Chapitre 2 - Les suites

N. Bancel

October 24, 2024

Notions à maîtriser à la fin du chapitre

Notions à maîtriser

1. Savoir calculer les termes d'une suite (d'une suite définie de manière fonctionnelle, et définie de manière récurrente)
2. Connaître les définitions d'une suite géométrique, et d'une suite arithmétique.
3. Reconnaître une suite arithmétique, ou une suite géométrique : montrer qu'une suite peut s'écrire sous la forme $U_{(n+1)} = U_{(n)} + r$ ou $U_{(n+1)} = q \times U_{(n)}$
4. Etre capable de démontrer qu'une suite est croissante, ou décroissante
   - Dans le cas général : évaluer le signe de $U_{(n+1)} - U_{(n)}$
   - Dans le cas d'une suite arithmétique : évaluer le signe de la raison r
   - Dans le cas d'une suite géométrique : évaluer si la raison q est comprise entre 0 et 1, ou est supérieure à 1
5. Comprendre comment représenter une suite graphiquement (dessiner le nuage de points)

Qu'est ce qu'une suite ?

Définition d'une suite

Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n (n = 0, 1, 2) associe un nombre réel noté $U(n)$ ou U_n. On parle du terme de rang / d'indice n de la suite. Une suite est une liste ordonnée d'élements

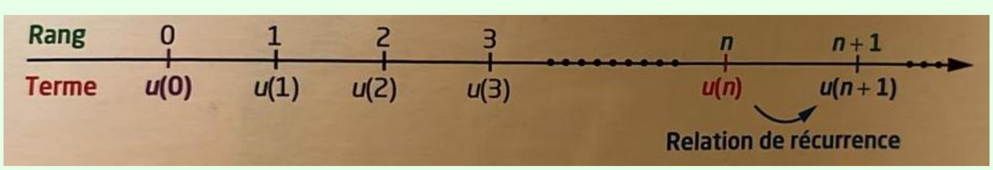

Figure 1: Suite

Exemples

$u = \{15, -3, 7, 8, 97, ...\}$ est une suite.

En faisant commencer l'indice de la suite à 0, le terme d'indice 4, noté $u(4)$ est égal à 8

$$u(4) = 8$$

Dans certains cas on comptera les positions à partir de 0, dans d'autres à partir de 1 (l'énoncé dira quelle convention utiliser).

Par exemple dans la suite u ci-dessus :

- $u(2) = -3$ si on compte les positions à partir de 1,
- $u(2) = 7$ si on compte les positions à partir de 0.

Si l'énoncé dit "pour tout entier naturel n" ou "pour $n \in \mathbb{N}$" , cela voudra dire que l'on compte à partir de 0. De façon générale, on peut commencer notre suite à n'importe quel rang $n \geq 0$.

Exemples

Soit v la suite des nombres impairs. Donner $v(5)$ en supposant que les indices débutent à 0.

Réponse: $v = \{1;3;5;7;9;11;...\}$, d'où $v(5) = 11$.

Exercices

Exercices 1, 3, 5, 6

Représentation graphique d'une suite

La représentation graphique d'une suite u sera un nuage de points. Ces points auront pour coordonnées $(n;U_n)$. En reprenant l'exemple de la suite u des multiples de 2, la représentation graphique de u est :

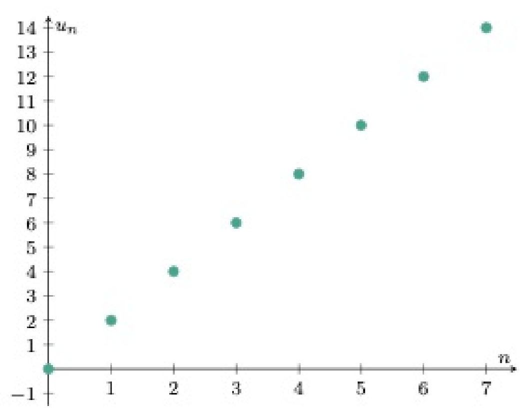

Figure 2: Représentation graphique

Suite définie comme une fonction

Plutôt que de donner chacun des termes d'une suite, on peut la définir à l'aide d'une formule. La première façon de définir une suite est à l'aide d'une **fonction du rang n** . On dit que la suite est définie **de façon explicite / fonctionnelle.**

Exercices

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n - 3$.
On trouve chaque terme de la suite en remplaçant n par 0,puis 1, 2, etc. Ainsi $u(10) = 2 \times 10 - 3 = 17$ et de façon plus générale $u = \{-3; -1; 3; 3; \ldots\}$.

Représenter graphiquement la suite U

C'est comme si on échantillonait une fonction (c'est-à-dire qu'on ne sélectionnait les valeurs que pour des valeurs de x données (des nombres entiers))

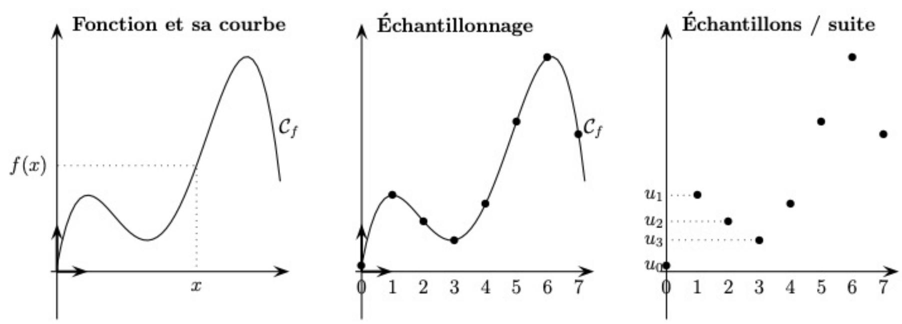

Figure 3: Echantillonage

Exercices

On considère la suite $U(n) = n^2$. Donner les 4 premiers termes de la suite en commençant à $n = 0$

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(1) = 1^2 = 1 \\ U(2) = 2^2 = 4 \\ U(3) = 3^2 = 9 \end{cases}$$

Expression de U_{N-1}, U_{N+1}, U_{2N}, ...

Si l'expression de U_n est donnée, on peut donner celle de U_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ (en n'oubliant pas les parenthèses). De même on peut donner l'expression de U_{2n}

en remplaçant n par $2n$.

Exemple : Soit la suite u définie pour tout entier naturel par

$$U_n = 7n + 5$$

Donner l'expression de U_{n+1} et de U_{2n}

Exercices

Exercice N°17 page 123 et Question 2 de Exercice N°19

Suite définie par récurrence

Préambule Pour maîtriser la partie qui suit, il est nécessaire de comprendre que :

- $u(n+1)$ est le terme après $u(n)$,
- $u(n)$ est le terme après $u(n-1)$,
- $u(n-1)$ est le terme après $u(n-2)$,
- etc.

Et aussi que :

- si $u(n+1)$ est $u(4)$, alors $u(n)$ est $u(3)$,
- si $u(n+1)$ est $u(12)$, alors $u(n)$ est $u(11)$,
- si $u(n)$ est $u(10)$, alors $u(n-1)$ est $u(9)$.

La seconde façon de définir une suite est par récurrence. Dans ce cas, pour calculer la valeur d'un terme de la suite, on a besoin d'un ou plusieurs termes précédents. Ainsi, on aura par exemple une formule du type :

$$u_{n+1} = \dots u_n \dots$$

ou

$$u_n = \dots u_{n-1} \dots$$

Exercices

Soit la suite définie comme suit :

$$\begin{cases} u(n+1) = 4u(n)+7 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Calculer $u(1)$ et $u(2)$
Pour calculer u_1

$$u(1) = 4u(0)+7 = 4\times(-1)+7 = 3$$

Maintenant que l'on connaît u_1, on peut calculer u_2 :

$$u(2) = 4u(1)+7 = 4\times 3+7 = 19$$

Faire l'exercice 66. Conjecturer le sens de variation

Sens de variation

- Une suite est **croissante** si un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent :
$$u(n+1) \geq u(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
- Une suite est **décroissante** si :
$$u(n+1) \leq u(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Définition d'une suite arithmétique

Une suite est dite *arithmétique* lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. Ainsi, pour tout n :

$$u(n+1) = u(n)+r$$

Le nombre r est appelé *raison* de la suite arithmétique.

Exemples

- La suite définie par $u(n+1) = u(n)+4$ est une suite arithmétique de raison 4.
- La suite définie par $u(n) = u(n-1)+12$ est une suite arithmétique de raison 12.

Monotonie / Sens de variation

- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Exemple

La suite définie par $u(n+1) = u(n)-4$ est une suite décroissante.

Reconnaître une suite arithmétique

Suite définie explicitement

Une suite donnée sous forme explicite peut être une suite arithmétique. Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u(n) = n + 4$$

est une suite arithmétique. Comment le prouver ?

1. Exprimer $u(n+1)$.
2. Calculer $u(n+1) - u(n)$.
3. Si le résultat est une constante, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de la variable n, alors la suite est arithmétique.

Réponses

1. $u(n+1) = (n+1) + 4 = n + 1 + 4 = n + 5$
2. $u(n+1) - u(n) = (n+5) - (n+4) = n + 5 - n - 4 = 1$
3. Comme le résultat de $u(n+1) - u(n)$ est une constante (1), la suite est arithmétique de raison 1.

On peut donc réécrire u sous la forme :

$$u(n+1) = u(n) + 1$$

Exercices

Exercice N°89, N°95, N°97, N°100 page 129-130

Définition d'une suite géométrique

Définition

On dit qu'une suite est **géométrique** quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Ainsi, pour tout n :

$$u(n+1) = u(n) \times q$$

On appelle ce nombre q la **raison** de la suite géométrique.

Exemples

- La suite $u(n+1) = u(n) \times 7$ est une suite géométrique dont la raison est 7.
- La suite $u(n) = -6 \times u(n-1)$ est une suite géométrique dont la raison est -6.

Monotonie

- Si $q > 1$, la suite est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante.

Autres exemples

La suite u définie par tout entier naturel par $u(n+1) = 5u(n)$ est une suite croissante.
La suite v définie par tout entier naturel par $v(n+1) = \frac{1}{2}v(n)$ est une suite décroissante.

Une suite donnée sous forme explicite peut être une suite géométrique. Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 4^n$ est une suite géométrique. Comment le prouver ?

1. Exprimer $u(n+1)$.
2. Calculer $\frac{u(n+1)}{u(n)}$.
3. Si le résultat est une constante, alors la suite est géométrique.

Montrons que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 4^n$ est une suite géométrique.

$$\frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4^1 = 4.$$

Comme le résultat de $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est une constante (4), la suite est géométrique de raison 4. On peut donc réécrire u sous la forme :

$$u(n+1) = 4 \cdot u(n).$$