Repérage dans l'espace:

Séance 1:
Découvrir le repérage dans l'espace

Definition
Pour définir un repère dans l'espace:

- On prend un point O, **l'origine,**
- Trois points I, J, K qui définissent les axes du repère (OI); (OJ), (OK), respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la côte.

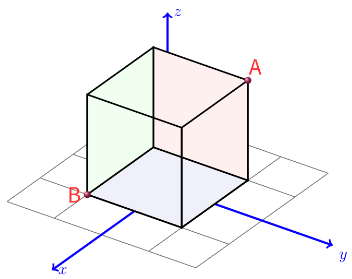
Remarques:
- On garde la même terminologie que pour le plan. Ainsi, un repère sera :

• orthogonal si ses axes sont orthogonaux;

• orthonormal s'il est orthogonal est que les unités de chaque axe sont égales.

- On peut également définir un repère à partir de l'origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Exemple:
Dans la figure ci-dessous, représentant un cube, donner les coordonnées des points A et B :



$A(-1;1;1)$ et $B(1;-1;0)$.

Milieu d'un segment:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espaceK Le milieu M de $[AB]$ z pout coordonnées.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

Longueurs d'un segment:
$A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace. La longueur AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Exemple:
Donner le milieu et la longueur du segment $[AB]$ avec $A(-2;3;4)$ et $B(2;-5;6)$.

Le milieu aura pour coordonnées $(0;-1;5)$ et la longueur sera de :

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2+(3+5)^2+(4-6)^2} = \sqrt{84}$$

II. **Calcul vectoriel dans l'espace:**

Translation:

Une translation est une transformation géométrique qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

Vecteur associé à une translation

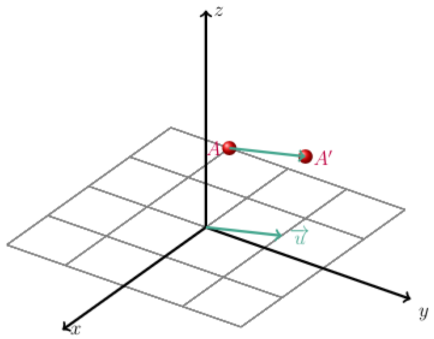
Une translation dans l'espace peut être caractérisée pr un vecteur:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Qui correspond à un déplacement de x suivant l'axe (OI), y suivant l'axe (OJ), z suivant l'axe (OK).

Exemple:

Tracer la représente du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Égalité de vecteurs:

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Somme de vecteurs :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}}$$

Produit d'un vecteur par nombre réel:

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et un nombre réel k, alors :

$$\boxed{k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}}$$

Exemples:

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{w}_2 = 2\vec{u}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-8\\-3\end{pmatrix}$

2. Donner les coordonnées du point $\overrightarrow{AA'}$ où $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A}'\begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\\z_{A'}\end{pmatrix}$

3. **En déduire** les coordonnées du point A' tel que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

Solution:

1. $\overrightarrow{w}_1 = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}2+1\\3-8\\7-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w}_2 = 2\vec{u} \begin{pmatrix}2\times 2\\2\times 3\\2\times 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\14\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}x_{A'}-x_A\\y_{A'}-y_A\\z_{A'}-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{A'}-4\\y_{A'}-3\\z_{A'}-1\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

$$\begin{pmatrix}x_{A'}-4\\y_{A'}-3\\z_{A'}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\\z_{A'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+4\\3+3\\7+1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\\z_{A'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}$$

Exercices :
- **Coordonnées dans l'espace (4 à 7 page 15)**
- **Calcul de milieu dans l'espace (8 à 12 page 15)**
- **Longueur dans l'espace (13 à 16 page 16)**
- **Calcul avec les vecteurs (20 à 25 page 16)**

Problème:

33 page 17