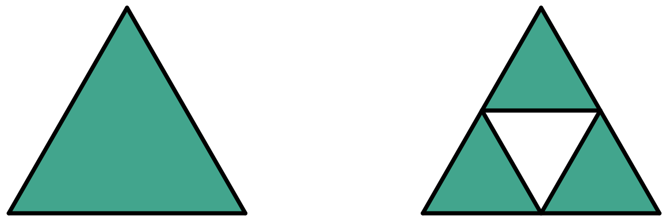
Fractales et figures autosimilaires

Le triangle de Sierpinski



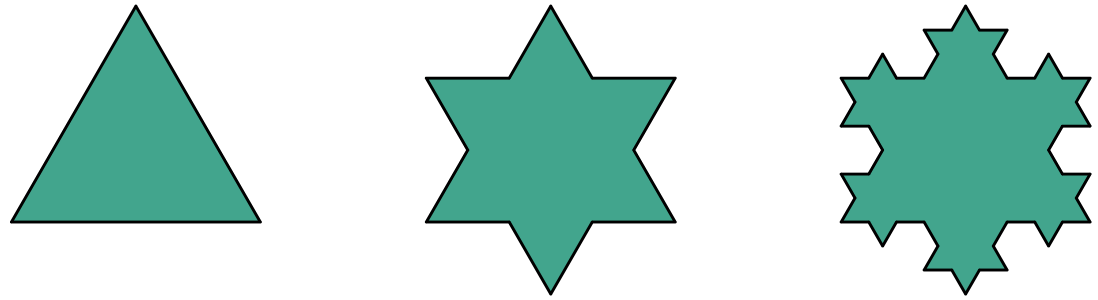
Construction :

1. Construire un triangle équilatéral.
2. Relier le milieu de chacun des côtés pour former un nouveau triangle au centre du précédent que l'on hachurera. Quelle est la nature de ce triangle ? Justifier.
3. Autour de ce triangle central on obtient trois triangles. Démontrer que ce sont des triangles équilatéraux de même dimension.
4. Répéter les opérations précédentes pour chacun des trois triangles.
5. Répéter de nouveau ces opérations pour les triangles non hachurés obtenus. La figure obtenue après une répétition à l'infini de ces opérations est appelée **triangle de Sierpinski**.

Étude :

1. On note $T(n)$ le nombre de triangles non-hachurés à la n-ième étape avec n un entier naturel, et $n = 0$ correspondant au premier triangle tracé.
   (a) Donner $T(1)$ et $T(2)$.
   (b) Exprimer $T(n+1)$ en fonction de $T(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite T ?
   (c) Calculer le nombre total de triangles non-hachurés à l'issue de la cinquième étape.
2. On note $L(n)$ la longueur d'un côté de triangle non-hachuré à la n-ième étape.
   (a) Donner $L(1)$ et $L(2)$.
   (b) Exprimer $L(n+1)$ en fonction de $L(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite L ?
   (c) Calculer la longueur d'un côté d'un triangle non-hachuré à l'issue de la cinquième étape.
3. On note $P(n)$ le périmètre d'un triangle non-hachuré à la n-ième étape.
   (a) Donner $P(1)$ et $P(2)$.
   (b) Exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite P ?

Le flocon de Von Koch



Construction :

1. Construire un triangle équilatéral.
2. Diviser chaque côté du triangle en 3 segments égaux.
3. Construire, pour chacun des côtés, un triangle équilatéral extérieur, dont la base est le segment médian, c'est-à-dire le deuxième segment issu de la division de chaque côté.
4. Effacer le segment médian.
5. Répéter les opérations précédentes pour chacun des segments du polygone.
6. Répéter de nouveaux ces opérations pour chacun des segments du polygone. La figure obtenue après une répétition à l'infini de ces opérations est appelée **flocon de Von Koch**.

Étude :

1. On note $S(n)$ le nombre de côtés du polygone à la n-ième étape avec n un entier naturel, et $n = 0$ correspondant au premier polygone tracé.
   (a) Donner $S(1)$ et $S(2)$.
   (b) Exprimer $S(n+1)$ en fonction de $S(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite S ?
   (c) Calculer le nombre total de côtés du polygone à l'issue de la quatrième étape.
2. On note $L(n)$ la longueur d'un côté du polygone à la n-ième étape.
   (a) Donner $L(1)$ et $L(2)$.
   (b) Exprimer $L(n+1)$ en fonction de $L(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite L ?
   (c) Calculer la longueur d'un côté du polygone à l'issue de la quatrième étape.
3. On note $P(n)$ le périmètre du polygone à la n-ième étape.
   (a) Donner $P(1)$ et $P(2)$.
   (b) Exprimer $P(n+1)$ en fonction de $P(n)$. Quelle est la nature et la raison de la suite P ?

Les fractales et l'autosimilarité

La notion de *fractales* a été formalisée par le mathématicien français Benoît Mandelbrot en 1975 et décrit l'ensemble des objets où certaines propriétés sont maintenues à différentes échelles. Le triangle de Sierpinski et le flocon de Von Koch sont des figures géométriques autosimilaires exactes. Quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe, elles conservent leur forme. Ce sont ainsi des exemples parfaits de fractales. Des formes fractales approximatives sont quant à elles facilement observables dans la nature : les nuages, les flocons de neige, les montagnes, le chou-fleur, les vaisseaux sanguins ou encore les formes urbaines.