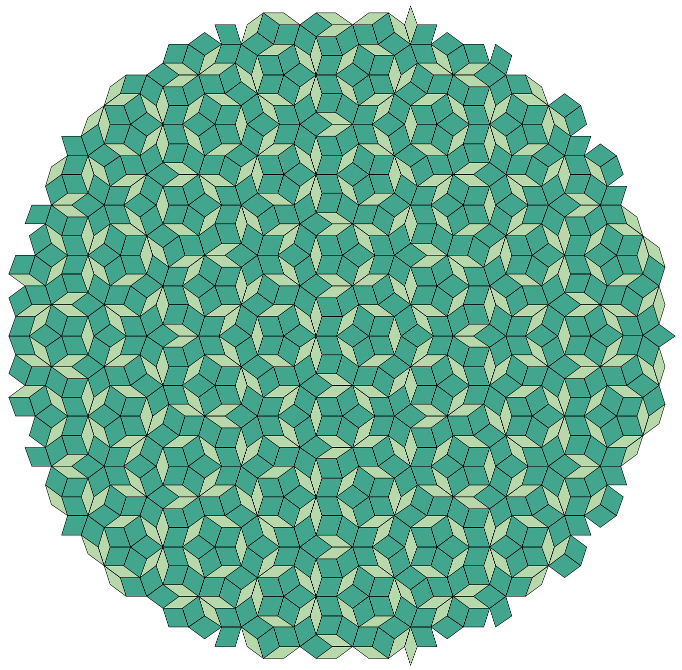
2. En partant d'un pavage avec deux cerfs-volants et une fléchette :

   (a) quel sera le nombre de cerfs-volants et de fléchettes après une première subdivision ? Une seconde subdivision ?

   (b) On note c_n le nombre de cerfs-volants et f_n le nombre de fléchettes à la n-ième subdivision. Calculer les rapports $\frac{c_n}{f_n}$ pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$.

   (c) En vous aidant de l'exercice 60 du chapitre *Suites*, conjecturer la valeur de $\frac{c_n}{f_n}$ lorsque n sera grand.

   (d) Le nombre de φ étant un nombre irrationnel, expliquer pourquoi le pavage ne peut pas être périodique.



Frises, révolution et impression 3D

Principe

L'objectif est de réaliser un accessoire ou un bijou à partir de la révolution d'un motif autour d'un axe à la manière de la collection créée par Theresa Burger.

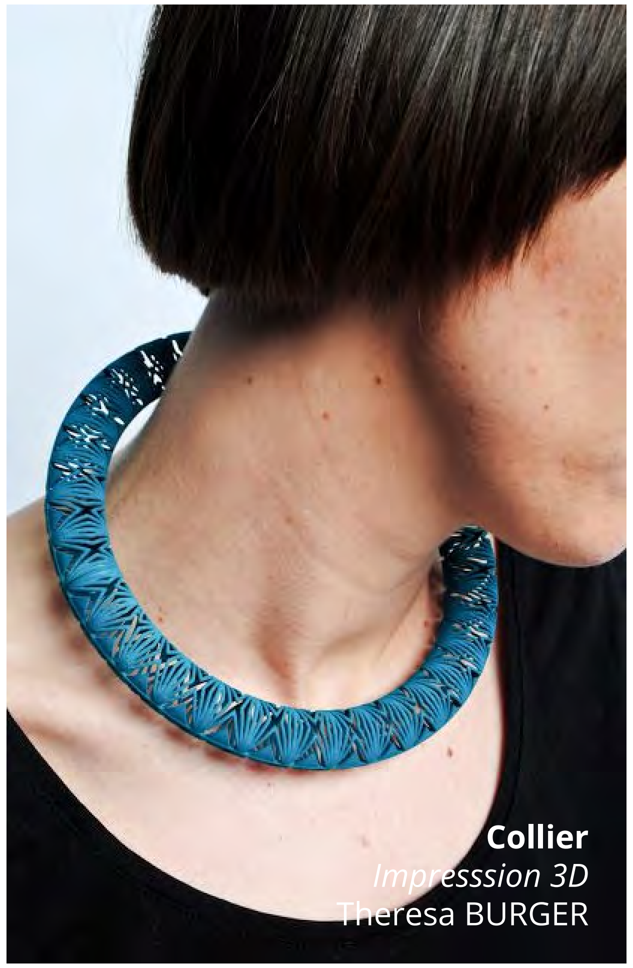
La révolution autour d'un axe consiste à engendrer un volume par une surface plane fermée tournant autour d'un axe. Ainsi la révolution d'un plan autour d'un axe donne un cylindre, celle d'un triangle rectangle, un cône. En exploitant cette notion de révolution et en l'appliquant à un motif nous pouvons obtenir l'accessoire voulu.

Instructions

Sur une planche, présenter votre projet d'accessoire. Devrons apparaître :

1. le visuel final de votre accessoire ou bijou,
2. le motif engendrant l'accessoire ou bijou,
3. la frise associée où seront explicitées la maille élémentaire et les transformations du plan appliquées.

Il est ensuite envisageable de modéliser cet objet en 3D afin de le produire par impression 3D.



Collier
Impresssion 3D
Theresa BURGER

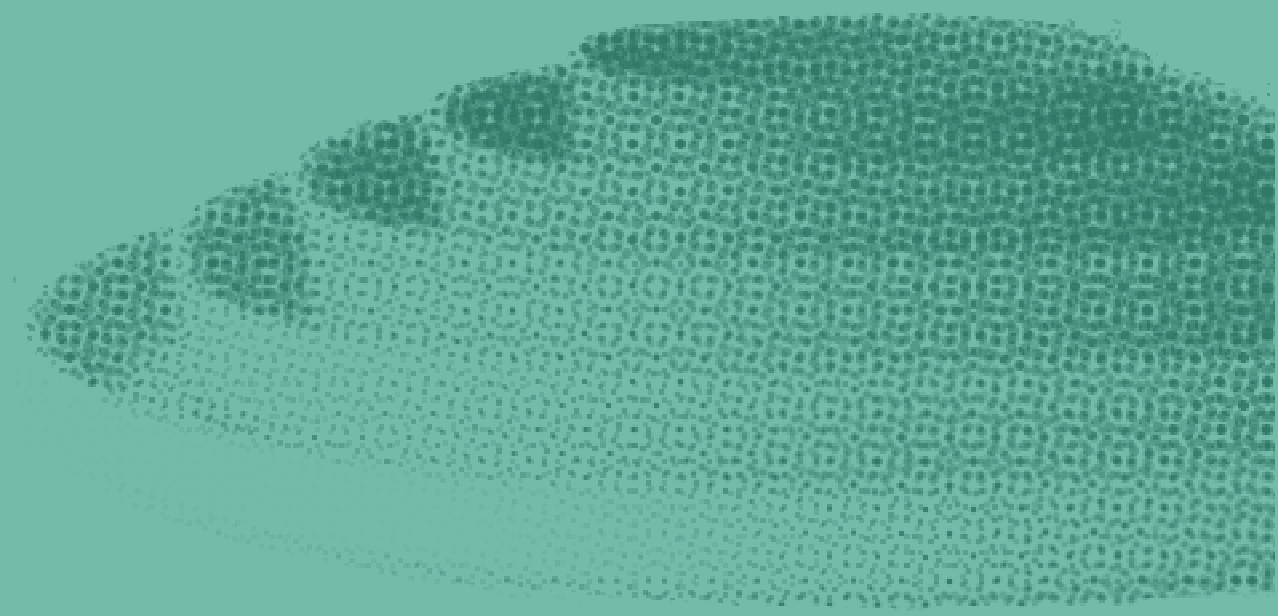
Bracelet
Impresssion 3D
Theresa BURGER

Bracelets
Impresssion 3D
Theresa BURGER

04

SUITES

Objectifs du chapitre : Définir une suite / Différencier une définition par récurrence et une définition explicite / Représentation graphique des suites / Représentation graphique d'une suite arithmétique ou géométrique / Démontrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique / Démontrer qu'une suite est ou n'est pas géométrique / Modéliser un problème par une suite.



Piet STOCKMANS
Assiettes en céramiques
2006

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Perspectivism - Philographics, Genís CARRERAS, 2011

2. Colliers et bracelets Girafe, Jean DUNAND, circa 1927

3. Batîment Lè Architecture à Taipei, AEDAS, 2017

4. «She Changes», Janet ECHELMAN, 2005

5. Série «Bamboo Light», Arik LEVY, 2014

6. Chaise «Cycle», Saran YOUKONGDEE, 2008

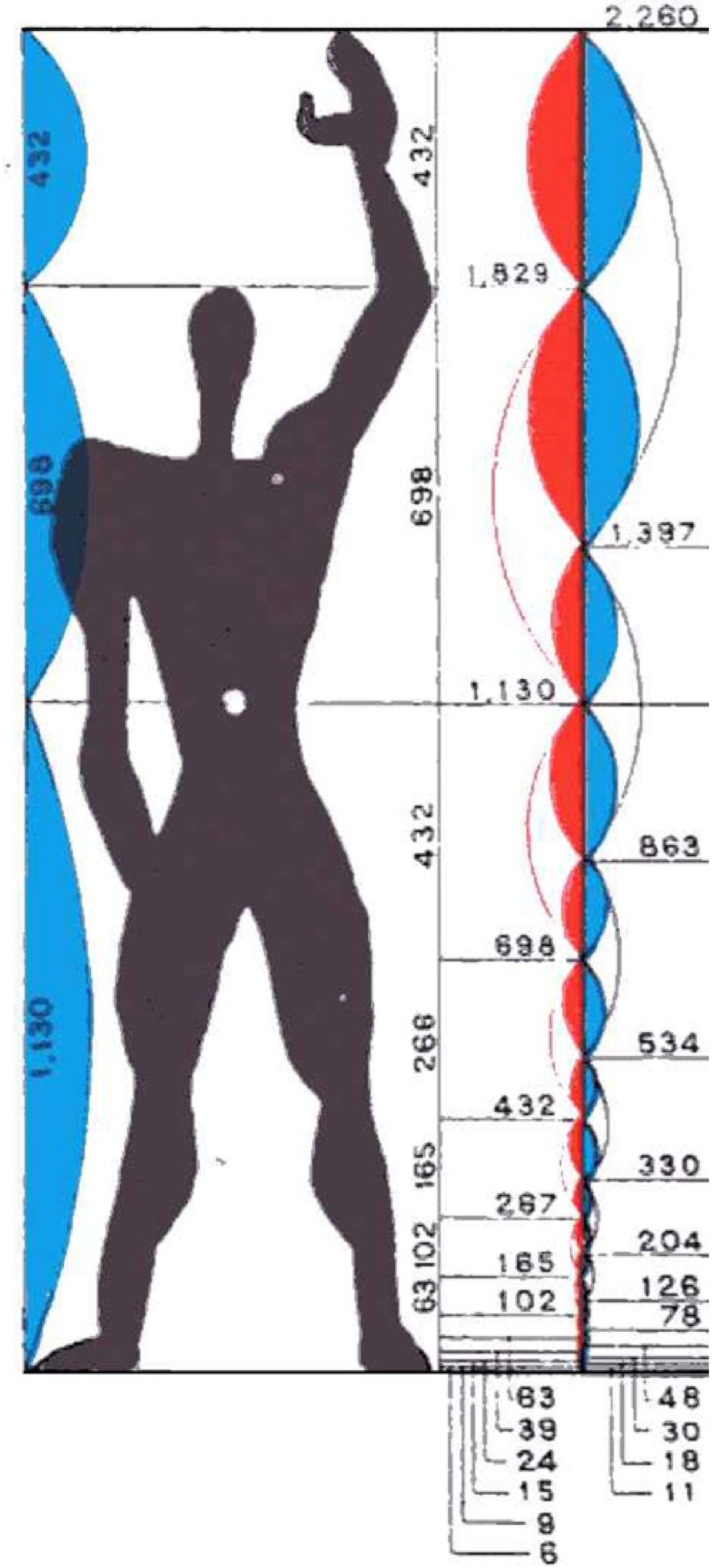
7. Broche «Six Circles» , Alexander CALDER, circa 1940

8. Matriochka, Sergueï MALIOUTINE, 1900

9. Assiettes en céramiques, Piet STOCKMANS, 2006

10. Musée Guggenheim, Frank Loyd WRIGHT, 1959

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.



MODULOR

1. Le Modulor **et la suite rouge**

Le modulor est un système de mesures harmoniques, imaginé par Le Corbusier, qui avait pour ambition de remplacer les systèmes métrique et impérial. Il se décompose en deux suites : la suite rouge et la suite bleue construites à partir de la silhouette d'un homme debout, levant un bras, d'une hauteur moyenne de 1,83m. Chacune repose sur le nombre d'or ϕ dont nous approximerons la valeur à 1,618.

Pour construire sa série rouge, il part de la hauteur au plexus solaire de l'homme, soit 1,13m, puis divise celle-ci par le nombre d'or. Ainsi, après 1,13 le terme suivant de la suite rouge est 0,7.

a. Déterminer les trois nombres suivant dans la suite rouge.

b. Si on note *u(0)* le premier élément de cette suite, soit *u(0) = 1,13*, déterminer *u(1)*, puis *u(2)* et enfin *u(3)*.

On considère un élément de la suite situé à la position *n*.

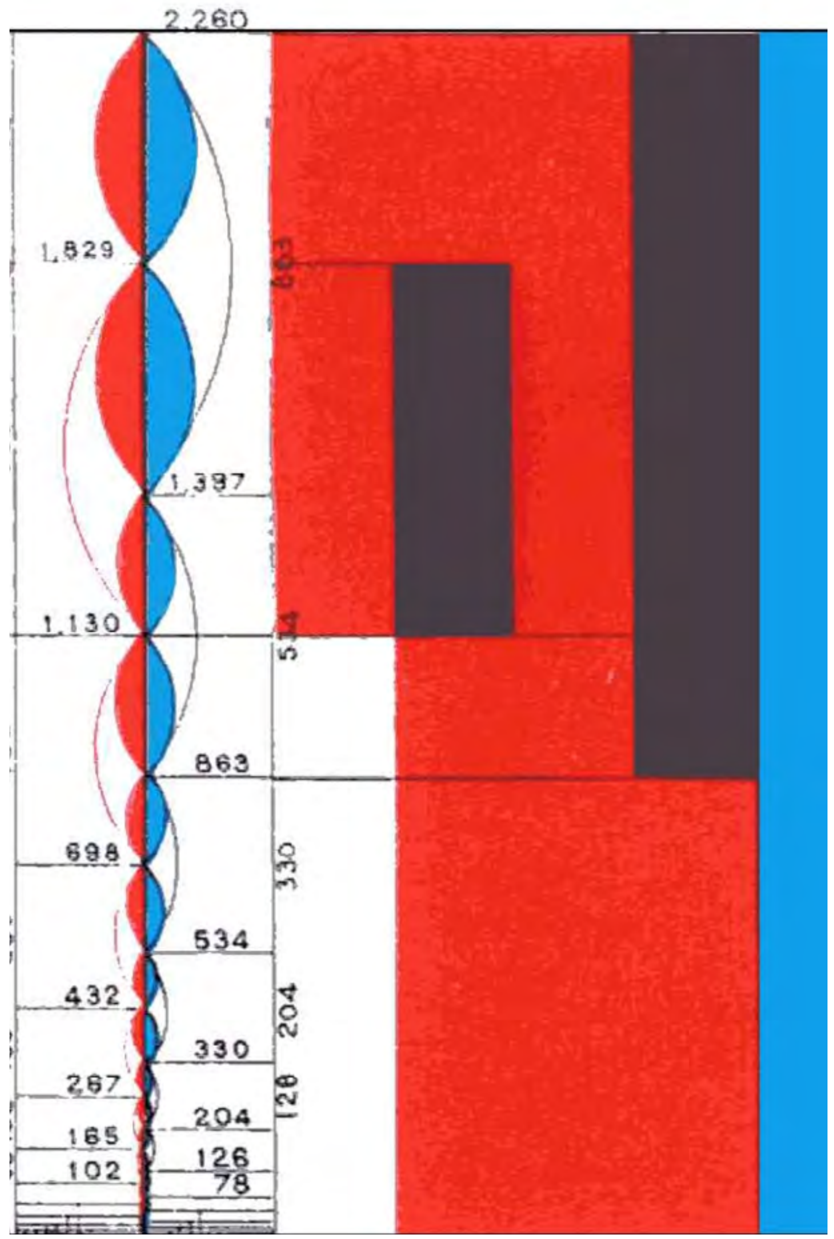
c. Quel calcul doit-on effectuer pour obtenir le terme suivant de la suite ?

d. On pose *u(n)* l'élément de la suite obtenu après *n* calculs et *u(n+1)* celui obtenu après *n+1* calculs. Déduire de la question précédente une relation entre u*(n+1)* et *u(n)*.

e. Tracer sur un graphique l'ensemble des points de coordonnées (*n* ; *u(n)*) pour *n* allant de 0 à 5.

f. Exprimer *u(n)* en fonction de *n*.

Une suite est ainsi une famille de nombres réels indexée par un entier naturel. On appelle chaque élément un terme. Ainsi, *u(n)* est le terme de rang *n* et *u(0)*, le plus souvent, est le premier terme de la suite.



À gauche :
Le Modulor - détail, Le Corbusier, 1950

Ci-dessus :
Le Modulor - détail, Le Corbusier, 1950

2. La suite bleue

La suite bleue part quant à elle de 2,26, la hauteur du bras levé. Chacun des éléments de cette suite s'obtient ensuite de la même façon que la suite rouge, c'est-à-dire par division successive par le nombre d'or.

a. Quelle est la principale différence entre la suite bleue et la suite rouge ? Utiliser un des termes vus à la question précédente pour préciser cette différence.

b. On pose v la suite des éléments de la suite bleue. Donner les quatre premiers termes de cette suite bleue.

c. Exprimer *v(n+1)* en fonction de *v(n)*.

d. De la même façon que précédemment, représenter les quatre premiers termes de cette suite sur un graphique.

3. Développement des suites rouges et bleues

Le Corbusier propose aussi de développer ses suites rouge et bleu en multipliant, et non plus en divisant, le premier terme de la suite par le nombre d'or.

a. On note *u'* la nouvelle suite rouge obtenue. Donner les quatre premiers termes de cette suite et exprimer *u'(n+1)* en fonction de *u'(n)*.

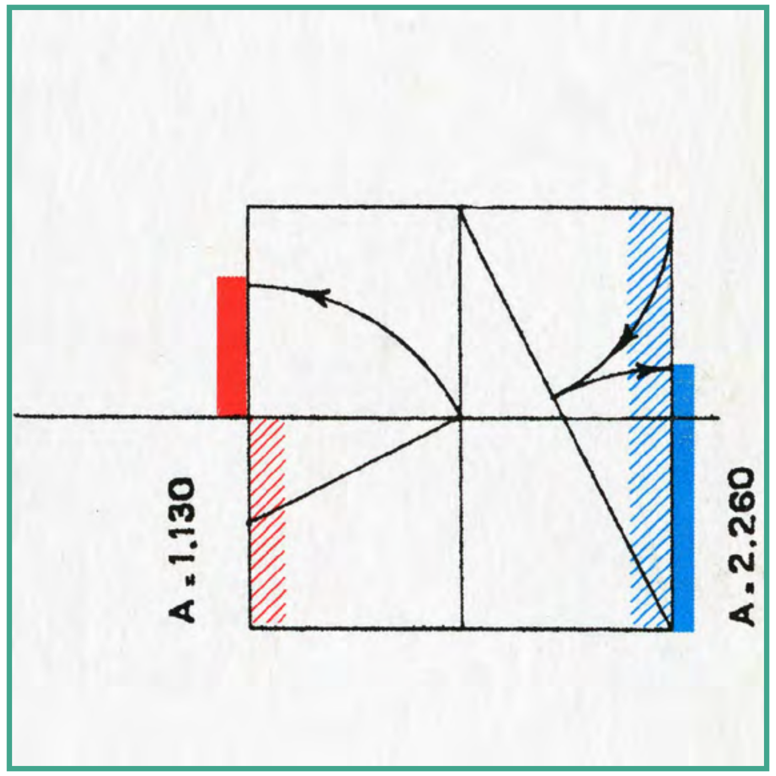
b. On note *v'* la nouvelle suite bleue obtenue. Donner les quatre premiers termes de cette suite et exprimer *v'(n+1)* en fonction de *v'(n)*.

c. Comparer le sens de variation des suites *u* et *u'*, ainsi que celui des suites *v* et *v'*.

d. Est-ce qu'une suite du type *u(n+1) = k x u(n)*, où *k* est un nombre réel, est forcément une suite croissante ? Justifier votre réponse à partir des valeurs prises par *k*.

En haut :
La Cité Radieuse
Marseille, 1947-1952

En bas :
Le Modulor - détail, Le Corbusier
1950



4. Construction géométrique

Nous allons voir dans cette partie comment obtenir la suite bleue par construction géométrique (l'échelle peut être adaptée, au 10/1 par ex.)

1. Construire un rectangle constitué de deux carrés « empilés » de côté 1,13cm, soit un rectangle de largeur 1,13cm et de longueur 2,26cm, et tracer ensuite la diagonale partant du sommet supérieur gauche.

2. Tracer un arc de cercle de rayon la largeur du rectangle et de centre le sommet supérieur gauche du rectangle. Cet arc de cercle intersecte la diagonale tracée en un point que l'on notera M.

3. Tracer un arc de cercle de centre le coin inférieur droit du rectangle passant par M. Il intersecte le côté droit du rectangle en un point situé à une hauteur 1,4cm, soit le deuxième terme de la suite bleue.

4. Reprendre la construction à partir du 2. avec le nouveau rectangle de 1,4cm de longueur. Répétez ces étapes autant de fois que nécessaire pour obtenir l'ensemble des termes de la suite bleue.

Une fois le Modulor terminé, Le Corbusier applique son nouveau système de mesure dans presque toutes ses constructions. Ainsi, toutes les mesures de la Cité Radieuse de Marseille sont issues du Modulor. Les plafonds culminent à 2,26 m de hauteur, les rambardes de balcons, la cuisine, les meubles, sont tous donnés par les suites rouge et bleue du Modulor.

02. COURS

Qu'est-ce qu'une suite ?

Définition et exemple

Une suite est un ensemble d'éléments ordonnés.

Exemple : $u = \{15\,,\ -3\,,\ 7\,,\ 8\,, 97\,,\ \ldots\}$ est une suite.

Terme et indice

On appelle **terme**, un élément de cette suite, et **indice** ou **rang** sa position dans la suite.

Par exemple le terme d'indice 4 de la suite u donnée par

$$\{15\,,\ -3\,,\ 7\,,\ 8\,, 97\,,\ \ldots\}$$

est 8.

Notations

Le terme d'indice n de la suite u se note $u(n)$ ou u_n.

Dans l'exemple ci-dessus, le terme d'indice 4 est noté $u(4)$ et est égal à 8 :

$$u(4) = 8$$

On note aussi $u_4 = 8$.

Remarque 1

Dans certains cas on comptera les positions à partir de 0, dans d'autres à partir de 1 (l'énoncé dira quelle convention utiliser).

Par exemple dans la suite u ci-dessus :

- $u(2) = -3$ si on compte les positions à partir de 1,
- $u(2) = 7$ si on compte les positions à partir de 0.

Si l'énoncé dit « *pour tout entier naturel* n » ou « *pour* $n \in \mathbb{N}$ », cela voudra dire que l'on compte à partir de 0.

De façon générale, on peut commencer notre suite à n'importe quel rang $n \geq 0$.

Exemple

« Soit v la suite des nombres impairs. Donner $v(5)$ en supposant que les indices débutent à 0. »

Réponse : $v = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots\}$, d'où $v(5) = 11$.

Remarque 2

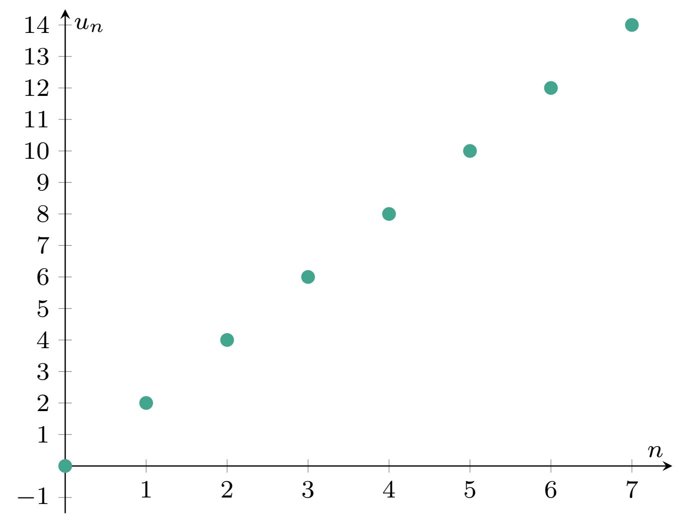
Au lieu d'utiliser la notation u pour parler de la suite u, on peut utiliser (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention à ne pas confondre u_n qui désigne le terme d'indice n et (u_n) qui désigne toute la suite.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite u sera un nuage de points. Ces points auront pour coordonnées $(n\,;\ u_n)$

En reprenant l'exemple de la suite u des multiples de 2, la représentation graphique de u est :



Suite définie comme une fonction

Introduction

Plutôt que de donner chacun des termes d'une suite, on peut la définir à l'aide d'une formule.

Définition

La première façon de définir une suite est à l'aide d'une fonction du rang n. On dit que la suite est **définie de façon explicite**.

Exemple : Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 5n + 7$. On trouve chaque terme de la suite en remplaçant n par 0, puis 1, 2, etc. Ainsi $u(10) = 5 \times 10 + 7 = 57$ et de façon plus générale $u = \{7; 12; 17; 22; \ldots\}$.

Exemple

On considère la suite $u(n) = n^2$. Donner les 4 premiers termes de cette suite en commençant à $n = 0$.

Réponse : $u(0) = 0^2 = 0$, $u(0) = 1^2 = 1$, $u(2) = 2^2 = 4$, $u(3) = 3^2 = 9$.

Expression de U_{N+1}, U_{2N}, ...

Si l'expression de u_n est donnée, on peut donner celle de u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ (**en n'oubliant pas les parenthèses**). De même on peut donner l'expression de u_{2n} en remplaçant n par $2n$.

Exemple

Soit la suite u définie pour tout entier naturel par $u_n = 7n+5$. Donner l'expression de u_{n+1} et de u_{n-1}.

Réponse : $u_{n+1} = 7(n+1)+5 = 7n+7+5 = 7n+12$. Donc $u_{n+1} = 7n+12$.

Et $u_{n-1} = 7(n-1)+5 = 7n-7+5 = 7n-2$. Donc $u_{n-1} = 7n-2$.

Suite définie par récurrence

Avant-propos

Pour maîtriser la partie qui suit, il est nécessaire de comprendre que :
- $u(n+1)$ est le terme après $u(n)$,
- $u(n)$ est le terme après $u(n-1)$,
- $u(n-1)$ est le terme après $u(n-2)$,
- etc.

Et aussi que :
- si $u(n+1)$ est $u(4)$, alors $u(n)$ est $u(3)$.
- si $u(n+1)$ est $u(12)$, alors $u(n)$ est $u(11)$.
- si $u(n)$ est $u(10)$, alors $u(n-1)$ est $u(9)$.
- etc.

Exemple

Si $u(n+15)$ est $u(115)$, alors $u(n)$ est $u(100)$.

Définition

La seconde façon de définir une suite est par **récurrence**. Dans ce cas, pour calculer la valeur d'un terme de la suite, on a besoin d'un ou plusieurs termes précédents. Ainsi on aura par exemple une formule du type $u_{n+1} = \dots u_n \dots$ ou $u_n = \dots u_{n-1} \dots$.

Exemple :

$$\begin{cases} u(n+1) = 4u(n) + 7 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Pour calculer u_1 :

$$u(1) = 4u(0) + 7 = 4 \times (-1) + 7 = 3.$$

Maintenant que l'on connaît u_1, on peut calculer u_2 :

$$u(2) = 4u(1) + 7 = 4 \times 3 + 7 = 19.$$

Remarque

On voit que dans le cas d'une suite définie par récurrence il faut une formule, mais aussi le premier terme.

Exemple

Considérons la suite v définie par

$$\begin{cases} v(0) = 2 \\ v(n) = 3v(n-1) + 6 \end{cases}$$

Donner les termes de la suite du rang 0 au rang 3.

Réponse :

$$\begin{cases} v(0) = 2 \\ v(1) = 3v(0) + 6 = 3 \times 2 + 6 = 12 \\ v(2) = 3v(1) + 6 = 3 \times 12 + 6 = 42 \\ v(3) = 3v(2) + 6 = 3 \times 42 + 6 = 132 \end{cases}$$

Sens de variation

Propriété

- Une suite est **croissante** si un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent :

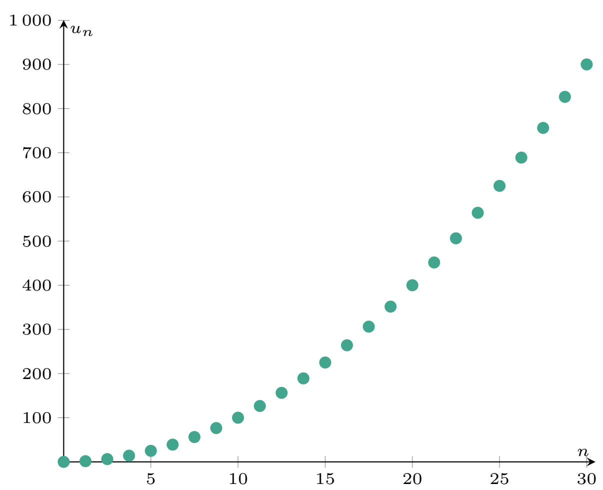
$$u(n+1) \geq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

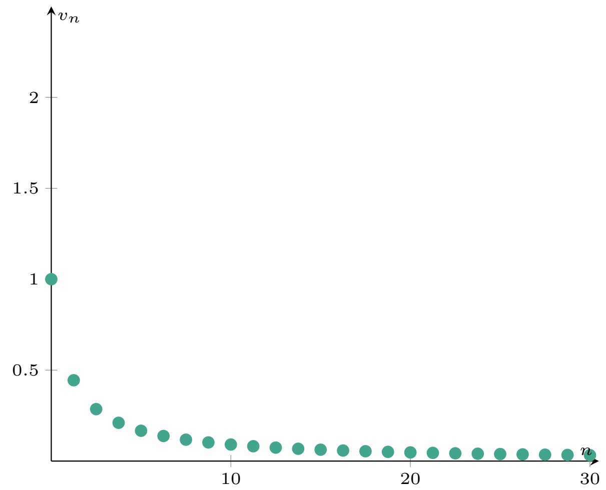
- Une suite est **décroissante** si :

$$u(n+1) \leq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Donner le sens de variation des suites représentées ci-dessous :





Réponse : La suite u est croissante, la suite v est décroissante.

Modélisation d'un problème à l'aide d'une suite

Méthode

1ère étape : Définir u et n

Quel est l'objet de l'étude dans l'énoncé ? On l'appellera u.

Cet objet variera en fonction d'une variable (par exemple une année ou une étape). Quelle est cette variable ? On l'appellera n.

Exemple : si on étudie le nombre de bactéries dans une boîte de Petri toutes les minutes, u sera le nombre de bactéries et n le nombre de minutes écoulées. Si au bout de 5 minutes il y a 5000 bactéries alors $u_5 = 5000$.

2ème étape : Trouver une relation pour u_n

Le plus souvent ce sera une relation de récurrence. Vous devez vous entraîner à traduire des énoncés sous forme mathématique.

Pour vous aider à trouver la relation, calculez les premiers termes de la suite et essayez d'en déduire la formule attendue.

Exemple

On suppose que l'inflation est de 2% chaque année. On désigne par w la suite correspondant au prix d'un pain au chocolat. La première année il coûte 1 euro.

— Donner $w(0)$ et $w(1)$.
— Exprimer $w(n+1)$ en fonction de $w(n)$.

Réponse : L'objet de l'étude est *le prix du pain au chocolat*, que l'on désignera par la suite w, en fonction *de l'année*, désignée par l'indice n.

Ainsi $w(0)$ sera le prix initial du pain au chocolat, d'où :

$$w(0) = 1.$$

$w(1)$ sera le prix du pain au chocolat au bout d'un an :

$$w(1) = 1 \times 1{,}02 = 1{,}02.$$

Le prix du pain au chocolat au bout de $n+1$ années sera égal à celui au bout de n années augmenté de 2%, ce qui se traduit par :

$$w(n+1) = w(n) \times 1{,}02.$$

Suites arithmétiques

Définition

On dit qu'une suite est **arithmétique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. Ainsi, pour tout n :

$$\boxed{u(n+1) = u(n) + r}$$

On appelle ce nombre r **la raison de la suite arithmétique**.

Exemple

— La suite $u(n+1) = u(n) + 4$ est une suite arithmétique dont la raison est 4.
— La suite $u(n) = u(n-1) + 12$ est une suite arithmétique dont la raison est 12.

Monotonie

— Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
— Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
— Si $r = 0$, la suite est constante.

Exemple

La suite u définie par tout entier naturel par $u(n+1) = u(n) - 4$ est une suite décroissante.

Reconnaître une suite arithmétique

Suite définie explicitement

Une suite donnée sous forme explicite peut être une suite arithmétique. Par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = n + 4$ est une suite arithmétique. Comment le prouver ?

1. Exprimer $u(n+1)$.
2. Calculer $u(n+1) - u(n)$.
3. Si le résultat est une constante, *ie.* si le résultat ne dépend pas de la variable n, alors la suite est arithmétique.

Exemple

« Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = n + 4$ est une suite arithmétique. »

Réponse :

1. $u(n+1) = (n+1) + 4 = n + 1 + 4 = n + 5$
2. $u(n+1) - u(n) = (n+5) - (n+4) = n + 5 - n - 4 = 1$.
3. Comme le résultat de $u(n+1) - u(n)$ est une constante (1), la suite est arithmétique de raison 1. On peut donc réécrire u sous la forme :

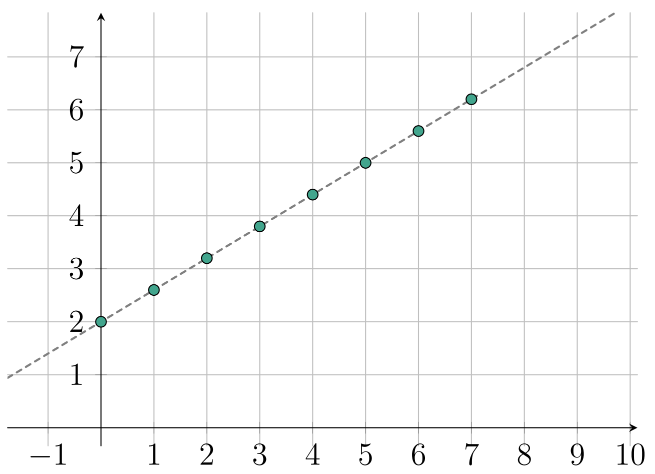
$$u(n+1) = u(n) + 1$$

Reconnaître une suite arithmétique graphiquement

Graphiquement, une suite arithmétique sera un ensemble de points alignés.

Exemple

La suite u représentée graphiquement ci-dessous est une suite arithmétique car l'ensemble des points est aligné.



Suites géométriques

Définition

On dit qu'une suite est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Ainsi, pour tout n :

$$\boxed{u(n+1) = u(n) \times q}$$

On appelle ce nombre q **la raison de la suite géométrique**.

Exemple

- La suite $u(n+1) = u(n) \times 7$ est une suite géométrique dont la raison est 7.
- La suite $u(n) = -6 \times u(n-1)$ est une suite géométrique dont la raison est -6.

Remarque

Nous nous limiterons cette année aux suites géométriques dont la raison est positive

Monotonie

- Si $q > 1$, la suite est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante.

Exemple

La suite u définie par tout entier naturel par $u(n+1) = 5u(n)$ est une suite croissante.

La suite v définie par tout entier naturel par $v(n+1) = \dfrac{v(n)}{2}$ est une suite décroissante.

Reconnaître une suite géométrique

Suite définie explicitement

Une suite donnée sous forme explicite peut être une suite géométrique. Par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 4^n$ est une suite géométrique. Comment le prouver ?

1. Exprimer $u(n+1)$.
2. Calculer $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$.
3. Si le résultat est une constante alors la suite est géométrique.

Exemple

« Montrons que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 4^n$ est une suite géométrique. »

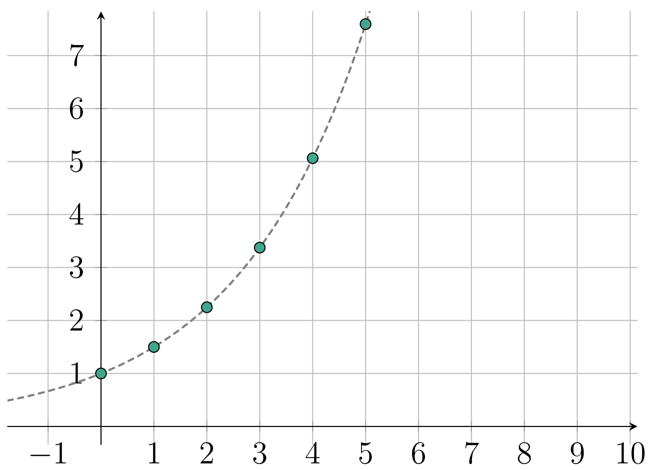
1. $u(n+1) = 4^{n+1}$
2. $\dfrac{u(n+1)}{u(n)} = \dfrac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4^1 = 4.$
3. Comme le résultat de $\dfrac{u(n+1)}{u(n)}$ est une constante (4), la suite est géométrique de raison 4. On peut donc réécrire u sous la forme :
$$u(n+1) = 4u(n)$$

Reconnaître une suite géométrique graphiquement

Graphiquement, une suite géométrique sera représentée par un nuage de points **exponentiel**.

Exemple

La suite u représentée graphiquement ci-dessous est une suite géométrique.



03. EXERCICES

Suites : généralités

01

On étudie la suite de nombres suivante :

7 14 22 29 35 41 48 55 61

1. En considérant que 7 est le premier terme de cette suite, quel est le 3ème terme ? le 8ème terme ?
2. Complétez la phrase suivante : 55 est le ... terme de cette suite.

02

On considère la suite de nombres :

12 15 19 23 31 6 18 21 53 55 9 40 21

1. Si 12 est le premier terme de cette suite, quel est le 5ème terme ? le 7ème terme ?
2. Compléter la phrase suivante : 18 est le ... de cette suite.
3. A-t-on des termes égaux dans cette suite ? Si oui, quel est leurs rangs ?

03

Soit la suite u des nombres pairs. Donner u_4 et u_7 en supposant que la suite débute à u_0.

04

Soit la suite v des nombres impairs. Donner v_3 et v_4 en supposant que la suite débute à v_1.

05

Soit la suite w des nombres contenant le chiffre 3. Donner w_2 et w_5 en supposant que la suite débute à w_0.

06

Trouvez le nombre manquant pour compléter chaque série logique :

1. 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; ?
2. 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; ?
3. 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; ?

07

Déterminez le prochain nombre dans chaque série logique :

1. 3 ; 7 ; 12 ; 18 ; 25 ; ?
2. -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; -32 ; 64 ; ?
3. 8 ; -4 ; 2 ; -1 ; 0,5 ; ?

08

Compléter chaque série logique ci-dessous :

1. 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; ?
2. 1 ; 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; ?

09

Pour chaque suite donnée, indiquez si elle est définie de manière explicite ou par récurrence, puis calculez u_1.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 4$
2. $u_n = 2^n + 1$

10

Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite (u_n) est définie de manière explicite ou par récurrence puis calculer u_1.

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
2. $u_n = 5n + 2$

11

Déterminez si la suite (u_n) est définie de façon explicite ou par récurrence et calculez u_1.

1. $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3$
2. $u_n = 3n^2 - 1$

12

Pour chaque suite suivante, précisez si elle est définie de manière explicite ou par récurrence et calculez u_1.

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$
2. $u_n = 6 - 2^n$

13

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 - 4n + 2$. Utiliser la calculatrice pour obtenir les termes de cette suite et donner u_5.

14

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 15$ et $u_{n+1} = u_n - 3$. Utiliser la calculatrice pour obtenir les termes de cette suite et donner u_7.

15

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+5}{n+3}$. Utiliser la calculatrice pour obtenir les termes de cette suite et donner u_4.

16

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n^2 - 1$. Utiliser la calculatrice pour obtenir les termes de cette suite et donner u_5.

17

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1} en fonction de n.

1. $u_n = 4n + 7$
2. $v_n = n^2 - n + 1$
3. $w_n = \dfrac{1}{n}$

18

Pour chaque suite suivante, exprimer u_{n+1} en fonction de n.

1. $u_n = 6n$
2. $v_n = n^2 + \sqrt{n}$
3. $w_n = \dfrac{n}{n+1}$

19

Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de n pour chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 10^n$
2. $v_n = n^3 - 2n$
3. $w_n = \dfrac{3n^2+1}{n+1}$

20

Soit la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = 5n + 2$. Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. Le premier terme de la suite est :
   (a) 2
   (b) 5
   (c) 7
2. Le deuxième terme de la suite est :
   (a) 10
   (b) 12
   (c) 7

21

Soit la suite (x_n) définie pour tout n entier naturel par $x_n = 3n^2 - n$. Le premier terme de la suite est :

(a) 0
(b) 2
(c) 3

22

Soit la suite (y_n) définie pour tout n entier naturel par $y_n = \dfrac{n+4}{n+2}$. Le deuxième terme de la suite est :

(a) $\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{4}{3}$ (c) $\dfrac{5}{3}$

23

Soit la suite (z_n) définie pour tout n entier naturel par $z_n = 2^n + 1$. L'expression de z_{n+1} en fonction de n est :

(a) $2^{n+1} + 1$
(b) $2^n + 2$
(c) 2^{n+1}

24

Soit la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par : $a_n = 2n + 1$. Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. a_0 est égal à :
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 0
2. a_{n+1} en fonction de n est égal à :
   (a) $2n + 3$
   (b) $2n + 2$
   (c) $2n + 1$

25

Marie décide de s'inscrire à la cinémathèque de sa ville. Elle doit, pour cela, faire un versement initial de 10€. Chaque séance lui coûtera alors 2€.

1. Quel est le montant total payé par Marie pour assister à 10 séances ?
2. On désigne par t_n le montant total payé par Marie pour assister à n séances. Exprimez t_n en fonction de n.

26

Douglas adhère au service de fidélité d'une librairie pour 15€. Ceci lui permet d'acheter les livres de poche au tarif préférentiel de 3€ le livre.

1. Quel est le montant total dépensé par Douglas pour acheter 7 livres de poche ?
2. On note s_n le coût total pour n livres de poche. Exprimez s_n en fonction de n.

27

Jean achète un smartphone neuf au prix de 960€. Chaque année, le prix de ce smartphone diminue de 75€. Définir une suite modélisant l'évolution du prix du smartphone de Jean en fonction des années.

28

Lisa reçoit une subvention de 5000 € pour son projet de recherche. Chaque mois, elle dépense 200 € pour les fournitures et autres frais. Définir une suite modélisant l'évolution du montant restant de la subvention de Lisa en fonction des mois.

29

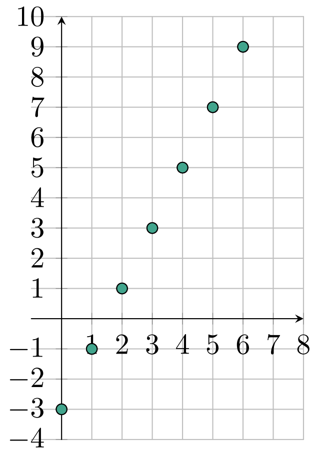
Pour parafaire sa condition physique, l'entraînement de Marco contient un enchaînement de sprints. Le premier se déroule sur une distance de 200m. Les suivants se font sur une distance égale au trois quarts de la distance précédente.

1. Quelle distance devra-t-il parcourir à son 4ème sprint ?
2. Proposer une suite modélisant la distance parcouru par Marco à son n-ième sprint.

Représentation graphique

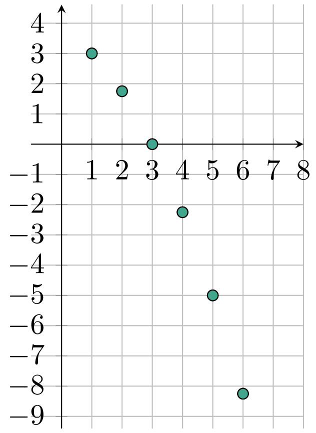
30

Le graphique ci-dessous représente les termes de la suite u. Donner les termes u_0 à u_5.



31

Le graphique ci-dessous représente les termes de la suite v. Donner les termes v_1 à v_6.



32

Pour chacune des suites ci-dessous définie pour tout entier naturel n :

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Représenter, dans un repère orthogonal, les six premiers termes de la suite donnée.

(a) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$

(b) $u_n = 3 \times (-1)^n$

(c) $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 0{,}3u_n^2 - 1$

(d) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + 1$

(e) $u_n = \dfrac{3n+5}{n+2}$

33

Soit la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = -2n + 5$. Les points représentant les termes de la suite dans un repère du plan appartiennent :

(a) à une droite

(b) à une parabole

(c) à une hyperbole

34

Soit la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = 3n^2 - n + 2$. Les points représentant les termes de la suite dans un repère du plan appartiennent :

(a) à une droite

(b) à une parabole

(c) à une hyperbole

35

Soit les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par :

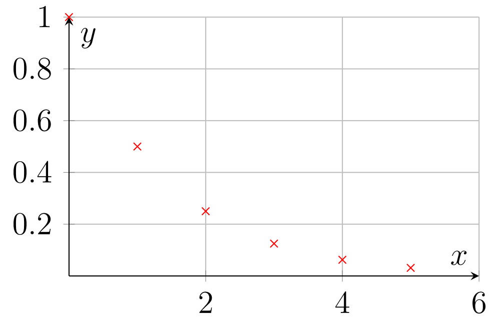
$$a_n = 3n + 2,$$

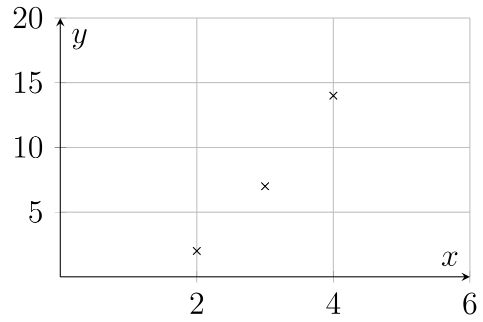
$$b_n = n^2 - 2,$$

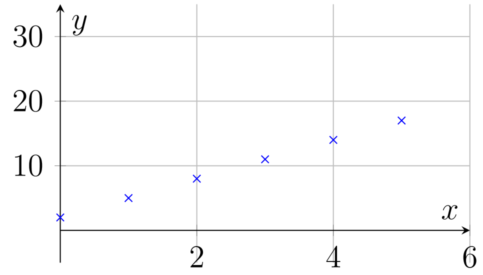
$$c_n = 0{,}5^n,$$

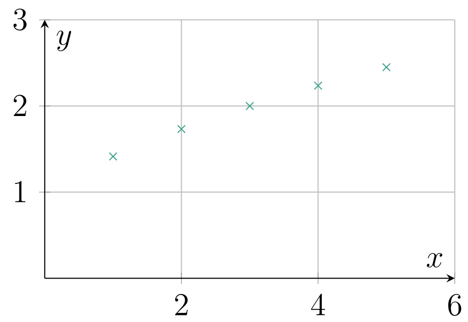
$$d_n = \sqrt{n+1}.$$

Ci-dessous sont représentés les premiers termes de chacune de ces suites. Relier chaque graphique à la suite correspondante.



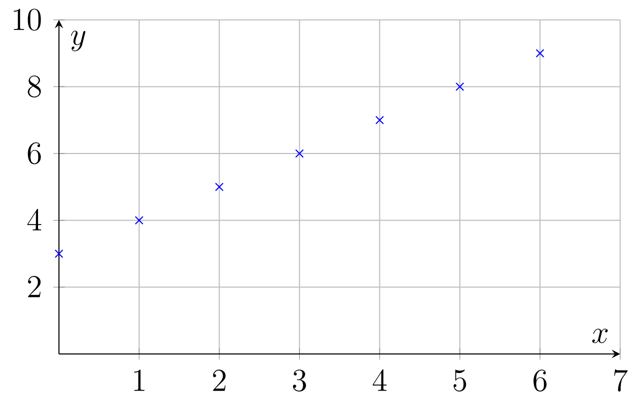






36

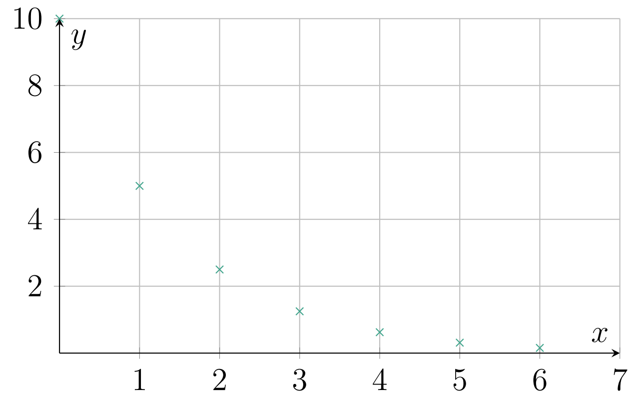
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, avec ses sept premiers termes représentés sur le graphique ci-dessous.



1. Établir la relation de récurrence vérifiée par cette suite.
2. Peut-on également définir cette suite de manière explicite ? Si oui, donner sa forme explicite.

37

Considérons la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, avec ses sept premiers termes représentés sur le graphique ci-dessous.



1. Établir la relation de récurrence vérifiée par cette suite.
2. Peut-on également définir cette suite de manière explicite ? Si oui, donner sa forme explicite.

Sens de variation

38

Représenter chacune des suites, définie sur $\mathbb{N}$, ci-dessous, sur la calculatrice et conjecturer son sens de variation.

1. $u_n = 5n - 3$
2. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 0{,}6v_n + 3$

39

Représenter chacune des suites, définie sur $\mathbb{N}$, ci-dessous, sur la calculatrice et conjecturer son sens de variation.

1. $u_n = 0{,}4n^2 + 2n - 1$
2. $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = \frac{3}{v_n}$

40

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n + 1$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
3. Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

41

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 3n + 4$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
2. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.
3. Déterminer le signe de $v_{n+1} - v_n$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

42

Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = -5n+3$.

1. Exprimer w_{n+1} en fonction de n.
2. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de n.
3. Déterminer le signe de $w_{n+1} - w_n$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (w_n).

43

Soit la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n = -4n+2$. Donner le sens de variation de la suite (x_n).

44

Soit la suite (y_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $y_n = n^2$. Donner le sens de variation de la suite (y_n).

45

Soit la suite (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $z_n = \dfrac{n}{n+1}$. Donner le sens de variation de la suite (z_n).

46

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{3n+1}{n}$. Donner son sens de variation.

47

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 4^n$ et la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = (-4)^n$.

1. Donner le sens de variation de la suite (v_n).
2. Calculer ses cinq premiers termes de la suite (w_n). Que peut-on en déduire sur son sens de variation ?

48

Soit la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par : $a_n = 3n - 2$. La suite (a_n) est :

(a) croissante

(b) décroissante

(c) constante

49

Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n par : $b_n = 4 - 2n$. La suite (b_n) est :

(a) croissante

(b) décroissante

(c) constante

50

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n + 7$. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

51

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 5}$. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

Suites définies de façon explicite

52

Calculer les quatre premiers termes de chacune des suites ci-dessous définies sur $\mathbb{N}$.

1. $a_n = 3n^2 - n + 5$.
2. $b_n = \sqrt{n+9}$
3. $c_p = p^3 + 2p^2 - 5$.
4. $e_n = 5 + 2^n$.
5. $b_n = \dfrac{2n+4}{n+1}$.
6. $c_n = 6n - \dfrac{2}{n+3}$.

53

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n)

54

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 4n + 1$. Calculer v_0, v_1 et v_5

55

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -3n + 2$. Calculer w_0, w_1 et w_3

56

Soit (x_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$. Calculer x_0 et x_{10}.

57

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$. Calculer u_0, u_1 et u_2 et représenter-les graphiquement.

58

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2$. Calculer v_0, v_1 et v_3 et représenter-les graphiquement.

59

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n-1$. Exprimer u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n} et u_n+1 en fonction de n.

60

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$. Exprimer u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n} et $u_n + 1$ en fonction de n.

61

Dans chaque cas, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n, u_n prend la valeur 5.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = -2n + 21$$
2. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = \frac{n+26}{n+2}$$

Suites définies par récurrence

62

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont définies par récurrence ?

- $u_n = 4n + 5$
- $v_{n+1} = 7v_n + 5$
- $w_n = w_{n-1} - 3$
- $x_n = n^3 + 7$
- $y_{n+2} = y_{n+1}^2$
- $z_n = n$

63

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$. Calculer u_1 et u_2.

64

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5v_n$. Calculer v_1 à v_4.

65

Pour chaque suite définie ci-dessous, calculer les quatre premiers termes.

1. $a_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n - 3$.
2. $b_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2b_n - 1$.
3. $c_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n^2 + 2$.
4. $d_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n \times 4$.
5. $e_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = \dfrac{1}{f_n}$.
6. $f_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} = \sqrt{e_n + 2}$.
7. $g_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = g_n^2 + g_n$.
8. $h_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1} = \dfrac{h_n - 3}{h_n + 1}$.

66

On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = -3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 6$ Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite.

67

Pour chaque suite ci-dessous, calculer leurs quatre premiers termes.

1. (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$
2. (v_n) définie par $v_0 = 2$, $v_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_n \times v_{n+1}$

68

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}
3. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1}

69

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

1. Calculer v_1 à v_3.
2. Représenter graphiquement ces 4 premiers termes de la suite.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite.

70

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. A l'aide de la calculatrice, calculer u_{20} .
3. Conjecturer le sens de variation de la suite.

71

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 2}{u_n - 3}$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de u_{15} à 10^2 près.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite.

Suites arithmétiques

72

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 31$ et de raison 7. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

73

Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 24$ et de raison 4.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Calculer v_4 à l'aide de la calculatrice.

74

Soit w la suite arithmétique de premier terme $w_0 = 7$ et de raison -5. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

75

Soit x la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 2$ et de raison -6.

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
2. Calculer x_5 à l'aide de la calculatrice.

76

Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 2. Calculer v_1, v_2 et v_3.

77

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 7. Calculer u_1, u_2 et u_3.

78

Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 2. Calculer v_1, v_2 et v_3.

79

Soit w la suite arithmétique de premier terme $w_0 = 9$ et de raison -2. Calculer w_1, w_2 et w_3.

80

Soit x la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 7$ et de raison -5. Calculer les termes d'indice 1 et 2.

81

Soit a la suite arithmétique de premier terme $a_1 = 3$ et de raison 4. Calculer les termes d'indice 2 et 3.

82

Soit b la suite arithmétique de premier terme $b_1 = 7$ et de raison -5. Calculer les termes d'indice 2 et 3.

83

Soit c la suite arithmétique de premier terme $c_1 = \dfrac{3}{4}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

84

Soit u une suite arithmétique de raison 5 tel que $u_3 = 11$. Calculer u_4 et u_5.

85

Soit v une suite arithmétique de raison -6 tel que $v_6 = 9$. Calculer v_7 et v_8.

86

Soit u une suite arithmétique telle que $u_{15} = 8$ et $u_{19} = 20$. Donner sa raison.

87

Soit v une suite arithmétique telle que $v_2 = 3$ et $v_{10} = -17$. Donner sa raison.

88

Soit w une suite arithmétique telle que $w_5 = 152$ et $w_{12} = 112$. Donner sa raison.

89

Parmi les suites suivantes, repérer les suites arithmétiques et donner leur raison. Donner ensuite les trois premiers termes de ces suites.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

1. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 8u_n \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_n = u_{n-1} + 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = -3u_{n-1} + 4 \end{cases}$

5. $u_{n+1} = 5 + n$

90

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = u_{n+1} + 8$. Cette suite est-elle arithmétique ?

91

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = v_{n+1} \times 8$. Cette suite est-elle arithmétique ?

92

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 12 et de raison 3. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

93

Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme -5 et de raison 6. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

94

(w_n) est une suite arithmétique de premier terme 8 et de raison -2. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

95

On considère la suite (u_n) définie ci-dessous.

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$$

Donner son sens de variation.

96

On considère la suite (v_n) définie ci-dessous.

$$\begin{cases} v_0 = 52 \\ v_{n+1} = v_n - 34 \end{cases}$$

Donner son sens de variation.

97

Parmi les suites suivantes, repérer les suites arithmétiques, donner leur raison ainsi que leur sens de variation.

1. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n-1} = u_{n-2} + 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -5 + u_n \end{cases}$

4. $u_n = 3n$

5. $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_n = 4u_{n-1} + 2 \end{cases}$

6. $u_{n+1} = 5 + n$

98

Soit u une suite arithmétique telle que $u_5 = 15$ et $u_{11} = 27$. Donner sa raison et en déduire son sens de variation.

99

Soit v une suite arithmétique telle que $v_6 = 14$ et $v_8 = -7$. Donner sa raison et en déduire son sens de variation.

Reconnaître une suite arithmétique

100

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 4n + 1$. Montrer que v est une suite arithmétique.

101

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -3n + 2$. Montrer que w est une suite arithmétique.

102

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$.

1. Calculer ses quatre premiers termes et représenter-les graphiquement.
2. D'après votre graphique, la suite peut-elle être arithmétique ?
3. Démontrer que u est une suite arithmétique.

103

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n - 1$.

1. Calculer ses quatre premiers termes et représenter-les graphiquement.
2. D'après votre graphique, la suite peut-elle être arithmétique ?
3. Démontrer que u est une suite arithmétique.

104

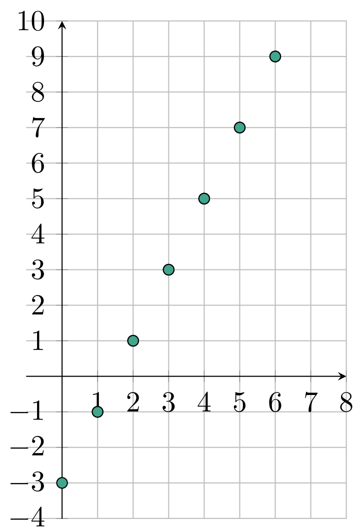
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$. Démontrer que la suite u n'est pas arithmétique.

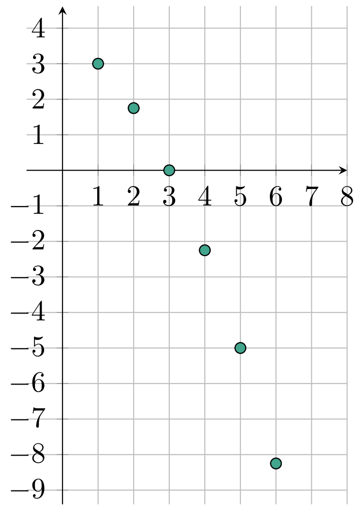
105

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2$. Démontrer que la suite u n'est pas arithmétique.

106

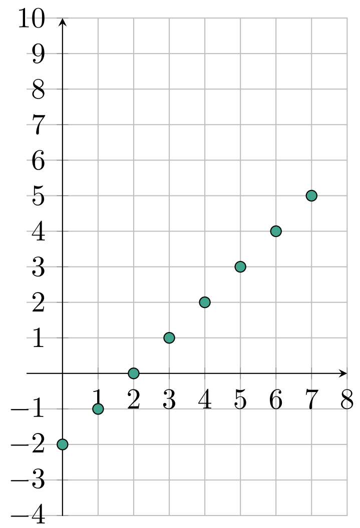
Laquelle des deux représentations graphiques ci-dessous est associée à une suite arithmétique ? Une fois trouvée, donner sa raison.

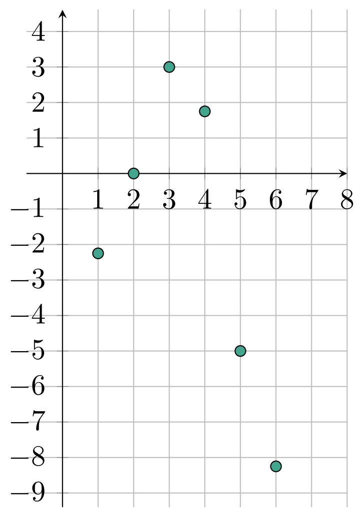




107

Laquelle des deux représentations graphiques ci-dessous est associée à une suite arithmétique ? Une fois trouvée, donner sa raison.





108

Un agriculteur plante des arbres fruitiers dans son verger. La première année, il plante 50 arbres. Chaque année suivante, il plante 20 arbres. On cherche à déterminer après combien d'années le nombre total d'arbres plantés dépassera 200. On note a_n le nombre total d'arbres plantés à la n-ième année.

1. Donner a_1, le nombre d'arbres ont été plantés la première année.
2. Calculer le nombre total d'arbres plantés après deux ans, soit a_2, et après trois ans, soit a_3.
3. Expliquer pourquoi (a_n) est une suite arithmétique.
4. Répondre à la question posée en utilisant la calculatrice.

109

Un chercheur en biologie étudie la croissance d'une population de bactéries. Au début de l'expérience, il compte 500 bactéries. Chaque jour, la population augmente de 80 bactéries. On cherche à déterminer après combien de jours la population de bactéries dépassera 1500. On note b_n la population de bactéries au n-ième jour.

1. Quelle est la population de bactéries le premier jour ?
2. Calculer b_2, et b_3. Interpréter ces résultats dans le cadre de l'exercice.
3. Expliquer pourquoi (b_n) est une suite arithmétique.
4. Répondre à la question posée en utilisant la calculatrice.

Suites géométriques

110

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

111

Soit v la suite géométrique de premier terme

$v_0 = 4$ et de raison -3. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

112

Soit w la suite géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison 2.

1. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
2. Calculer w_4 à l'aide de la calculatrice.

113

Soit x la suite arithmétique de premier terme $x_0 = -2$ et de raison -5.

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
2. Calculer x_5 à l'aide de la calculatrice.

114

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Calculer u_1, u_2 et u_3.

115

Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 4. Calculer v_1, v_2 et v_3.

116

Soit w la suite géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison -3. Calculer w_1, w_2 et w_3.

117

Soit x la suite géométrique de premier terme $x_1 = 8$ et de raison 3. Calculer les termes d'indice 2 et 3.

118

Soit y la suite géométrique de premier terme $y_0 = 6$ et de raison -4. Calculer les termes d'indice 3 et 4.

119

Soit z la suite géométrique de premier terme $z_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{2}{3}$. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

120

Soit a une suite géométrique de raison 3 tel que $a_4 = 9$. Calculer a_5 et a_6.

121

Soit b une suite géométrique de raison -5 tel que $b_6 = 13$. Calculer b_7 et b_8.

122

Soit u une suite géométrique telle que $u_{15} = 8$ et $u_{18} = 64$. Donner sa raison.

123

Soit v une suite géométrique telle que $v_2 = 54$ et $v_5 = 2$. Donner sa raison.

124

Parmi les suites suivantes, repérer les suites géométriques et donner leur raison. Donner ensuite les 3 premiers termes de ces suites.

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 4u_{n-1} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = -2u_{n-1} + 4 \end{cases}$
6. $u_{n+1} = 8 + n$

125

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = u_{n+1} \times 6$. Cette suite est-elle géométrique ?

126

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = v_{n+1} - 8$. Cette suite est-elle géométrique ?

127

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme 7 et de raison 5. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

128

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme -5 et de raison 2. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

129

(w_n) est une suite géométrique de premier terme 6 et de raison $\frac{1}{4}$. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de cette suite.

130

On considère la suite (u_n) définie ci-dessous.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 9u_n \end{cases}$$

Donner son sens de variation.

131

On considère la suite (v_n) définie ci-dessous.

$$\begin{cases} v_0 = 11 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{6} \end{cases}$$

Donner son sens de variation.

132

Parmi les suites suivantes, repérer les suites géométriques, donner leur raison ainsi que leur sens de variation.

1. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n-1} = 4u_{n-2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -5 + u_n \end{cases}$
4. $u_n = 7n$
5. $\begin{cases} u_0 = 125 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{5} \end{cases}$
6. $u_n = 9^n$

133

Soit u une suite géométrique telle que $u_6 = 21$ et $u_8 = 84$. Donner sa raison et en déduire son sens de variation.

134

Soit v une suite géométrique telle que $v_7 = 36$ et $v_9 = 9$. Donner sa raison et en déduire son sens de variation.

Reconnaître une suite géométrique

135

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = 5 \times 2^n$.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ?
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
3. Calculer le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Qu'en déduisez-vous ?
4. Faire de même pour les suites (t_n) et (w_n) définies par :

$$t_n = 100 - 4n$$

$$w_n = 0{,}7^n$$

136

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 4^n$. Montrer que v est une suite géométrique.

137

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 7^n$. Montrer que w est une suite géométrique.

138

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.

1. Calculer ses quatre premiers termes et représenter-les graphiquement.
2. D'après votre graphique, la suite peut-elle être géométrique ?
3. Démontrer que u est une suite géométrique.

139

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3^n$.

1. Calculer ses trois premiers termes et représenter-les graphiquement.
2. D'après votre graphique, la suite peut-elle être géométrique ?
3. Démontrer que u est une suite géométrique.

140

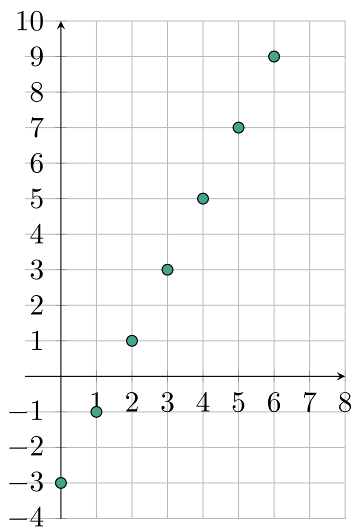
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 7$. Démontrer que la suite u n'est pas géométrique.

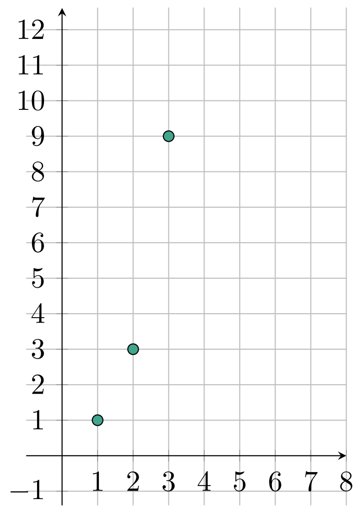
141

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2$. Démontrer que la suite u n'est pas géométrique.

142

Laquelle des deux représentations graphiques ci-dessous est associée à une suite géométrique ?





143

Un investisseur place une somme de 1000€ sur un compte bancaire avec un taux d'intérêt annuel de 5%. Chaque année, le montant sur le compte augmente de 5% par rapport à l'année précédente. On cherche à déterminer après combien d'années le montant sur le compte dépassera 2000 €. On note M_n le montant sur le compte au bout de n années.

1. Quel est le montant sur le compte après la première année, soit M_1 ?
2. Calculer le montant sur le compte après deux ans et après trois ans.
3. Expliquer pourquoi (M_n) est une suite géométrique.
4. Répondre à la question posée en utilisant la calculatrice.

144

Un chimiste étudie la concentration d'une substance dans une solution au cours du temps. Initialement, la concentration de la substance est de 100 mg/L. Chaque jour, la concentration double. On cherche à déterminer après combien de jours la concentration dépassera 5000 mg/L. On note c_n la concentration de la substance au n-ième jour.

1. Quelle est la concentration de la substance le premier jour ?
2. Calculer c_2 et c_3. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
3. Expliquer pourquoi (c_n) est une suite géométrique.
4. Répondre à la question posée en utilisant la calculatrice.

145

Un collectionneur souhaite acheter une œuvre d'art d'une valeur de 10 000 €. Actuellement, il dispose de 9 000 € et ne veut pas emprunter. Il décide donc de placer son argent sur un compte à intérêts composés avec un taux annuel de 4%. On note (a_n) la somme dont disposera le collectionneur au 1er janvier de l'année n.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. Montrer que la suite (a_n) est géométrique et donner sa raison.
3. En quelle année pourra-t-il acheter l'œuvre d'art ?

Problèmes

146

On considère une série de carrés construits de la manière suivante : le premier carré a un côté de 2 cm, le deuxième carré a un côté de 4 cm, le troisième carré a un côté de 6 cm, et ainsi de suite.

1. Pour un entier n supérieur ou égal à 1, on note s_n le périmètre du carré de côté n cm.
   (a) Calculer s_1, s_2, s_3.
   (b) Exprimer s_n en fonction de n. Quel type de suite cela définit-il ?
2. Pour un entier n supérieur ou égal à 1, on note a_n l'aire du carré de côté n cm.
   (a) Calculer a_1, a_2, a_3.
   (b) Définir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon explicite.

147

En 2020, une entreprise décide de produire 400 hectares de toile à peindre et d'augmenter cette surface de production de 10% par an les années suivantes. On modélise la surface produite, en hectare, durant l'année 2020+n par une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi $a_0 = 400$.

1. Quelle sera la surface produite, en hectares, durant l'année 2021, puis durant l'année 2022 ?
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.
4. Déterminer a_5.

148

Un designer auto-entrepreneur a réalisé en 2019 un chiffre d'affaire de 45 000 euros. Depuis, son chiffre d'affaires a augmenté chaque année de 10%. On note c_n le chiffre d'affaires en milliers d'euros de ce designer en 2019+n.

1. Quel fut son chiffre d'affaires en 2020 ?
2. Donner c_1 et c_2.
3. Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1{,}1$.
4. L'auto-entrepreneur devra changer de statut juridique si son chiffre d'affaires dépasse 73 000 euros. En quelle année devra-t-il changer de statut ?

149

Un ingénieur du son souhaite monter un home-studio. L'intensité maximal estimée dans ce studio sera de 125 décibels et l'intensité maximale dans la régie devra être de 30 décibels. Une plaque d'isolation phonique en absorbe 25%. On note s_n l'intensité du son, mesurée en décibels, après la traversée de n plaques. Ainsi : $s_0 = 125$.

1. Calculer et représenter graphiquement s_1, s_2, s_3.
2. Démontrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas en progression arithmétique.
3. Justifier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
4. Quel est le sens de variation de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Combien de plaques d'isolation acoustiques seront nécessaires afin d'isoler la régie ?

150

Djamal paye 75 euros un abonnement annuel pour visiter tous les musées de son département. Il doit ensuite payer 5 euros supplémentaires pour chaque exposition qu'il souhaite visiter. On note P le prix que Djamal dépensera dans l'année pour ses visites au musée et n le nombre d'expositions qu'il aura faites.

1. Donner l'expression de P_n en fonction de n.
2. Combien payera-t-il au total s'il visite 20 expositions durant l'année ?

151

En 2019, Elisabeth possède une bibliothèque de livre d'arts contenant 100 ouvrages. À partir de 2020 elle décide de donner chaque année 5$\%$ de ses ouvrages à une œuvre de charité et d'acheter 10 nouveaux livres.

1. Combien aura-t-elle d'ouvrages en 2020?
2. On note o_n le nombre d'ouvrages qu'elle possède en $2019+n$. Donner l'expression de o_{n+1} en fonction de o_n.

152

Un somme de 3000 euros est placée à 3$\%$ par an, à intérêts composés – à la fin de chaque année les intérêts sont intégrés à l'ancien capital.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose : $S_0 = 3000$.

1. Calculer le capital acquis à la fin de la première année.
2. Calculer le capital acquis à la fin de la deuxième année.
3. Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
5. Ecrire une formule de récurrence permettant de calculer S_{n+1} en fonction de S_n.
6. Calculer et interpréter S_5.

153

On place une somme de 5000 euros à 4% par an, à intérêts simples – à la fin de chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital initialement placé.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose : $S_0 = 5000$.

1. Calculer le capital acquis à la fin de la 1ère année.
2. Calculer le capital acquis à la fin de la 2ème année.
3. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélisant le capital est arithmétique dont on précisera la raison.
4. Calculer S_{10}. Que représente cette valeur ?

154

Un designer souhaite créer une armature en métal issue de la superposition de plusieurs couches d'aluminium. La première couche serait de 1cm. Les épaisseurs suivantes auraient une épaisseur qui diminuerait à chaque fois de 15%. On modélise l'épaisseur de chacune de ces couches par une suite (e_n) : on note e_n l'épaisseur de la nième couche en centimètres. Ainsi $e_1 = 1$.

1. Calculer e_2 et e_3.
2. Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que e est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
4. Donner e_7.
5. L'industriel qui produira ces lames d'aluminium ne peut produire des épaisseurs inférieures à 0.3cm. Combien de couches au maximum le designer peut-il superposer ? Dans ce cas quelle sera l'épaisseur totale de l'armature ?

155

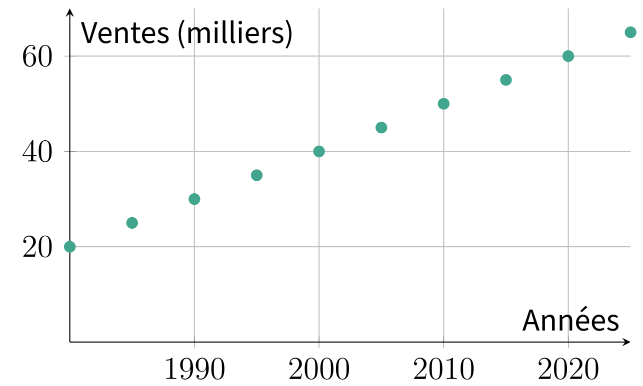
Démontrer que la moyenne de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est toujours égale au terme central.

156

Le tableau ci-dessous donne les chiffres des ventes annuelles d'une entreprise de 1980 à 2025 (en milliers d'unités).

Année	Ventes (milliers)
1980	20
1985	25
1990	30
1995	35
2000	40
2005	45
2010	50
2015	55
2020	60
2025	65

Ces données sont illustrées par le graphique ci-dessous.



1. La croissance des ventes semble-t-elle linéaire sur la période 1980-2025 d'après le graphique ci-dessus ?
2. On suppose que la croissance des ventes est linéaire sur la période 1980-2025.
   (a) Calculer l'accroissement annuel moyen sur cette période.
   (b) Si cette hypothèse de croissance linéaire se maintenait au-delà de 2025, quel serait le chiffre de ventes en 2030 ?
3. On suppose désormais que le taux de croissance annuel est constant et égal à 5% depuis 1980.
   (a) Comment peut-on qualifier ce type de croissance ?
   (b) Quel serait le chiffre de ventes en 2030 si ce taux de croissance se maintenait au-delà de 2025 ? en 2050 ?

157

La suite de Fibonacci, le nombre d'or et la spirale d'or

Partie A : La suite de Fibonacci

1. La suite de Fibonacci $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent avec $\mathscr{F}_0 = 1$ et $\mathscr{F}_1 = 1$.
   (a) Calculer $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ et $\mathscr{F}_4$.
   (b) Donner une expression par récurrence de la suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) La suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmétique ? géométrique ?
2. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$P_n = \frac{\mathscr{F}_{n+1}}{\mathscr{F}_n}$$
   (a) Calculer P_0, P_1 et P_2.
   (b) A l'aide de la calculatrice, représenter le nuage de points associé à la suite P.
   (c) Qu'observe-t-on ? Quelle est la valeur prise par P_n lorsque n devient grand ?

Partie B : Le nombre d'or et la spirale d'or

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant au « taux de croissance » de la suite de Fibonacci converge vers un nombre $\varphi \approx 1{,}618$ que l'on appelle le nombre d'or. Sa valeur exacte est donnée par
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

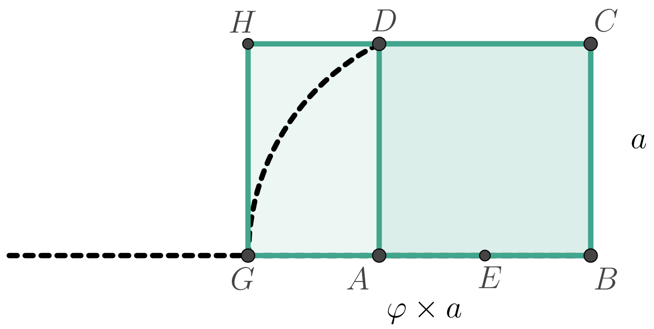
Luca Pacioli, un moine franciscain italien, le surnomma « divine proportion », et durant les XIXe et XXe siècles on postulera que le nombre d'or est une clé pour la compréhension de nombreux domaines, tant artistiques – architecture, peinture, musique –, que scientifiques – biologie, anatomie. Rares, au final, furent les domaines qui étayèrent cette thèse, mais il reste un pilier esthétique important des créations humaines. Nous allons dans la suite de cet exercice nous intéresser à une des constructions faisant intervenir le nombre d'or : la spirale d'or.

Rectangle d'or :

Pour construire la spirale d'or, il est nécessaire de construire une succession de rectangles d'or. Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport longueur sur largeur est égal au nombre d'or. Par exemple un rectangle tel que $l = 1$ et $L = \varphi$ est un rectangle d'or.

Pour construire un tel rectangle :

1. tracez un carré de longueur a,
2. placez votre compas sur le milieu d'un des côtés et ouvrez-le jusqu'à un des sommets opposés,
3. repérez l'intersection du cercle avec le côté où est placé votre compas
4. et prolongez le carré jusqu'à ce point afin d'obtenir un rectangle d'or.



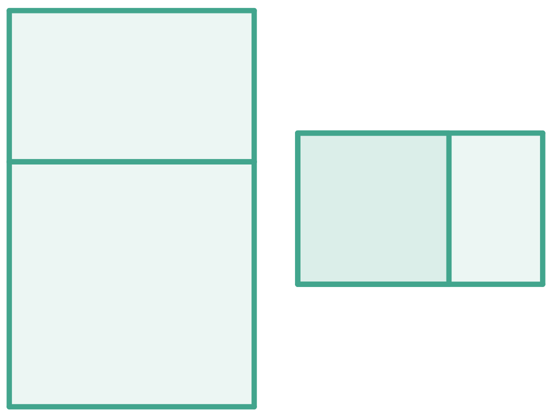
Si $a = 1$, démontrer que la longueur GB est bien égale à φ.

Spirale d'or :

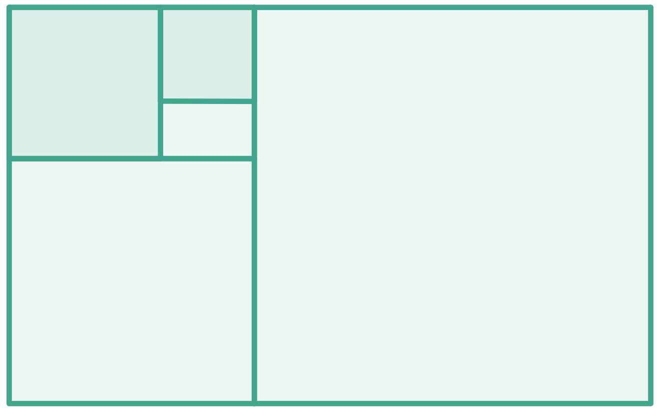
On peut construire un nouveau rectangle d'or en :

— ajoutant un carré sur une de ses longueurs

— ou en divisant le rectangle obtenu en un carré et un rectangle.



En répétant plusieurs fois cette opération, on obtient une structure qui nous permet de tracer une spirale d'or.



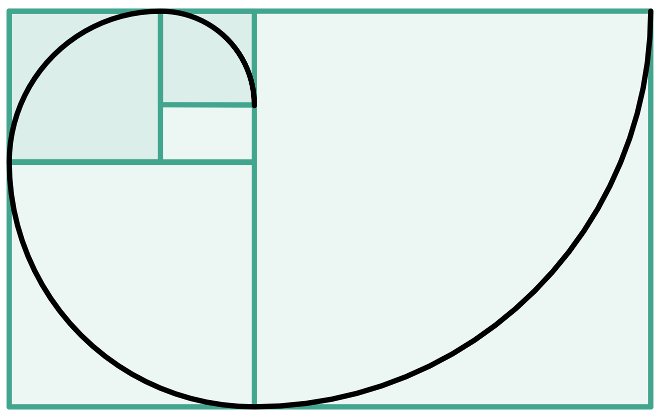
Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des longueurs des rectangles d'or que l'on construit par ajout d'un carré. On pose $L_0 = a\varphi$.

1. Calculer L_1.
2. Exprimer L_{n+1} en fonction de L_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que L est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
4. Donner L_5.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des aires de ces mêmes rectangles d'or.

5. Calculer A_0 et A_1.
6. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n pour tout entier naturel n.
7. En déduire que A est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
8. Donner A_5.

En reliant les sommets opposés de chacun des carrés tracés comme illustré ci-dessous, nous obtenons la spirale d'or.



On note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des rayons de chacun des arcs de cercles. Ainsi $R_0 = a$.

9. Calculer R_1.
10. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n pour tout entier naturel n.
11. En déduire que R est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.

On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des longueurs de chacun des arcs de cercles.

12. Calculer C_0 et C_1.
13. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n pour tout entier naturel n.
14. En déduire que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
15. Calculer $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Que représente cette somme ?

158

On rappelle qu'une diagonale d'un polygone est un segment qui relie deux sommets non consécutifs. Soit $(u_n)_{n\geqslant 3}$ la suite correspondant au nombre de diagonales d'un polygone à n côtés.

1. Déterminer la valeur de u_3, u_4 et u_5.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Combien de diagonales possède un polygone à 10 côtés ?

159

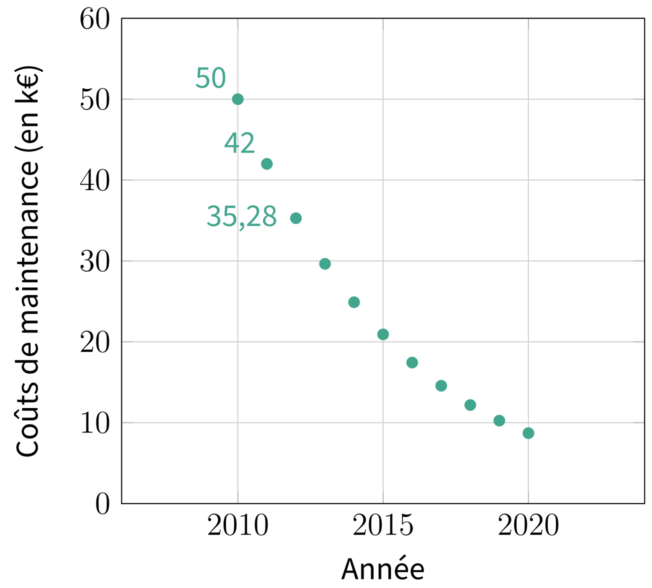
On injecte à une plante une solution nutritive contenant 5 mg d'un élément essentiel. On suppose que cet élément est absorbé uniformément par la plante et que, chaque jour, 20 % de cet élément est éliminé par la plante.

Pour tout entier n, on note p_n la masse en mg de l'élément présent dans la plante au bout de n jours.

1. Montrer que $p_1 = 4$ et interpréter ce résultat.
2. Calculer la masse en mg de l'élément nutritif présent dans la plante au bout de 3 jours. Arrondir le résultat à 0,01 près.
3. Montrer que la suite (p_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et donner le premier terme de cette suite.
4. Donner le sens de variation de cette suite puis interpréter ce résultat.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer après combien de jours la quantité de l'élément nutritif présent dans la plante sera inférieure à $0{,}1$ mg.

160

Une municipalité prévoit de réduire ses frais de maintenance pour ses bâtiments publics au cours des 10 prochaines années. Les coûts de maintenance, en milliers d'euros, depuis 2010 sont illustrés ci-dessous.

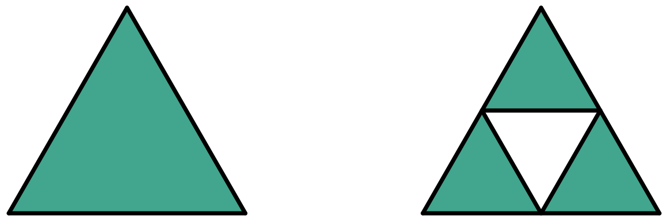


1. Calculer, en pourcentage, la variation des coûts de maintenance entre 2010 et 2011, puis entre 2011 et 2012.
2. Supposons que les coûts diminuent chaque année de ce même pourcentage jusqu'en 2020.
   a) Modéliser le montant des coûts de maintenance en fonction de l'année par une suite. Préciser la relation de récurrence, la nature de la suite et son terme initial.
   b) Vérifier que le montant des coûts de maintenance en 2014 est de 24,896k€.
3. a) Déterminer l'année à partir de laquelle les coûts de maintenance seront inférieurs à 10 000 €. Justifier votre réponse en utilisant un outil numérique.
   b) Calculer les coûts de maintenance prévus pour 2020 avec une précision de 1€.

04. TP

Fractales et figures autosimilaires

Le triangle de Sierpinski



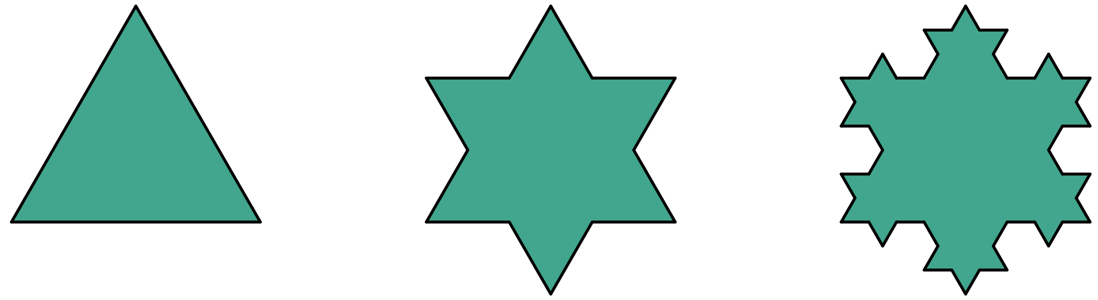
Construction :

1. Construire un triangle équilatéral.
2. Relier le milieu de chacun des côtés pour former un nouveau triangle au centre du précédent que l'on hachurera. Quelle est la nature de ce triangle ? Justifier.
3. Autour de ce triangle central on obtient trois triangles. Démontrer que ce sont des triangles équilatéraux de même dimension.
4. Répéter les opérations précédentes pour chacun des trois triangles.
5. Répéter de nouveau ces opérations pour les triangles non hachurés obtenus. La figure obtenue après une répétition à l'infini de ces opérations est appelée **triangle de Sierpinski**.

Étude :

1. On note $T(n)$ le nombre de triangles non-hachurés à la n-ième étape avec n un entier naturel, et $n = 0$ correspondant au premier triangle tracé.
   (a) Donner $T(1)$ et $T(2)$.
   (b) Exprimer $T(n+1)$ en fonction de $T(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite T ?
   (c) Calculer le nombre total de triangles non-hachurés à l'issue de la cinquième étape.
2. On note $L(n)$ la longueur d'un côté de triangle non-hachuré à la n-ième étape.
   (a) Donner $L(1)$ et $L(2)$.
   (b) Exprimer $L(n+1)$ en fonction de $L(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite L ?
   (c) Calculer la longueur d'un côté d'un triangle non-hachuré à l'issue de la cinquième étape.
3. On note $P(n)$ le périmètre d'un triangle non-hachuré à la n-ième étape.
   (a) Donner $P(1)$ et $P(2)$.
   (b) Exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite P ?

Le flocon de Von Koch



Construction :

1. Construire un triangle équilatéral.
2. Diviser chaque côté du triangle en 3 segments égaux.
3. Construire, pour chacun des côtés, un triangle équilatéral extérieur, dont la base est le segment médian, c'est-à-dire le deuxième segment issu de la division de chaque côté.
4. Effacer le segment médian.
5. Répéter les opérations précédentes pour chacun des segments du polygone.
6. Répéter de nouveaux ces opérations pour chacun des segments du polygone. La figure obtenue après une répétition à l'infini de ces opérations est appelée **flocon de Von Koch**.

Étude :

1. On note $S(n)$ le nombre de côtés du polygone à la n-ième étape avec n un entier naturel, et $n = 0$ correspondant au premier polygone tracé.
   (a) Donner $S(1)$ et $S(2)$.
   (b) Exprimer $S(n+1)$ en fonction de $S(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite S ?
   (c) Calculer le nombre total de côtés du polygone à l'issue de la quatrième étape.
2. On note $L(n)$ la longueur d'un côté du polygone à la n-ième étape.
   (a) Donner $L(1)$ et $L(2)$.
   (b) Exprimer $L(n+1)$ en fonction de $L(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite L ?
   (c) Calculer la longueur d'un côté du polygone à l'issue de la quatrième étape.
3. On note $P(n)$ le périmètre du polygone à la n-ième étape.
   (a) Donner $P(1)$ et $P(2)$.
   (b) Exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite P ?

Les fractales et l'autosimilarité

La notion de *fractales* a été formalisée par le mathématicien français Benoît Mandelbrot en 1975 et décrit l'ensemble des objets où certaines propriétés sont maintenues à différentes échelles. Le triangle de Sierpinski et le flocon de Von Koch sont des figures géométriques autosimilaires exactes. Quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe, elles conservent leur forme. Ce sont ainsi des exemples parfaits de fractales. Des formes fractales approximatives sont quant à elles facilement observables dans la nature : les nuages, les flocons de neige, les montagnes, le chou-fleur, les vaisseaux sanguins ou encore les formes urbaines.

FONCTIONS

Objectifs du chapitre : Calcul de l'image et de l'antécédent d'une fonction / Lecture graphique d'une image et d'un antécédent / Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation / Fonction polynôme de degré 2 et 3 / Forme factorisée et forme développée d'un polynôme de degré 2 / Tableau de variation et de signes d'une fonction polynôme de degré 2 / Résolution d'une équation ou d'une inéquation de degré 2 / Résolution d'une équation du type $x^n = a$ avec $n = 2$ ou $n = 3$.

05

Gustave EIFFEL
Viaduc de Garabit
1884

01. INTRODUCTION

Pour chacune des références ci-dessous, identifiez la fonction exploitée : fonction polynôme de degré 2, fonction polynôme de degré 3, fonction affine ou fonction inverse.

1. Curves Console, Marc WOOD, 2015
2. Chaise Split Seat, Ian KILLINGER, 2011
3. Relaxer, Verner PANTON, 1974
4. Sidewinder, David TRAGEN, 2013
5. Cathédrale de Brasilia, Oscar NIEMEYER, 1959
6. Parabolic Plywood Office, RAW Architecture, 2016
7. Prism, Inés ESNAL, 2012
8. Cardiff Bay Car Park, Scott BROWNRIGG, 2016
9. Pipo, PIEGATTO, 2014
10. Viaduc de Garabit, Gustave EIFFEL, 1880
11. Seventeen is sharp, Rebecca WARD, 2009

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.

GATEWAY ARCH

1. La fonction carrée

a. Quel est le nom donné à la courbe représentative de la fonction carrée :

$$f(x) = x^2$$

On va s'intéresser, dans un premier temps, à la fonction $g(x) = -x^2$

b. Remplir le tableau de valeur ci-dessous.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$													

c. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle [-3 ; 3].

d. Que peut-on dire de la courbe représentative de la fonction g par rapport à celle de la fonction f.

On considère maintenant la fonction $h(x) = -x^2 + 9$.

e. Tracer la courbe représentative de la fonction h sur l'intervalle [-3 ; 3] en utilisant le même tableau de valeur que précédemment.

f. Que peut-on dire de la courbe représentative de la fonction h par rapport à celle de la fonction g.

g. Résoudre $h(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

À gauche :
La Gateway Arch,
Saint-Louis, Missouri, États-Unis, 1965

h. Soit a un nombre réel. Tracer sur votre calculatrice les courbes représentatives des fonctions $f(x) = ax^2$ en prenant pour a les valeurs ci-dessous :

a	2	2,5	3	0,6	0,2	0,01

Comparez ces courbes représentatives à celle de la fonction carrée.

i. Faites de même avec les valeurs de a ci-dessous.

a	-2	-2,5	-3	-0,6	-0,2	-0,01

2. L'arche de Saint-Louis : **une parabole ?**

La Gateway Arch est située dans le centre-ville de Saint-Louis dans l'État du Missouri, aux États-Unis. Symbole de la ville, cette arche recouverte d'acier inoxydable mesure 192 mètres de hauteur, ce qui en fait le plus grand monument qui peut se visiter dans l'État, la plus grande arche du monde et le monument artificiel le plus haut du pays. Elle est consacrée à la conquête de l'Ouest, comme le mémorial dont elle fait partie.

Nous allons dans cette activité essayer de modéliser l'arche de Saint-Louis à l'aide d'une fonction du type $f(x) = ax^2 + b$, comme représentée ci-contre.

a. D'après les conclusions tirées de la partie précédente, quel doit être le signe de a pour obtenir la courbe représentée ci-contre ?

b. La courbe doit avoir son maximum en $x = 0$. Comme sa hauteur maximale est de 192m, déterminer la valeur de b dans $f(x) = ax^2 + b$.

La largeur de l'arche, soit la longueur séparant chaque pied de celle-ci au sol, est égale à sa hauteur 192m. On cherche à déterminer la valeur de a permettant d'obtenir la bonne largeur au sol.

c. Justifier que l'équation à résoudre pour trouver a est $0 = a \times 96^2 + 192$.

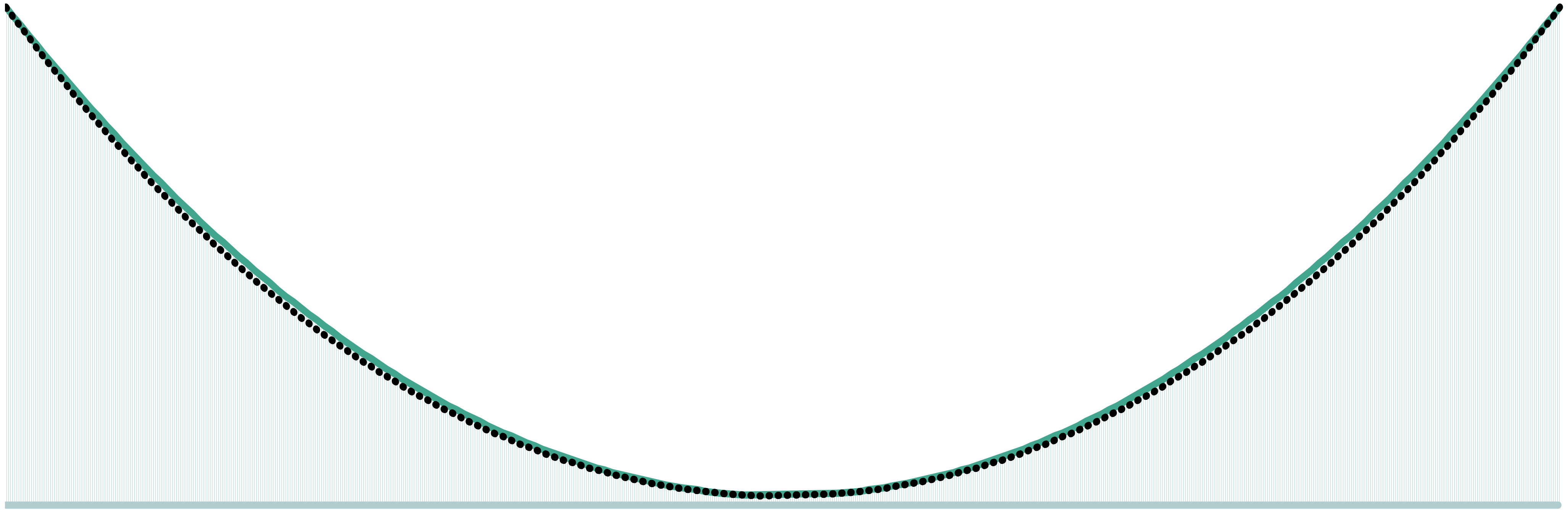
d. Résoudre cette équation et en déduire la fonction f représentant l'arche de Saint-Louis.

e. Ci-dessous sont données les valeurs de la hauteur de l'arche, en mètres, arrondis au dixième, en fonction de sa distance au centre, en mètres.

x	- 96	- 40	-10	0	10	40	96
h	0	128,0	145,9	192	145,9	128,0	0

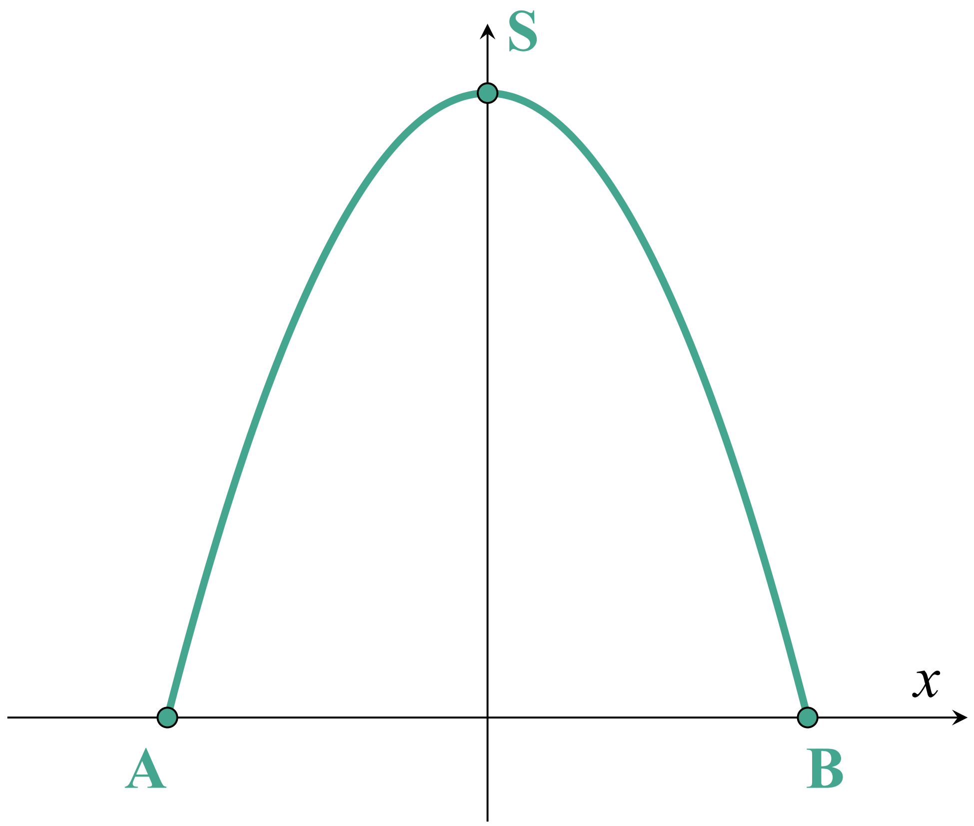
Comparer ces valeurs à celles de $f(x)$ pour les valeurs de x données. Peut-on dire que la modélisation de l'arche de Saint-Louis à l'aide de la fonction $f(x) = ax^2 + b$ est adaptée ?

L'arche de Saint-Louis suit une forme dite de « chaînette renversée ». Cette forme, qui ressemble à la parabole mais qui est plus aplatie au centre, est celle que prend une chaîne suspendue par ses extrémités et soumise à la gravité. La chaînette renversée, quant à elle, est la forme prise par une arche dont la stabilité est assurée par son propre poids. On parle alors de structure autoportante. C'est au physicien anglais Robert Hooke qu'on doit la découverte, dans les années 1670, de cette « forme optimale d'un arc », qui permettra à des architectes comme Antoni Gaudí de concevoir lors structures architecturales, avec, pour celui-ci, des structures inversées conçues à partir de chaînes suspendues.



En haut :
Comparaison de la fonction chaînette (en noir) avec la fonction carrée (en vert)

En bas :
Représentation graphique de la courbe $f(x) = ax^2 + b$



02. COURS

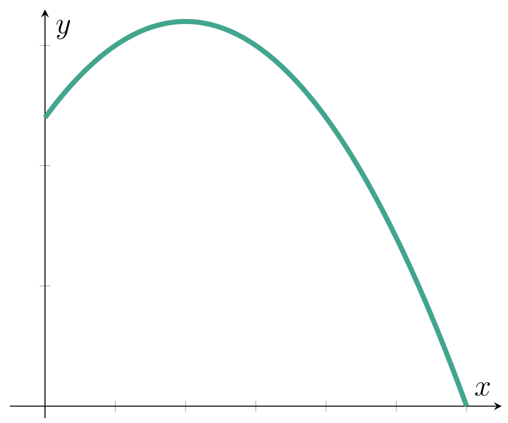
Bases

Définition

Une **fonction** modélise la dépendance d'une quantité vis-à-vis d'une autre.
On note $f(x)$ cette fonction où x est la variable dont dépend la quantité étudiée.

Exemple

On s'intéresse à la trajectoire d'un ballon dans l'air lors d'un lancer franc au basketball :



On s'aperçoit que sa hauteur dépend de la distance par rapport au lanceur. On peut modéliser cela par une fonction f qui associe la hauteur à x la distance par rapport au lanceur. Ici cette fonction sera :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 12$$

Que l'on pourra noter également sous la forme :

$$f : x \mapsto -x^2 + 4x + 12$$

Image, antécédent et représentation graphique

Vocabulaire

En prenant une valeur a réelle et en calculant $f(a)$ on obtient **l'image de a par la fonction** f. On dit que a est un antécédent.

Exemple

Dans l'exemple précédent, comme $f(2) = 16$ on dit que 16 est **l'image** de 2. Et que 2 est l'antécédent de 16 par la fonction f.

Propriétés

Pour calculer une **image** on substitue x par la valeur donnée dans $f(x)$.
Pour trouver un **antécédent** on doit résoudre une équation.

Exemple

Pour calculer l'image de 2 par la fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 12$, on remplace x par 2 :

$$\begin{aligned} f(2) &= -2^2 + 4 \times 2 + 12 \\ &= -4 + 8 + 12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

L'image de 2 est donc 16.

Pour trouver l'antécédent de 8 par la fonction $g(x) = 3x - 7$, on résout :

$$\begin{aligned} & 3x - 7 = 8 \\ \iff\ & 3x = 8 + 7 \\ \iff\ & 3x = 15 \\ \iff\ & x = \frac{15}{3} \\ \iff\ & x = 5 \end{aligned}$$

Représentation graphique

Pour tracer la représentation graphique de la fonction f, que l'on nomme **courbe représentative** de f, ou tout simplement C_f :

1. on prend plusieurs valeurs de x (dans le domaine de définition de f).
2. Pour chacune de ces valeurs on calcule l'image $f(x)$.
3. Les points de coordonnées $(x; f(x))$ seront les points de la représentation graphique de f. Il suffit de les placer et de les relier pour obtenir C_f.

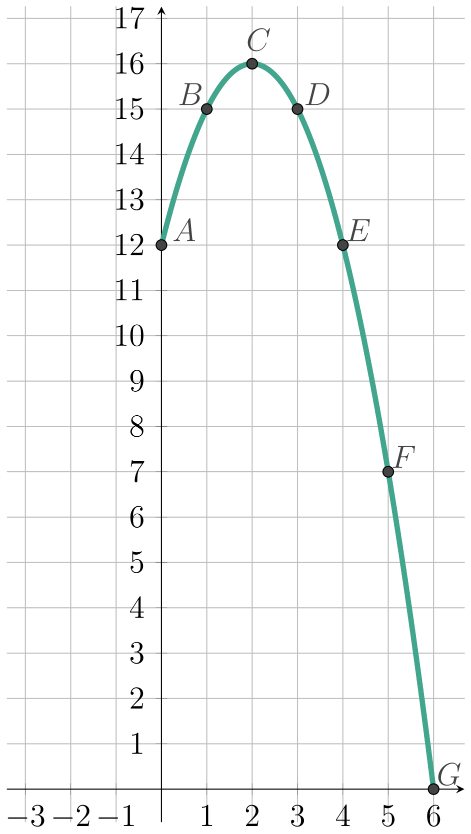
Exemple

Dans l'exemple précédent, tracer la représentation graphique de $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.

Réponse : On construit un tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	12	15	16	15	12	7	0

On place les points obtenus et on les relie :



Point sur la courbe

Pour vérifier qu'un point de coordonnées $(a;b)$ appartient à la courbe C_f, on calcule $f(a)$ et on regarde si le résultat est égal à b.

Exemple

Dans l'exemple précédent, le point $(2;8)$ appartient-il à la courbe C_f ?

Réponse : On calcule $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 12 = -4 + 8 + 12 = 16$. Or $16 \neq 8$ donc le point $(2;8)$ n'appartient pas à C_f.

Résolution d'(in)équation graphiquement

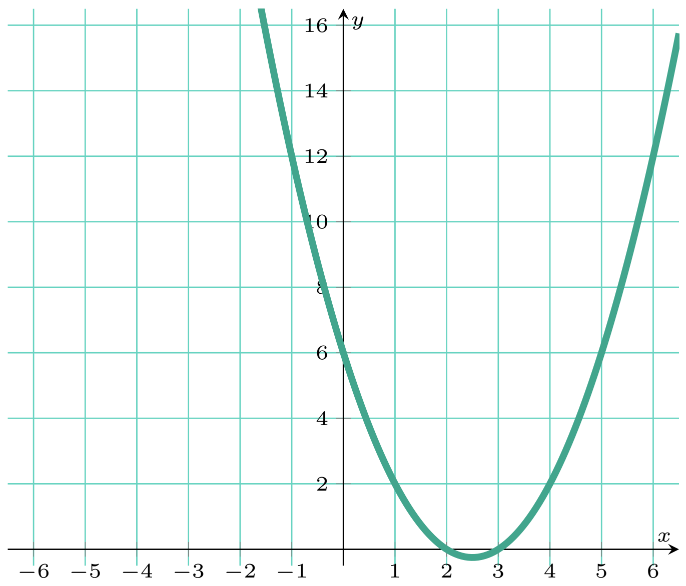
Résolution d'une équation graphiquement

Pour résoudre une équation du type $f(x) = k$ où k est un nombre :

1. on trace la droite $y = k$ et on cherche les points d'intersections de cette droite avec la courbe représentative de f.
2. Les abscisses de ces points d'intersections seront les solutions de cette équation.

Exemple

« On cherche à résoudre $x^2 - 5x + 6 = 2$. Ci-dessous on donne la représentation graphique de $f(x) = x^2 - 5x + 6$. En déduire les solutions de l'équation donnée. »



Réponse : En traçant la droite $y = 2$ on s'aperçoit qu'il y a deux points d'intersections. Ces points ont pour abscisse 1 et 4. D'où $S = \{1;4\}$.

Résolution d'une inéquation graphiquement

Pour résoudre une équation du type $f(x) \geq k$ ou $f(x) \leq k$ ou $f(x) > k$ ou $f(x) < k$, où k est un nombre :

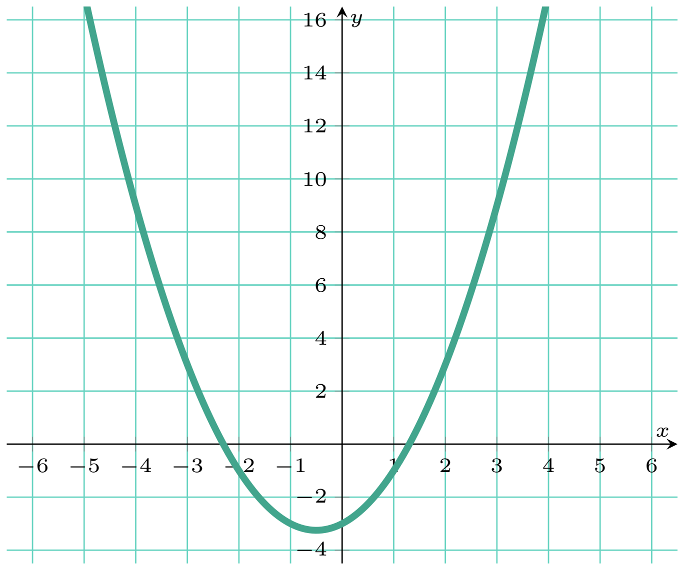
1. on répète les même étapes que pour la résolution graphique d'une équation.
2. Si on cherche à résoudre $f(x) \geq k$ ou $f(x) > k$ on cherchera l'intervalle des x pour lequel la courbe C_f est au-dessus de la droite tracée.
3. Si on cherche à résoudre $f(x) \leq k$ ou $f(x) < k$ on cherchera l'intervalle des x pour lequel la courbe C_f est en-dessous de la droite tracée.

Remarque

Le plus souvent la solution sera un intervalle.

Exemple

« Ci-dessous on donne la représentation graphique de $f(x) = x^2 + x - 3$. Résoudre $x^2 + x - 3 > 3$. »



Réponse : En traçant la droite $y = 3$ on s'aperçoit que la courbe est au-dessus de la droite sur les intervalles $]-\infty; -3[$ et $]2; +\infty[$. D'où $S =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

Fonctions polynômes de degré 2

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2, toute fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

où a, b et c sont des nombres réels, et a doit être non nul.

Forme développée et forme factorisée

Une fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ou éventuellement sous la forme

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

avec a, x_1 et x_2 des nombres réels et a est non nul. Dans le premier cas on parlera de *forme développée*, et dans le second de *forme factorisée*.

Remarque

Pour vérifier qu'une forme factorisée et qu'une forme développée d'un polynôme du second degré sont identiques, il suffit d'appliquer la règle de la double distributivité.

Exemple

« Montrer que l'on peut réécrire la fonction $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ sous la forme $f(x) = 3\,(x-3)\,(x-2)$. »

Réponse :

$$\begin{aligned} 3\,(x-3)\,(x-2) &= 3\left(x^2 - 2x - 3x + 6\right) \\ &= 3\left(x^2 - 5x + 6\right) \\ &= 3x^2 - 15x + 18 \end{aligned}$$

Racines d'un polynôme du 2nd degré

On appelle racine d'un polynôme du second degré les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

.

Dans le cas où le polynôme est donnée sous forme factorisée

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

les racines seront x_1 et x_2.

Exemple

« Quelles sont les racines du polynôme $-4(x-5)(x+1)$. »

Réponse : Les racines sont -1 et 5.

Vocabulaire

L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **trinôme du second degré**.

Remarque

Tous les **trinômes du second degré** ne sont pas forcément factorisables.
Il se peut aussi que la forme factorisée soit $a(x - x_1)^2$. Dans ce cas la seule racine est x_1.

Exemple

« Quelle est la racine de $-4(x-1)^2$? »

Réponse : La racine est 1.

Remarque

Pour vérifier qu'un nombre est racine d'un polynôme, il suffit de substituer celui-ci dans l'expression polynomiale et vérifier que le résultat obtenu est zéro.

Exemple

« 2 est-il racine de $x^2 - 3x + 7$? »

Réponse : On substitue x par 2 dans l'expression donnée :

$$\begin{aligned} 2^2 - 3 \times 2 + 7 &= 4 - 6 + 7 \\ &= 5 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc 2 n'est pas racine du polynôme $x^2 - 3x + 7$.

Trouver la forme factorisée à partir d'une racine

Si une racine nous est donnée, on peut trouver la seconde par identification.

Exemple : Factoriser $-4x^2 + 16x + 20$ sachant que -1 est une racine.

On sait d'après l'énoncé que $-4x^2 + 16x + 20 = -4(x+1)(x-\alpha)$ où α est la 2nde racine que nous cherchons.

Si nous développons $-4(x+1)(x-\alpha)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} -4(x+1)(x-\alpha) &= -4(x^2 - \alpha x + x - \alpha) \\ &= -4(x^2 + x(1-\alpha) - \alpha) \\ &= -4x^2 - 4x(1-\alpha) - 4\alpha \end{aligned}$$

Par identification, c'est-à-dire en regardant les coefficients, on s'aperçoit que :

$$\begin{cases} -4(1-\alpha) = 16 \\ 4\alpha = -20 \end{cases}$$

On peut prendre l'équation que l'on veut pour trouver α : la seconde par exemple nous donne $\alpha = \dfrac{20}{-4} = -5$.

On en déduit que la seconde racine est -5.

Représentation graphique

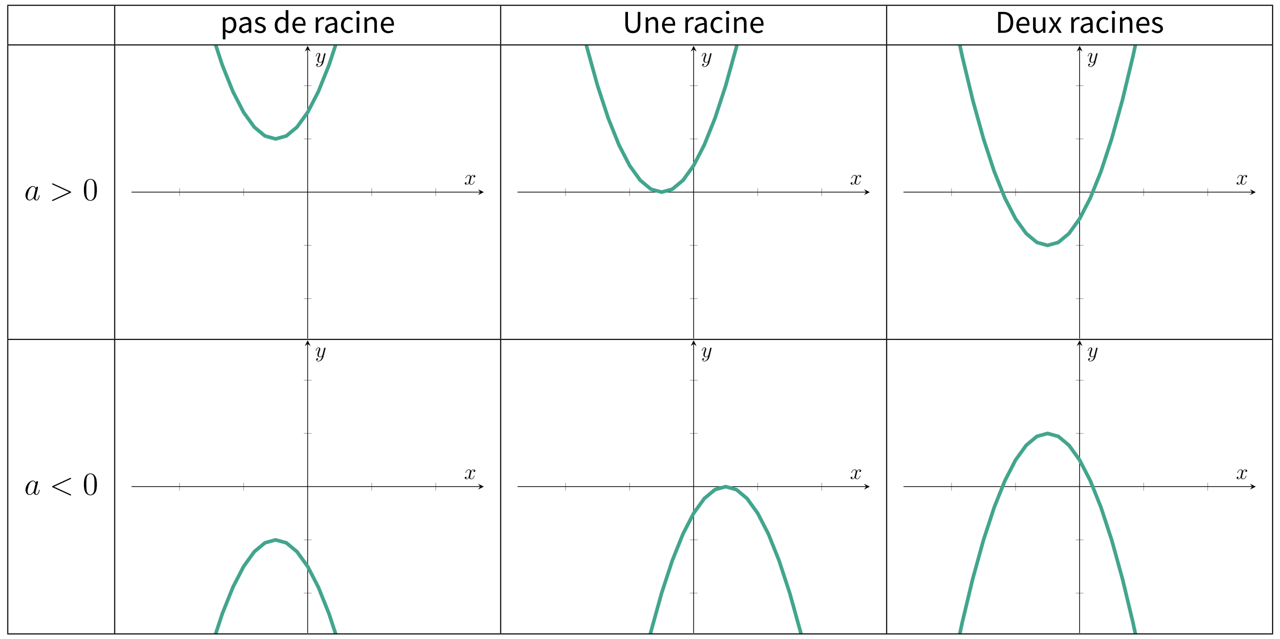
La fonction parabolique

On considère la fonction polynôme du 2nd degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

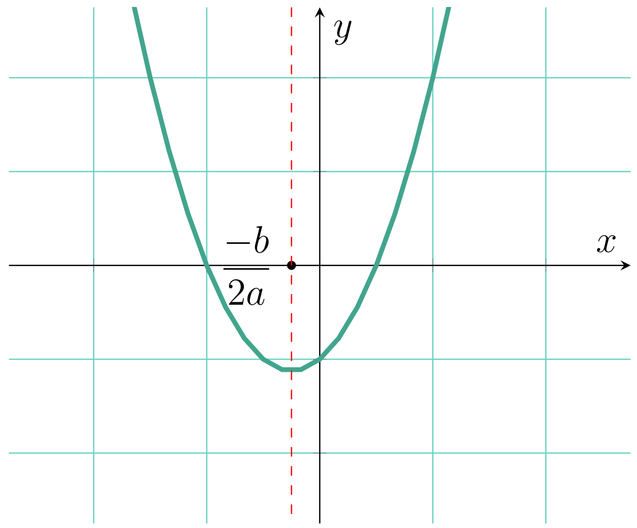
On appelle la représentation graphique d'une fonction polynôme du 2nd degré une **parabole**.

— Le sens de variation de f dépend uniquement du signe de a.
— Le signe de f dépend du signe de a ainsi que des racines de f.



Sommet et axe de symétrie

La fonction polynôme du 2nd degré admet pour **axe de symétrie** $x = -\dfrac{b}{2a}$ (forme développée) ou $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (forme factorisée).



Son sommet a pour coordonnées $\left(\dfrac{-b}{2a} ; f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$

Tableaux de variations

— Si $a > 0$, la fonction f a pour tableau :

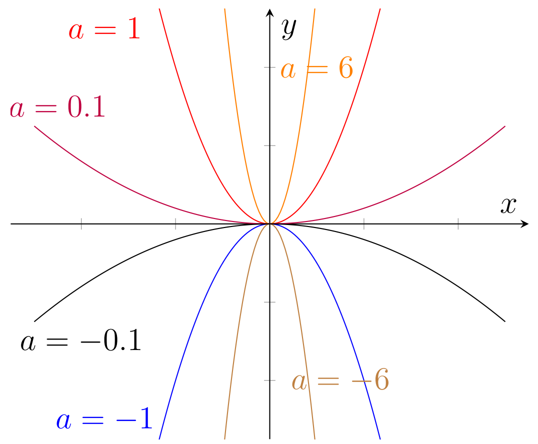
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

— Si $a < 0$, la fonction f a pour tableau :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Cas particulier $F(X) = AX^2$

Si $a < 0$ la parabole sera inversée par rapport à la fonction carré. De plus, plus a sera grand, en valeur absolue, moins la courbe sera « étendue ».

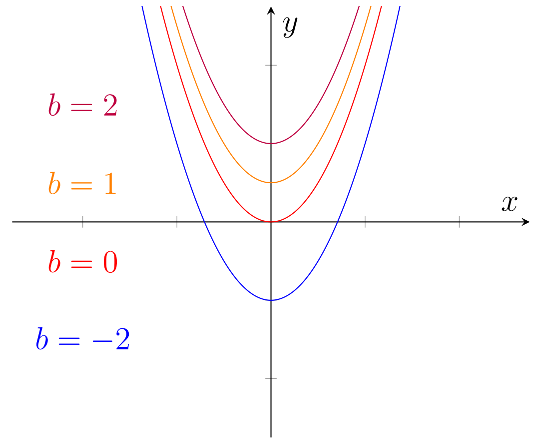


Pour chacune de ces fonctions le sommet est à l'origine.

Cas particulier $F(X) = AX^2 + B$

La fonction $f(x) = ax^2 + b$ s'obtient par translation de b unités suivant l'axe y de la fonction $f(x) = ax^2$.

Pour chacune de ces fonctions le sommet est sur l'axe des ordonnées.



Résolution d'une inéquation du 2nd degré

Tableau de signes

Soit f une fonction polynôme de second degré, le tableau de signes de f dépendra du nombre de racines et du signe de a.

Si f a deux racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si f a une racine :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si f n'a pas de racine :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Exemple

« Donner le tableau de signes de $f(x) = -4(x-2)(x+3)$. »

Réponse :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Application à la résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du second degré, on ramènera celle-ci à une comparaison entre $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ et 0. On utilisera alors du tableau de signes de $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ pour trouver les solutions.

Exemple

« Résoudre $-4(x-2)(x+3) \leq 0$. »

Réponse : Nous avons donné le tableau de signes de $f(x) = -4(x-2)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau, $-4(x-2)(x+3)$ est inférieur ou égal à 0 si $x \in]-\infty\,;\,-3\,] \cup [\,2\,;\,+\infty\,[$.

Fonction polynôme de degré 3

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 3, toute fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

où a, b, c et d sont des réels et a **est non nul**.

Exemple

La fonction $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3$ est une fonction polynôme de degré 3.

Forme développée et forme factorisée

Tout comme pour les fonctions polynômes de degré 2, une fonction polynôme de degré 3 peut éventuellement s'écrire sous forme factorisée :

$$f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$$

avec a, x_1, x_2 et x_3 des nombres réels et a est non nul.

Remarque

Pour vérifier qu'une forme factorisée et qu'une forme développée d'un polynôme de degré 3 sont identiques, il faudra ici aussi appliquer la règle de la distributivité.

Exemple

Montrer que l'on peut réécrire la fonction $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 20x - 16$ sous la forme :

$$f(x) = 2\,(x-4)\,(x+2)\,(x+1)$$

.

Réponse :

$$\begin{aligned}
2(x-4)(x+2)(x+1) &= 2(x-4)(x^2+x+2x+2)\\
&= 2(x-4)(x^2+3x+2)\\
&= 2(x^3+3x^2+2x-4x^2-12x-8)\\
&= 2(x^3-x^2-10x-8)\\
&= 2x^3-2x^2-20x-16
\end{aligned}$$

Remarque

Un polynôme de degré 3 n'a pas forcément une forme factorisée.

Racines d'un polynôme de degré 3

On appelle racine d'un polynôme de degré 3 les solutions de l'équation : $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Dans le cas où le polynôme est donnée sous forme factorisée $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$ les racines seront x_1, x_2 et x_3.

Tableau de signes de $A\,(X-X_1)\,(X-X_2)\,(X-X_3)$

Dans le cas où la fonction polynôme de degré 3 a trois racines, son tableau de signes sera :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Application à la résolution des inéquations de degré 3

En utilisant le même principe que pour les inéquations de degré 2, il nous est possible de résoudre des équations de degré 3 en utilisant le tableau de signes associé, si le polynôme est factorisable.

Exemple

« Résoudre $4(x-1)(x+7)(x-3) > 0$. »

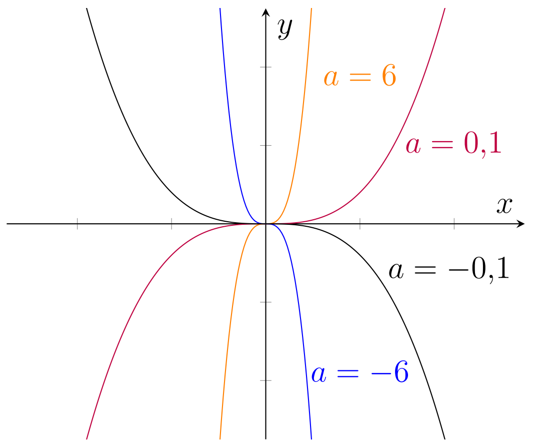
Réponse : Le tableau de signes de $f(x) = 4(x-1)(x+7)(x-3)$ est donné par :

x	$-\infty$		-7		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Et par lecture du tableau, on en déduit que $S =]-7\,;\,1[\cup]3\,;\,+\infty[$

Représentation graphique des fonctions AX^3 et $AX^3 + B$

Pour les fonctions de la forme ax^3, plus a sera important en valeur absolue, plus la courbe sera « proche » de l'axe des ordonnées. Le signe de a modifiera quant à lui le sens de variation.



Pour ce qui est des fonctions de la forme $ax^3 + b$, la courbe ax^3 sera translaté de b unités vers le haut ou vers le bas en fonction du signe de b (tout comme pour les fonctions $ax^2 + b$).

Résolution d'équations du type $X^N = C$

Résolution de l'équation $X^2 = A$

Les solutions de l'équation $x^2 = a$, où a est un nombre réel positif, sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple

« Résoudre $x^2 = 16$. »

Réponse : Les solutions sont $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

Résolution d'une équation $X^3 = C$

Soit c un réel positif, alors l'équation

$$x^3 = c$$

admet une unique solution qui est :

$$\boxed{x = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}}$$

Exemple

« Résoudre $x^3 = 27$. »

Réponse : On a $x = \sqrt[3]{27} = 3$

03. EXERCICES

Image et antécédent

01

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x - 5 = 0$
2. $7x + 18 = -4x + 2$
3. $-5 + 3t = 2t + 12$
4. $18y - 1 = -2y + 5$

02

Calculer l'image de 4 puis de 7 par la fonction $f(x) = 3x - 2$.

03

Calculer l'image de 3 puis de -2 par la fonction $g(x) = x^2 + 2x - 8$.

04

Calculer l'antécédent de 7 pour la fonction $h(x) = 3x + 16$.

05

Calculer l'antécédent de 81 pour la fonction $h(x) = 10x - 19$.

06

Calculer l'image de -4 puis de -1 par la fonction $g(x) = -x^2 - 5x - 12$.

Courbe représentative

07

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant pour x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ avec un pas de 1 :

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$.

08

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant pour x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ avec un pas de 1 :

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$						

2. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.

09

Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = 4x - 3$ sur $[0\ ;\ 8]$.

10

Tracer la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 - 5$ sur $[-4\ ;\ 4]$.

11

Tracer la courbe représentative de la fonction $h(x) = -x^2 + 5x - 3$ sur $[0\ ;\ 5]$.

12

Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x - 6$?

1. $A(5; 6)$
2. $B(7; 15)$
3. $C(-2; 0)$
4. $D(-2; 1)$

13

Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 - 3x + 2$?

1. $A(0; 2)$
2. $B(-1; 6)$
3. $C(2; 0)$
4. $A(1; 0)$

14

Un point $A(x; y)$ est sur l'axe des abscisses. Que peut-on dire de l'une de ses coordonnées ?

15

1. Parmi les points suivants :

$$A(-2\ ;\ 0) \quad B(6\ ;\ 0) \quad C(2\ ;\ 0) \quad D(12\ ;\ 0)$$
$$E(11{,}5\ ;\ 0) \quad F(9{,}5\ ;\ 2{,}3) \quad G(11{,}5\ ;\ 6)$$

quels sont ceux situés sur l'axe des abscisses et sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 12$?

2. Pourquoi n'était-il pas nécessaire de vérifier que D et E appartenaient à cette courbe ?

16

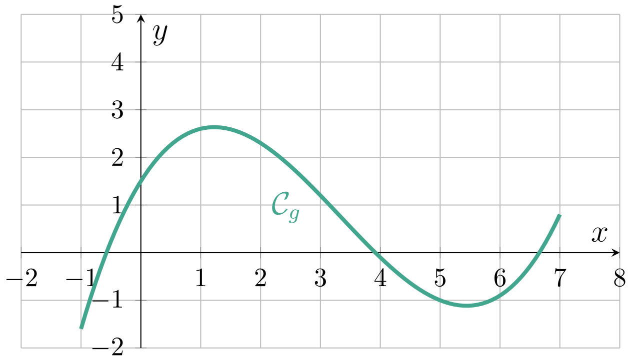
Parmi les points suivants :

$$A(3\ ;\ 0) \quad B(2\ ;\ 0) \quad C(-2\ ;\ 0) \quad D(-3\ ;\ 0) \quad E(5\ ;\ 0)$$

quels sont ceux situés situés sur l'axe des abscisses et sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$?

17

Soit g la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessous :



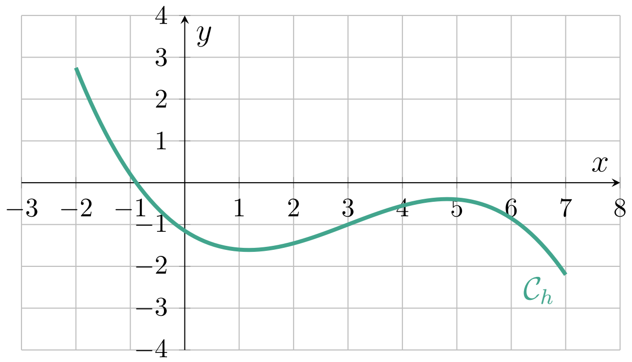
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. (a) Soit A le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 5 ; donner son ordonnée puis recopier et compléter l'égalité :

$$g(5) = \ldots$$

   (b) $B(0\ ;\ 1{,}5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_g$? Traduire cela par une égalité.
3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

18

Soit h la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_h$ ci-dessous :



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. (a) Soit A le point de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse 3 ; donner son ordonnée puis recopier et compléter l'égalité :

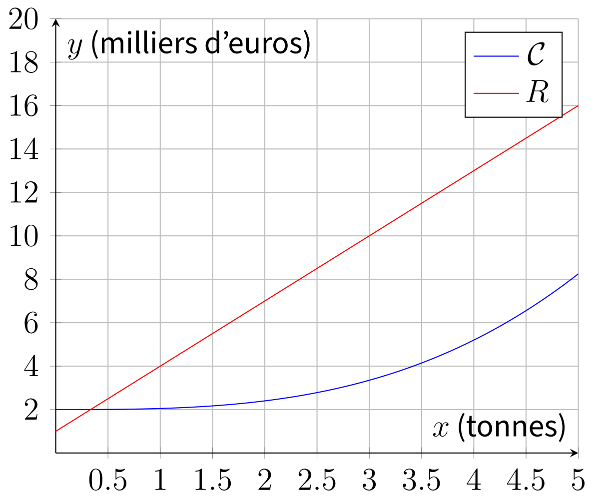
   $$h(3) = \dots$$

   (b) $B(2\,;\,-0{,}5)$ appartient-il à $\mathcal{C}_h$? Traduire cela par une égalité.
3. Donner le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Représentations d'une fonction

19

Une entreprise de production de jus de fruits a une capacité de production maximale de 5 tonnes de jus par jour. Le coût total de production en milliers d'euros pour produire x tonnes de jus est représenté par la courbe $\mathcal{C}$. Les revenus en milliers d'euros pour la vente de x tonnes de jus sont donnés par la droite R.

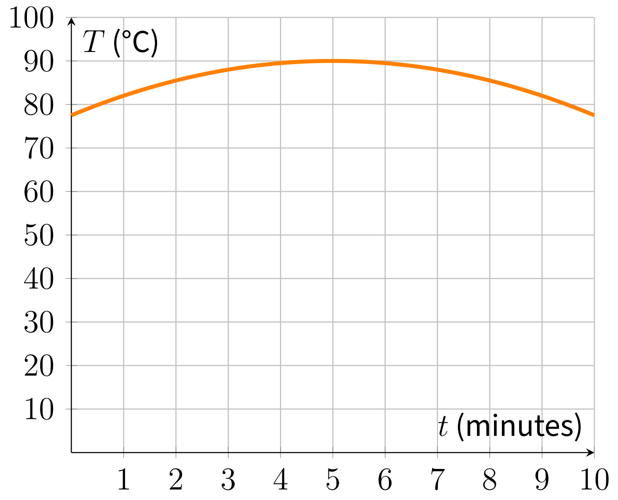


Répondez aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. Déterminer le coût de production en euros lorsque la production est nulle.
2. Calculer les revenus si l'entreprise vend 1,5 tonne de jus. Est-ce que l'entreprise réalise un bénéfice dans ce cas – le bénéfice est calculé comme la différence entre les revenus et le coût de production ? Justifier votre réponse.
3. Pour quelles quantités produites et vendues le bénéfice est-il nul ? Est-il positif ?
4. Déterminer pour quelle(s) quantité(s) vendue(s) le bénéfice est maximal et donner la valeur de ce bénéfice.

20

La température d'un réacteur chimique est modélisée par la fonction T qui, au temps écoulé t en minutes (min), associe la température $T(t)$ en degrés Celsius (°C). La fonction T est représentée par la courbe ci-dessous.

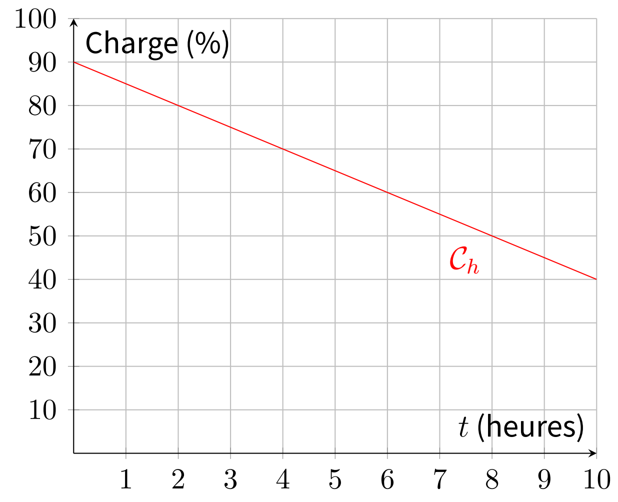


Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique :

1. Quelle est la température du réacteur, à 1°C près, au bout de 3 minutes ?
2. Au bout de combien de temps la température du réacteur est-elle maximale ? Estimer cette température maximale à 1°C près.
3. On admet que le réacteur fonctionne de manière optimale si la température est supérieure à 40°C. Au bout de combien de temps faudrait-il ajuster la température pour maintenir l'optimisation ?

21

Pour évaluer la capacité d'une batterie, on étudie l'évolution de sa charge après débranchement du chargeur. On admet que la fonction h, donnée par sa courbe ci-dessous, représente la charge de la batterie, exprimée en pourcentage, en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé à partir du débranchement, pour t variant de 0 à 10 heures.



1. (a) Quelle est la charge de la batterie immédiatement après débranchement ?

   (b) Quelle est la charge de la batterie deux heures après le débranchement ?
2. Résoudre graphiquement l'équation $h(t) = 50$. Interpréter ce résultat (à la demi-heure près) dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer graphiquement, à une demi-heure près, le temps nécessaire pour que la charge passe de 70% à 40%.

22

Sur une ligne droite, la distance de freinage, en mètres, d'un train est modélisée par une fonction g définie par :

$$g(v) = \frac{v^2}{150}$$

où v est la vitesse du train en km.h^{-1}.

1. Quelle est la distance d'arrêt d'un train roulant à 100 km.h^{-1} ?
2. La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse ?

23

La durée de vie en heures d'une ampoule est modélisée par une fonction f définie par :

$$f(v) = \frac{8000}{v}$$

où v est la tension appliquée en volts.

1. Quelle est la durée de vie d'une ampoule fonctionnant sous une tension de 220 volts ?
2. La durée de vie de l'ampoule est-elle proportionnelle à la tension ?

24

Sur une piste de décollage, la distance nécessaire pour qu'un avion atteigne la vitesse de décollage, en mètres, est modélisée par une fonction d définie par :

$$d(v) = \frac{v^2}{200}$$

où v est la vitesse de l'avion en km.h^{-1}.

1. Quelle est la distance nécessaire pour qu'un avion atteigne une vitesse de 200 km.h^{-1} ?
2. La distance de décollage est-elle proportionnelle à la vitesse ?

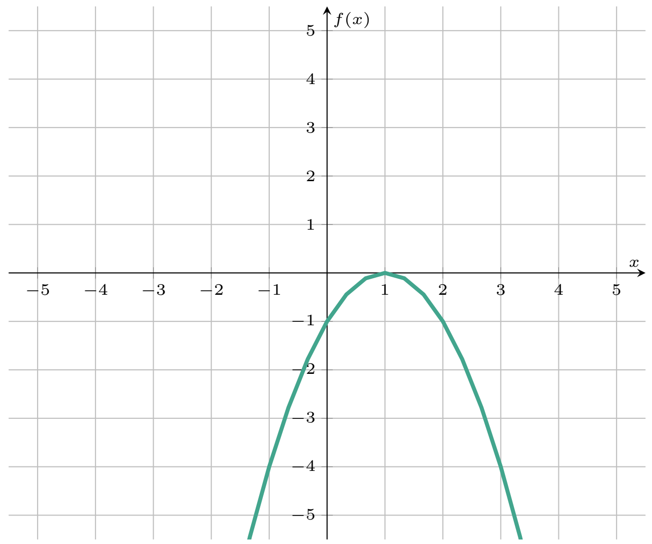
Résolution graphique d'une équation

25

Résoudre

$$-x^2 + 2x - 1 = -1$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ci-dessous.

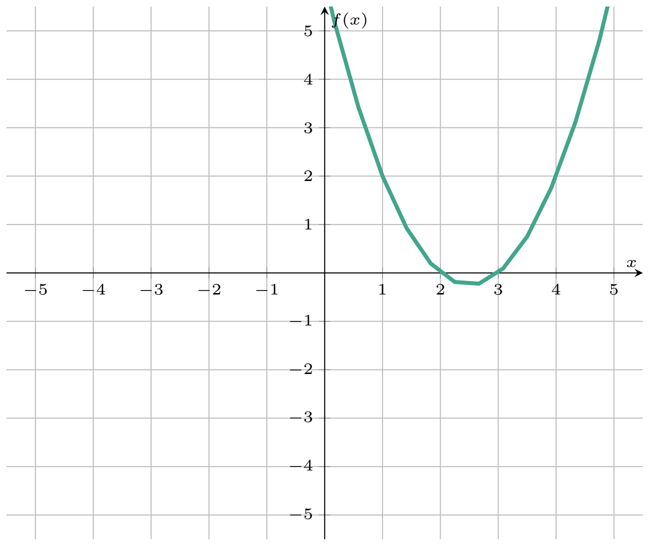


26

Résoudre

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ci-dessous.

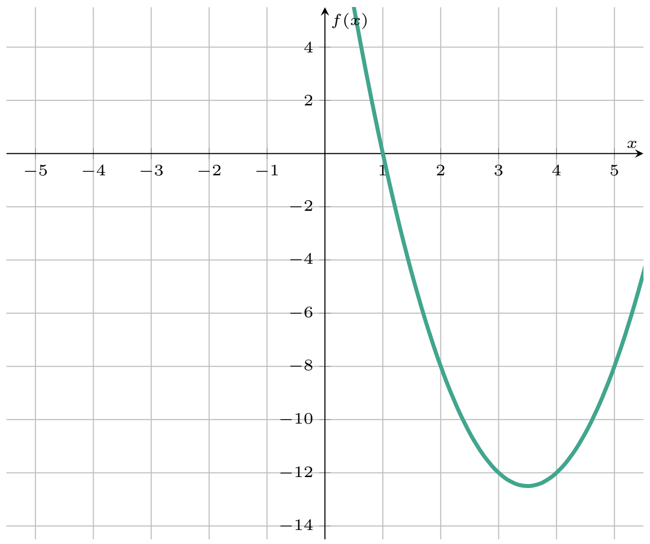


27

Résoudre

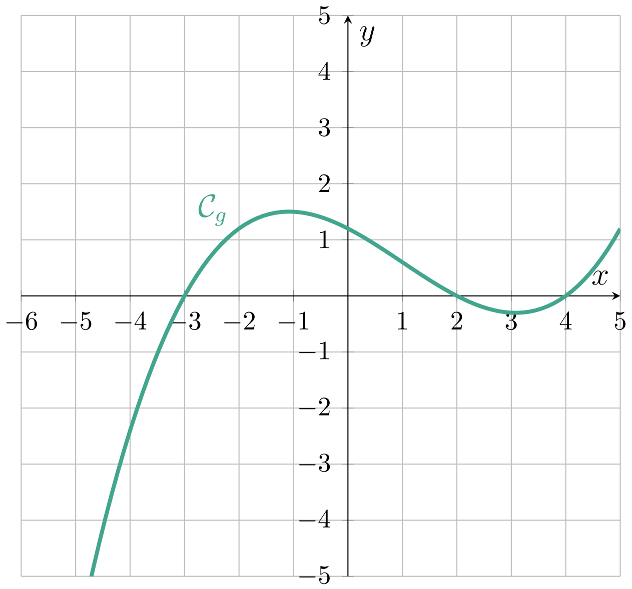
$$2x^2 - 14x + 12 = -8$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x^2 - 14x + 12$ ci-dessous.



28

On considère une fonction g définie sur $[-6\ ;\ 5]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Résoudre graphiquement les équations suivantes :

1. $g(x) = 0$
2. $g(x) = -3$
3. $g(x) = 2$

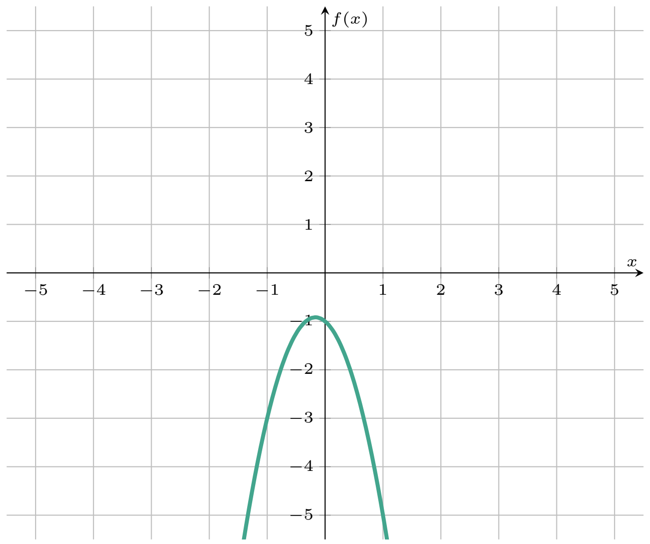
Résolution graphique d'inéquations

29

Résoudre

$$-3x^2 - x - 1 \geq -3$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x^2 - x - 1$ ci-dessous.

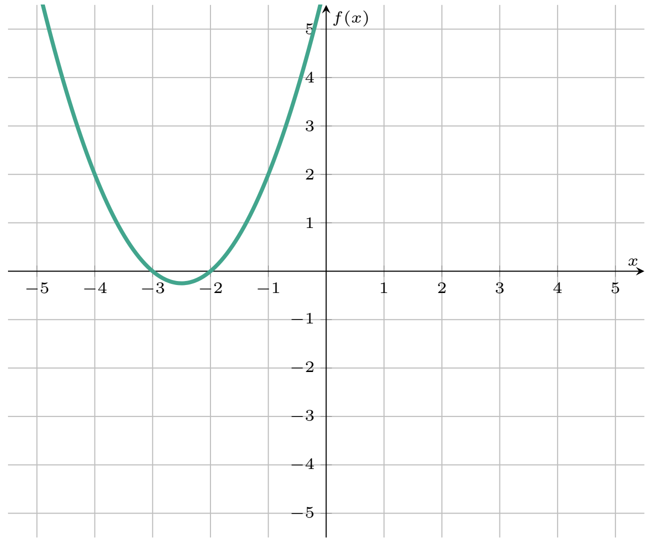


30

Résoudre

$$x^2 + 5x + 6 \geq 2$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 + 5x + 6$ ci-dessous.

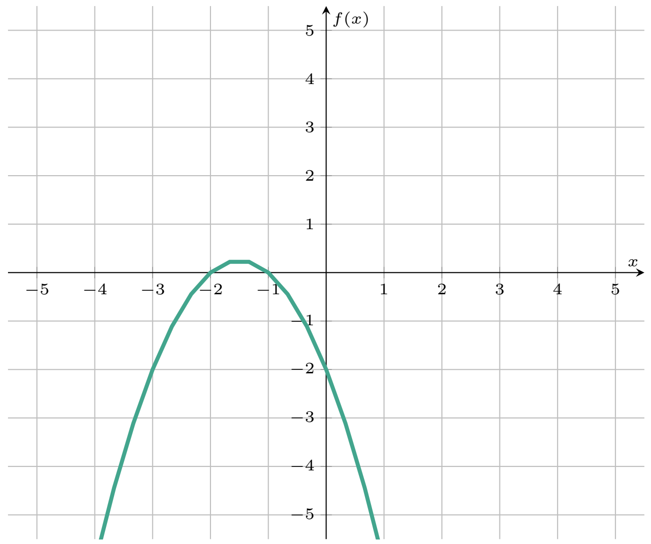


31

Résoudre

$$-x^2 - 3x - 2 > -2$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2 - 3x - 2$ ci-dessous.

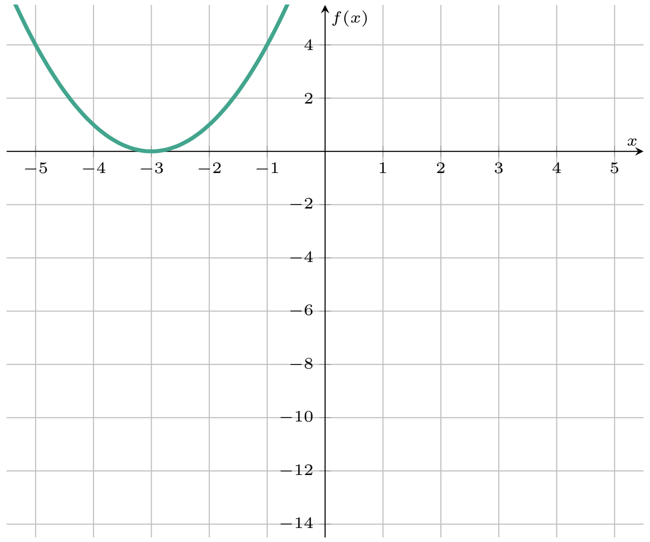


32

Résoudre

$$x^2 + 6x + 9 < 4$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 9$ ci-dessous.

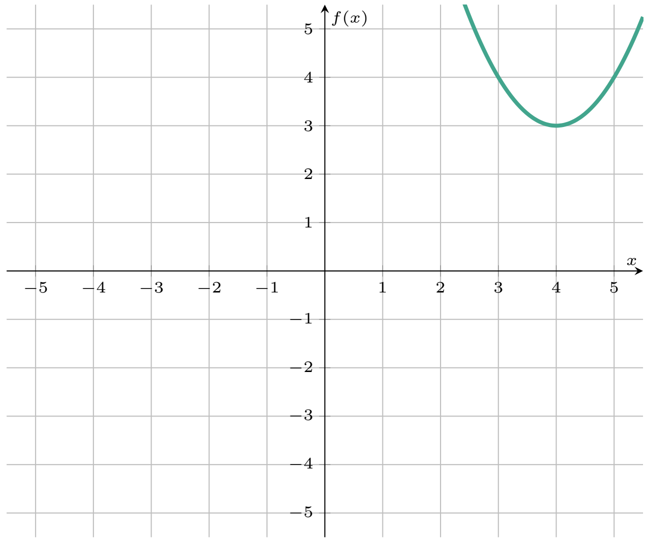


33

Résoudre

$$(x-4)^2 + 3 > 4$$

à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = (x-4)^2 + 3$ ci-dessous.



Résolution d'équation du 2nd degré

34

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.
2. En déduire les solutions de l'équation.

35

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(x + 3)$.
2. En déduire les solutions de l'équation.

36

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 8x + 12 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x + 2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation.

37

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$.
2. En déduire les solutions de l'équation.

38

On cherche à résoudre l'équation

$$2x^2 + 6x + 4 = 0.$$

1. Montrer que $2x^2 + 6x + 4 = 2(x + 1)(x + 2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

39

On cherche à résoudre l'équation

$$2x^2 - 14x = -24.$$

1. Montrer que $2x^2 - 14x + 24 = 2(x - 3)(x - 4)$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

40

On cherche à résoudre l'équation

$$4x^2 + 28x = -40.$$

1. Montrer que $4x^2 + 28x + 40 = 4(x + 2)(x + 5)$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

41

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

42

On cherche à résoudre l'équation

$$-x^2 - 3x - 2 = 0.$$

1. Montrer que $-x^2 - 3x - 2 = -(x + 2)(x + 1)$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

43

On cherche à résoudre l'équation

$$x^2 + 6x + 9 = 0.$$

1. Montrer que $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

44

On cherche à résoudre l'équation

$$7x = -10 - x^2.$$

1. Montrer que $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$.
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

45

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $x^2 - 9 = 0$
2. $(x - 3)(x - 1) = 0$
3. $x^2 - x = 0$
4. $(x + 2)^2 - 16 = 0$

46

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $(x - 6)^2 = 25$
2. $3x^2 + 6x = 0$
3. $x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $(3x + 7)^2 = -15$

Racines d'un polynôme du 2nd degré

47

Trouver la seconde solution dans chacun des cas suivants :

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$ sachant qu'une solution est 1.
2. $x^2 + 7x + 12 = 0$ sachant qu'une solution est 4.
3. $2x^2 + 10x + 12 = 0$ sachant qu'une solution est -2.
4. $3x^2 + 24x + 36 = 0$ sachant qu'une solution est -6.

48

Trouver la seconde solution dans chacun des cas suivants :

1. $x^2 - 5x - 14 = 0$ sachant qu'une solution est -2.
2. $x^2 - 8x = 20$ sachant qu'une solution est 10.
3. $2x^2 = -14x - 24$ sachant qu'une solution est -3.
4. $3x^2 = 27x + 108$ sachant qu'une solution est 12.

49

Trouver les deux solutions dans chacun des cas suivants :

1. $x^2 - 8x + 7 = 0$
2. $x^2 + 7x = -6$
3. $x^2 - 2x - 3 = 0$

Résolution d'inéquation du 2nd degré

50

On cherche à résoudre l'inéquation

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

1. Montrer que $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

51

On cherche à résoudre l'inéquation

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0.$$

1. Montrer que $-x^2 + 6x - 8 = -(x - 2)(x - 4)$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation.

52

On cherche à résoudre l'inéquation

$$3x^2 - 6x - 105 \geq 0.$$

1. On sait que 7 est une racine de $3x^2 - 6x - 105$. En déduire la seconde racine.
2. Donner $3x^2 - 6x - 105$ sous forme factorisée.
3. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

53

On cherche à résoudre l'inéquation

$$-3x^2 - 2x \geq -8.$$

1. Montrer que
$-3x^2 - 2x + 8 = -3(x + 2)(x - \frac{4}{3})$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

54

On cherche à résoudre l'inéquation

$$4x^2 + 4x \leq 120.$$

1. On sait que 5 est une racine de $4x^2 + 4x - 120$. Trouver la seconde racine.

2. Ecrire $4x^2+4x-120$ sous forme factorisée.
3. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

55

On cherche à résoudre l'inéquation

$$x^2-4x+4 \geq 0.$$

1. Montrer que $x^2-4x+4=(x-2)^2$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

56

On cherche à résoudre l'inéquation

$$-3x^2 \geq 42x+72$$

1. Montrer que -12 est racine de $-3x^2-42x-72$.
2. Trouver la seconde racine de $-3x^2-42x-72$.
3. En déduire une forme factorisée de $-3x^2-42x-72$.
4. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

57

On cherche à résoudre l'inéquation

$$2x^2+16x \geq -24.$$

1. Montrer que -6 est racine de $2x^2+16x+24$.
2. Trouver la seconde racine de $2x^2+16x+24$.
3. En déduire une forme factorisée de $2x^2+16x+24$.
4. En déduire les solutions de l'inéquation ci-dessus.

Représentation graphique

58

Pour chaque fonction, indiquer le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe représentative, puis les points d'intersection de celle-ci avec l'axe des abscisses, s'ils existent.

1. $f(x)=4x^2+12$
2. $g(x)=-3x^2+9$
3. $h(x)=\dfrac{1}{4}x^2-8$
4. $k(x)=x^2-9$

59

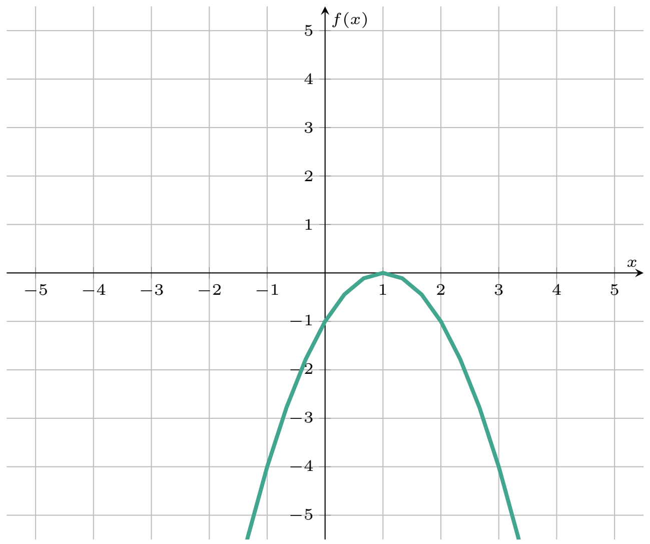
Pour chaque fonction, indiquer le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe représentative, puis les points d'intersection de celle-ci avec l'axe des abscisses, s'ils existent.

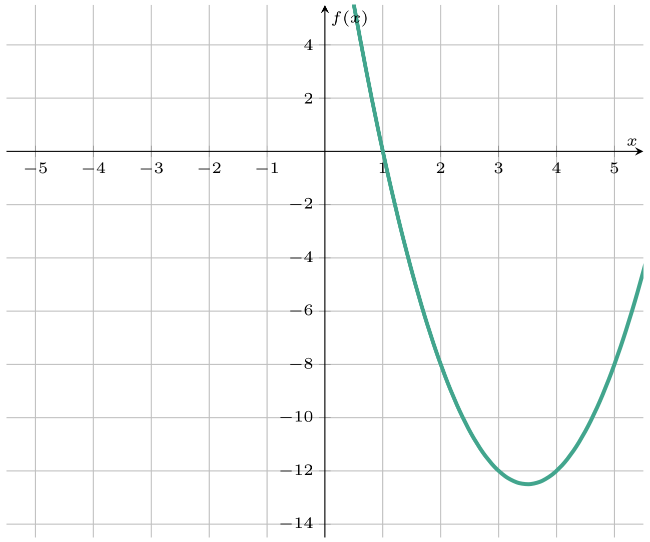
1. $f(x)=3x^2-12$
2. $g(x)=-4x^2+16$
3. $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2$
4. $k(x)=x^2-25$
5. $l(x)=x^2-4x+3$
6. $m(x)=2x^2-16x+24$

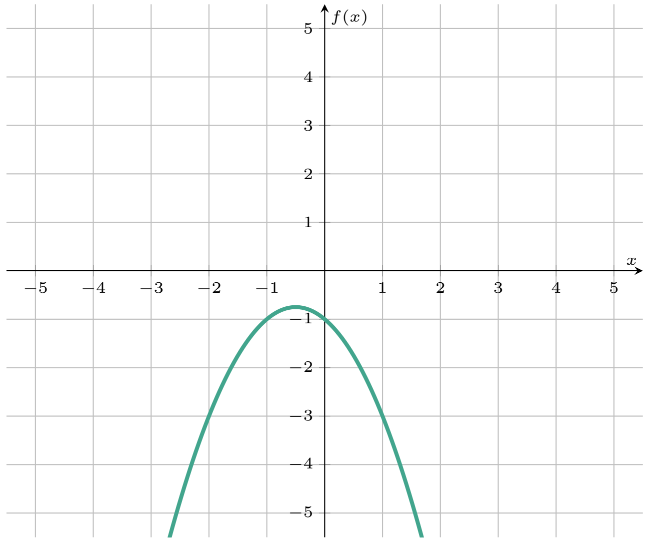
60

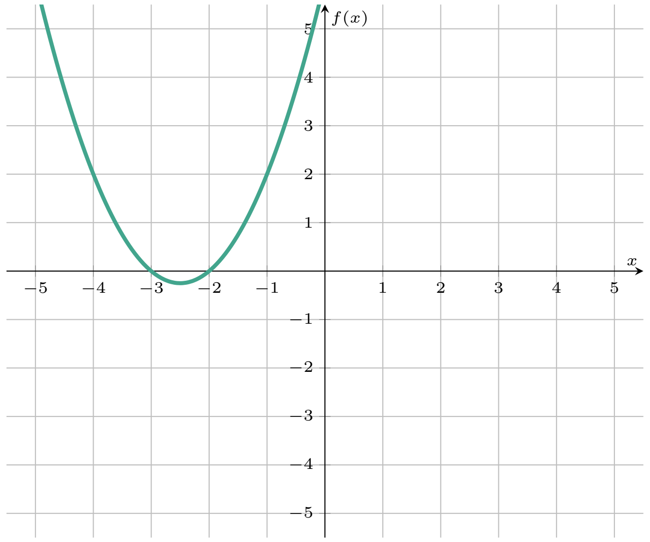
Pour chacune des figures suivantes :

1. indiquer le signe de a, la valeur de $-\dfrac{b}{2a}$ et les racines des polynômes de second degré associés aux fonctions représentées ;
2. en déduire une écriture de la fonction sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ ou $a(x-x_1)^2$ lorsque cela est possible.





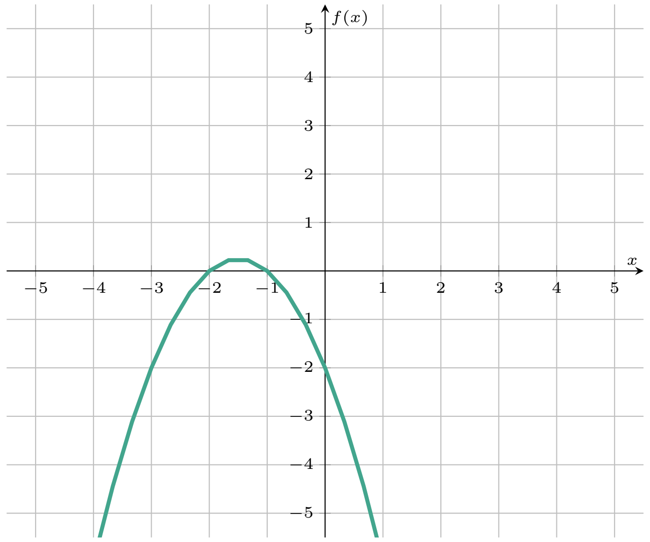


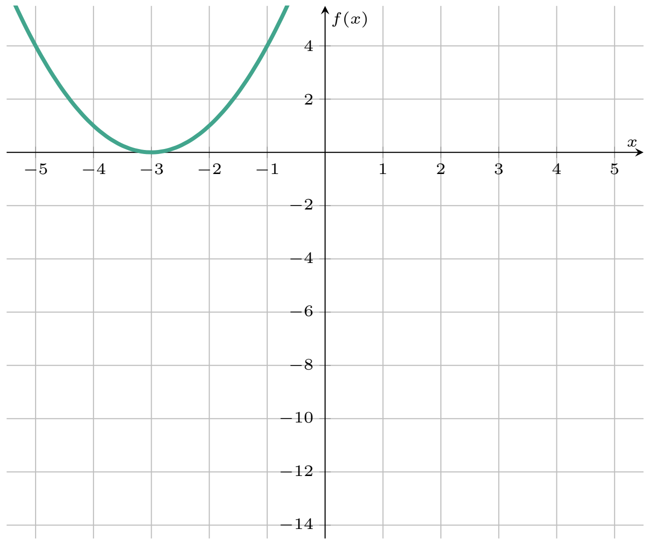


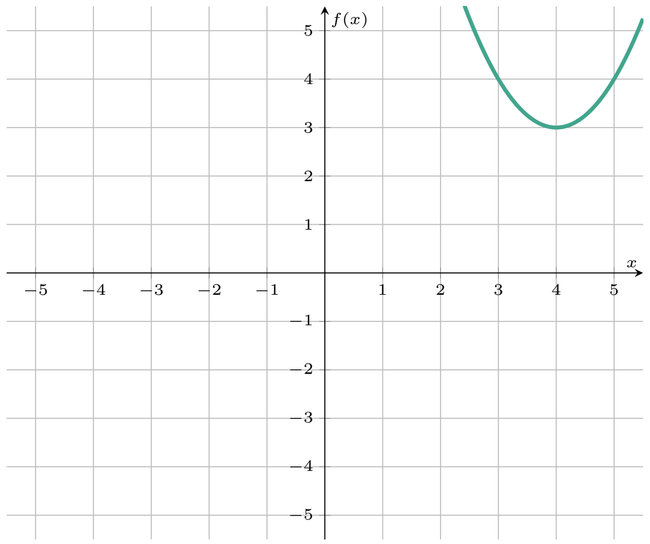
61

Pour chacune des figures suivantes :

1. indiquer le signe de a et les racines des polynômes associés aux fonctions représentées.
2. Lorsque cela est possible, en déduire une écriture de la fonction sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ ou $a(x-x_1)^2$.







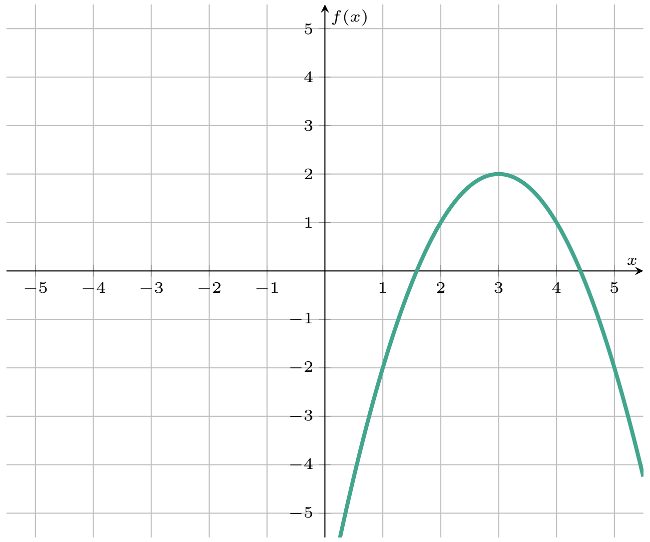


Tableau de variation et de signes

62

Déterminer le signe de chacune des fonctions polynomiales de degré 2 ci-dessous, en fonction des valeurs de x.

1. $f(x) = 4(x-2)(x+5)$
2. $g(t) = -2(t+3)(t-7)$

63

Déterminer le signe de chacune des fonctions polynomiales de degré 2 ci-dessous, en fonction des valeurs de x.

1. $h(x) = 2(4x-24)(3x+9)$
2. $k(t) = -5(t+1)(5t-25)$

64

Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2(x-3)(x-7)$
2. $g(x) = -4(x-5)(x-8)$
3. $h(x) = -8(x+4)(x-12)$
4. $k(x) = 3(x+1)(x+9)$

65

Donner le tableau de variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x-2)(x-5)$
2. $g(x) = -5(x-1)(x-3)$
3. $h(x) = 4(x+3)(x-10)$
4. $k(x) = 7(x+2)(x+5)$

Propriétés

66

Pour chacun des cas ci-dessous, indiquer quelle transformation permet de passer de la courbe représentative de la fonction f à celle de g.

1. f et g sont définies sur $[-2\,;\,4]$ par :
$$f(x) = 2x^2 \text{ et } g(x) = 2x^2 - 5.$$
2. f et g sont définies sur $[-6\,;\,6]$ par :
$$f(x) = -3x^2 \quad et \quad g(x) = -3x^2 + 10.$$

67

Pour chacun des cas ci-dessous, indiquer quelle transformation permet de passer de la courbe représentative de la fonction f à celle de g.

1. f et g sont définies sur $[-10\,;\,10]$ par :
$$f(x) = -5x^2 + 10 \text{ et } g(x) = -5x^2 + 5.$$
2. f et g sont définies sur $[-1\,;\,9]$ par :
$$f(x) = 8x^2 + 3 \text{ et } g(x) = 8x^2 - 2.$$

68

Indiquer les transformations géométriques permettant de passer de la courbe représentative de la fonction r à celle de la fonction s.

1. $r(x) = x^2$ et $s(x) = x^2 - 4$
2. $r(x) = 2x^2$ et $s(x) = -2x^2$
3. $r(x) = -x^2 + 3$ et $s(x) = -x^2 - 2$
4. $r(x) = 3x^2 - 5$ et et $s(x) = 3x^2 + 1$

69

Donner l'expression de la fonction f dont on obtient une représentation graphique par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ appliquée à la courbe représentative de la fonction $f(x) = -5x^2$.

70

Donner l'expression de la fonction g dont on obtient une représentation graphique par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ appliquée à la courbe représentative de la fonction $g(x) = 4x^2$.

71

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = at^2$. Déterminer la valeur de a sachant que $f(3) = 27$.

72

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = bt^2$. Déterminer la valeur de b sachant que $g(4) = 15$.

73

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = at^2 + b$ telle que $h(1) = 4$ et $h(-2) = -8$. Déterminer les valeurs de a et b.

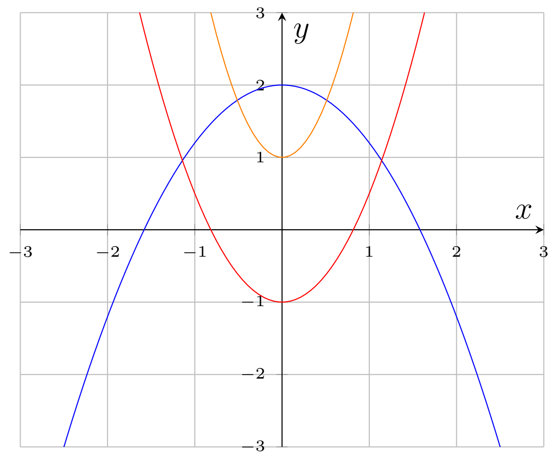
74

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = ax^2 + b$. Déterminer les valeurs de a et b sachant que $k(1) = 2$ et $k(-3) = 10$.

75

Associer chacune des fonctions ci-dessous, définies sur $\mathbb{R}$, à sa courbe représentative.

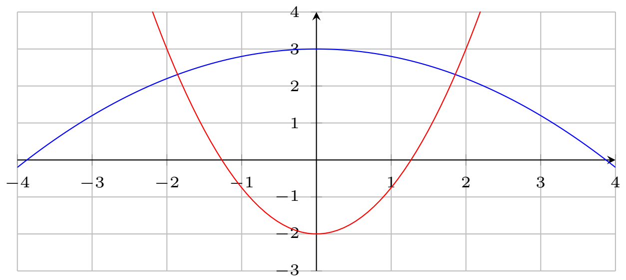
1. $f(x) = -0{,}8x^2 + 2$
2. $g(x) = 1{,}5x^2 - 1$
3. $h(x) = 3x^2 + 1$



76

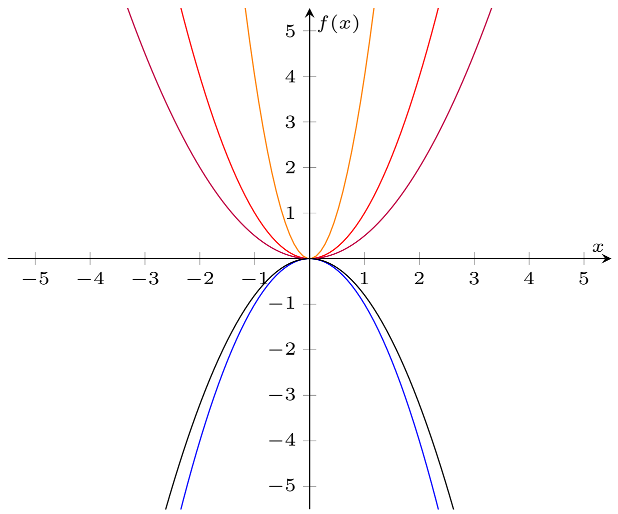
Associer chacune des fonctions ci-dessous, définies sur $\mathbb{R}$, à sa courbe représentative.

1. $f(x) = -0{,}2x^2 + 3$
2. $g(x) = 1{,}25x^2 - 2$



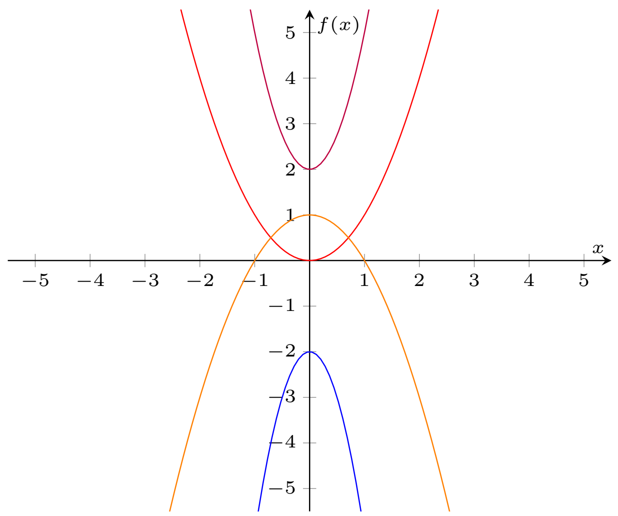
77

Classer chacune des paraboles par ordre croissant du coefficient a.



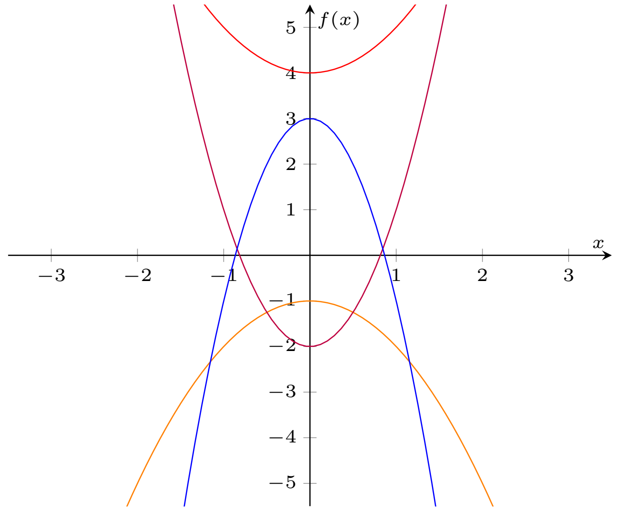
78

Chacune des fonctions ci-dessous est de la forme $ax^2 + b$. Donner le coefficient b pour chacune.



79

Chacune des fonctions ci-dessous est de la forme $ax^2 + b$. Donner le coefficient b pour chacune.



Résolution d'équations de degré 3

80

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3 = 8$
2. $x^3 = 125$
3. $x^3 - 64 = 0$
4. $x^3 - 12 = 0$

81

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^3 = 27$
2. $x^3 = 216$
3. $x^3 - 1 = 0$
4. $x^3 - 44 = 0$

82

On cherche à résoudre l'équation

$$4x^3 - 4x^2 - 36x + 36 = 0.$$

1. Montrer que :
$$4x^3 - 4x^2 - 36x + 36 = 4(x-3)(x-1)(x+3).$$
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

83

On cherche à résoudre l'équation

$$2x^3 - 42x + 40 = 0.$$

1. Montrer que :
$$2x^3 - 42x + 40 = 2(x-4)(x-1)(x+5).$$
2. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

84

On cherche à résoudre l'équation

$$x^3 - 9x^2 + 2x + 48 = 0.$$

1. Montrer que -2, 3 et 8 sont solutions de $x^3 - 9x^2 + 2x + 48 = 0$
2. Donner $x^3 - 9x^2 + 2x + 48$ sous forme factorisée.
3. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

85

On cherche à résoudre l'inéquation

$$5x^3 - 10x^2 - 5x + 10 = 0.$$

1. Montrer que -1, 1 et 2 sont racines de $5x^3 - 10x^2 - 5x + 10 = 0$
2. Donner $5x^3 - 10x^2 - 5x + 10$ sous forme factorisée.
3. En déduire les solutions de l'équation ci-dessus.

86

Résoudre $(x-3)(x-2)(x+4) \geq 0$.

87

Résoudre $-4(x+1)(x-6)(x+7) \leq 0$.

88

Résoudre $9(x-2)(x+3)(x-4) < 0$.

89

Résoudre $-7x(x-9)(x+5) > 0$.

90

On cherche à résoudre l'inéquation

$$4x^3 - 20x^2 - 8x + 96 \geq 0$$

1. Montrer que
$$4x^3 - 20x^2 - 8x + 96 = 4(x-4)(x+2)(x-3)$$
2. En déduire les solutions de l'inéquation.

91

On cherche à résoudre l'inéquation

$$-5x^3 - 40x^2 - 25x < -70$$

1. Montrer que :
$$-5x^3 - 40x^2 - 25x + 70 = -5(x-1)(x+2)(x+7)$$
2. En déduire les solutions de l'inéquation.

Fonction polynôme de degré 3

92

Le point $A(2\,;\,1)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$?

93

Le point $B(-1\,;\,2)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$?

94

On donne ci-dessous, le tableau de variations de la fonction $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36 - 20$.

Compléter les pointillés.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	

95

On donne ci-dessous, le tableau de variations de la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9x$.

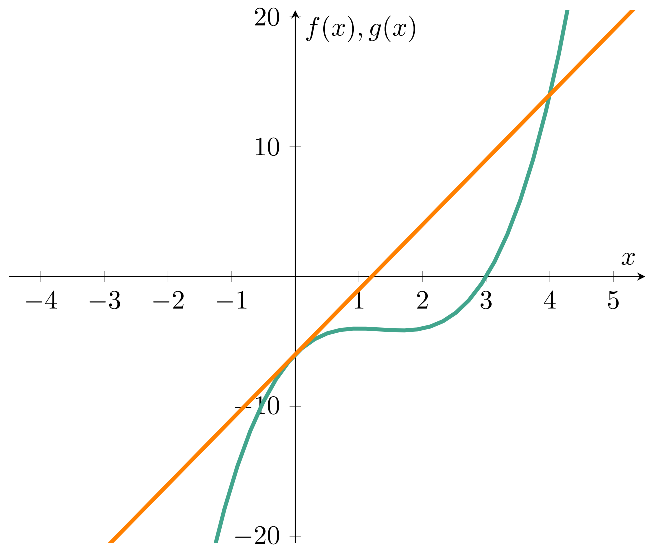
Compléter les pointillés.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	

96

Soit $M(x\,;\,y)$, le point d'intersection de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ et de la droite $g(x) = 5x - 6$.

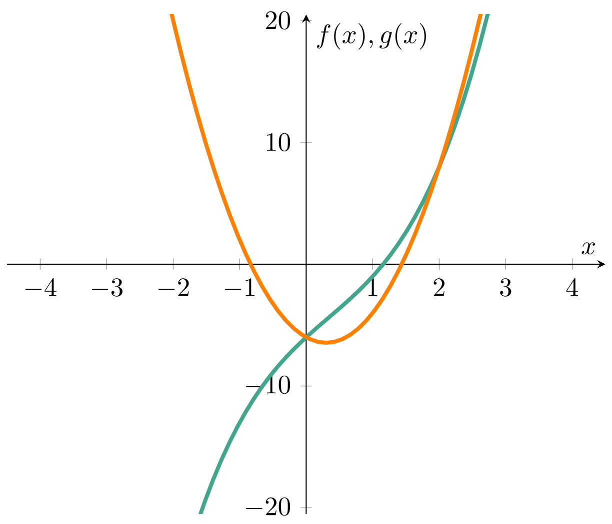
1. À partir du graphique ci-dessous donner les coordonnées de M.
2. Montrer que l'abscisse du point M vérifie $x^3 - 4x^2 = 0$.
3. Montrer que $x^3 - 4x^2 = x^2(x-4)$.
4. Résoudre $x^3 - 4x^2 = 0$. En déduire l'abscisse de M, puis son ordonnée.



97

Soit $M(x\,;\,y)$, le point d'intersection de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6$ et de la parabole $g(x) = 5x^2 - 3x - 6$.

1. À partir du graphique ci-dessous donner les coordonnées de M.
2. Montrer que l'abscisse du point M vérifie $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$.
3. Montrer que $x(x-4)(x-2) = x^3 - 6x^2 + 8x$.
4. Résoudre $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$. En déduire l'abscisse de M, puis son ordonnée.



98

Déterminer la valeur de a pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$ sachant que $h(4) = 32$.

99

Déterminer la valeur de a pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^3$ sachant que $g(2) = 16$.

100

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + b$. Déterminer les valeurs de a et b sachant que $f(1) = 9$ et $f(-2) = -27$.

101

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = at^3 + b$. Déterminer les valeurs de a et b sachant que $g(1) = 5$ et $g(-2) = -15$.

102

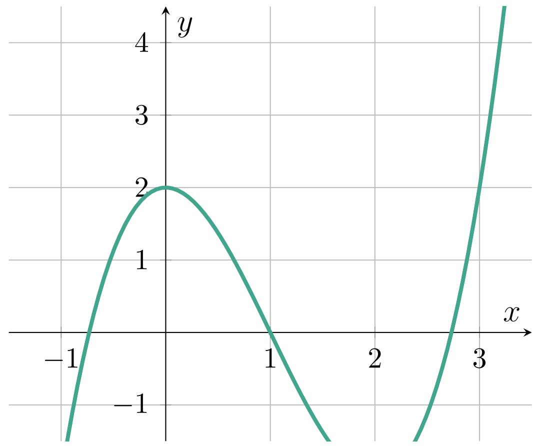
Soit f la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ et qui admet trois racines : 4, -1 et 6, et telle que $g(0) = 48$. Déterminer l'expression de g.

103

Soit g la fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ et qui admet trois racines : -2, 1 et 3, et telle que $g(0) = 9$. Déterminer l'expression de g.

104

Déterminer l'expression de la fonction polynôme de degré 3 dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



105

Donner l'expression de la fonction g dont on obtient une représentation graphique par la translation de vecteur $\vec{u}$ appliquée à la courbe représentative de la fonction f.

1. f est définie sur $[-8\,;\,8]$ par $f(x) = -6x^3$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -20x^3$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$.

106

Donner l'expression de la fonction h dont on obtient une représentation graphique par la translation de vecteur $\vec{v}$ appliquée à la courbe représentative de la fonction g.

1. g est définie sur $[-2\,;\,4]$ par $g(x) = -3x^3$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -10x^3$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

107

Dans chacun des cas ci-dessous, indiquer quelle transformation permet de passer de la courbe représentative de la fonction f à celle de g.

1. f et g sont définies sur $[-4\,;\,4]$ par $f(x) = -4x^3$ et $g(x) = -4x^3 + 3$.
2. f et g sont définies sur $[-6\,;\,6]$ par $f(x) = 5x^3$ et $g(x) = 5x^3 - 7$.

108

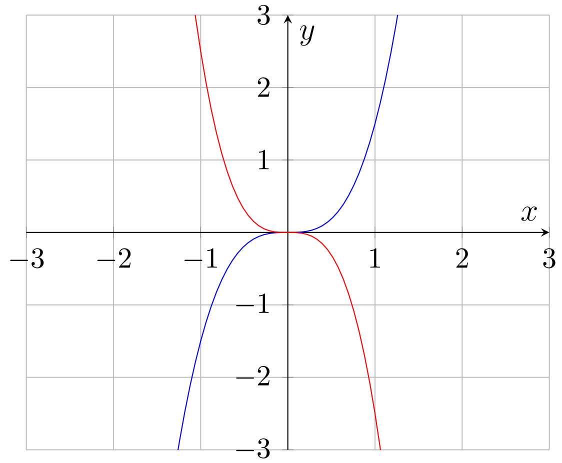
Dans chacun des cas ci-dessous, indiquer quelle transformation permet de passer de la courbe représentative de la fonction g à celle de h.

1. g et h sont définies sur $[-10\,;\,10]$ par $g(x) = -15x^3$ et $h(x) = -15x^3 + 3$.
2. g et h sont définies sur $[-8\,;\,12]$ par $g(x) = 6x^3$ et $h(x) = 6x^3 - 12$.

109

Associer chacune des fonctions représentées ci-dessous sur $\mathbb{R}$ à sa courbe représentative.

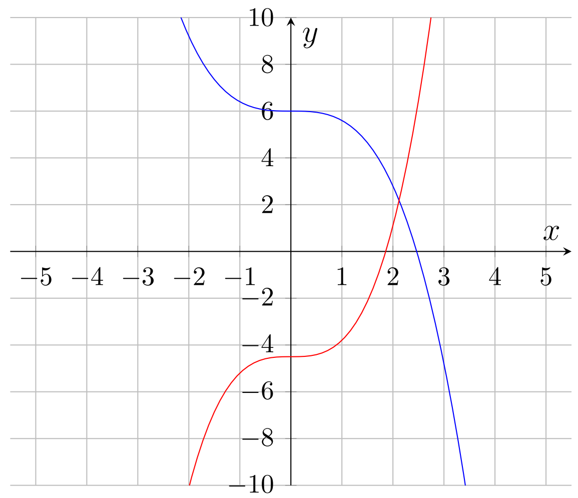
1. $f(x) = 1{,}5x^3$
2. $g(x) = -2{,}5x^3$



110

Associer chacune des fonctions représentées ci-dessous sur $\mathbb{R}$ à sa courbe représentative.

1. $f(x) = -0{,}4x^3 + 6$
2. $g(x) = 0{,}7x^3 - 4{,}5$



111

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son sens de variation sur $\mathbb{R}$.

1. $f_1(x) = 3x^3$
2. $f_2(x) = -0{,}2x^3$
3. $f_3(x) = x^3 - 5$
4. $f_4(x) = \frac{1}{4}x^3 + 7$

112

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer son sens de variation sur $\mathbb{R}$.

1. $g_1 : x \mapsto 2x^3$
2. $g_2 : x \mapsto -0{,}7x^3$
3. $g_3 : x \mapsto x^3 - 1$
4. $g_4 : x \mapsto \frac{1}{5}x^3 + 2$

Problèmes

113

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$. On note C sa courbe représentative dans un repère du plan. Un des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses a pour coordonnées :

A. $(-1\,;\,0)$ **B.** $(-2\,;\,0)$ **C.** $(0\,;\,-2)$ **D.** (5 ; 0)

114

On considère le point D de coordonnées $D(6{,}5\,;\,-1{,}69)$. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,6{,}5]$ par :

$$f(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}3x^2.$$

On note C_f sa courbe représentative.

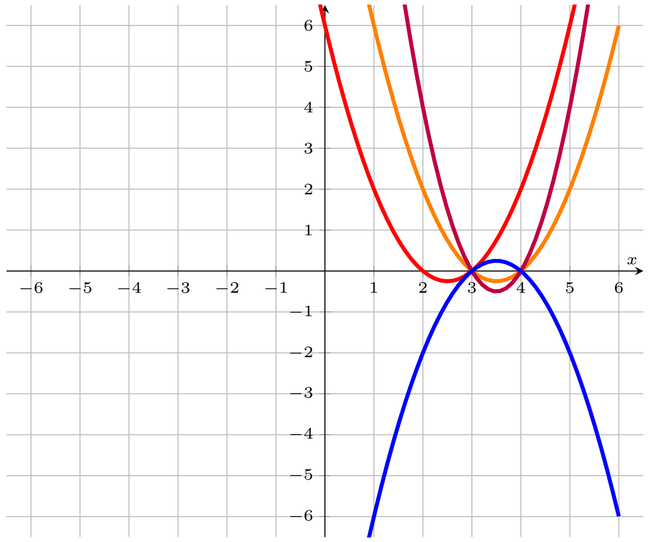
1. Le point O appartient-il à C_f ? Justifier la réponse par le calcul.
2. Calculer $f(6{,}5)$.

115

On considère la fonction définie sur $[-6\,;\,6]$ par

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

1. Calculer l'image de 4 par f.
2. Montrer que 3 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
3. En déduire une forme factorisée de $f(x)$.
4. Donner le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-6\,;\,6]$.
5. Parmi les quatre courbes suivantes laquelle représente graphiquement la fonction f ? Justifier.



116

Un styliste fabrique des sacs qu'il met en vente à un prix de 140 euros pièce. Le coût de production en euros de x sacs est modélisé par la fonction :

$$C(x) = x^2 + 80x + 500$$

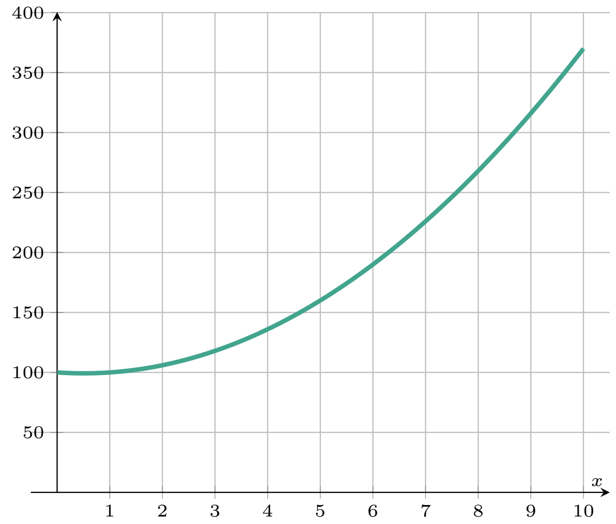
pour un nombre de sacs compris entre 0 et 80.

On note $R(x)$ le chiffre d'affaires en euros du styliste pour la vente de x sacs.

1. Exprimer le chiffre d'affaires $R(x)$ fonction de x.
2. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$, on pose $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice réalisé par le styliste.
   (a) Montrer que $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
   (b) Calculer $B(10)$.
   (c) En déduire une factorisation de $B(x)$.
3. (a) Établir le tableau de variations de B sur [0,80]
   (b) Pour quel nombre de sacs vendus le styliste réalisera un profit maximal ? Quel sera alors la valeur de ce profit ?

117

Une entreprise fabrique x tonnes de peinture où x est compris entre 0 et 10 . On suppose que toute la production est vendue. Le coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité x produite. On le note $C(x)$. Il est représenté ci-dessous.



1. Déterminer par lecture graphique,
   (a) Le coût de fabrication de 3 tonnes de peinture.
   (b) La quantité fabriquée pour un coût de fabrication de 160 000 euros.
2. La recette totale obtenue pour une production de x tonnes est exprimée en milliers d'euros par $R(x) = 37x$.
   (a) Déterminer le coût de production de 2 tonnes de produit.
   (b) Déterminer la recette obtenue en vendant 2 tonnes de produit.
   (c) En déduire le bénéfice obtenu si l'entreprise vend 2 tonnes de produit.
3. On pose

$$C(x) = 3x^2 - 3x + 100.$$

   (a) Exprimer le bénéfice

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

   en fonction du nombre de tonnes de peintures vendues.
   (b) Pour quelle production en tonnes le bénéfice est-il maximal ?
   (c) Montrer que

$$B(x) = -3(x-10)\left(x - \frac{10}{3}\right).$$

   (d) En déduire les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalisera un bénéfice.

118

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles qui coupent l'axe des abscisses en $x = 2$ et $x = 4$.

119

ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec AB $=$ 5cm. On place un point M sur le segment [AB] et un point N sur le segment [AC] de telle sorte que AM $=$ AB. On souhaite que l'aire de AMN soit égale à 2 cm². On note AM $= x$.

1. Réaliser un figure avec AM $=$ 1cm et une autre avec AM $=$ 2cm.
2. On note $f(x)$ l'aire du triangle AMN exprimée en cm².
   (a) Donner une expression de $f(x)$.
   (b) Quel est l'ensemble de définition f ?
3. Remplir le tableau de valeurs ci-dessous (les résultats seront arrondis à 10^{-1}).

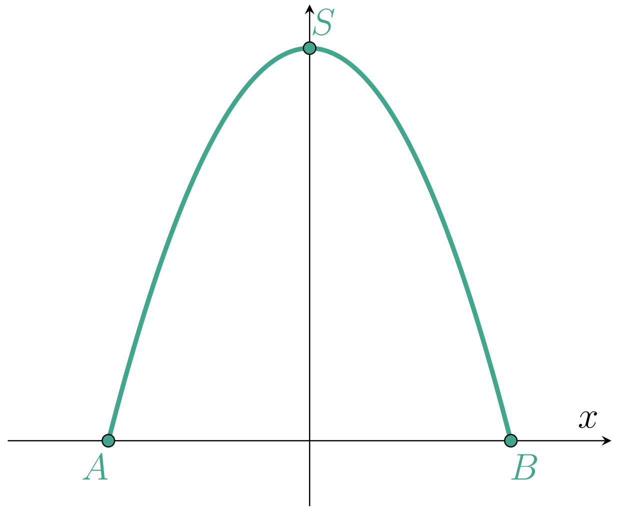
x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

4. Tracer la courbe représentative de la fonction sur l'ensemble de définition.
5. Trouver graphiquement la (les) longueur(s) de OM telle(s) que l'aire du triangle OMN soit égale à 2cm².

120

Le viaduc de Garabit, représenté au début de ce chapitre, fut conçu par Gustave Eiffel et terminé en 1884. Sa base est de forme parabolique. Nous modéliserons celle-ci par une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels. Nous allons chercher dans cet exercice à déterminer a, b et c.

L'unité est la dizaine de mètre sur chacun des axes. La fonction est représentée ci-dessous :



La largeur de cette base parabolique est de 160m. On a donc $A(-8\,;\,0)$ et $B(8\,;\,0)$.

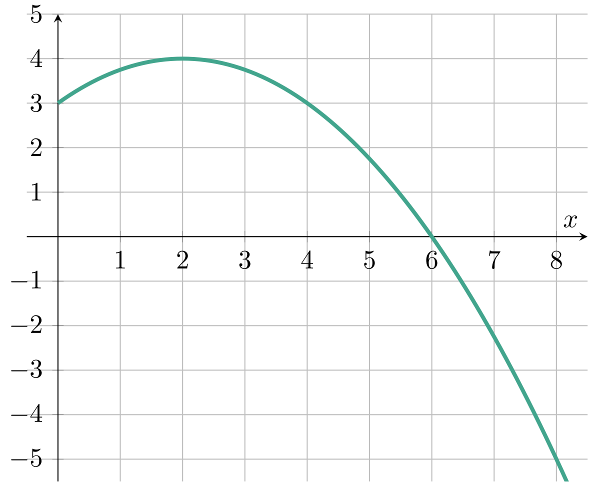
1. Déterminer $f(-8)$ et $f(8)$.
2. En déduire que l'on a $64a + 8b + c = 0$ et $64a - 8b + c = 0$.
3. Montrer que $b = 0$ et $64a + c = 0$.
4. Le sommet de la parabole est situé à une hauteur de 50m de la base. Montrer que $c = 5$.
5. En déduire une expression de f.

121

Dans le cadre d'un projet d'installation d'une fontaine sur la place principale d'une grande ville, un designer urbain s'intéresse à la trajectoire des jets d'eau. Il s'aperçoit qu'ils suivent une trajectoire parabolique et représente l'un de ces jets graphiquement. La figure ci-dessous est la reproduction de cette étude. La trajectoire du jet est donnée par la fonction $h(x)$ qui représente la hauteur en mètres du jet en fonction de sa distance à l'origine x en mètre également :

$$h(x) = -0{,}25x^2 + x + 3$$

1. Quelle est la hauteur du jet à une distance $x = 2$ de l'origine ?
2. La courbe représentative de la fonction h est tracée ci-dessous. À quelle distance de l'origine le jet sera à une hauteur de 3 mètres ?



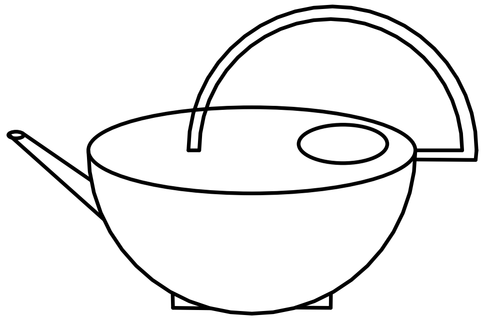
3. Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$h(x) = -0{,}25(x-6)(x+2).$$

4. À l'aide du tableau de signes de h déterminer sur quelle distance la hauteur du jet sera positive ou nulle.

122

La théière de Marianne Brandt est une pièce iconique du style Bauhaus. Son corps est une demi-sphère. Dans cet exercice nous allons nous intéresser au volume de cette théière en fonction de son rayon. Ci-dessous est une vue schématisée de cette théière :



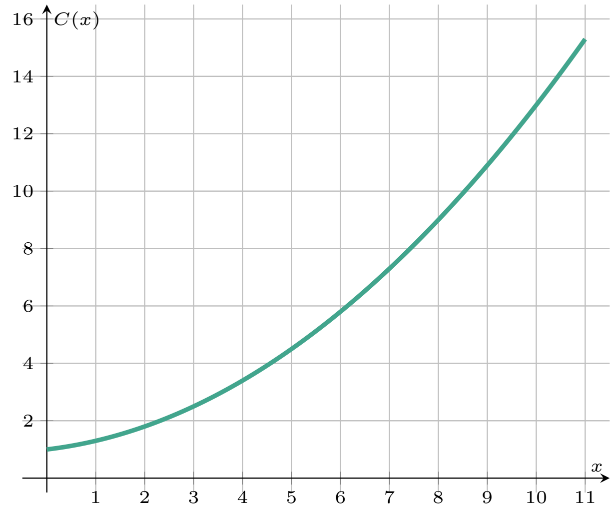
1. Quelle est la forme de la section d'une sphère par un plan ?
2. Rappeler la formule du volume d'une boule.
3. On pose $V(x)$ le volume en litre de la théière en fonction de son rayon en centimètres. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.
4. A l'aide votre calculatrice, remplir le tableau de valeurs ci-dessous (on arrondira les résultats à 10^{-1} près) :

x	0	3	5	8	11	14
$V(x)$						

5. Pour quel rayon le volume de la théière sera de 75cl ?

123

Une designer indépendante fabrique des tables de chevets. Le coût de fabrication de ces tables, que l'on notera $C(x)$, exprimé en centaines d'euros, est fonction de la quantité x produite. Ce coût de fabrication est représenté ci-dessous.



1. Déterminer par lecture graphique,
   (a) Le coût de fabrication de 8 tables.
   (b) La quantité fabriquée pour un coût de fabrication de 1300 euros.
2. La recette totale obtenue pour une production de x tables est exprimée en centaines d'euros par $R(x) = 2{,}25x$.
   (a) Déterminer le coût de production de 10 tables.
   (b) Déterminer la recette obtenue en vendant 10 tables.
   (c) En déduire le bénéfice obtenu si elle vend 10 tables.
3. On pose

$$C(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 1.$$

   (a) Exprimer le bénéfice

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

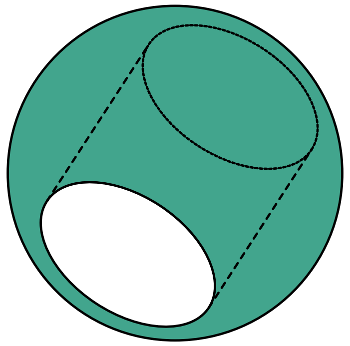
   en fonction du nombre de tables vendues.
   (b) Pour combien de tables le bénéfice est-il maximal ?
   (c) Montrer que

$$B(x) = -0{,}1(x-20)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

   (d) En déduire les valeurs de x pour lesquelles elle réalisera un bénéfice.

124

Un créateur propose une lampe dont le design est la résultante de la différence d'une sphère de rayon 10cm, et d'un cylindre de hauteur 20cm et d'un rayon x comme schématisé ci-dessous :



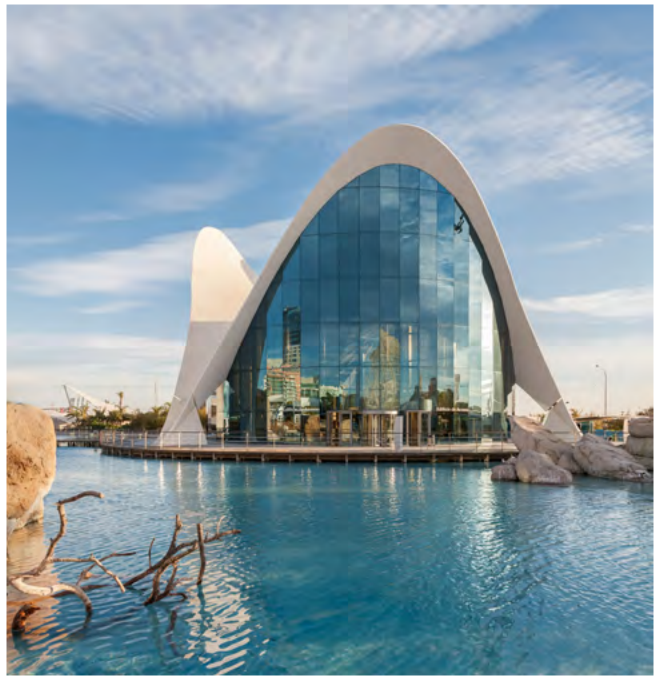
1. Rappeler la formule du volume d'un cylindre.
2. On pose $V(x)$ le volume en litre de la lampe en fonction du rayon du cylindre en centimètres. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.
3. A l'aide votre calculatrice, remplir le tableau de valeurs ci-dessous (on arrondira les résultats à 10^{-1} près) :

x	0	3	5	8	11	14
$V(x)$						

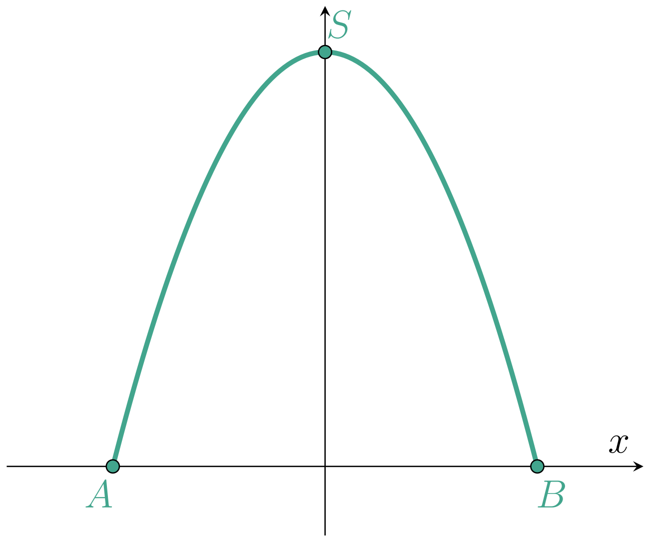
4. Pour quel rayon le volume de la lampe sera de 50cl ?

125

L'Oceanogràfic est un océanarium espagnol situé au sein de la Cité des arts et des sciences de Valence. Sa structure est un assemblage de paraboloïdes. Par conséquent, l'armature de son toit est un ensemble de paraboles. Nous allons modéliser dans cet exercice l'une de ces armatures à l'aide d'une fonction polynôme de degré deux $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.



L'unité est le mètre sur chacun des axes. La fonction est représentée ci-dessous :



La largeur de cette base parabolique est de 18m. On a donc $A(-9\,;\,0)$ et $B(9\,;\,0)$.

1. Déterminer $f(-9)$ et $f(9)$.
2. En déduire que l'on a $81a + 9b + c = 0$ et $81a - 9b + c = 0$.
3. Montrer que $b = 0$ et $81a + c = 0$.
4. Le sommet de la parabole est situé à une hauteur de 21m de la base. Montrer que $c = 21$.
5. En déduire une expression de f.

04. TP

Etude d'une fonction à l'aide de la calculatrice

Dans l'ensemble de cette activité nous utiliserons la fonction

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 5.$$

Tracé de fonctions

La première étape est de définir la fonction à étudier.

— La touche graph stats f1 f(x) nous permet d'accéder au menu de définition des fonctions.

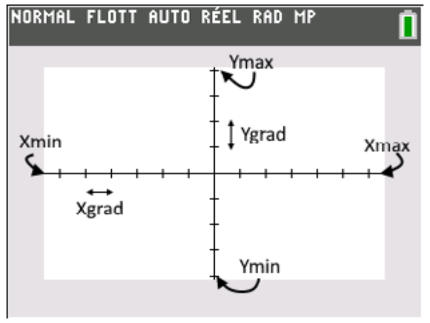
— Pour entrer la variable x nous utiliserons la touche échanger X,T,θ,n, pour les puissances nous utiliserons H ^ en n'oubliant pas de sortir de l'exposant à l'aide de la flèche de droite .

— La touche calculs f4 trace nous permet de tracer le graphique

Remarque : on préférera cette touche à la touche table f5 graphe. Elle nous permet, par exemple, en utilisant les flèches directionnelles, de lire les coordonnées de points appartenant à la courbe représentative de la fonction.

Le graphique est rogné pour notre part dans sa partie supérieure. Nous allons devoir redéfinir les dimensions de la fenêtre d'affichage. Il existe des fenêtres prédéfinies accessibles *via* la touche déf table f2 fenêtre. Nous opterons pour une définition manuelle à l'aide de la touche format f3 zoom.

Dans la figure ci-dessous sont représentés les principaux paramètres Xmin, Xmax, Xgrad, Ymin, Ymax et Ygrad.

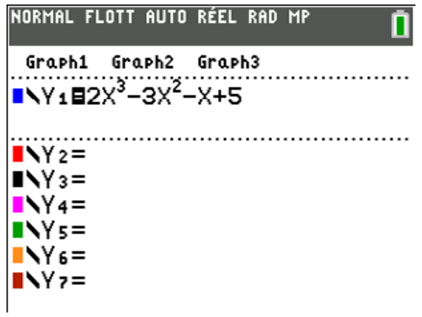


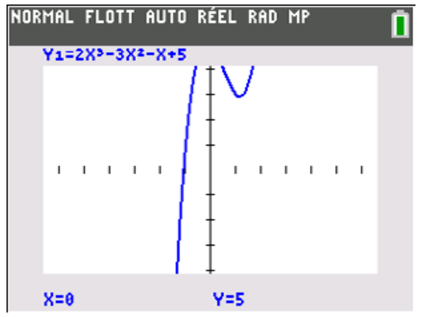
Comme la courbe est rognée sur le haut, il faut augmenter Ymax. Nous en profitons pour réduire Xmin et Xmax afin de rendre la courbe plus visible. Les paramètres finaux sont :

$X_{min} = -3,\quad X_{grad} = 1,\quad Y_{max} = 10,$

$X_{max} = 3,\quad Y_{min} = -4,\quad Y_{grad} = 1.$

Ci-dessous le menu de définition des fonctions à gauche, la courbe obtenue au centre, et le menu de réglage de la fenêtre dûment remplie à droite :





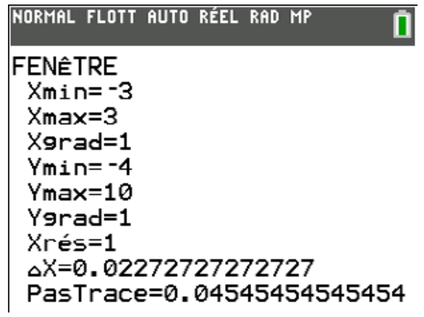


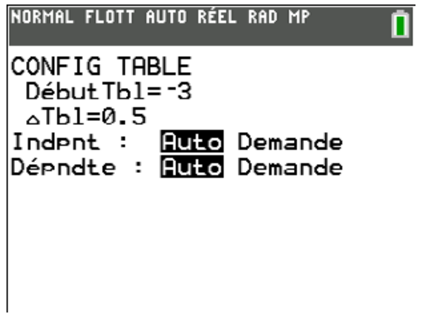
Tableau de valeurs

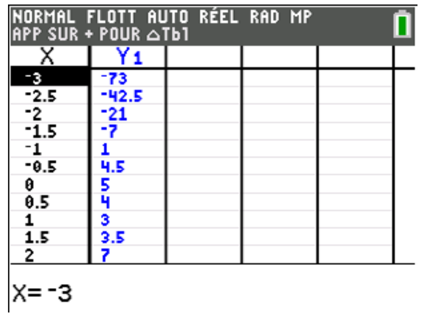
Le tableau de valeurs de la courbe représentée est accessible *via* la combinaison de touches 2nde table f5 graphe.

La personnalisation du tableau se fait *via* les touches 2nde déf table f2 fenêtre.

Si nous souhaitons commencer ce tableau à $x = -3$ et obtenir les valeurs par pas de $0,5$, nous allons définir : DébutTbl $= -3$ et ΔTbl $= 0,5$.

Ci-dessous la fenêtre de définition du tableau de valeurs à gauche et le tableau de valeurs obtenu à droite :





Images et antécédents

Il est possible de demander à la calculatrice de calculer des images ou de trouver des antécédents graphiquement. L'accès à ces options se fait *via* la combinaison de touches 2nde calculs f4 trace.

— *Valeur* : permet de calculer l'image d'un nombre x (on veillera à ce que cette valeur x soit incluse dans la fenêtre d'affichage).

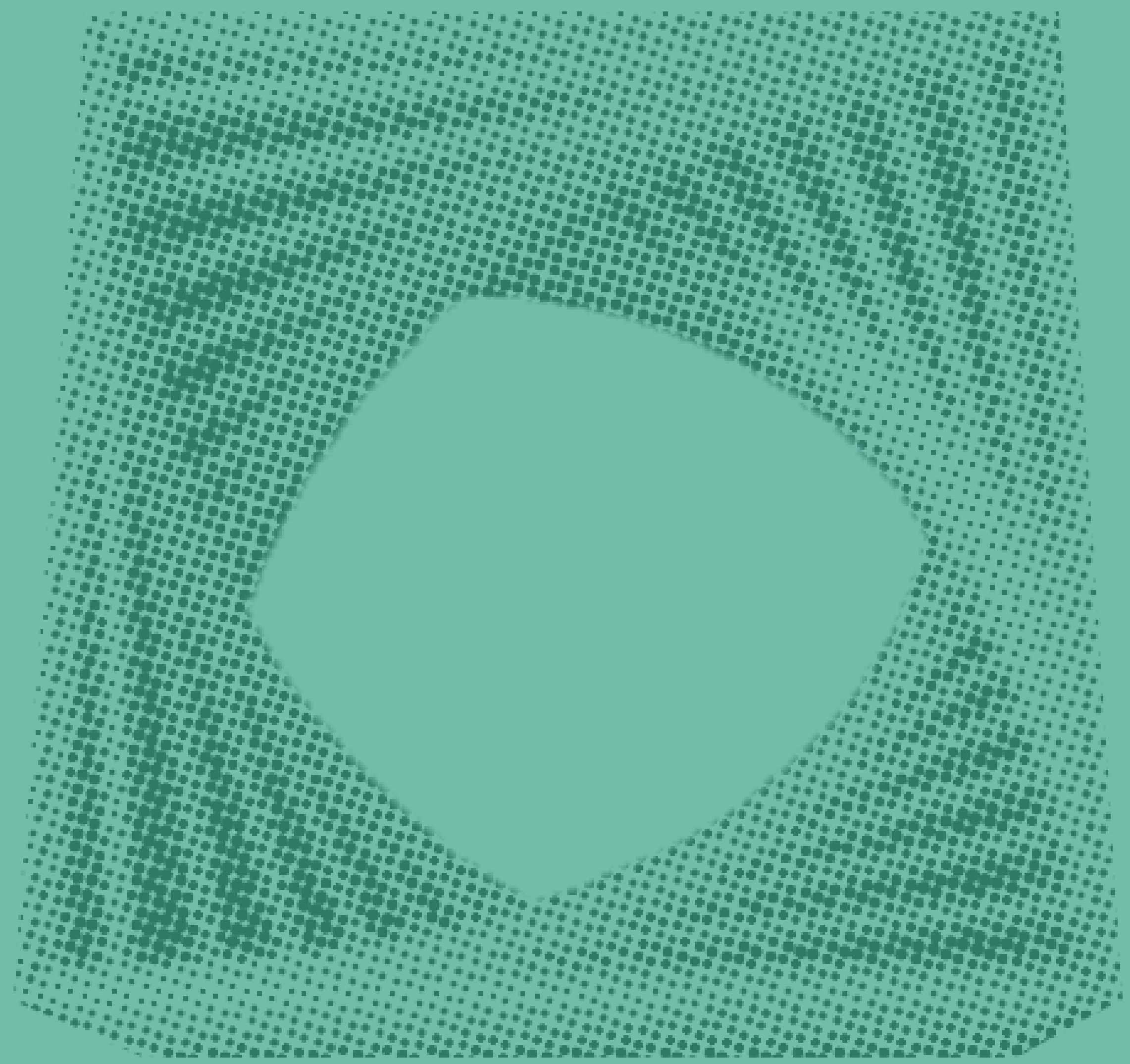
— *Intersection* : permet de trouver l'intersection entre deux courbes. On peut calculer l'antécédent du réel a, en traçant la courbe $y = a$ et en cherchant son intersection avec la fonction f.

1. Pour utiliser la fonctionnalité *Intersection*, sélectionnez une par une les fonctions à l'aide des flèches du haut et du bas. Validez à chaque fois par la touche *entrer*.
2. Afin de faciliter le calcul, il vous est demandé d'approcher le curseur au plus près de l'intersection choisie. Faites cela à l'aide des touches gauche et droite et validez avec la touche *entrer*.

DÉRIVATION

Objectifs du chapitre : Tracer une droite à partir de son équation / Donner l'équation d'une droite à partir de son tracé / Calcul du taux d'accroissement d'une fonction / Donner le coefficient directeur et l'équation de la tangente à une courbe en un point / Donner la dérivée d'une fonction / Donner le tableau de variations d'une fonction à partir du tableau de signes de sa fonction dérivée associée.

06



Michaela Crie STONE
Parabola coffee table
2014

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Sculpture figurative Stringed Figure (Curlew) (Version I), Barbara HEPWORTH, 1956

2. Sliding Ladder, Nike SAVVAS, 2010

3. Prism, Inés ESNAL, 2012

4. Plafond du Museum of Anatolian Civilisations à Ankara - Turquie, İhsan KIYGI, 1968

5. Les jardins Mallet-Stevens et la villa Cavrois, URBA FOLIA, 2016

6. Seventeen is sharp, Rebecca WARD, 2009

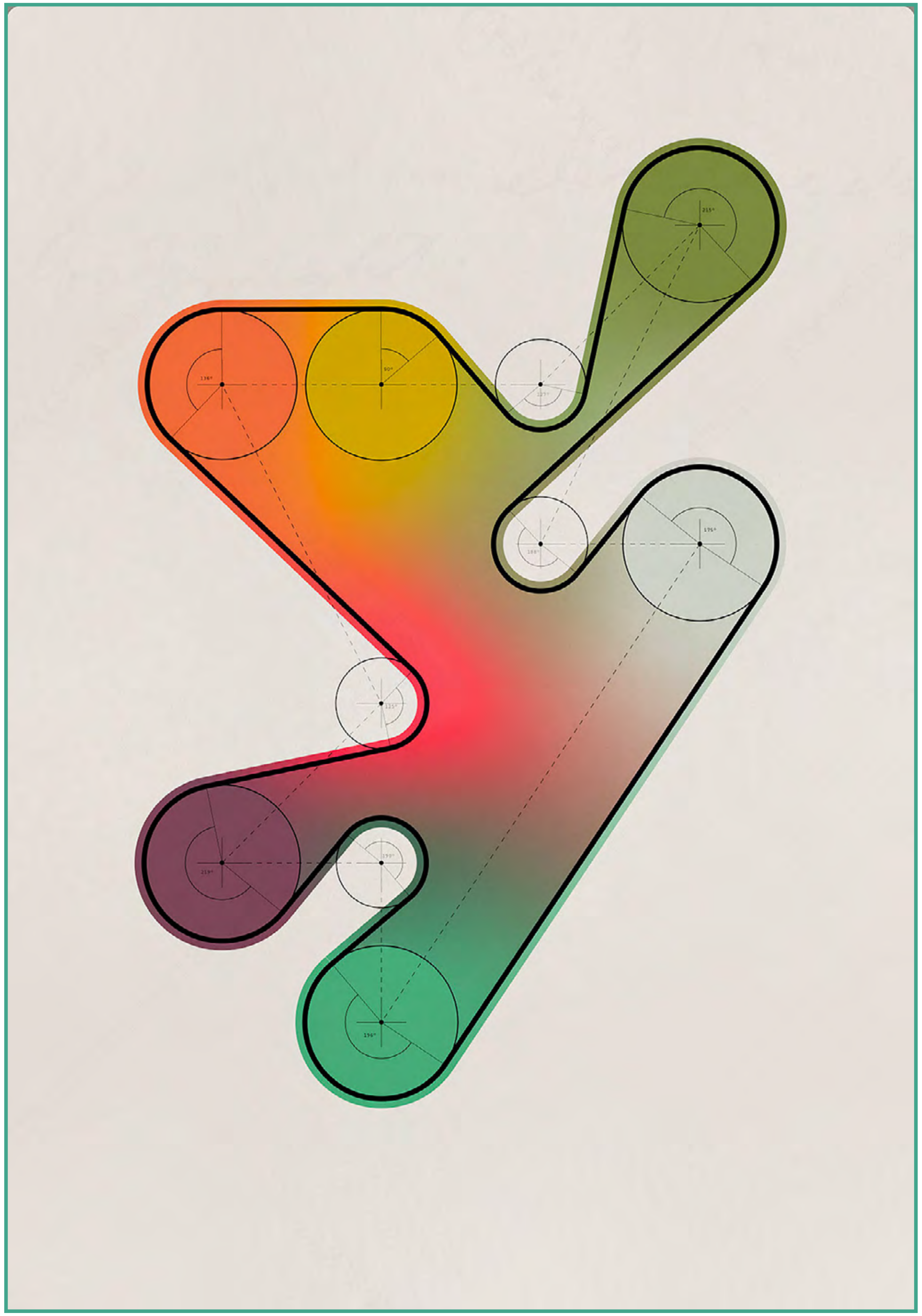
7. High Trestle Trail Bridge - Boone County Iowa, David B. DAHLQUIST, 2011

8. Moiré painting, Anoka FARUQEE, 2012

9. Arco-Íris, Aline CAMPBELL, 2012

10. Chaise 5MM, Mikael MANTILA, 2006

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.



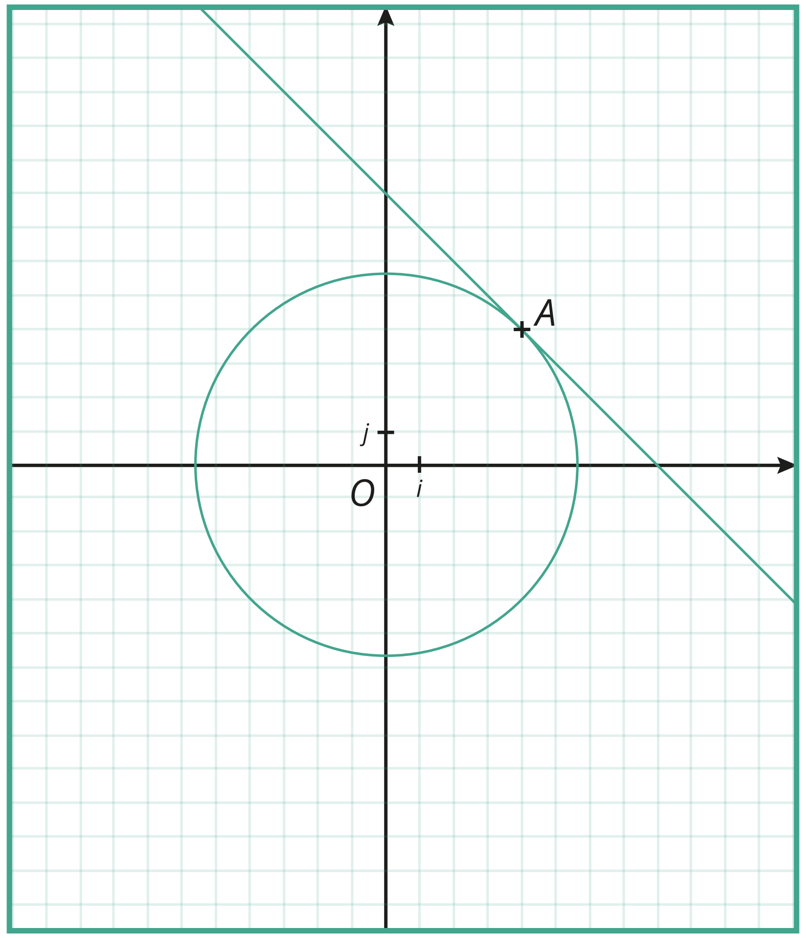
TANGENTES

« Tangent » est une série imaginée par le designer grec Dimitris Ladopoulos. Elle regroupe ses thématiques de prédilection : l'art, les mathématiques et les algorithmes. Cercles, arcs-de-cercles et tangentes sont les principaux éléments de cette collection.

1. Rappel sur les tangentes

a. Tracer un cercle de centre O et placer un point A sur ce cercle.

b. Tracer la tangente à ce cercle en A en rappelant les étapes de votre construction.



2. Tangente et équation de droite

On considère le cercle de centre O et de rayon [OA] représenté ci-dessus. L'angle $(\vec{x}\,;\overrightarrow{OA})$ est égal à 45°. La tangente au cercle en A est également représentée.

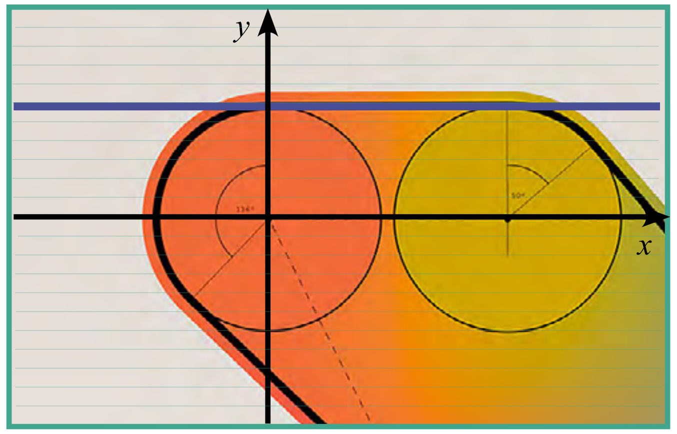
Soit f la fonction associée à la tangente au cercle.

a. Rappeler la forme générale des fonctions affines.

b. Par lecture graphique, donner le coefficient directeur associé à la fonction f.

c. Donner l'ordonnée à l'origine de cette fonction.

d. Quel est le coefficient directeur de la droite représentée ci-dessous en bleue dans le repère donné ?



À gauche :
Tangent, series 048
Dimitris Ladopoulos, 2022

02. COURS

Droites

Rappels

$y = ax+b$ est l'équation d'une droite, avec a et b des nombres réels.

On appelle a le coefficient directeur de la droite et b son ordonnée à l'origine.

Tracer une droite à partir de son équation

Si l'équation d'une droite $y = ax + b$ nous est donnée, pour tracer celle-ci il nous suffit de deux points. Pour obtenir ces deux points nous devons prendre deux valeurs (au hasard) pour x et calculer y pour chacun. On obtiendra alors les coordonnées des deux points appartenant à la droite.

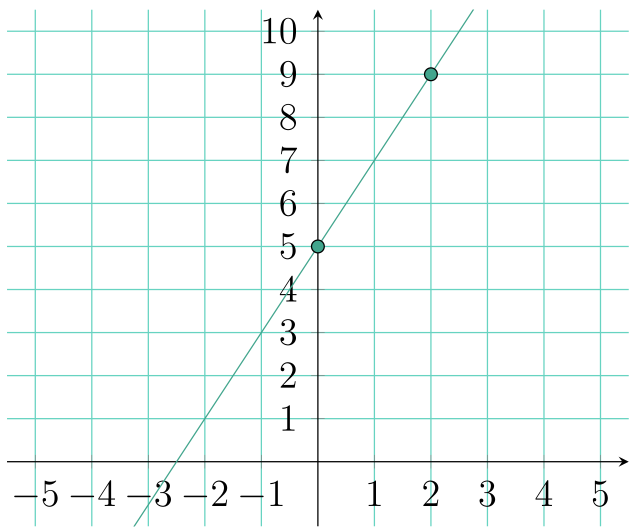
Exemple

« Tracer la droite d'équation $y = 2x + 5$. »

Réponse :

— On prend au hasard $x = 0$. On trouve $y = 2 \times 0 + 5 = 5$. Notre premier point est le point de coordonnées $(0; 5)$.
— On prend au hasard $x = 2$. On trouve $y = 2 \times 2 + 5 = 9$. Notre deuxième point est le point de coordonnées $(2; 9)$.

Il ne nous reste plus qu'à placer ces points et à les relier.

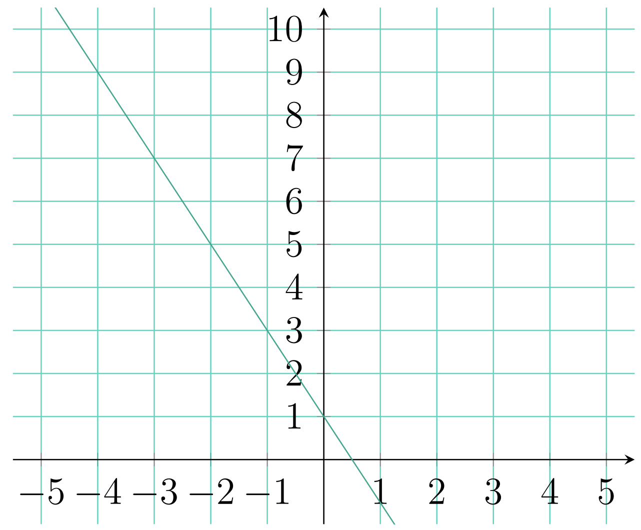


Trouver une équation de droite à partir de son tracé

— 1ère étape : on prend deux points sur la droite que l'on nomme A et B. On trouve alors le coefficient directeur en calculant : $\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.
— 2ème étape : pour l'ordonnée à l'origine, la méthode la plus simple consiste à donner l'ordonnée de la droite en $x = 0$. On peut sinon résoudre l'équation $y = ax + b$ où l'inconnue est b, après avoir remplacé a par le résultat trouvé pour le coefficient directeur, et après avoir remplacé x et y par les valeurs de x_A et y_A.

Exemple

« Donner l'équation de la droite représentée ci-dessous. »



Réponse : Les points (-3;7) et (-2;5) appartiennent à la droite. On en déduit le coefficient directeur

$$a = \frac{5-7}{-2-(-3)} = \frac{-2}{1} = -2$$

Par lecture graphique, l'ordonnée à l'origine est $b = 1$.
On en conclut que l'équation de la droite représentée est $y = -2x + 1$.

Fonctions affines

Les fonctions du type $f(x) = ax + b$ sont appelées **fonctions affines**. Leur représentation graphique est une droite.

Si $a > 0$ la fonction croissante. Si $a < 0$ la fonction sera décroissante.

Le tableau de signes de f dépend du signe du coefficient directeur :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

Donner le tableau de signes de la fonction $f(x) = -4x + 8$

Réponse :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I_1. On associe à cette fonction, sa fonction dérivée notée f' définie sur une intervalle I_2.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) =$ nombre	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Dérivées de KU

Soit u une fonction et k un réel. Alors :

$$\boxed{(k \times u)' = k \times u'}$$

Exemple

« Donner la dérivée de $f(x) = 5x^2$. »

Réponse : $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$

Dérivées de $U + V$

Soit u et v deux fonctions. Alors :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Méthode

Pour dériver une fonction il faudra :

1. séparer les termes et les traiter séparément ;
2. reconnaître, si nécessaire, dans ces termes, le produit par un scalaire ;
3. dériver séparément en s'aidant du tableau ci-dessus et en multipliant, éventuellement, par le scalaire.

Exemple

« Donner la dérivée de $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3$. »

Réponse : $f'(x) = 12x^2 + 10x$

Dérivée et sens de variation

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$:

— $f'(x) \geq 0$, alors f **est croissante sur I.**
— $f'(x) \leq 0$, alors f **est décroissante sur I.**
— $f'(x) = 0$, alors f **est constante sur I.**

Méthode

Si on cherche le tableau de variation d'une fonction on :

1. **dérive** la fonction ;
2. étudie le **signe de cette dérivée** ;
3. on en **déduit le sens de variation** de la fonction (initiale).

Exemple d'étude de variations

« Établir le tableau de variation de $f(x) = -6x^2 + 9x + 15$. »

Réponse :

$$f'(x) = -12x + 9$$

On obtient alors le tableau de signes de f' ci-dessous, dont on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{147}{8}$	$\searrow$	

Remarque

Là où la dérivée s'annule on observe le plus souvent un maximum ou un minimum.

Mais ce n'est pas toujours le cas : par exemple $f(x) = x^3$ a une dérivée $f'(x) = 3x^2$ qui est nulle lorsque $x = 0$. Mais $x = 0$ n'est ni un minimum, ni un maximum.

Exemple

Dans l'exemple précédent, $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$, et f atteint bien son maximum en $x = \frac{3}{4}$.

Tangente et fonction dérivée

Taux de variation

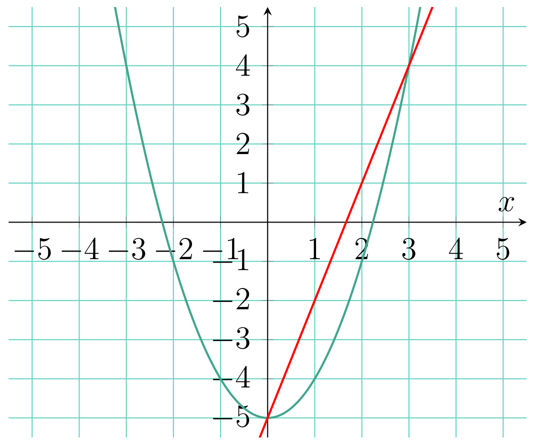
Soit f une fonction et a et b deux réels appartenant à l'ensemble de définition de f.

Le taux de variation de f entre a et b est le quotient :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 5$. Calculer son taux de variation entre 0 et 3.



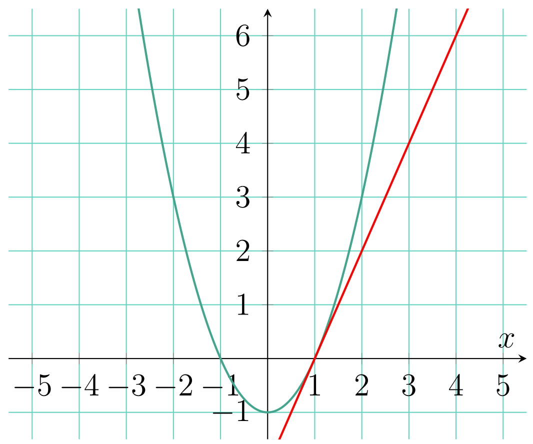
Réponse :

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{4 - (-5)}{3} = 3$$

Nombre dérivé

On appelle **nombre dérivée de f en** a, noté $f'(a)$, la limite, quand elle existe, du taux de variation lorsque b tend vers a :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Vocabulaire

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point

Propriété

Soit f une fonction. Si la courbe représentative de f, notée C_f, admet une tangente au point d'abscisse $x = a$, alors le coefficient directeur de cette tangente sera le nombre dérivé $f'(a)$.

On peut maintenant calculer ce dernier en :

1. obtenant la dérivée $f'(x)$ associée à $f(x)$,
2. et en calculant $f'(a)$ en remplaçant x par a.

Exemple

« Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ en $x = 2$. »

Réponse : On a $f'(x) = 6x - 5$ d'où $f'(2) = 7$. Le coefficient directeur de la tangente à C_f en $x = 2$ est de 7.

Rappel

Pour que la tangente soit parallèle à l'**axe des abscisses**, il faut que son coefficient directeur soit égal à 0.

Propriété

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f, en $x = a$ est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)\,(x-a) + f(a)}$$

Exemple

« Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ en $x = 2$. »

Réponse : D'après les calculs précédents $f'(2) = 7$. Qui plus est $f(2) = 10$. L'équation réduite de la tangente est :

$$y = 7(x-2) + 10$$

Sens de variation

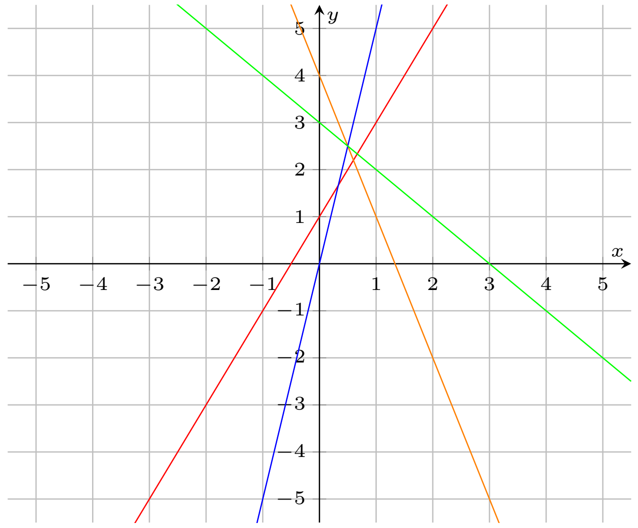
On remarque que lorsque le taux de variation est positif la fonction est croissante. Lorsqu'il est négatif, la fonction est décroissante. Ceci explique l'étude du signe de la fonction dérivée que nous avons vue précédemment.

03. EXERCICES

Préambule

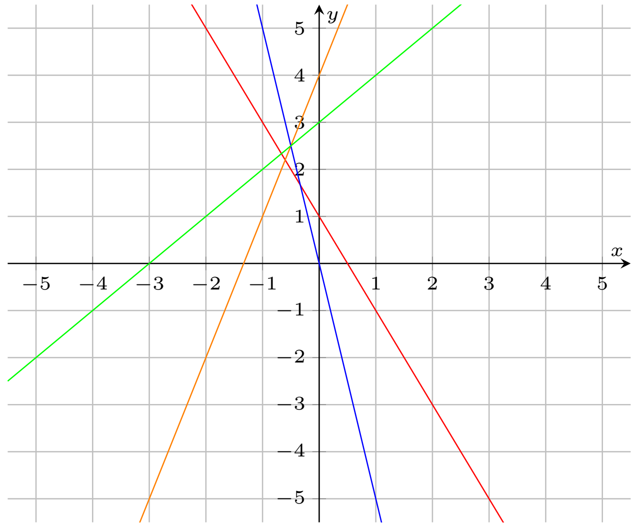
01

Donner le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine et l'équation de chacune des droites représentées ci-dessous :



02

Donner l'équation de chacune des droites représentées ci-dessous :



03

Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x - 6$
- $g(x) = (-2x - 8)(3x - 15)$
- $h(x) = -2x + 18$
- $k(x) = (x+1)^2$

- $m(x) = 5x + 15$
- $n(x) = -3(2x - 6)(x + 2)$

04

Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

- $f(x) = (3x - 6)(-2x - 8)$
- $g(x) = (4x - 8)(-2x + 12)(3x - 9)$
- $h(x) = x(2x - 3)$
- $k(x) = -x(2x + 6)(7x - 21)$
- $m(x) = (-2x + 8)(-5x + 20)$
- $n(x) = (x - 6)(-x + 9)(-5x + 10)$

Taux de variation

05

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 4$. Calculer le taux de variation de f sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.

06

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x$. Calculer le taux de variation de g entre 1 et 5.

07

Soit h la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$. Calculer le taux de variation de h entre 2 et 8.

08

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x + 1$. Calculer le taux de variation de f sur l'intervalle $[12\,;\,143]$.

09

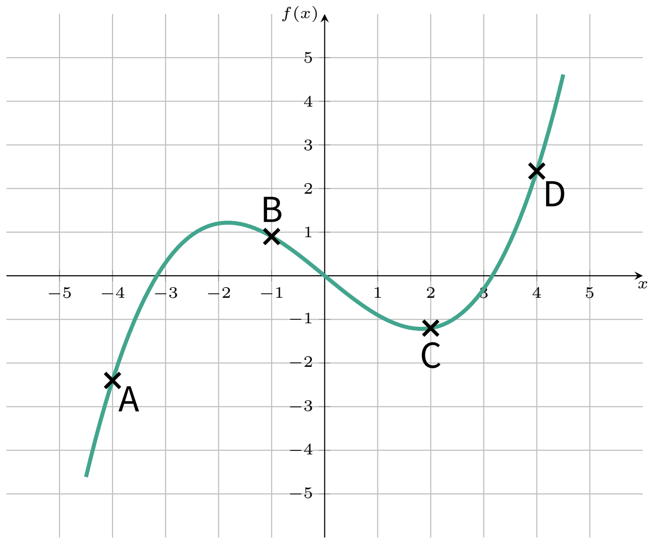
Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{3x}$. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 6.

10

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = 3\sqrt{x} + 1$. Calculer le taux de variation de h entre 1 et 81.

11

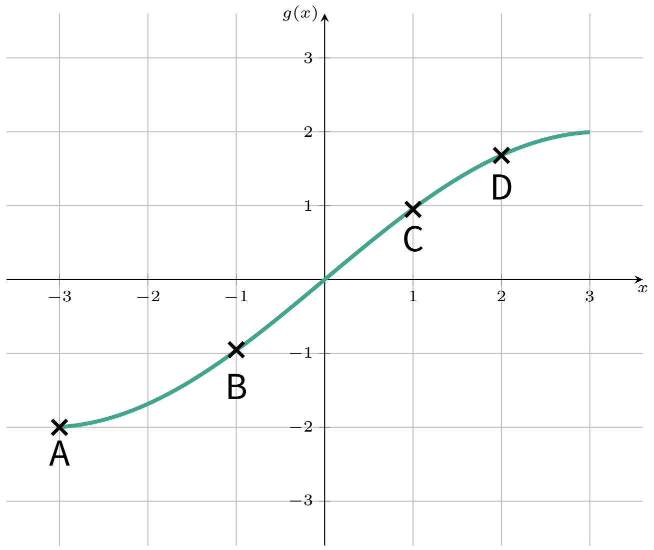
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-4{,}5\,;\,4{,}5]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1. À l'aide des informations données sur le graphique, calculer le taux de variation de la fonction f entre -4 et -1.
2. Que représente ce nombre pour la droite (AB) ?
3. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 2 et 4. Quelle est la pente de la droite correspondante ?

12

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

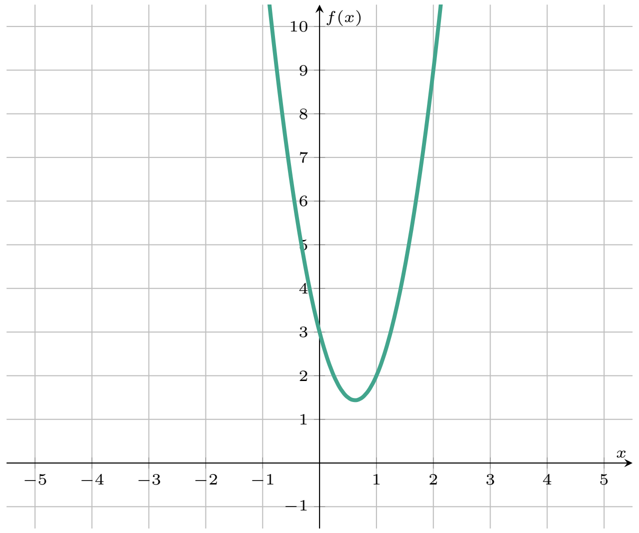


1. À l'aide des informations données sur le graphique, calculer le taux de variation de la fonction g entre -3 et 1.
2. Que représente ce nombre pour la droite (AC) ?
3. Calculer le taux de variation de la fonction g entre -1 et 1. Quelle est la pente de la droite correspondante ?

13

Soit la fonction $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

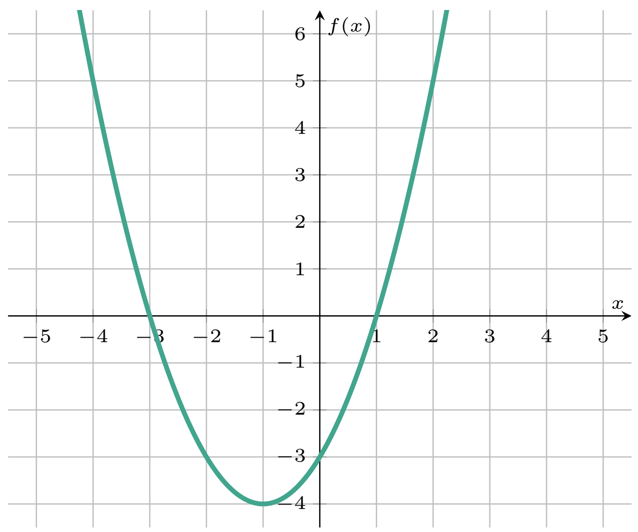
1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 2.
2. Tracer-le sur la figure ci-dessous représentant C_f.



Télécharger le graphique

14

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



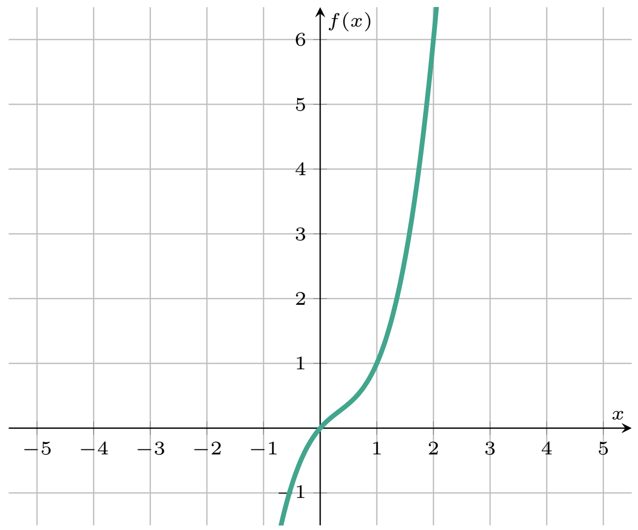
Télécharger le graphique

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre -1 et 2.
2. Tracer-le sur la figure ci-dessous représentant C_f.

15

Soit la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

1. Calculer son taux d'accroissement entre 0 et 2
2. Tracer-le sur la figure ci-dessous représentant C_f.



Télécharger le graphique

16

On donne un tableau de valeurs d'une fonction g :

x	-5	-3	-1	0	2	4
$g(x)$	6	4	2	1	-1	-3

Calculer le taux de variation de g entre -5 et 0 puis sur l'intervalle $[-1; 2]$.

17

On donne un tableau de valeurs d'une fonction h :

x	-6	-3	-1	1	3	5
$h(x)$	8	5	3	0	-2	-4

Calculer le taux de variation de h entre -6 et 1 puis sur l'intervalle $[-1; 3]$.

18

On donne, ci-dessous, le tableau de valeurs d'une fonction affine g.

x	-2	0	2	4	6
$g(x)$		3		11	

1. De combien varie $g(x)$ lorsque x varie de 0 à 4 ?
2. En déduire de combien augmente $g(x)$ lorsque x augmente d'une unité.
3. En déduire le taux de variation de g entre 0 et 4.
4. Au coefficient directeur de quelle droite est associé ce taux de variation ?
5. Compléter le tableau de valeurs.
6. Quel est le sens de variation de la fonction g ? Justifier.
7. Conclure en donnant l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

19

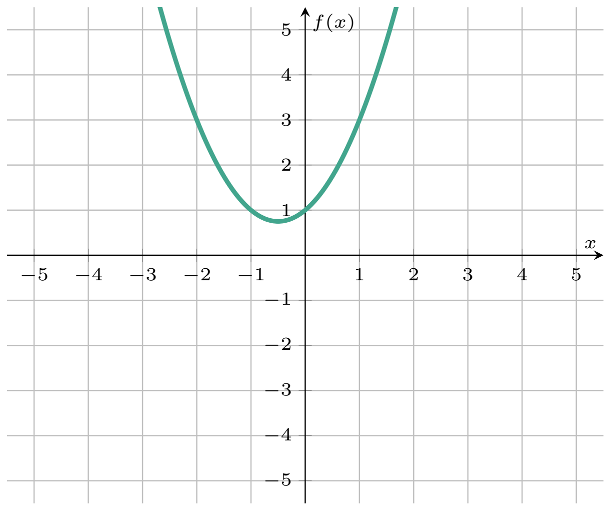
On donne, ci-dessous, le tableau de valeurs d'une fonction affine h.

x	-3	-1	1	3	5
$h(x)$		2		10	

1. De combien varie $h(x)$ lorsque x varie de -1 à 3 ?
2. En déduire de combien augmente $h(x)$ lorsque x augmente d'une unité.
3. En déduire le taux de variation de h entre -1 et 3.
4. Quel est le coefficient directeur de la droite associée à ce taux de variation ?
5. Compléter le tableau de valeurs.
6. Quel est le sens de variation de la fonction h ? Justifier.
7. Conclure en donnant l'expression de $h(x)$ en fonction de x.

20

Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :

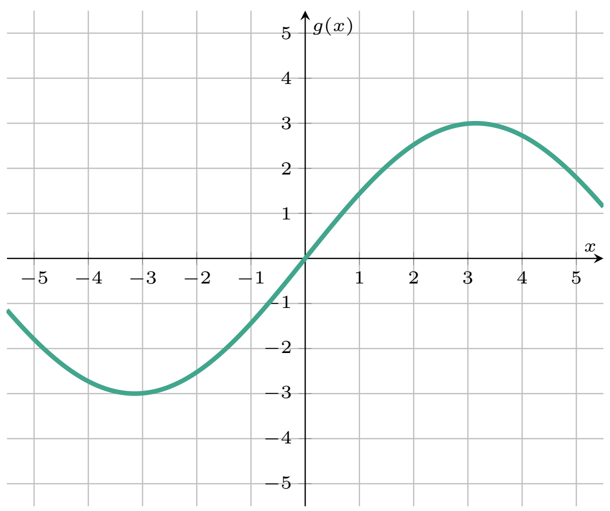


Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes :

1. Le taux de variation de f entre 0 et 1 est positif.
2. Le taux de variation de f entre -1 et 1 est égal à $\frac{1}{2}$.

21

Soit g la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



Répondez par vrai ou faux aux questions suivantes :

1. Le taux de variation de g entre -3 et 0 est négatif.
2. Le taux de variation de g entre 0 et 3 est égal à -3.

22

On considère la situation suivante : lors d'une journée venteuse, la température d'une ville a diminué en moyenne de 3°C par heure entre 9 heures du matin et 3 heures de l'après-midi. On note $T(t)$ la température en degrés Celsius de cette ville et t le temps en heures après 9 heures du matin.

Exprimer sous forme de taux de variation la situation décrite.

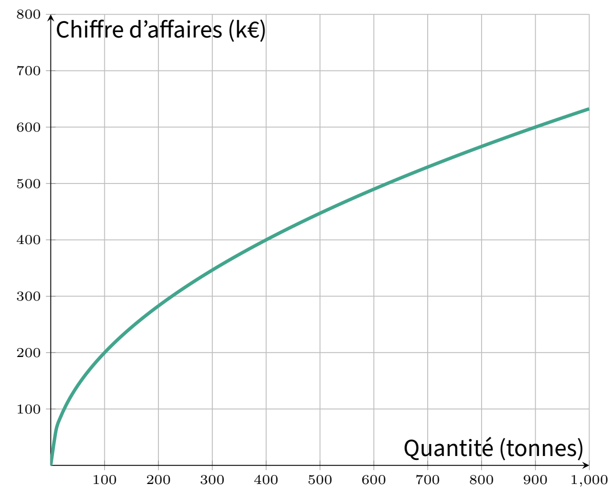
23

On considère la situation suivante : lors d'une sécheresse, le niveau d'eau d'un réservoir a diminué en moyenne de 5 cm par jour entre le 1er et le 5e jour du mois. On note $N(t)$ le niveau d'eau en centimètres du réservoir et t le temps en jours après le début du mois.

Exprimer sous forme de taux de variation la situation décrite.

24

Une entreprise produit des bobines de cuivre. La courbe ci-dessous représente son chiffre d'affaires, en milliers d'euros, en fonction du nombre de tonnes vendues.

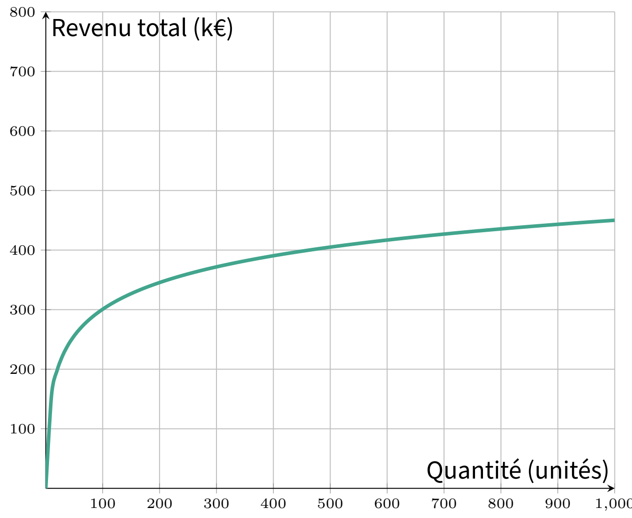


Quel est le taux de variation du chiffre d'affaires lorsque la quantité vendue passe de :

1. 300 à 600 tonnes ?
2. 700 à 1000 tonnes ?

25

Une société vend des gadgets électroniques. La courbe ci-dessous représente son revenu total, en milliers d'euros, en fonction du nombre d'unités vendues.



Quel est le taux de variation du revenu total lorsque la quantité vendue passe de :

1. 100 à 500 unités ?
2. 500 à 900 unités ?
3. 0 à 900 unités ?

26

Un ballon de basket est lancé avec une vitesse initiale au moment $t = 0$, puis sa vitesse diminue uniformément jusqu'à ce qu'il atteigne le sol. On modélise la vitesse du ballon par une fonction affine $v(t)$.

Déterminer l'expression de cette vitesse $v(t)$ (exprimée en m/s) en fonction du temps t (en secondes), sachant que la vitesse initiale est de 25 m/s et que le ballon atteint le sol au bout de 10 secondes.

27

Une bougie allumée se consume à un rythme constant. On modélise la hauteur de la bougie par une fonction affine $h(t)$.

Déterminer l'expression de cette hauteur $h(t)$ (exprimée en cm) en fonction du temps t (en heures), sachant que la hauteur initiale de la bougie est de 30 cm et qu'elle se consume complètement en 5 heures.

Nombre dérivé

28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$.

1. Calculer le taux d'accroissement de f au point d'abscisse 4.
2. En déduire le nombre dérivé de f en 4.

29

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7$.

1. Calculer le taux d'accroissement de g au point d'abscisse 2.
2. En déduire le nombre dérivé de g en 2.

30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux d'accroissement de f au point d'abscisse 1.
2. En déduire le nombre dérivé de f en 1.

31

Déterminer le taux d'accroissement de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)^2$ au point d'abscisse (-1). En déduire $g'(-1)$.

32

Déterminer le taux de variation de la fonction inverse f au point 2 puis le nombre dérivé de la fonction inverse au point 2.

33

Déterminer le taux de variation de la fonction racine carrée g au point 1 puis le nombre dérivé de la fonction racine carrée au point 1.

34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -3 + 4h$$

Déterminer $f'(2)$.

35

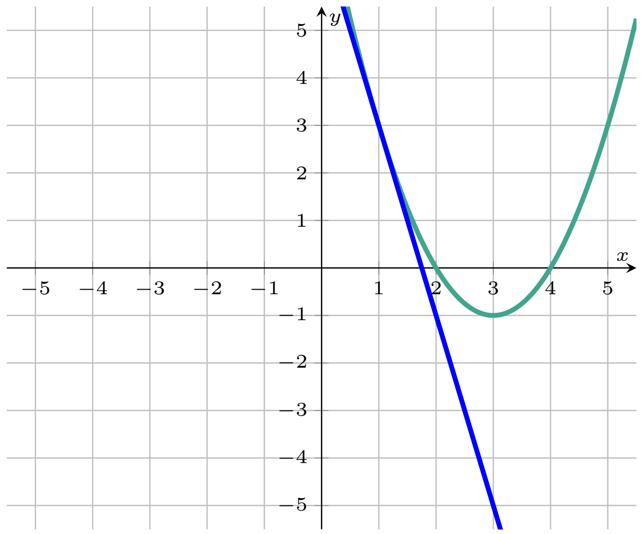
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a :

$$g(3+h) - g(3) = 4h + 2h^2$$

Déterminer $f'(3)$.

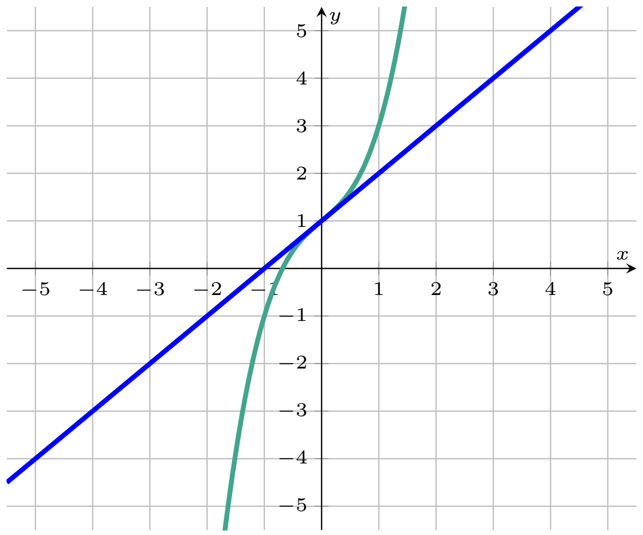
36

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentée ci-dessous :



37

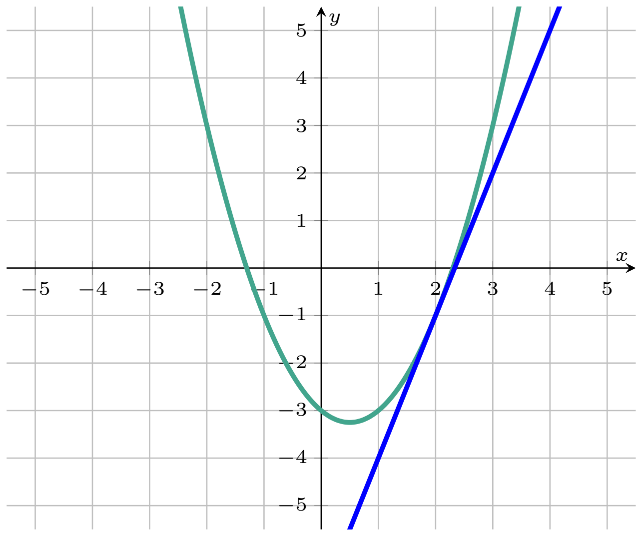
Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentée ci-dessous :



38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-desous avec sa tangente au point A d'abscisse 2.

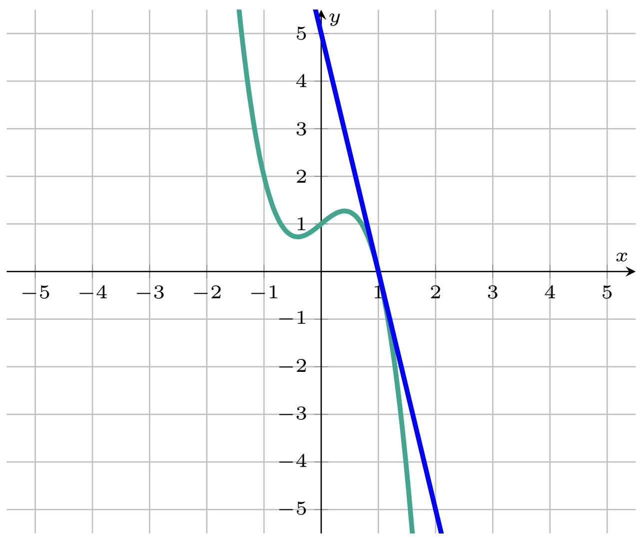
1. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
2. En déduire $f'(2)$.



39

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse 1.

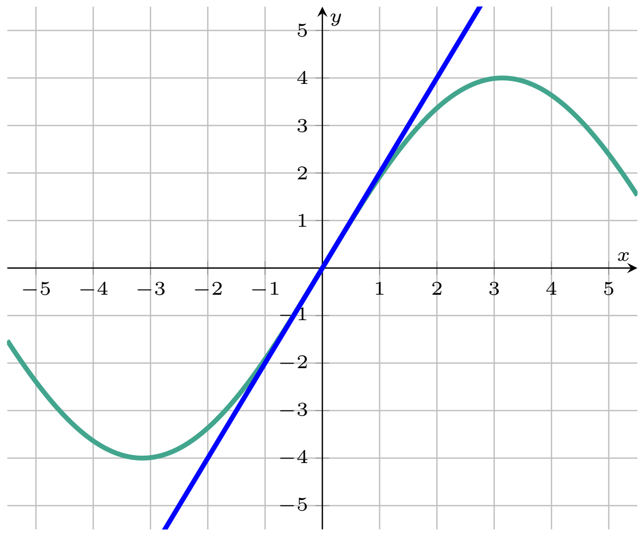
1. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
2. En déduire $g'(1)$.



40

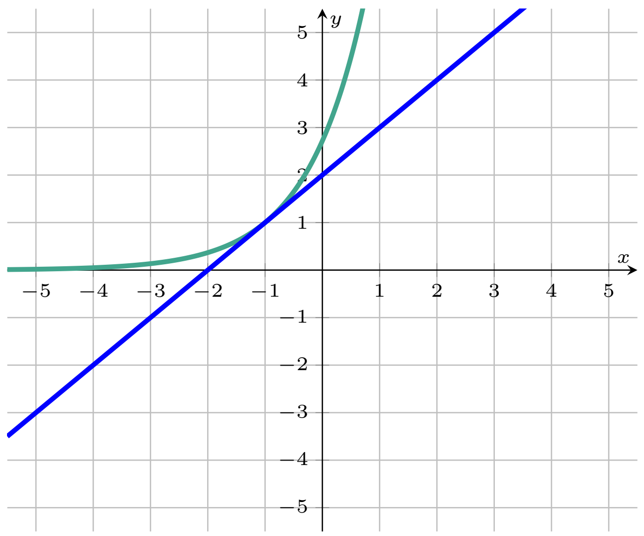
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse 0.

1. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
2. En déduire le nombre dérivé de h en 0.



41

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse -1. Quel nombre dérivé peut-on en déduire? Donner celui-ci.



Fonctions dérivées

42

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x$
- $h(x) = 52$
- $k(x) = x^3$

43

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 8x^2$
- $g(x) = 7x$
- $m(x) = 9x^3$
- $n(x) = \frac{x^2}{8}$
- $h(x) = 12$
- $k(x) = 8x$
- $p(x) = \frac{x^3}{12}$

44

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = x^2 + x$
- $g(x) = 15 + x^3$
- $h(x) = x^2 + x + 3$
- $k(x) = 5 + x^2 + \frac{x^3}{12}$
- $m(x) = 1 + \frac{x^2}{8} + x$

45

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 3x^2 + 5x + 17$
- $g(x) = 7x + 8x^2$
- $h(x) = 5 + 2x^3$
- $k(x) = 7x^3 + 3x^2 + 8x + 5$

46

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = x^3$
- $g(x) = -x^3 + 2x^2$
- $h(t) = 2t + t^3$
- $k(q) = 4q^2 - q + 5$

47

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 6x^2 + 3x - 8$
- $g(x) = 8x^3 - 5x^2 + 2$
- $h(t) = -3t^2 + 4t - 1$
- $k(q) = 5 - 3q + 6q^2$

48

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$
- $g(t) = -2t^3 + 5t + 6$
- $h(q) = 4(q-1)^2$
- $k(x) = x^4 - x^2 + 1$

49

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}005x + 0.1$
- $g(q) = 2q^3 - 3q^2 + 4$
- $h(t) = 4t - 5t^2 + 6$
- $k(x) = x^5 - x + 7$

50

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = (x+5)^2$
- $g(x) = (3x+1)^2$
- $h(x) = \frac{7x^3 + 3x^2 + 2x}{x}$
- $k(x) = \frac{7x^2 + 3x}{x}$

51

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = 2 - 3x^2 + 6x - x^3$
- $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$
- $h(t) = 3t(t-4)^2$

52

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

- $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{5}{6}$
- $g(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}2x^2 - 0{,}1x + 7{,}8$

53

Pour chacune des fonctions ci-dessous, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa dérivée.

1. $h(t) = 0{,}002t^3 - 0{,}006t^2 + 0{,}04t + 0{,}02$
2. $k(q) = q^3 + 4q^2 - 2q + 9$

Équation d'une tangente

54

Donner le coefficient directeur des tangentes aux fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f(x) = 2x + 3$ en $x = 2$;
2. $g(x) = x^2$ en $x = -5$;
3. $h(x) = x^3 + 3$ en $x = 10$;
4. $k(x) = x^2$ en $x = 25$.

55

Donner le coefficient directeur des tangentes aux fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f(x) = -5x + 4$ en $x = 2$;
2. $g(x) = x^2 + 2x + 7$ en $x = -5$;
3. $h(x) = 5x^2 + 3$ en $x = 10$;
4. $k(x) = 4 - x^3$ en $x = 25$.

56

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de leur tangente au point indiqué :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ en $x = 1$;
2. $g(x) = 5x^3 + 4x^2 - x$ en $x = 2$;
3. $h(x) = -2x^2 + 3x + 6$ en $x = -2$;
4. $k(x) = 4x + 7$ en $x = 0$.

57

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'équation de leur tangente au point indiqué :

1. $f(x) = x^2 + x + 4$ en $x = 1$;
2. $g(x) = 7x^3 + x^2 - 3$ en $x = 5$;
3. $h(x) = -5x^2 + \frac{x}{8}$ en $x = 6$;
4. $k(x) = \frac{-3}{4}x - \sqrt{2}$ en $x = 25$.

58

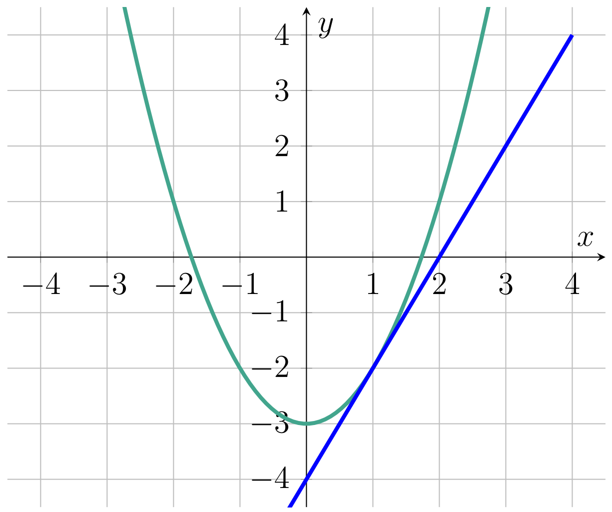
Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de leur tangente au point indiqué :

1. $f(x) = \frac{4}{3}x^2 + 3x + 1$ en $x = 2$;
2. $g(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + x$ en $x = -1$;
3. $h(x) = \frac{5}{2}x - \sqrt{3}$ en $x = 10$.

59

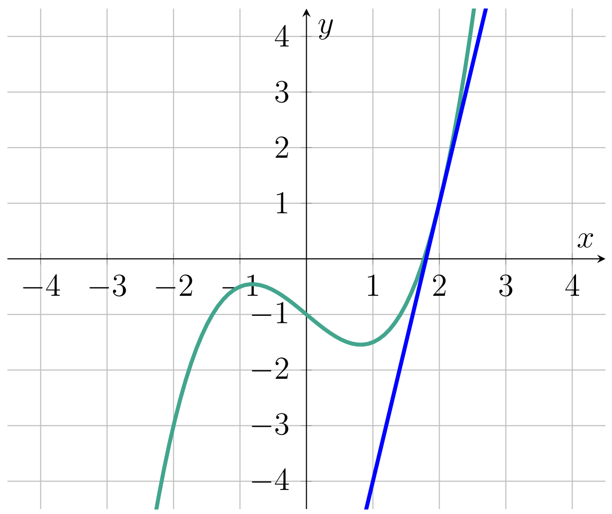
On a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$
2. En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.



60

On a représenté la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.

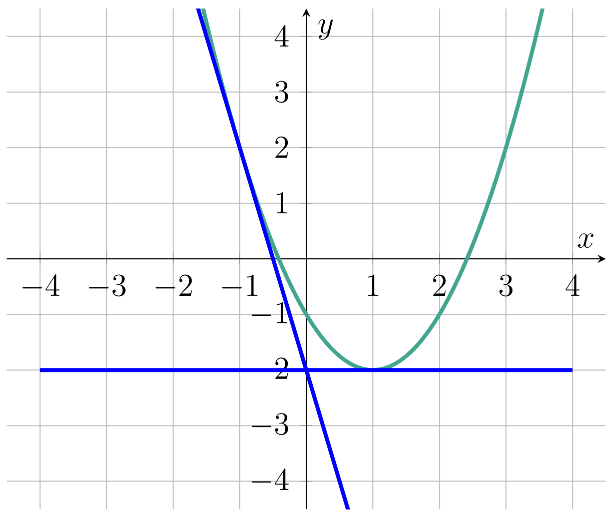


1. Déterminer graphiquement $g(2)$ et $g'(2)$
2. En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

61

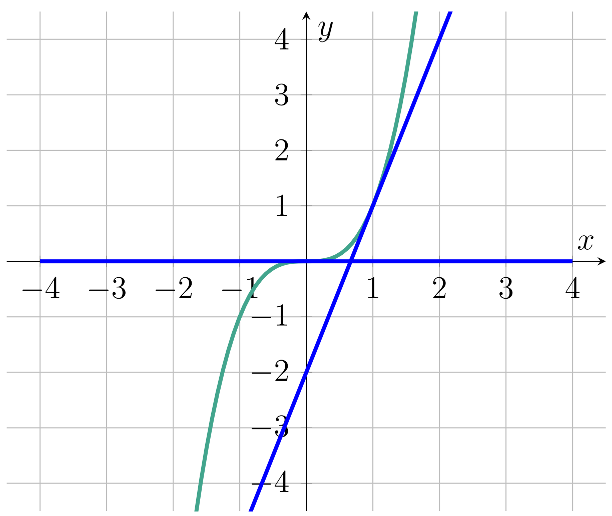
On a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 1.

1. Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $f'(-1)$ puis en déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.
2. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$ puis en déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.



62

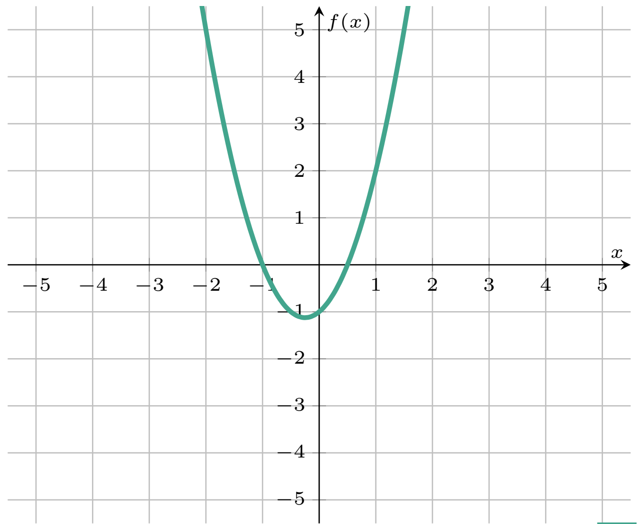
On a représenté la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.



1. Déterminer graphiquement $g(0)$, $g'(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
2. En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 puis au point d'abscisse 1.

63

Dans la figure ci-dessous est représentée la fonction $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

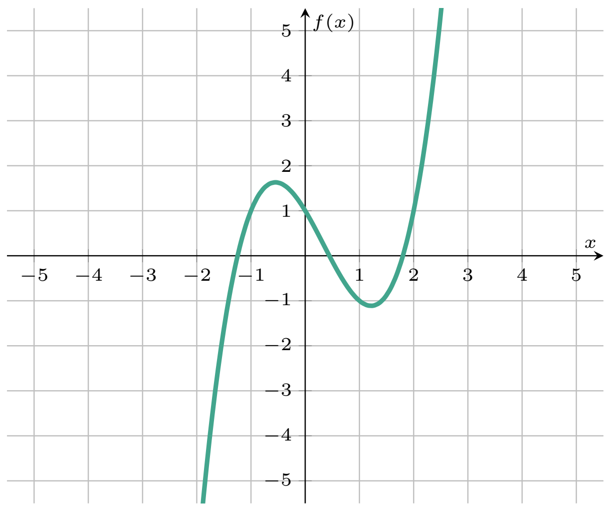


Télécharger le graphique

1. Donner $f'(-1)$.
2. En déduire le coefficient directeur de la tangente à f en -1.
3. Tracer cette tangente.
4. Donner l'équation de cette tangente.

64

Dans la figure ci-dessous est représentée la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.



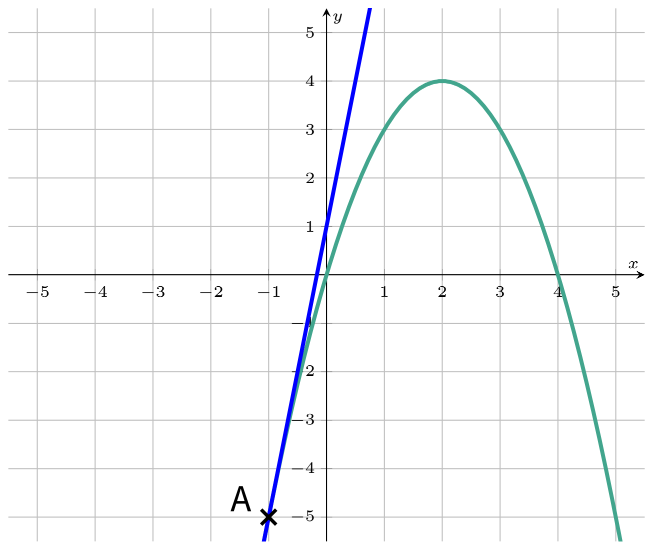
Télécharger le graphique

1. Donner $f'(1)$.
2. En déduire le coefficient directeur de la tangente à f en 1.
3. Tracer cette tangente.
4. Donner l'équation de cette tangente.

65

Soit g la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessous. On a tracé la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point A.

1. (a) Lire $g(-1)$.
   (b) Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
   (c) Déterminer une équation de cette tangente.
2. On admet que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point A d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x + 1$. Quel est le coefficient directeur de cette tangente ? Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?



66

Soit h la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_h$ ci-dessous. On a tracé la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point B.

1. (a) Lire $h(-2)$.
   (b) Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente.
   (c) Déterminer une équation de cette tangente.
2. On admet que la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point B d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x + 1$. Quel est le coefficient directeur de T_D ? Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

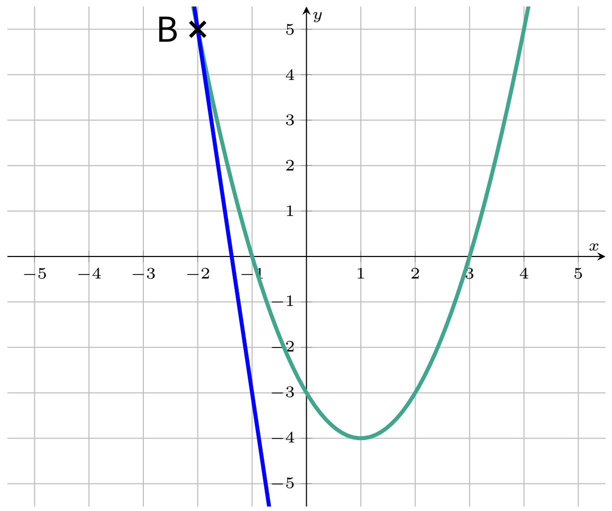


Tableau de variations et extrema

67

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Que peut-on en déduire ?

68

Compléter les phrases suivantes :

1. Si la fonction dérivée d'une fonction f est positive sur $[-2\,;\,4]$ alors f est ...... sur $[-2\,;\,4]$.
2. Si la fonction dérivée d'une fonction g est négative sur $[0\,;\,3]$ alors g est ...... sur $[0\,;\,3]$.

69

Compléter les phrases suivantes :

1. Si la fonction dérivée d'une fonction p est nulle sur $[-1\,;\,1]$ alors p est ......
2. Si la fonction dérivée d'une fonction q est positive sur $[1\,;\,6]$ alors q est ......

70

Compléter le tableau suivant :

x	0		5		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					

71

Compléter le tableau suivant :

x	-3		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$					

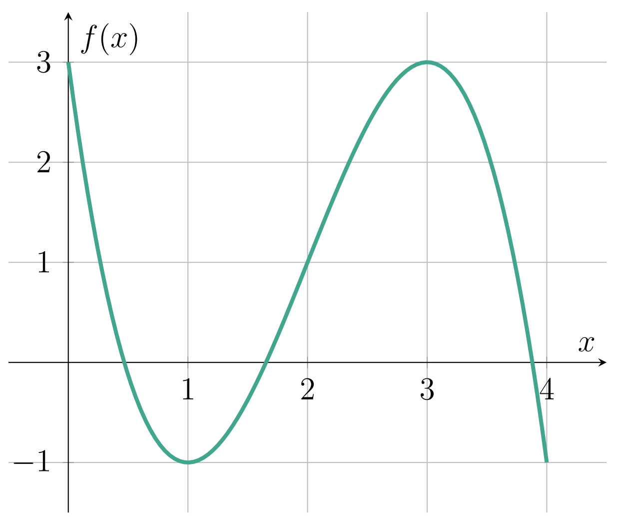
72

Compléter le tableau suivant :

x	-5		-1		6		9
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$							

73

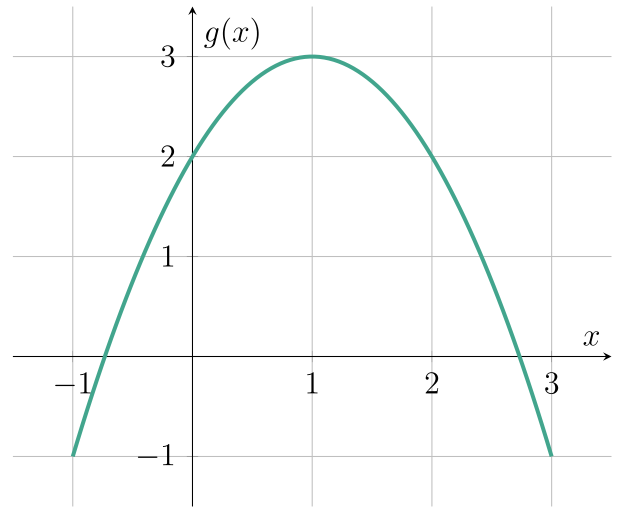
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ et dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Donner le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 4]$.

74

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ 4]$ et dont la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous.



Donner le tableau de signes de $g'(x)$ sur $[-1\ ;\ 3]$.

75

Soit f une fonction définie sur $[-3\ ;\ 3]$ telle que $f'(x) = x - 1$. Dresser le tableau de variations de la fonction f après avoir étudié le signe de $f'(x)$.

76

Soit g une fonction définie sur $[-2\ ;\ 4]$ telle que $g'(x) = 6 - 2x$. Dresser le tableau de variations de la fonction g après avoir étudié le signe de $g'(x)$.

77

Soit h une fonction définie sur $[-1\ ;\ 5]$ telle que $h'(x) = -4x$. Dresser le tableau de variations de la fonction h.

78

Soit k une fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ telle que $k'(x) = (x+1)(x-3)$. Dresser le tableau de variations de la fonction k.

79

Soit m une fonction définie sur $[-2\ ;\ 3]$ telle que $m'(x) = -3x(x+2)^2$. Dresser le tableau de variations de la fonction m après avoir étudié le signe de $m'(x)$.

80

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - x + 7.$$

Donner son tableau de variation.

81

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2x^2 + 5x - 3.$$

Donner son tableau de variation.

82

Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2 - x^2.$$

Donner son tableau de variation.

83

Soit k une fonction définie sur $[-3\ ;\ 3]$ par :

$$k(x) = 2x + 3x^2 - 1.$$

Donner son tableau de variation.

84

Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$. En déduire les coordonnées du sommet de cette parabole.

85

Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = -5x + 14$ sur $[-6\ ;\ 5]$. En déduire les extrema de f sur $[-6\ ;\ 5]$.

86

1. Montrer que

$$3x^2 + 2x - 8 = 3\,(x+2)\left(x - \frac{4}{3}\right).$$

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$ sur $[-10\ ;\ 4]$.
3. Donner les extrema de f sur $[-10\ ;\ 4]$.

87

Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sur $[-3\ ;\ 9]$. En déduire les extrema de f sur $[-3\ ;\ 9]$.

88

1. Montrer que

$$6x^2 + 6x - 72 = 6\,(x-3)\,(x+4)\,.$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 8$ sur $[-7\ ;\ 7]$.
3. Donner les extrema de f sur $[-7\ ;\ 7]$ s'ils existent.

89

Soit f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3.$$

1. Calculer puis factoriser $f'(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

90

Soit g la fonction définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par :

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - x.$$

1. Calculer puis factoriser $g'(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de g sur $[-1\ ;\ 3]$.

91

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x}{x}$

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
2. Trouver une autre écriture de cette fonction f sur son ensemble de définition D_f.
3. Calculer la dérivée de cette fonction.
4. Déterminer les variations de cette fonction sur D_f.
5. Préciser l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.
6. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

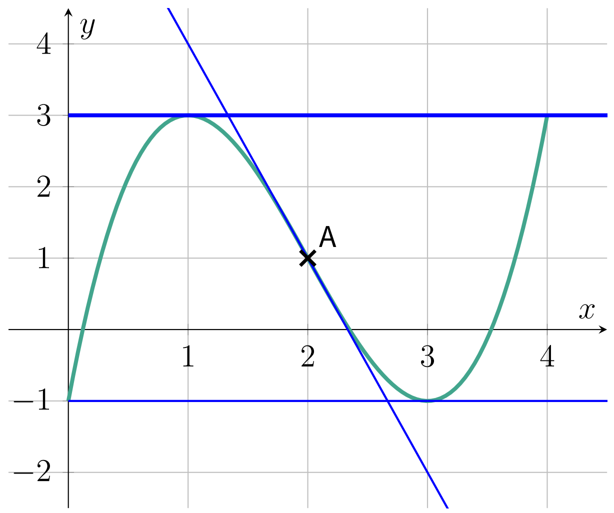
92

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ et dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.

1. Donner le signe de $f'(2)$. Justifier.
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

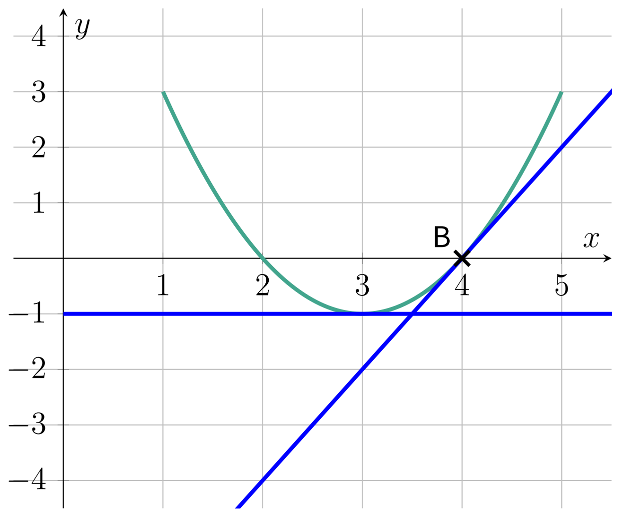
(a) $f(x) = 0$.
(b) $f(x) \geq 0$.
(c) $f'(x) = 0$.
(d) $f'(x) \geq 0$.

3. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 4]$.



93

On considère la fonction g définie sur $[1\ ;\ 5]$ et dont la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous :



1. Donner le signe de $g'(3)$. Justifier.
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $g(x) = 0$.
   (b) $g(x) \geq 0$.
   (c) $g'(x) = 0$.
   (d) $g'(x) \geq 0$.
3. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $[1\ ;\ 5]$.

Tracé de fonctions à l'aide de la calculatrice

94

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. À l'aide de votre calculatrice, remplir le tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$f(x)$							

2. Calculer la dérivée de f et en déduire les coordonnées du sommet de la parabole associée à f.
3. Tracer, à l'aide de ce tableau et de votre calculatrice, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 4{,}5]$.

95

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

1. À l'aide de votre calculatrice remplir le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	$1{,}25$	$1{,}5$
$f(x)$							

2. Tracer, à l'aide de ce tableau et de votre calculatrice, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

96

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

1. À l'aide de votre calculatrice remplir le tableau de valeurs ci-dessous.

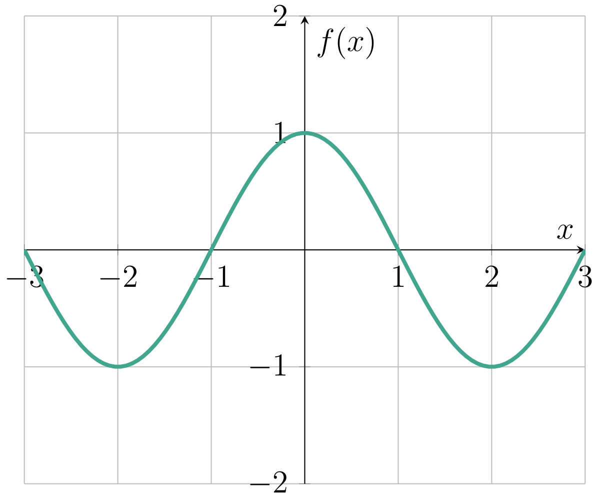
x	0	1	4	9
$f(x)$				

2. Tracer à l'aide de ce tableau et de votre calculatrice, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 9]$.

Problèmes

97

Soit une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 3]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Résoudre $f'(x) \times f(x) = 0$.

98

Soit f une fonction définie sur $[-6\ ;\ 8]$ telle que :

- $f(0) = 2$,
- $f'(0) = -3$,
- $f(6) = 1$,
- $f'(6) = 1$.

Un tableau de valeurs de cette fonction est également donné ci-dessous.

x	-6	-3	1	8
$f(x)$	-1	4	-2	3

Tracer une courbe pouvant représenter f en faisant apparaître les données de l'énoncé, notamment les tangentes.

99

Soit f une fonction définie sur $[-5\ ;\ 4]$ dont le tableau de signes de sa dérivée est donné ci-dessous :

x	-5		-3		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de valeurs de f est :

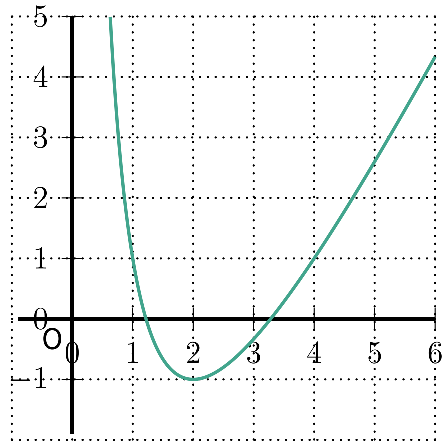
x	-5	-3	0	1	4
$f(x)$	4	1	3	5	2

De plus, $f'(-3) = -2$ et $f'(1) = 1$.

Tracer une courbe possible $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître ses tangentes.

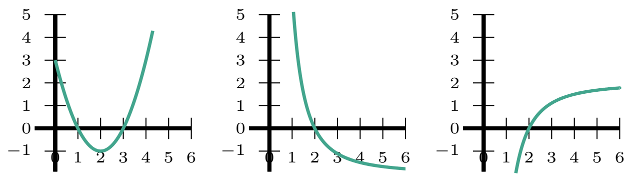
100

On considère une fonction f dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est tracée ci-dessous.



Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle est la courbe représentative de la fonction f' ?

a. **b.** **c.**

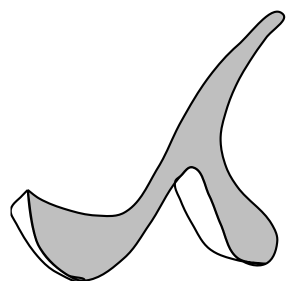


101

La société « design » souhaite commercialiser un fauteuil à l'effigie de son nom (voir figure ci-dessous).

La production en série de ce fauteuil nécessite la réalisation d'un gabarit. On se propose, au travers des deux premières parties du problème, de compléter le tracé figurant à la fin de cet exercice, représentant une réduction à l'échelle $1/10$ d'une partie du gabarit de ce fauteuil. La troisième partie sera consacrée à l'étude de l'indice de confort du fauteuil.

Les trois parties sont indépendantes



Partie A : Étude de la fonction associée au profil de l'assise

Le profil de l'assise du fauteuil peut être modélisé par un arc de parabole notée $\mathcal{P}$ dont une équation est de la forme $y = ax^2 + bx + 4$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

Dans le repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) d'origine $O(0\ ;\ 0)$, la courbe $\mathcal{P}$ passe par les points A$(-4\ ;\ 4)$ et B$(3\ ;\ 9{,}25)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = 0{,}25x^2 + x + 4.$$

   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-4\ ;\ 3]$.

   (b) À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous.

   (c) Compléter le tracé avec la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$								

Partie B : Étude de la fonction associée au profil des pieds du fauteuil

Le profil d'une partie des pieds du fauteuil peut être modélisé par la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-4\ ;\ 3{,}5]$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2.$$

1. (a) Démontrer que

$$g'(x) = -\frac{3}{8}(x-2)(x+2)$$

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[-4\ ;\ 3{,}5]$.

2. À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction g ci-dessous (valeurs arrondies à 10^{-1} près).

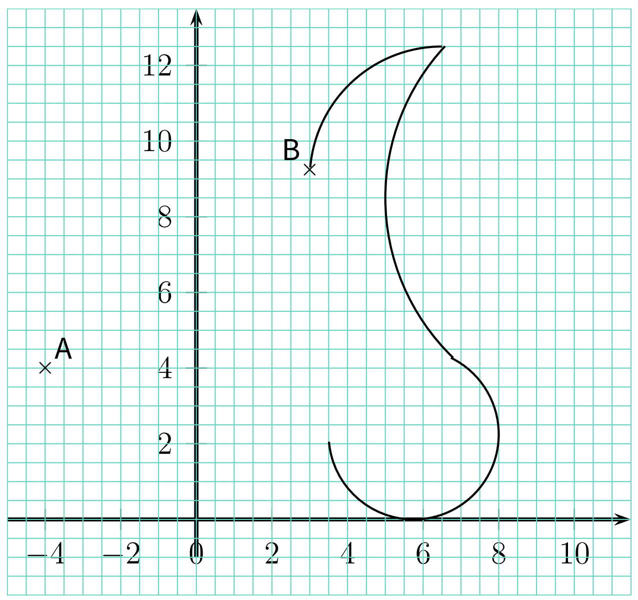
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$								

3. Comparer $f(-4)$ et $g(-4)$. Que peut-on en conclure graphiquement ?
4. Compléter le tracé avec la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3{,}5]$.

Partie C : Étude de l'indice de confort

L'indice de confort du fauteuil se mesure à l'aide de l'angle noté α formé par les tangentes à l'arc de parabole $\mathcal{P}$ aux points A et B. Le fauteuil se verra décerner le label « confort + » si l'angle α a une mesure comprise entre 60 °et 70 °.

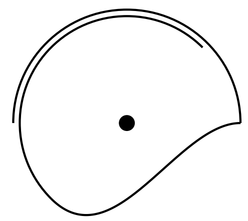
1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{P}$ en A et le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{P}$ en B.
2. On considère le point C$(-0{,}5\ ;\ 0{,}5)$. Vérifier que (AC) est la tangente à $\mathcal{P}$ en A et que (BC) est la tangente à $\mathcal{P}$ en B. Tracer ces deux tangentes sur la figure ci-dessous.



Télécharger le graphique

102

Un designer-graphiste a imaginé le logo ci-dessous. Il est constitué de deux demi-cercles concentriques et d'une courbe. L'objectif de cet exercice est de reproduire ce logo.



On souhaite construire la base du logo avec un raccordement lisse en O.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = -0{,}072x^3 + 0{,}64x^2 - x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ à la fin de l'exercice. On a placé les points $A(5\ ;\ 2)$ et $B(-1\ ;\ 2)$ puis on a tracé le demi-cercle supérieur joignant les points A et B.

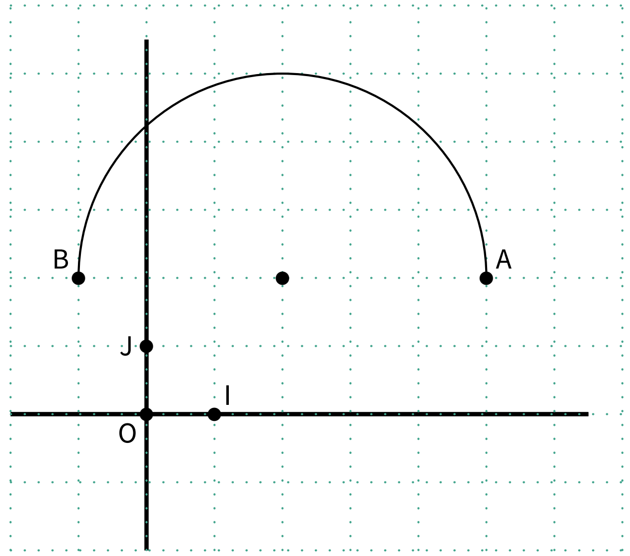
1. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points O et A.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (c) Calculer $f'(5)$ et donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
   (d) Vérifier que :

$$f'(x) = 0{,}008(5-x)(27x-25).$$

3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f (on arrondira à 10^{-3} près).

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$					$1{,}632$	

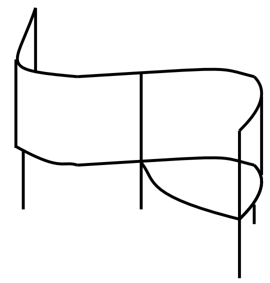
5. Compléter le logo en traçant $\mathcal{C}_f$



Télécharger le graphique

103

Un designer de l'entreprise « Duo » lance un projet de fauteuil double (figure ci-dessous). Le profil du dossier de ce fauteuil est modélisé mathématiquement. On se propose d'en effectuer le tracé dans cet exercice.



Le profil de l'un des deux dossiers de ce fauteuil peut être modélisé par un arc de parabole noté P_f dont l'équation est de la forme $y = -x^2 + 6x - 8$.

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 8.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 4]$. Justifier.
2. Recopier et compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous (on laissera les valeurs exactes).

x	2	$2{,}5$	$2{,}75$	3	$3{,}25$	$3{,}5$	4
$f(x)$							

3. Tracer, dans un repère orthonormé, l'arc de parabole P_f représentatif de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.
4. Justifier que $f'(2)$, nombre dérivé de la fonction f en 2, est égal à 2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
5. Compléter votre figure avec la la tangente (T) à P_f au point A d'abscisse 2.

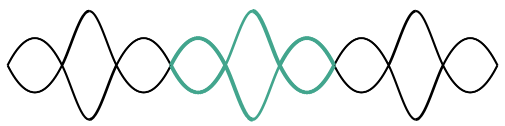
104

En raison d'une forte augmentation du nombre de personnes infectées par un virus dans une ville, une campagne de sensibilisation et de traitement a été lancée en janvier 2023. On modélise le pourcentage de personnes infectées en fonction du temps t, exprimé en mois écoulés depuis janvier 2023, par la fonction q, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,24]$ par : $q(t) = -0.3t^2+6t+20$.

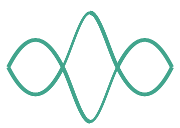
1. Calculer la fonction dérivée de la fonction q et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction q sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
3. Quel était le pourcentage de personnes infectées au début de la campagne ?
4. Quel a été le pourcentage maximum de personnes infectées durant l'épidémie ? À quel moment ce maximum a-t-il été atteint ?
5. Déterminer l'année et le mois durant lesquels le virus aura disparu de la ville.

105

Le but de cet exercice est de donner une construction à l'aide d'outils mathématiques de la frise suivante :



Dans tout l'exercice, on appellera « motif » la figure suivante :



Partie A :

La courbe $\mathcal{C}_f$, tracée sur le graphique à la fin de cet exercice, est la représentation graphique d'une fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(2\,;\,0)$; tracer cette tangente sur la courbe du graphique ci-dessous.

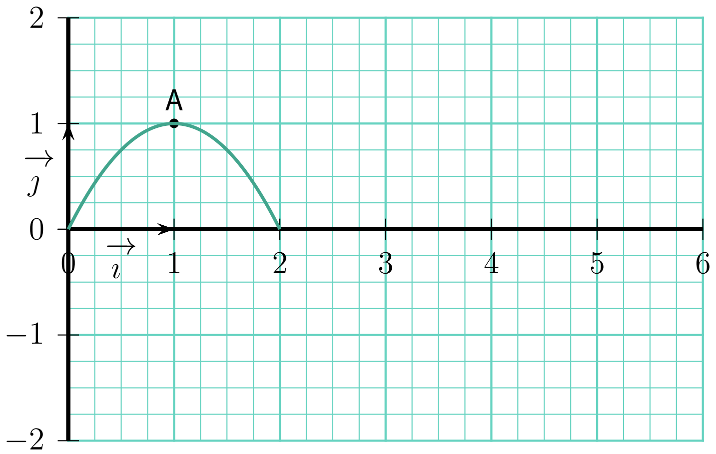
Partie B :

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[2\,;\,3]$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 20$$

et $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique.

1. Calculer $g(2)$; en déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ passe par le point B.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Déterminer l'expression de $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
3. Calculer $g'(2)$ puis en déduire que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente au point B.
4. Calculer $g(3)$ et $g'(3)$; quelle est la particularité de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ en son point C d'abscisse 3 ?
   Placer le point C et tracer cette tangente sur le graphique.



Télécharger le graphique

04. TP

String art et tangentes

Mary Everest Boole

Mary Everest Boole (1832-1916) fut une mathématicienne et philosophe britannique connue notamment pour son travail de vulgarisation des mathématiques. Sa vision de l'enseignement impliquait l'utilisation de matériaux naturels et de l'activité physique afin d'encourager une conception imaginative des sujets.

A la fin du XIXème siècle, elle développe un ensemble d'activités appelées *curve stitch*, consistant à reproduire des formes géométriques à l'aide de fils tendus. Aujourd'hui connues sous le nom de *String Art*, ces activités reposent sur la notion mathématique de tangentes.

Première construction

Nous allons commencer par construire une parabole. On considère la fonction

$$f(x) = x^2.$$

Soit A, B, C, D les points appartenant à la courbe représentative de f et ayant pour abscisse respective 0, 1, 2 et 3.

1. Calculer les coordonnées de chaque de ces points.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en chacun de ces points.
3. Tracer sur une feuille de papier chacune de ces droites.

L'enveloppe tangentielle ainsi obtenue est trop grossière pour reproduire la parabole souhaitée. Comment l'améliorer ?

Automatisation avec Geogebra

Le tracé de chacune des tangentes étant long, nous pouvons automatiser notre processus en utilisant Geogebra.

1. Définir la fonction f dans le champ de saisie, puis la droite d'équation :
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
   À quoi correspond la droite tracée ?
2. Accepter la création du curseur. Dans l'onglet *Propriétés*, changer l'incrément à $0{,}25$ (on fixera le minimum à 0 et le maximum à 4).
3. En sélectionnant la tangente par un clic droit, activer *Afficher la trace*.
4. Lancer l'animation du curseur. Qu'obtient-on ?

Réalisation

Nous allons maintenant réaliser cette courbe sur une planche de bois de 20x20cm.

1. Sur votre figure Geogebra, tracer un carré dont les sommets ont pour coordonnées $(-2\,;\,0)$, $(2\,;\,0)$, $(2\,;\,4)$ et $(-2\,;\,4)$.
2. A l'aide de l'outil *Intersection*, noter les coordonnées des points d'intersections de la tangente avec les bords du carré pour chaque valeur de curseur a.
3. Reproduire le carré sur votre planche de bois (on utilisera pour échelle 1 unité = 4cm).
4. Placer, à l'aide de clous, les points obtenus et relier-les par des fils.
5. Compléter votre figure par symétrie.

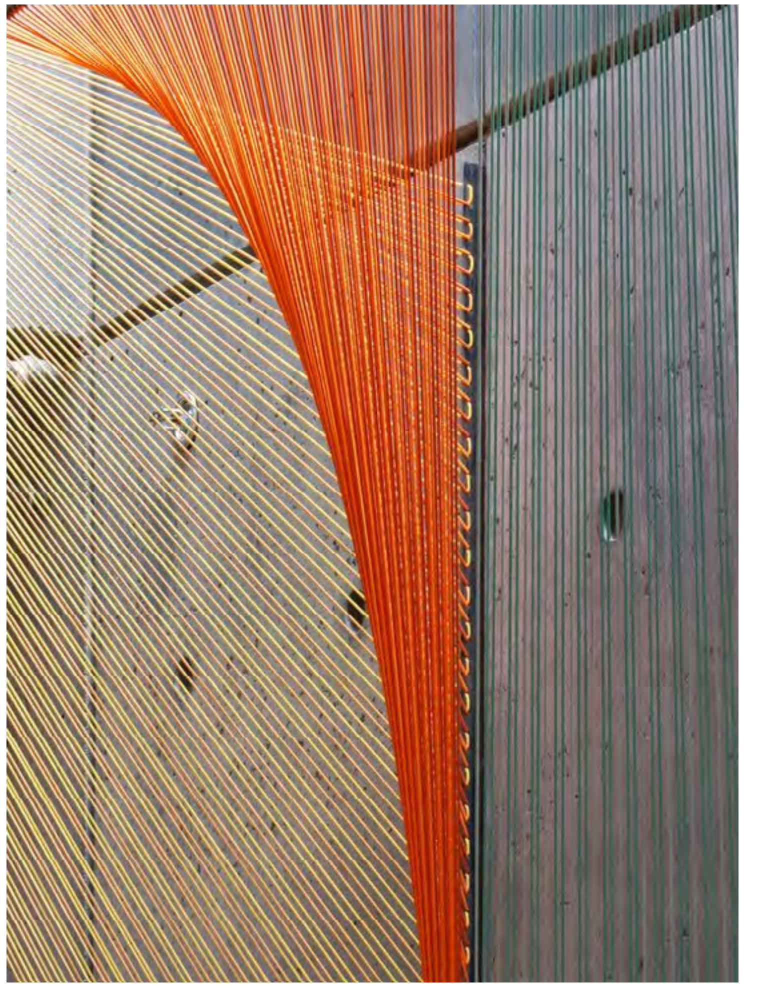
Pour aller plus loin

Vous pouvez maintenant appliquer cette démarche à d'autres fonctions. Il également possible de l'appliquer pour tracer des cercles ou des ellipses. Pour le cercle la fonction à utiliser sera :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

.

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
2. Expliquer cette formule en utilisant l'équation cartésienne du cercle.
3. Donner les caractéristiques du cercle ainsi obtenu.
4. Quelle transformation du plan doit-on appliquer afin d'obtenir l'intégralité du cercle ?



De gauche à droite et de haut en bas

Plexus n°12
Gabriel DAWE

Prism
Inés ESNAL

Sliding Ladder
Nike SAVVAS

07

STATISTIQUES

Objectifs du chapitre : Interpréter l'union, l'intersection ou le complémentaire d'événements / Interpréter un diagramme de Venn / Compléter un tableau croisé d'effectifs / Calculer une fréquence / Obtenir un tableau croisé de fréquences / Interpréter et calculer une probabilité conditionnelle.

Dragos MOTICA
Slash Lamp
2014

01. INTRODUCTION

Chacune des références ci-dessous exploite une même notion mathématique : trouvez cette notion et dégagez ses principales caractéristiques à partir des différences observées entre chaque oeuvre.

1. Slash Lamp, cordon élastique, béton armé, liège, contreplaqué de bouleau, LED, Dragos MOTICA, 2014.

2. Pratt Chair, résine uréthane souple, série limitée de neuf exemplaires, Gaetano PESCE, 1983-85.

3. Gravity Stool, mélange de matière plastique métalisée, Jolan VAN DER WIEL, 2011.

4. Identité visuelle de l'album Running with the Beast du groupe rock zZz. Affiche ; traces picturales obtenues à partir d'animaux en mouvement, papier et encres, Roel WOUTERS, 2008.

5. The sequence project, Sveta AXONOVA, designer textile danoise, 2014.

6. Slastic, porte manteau. Fil d'acier, élastique, acier laqué, crayons de couleurs, Emili PADROS et Ana MIR, 2010.

7. Do hit chair, acier inoxidable, DROOG DESIGN, 2000.

8. Cloning, chaise en hêtre et mousse, STUDIO 5.5, 2008.

Ces références sont visibles en scannant le QRCode ci-dessus.

STATE OF THE WORLD

Ci-dessous :
Répartition de la population française en fonction du sexe et de l'âge en 2023, source INSEE

Tranche d'âge	Nombre de femmes	Nombre d'hommes
[0;10[	3603779	3773723
[10;20[	4156285	4394489
[20;30[	3834691	3911416
[30;40[	4226211	4045796
[40;50[	4318119	4155921
[50;60[	4565115	4400575
[60;70[	4304299	3888850
[70;80[	3637660	3016025
[80;90[	1915577	1268974
[90;100[	666955	257329
100 ans et plus	26997	4647

Imaginé en 2021 par Mathieu Lehanneur, *State of the World*, est une collection de sculptures reproduisant les pyramides d'âges de 140 pays. Les creux et les entailles révèlent des guerres, des épidémies ou d'autres accidents de l'histoire le long des 100 strates les composant.

1. Pyramide des âges

Une pyramide des âges est un double histogramme (un pour les hommes, un pour les femmes). Chaque barre est associée à une tranche d'âge - dans le cas de *State of the World*, 10 ans par tranche. L'autre axe est associé au nombre ou à la proportion de cette tranche d'âge dans la population.

La pyramide des âges en France en 2023 est donnée à la dernière page de cette activité. Le tableau permettant sa construction est donné ci-contre.

a. D'après le graphique de la pyramide des âges, ou le tableau correspondant, quel est le pourcentage d'hommes ayant entre 10 et 20 ans, parmi la population française d'hommes en France en 2023 ?

b. Quel est le pourcentage de femmes ayant entre 20 et 60 ans dans la population française de femmes en 2023 ?

c. En reprenant le tableau ci-contre, dresser la pyramide des âges en France en 2023 pour des tranches d'âges, de non plus 10 ans, mais de 20 ans.

2. Étendue et médiane

a. Reprendre le tableau précédent et établir le tableau des fréquences cumulées.

b. Définir l'étendue d'une série statistique.

c. Donner l'étendue de la série associée à la population masculine - on considère l'âge maximal de cette série égal à 100. Faire de même avec la population féminine.

d. Rappeler la définition de la médiane d'une série statistique. Comparer le rôle de la médiane à celui de l'étendue dans l'étude d'une série statistique.

e. Donner la médiane de la série associée à la population masculine. Faire de même avec la population féminine.

3. Quartile et écart inter-quartile

a. Définir le premier quartile Q1 et le troisième quartile Q3 d'une série statistique.

b. Donner le premier et le troisième quartile de la série associée à la population masculine en France en 2023. Faire de même avec la population féminine.

d. Rappeler la définition de l'écart interquartile d'une série statistique. Comparer le rôle des quartiles à celui de l'écart interquartile dans l'étude d'une série statistique.

e. Donner l'écart interquartile de la série associée à la population masculine. Faire de même avec la population féminine.

4. Tableau croisé d'effectifs

a. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous.

	Moins de 30 ans	30 ans ou plus	Total
Homme			
Femmes			
Total			

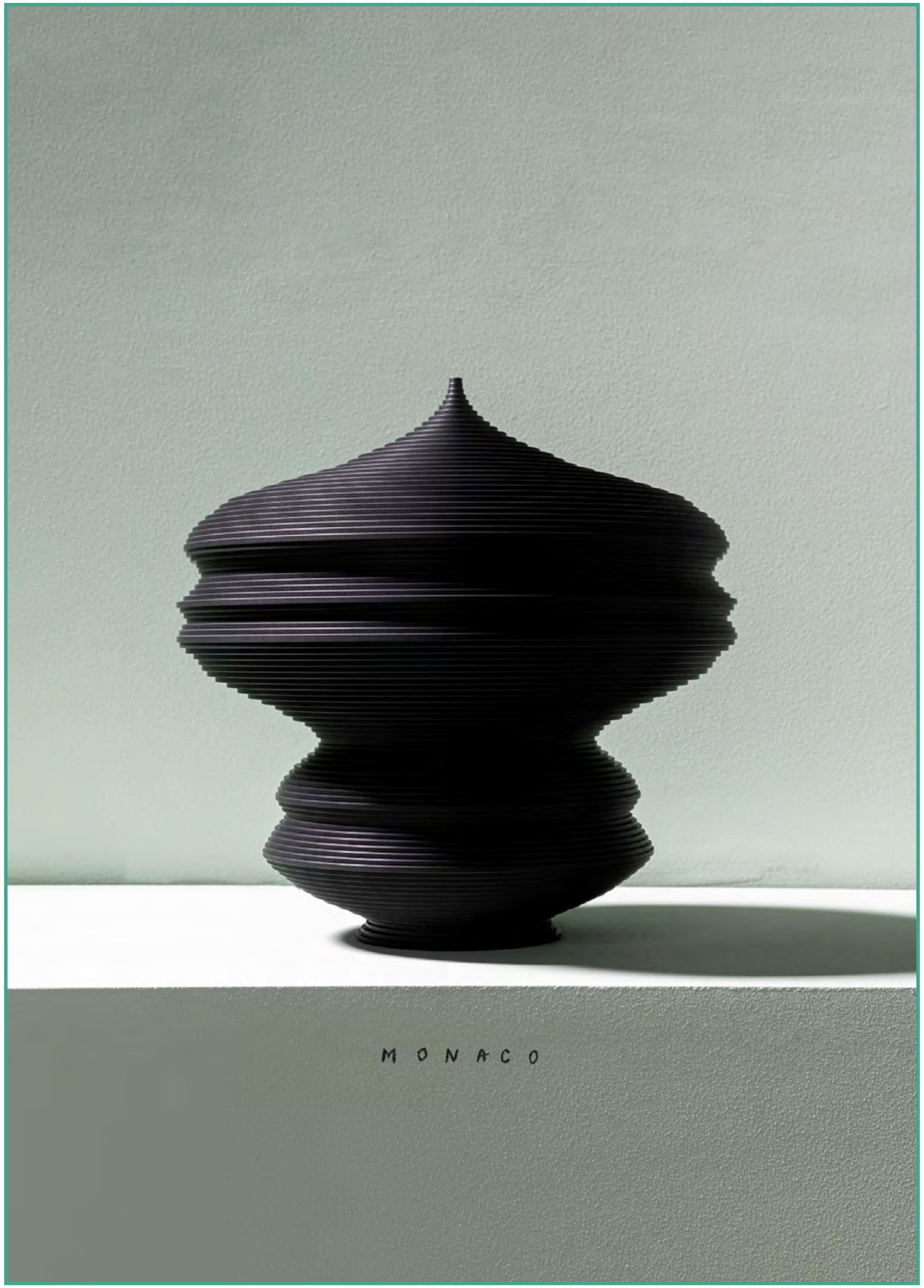
b. Par lecture du tableau, combien y a-t-il de femmes en France en 2023 ?

c. Toujours d'après le tableau, combien y a-t-il de personnes ayant plus de 30 ans en France en 2023 ?

d. Combien y a-t-il de femmes de plus de 30 ans en France en 2023 ?

e. Combien y a-t-il d'hommes de moins de 30 ans en France en 2023 ?

Ci-dessous et à droite :
State of the World,
Mathieu Lehanneur, 2021



5. Tableau croisé de fréquences

a. Reprendre le tableau précédent en remplaçant les effectifs par les fréquences.

b. Par lecture de ce nouveau tableau, quel est le pourcentage d'hommes parmi la population française en 2023 ?

c. Quel est le pourcentage de personnes de moins de 30 ans parmi la population française en 2023 ?

d. Quel est le pourcentage de femmes de plus de 30 ans parmi la population française en 2023 ?

6. Probabilités conditionnelles

a. On choisit au hasard une personne en France en 2023. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

b. On choisit au hasard une personne en France en 2023. Quelle est la probabilité que cette personne ait plus de 30 ans ?

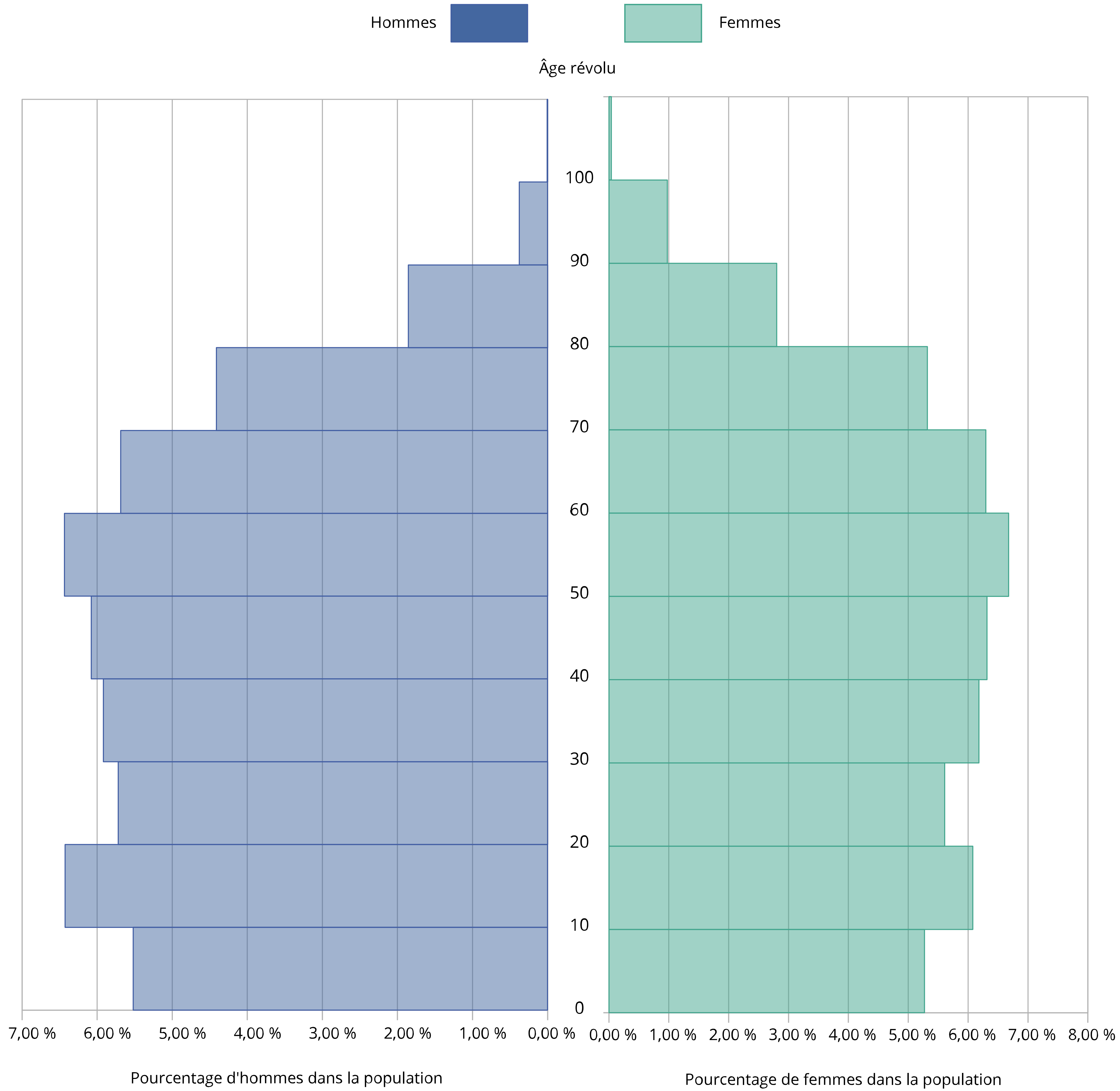
c. On choisit au hasard une personne en France en 2023. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme de plus de 30 ans ?

d. On choisit au hasard une femme en France en 2023. Quelle est la probabilité que cette femme ait moins de 30 ans ?

e. On choisit au hasard un homme en France en 2023. Quelle est la probabilité que cet homme ait plus de 30 ans ?

f. On choisit au hasard une personne de plus de 30 ans en France en 2023. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

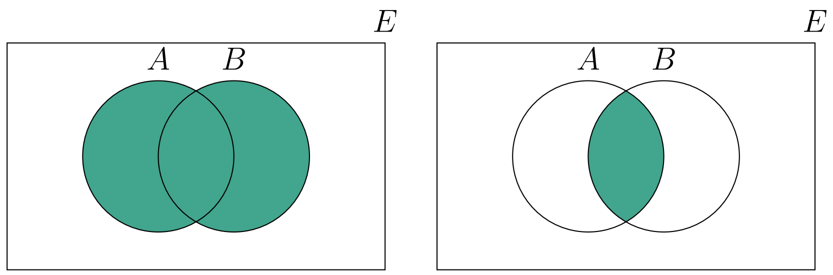
À droite :
Pyramide des âges en France en 2023



Union, intersection et cardinal

Vocabulaire

Soit A et B deux sous-populations de E. Alors le diagramme de Venn à gauche représente l'ensemble $A \cup B$ (qui se lit « A union B ») et celui de droite l'ensemble $A \cap B$ (qui se lit « A intersection B ») :



On appelle **cardinal** d'un ensemble A, que l'on note $Card(A)$, le nombre d'éléments dans l'ensemble A.

Exemple

« Dans une classe de 32 élèves, il y a 18 filles. Parmi les 26 élèves de 17 ans, on dénombre 14 filles. On demande maintenant aux élèves qui sont des filles ou qui ont 17 ans de lever la main. On en compte 30. Si A est la sous-population des filles, et B celle des élèves de 17 ans, donner $Card(A)$, $Card(B)$, $Card\,(A \cup B)$ et $Card\,(A \cap B)$. »

Réponse :

$Card(A) = 18$,
$Card(B) = 26$,
$Card\,(A \cup B) = 30$,
$Card\,(A \cap B) = 14$.

Tableaux croisés

Introduction

Un tableau croisé permet d'établir une éventuelle corrélation entre deux caractères / données. Par exemple entre le chiffre d'affaire d'une entreprise et son budget marketing, ou le poids et la taille d'une personne.

Tableau croisé d'effectifs

On appelle **série statistique à deux variables**, que l'on note $(X; Y)$, une série statistique portant simultanément sur deux caractères X et Y.

Dans le cas d'une série statistique à deux variables, un tableau croisé d'effectifs (ou tableau à double entrée) permet d'étudier simultanément les effectifs de deux caractères en les présentant de la manière suivante :

	x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_m	TOTAL
y_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de y_1
$\dots$						
y_i	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de y_i
$\dots$						
y_k	n_{k1}		n_{kj}		n_{km}	Effectif de x_k
TOTAL	Effectif de x_1		Effectif de x_j		Effectif x_m	Effectif total

où $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ sont les valeurs prises par le caractère X et $(y_1; y_2; \dots; y_m)$ sont les valeurs prises par le caractère Y.

On appelle **effectifs marginaux** les effectifs de chaque caractère (ceux indiqués dans la ligne et la colonne « Total ») .

Exemple

« On a effectué un sondage auprès de 2570 personnes d'une même ville. Parmi elles, 815 personnes sont des femmes. Parmi ces femmes, 40% votent pour le candidat A. Au total, le candidat A. a recueilli 1732 voix. Compléter le tableau croisé d'effectifs suivant, où le 1er caractère est le sexe et le second le candidat choisi. »

Réponse :

1. On commence à remplir le tableau avec l'effectif total et l'effectif marginal associé aux femmes. On en déduit celui associé aux hommes.
2. Comme 40% des femmes votent pour le candidat A. on en déduit l'effectif associé qui est de 326, et alors l'effectif associé aux femmes ayant votées pour le candidat B qui est égal à $815 - 326$.
3. On sait que l'effectif marginal associé au candidat A. est de 1732. On en déduit que $1732 - 326$ hommes ont voté pour ce candidat.
4. Il ne reste plus qu'à compléter les effectifs manquant (effectif marginal pour le candidat B. et effectif des hommes ayant voté pour ce candidat) en suivant la même démarche.

	$y_1 =$ A.	$y_2 =$ B.	TOTAL
$x_1 =$ Femmes	326	489	815
$x_2 =$ Hommes	1406	349	1755
TOTAL	1732	838	2570

Fréquence

Soit E une **population de référence**, et A une **sous-population** de E. L'effectif de E est n_E, celui de A est n_A.

La fréquence de A dans E est le rapport

$$\boxed{f = \frac{n_A}{n_E}}$$

Exemple

« Dans une classe de 32 élèves, il y a 18 filles. Parmi les 26 élèves de 17 ans, on dénombre 14 filles. Calculer :

1. la fréquence de filles dans la classe ;
2. la fréquence de filles de 17 ans parmi les filles. »

Réponse :

1. $f = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$;
2. $f = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$.

Tableau croisé de fréquences

Un tableau croisé des fréquences par rapport à l'effectif global est identique à un tableau croisé d'effectifs, à la différence près que les effectifs sont remplacés par les fréquences correspondantes.

Exemple

« Donner le tableau croisé de fréquences dans l'exemple précédent des élections. »

Réponse :

	$y_1 =$ A.	$y_2 =$ B.	TOTAL
$x_1 =$ Femmes	$\frac{326}{2570} \approx 0{,}13$	$\frac{489}{2570} \approx 0{,}19$	$\frac{815}{2570} \approx 0{,}32$
$x_2 =$ Hommes	$\frac{1406}{2570} \approx 0{,}54$	$\frac{349}{2570} \approx 0{,}14$	$\frac{1755}{2570} \approx 0{,}68$
TOTAL	$\frac{1732}{2570} \approx 0{,}67$	$\frac{838}{2570} \approx 0{,}33$	1

Définition

Les **fréquences marginales** correspondent aux fréquences de chaque caractère (*ie.* les fréquences que l'on retrouve dans la ligne et la colonne « TOTAL »).

Exemple

Dans l'exemple précédent, la fréquence marginale correspondant au vote pour A. est de $\frac{1732}{2570} \approx 0{,}67$.

Tableau des fréquences conditionnelles

Définition

Reprenons le tableau croisé d'effectifs vu précédemment :

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	TOTAL
x_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de x_1
$\dots$						
x_i	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de x_i
$\dots$						
x_k	n_{k1}		n_{kj}		n_{km}	Effectif de x_k
TOTAL	Effectif de y_1		Effectif de y_j		Effectif y_m	Effectif total

On peut isoler une ligne ou une colonne si on fixe une valeur d'un des deux caractères. La série obtenue est appelée **série conditionnelle**. C'est une série statistique à une seule variable :

Y	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	TOTAL
Effectif des Y	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif des Y pour x_i

On peut également donner le tableau de fréquences associé. Dans ce cas, on divisera non pas par l'effectif total mais par l'effectif **du caractère** x_i **isolé**. Les fréquences obtenues ne sont plus des **fréquences marginales**, mais des **fréquences conditionnelles**.

Exemple

Donner le tableau des fréquences conditionnelles par rapport au caractère « la personne ayant voté est un homme » dans l'exemple précédent des élections.

Réponse : Ici nous devons calculer les fréquences par rapport à l'effectif marginal associé aux hommes, c'est-à-dire 1755.

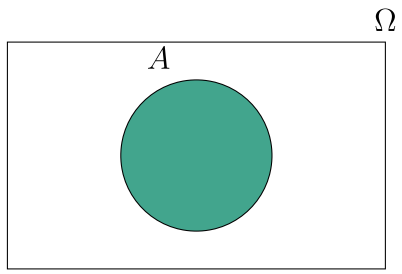
	$y_1 =$ A.	$y_2 =$ B.	TOTAL
$x_2 =$ Hommes	$\frac{1406}{1755} \approx 0{,}8$	$\frac{349}{1755} \approx 0{,}2$	1

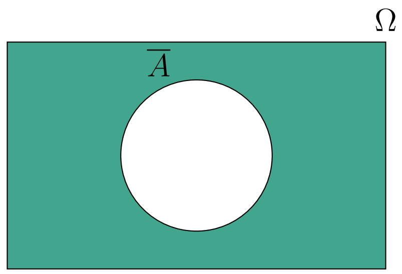
Probabilités conditionnelles

Définition

Soit A un événement d'un univers Ω.

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A c'est-à-dire tous les événements élémentaires de l'univers Ω qui ne sont pas dans A. Le diagramme de Venn à gauche représente l'ensemble A celui de droite l'ensemble $\overline{A}$:





Exemple

On considère l'expérience aléatoire du lancé de dé. On note A l'événement : « Tomber sur un 4 ou un 6 ». Donner le cardinal de A et de $\overline{A}$.

Réponse :

$Card(A) = 2,$
$Card(\overline{A}) = 4.$

Tableau croisé

Dans le cas où une étude porte sur deux événements A et B, on peut présenter ces deux événements dans un tableau croisé :

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	Card$(A \cap B)$	Card$(\overline{A} \cap B)$	Card(B)
$\overline{B}$	Card$(A \cap \overline{B})$	Card$(\overline{A} \cap \overline{B})$	Card$(\overline{B})$
TOTAL	Card(A)	Card$(\overline{A})$	Card(Ω)

Probabilité conditionnelle : formule

On appelle **probabilité de B sachant A**, la probabilité donnée par la formule suivante :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{\text{Card}\,(A \cap B)}{\text{Card}(A)}}$$

Elle correspond à la fréquence conditionnelle du caractère B par rapport à A.

Exemple

« Dans l'exemple précédent portant sur les élections, une personne déclare avoir voté pour le candidat A.. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ? »

Réponse : Soit A l'événement : « La personne a voté pour le candidat A. », et B l'événement « La personne interrogée est une femme ». Comme on sait que la personne interrogée a voté pour le candidat A., on doit calculer une probabilité conditionnelle. Ce que l'on cherche étant la probabilité que la personne interrogée soit une femme, **sachant** qu'elle a voté pour le candidat A.. On doit donc calculer $p_A(B)$.

On sait que :

Card $(A \cap B) = 326$ et Card $(A) = 815$,

on en déduit que :

$$p_A(B) = \frac{\text{Card}\,(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{326}{815} = 40\%$$

03. EXERCICES

Vocabulaire

01

On interroge 50 personnes, dont 30 femmes, sur leur intention de vote pour les prochaines élections municipales. Le résultat du sondage est le suivant : 35 personnes prévoient de voter, parmi elles 20 sont des femmes.

On note : A l'événement « la personne est une femme » et B l'événement « la personne prévoit de voter ».

1. Interprétez les événements suivants $\overline{A}$ et $A \cap B$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

02

On effectue un sondage portant sur l'orientation en DNMADE après la terminale dans une classe de 35 élèves de STD2A. Parmi ces élèves on compte 18 garçons. Le résultat du sondage est le suivant :

— 25 élèves souhaitent s'orienter en DNMADE,

— parmi eux 40% sont des garçons.

On note :

— A l'événement « l'élève est un garçon »

— et B l'événement « l'élève souhaite postuler à un DNMADE ».

1. Interprétez les événements suivants $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

03

Un styliste souhaite étendre sa gamme en produisant des accessoires de mode. Il commande une étude marketing auprès de 400 personnes. Parmi ces personnes, 150 sont des hommes. Le résultat de l'étude est le suivant :

— 80% achèteraient potentiellement un accessoire de mode produit par ce styliste,

— parmi eux 75% sont des femmes.

On note :

— A l'événement « la personne interrogée est une femme »

— et B l'événement « la personne interrogée achèterait potentiellement un accessoire de mode produit par ce styliste ».

1. Interprétez les événements suivants $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup B$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

04

On réalise une enquête sur l'intérêt des élèves pour les cours de programmation dans une classe de 40 élèves de première. Parmi ces élèves, il y a 20 filles. Les résultats de l'enquête sont les suivants :

— 30 élèves sont intéressés par les cours de programmation,

— parmi eux 50% sont des filles.

On note :

— A l'événement « l'élève est une fille »

— et B l'événement « l'élève est intéressé par les cours de programmation ».

1. Interprétez les événements suivants $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

05

Un chef cuisinier souhaite ajouter de nouveaux plats à son menu. Il commande une étude auprès de 500 personnes. Parmi ces personnes, 200 sont végétariennes. Les résultats de l'étude sont les suivants :

— 70% des personnes sont intéressées par les nouveaux plats,

— parmi elles, 60% sont végétariennes.

On note :

— A l'événement « la personne interrogée est végétarienne »

— et B l'événement « la personne interrogée est intéressée par les nouveaux plats ».

1. Interprétez les événements suivants $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup B$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

06

Un designer s'intéresse au retour de ses clients sur ses deux produits phares : un fauteuil et une lampe. Il a vendu au total 50 fauteuils et 144 lampes.

— 90% des personnes ayant acheté un fauteuil sont satisfaits de leur achat,

— 25% des personnes ayant acheté une lampe ne sont pas satisfaits de leur achat.

— Aucun client n'a acheté à la fois un fauteuil et une lampe.

On note :

— A l'événement « le client a acheté un fauteuil »,

— B l'événement « le client a acheté une lampe »,

— et C l'événement « le client est satisfait ».

1. Interprétez les événements suivants $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap \overline{C}$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup B) \cap \overline{C}$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

07

Un fabricant de produits électroniques s'intéresse aux retours de ses clients sur deux de ses produits phares : un smartphone et une tablette. Il a vendu au total 100 smartphones et 200 tablettes.

— 85% des personnes ayant acheté un smartphone sont satisfaites de leur achat,

— 30% des personnes ayant acheté une tablette ne sont pas satisfaites de leur achat.

— Aucun client n'a acheté à la fois un smartphone et une tablette.

On note :

— A l'événement « le client a acheté un smartphone »,

— B l'événement « le client a acheté une tablette »,

— et C l'événement « le client est satisfait ».

1. Interprétez les événements suivants $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap \overline{C}$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup B) \cap \overline{C}$.
2. Donner le cardinal associé à chacun de ces événements.

Tableaux croisés d'effectifs

08

Y / X	y_1	y_2	TOTAL
x_1	64	367	
x_2			1585
TOTAL	986		

1. Reproduire et compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. Donner n_{21}, n_{22}, n_{12}.
3. Quel est l'effectif total de y_1 ?
4. Quel est l'effectif total ?

09

Y / X	y_1	y_2	y_3	TOTAL
x_1	9		6	26
x_2		24		
x_3	13			42
TOTAL	44	42	38	

1. Reproduire et compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. Donner n_{21}, n_{13}, n_{23}.
3. Quel est l'effectif total de x_2 ?
4. Quel est l'effectif total ?

10

Y / X	y_1	y_2	y_3	TOTAL
x_1		14	20	58
x_2	24			40
x_3	27		14	
TOTAL		44	41	

1. Reproduire et compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. Donner n_{32}, n_{22}, n_{12}.
3. Quel est l'effectif total de y_3 ?
4. Quel est l'effectif total ?

11

La table suivante présente la répartition des volontaires, selon qu'ils soient en formation ou en mission, dans une organisation humanitaire en 2021 (en milliers). Compléter le tableau en utilisant les informations fournies.

	Femmes	Hommes	Total
En mission	8 200	9 300	
En formation	1 700		3 700
Total			

12

Dans une communauté de 200 personnes, 55 % sont des adultes et, parmi eux, 35 % ont les yeux verts tandis que les yeux bleus représentent 50 % de l'ensemble de la communauté. Reproduire et compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Yeux Verts	Yeux Bleus	Total
Adultes			
Enfants			
Total			

13

Une joaillier fabrique une série de bagues en or serties de diamants. Au cours de la fabrication, il apparaît deux types de défauts, le défaut sur la bague A et le défaut sur la pierre B. Parmi les 400 bagues produites, 4 % présentent le défaut A, 10 % le défaut B et 347 ne présentent aucun des deux défauts.

1. Combien de bagues fabriquées présentent le défaut A ?
2. Combien présentent le défaut B ?

On note :

— A l'événement « La bague présente le défaut A »

— B l'événement « La bague présente le défaut B ». Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous.

A / B	A	$\overline{A}$	TOTAL
B			
$\overline{B}$			
TOTAL			400

3. Quelle est la fréquence f des bagues présentant les deux défauts ?
4. Parmi les bagues présentant le défaut B, quel est le pourcentage de celles présentant le défaut A ?
5. L'affirmation suivante est-elle vraie : « Il y a plus de 90 % des montres qui ne présentent aucun des deux défauts » ?

14

En 2019, un musée d'art contemporain a accueilli 157 000 visiteurs. 17% ont suivi une visite guidée. Parmi eux, 21 200 étaient des étrangers, les visiteurs étrangers représentant 68% des visiteurs de ce musée.

On note :

— E l'événement « le visiteur est étranger ».

— A l'événement « le visiteur opte pour une visite guidée ».

	A	$\overline{A}$	TOTAL
E			
$\overline{E}$			
TOTAL			

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. On choisit au hasard un visiteur du musée.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un visiteur français ait choisi une visite guidée.
   (b) Calculer $P(E \cap A)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Faites de même avec $P(\overline{E} \cap \overline{A})$.

15

En 2019, un éditeur a fait appel à deux entreprises de design graphique pour illustrer la couverture de ses ouvrages. Sur 480 ouvrages publiés, 40% étaient des romans, le reste étant des essais. L'entreprise A s'est occupée de 84 ouvrages dont 75 romans.

On note :

— R l'événement « l'ouvrage publié est un roman »

— A l'événement « le design graphique de l'ouvrage a été confié à l'entreprise A ».

	A	$\overline{A}$	TOTAL
R			
$\overline{R}$			
TOTAL			

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. On choisit un ouvrage.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un roman ait été confié à l'entreprise B ?
   (b) Calculer $P(R \cap A)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Faites de même avec $P(\overline{R} \cap \overline{A})$.

16

En 2019, Mathilde a décidé de produire un dessin chaque jour. Afin de progresser, elle s'est concentrée sur ses deux points faibles : le portrait et le croquis d'objets. De plus, elle s'est limitée à deux techniques : l'aquarelle et la pointe de plomb. Sur ses 365 dessins :

— 60% sont des croquis d'objets,

— dont 142 ont été réalisés à la pointe de plomb.

— 50% des portraits ont été réalisés à l'aquarelle.

	Portrait	Objet	TOTAL
Pointe de plomb			
Aquarelle			
TOTAL			

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. On choisit un dessin.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il ait été réalisé à la pointe de plomb ?
   (b) Calculer la probabilité que ce soit un croquis d'objet réalisé à l'aquarelle.
   (c) Calculer la probabilité que ce soit un portrait à la mine de plomb.

17

792 personnes possèdent un pass illimité au principal cinéma de la ville.
On sait que :

- $\frac{1}{4}$ de ces personnes vont voir plus de trois films par semaine ;
- parmi ces personnes, $\frac{2}{3}$ sont des femmes ;
- il y a 105 adhérents qui vont voir moins de trois films par semaine et qui sont des femmes.

On considère les ensembles suivants :

— V : « Le détenteur d'un pass va voir plus de trois films par semaine » ;
— H : « Le détenteur du pass est un homme » ;
— F : « Le détenteur du pass est une femme » ;

1. Reproduire et compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

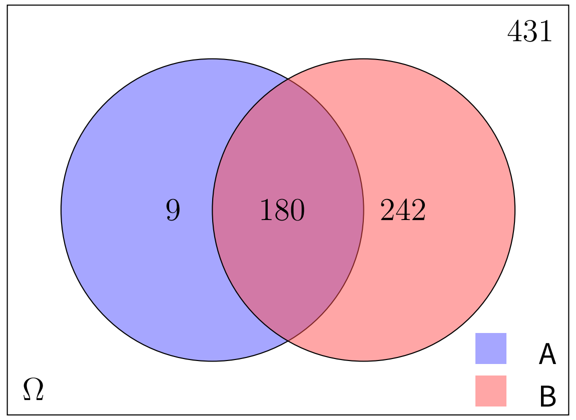
	V	$\overline{V}$	TOTAL
F			
H			
TOTAL			

2. Donner $Card(V \cap F)$. En donner une interprétation.
3. Quel est le nombre d'hommes qui vont voir moins de 3 films par semaines ?
4. Donner $Card(\overline{L})$. En donner une interprétation.

TABLEAUX CROISÉS DE FRÉQUENCES

18

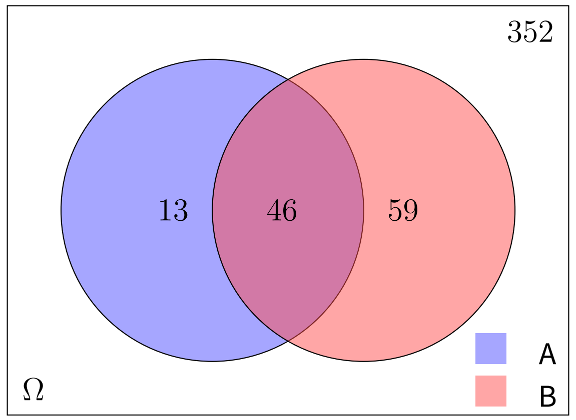
On considère le diagramme de Venn ci-dessous :



1. Calculer Card $(A \cup B)$.
2. Quel est l'effectif total ?
3. Quelle est la fréquence de l'événement A par rapport à l'effectif global ?
4. Quelle est la fréquence de l'événement B par rapport à l'effectif global ?
5. Quelle est la fréquence de l'événement $A \cap B$ par rapport à l'effectif global ?

19

On considère le diagramme de Venn ci-dessous :



1. Calculer Card $(A \cup B)$.
2. Quel est l'effectif total ?
3. Quelle est la fréquence de l'événement A par rapport à l'effectif global ?
4. Quelle est la fréquence de l'événement B par rapport à l'effectif global ? de l'événement $A \cap B$ par rapport à l'effectif global ?

20

Donner le tableau croisé de fréquences par rapport à l'effectif global associé au tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

X \ Y	y_1	y_2	TOTAL
x_1	422	274	696
x_2	678	583	1261
TOTAL	1100	857	

21

Donner le tableau croisé de fréquences par rapport à l'effectif global associé au tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

X \ Y	y_1	y_2	y_3	TOTAL
x_1	24	4	11	39
x_2	17	14	21	52
x_3	15	6	20	41
TOTAL	56	24	52	

22

Donner le tableau croisé de fréquences par rapport à l'effectif global associé au tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

X \ Y	y_1	y_2	y_3	TOTAL
x_1	24	4	11	39
x_2	17	14	21	52
x_3	15	6	20	41
TOTAL	56	24	52	

23

Durant l'année 2019, 3,6 millions de personnes ont visité le musée d'Orsay. 15$\%$ étaient des personnes de moins de 25 ans. Parmi ces personnes. 3/4 bénéficiaient d'une réduction. 2/3 des personnes de plus de 25 ans ne bénéficiaient pas de réduction.

1. Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

Âge \ Réduction	Oui	Non	TOTAL
Moins de 25 ans			
Plus de 25 ans			
TOTAL			

2. Établir le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.
3. Quel est le pourcentage des personnes de moins de 25 ans ne bénéficiant pas de réduction par rapport à l'effectif global ?

24

Voici la répartition des employés dans une entreprise selon le type de contrat en 2022 :

	Hommes	Femmes	Total
CDI	35 000	25 000	60 000
CDD	15 000	20 000	35 000
Total	50 000	45 000	95 000

1. Reproduire et compléter le tableau suivant avec les fréquences marginales (arrondir à 0,1 % près) :

	Hommes	Femmes	Total
CDI			
CDD			
Total			100 %

2. Traduire par une phrase la valeur trouvée dans la case grisée.
3. Parmi les employés, quelle est la proportion de femmes ?
4. Parmi les employés, quelle est la proportion des hommes ayant un contrat CDD ?

25

On donne la répartition des employés dans deux départements (R&D et Marketing) d'une entreprise :

	R&D	Marketing	Total
Hommes	120	80	200
Femmes	100	150	250
Total	220	230	450

1. Donner le tableau des fréquences marginales.
2. Donner le tableau des fréquences conditionnelles par lignes.
3. Donner le tableau des fréquences conditionnelles par colonnes.

26

On donne la répartition des clients d'un supermarché selon le mode de paiement et la catégorie de produits achetés :

	CB	Espèces	Total
Alimentaires	150	50	200
Non alimentaires	80	20	100
Total	230	70	300

1. Donner le tableau des fréquences marginales.
2. Donner le tableau des fréquences conditionnelles par lignes.
3. Donner le tableau des fréquences conditionnelles par colonnes.

27

Lors d'une enquête, on a interrogé un groupe de personnes sur le nombre de livres lus le mois dernier. Les résultats sont donnés par le tableau suivant (à compléter) :

Livres / Âge	0	1	2	>2	Total
[18 ; 30[	10	20	12	8	
[30 ; 60[	12	10	6	2	
Total					

1. Donner le tableau des fréquences marginales.
2. Construire le tableau des fréquences conditionnelles par lignes.
3. Construire le tableau des fréquences conditionnelles par colonnes.
4. En déduire le pourcentage de personnes ayant entre 30 et 60 ans parmi celles qui ont lu exactement deux livres.

28

Une ville propose trois formules de visite guidée de son patrimoine historique :

— Formule A : Visite du musée national et de la cathédrale.

— Formule B : Visite du musée national et de la vieille ville.

— Formule C : Visite du musée national, de la cathédrale et de la vieille ville.

Les clients peuvent choisir de suivre cette visite de jour ou de nuit.

Au mois d'août dernier, la répartition des visites était la suivante :

Moment / Formule	Jour	Nuit
A	2480	1348
B	6778	4261
C	7478	3261

1. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule A parmi ceux ayant choisi une visite de jour.
2. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant effectué une visite de nuit parmi ceux ayant choisi la formule B.
3. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant effectué une visite de jour.
4. La municipalité souhaite arrêter les visites de nuit qui d'après elle « ne représentent même pas la moitié des visites guidées de la ville ». Cette affirmation est-elle juste ?
5. Donner le tableau croisé de fréquences des visites guidées de la ville.

29

Le tableau ci-dessous indique la répartition des employés dans une entreprise selon leur niveau de formation en 2022 :

	Femmes	Hommes	Total
Diplôme de base	150	200	350
Certificat technique	80	120	200
Diplôme professionnel	90	110	200
Diplôme universitaire	100	80	180
Maîtrise	70	90	160
Doctorat	30	50	80
Total	520	650	1170

1. Construire le tableau des fréquences marginales.
2. Construire le tableau des fréquences conditionnelles par lignes.
3. Construire le tableau des fréquences conditionnelles par colonnes.
4. À l'aide des tableaux précédents, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la proportion de femmes dans l'ensemble des employés ?
   (b) Quelle est la proportion des employés ayant un diplôme de base dans l'ensemble des employés ?
   (c) Quelle est la proportion des employés ayant un diplôme universitaire dans l'ensemble des employés ?
   (d) Quelle est la proportion des hommes ayant un certificat technique dans l'ensemble des employés ?
   (e) Parmi les femmes, quel est le pourcentage d'employées ayant une maîtrise ?

30

Un restaurant gastronomique propose deux services : un à midi avec 30 couverts, l'autre le soir avec 45 couverts. A midi, 60% des clients prennent un menu. Le soir 20 couverts ont préférés prendre à la carte.

Moment / Formule	Midi	Soir	Total
Menu			
Carte			
Total	30	45	

On arrondira les résultats à 10^{-1} près.

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. Calculer la fréquence en pourcentage des clients du midi.
3. Calculer la fréquence en pourcentage des clients prenant un menu.
4. Calculer la fréquence en pourcentage des clients venant le soir et choisissant à la carte.
5. Donner le tableau croisé de fréquences associé au tableau ci-dessus.
6. On note
   — M l'événement « le client choisi le menu »,
   — S l'événement « le client dîne ».

   Donner la fréquence de l'événement $M \cap S$ et interpréter votre résultat dans le contexte de l'exercice.

31

Un club de sport ouvert à tous propose trois formules :

— Formule A : accès à un des sports proposés.

— Formule B : accès à tous les sports proposés sauf les terrains de tennis.

— Formule C : accès à tous les sports + terrains de tennis.

Trois cartes sont prévues en fonction de l'âge des pratiquants :

— Carte Jeunes : pour les moins de 25 ans ;

— Carte Sénior : pour les plus de 60 ans ;

— Carte Découverte : pour tous les autres.

A la fin de l'année, le club fait ses comptes. La répartition des formules et des adhérents est donnée dans le tableau ci-dessous :

Formule / Âge	A	B	C
Jeunes	253	75	23
Découverte	127	351	246
Senior	106	45	73

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessus.
2. Calculer la fréquence en pourcentage des séniors ayant choisi la formule B.
3. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule C.
4. Calculer la fréquence en pourcentage des jeunes dans le club de sport.
5. Donner le tableau croisé de fréquences associé au tableau ci-dessus.
6. On note
   — C l'événement « le client choisi la formule C »
   — et S l'événement « le client est un sénior ».

   Donner la fréquence de l'événement $C \cap S$ et interpréter votre résultat dans le contexte de l'exercice.
7. Faire de même avec l'événement $\overline{C} \cap S$.

Probabilités conditionnelles

32

Le tableau suivant donne la répartition des employés dans une entreprise selon leur statut et leur département.

	Dpt. A	Dpt. B	Total
Temps plein	5	7	12
Temps partiel	10	5	15
Stagiaires	3	0	3
Total	18	12	30

On choisit un employé au hasard dans l'entreprise. Quelle est la probabilité que ce soit :

1. un employé du département A travaillant à temps partiel ?
2. un employé du département A ?
3. un employé à temps plein sachant qu'il est du département A ?
4. un stagiaire sachant qu'il est du département B ?

33

Une médiathèque propose des livres et des DVDs dont les effectifs sont donnés dans le tableau suivant :

	Livres (L)	DVDs (D)	Total
Empruntés (E)	150	100	250
Non empruntés ($\overline{E}$)	90	60	150
Total	240	160	400

On choisit au hasard la fiche descriptive d'un livre. Calculer la valeur exacte des probabilités suivantes :

1. $P(L)$ et en déduire $P(\overline{L})$.
2. $P(\overline{E} \cap L)$.
3. $P_L(E)$.

34

Une librairie propose différents types de livres tels que des romans, des bandes dessinées ou des livres de science. 100 clients ont acheté un seul livre et ont payé en espèces ou par carte bancaire. Voici la répartition de ces clients :

	Espèces	Carte bancaire
Romans	15	20
Bandes dessinées	10	25
Livres de science	5	25

On choisit un client au hasard parmi ces 100 clients.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait payé par carte bancaire ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un livre de science ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une bande dessinée et payé en espèces ?
4. Ce client a acheté un roman. Quelle est la probabilité qu'il ait payé par carte bancaire ?
5. Ce client a payé par carte bancaire. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un roman ?

35

Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant.

	B	$\overline{B}$	Total
A			0,7
$\overline{A}$			0,3
Total	0,5		1

36

Soit C et D deux événements tels que $P(C) = 0{,}7$, $P(D) = 0{,}5$, $P_C(D) = 0{,}6$ et $P_{\overline{C}}(D) = 0{,}4$.

1. Calculer $P(C \cap D)$.
2. Calculer $P(\overline{C} \cap D)$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant.

	D	$\overline{D}$	Total
C			0,7
$\overline{C}$			0,3
Total	0,5	0,5	1

37

Pour accéder à un parc d'attractions, deux types de billets sont proposés : un billet standard pour les adultes et un billet réduit pour les enfants de moins de 12 ans. Une enquête est réalisée sur la provenance des visiteurs. 45 % des visiteurs viennent en famille et, parmi ceux-ci, 60 % sont des enfants de moins de 12 ans. Parmi les visiteurs venant seuls, 30 % sont des enfants de moins de 12 ans. On note A l'événement « le visiteur est un enfant de moins de 12 ans » et B l'événement « le visiteur vient en famille ». On choisit un visiteur au hasard.

1. Donner $P(B)$, $P_B(A)$ et $P_{\overline{B}}(A)$.
2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(A)$.

38

Les élèves de première technologique d'un lycée sont répartis dans les différentes filières de la façon suivante :

Filière / Sexe	STD2A	STI2D	STMG
Garçons	7	64	38
Filles	28	6	32

On choisit au hasard un élève. On considère :

— L'événement F : « L'élève est une fille ».

— L'événement A : « L'élève est en STD2A ».

On arrondira les résultats à 10^{-1} près.

1. Calculer $p(F)$.
2. Calculer $p(A)$.
3. Définir par une phrase les événements $\overline{F} \cap A$ et $F \cup A$.
4. Calculer la probabilité de l'événement $F \cup M$.
5. On choisit au hasard un élève de STD2A. Calculer alors la probabilité que l'élève soit un garçon.

39

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire vérifiant Card$(A \cap B) = 12$, Card$(A) = 28$ et Card$(B) = 23$.

1. Calculer $p_A(B)$
2. Calculer $p_B(A)$
3. Calculer Card$(A \cup B)$
4. Calculer Card$(A \cap \overline{B})$

40

Une entreprise est implantée à Paris et à New-York. Ils vendent leurs produits soit en ligne, soit directement en magasin. En 2019 leur chiffre d'affaire a été 350 000 euros. On sait que :

— le chiffre d'affaire en ligne correspond à 76% du chiffre d'affaire total ;

— $p_{\text{En ligne}}$ (Paris) $= 0{,}37$;

— $p_{\text{En magasin}}$ (New York) $= 0{,}82$.

1. Rassembler les données dans un tableau d'effectifs croisés.
2. Établir le tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.
3. En déduire le pourcentage du chiffre d'affaires provenant de Paris.

41

Un designer limite sa production de tables à deux matériaux : le chêne et le cerisier. Il distingue trois catégories de tables : les tables basses, les tables de chevet et les tables à manger. À la fin de l'année, il a vendu 1500 tables dont 500 en chênes. Ses ventes sont réparties de la façon suivante :

— 34 % des tables sont des tables basses ;

— 15 tables de chevet sont en chêne ;

— Parmi les 550 tables à manger, 20 % sont en cerisier.

1. Rassembler ces données dans un tableau croisé d'effectifs
2. Quelle est la fréquence des tables basses dans les ventes du designer ?
3. Déterminer la fréquence des tables de chevets en cerisier parmi les tables de chevets vendues.
4. On choisit au hasard une table produite par le designer. On suppose que tous les choix sont équiprobables et on considère les événements suivants :

— A : « la table vendue est en chêne » ;
— B : « la table vendue est une table à manger ».

Déterminer la probabilité conditionnelle $p_A(B)$.

5. Déterminer la probabilité que la table soit une table basse sachant qu'elle est en cerisier.

42

Un épicier vend des fruits et des légumes. Il possède deux fournisseurs A et B. Il vend 340 kg de légumes et 770 kg de fruits. 55% de ses légumes proviennent du fournisseur A et 70% des fruits proviennent du fournisseur B.

1. Établir un tableau croisé d'effectifs.
2. On choisit au hasard un aliment dans la production du fournisseur A. Calculer la probabilité que ce soit un légume.
3. Établir un tableau des fréquences par rapport à l'effectif global.
4. En déduire le pourcentage de fruits vendus par l'épicier.
5. Établir un tableau de fréquences conditionnelles des différents fournisseurs par rapport aux fruits.

43

Un designer graphique met en vente la plupart de ses productions originales. Celles-ci existent sous deux formats : A0 ou A3. Son carnet d'adresses comporte une liste de 600 clients qu'il contacte pour cette vente. Une fois cette opération terminée, il fait ses comptes :

— 126 clients ont achetés une œuvre au format A0 ;
— 160 clients ont acheté une œuvre au format A3 ;
— 30 clients ont acheté une œuvre dans les deux formats.

Soit

— A_0 l'événement « le client a acheté une production au format A0 »
— et A_3 l'événement « le client a acheté une production au format A3 ».

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous.

	A_0	$\overline{A_0}$	TOTAL
A_3			
$\overline{A_3}$			
TOTAL			600

2. Quel est le pourcentage de clients ayant acheté une production au format A3 ?
3. L'affirmation suivante est-elle vraie : « Au moins 5 % des clients ont acheté des productions dans les deux formats ».
4. Calculer $p_{A_0}(A_3)$. On arrondira à 10^{-3} près.
5. Calculer $p(\overline{A_0} \cap A_3)$. On arrondira à 10^{-3} près.

44

Un designer choisit deux sous-traitants pour fabriquer ses principaux produits. Sur les 3500 produits qu'il a commandés, 7% sont non conformes. Il sait que 92% des 1200 produits fabriqués par le sous-traitant A sont conformes.

1. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous.

	Conforme	Non conforme	TOTAL
A			
B			
TOTAL			

2. Quel est le pourcentage de produits non conformes produits par le sous-traitant B ?
3. Donner le tableau croisé de fréquences associé au tableau ci-dessus.
4. L'affirmation suivante est-elle vraie : « Le sous-traitant A est le principal sous-traitant du designer ». Justifier.
5. On choisit un produit au hasard parmi ceux fabriqués. On note :
   — A l'événement « le produit a été fabriqué par le sous-traitant A ».
   — C l'événement « le produit est conforme ».
6. Calculer la probabilité que le produit soit conforme sachant qu'il vient de l'usine A.
7. Calculer $p_{\overline{C}}(A)$.

45

Une usine de textile est approvisionnée par trois producteurs. 60% de la production de l'usine provient du producteur STYLE, 20% provient du producteur MODE et le reste provient du producteur CLASSE. On sait que :

— 5% de la production de STYLE présente un défaut ;
— 3% de MODE est rejetée également ;
— de même que 1% de celle de chez CLASSE.

1. Sachant que l'usine a besoin de 9700 m^2 de tissus, combien de m^2 de tissu doit-elle commander ?
2. Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-dessous.

	Conforme	Non conforme	TOTAL
STYLE			
MODE			
CLASSE			
TOTAL	9700		

1. Donner le nombre de m^2 de tissus conforme provenant du producteur MODE.
2. Établir le tableau des fréquences conditionnelles des producteurs par rapport aux tissus non conformes.
3. Un m^2 de tissu est non conforme. Le patron de l'usine affirme qu' « il provient sûrement de chez MODE ». Son affirmation est-elle justifiée ?

46

Une boulangerie prépare 300 pâtisseries dont 50% sont des éclairs. En utilisant le tableau des fréquences conditionnelles en lignes ci-contre, déterminer le nombre de pâtisseries au chocolat que cette boulangerie prépare.

	Chocolat	Vanille	Total
Éclairs	30 %	70 %	100 %
Tartes	40 %	60 %	100 %

47

Un vaccin atteint 4 % d'une population de 50 000 habitants. On soumet l'ensemble de la population à un dépistage. À l'aide du tableau des fréquences conditionnelles par colonnes ci-contre, déterminer le nombre de tests positifs obtenus à l'issue du dépistage.

	Vacciné	Non vacciné	Total
Test positif	95 %	2 %	
Test négatif	5 %	98 %	
Total	100 %	100 %	100 %

48

Un nouveau médicament est testé sur une population de 20 000 personnes pour traiter une certaine maladie. On soumet cette population à un test. Parmi les personnes malades, 1,5% ont un test positif. Parmi les personnes non malades, 98 ont un test positif. Parmi les personnes malades, 99 ont un test négatif.

1. Compléter le tableau suivant :

	Malades	Non malades	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			20 000

2. Construire le tableau des fréquences.
3. On choisit au hasard un individu de cette population. On considère les événements T et M suivants :
   — T : « le test est positif pour l'individu choisi »,
   — M : « l'individu choisi est malade ».
   (a) Calculer la probabilité de chacun des événements T et M.
   (b) Définir par une phrase l'événement $\overline{T}$ et calculer sa probabilité.
   (c) Définir par une phrase chacun des événements $M \cap T$ et $M \cup \overline{T}$, puis calculer sa probabilité.
4. On décide de traiter toutes les personnes qui ont un test positif. On choisit au hasard une personne traitée. Quelle est la probabilité qu'elle soit non malade ?

04. TP

Tableur et tableaux croisés

Principe

Le tableur est une feuille de calcul. Chaque case, appelée *cellule*, est repérée par ses coordonnées comprenant une lettre pour la colonne et un nombre pour la ligne.

On peut remplir ces cellules avec trois types de données :

— du texte,

— des nombres,

— des formules.

Formules

Chaque formule doit débuter par le signe égal « = ».

Ces formules peuvent porter sur des nombres mais aussi sur le contenu des cellules. Dans l'exemple ci-dessous, la formule entrée dans la case C1 est « = A1 + B1 ».

	A	B	C
1	45	20	65

L'avantage de ce type de formule est la mise à jour en temps réel du tableur : si on modifie la valeur de la cellule A1 alors C1 sera immédiatement corrigé pour afficher le nouveau résultat.

Exercice :

1. Recopier le tableau croisé ci-dessous dans un tableur.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	42	58	
$\overline{B}$	19	31	
TOTAL			

2. Compléter les cellules vides à l'aide de formules.
3. Modifier la valeur de la cellule associée à $Card(A \cap B)$. Qu'observe-t-on ?

Formules et plage de données

Dans le cas où l'on souhaiterait additionner le contenu des dix premières lignes de la colonne A, nous pouvons utiliser la formule « = SOMME(A1 :A10) « .

Un tableur possède certaines fonctions prédéfinies comme SOMME, MOYENNE qui respectivement calculent la somme et la moyenne d'une plage de cellule.

Une plage de cellules est indiquée en suivant la syntaxe suivante « *Première cellule : Dernière cellule* ».

Exercice : Recopiez le tableau croisé ci-dessous dans un tableur et complétez les cellules vides à l'aide de formules.

	A	B	C	D	E	TOTAL
α	42	58	13	44	36	
β	19	31	7	18	23	
γ	3	12	40	77	19	
TOTAL						

Dupliquer une formule

Considérons la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
1	45	20	65	13	24	33	4
2	77	18	13	41	55	82	17
3							

On souhaite afficher dans les cellules de la ligne 3 le résultat de la somme des deux cases situées au-dessus. Ainsi on remplira la cellule A3 avec la formule « = A1 + A2 ». Nous pouvons remplir manuellement les autres cellules de la même façon. Cependant, afin de gagner du temps, nous pouvons dupliquer la formule en procédant de la façon suivante :

— cliquez sur la cellule A3,

— repérez le carré noir qui apparaît alors dans le coin inférieur droit de celui-ci,

— cliquez et tirez jusqu'à la cellule G3.

En sélectionnant par exemple la cellule D3, on voit apparaître la formule « = D1 + D2 ». La formule présente en A3 a donc été dupliquée en mettant à jour les cellules qui y étaient référencées.

Remarque : Si on souhaite qu'une cellule référencée dans une formule reste inchangée lorsque celle-ci est dupliquée, il est nécessaire de précéder chaque coordonnées fixes par un signe « $ ». Par exemple, dupliquer une formule incluant A3 ne modifiera pas la référence à la cellule A3. Dupliquer une référence A$3 vers le bas restera une référence à A3. Par contre, la dupliquer vers la droite changera cette référence en B3, B4, etc.

Exercice

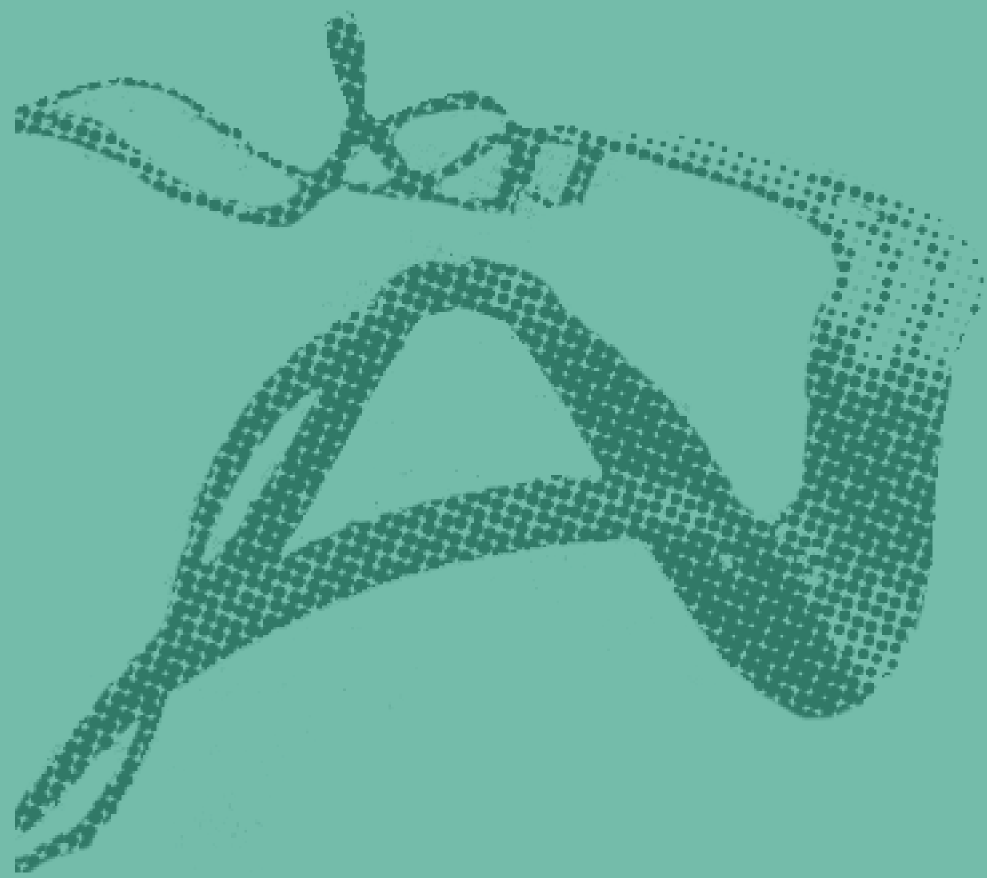
Recopiez la feuille de calcul ci-dessous et complétez-la à l'aide de formules.

	A	B	C	D	E
1	**Objet**	**Quantité**	**Prix unitaire**	**Sous-Total H.T.**	**Sous-Total T.T.C**
2	Pinceau	10	20		
3	Vernis	6	8		
4	Toile	4	50		
5	Fusain	12	9		
6			**Total**		
7	T.V.A	20%			

PROBABILITÉS

Objectifs du chapitre : Donner les valeurs prises par une variable aléatoire / Donner la loi de probabilité associée à une variable aléatoire / Donner l'espérance d'une variable aléatoire / Construire ou compléter un arbre de probabilités / Calculer les probabilités à l'aide d'un arbre de probabilités / Reconnaître une épreuve de Bernoulli / Calculer la probabilité associée à un nombre de succès dans le cas d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

08



Pablo REINOSO
Banc délirant
2012

01. INTRODUCTION

TEST PATTERN

Test Pattern est ensemble d'œuvres et d'installations audiovisuelles immersives créées par l'artiste et compositeur japonais Ryoji Ikeda. Chacune transforme des données numériques (textes, sons, photos et films) en codes-barres.

1. Dénombrement de codes-barres

Un code-barre est une succession de lignes noires ou blanches. On considère, dans les questions qui suivent, un code-barre à 3 lignes.

a. Combien de codes-barres à 3 lignes peut-on former ?

b. Combien de codes-barres ne contenant que des lignes blanches peut-on former ?

c. En déduire le nombre de codes-barres contenant au moins une ligne noire.

d. En suivant la même démarche, donner le nombre de codes-barres contenant au moins une ligne blanche.

e. Combien de codes-barres contenant une seule ligne blanche peut-on former ?

f. Combien de codes-barres contenant une seule ligne noire peut-on former ?

On considère maintenant un code-barre à 4 lignes. Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

2. Probabilités et arbres

On génère au hasard un code-barre à 4 lignes.

a. Quelle est la probabilité que ce code-barre ne contienne que des lignes noires ?

b. Quelle est la probabilité que ce code-barre ne contienne que des lignes blanches ?

c. Quelle est la probabilité que ce code-barre contienne au moins une ligne noire ?

d. Quelle est la probabilité que ce code-barre contienne une seule ligne noire ?

On peut considérer la génération aléatoire d'un code-barre à 4 lignes comme la succession de 4 tirages aléatoires avec remise.

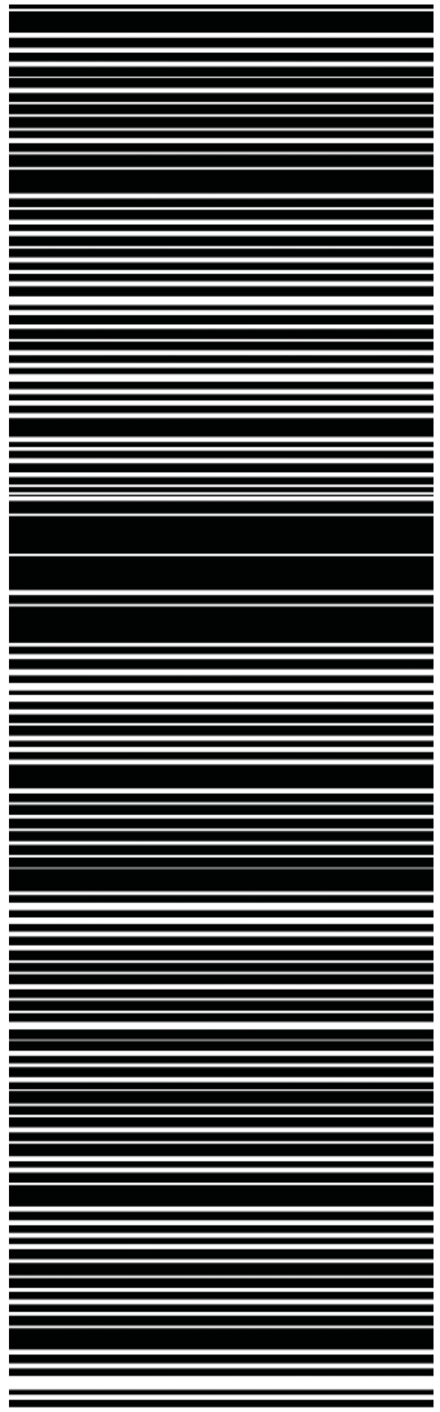
e. Combien d'issues compte chaque épreuve ?

f. On considère que l'on est dans une situation d'équiprobabilité. Quelle est alors la probabilité d'obtenir une ligne noire à chaque épreuve ?

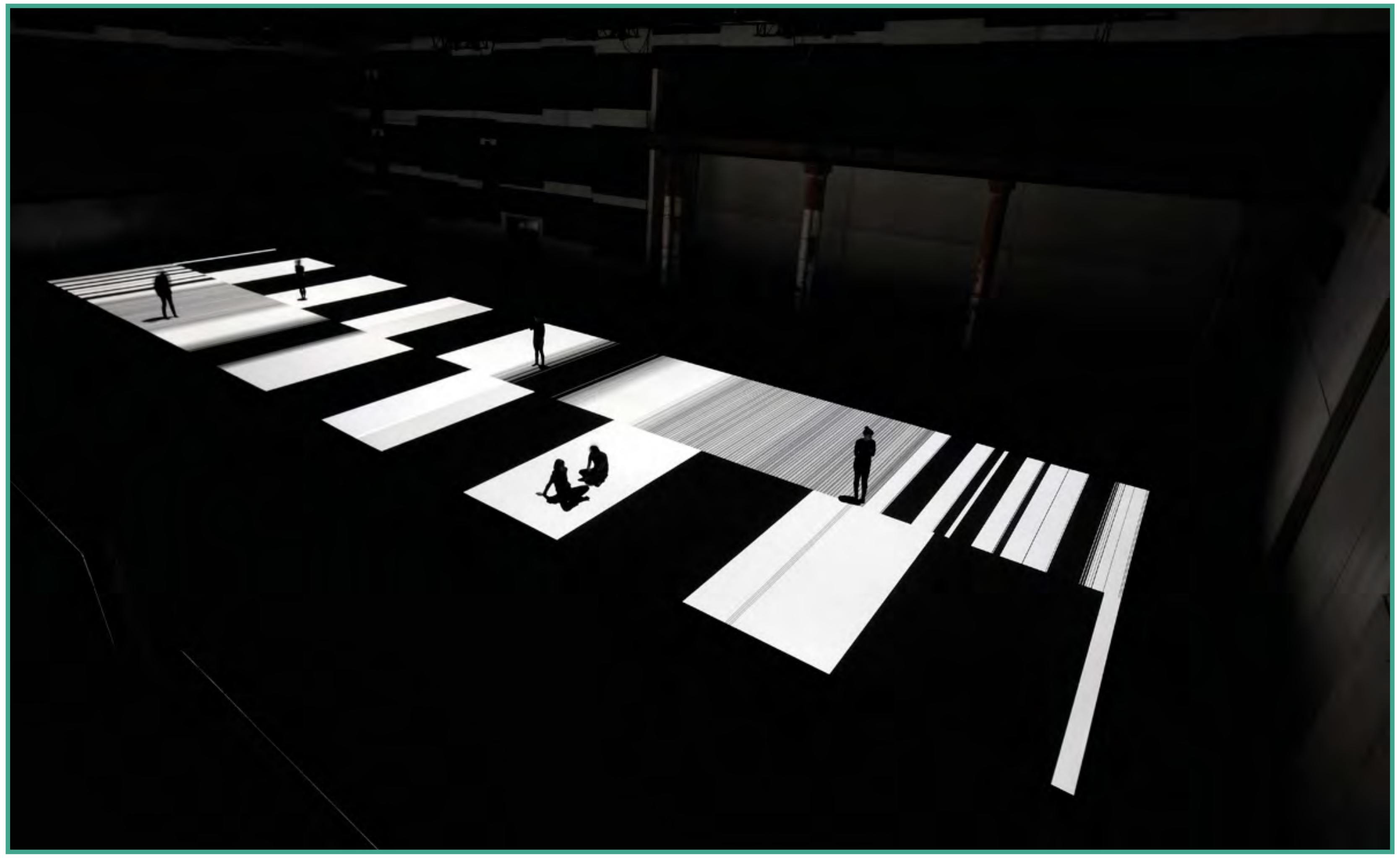
g. Quelles sont les points communs entre chaque épreuve ?

h. Réaliser un arbre de probabilités permettant de modéliser la génération d'un code-barre à 4 lignes.

On va vérfier les résultats de la première partie à l'aide de l'arbre de probabilités tracé.



À droite :
test pattern,
impression sur papier marouflé sur aluminium, 2019



i. Combien cet arbre compte-t-il de chemins ?

j. Combien de chemins sont associés à un code-barre contenant que des lignes blanches ?

k. Combien de chemins sont associés à un code-barre contenant une ligne blanche ?

l. D'après le résultat obtenu à la première partie, combien de chemins sont associés à un code-barre contenant au moins une ligne blanche ?

3. Généralisation au cas de n lignes

On considère maintenant un code-barre contenant n lignes.

a. Combien de codes-barres à n lignes peut-on former ?

b. Combien de codes-barres ne contenant que des lignes blanches peut-on former ?

c. En déduire le nombre de codes-barres contenant au moins une ligne noire.

d. Combien de codes-barres contenant une seule ligne blanche peut-on former ?

On génère au hasard un code-barre à n lignes.

e. Quelle est la probabilité que ce code-barre ne contienne que des lignes blanches ?

f. Quelle est la probabilité que ce code-barre contienne au moins une ligne blanche ?

g. Quelle est la probabilité que ce code-barre contienne une seule ligne blanche ?

En haut :
test pattern [n°5],
Installation audiovisuelle, 2013

En bas :
test pattern [n°6],
Installation audiovisuelle, 2014

02. COURS

Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire. On note Ω l'univers fini associé, c'est-à-dire l'ensemble de tous les résultats possibles pour cette expérience.

Variable aléatoire discrète

Une **variable aléatoire discrète sur** Ω est une **fonction X** de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi à tout résultat possible de l'expérience aléatoire, on associe un nombre.

Exemple

Considérons l'expérience aléatoire suivante : une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Si on tire une boule pair, on gagne 1 euro. Si on tire le 5 on gagne 10 euros. Dans les autres cas on perd 5 euros.

On peut définir une variable aléatoire X associée au gain algébrique (ie. positif quand on gagne, négatif quand on perd). X est une fonction de $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} X(1) = -5 & X(2) = 1 \\ X(3) = -5 & X(4) = 1 \\ X(5) = 10 & X(6) = 1 \\ X(7) = -5 & X(8) = 1 \\ X(9) = -5 & X(10) = 1 \end{array}$$

Au final, les valeurs que peut prendre X sont : $\{-5; 1; 10\}$.

Loi de probabilité

Supposons que la variable aléatoire X prenne les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Définir **la loi de probabilité de** X, c'est donner, pour tous les x_i, $P(X = x_i)$.

Exemple

« Dans l'exemple précédent, donner la loi de probabilité de X. »

Réponse :

$$P(X = -5) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
$$P(X = 1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 10) = \frac{1}{10}$$

Que l'on peut résumer dans le tableau :

Valeur prise par X	-5	1	10
Probabilité	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Remarque

On peut aussi s'intéresser à des probabilités d'inégalités. Au lieu d'étudier $P(X = \ldots)$ on peut s'intéresser à $P(X \geq \ldots)$, $P(X \leq \ldots)$, etc.

Exemple

« Dans l'exemple précédent calculer $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 0)$, $P(X > 1)$. »

Réponse :

$$P(X \leq 1) = P(X = -5) + P(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$
$$P(X \geq 0) = P(X = 1) + P(X = 10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$
$$P(X > 1) = P(X = 10) = \frac{1}{10}$$

Espérance

On considère la variable aléatoire définie sur l'univers Ω et dont la loi de probabilité est donnée par :

Valeur prise par X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Probabilité	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Espérance

L'espérance mathématique de X est le réel $E(X)$ défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}$$

Propriété

L'espérance est analogue à la **moyenne** statistique. C'est la valeur que l'on peut « espérer » obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple

« Calculer l'espérance dans l'exemple précédent. »

Réponse : $E(X) = -5 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$. On peut donc « espérer » perdre 50 centimes par partie.

Arbre de probabilités

Propriété

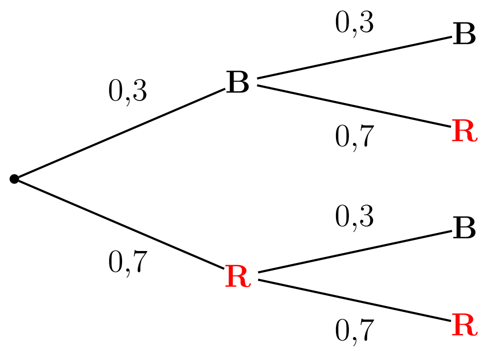
Lorsqu'une expérience aléatoire comprend plusieurs épreuves / étapes, on peut modéliser celle-ci à l'aide d'un arbre de probabilités.

Chaque épreuve ayant plusieurs issues possibles, on représente ces issues par des branches. On étend ensuite l'arbre pour chaque épreuve.

Exemple

« Une urne contient une 3 boules blanches et 7 boules rouges. On procède à deux tirages avec remise. Représenter cette situation par un arbre de probabilités. »

Réponse :



Propriété

Pour calculer la probabilité d'un événement à l'aide d'un arbre de probabilités :

1. on repère les chemins correspondant à cet événement,
2. pour chaque chemin, on calcule la probabilité de celui-ci en multipliant les probabilités de chacune des branches,
3. et enfin on additionne la probabilité de chaque chemin.

Exemple

« Dans l'exemple précédent quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule blanche ? »

Réponse : $p = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}42$.

Epreuves de Bernoulli

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire à deux issues.
- On associe **S** (pour succès) à une de ces issues, **E** ou $\overline{\mathrm{S}}$ à l'autre (pour échec).
- La répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes** s'appelle **un schéma de Bernoulli**.

Arbre

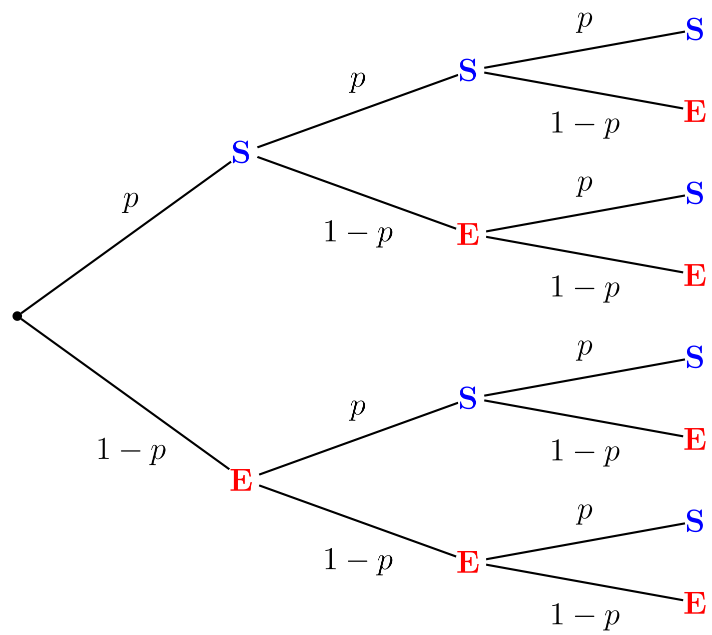


Schéma de Bernoulli avec $n = 3$

Exemple

« Pierre lance un dé. Il gagne à chaque fois qu'un 1 ou un 6 apparaît. Il joue trois fois de suite. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès.

- Montrer que l'expérience aléatoire est une répétition d'épreuve de Bernoulli.
- Calculer $P(X = 2)$. »

Réponse : L'expérience aléatoire est la répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes à 2 issues possibles (succès : Pierre tombe sur un 1 ou un 6 ; échec : Pierre tombe sur un 2, 3, 4 ou 5). On a bien une répétition d'épreuves de Bernoulli.

Il y a 3 chemins possibles, chacun ayant une probabilité de $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{27}$ d'où :

$$P(X = 2) = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$$

03. EXERCICES

Variables aléatoires

01

On lance quatre dés équilibrés et on note S la variable aléatoire égale au nombre de 5 obtenus. Donner toutes les valeurs prises par S.

02

Une urne contient 4 boules bleues et 6 boules jaunes. On tire successivement et avec remise 3 boules. À chaque tirage, on gagne 2 points si la boule est bleue, sinon on gagne 1 point. On note Y la variable aléatoire égale au total de points en fin de partie. Donner toutes les valeurs prises par Y.

03

On tire simultanément et au hasard 2 boules parmi 5 sur lesquelles sont respectivement inscrits les nombres entiers : -4, -2, 0, 2 et 4. On note X la variable aléatoire égale à la somme des deux entiers qui figurent sur les boules. Donner toutes les valeurs prises par X.

04

Un joueur mise 2€ et choisit au hasard une carte parmi trois cartes : 5€, 3€ et 1€. On note G le gain algébrique du joueur (gain moins la mise). Donner toutes les valeurs prises par G.

05

Un jeu consiste à miser 1 € puis à lancer deux dés à six faces équilibrés et à gagner la somme des deux dés. Si le total est supérieur à 10, vous gagnez un bonus de 5 €.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le total des deux dés. Donner les valeurs prises par X.
2. Soit Y la variable aléatoire qui donne le gain net. Donner les valeurs prises par Y.

06

Pour participer à une tombola, on doit payer 3€ et il est possible de gagner 2€, 3€, 5€ ou 8€. Soit X la variable aléatoire qui donne le montant gagné et Y la variable aléatoire qui donne le gain net. Donner les valeurs prises par X et Y.

07

Lors d'un concours de lancer de balles, chaque participant doit lancer une balle et peut marquer 0, 1, 3 ou 5 points.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués. Donner les valeurs prises par X.
2. Soit Y la variable aléatoire qui donne le score net après avoir enlevé une pénalité fixe de 2 points pour participation. Donner les valeurs prises par Y.

08

Vous tirez au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. Si vous tirez une figure (roi, reine, valet), vous gagnez 5 points. Si vous tirez un as, vous gagnez 10 points. Sinon, vous perdez 1 point.

1. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés. Donner les valeurs prises par X.
2. Soit Y la variable aléatoire qui donne le gain net en points après un seul tirage. Donner les valeurs prises par Y.

09

QCM – Une variable aléatoire :

a. peut prendre des valeurs négatives.
b. prend toujours des valeurs positives.
c. prend toujours des valeurs comprises entre 0 et 1.

10

QCM – Si une variable aléatoire prend quatre valeurs de même probabilité, alors cette probabilité :

a. vaut 1.
b. vaut 0,25.
c. ne peut pas être calculée.

11

QCM – La somme des valeurs d'une variable aléatoire :

a. est égale à 1.
b. est comprise entre 0 et 1.
c. peut prendre n'importe quel type de valeur.

Loi de probabilité

12

Soit Z une variable aléatoire dont la loi de probabilité incomplète est donnée ci-dessous :

z_i	-2	0	3	5
$P(Z=z_i)$	0,10	0,25	0,40	…

1. Calculer $P(Z=5)$.
2. Calculer $P(Z \leq 3)$.

13

Soit T une variable aléatoire dont la loi de probabilité incomplète est donnée ci-dessous :

t_i	-3	1	2	4
$P(T=t_i)$	0,15	0,30	0,40	…

1. Calculer $P(T=4)$.
2. Calculer $P(T \leq 2)$.

14

Soit R une variable aléatoire.

r_i	5	15	25	35	45	55
$P(R=r_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	…	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessus donnant la loi de probabilité de R.
2. Calculer $P(R \leq 35)$.

15

Soit W une variable aléatoire.

w_i	10	20	40	60	80	100
$P(W=w_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	…	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

1. Compléter le tableau ci-dessus donnant la loi de probabilité de W.
2. Calculer $P(W \leq 60)$.

16

1. Justifier que le tableau ci-dessous peut définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y.

y_i	-3	0	2	4
$P(Y = y_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

17

On lance un dé rouge à 4 faces numérotées de 1 à 4 et un autre dé identique bleu. On note X la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres obtenus.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

18

Un artiste organise une tombola permettant d'acquérir certaines de ses œuvres. Parmi les 7000 tickets vendus au prix de 1000 euros, voilà la répartition des prix :

Montant de l'œuvre	Nombre de tickets
1 500 000 €	1
1 000 000 €	1
700 000 €	3
500 000 €	4
50 000 €	10

Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique des participants à cette tombola.

1. Donner les différentes valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X.

19

Chaque jour, un magasin de vêtements enregistre le nombre de clients qui effectuent un achat. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui effectuent un achat par jour. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,10
1	0,20
2	0,30
3	0,25
4	0,10
5	0,05

1. Interpréter par une phrase le résultat de la colonne grisée.
2. Calculer $P(X \leq 2)$.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 clients effectuent un achat.

20

Chaque jour, un centre de loisirs enregistre le nombre d'enfants participant aux activités.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants participant aux activités par jour. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,05
1	0,10
2	0,20
3	0,30
4	0,25
5	0,10

1. Interpréter par une phrase le résultat de la ligne grisée.
2. Calculer $P(X \leq 2)$.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 3 enfants participent aux activités.

Espérance

21

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. Calculer l'espérance $E(X)$.

x_i	-1	2	4	6
$P(X = x_i)$	0,5	0,1	0,25	0,15

22

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y. Calculer l'espérance $E(Y)$.

y_i	-1	2	4	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

23

Pour chacune des lois de probabilités donnée ci-dessous, calculer l'espérance de la variable aléatoire X :

$X = x_i$	$P(X = x_i)$
1	0,41
2	0,24
3	0,11
4	0,04
5	0,1

$X = x_i$	$P(X = x_i)$
15	0,32
45	0,33
72	0,2
100	0,24
120	0,01

$X = x_i$	$P(X = x_i)$
1 000	0,25
5 000	0,15
6 500	0,3
8 000	0,17
10 000	0,13

24

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire W. Calculer le nombre b sachant que $E(W) = 1{,}5$.

w_i	0	3	b
$P(W = w_i)$	0,5	0,3	0,2

25

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire V. Calculer le nombre c sachant que $E(V) = 3.2$.

v_i	1	4	c
$P(V = v_i)$	0,3	0,4	0,3

26

Un jeu consiste à tirer une carte d'un jeu standard de 52 cartes.

Un joueur mise une certaine somme M sur l'une des cartes. Si la carte tirée correspond à celle sur laquelle il a misé, on lui rembourse 51 fois sa mise, sinon il perd sa mise. Déterminer l'espérance de gain et interpréter ce résultat.

27

Un jeu consiste à lancer une fléchette sur une cible circulaire divisée en 20 secteurs égaux numérotés de 1 à 20.

Un joueur mise une certaine somme M sur l'un des secteurs. Si la fléchette se plante dans le secteur sur lequel il a misé, il gagne 19 fois sa mise, sinon il perd sa mise. Déterminer l'espérance de gain et interpréter ce résultat.

28

On lance un dé à 6 faces. Si le dé tombe sur un nombre pair, on gagne 1€. Si le dé tombe sur le 3, on gagne 3€. Dans le reste des cas on perd 2€.

1. Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique après le lancé d'un dé. Quelles sont les valeurs prises par X.
2. Soit Y la variable aléatoire associée au gain algébrique après deux lancés du dé. Quelles sont les valeurs prises par Y.

3. Donner la loi de probabilité associée à X.
4. Donner la loi de probabilité associée à Y.
5. Donner l'espérance de X.
6. Donner l'espérance de Y.

29

Élodie souhaite s'acheter un pantalon et un pull pour l'hiver. Elle a le choix entre trois pantalons : un coûte 10 €, l'autre 15€ et le dernier 30 €. Elle a aussi le choix entre deux pulls : un coûte 20 € et l'autre 40 €.

Soit X la variable aléatoire associée au montant qu'elle va dépenser.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilités associée à X.
3. Donner l'espérance de X.

30

On imagine le jeu suivant : en lançant deux fois une pièce de monnaie, le joueur gagne en euros le nombre de fois où « face » est sorti. Mais si « pile » sort deux fois, le joueur perd 3 €.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilités associée à X.
3. Donner l'espérance de X.

31

Sur des boules contenues dans une urne les valeurs suivantes sont notées : $2; 4; 6; 8; 10$. On choisit une boule au hasard, on la remet puis on en choisit une deuxième. On ajoute alors les deux résultats obtenus.

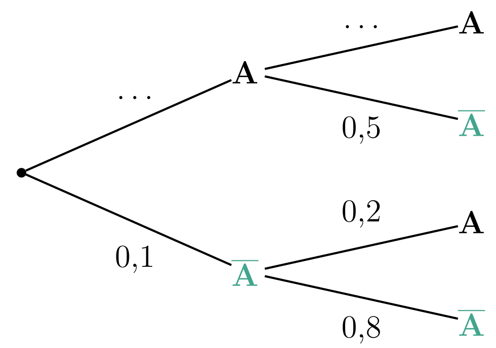
On note X la variable aléatoire égale à la somme des nombres obtenus. Les probabilités seront données sous forme de fractions.

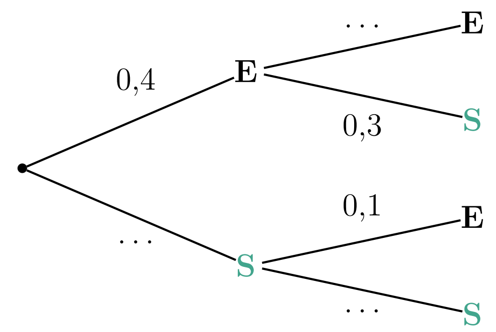
1. Décrire l'événement $\{X = 10\}$.
2. Calculer $P(X = 10)$.
3. Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilités de X.
4. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Arbres de probabilités

32

Compléter les arbres de probabilités ci-dessous :





33

Un designer estime que 65% de son catalogue est constitué d'œuvres réalisées en métal, le reste étant réalisé en plastique. Il choisit de manière indépendante trois de ses œuvres dans son catalogue. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'œuvres en métal parmi les trois choisies.

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'exactement deux œuvres soient en métal.
3. Décrire l'événement $\{X = 0\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.
5. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

34

Un entreprise de plomberie haut de gamme commande une étude marketing pour la sortie prochaine d'une gamme de robinetterie design afin de connaître les intentions d'achats de ses potentiels clients en fonction de leur tranche d'âge. Parmi les personnes interrogées :

— 35% ont plus de 60 ans. Parmi elles, 45% ont déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme.

— 65% ont entre 40 et 60 ans. Parmi elles, 75% ont déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme.

— Parmi les personnes de moins de 40 ans, 30% ont déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme.

On choisit au hasard une personne. On considère les événements suivants :

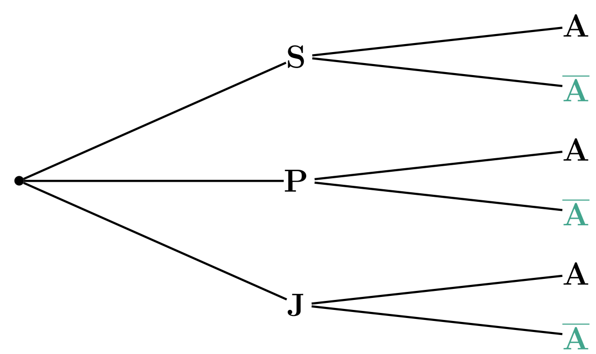
— S : « la personne interrogée a plus de 60 ans ».

— P : « la personne interrogée a entre 40 et 60 ans ».

— J : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

— A : « la personne a déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme ».

1. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait entre 40 et 60 ans et qu'elle ait déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme.
3. Interpréter et calculer $P(S \cap A)$.
4. Calculer la probabilité de l'événement A.
5. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait plus de 60 ans sachant qu'elle a déclaré vouloir potentiellement acheter un produit de la gamme.

35

Un restaurant gastronomique propose à sa carte deux types de dessert :

— un assortiment de macarons, choisi par 50% des clients,

— une part de tarte tatin, choisie par 30% des clients.

20% des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts. Le restaurateur a remarqué que :

— parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80$\%$ prennent un café ;

— parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60$\%$ prennent un café ;

— parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90$\%$ prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

— M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;

— T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;

— P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;

— C l'événement : « Le client prend un café ».

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. (a) Calculer la probabilité que le client prenne un café et un assortiment de macarons.
   (b) Montrer que la probabilité que le client prenne un café est $0{,}76$. Bien mettre en valeur les calculs faits.
3. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 € et un café est vendu 2€. Chaque client prend un plat, et un seul, au prix unique de 18 € et ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café. Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.
   (a) Déterminer la loi de probabilités de X.
   (b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

36

Une entreprise d'ameublement propose un jeu anniversaire afin de fêter ses 10 ans d'existence. Ce jeu contient deux étapes :

— une carte à gratter où la probabilité de gain est de 15% ;

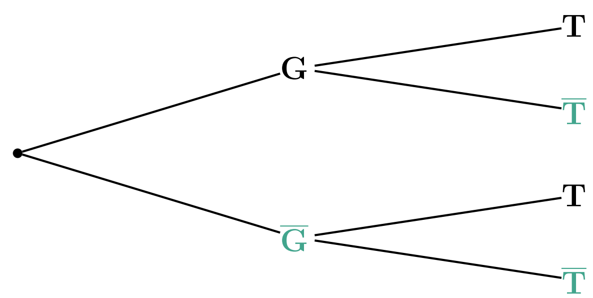
— un tirage au sort grâce au numéro du ticket où la probabilité de gagner est de 5%.

On définit les événements :

— G : « le client gagne au grattage ».

— T : « le client gagne au tirage au sort »

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que le client ne gagne pas.
3. Calculer la probabilité que le client gagne au moins une fois.

   La valeur du lot au grattage est de 1 000 euros. Celui au tirage au sort a une valeur de 150 euros. On note X le gain en euros du client.
4. Interpréter et calculer $P(X = 1150)$.
5. Donner le tableau de probabilités de X.
6. Calculer l'espérance de X.

37

Un sac contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. On prélève au hasard une boule, on note sa couleur puis on la remet dans le sac, et on effectue un deuxième tirage. On note B l'événement « La boule tirée est bleue » et R l'événement « La boule tirée est rouge ».

1. Les épreuves sont-elles indépendantes ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage ?
3. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

38

On lance trois fois une pièce de monnaie. On note le résultat de ces trois lancers sous la forme XXX où X=P si *pile* apparaît et X=F si *face* apparaît. Ainsi PFP désigne l'issue : « Pile, Face, Pile ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Écrire toutes les issues possibles.
3. Quelle est la probabilité de l'événement PPF ?
4. On considère la variable aléatoire X, qui à chaque issue associe le nombre de fois où *face* est apparu.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   (b) Calculer $P(X = 1)$.
   (c) Déterminer la loi de probabilités de X.

39

Alain est invité à un dîner de fin d'année. A ce dîner sont servis des petits fours, un tiers sont au foie gras (350kcal), 10% sont au saumon fumé (280kcal) et le reste est au caviar (300kcal). Alain choisit au hasard deux bouchées.

1. Quelle est la probabilité que la première bouchée d'Alain soit au saumon ?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
3. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de kcal consommées par Alain.
   (a) Donner la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer $P(X \leq 600)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Épreuves de Bernoulli

40

À son dernier QCM de mathématiques, Armand a choisi de répondre au hasard aux 4 questions. Pour chaque question, trois réponses étaient proposées.

La situation décrite peut-elle être associée à la répétition d'épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser la variable aléatoire correspondante.

41

Pauline va au parc 5 jours par semaine. À chaque visite, elle choisit entre faire du jogging et faire une promenade. Comme elle aime beaucoup faire du jogging mais qu'elle sait qu'il faut varier les activités, elle choisit de faire du jogging 3 fois sur 5 et une promenade 2 fois sur 5.

La situation décrite peut-elle être associée à la répétition d'épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser la variable aléatoire correspondante.

42

Sophie fait des courses au marché 3 fois par semaine. À chaque visite, elle achète une quantité aléatoire de fruits et légumes. Le montant total de ses achats varie chaque fois en fonction des prix et des quantités disponibles. Les montants qu'elle dépense sont respectivement 15€, 20€, 25€, 30€ ou 35€ avec des probabilités différentes.

La situation décrite peut-elle être associée à la répétition d'épreuves de Bernoulli ? Justifier votre réponse.

43

Lucas se rend à la bibliothèque 4 jours par semaine. À chaque visite, il choisit entre emprunter un livre et emprunter un DVD. Il choisit d'emprunter un livre 3 fois sur 4 et un DVD 1 fois sur 4.

La situation décrite peut-elle être associée à la répétition d'épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser la variable aléatoire correspondante.

44

Marc surveille le temps de trajet qu'il met pour aller au travail chaque jour de la semaine. Le temps de trajet varie en fonction de la circulation et peut être de 15, 20, 25, 30 ou 35 minutes avec des probabilités différentes.

La situation décrite peut-elle être associée à la répétition d'épreuves de Bernoulli ? Justifier votre réponse.

45

Un sac contient 6 billes bleues, 4 billes jaunes et 2 billes rouges. On tire successivement 4 billes avec remise. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre de billes jaunes obtenues.

1. Justifier qu'il s'agit d'une répétition d'épreuves de Bernoulli.
2. Tracer l'arbre de probabilités correspondant.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux billes jaunes à l'issue des quatre tirages, c'est-à-dire $P(Y = 2)$.
4. Déterminer la probabilité $P(Y \geq 2)$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

46

Pour se rendre au travail, Marjorie doit prendre sa voiture. Dans 15% des cas, elle se retrouve bloquer dans des bouchons.

Sur les 5 jours de la semaine, on note Z la variable aléatoire comptabilisant le nombre de jours où elle a été bloquée dans des bouchons.

1. Dresser l'arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Calculer $P(Z = 2)$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

47

On effectue deux tirages avec remise dans une urne contenant des cartes numérotées de 1 à 50. On s'intéresse au fait de tirer un nombre pair.

1. Montrer que cette expérience s'apparente à la répétition d'épreuves de Bernoulli.
2. À l'aide d'un arbre de probabilités, calculer la probabilité de tirer 2 nombres impairs.
3. Quelle est la probabilité de tirer au moins un nombre pair ?

48

Dans une classe, 20% des élèves portent des lunettes.

1. Calculer sur un groupe de 5 élèves, la probabilité d'avoir exactement 2 élèves qui portent des lunettes.
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 élèves qui portent des lunettes ?

49

Un exercice se présente sous la forme d'un quiz dans lequel figurent 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte parmi les 3 proposées.

1. Si on trace l'arbre représentant la situation, combien y a-t-il de branches ?
2. Déterminer la probabilité qu'un élève qui répond au hasard obtienne exactement 5 bonnes réponses.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève qui répond au hasard obtienne au moins 3 bonnes réponses.

50

Dans une université, 60 % des étudiants réussissent leurs partiels du premier coup. On choisit au hasard 5 étudiants pour savoir s'ils ont réussi leur examen du premier coup. On note Y la variable aléatoire associée au nombre de réponses positives. Le nombre d'étudiants est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à 5 tirages indépendants avec remise.

1. Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$, $P(Y = 3)$, $P(Y = 4)$ et $P(Y = 5)$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux étudiants ayant réussi leur examen du premier coup ?

51

Pour arroser son jardin, Pierre utilise un système d'arrosage automatique. Cependant, 12% du temps, le système tombe en panne et n'arrose pas correctement le jardin.

Sur les 6 jours de la semaine où il utilise ce système, on note A la variable aléatoire comptabilisant le nombre de jours où le système d'arrosage est tombé en panne.

1. Dresser l'arbre de probabilités décrivant la situation.
2. Calculer $P(A = 2)$. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
3. Calculer $P(A < 3)$ puis $P(A < 6)$.
4. En déduire $P(1 \leq A \leq 4)$.

52

Dans une bibliothèque, la probabilité qu'un livre soit emprunté au moins une fois par mois est de 0,4. On suppose que la probabilité qu'un livre soit emprunté est indépendante pour chaque livre. La bibliothèque décide de suivre l'emprunt de 6 livres au hasard pendant un mois.

1. Définir une variable aléatoire Z décrivant cette situation.
2. Quelle est la probabilité qu'aucun livre ne soit emprunté au moins une fois durant ce mois ?
3. (a) Calculer $P(Z \leq 3)$.
   (b) En déduire la probabilité que plus de 3 livres soient empruntés au moins une fois durant ce mois.

53

Dans une école de musique, la probabilité qu'un élève pratique son instrument au moins 3 fois par semaine est de 0,5. On suppose que la pratique de chaque élève est indépendante de celle des autres. On interroge 7 élèves pour connaître leurs habitudes de pratique.

1. Définir une variable aléatoire P décrivant cette situation.
2. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne pratique son instrument au moins 3 fois par semaine ?
3. (a) Calculer $P(P \leq 4)$.
   (b) En déduire la probabilité que plus de 4 élèves pratiquent leur instrument au moins 3 fois par semaine.

54

En France 110 lycées, parmi les 4300 lycées généraux et technologiques, proposent une filière STD2A. On choisit au hasard trois lycées parmi eux.

1. Justifier qu'il s'agit de la répétition de trois épreuves aléatoires et indépendantes de Bernoulli dont on donnera le paramètre.
2. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins un des lycées ait une filière STD2A.

55

Un joaillier constate que 5% des pierres qu'il a acquises présentent des défauts. Il choisit au hasard 3 de ses pierres. On arrondira les résultats à 10^{-3}.

1. Peut-on associer à cette situation un schéma de Bernoulli ?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
3. Quelle est la probabilité que toutes les pierres soient exemptes de défaut ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins une pierre ait un défaut ?

56

Un joueur tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Il gagnera s'il obtient une figure.

1. Peut-on associer à cette situation une épreuve de Bernoulli ?
2. Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité associée.
3. Quelle est l'espérance de cette loi de Bernoulli ?

57

Une entreprise de livraison observe que 5% des colis expédiés sont retardés.

On suit au hasard 3 colis expédiés et on note W la variable aléatoire représentant le nombre de colis retardés.

1. Définir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire W.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire W et interpréter ce résultat.

58

Une association organise une loterie où 10% des billets vendus sont gagnants.

On achète au hasard 4 billets de loterie et on note L la variable aléatoire représentant le nombre de billets gagnants.

1. Définir la loi de probabilité associée à la variable aléatoire L.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire L et interpréter ce résultat.

59

Élise achète des sacs de graines pour son jardin. Dans chaque sac, 15% des graines ne germent pas.

1. Sur les 5 graines qu'elle plante, quelle est la probabilité qu'aucune ne germe ?
2. Déterminer la loi de probabilité associée à la variable aléatoire qui compte le nombre de graines qui germent dans le lot de 5.
3. En moyenne, dans un lot de 5 graines, combien de graines vont germer ?

60

Thomas joue au basket et s'entraîne à lancer des paniers. En moyenne, il réussit 70% de ses lancers.

1. Sur les 6 lancers qu'il effectue, quelle est la probabilité qu'il n'en réussisse aucun ?
2. Déterminer la loi de probabilité associée à la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers réussis dans le lot de 6.
3. En moyenne, sur 6 lancers, combien de lancers Thomas réussit-il ?

61

Un parc d'attractions a constaté que 15% des visiteurs achètent un souvenir à la boutique du parc.

On considère un groupe de 10 visiteurs choisis au hasard et indépendamment les uns des autres. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de visiteurs qui achètent un souvenir.

1. Donner la loi de probabilité associée à la variable aléatoire Y.
2. Calculer la probabilité qu'exactement 3 visiteurs achètent un souvenir, c'est-à-dire $P(Y = 3)$.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un visiteur achète un souvenir ?
4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter ce résultat.

Problèmes

62

Un marchand de thé propose des thés de deux types de saveurs : les thés fruités et les thés classiques. Il dispose également de trois types de conditionnement : vrac, sachet individuel et boîte.

Chaque type de thé a :

— soit un conditionnement en vrac;

— soit un conditionnement en sachet individuel;

— soit un conditionnement en boîte.

On sait que, dans son stock, 30% des thés sont en sachet individuel, 50% sont en boîte et les autres en vrac. De plus, 70% des thés sont fruités, dont 20% sont en vrac et la moitié en sachet individuel.

1. Compléter le tableau des pourcentages ci-dessous.

	Fruité	Classique	Total
Vrac			
Sachet individuel			
Boîte			
Total			100%

2. Le marchand choisit un thé du stock au hasard. On suppose que chaque thé a la même probabilité d'être choisi.
   (a) Quelle est la probabilité que le marchand choisisse un thé en boîte ?
   (b) Quelle est la probabilité que le marchand choisisse un thé classique en sachet individuel ?
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement « le thé est fruité et en sachet individuel » puis interpréter ce résultat.
   (d) Le marchand a choisi un thé en sachet individuel. Quelle est la probabilité qu'il soit fruité ?
3. Pour une création de thé personnalisé, le marchand choisit au hasard et sans remise quatre thés au sein de son stock fruité et en sachet individuel. On admet que le nombre de thés est suffisamment grand pour que le choix d'un thé soit assimilé à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins un des quatre thés choisis soit en boîte.

63

Sur le trajet séparant son domicile à l'établissement scolaire de son fils, Marc compte 3 feux tricolores. Chacun de ces feux fonctionne de la même manière et ont une probabilité de 0,6 d'être verts lorsque Marc passe devant.

On note V l'événement « Le feu est vert lorsque Marc arrive devant ».

1. Expliquer en quoi l'expérience aléatoire présentée relève d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
3. Quelle est la probabilité pour que Marc ne rencontre aucun feu vert ?
4. Quelle est la probabilité pour que Marc rencontre au moins un feu vert ?
5. On note X le nombre de feu verts que Marc recontre. Quelle est l'espérance de X ?

64

Un designer sous-traite la fabrication de sa lampe phare à une usine. Le pourcentage de lampe présentant un défaut est égal à 5%. On prélève au hasard une lampe dans le stock.

1. Justifier que le choix d'une lampe est modélisé par une épreuve de Bernoulli où le succès est l'événement « La lampe choisie a un défaut », noté S.

   Pour tout événement S, on notera $P(S)$ la probabilité de S et $\overline{S}$ l'événement contraire de S.

   Les résultats devront être donnés sous forme décimale arrondis au millième.
2. Donner le paramètre p de l'épreuve de Bernoulli considérée.
3. On répète 3 fois de manière indépendante cette épreuve. Le stock est suffisamment important pour assimiler le choix à un tirage avec remise.
   (a) Représenter par un arbre de probabilités l'expérience aléatoire.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : « Aucune lampe n'a de défaut ».
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : « Une seule lampe a un défaut ».
   (d) Calculer la probabilité de l'événement : « Exactement 3 lampes ont un défaut ».

65

Un élève de TSTD2A postule à deux DNMADE différents. Il estime que pour chacun de ces DNMADE il a la même probabilité de 75% d'être accepté.

On définit l'événement S : « L'élève a été accepté »

1. Expliquer en quoi l'expérience aléatoire présentée relève d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
3. Calculer la probabilité qu'il ne soit accepté que dans une seule école.
4. Calculer la probabilité qu'il soit accepté dans au moins une école.
5. Le père de l'élève lui promet 100 euros s'il est accepté dans les deux écoles, 50 euros pour une seule école et rien s'il n'est accepté nul part. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'euros que l'élève peut potentiellement gagner.
   (a) Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.
   (b) Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

66

Le responsable d'une galerie d'art estime qu'un visiteur sur 10 est susceptible d'acheter une des œuvres présentées. Aujourd'hui trois personnes sont venues. On considère que le choix d'acheter une œuvre est régi par la même probabilité et que le choix de chacun de ces visiteurs est indépendant. On note E l'événement « Une œuvre a été achetée ».

1. Justifier qu'il s'agit de la répétition de trois épreuves aléatoires et indépendantes de Bernoulli dont on donnera le paramètre.
2. Représenter la situation sous la forme d'un arbre de probabilités.
3. On note X la variable associée au nombre de visiteurs ayant acheté une œuvre aujourd'hui.
   (a) Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.
   (b) Interpréter et donner $P(X \leq 2)$.
   (c) Calculer l'espérance de X.

67

5 000 000 de tickets d'un jeu de grattage sont vendus au prix 3 €. Au dos de chaque ticket est indiqué les prix et nombres de tickets gagnants

Montant du gain	Nombre de tickets
10000 €	10
100 €	45
50 €	159
25 €	520
10 €	5800
5 €	150 000
3 €	568 000

On note X la variable aléatoire égale au gain réel d'un joueur ayant acheté un ticket.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilités de X.
3. Calculer la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne réellement de l'argent en jouant à ce jeu
4. Un joueur achète deux tickets de ce jeu. On note S l'événement « le ticket acheté permet de gagner de l'argent ».
   (a) Expliquer en quoi l'expérience aléatoire présentée relève d'un schéma de Bernoulli.
   (b) Traduire la situation par un arbre de probabilités.
   (c) Déterminer la probabilité que les deux tickets lui permettent de gagner réellement de l'argent.

04. TP

Analyse méthodique en design et arts appliqués

Cette activité est à réaliser en collaboration avec le professeur d'arts appliqués (analyse méthodique).

Thème

L'aléatoire

Documentation

Document 1 : **Jolan VAN DER WIEL**, *Gravity Stool*, 2011, mélange de matière plastique métallisée.

Document 2 : Citation extraite du livre objet *Le temps des questions* de **Gaetano PESCE**, architecte, designer, philosophe italien, né en 1939. Ouvrage publié en 1996 à l'occasion de la rétrospective Gaetano Pesce « Le temps des questions » du 3 juillet au 7 octobre 1996 au Centre Georges Pompidou, Paris.

Document 3 : **Tomáš Gabzdil LIBERTINY**, *The Honeycomb Vase*, 2005, cire d'abeille.

Document 4 : **Sveta AXONOVA**, *The sequence project*, 2014. Design textile, techniques variées d'ennoblissement textile appliquées sur des chemises

Demandes

Après une lecture fine et détaillée des documents, interrogez-vous sur la place et le rôle de l'aléatoire dans le processus créatif.

Proposez une analyse croisée, riche et pertinente, en reliant les documents au thème. Communiquez le fruit de votre réflexion de manière claire et hiérarchisée, par le moyen de schémas, de croquis analytiques annotés et d'un écrit synthétique.

Votre propos est enrichi de références personnelles issues des domaines du design, des métiers d'art et des arts visuels. Ces dernières doivent être judicieusement articulées aux documents et au thème étudié.

Les critères d'évaluation portent sur :

- La structuration du propos et la qualité de synthèse au regard du thème énoncé ;
- Les questionnements soulevés par l'analyse croisée des documents ;
- La diversité des références personnelles en lien avec les documents et le thème ;
- La communication de l'expression écrite et graphique.


Document 1 : **Jolan VAN DER WIEL**, *Gravity Stool*, 2011, mélange de matière plastique métallisée.
Le designer Jolan van der Wiel utilise, pour concevoir ses objets, une machine qu'il nomme *Gravity Tool*. Le procédé consiste à agglomérer à l'aide d'aimants, une matière plastique métallisée.

« L'industrie a toujours fondé les critères d'acceptabilité de ses produits sur leur identité dans la série, donc sur l'absence de tout défaut. À cela, Pesce réplique que les défauts, librement acceptés, et même provoqués, peuvent être générateurs de personnalisation des différents objets de la série. La manière dont va se comporter une matière pénétrant avec difficultés une empreinte totalement étanche (…) ouvre sur l'aléatoire ».

Document 2 : Citation extraite du livre objet *Le temps des questions* de **Gaetano PESCE**, architecte, designer, philosophe italien, né en 1939. Ouvrage publié en 1996 à l'occasion de la rétrospective Gaetano Pesce « Le temps des questions » du 3 juillet au 7 octobre 1996 au Centre Georges Pompidou, Paris.

Document 3 : **Tomáš Gabzdil LIBERTINY**, *The Honeycomb Vase*, 2005, cire d'abeille.
Pour *The Honeycomb Vase* Tomáš Libertiny met en place une structure de vase et laisse ensuite à des abeilles ouvrières la production de celui-ci.

Sveta Axonova, designer textile a utilisé 9 chemises blanches comme point de départ de ses expérimentations. Disposées les unes à côté des autres sur le sol, elle les a aspergées de colorant noir déterminant les parties sur lesquelles elle interviendra par la suite. Chaque chemise blanche est ainsi retravaillée selon le motif obtenu avec diverses techniques d'ennoblissement textile.

Document 4 : **Sveta AXONOVA**, *The sequence project*, 2014. Design textile, techniques variées d'ennoblissement textile appliquées sur des chemises

09

AUTOMATISMES

Objectifs du chapitre : Maîtriser les proportions et pourcentages / Calculer des taux d'évolutions, des coefficients multiplicateurs / Maîtriser les opérations sur les fractions et les puissances / Convertir des unités / Résoudre des (in)équations du premier et second degré / Lire graphiquement des images et des antécédents / Résoudre des (in)équations graphiquement / Dresser des tableaux de signes / Tracer une droite à partir d'une fonction affine / Donner la fonction affine associée à une droite / Lire des données statistiques.

Proportions et pourcentages

01

Exprimer chacune des valeurs suivantes sous forme décimale, de pourcentage et de fraction :

- $0{,}75$
- $\dfrac{8}{10}$
- 17%
- $0{,}012$
- 60%
- $\dfrac{3}{15}$

02

Calculer :

- 10% de 200,
- 15% de 120,
- 70% de 80,
- $\dfrac{5}{6}$ de 60,
- $\dfrac{3}{4}$ de 120.

03

Calculer :

- 50% de 60%,
- 20% de 80%,
- $\dfrac{1}{2}$ de $\dfrac{8}{9}$,
- $\dfrac{1}{4}$ de $\dfrac{16}{17}$,
- $\dfrac{2}{7}$ de 70%,
- $\dfrac{3}{4}$ de $0{,}5$.

Évolutions et variations

04

Donner le coefficient multiplicateur dans chacun des cas suivants :

1. une augmentation de 23%,
2. une augmentation de 65%,
3. une diminution de 9%,
4. une diminution de 36%,
5. une augmentation de 140%.

05

Calculer :

1. une augmentation de 50% sur une valeur de 100,
2. une diminution de 20% sur une valeur de 100,
3. une augmentation de 40% sur une valeur de 20,
4. une diminution de 10% sur une valeur de 90.

06

Un outil à 160 euros voit son prix augmenter à 240 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

07

Un objet de 90 euros voit son prix baisser à 45 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

08

Un pull de 40 euros voit son prix baisser à 32 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

09

Un jean de 200 euros voit son prix augmenter à 260 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

10

Pour chacun des cas suivants, traduire l'indice base 100 en pourcentage d'augmentation ou de diminution :

1. indice de 140,
2. indice de $109{,}5$,
3. indice de 94,
4. indice de 86,
5. indice de $167{,}4$,
6. indice de 200.

11

Calculer dans chaque cas l'indice base 100 :

1. une ancienne valeur de 150 et une nouvelle valeur de 100,
2. une ancienne valeur de 85 et une nouvelle valeur de 100,
3. une ancienne valeur de 70 et une nouvelle valeur de 35,
4. une ancienne valeur de 80 et une nouvelle valeur de 40,
5. une ancienne valeur de 120 et une nouvelle valeur de 200,
6. une ancienne valeur de 1500 et une nouvelle valeur de 15000.

12

Dans chacun des cas suivants, donner le coefficient multiplicateur global et en déduire le pourcentage associé :

1. une augmentation de 50% suivie d'une nouvelle augmentation de 10%,
2. une augmentation de 30% suivie d'une diminution de 40%,
3. une diminution de 50% suivie d'une nouvelle diminution de 20%,
4. une diminution de 10% suivie d'une augmentation de 60%.

13

Pour chacun des cas suivants, calculer le taux d'évolution réciproque :

1. une diminution de 50%,
2. une augmentation de 50%,
3. une augmentation de 75%,
4. une diminution de 75%,
5. une augmentation de 20%,
6. une diminution de 20%.

14

Une valeur passe de 20 à 40, puis à 80 et 160. Identifier cette variation à une suite géométrique dont on précisera la raison.

15

Une valeur passe de 40 à 60, puis à 90 et 135. Identifier cette variation à une suite géométrique dont on précisera la raison.

16

Une valeur passe de 80 à 40, puis à 20 et 10. Identifier cette variation à une suite géométrique dont on précisera la raison.

17

Une valeur passe de 100 à 25, puis à $6{,}25$ et $1{,}5625$. Identifier cette variation à une suite géométrique dont on précisera la raison.

Calcul numérique et algébrique

18

Calculer :

- $\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{2}$,
- $\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{5}$,
- $\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{3}$,
- $\dfrac{7}{9}\times\dfrac{3}{4}$,
- $\dfrac{5}{7}-\dfrac{4}{3}$,
- $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{3}$,
- $\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{5}}$,
- $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{5}}$.

19

Comparer les fractions suivantes :

- $\dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$,
- $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$,
- $\dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{10}{4}$,
- $\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{7}{8}$,
- $-\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$,
- $-\dfrac{5}{3}$ et $-\dfrac{8}{11}$.

20

Simplifier les calculs suivants sous la forme a^b où a est un nombre réel et b un entier :

- $5^3\times 5^6$
- $\dfrac{6^{19}}{6^7}$
- $\dfrac{1}{7^{13}}$
- $(3^8)^9$
- $\dfrac{12^{21}}{12^{23}}$

21

Simplifier les calculs suivants sous la forme x^a où a est un nombre entier :

- $(x^3\times x^7)^4$
- $\left(\dfrac{x^3}{x^4}\right)^3$
- $\dfrac{x^8}{x^{11}}\times x^2$
- $(x^7\times x^3)\times x^7$
- $\left(\dfrac{x^{25}}{x^{27}}\right)^{-1}$

22

Simplifier les expressions suivantes :

1. $(100^x \times 10^x)^{-1}$
2. $(10^x)^3 \times (10^x)^{-2}$
3. $10^x \times 1000^x \times 100^x$
4. $1000^x \times 0{,}01^x \times 0{,}1^x$

23

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :
$A = 8450000$
$B = 590032000$
$C = 0{,}0045$
$D = 0{,}000089$
$E = 156 \times 10^5 \times 0{,}75 \times 10^{-8}$
$F = 0{,}002 \times 10^{10} \times 0{,}25 \times 10^{-3}$
$G = C \times D$
$H = E \times B \times A$

24

Convertir

- 7m en cm,
- 25km en m,
- 32kg en grammes,
- 40m² en dm²,
- 17g en kg,
- 5m³ en litres,
- 45m² en cm².

25

Résoudre les équations suivantes :

- $x - 32 = 0$
- $2x = 12$
- $3x - 27 = 0$
- $7x + 21 = 0$
- $3x - 45 = 0$
- $8x + 19 = -5x + 3$
- $-4 + 4t = 3t + 13$
- $20y - 2 = -4y + 4$

26

Résoudre les équations suivantes :

- $(x - 8)(x + 9) = 0$
- $(4x - 8)(3x - 9) = 0$
- $x^2 = 25$
- $x^2 - 25 = 0$
- $x^2 = 9$
- $(x - 4)^2 - 16 = 0$
- $(x - 3)^2 - 25 = 0$
- $x^2 - 36 = 0$
- $3x^2 - 27 = 0$

27

Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x - 8$
- $g(x) = (x - 5)(x - 7)$
- $h(x) = -2x + 24$
- $k(x) = 5x + 15$
- $m(x) = x^2 + 1$
- $n(x) = (3x - 9)(-2x - 8)$
- $p(x) = x(7x - 3)$
- $q(x) = \sqrt{x}(-5x + 25)$

28

Développer les expressions suivantes :

- $(x - 4)^2$,
- $5(2x - 3)$,
- $(x - 4)(x - 3)$,
- $7(6x + 2)$,
- $(x + 5)^2$,
- $(2x - 3)(x - 4)$,
- $(2x - 4)^2$,
- $(x - 5)(x + 5)$.

29

Factoriser les expressions suivantes :

- $7x^2 - 5x$,
- $3x + 9$,
- $x^3 + 7x^2 - 8x$,
- $4a + 16$,
- $x^2 - 9$,
- $t - 18t^3$,
- $x^2 - 5x^3$.

30

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x^2 + 5x + 21$
- $g(x) = 3x - 5$
- $h(x) = 7x + 3x^3$
- $k(x) = 6x^3 + 5x^2 + 7x + 5$
- $m(x) = 4x^2 + 2x^3$
- $n(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 8$

31

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = 1$.

32

Soit la fonction $f(x) = -4x^2 + 1$. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = 3$.

33

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 4x$. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = -5$.

34

Soit la fonction $f(x) = x + 7$. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = 5$.

35

Soit la fonction $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f en $x = 2$.

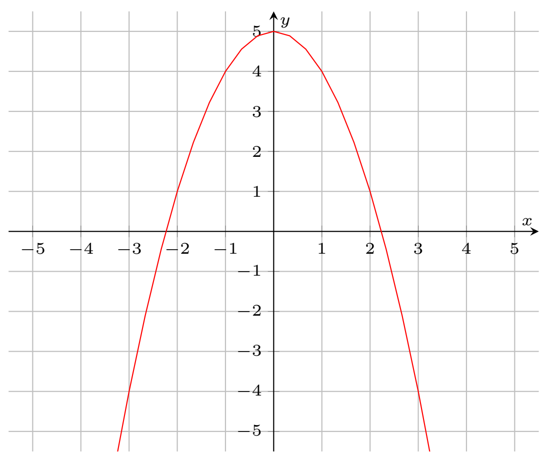
Fonctions et représentations

36

Lire graphiquement

1. l'image de 3,
2. l'image de -1,
3. l'antécédent de 5,
4. l'antécédent de -3,

par la fonction f représentée ci-dessous.

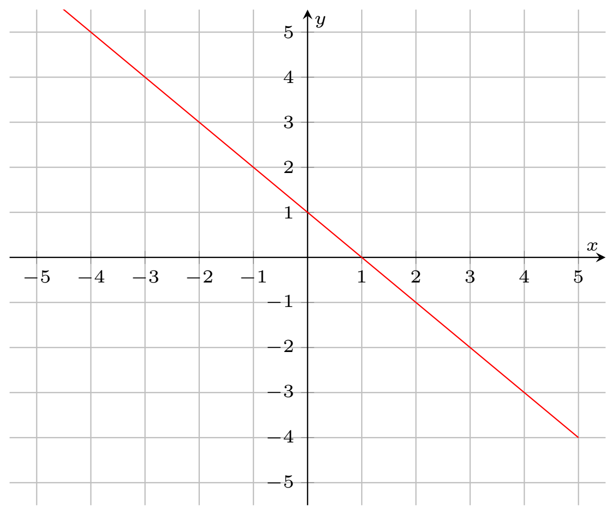


37

Lire graphiquement

1. l'image de 2,
2. l'antécédent de 3,
3. l'image de -2,
4. l'antécédent de -2,

par la fonction f représentée ci-dessous.



38

Donner le tableau de signes de la fonction

$$f(x) = (x - 5)(x - 8)$$

39

Donner le tableau de signes de la fonction

$$f(x) = (3x - 9)(2x - 4).$$

40

Donner le tableau de signes de la fonction

$$f(x) = -4(x - 8)(x + 5).$$

41

Donner le tableau de signes de la fonction

$$f(x) = x^2 + 1.$$

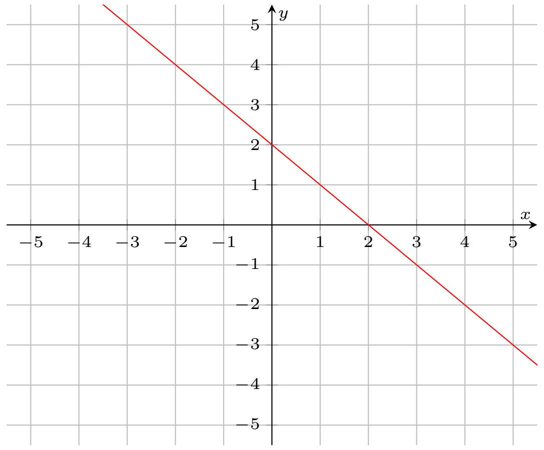
42

Donner le tableau de signes de la fonction

$$f(x) = x^2 - 9.$$

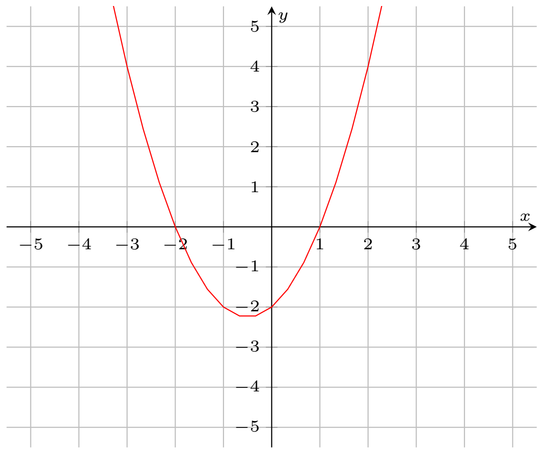
43

Donner le tableau de signes et de variations de la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



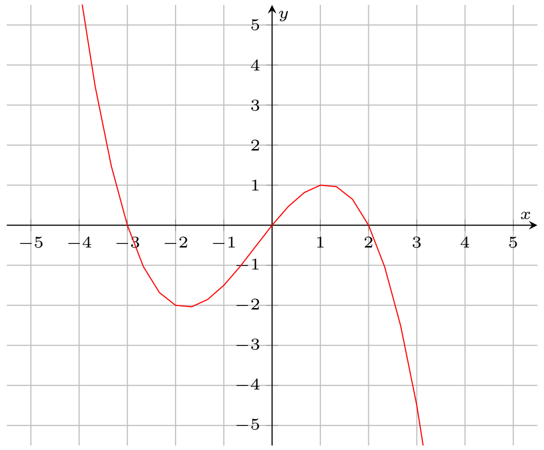
44

Donner le tableau de signes et de variations de la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



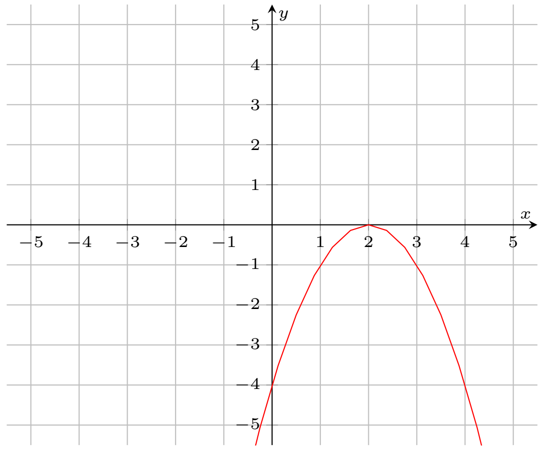
45

Donner le tableau de signes et de variations de la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



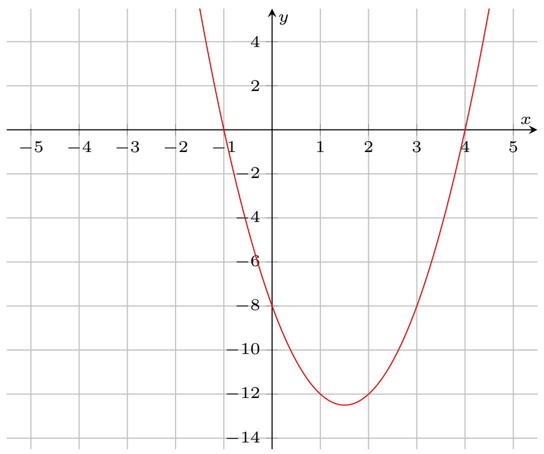
46

Résoudre $-x^2 + 2x - 1 = -1$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ci-dessous.



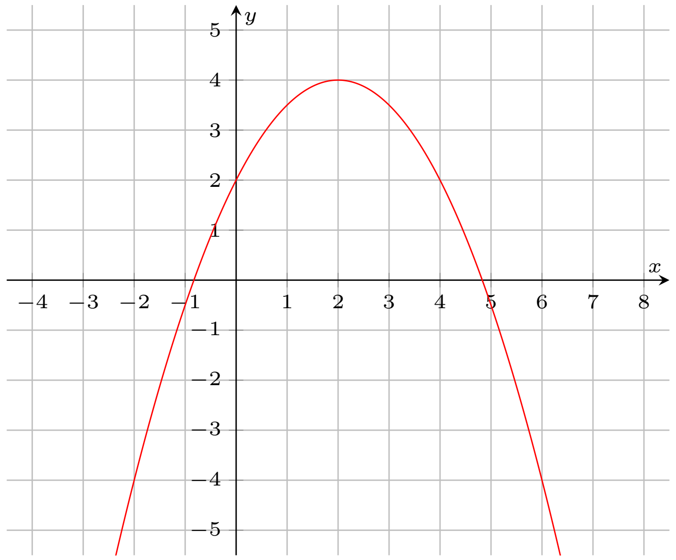
47

Résoudre $2x^2 - 6x - 8 = -8$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ ci-dessous.



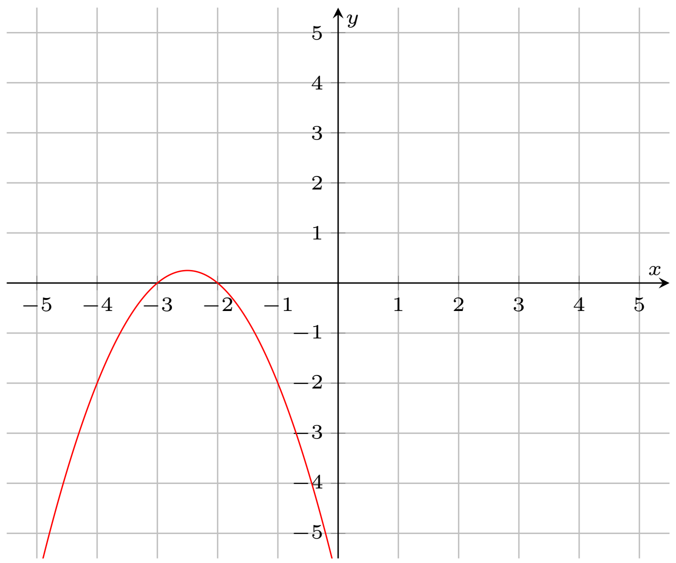
48

Résoudre $-0{,}5x^2 + 2x + 2 \geq -4$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 2$ ci-dessous.



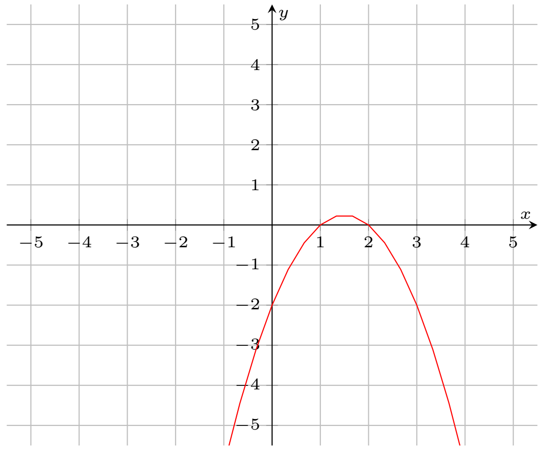
49

Résoudre $-x^2 - 5x - 6 \geq -2$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2 - 5x - 6$ ci-dessous.



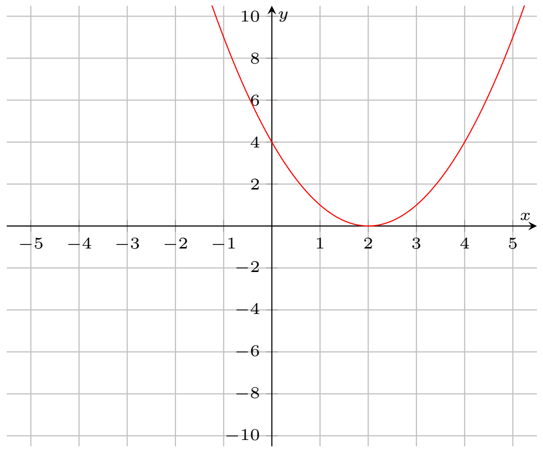
50

Résoudre $-x^2 + 3x - 2 < -2$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ ci-dessous.



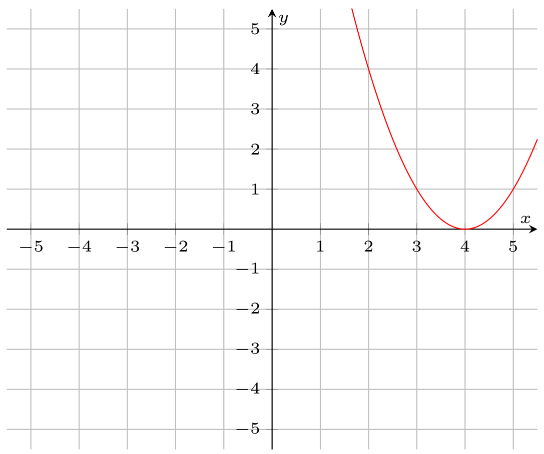
51

Résoudre $x^2 - 4x + 4 < 4$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - x + 4$ ci-dessous.



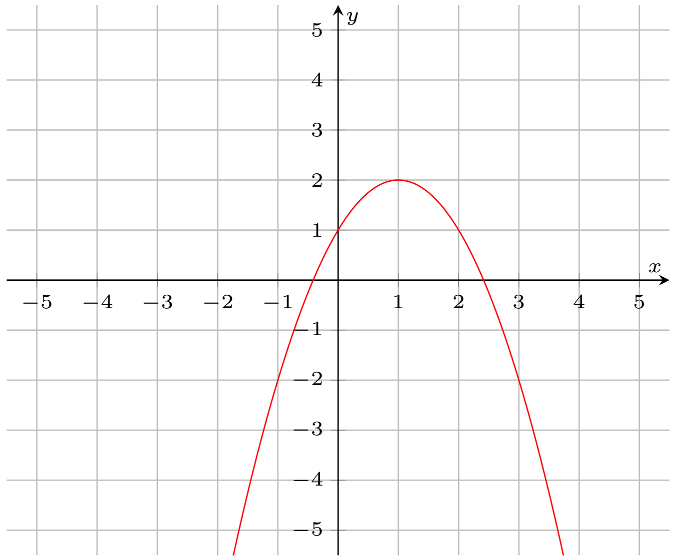
52

Résoudre $x^2 - 8x + 16 > 1$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 16$ ci-dessous.



53

Résoudre $-x^2+2x+1 < -2$ à l'aide de la représentation graphique de la fonction $f(x) = -x^2+2x+1$ ci-dessous.



54

Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x - 4$.

55

Tracer la courbe représentative de la fonction $g(x) = -x - 2$.

56

Tracer la courbe représentative de la fonction $h(x) = 2x + 3$.

57

Tracer la droite de coefficient directeur 1 et passant par le point de coordonnées $(2\,;\,5)$.

58

Tracer la droite de coefficient directeur 2 et passant par le point de coordonnées $(-4\,;\,-3)$.

59

Tracer la droite de coefficient directeur -3 et passant par le point de coordonnées $(0\,;\,-5)$.

60

Tracer la droite de coefficient directeur $-0{,}5$ et passant par le point de coordonnées $(2\,;\,0)$.

61

Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 4x - 8$?

1. $A(5\,;\,6)$
2. $B(7\,;\,20)$
3. $C(-2\,;\,-16)$
4. $D(-2\,;\,0)$

62

Les points suivants appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 - 5x + 3$?

1. $A(0\,;\,3)$
2. $B(-1\,;\,1)$
3. $C(2\,;\,0)$
4. $A(1\,;\,-1)$

63

Quels sont les points d'abscisse 3 situés sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - x + 1$?

64

Quels sont les points d'abscisse -1 situés sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 4x - 3$?

65

Quels sont les points d'abscisse -15 situés sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = x + 21$?

66

Quels sont les points d'abscisse -12 situés sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = -4x + 1$?

67

Quels sont les points situés sur l'axe des abscisses et sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = -(x-3)(x+2)$?

68

Quels sont les points situés sur l'axe des abscisses et sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = -8(x-7)(x+5)(x+6)$?

69

Quels sont les points situés sur l'axe des ordonnées et sur la courbe représentative de la fonction $f(x) = 4x - 5$?

70

Soit d la droite passant par les points $A(1\,;\,4)$ et $B(3\,;\,8)$. Donner l'équation réduite de cette droite.

71

Soit d la droite passant par les points $A(5\,;\,3)$ et $B(12\,;\,10)$. Donner l'équation réduite de cette droite.

72

Soit d la droite passant par les points $A(-2\,;\,3)$ et $B(-4\,;\,9)$. Donner l'équation réduite de cette droite.

73

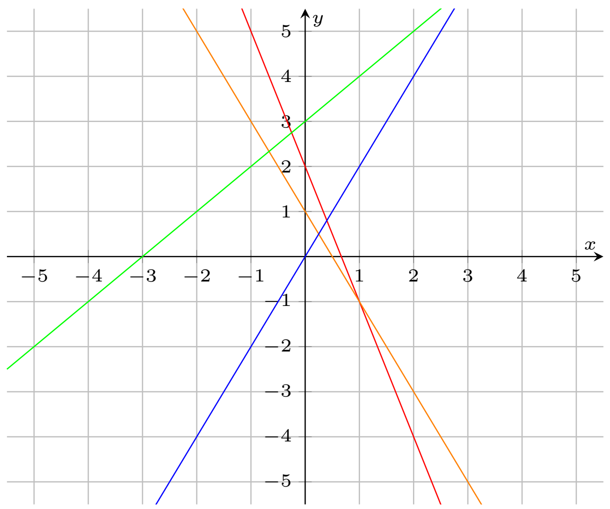
Soit d la droite passant par les points $A(0\,;\,-4)$ et $B(-2\,;\,-7)$. Donner l'équation réduite de cette droite.

74

Soit d la droite passant par les points $A(2\,;\,1)$ et $B(9\,;\,3)$. Donner l'équation réduite de cette droite.

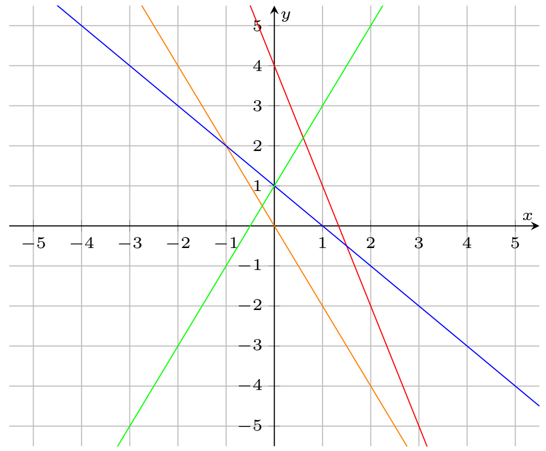
75

Donner le coefficient directeur associé à chacune des droites représentées ci-dessous :



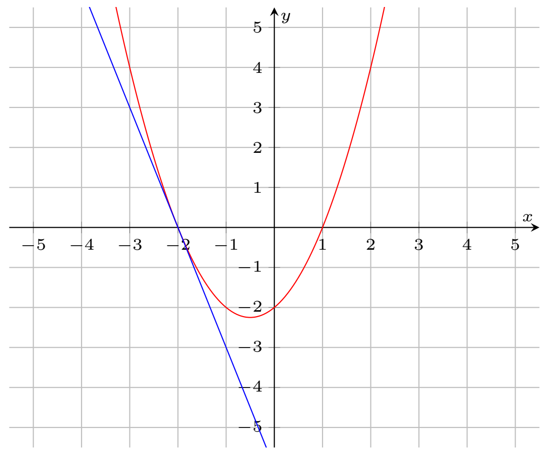
76

Donner le coefficient directeur associé à chacune des droites représentées ci-dessous :



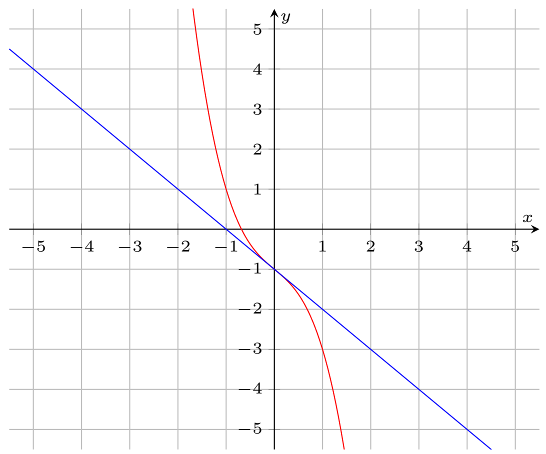
77

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentée ci-dessous :



78

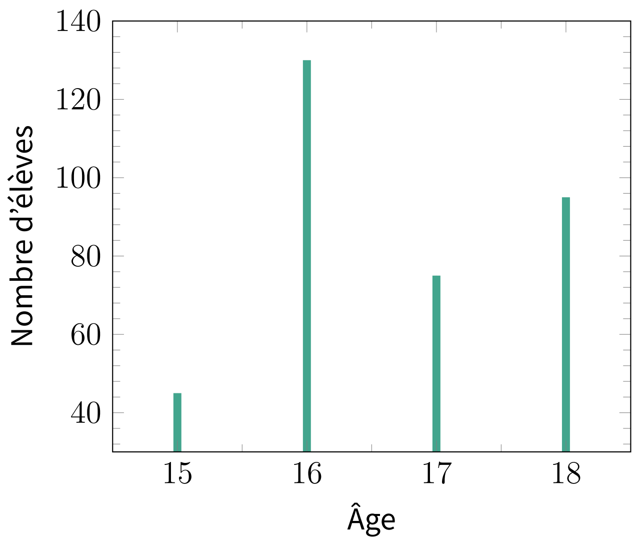
Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentée ci-dessous :



Représentations graphiques de données chiffrées

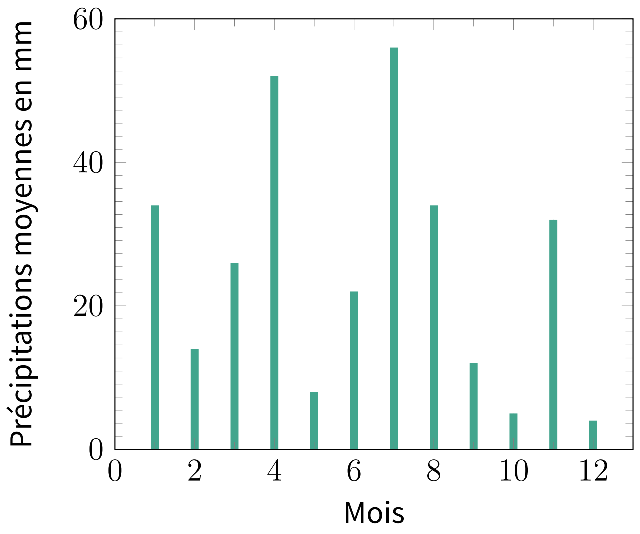
79

Regrouper dans un tableau les données du diagramme en bâtons ci-dessous :



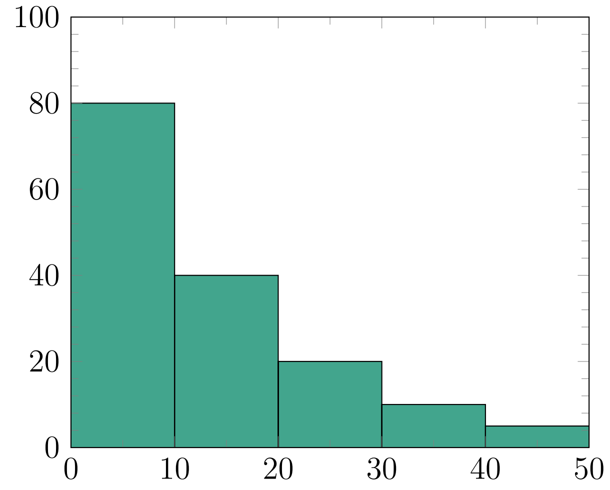
80

Regrouper dans un tableau les données du diagramme en bâtons ci-dessous :



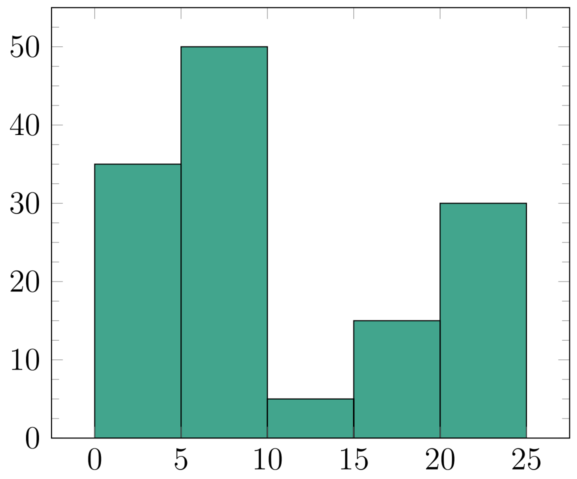
81

Regrouper dans un tableau les données de l'histogramme ci-dessous :



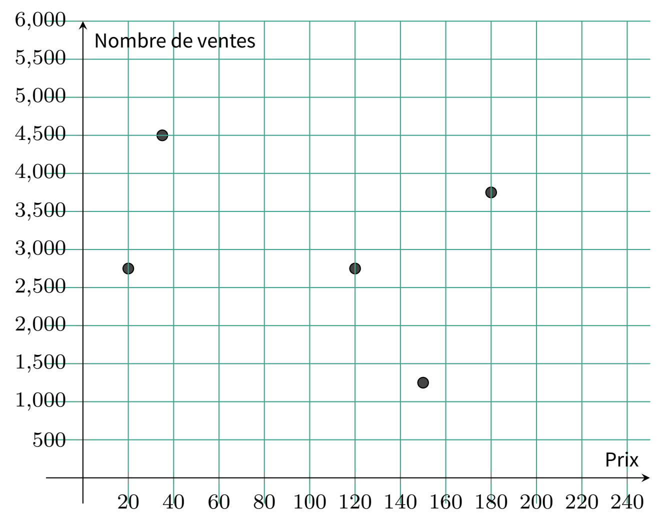
82

Regrouper dans un tableau les données de l'histogramme ci-dessous :



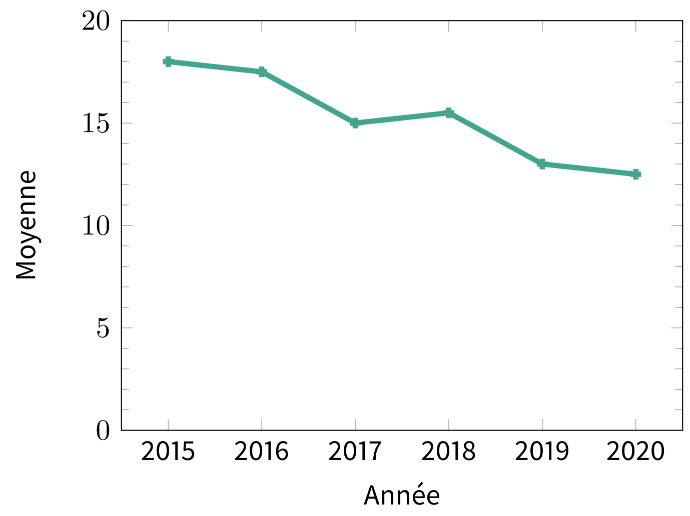
83

Regrouper dans un tableau les données du nuages de points ci-dessous :



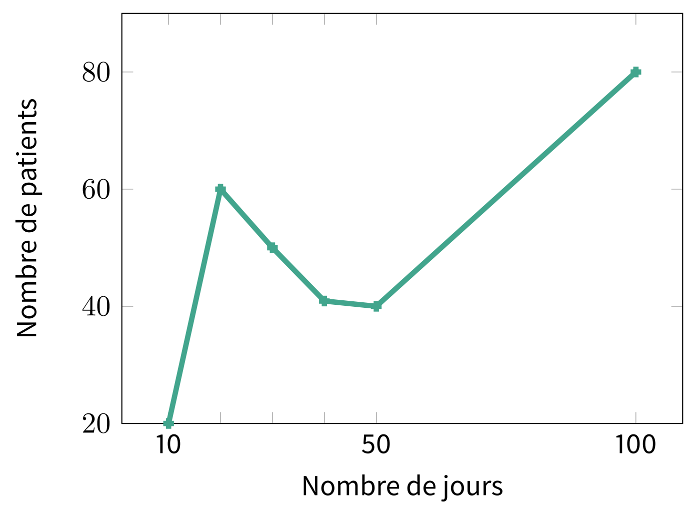
84

Regrouper dans un tableau les données du graphique ci-dessous :



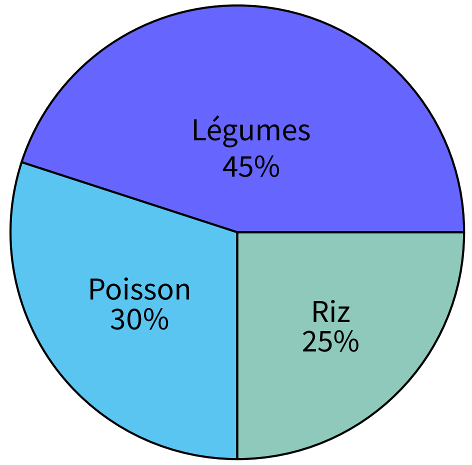
85

Regrouper dans un tableau les données du graphique ci-dessous :



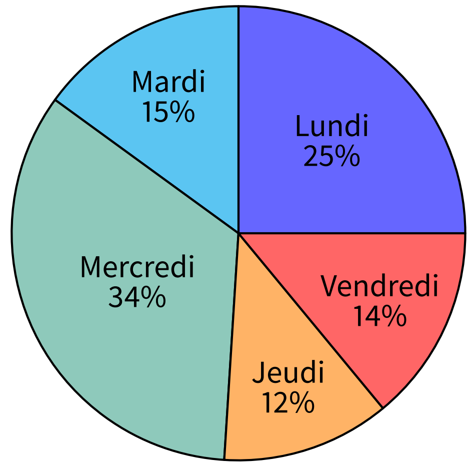
86

Regrouper dans un tableau les données du graphique ci-dessous représentant la composition d'un plat :



87

Regrouper dans un tableau les données du graphique ci-dessous représentant la répartition de la fréquentation d'une salle de théâtre durant une semaine :



Crédits photographiques

Couverture : © hilbrt **/ p.7** © ISKOS BERLIN **/ p.10** © Flammarion **/ p.12** © Flammarion **/ p.13** © Fondation Le Corbusier **/ p.33** © Svilen Gamolov **/ p.40** (CC) Seahen **/ p.36** © Georges Meguerditchian **/ p.37 et 38** © Hiromi Fujii **/ p.56** © XINDAO **/ p.57** © 8BitDo **/ p.58 et 59** © Aakash Nihalani **/ p.61** © Maksim Arbusov **/ p.65** (CC) Dmharvey **/ p.67** (CC) Saralamphotographymorocco **/ p.86** (CC) MaEr **/ p.97** (CC) SBA73 **/ p.102 et 103** © Theresa Burger **/ p.105** © Pieter STOCKMANS **/ p.108 à 110** © Fondation Le Corbusier **/ p.143** (CC) Julo **/ p.146** (CC) Fetchcomms **/ p.183** (CC) Diliff **/ p.187** © Michaela Crie Stone **/ p.190** © Dimitris Ladopoulos **/ p.219** © Gabriel Dawe **/ p.219** © Inés Esnal **/ p.219** © Nike Savvas **/ p.221** © Dragos Motica **/ p.226-227** © Mathieu Lehanneur **/ p.251** © Pablo Reinoso **/ p.253 et 254** © Ryoji Ikeda **/ p.273** © Jolan Van Der Wiel **/ p.273** © Tomáš Gabzdil Libertíny **/ p.274 et 275** © Sveta Axonova

Les autres photographies et illustrations ne figurant pas dans le domaine public sont propriétés de hilbRt.