3. Tracer, dans un repère orthonormé, l'arc de parabole P_f représentatif de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.
4. Justifier que $f'(2)$, nombre dérivé de la fonction f en 2, est égal à 2.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
5. Compléter votre figure avec la la tangente (T) à P_f au point A d'abscisse 2.

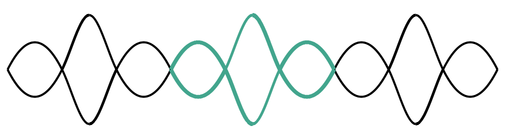
104

En raison d'une forte augmentation du nombre de personnes infectées par un virus dans une ville, une campagne de sensibilisation et de traitement a été lancée en janvier 2023. On modélise le pourcentage de personnes infectées en fonction du temps t, exprimé en mois écoulés depuis janvier 2023, par la fonction q, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,24]$ par : $q(t) = -0.3t^2+6t+20$.

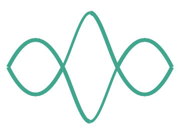
1. Calculer la fonction dérivée de la fonction q et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction q sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.
3. Quel était le pourcentage de personnes infectées au début de la campagne ?
4. Quel a été le pourcentage maximum de personnes infectées durant l'épidémie ? À quel moment ce maximum a-t-il été atteint ?
5. Déterminer l'année et le mois durant lesquels le virus aura disparu de la ville.

105

Le but de cet exercice est de donner une construction à l'aide d'outils mathématiques de la frise suivante :



Dans tout l'exercice, on appellera « motif » la figure suivante :



Partie A :

La courbe $\mathcal{C}_f$, tracée sur le graphique à la fin de cet exercice, est la représentation graphique d'une fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(2\,;\,0)$; tracer cette tangente sur la courbe du graphique ci-dessous.

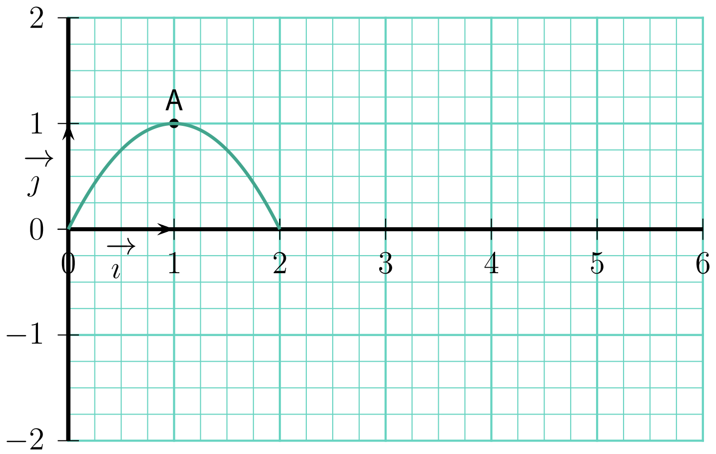
Partie B :

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[2\,;\,3]$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 14x^2 + 30x - 20$$

et $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique.

1. Calculer $g(2)$; en déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ passe par le point B.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Déterminer l'expression de $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
3. Calculer $g'(2)$ puis en déduire que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente au point B.
4. Calculer $g(3)$ et $g'(3)$; quelle est la particularité de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ en son point C d'abscisse 3 ?
   Placer le point C et tracer cette tangente sur le graphique.



Télécharger le graphique

04. TP

String art et tangentes

Mary Everest Boole

Mary Everest Boole (1832-1916) fut une mathématicienne et philosophe britannique connue notamment pour son travail de vulgarisation des mathématiques. Sa vision de l'enseignement impliquait l'utilisation de matériaux naturels et de l'activité physique afin d'encourager une conception imaginative des sujets.

A la fin du XIXème siècle, elle développe un ensemble d'activités appelées *curve stitch*, consistant à reproduire des formes géométriques à l'aide de fils tendus. Aujourd'hui connues sous le nom de *String Art*, ces activités reposent sur la notion mathématique de tangentes.

Première construction

Nous allons commencer par construire une parabole. On considère la fonction

$$f(x) = x^2.$$

Soit A, B, C, D les points appartenant à la courbe représentative de f et ayant pour abscisse respective 0, 1, 2 et 3.

1. Calculer les coordonnées de chaque de ces points.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en chacun de ces points.
3. Tracer sur une feuille de papier chacune de ces droites.

L'enveloppe tangentielle ainsi obtenue est trop grossière pour reproduire la parabole souhaitée. Comment l'améliorer ?

Automatisation avec Geogebra

Le tracé de chacune des tangentes étant long, nous pouvons automatiser notre processus en utilisant Geogebra.

1. Définir la fonction f dans le champ de saisie, puis la droite d'équation :
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
   À quoi correspond la droite tracée ?
2. Accepter la création du curseur. Dans l'onglet *Propriétés*, changer l'incrément à $0{,}25$ (on fixera le minimum à 0 et le maximum à 4).
3. En sélectionnant la tangente par un clic droit, activer *Afficher la trace*.
4. Lancer l'animation du curseur. Qu'obtient-on ?