Collège Lycée Suger **Mathématiques**

Année 2024-2025 - 3ème trimestre **1ères STD2A**

DST N°4 - Dérivées et analyses de fonctions

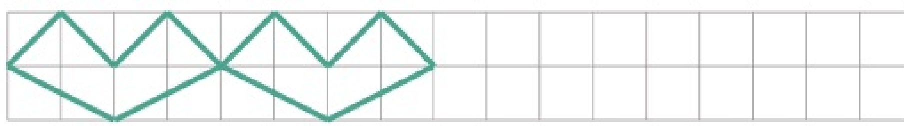
N. Bancel

26 Mars 2025

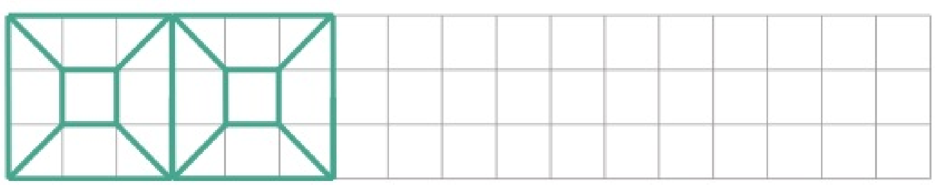
Durée : 2 heures. La calculatrice n'est pas autorisée
Une réponse donnée sans justification sera considérée comme fausse.
Cette interrogation contient 12 questions, sur 7 pages et est notée sur 20 points.

Exercice 1 : Frise et pavage (2.5 points)

1. (1 point) Dans la frise ci-dessous :
   - Repérer le motif
   - Tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif
   - Compléter la frise avec 2 motifs supplémentaires



2. (1.5 points) Dans la frise ci-dessous :
   - Repérer la maille élémentaire et le motif
   - Donner les transformations géométriques permettant de passer de la maille au motif
   - Tracer le vecteur permettant de construire la frise à partir du motif
   - Compléter la frise



Exercice 2 : Analyse - Questions de cours (4 points)

1. (2 points) Donner l'équation d'une droite, et nommer et définir les coefficients qui composent cette équation.

L'équation d'une droite dans un repère est généralement donnée sous la forme :

$$y = ax + b$$

où :

- a est le **coefficient directeur** de la droite : il indique le *sens de variation* (croissant si $a > 0$, décroissant si $a < 0$) et la *pente* de la droite.
- b est l'**ordonnée à l'origine** : c'est la valeur de y lorsque $x = 0$, autrement dit l'endroit où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Par exemple, une droite d'équation $y = 2x + 1$ a un coefficient directeur $a = 2$ et une ordonnée à l'origine $b = 1$. Elle passe donc par le point $(0; 1)$ et monte de 2 unités verticales à chaque unité horizontale.

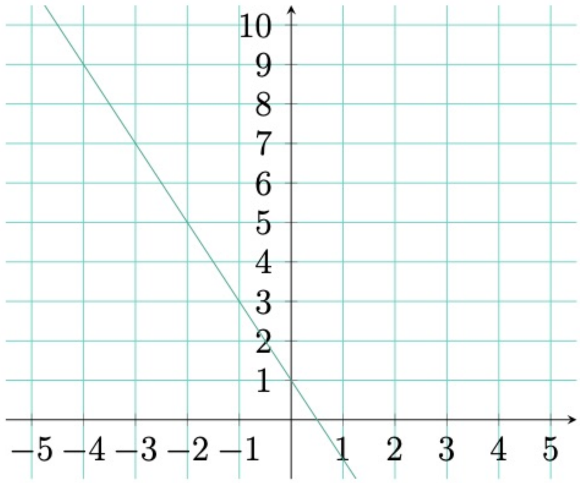
2. (2 points) Reproduire le tableau ci-dessous sur sa copie et remplir la colonne 2 :

Fonction f	**Dérivée**
$f(x) = 6$	
$f(x) = x$	
$f(x) = x^2$	
$f(x) = x^3$	

Fonction f	**Dérivée**
$f(x) = 6$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exercice 3 : Équations de droites (6 points)

1. (2 points) Donner l'équation de la droite représentée ci-dessous.



On repère deux points appartenant à la droite et dont les coordonnées sont facilement lisibles car ce sont des nombres entiers :

$$A(0;1) \quad \text{et} \quad B(-2;5)$$

On peut alors calculer le **coefficient directeur** a de la droite à l'aide de la formule :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2$$

Puisque la droite passe par le point $A(0;1)$, on en déduit que l'ordonnée à l'origine est :

$$b = 1$$

L'équation de la droite est donc :

$$y = -2x + 1$$

Conclusion : Il y a deux choses que l'on peut vérifier assez facilement sur le graphique :

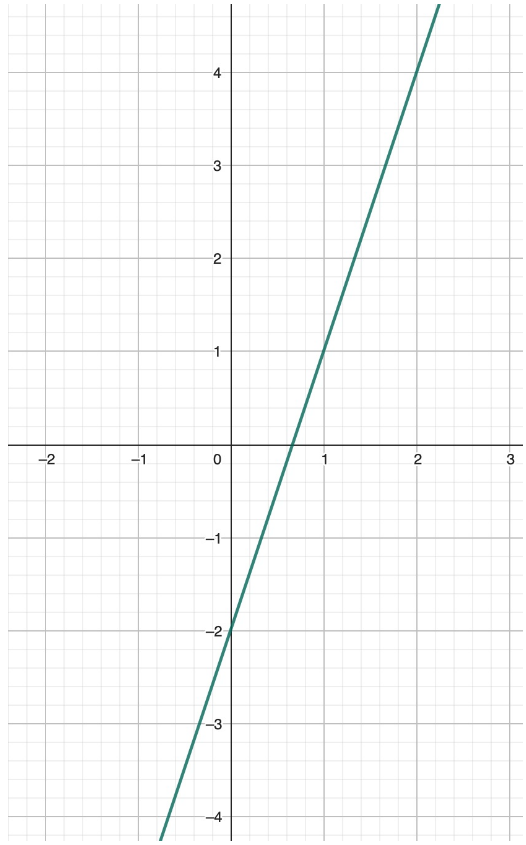
- Le signe du coefficient directeur est **négatif** ($a = -2$), ce qui indique que la droite est **décroissante**. On observe bien sur le graphique que la courbe descend de la gauche vers la droite.
- L'**ordonnée à l'origine** est bien 1, ce qui est cohérent avec notre choix du point $A(0;1)$. On voit que la droite coupe l'axe des ordonnées en $y = 1$.

2. (4 points) Équation de droite :
   (a) (2 points) Tracer la droite d'équation $f(x) = 3x - 2$

   Pour tracer une droite, il suffit de repérer deux points appartenant à cette droite, puis de les relier à la règle.
   On peut choisir deux valeurs simples pour x, par exemple :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \times 0 - 2 = -2 \Rightarrow (0;-2) \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \times 1 - 2 = 1 \Rightarrow (1;1) \end{cases}$$

On place donc les points $A(0;-2)$ et $B(1;1)$ sur le repère, puis on trace la droite qui passe par ces deux points.



Astuce : on peut choisir n'importe quelles valeurs de x, mais il est préférable de choisir des valeurs simples pour lesquelles le calcul de $f(x)$ donne un entier. Cela facilite le tracé.

(b) (0.5 points) Comment pouvait-on deviner son sens de variation ?

La fonction $f(x) = 3x - 2$ est une fonction affine de coefficient directeur $a = 3$. Ce coefficient est **strictement positif**, donc on sait que :

$$f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

Graphiquement, cela signifie que la droite monte de la gauche vers la droite.

(c) (1.5 points) Dresser le tableau de signes de f entre $-\infty$ et $+\infty$:

On cherche pour quelles valeurs de x la fonction s'annule :

$$f(x) = 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

On établit ensuite le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi :

- $f(x) < 0$ pour $x < \frac{2}{3}$
- $f(x) = 0$ pour $x = \frac{2}{3}$
- $f(x) > 0$ pour $x > \frac{2}{3}$

Exercice 4 : Étude des variations d'un polynôme (7.5 points)

1. (1.5 points) Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calculer l'expression de la dérivée de f.

La dérivée de f est :

$$f'(x) = 2x + 2$$

2. (1.5 points) Étudier le signe de la dérivée de f (on pourra dresser un tableau de signes).

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle f' s'annule. Ce qui revient à résoudre l'équation :

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

f' a la forme d'une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 2$.
a est donc de signe positif et par application du cours on peut conclure que

$$\begin{cases} \forall x < -1, f'(x) < 0 \\ \forall x > -1, f'(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. (1 point) En déduire le sens de variation de la fonction f (prendre soin de citer les propriétés qui permettent de déduire le sens de variation).

On sait que la dérivée d'une fonction donne des indications sur son sens de variation :

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est décroissante sur cet intervalle.
- Si $f'(x) = 0$ en un point isolé, cela peut correspondre à un extremum (maximum ou minimum).

D'après la question précédente, on peut déduire les variations de f :

- Sur $]-\infty, -1[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.
- Sur $]-1, +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
- En $x = -1$, la dérivée s'annule, donc f admet un minimum local en $x = -1$.

On peut donc dresser le tableau de variations de f superposé à celui du signe de sa dérivée :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	

Pour finir, on calcule la valeur exacte de $f(-1)$:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Et on peut préciser le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

4. (1 point) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction f entre -1 et 2.

Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre $x = -1$ et $x = 2$ est donné par la formule :

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{f(2) - f(-1)}{3}$$

Calculons les valeurs de f en -1 et en 2 :

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

$$f(2) = (2)^2 + 2 \times 2 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$$

On en déduit le taux d'accroissement :

$$\frac{f(2) - f(-1)}{3} = \frac{5 - (-4)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Conclusion : Le taux d'accroissement de f entre -1 et 2 est égal à 3.

5. (1.5 points) Tracer la courbe représentative de f.

6. (1 point) Quelle est l'interprétation graphique du taux de variation calculé à la question précédente ? Cette interprétation est-elle bien vérifiée sur la figure tracée ?

Le taux d'accroissement entre $x = -1$ et $x = 2$ correspond au **coefficient directeur de la droite sécante** passant par les points $A(-1, f(-1))$ et $B(2, f(2))$.

Dans notre cas :

$$f(-1) = -4 \quad \text{et} \quad f(2) = 5$$

La droite sécante passe donc par les points $A(-1, -4)$ et $B(2, 5)$, et son coefficient directeur est :

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 3$$

Interprétation graphique : On peut dire que la courbe f monte en moyenne de 3 sur l'axe des ordonnées quand on avance de 1 sur l'axe des abscisses.

Vérification graphique : xxxx