Collège Lycée Suger **Mathématiques**

Année 2024-2025 - 3ème trimestre **1ères STD2A**

Chapitre 9 - Automatismes

N. Bancel

Mai 2025

Concepts importants à retenir

- Taux d'évolution d'une grandeur
- Pourcentages
- Fractions irréductibles
- Equations du 1er degré

Pourcentages et taux d'évolution

Méthode

Pour calculer le **coefficient multiplicateur** correspondant à une variation en pourcentage :

- En cas d'**augmentation de** $x\%$, le coefficient multiplicateur est :

$$1+\frac{x}{100}$$

- En cas de **diminution de** $x\%$, le coefficient multiplicateur est :

$$1-\frac{x}{100}$$

Ce coefficient permet ensuite de **calculer le prix final** (ou une valeur finale) après une augmentation ou une diminution. **Exemple :** Un objet coûte 50 euros et subit une augmentation de 23 %. Le coefficient multiplicateur est : $1+\frac{23}{100}=1.23$

$$\text{Prix final} = 50 \times 1.23 = 61.50 \text{ euros}$$

Exercice (partiellement corrigé)

04

Donner le coefficient multiplicateur dans chacun des cas suivants :

1. une augmentation de 23%,
2. une augmentation de 65%,
3. une diminution de 9%,
4. une diminution de 36%,
5. une augmentation de 140%.

1. Une augmentation de 23% :

$$\text{Coefficient multiplicateur} = 1 + \frac{23}{100} = 1.23$$

2. Une augmentation de 65% :

$$\text{Coefficient multiplicateur} = 1 + \frac{65}{100} = 1.65$$

3. Une diminution de 9% :

$$\text{Coefficient multiplicateur} = 1 - \frac{9}{100} = 0.91$$

Consigne et exercice supplémentaire

05

Calculer :

1. une augmentation de 50% sur une valeur de 100,
2. une diminution de 20% sur une valeur de 100,
3. une augmentation de 40% sur une valeur de 20,
4. une diminution de 10% sur une valeur de 90.

Taux / Pourcentage de variation

Méthode

Pour déterminer le **pourcentage de variation** entre une valeur initiale et une valeur finale, on utilise la formule :

$$\text{Taux de variation} = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$$

- Si le résultat est négatif, il s'agit d'une **diminution**.
- Si le résultat est positif, il s'agit d'une **augmentation**.

Pour obtenir le **pourcentage appliqué**, on multiplie ce taux par 100. **Exemple :** Si un prix passe de 100 à 80 :

$$\frac{80-100}{100} = -0.20 \quad \Rightarrow \quad \text{diminution de } 20\%$$

08

Un pull de 40 euros voit son prix baisser à 32 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

09

Un jean de 200 euros voit son prix augmenter à 260 euros. Quel a été le pourcentage appliqué ?

Coefficient multiplicateur global

Méthode

Lorsqu'on applique plusieurs variations successives (augmentations ou diminutions), on calcule le **coefficient multiplicateur global** en multipliant les coefficients les uns après les autres.

Exemple : Une augmentation de 20% puis une diminution de 10% :

$$\text{CM global} = (1.20) \times (0.90) = 1.08 \Rightarrow \text{augmentation globale de } 8\%$$

12

Dans chacun des cas suivants, donner le coefficient multiplicateur global et en déduire le pourcentage associé :

1. une augmentation de 50% suivie d'une nouvelle augmentation de 10%,
2. une augmentation de 30% suivie d'une diminution de 40%,
3. une diminution de 50% suivie d'une nouvelle diminution de 20%,
4. une diminution de 10% suivie d'une augmentation de 60%.

Pourcentage

Méthode – Retrouver une valeur initiale à partir d'un pourcentage

Lorsqu'un pourcentage d'une quantité est connu, on peut retrouver la valeur initiale en résolvant une équation simple :

$$\text{Si p\% de vaut une certaine valeur, alors} \frac{p}{100} \times Y = \text{valeur connue}$$

On isole ensuite Y pour le calculer.

Exemple : 30% d'une quantité Y vaut 60. Quelle est la valeur de Y ?

$$\frac{30}{100} \times Y = 60 \quad \Rightarrow \quad 0.3Y = 60 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{60}{0.3} = 200$$

Conclusion : La quantité initiale Y vaut 200.

Equations du 1er degré

Méthode

Pour résoudre une équation du premier degré, on suit les étapes suivantes :

- Développer et réduire chaque membre si nécessaire.
- Regrouper tous les termes en x dans un même membre.
- Regrouper tous les nombres dans l'autre membre.
- Isoler x en divisant par le coefficient.
- Vérifier la solution en la remplaçant dans l'équation de départ.

Résolution de l'équation : $8x - 6 = 16x + 18$

$$\begin{aligned} 8x - 6 &= 16x + 18 \\ 8x - 16x &= 18 + 6 \\ -8x &= 24 \\ x &= \frac{24}{-8} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vérification :
On remplace x par -3 dans l'équation de départ :

$$8 \times (-3) - 6 = -24 - 6 = -30$$

$$16 \times (-3) + 18 = -48 + 18 = -30$$

Les deux membres sont égaux, donc la solution est correcte.

25

Résoudre les équations suivantes :

- $x - 32 = 0$
- $2x = 12$
- $3x - 27 = 0$
- $7x + 21 = 0$
- $3x - 45 = 0$
- $8x + 19 = -5x + 3$
- $-4 + 4t = 3t + 13$
- $20y - 2 = -4y + 4$

Résolution d'une équation du 2nd degré factorisée

Méthode

Il existe plusieurs types d'équations du second degré simples :

1. Équation produit : $a \times b = 0$

On utilise la règle suivante :

$$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

On résout chaque facteur séparément.

2. Équation du type : $x^2 = a$
On prend la racine carrée des deux côtés :

$$x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$$

Vérification : Une fois les solutions trouvées, il est utile de les remplacer dans l'équation d'origine pour vérifier que chaque solution donne une égalité vraie.

Exemple 1 : Résoudre $(x-6) \times (-3x+12) = 0$
On applique la règle du produit nul :

$$\begin{cases} x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \\ -3x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \end{cases}$$

Vérification :

Pour $x = 6$: $(6-6)(-3\times 6+12) = 0\times(-6) = 0 \Rightarrow$ 6 est solution de l'équation.
Pour $x = 4$: $(4-6)(-3\times 4+12) = (-2)(0) = 0 \Rightarrow$ 4 est solution de l'équation

Exemple 2 : Résoudre $x^2 - 36 = 0$

$$x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{36} \\ x = -\sqrt{36} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vérification :

Pour $x = 6$: $6^2 - 36 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ 6 est solution de l'équation.
Pour $x = -6$: $(-6)^2 - 36 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ -6 est solution de l'équation.

Les deux solutions sont correctes.

26

Résoudre les équations suivantes :

- $(x-8)(x+9) = 0$
- $(4x-8)(3x-9) = 0$
- $x^2 = 25$
- $x^2 - 25 = 0$
- $x^2 = 9$

Tableau de signe

Méthode – Tableaux de signes

Pour construire un tableau de signes :

- On commence par résoudre $f(x) = 0$ pour trouver les valeurs qui annulent la fonction.
- On étudie le signe de la fonction sur chaque intervalle délimité par ces valeurs.
- Dans le cas d'un produit, on étudie séparément chaque facteur puis on combine les signes.

Astuce : Il est toujours possible de vérifier le signe dans un intervalle en **testant une valeur choisie** (ex : $x = 0$, $x = 6$, et en vérifiant que le signe de la fonction correspond bien à ce que l'on trouve dans le tableau de signe).

Exemple 1 : $f(x) = 4x - 8$

Résolution : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ Donc 2 est racine de $f(x)$, autrement dit $f(2) = 0$ f est une

fonction affine de type $f(x) = ax + b$ où

- $a = 4$
- $b = -8$

On sait que le tableau de signe est du type

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de -a	0	Signe de a	

On en déduit le tableau de signe de $f(x) = 4x - 8$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

- Pour $x = 0$ (avant le 2), $f(0) = -8 < 0 \rightarrow$ bon signe.
- Pour $x = 6$ (après le 2), $f(6) = 4 \times 6 - 8 = 16 > 0 \rightarrow$ bon signe.

Exemple 2 : $g(x) = (x - 5)(x - 7)$

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = 7 \end{cases}$$

Signe de g(x) = (x - 5)(x - 7)

x	$-\infty$		5		7		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vérification avec des valeurs test :

$$\begin{cases} \text{Pour } x=0 : & g(0)=(0-5)(0-7)=(-5)(-7)=35>0 & \rightarrow \text{signe positif confirmé.} \\ \text{Pour } x=6 : & g(6)=(6-5)(6-7)=(1)(-1)=-1<0 & \rightarrow \text{signe négatif confirmé.} \\ \text{Pour } x=10 : & g(10)=(10-5)(10-7)=(5)(3)=15>0 & \rightarrow \text{signe positif confirmé.} \end{cases}$$

Exercice

27

Donner le tableau de signes des fonctions suivantes :

- $f(x) = 4x - 8$
- $g(x) = (x-5)(x-7)$
- $h(x) = -2x + 24$
- $k(x) = 5x + 15$
- $m(x) = x^2 + 1$
- $n(x) = (3x-9)(-2x-8)$
- $p(x) = x(7x-3)$
- $q(x) = \sqrt{x}(-5x+25)$

Lectures graphiques

Lecture graphique

Lire une image :

Pour trouver l'image d'une valeur x, on suit les étapes suivantes :

- Repérer la valeur de x sur l'axe des abscisses (horizontal).
- Monter (ou descendre) jusqu'à toucher la courbe.
- Lire la valeur de y (ordonnée) à ce point : c'est l'image de x, notée $f(x)$.

Lire un antécédent :

Pour trouver l'antécédent d'une valeur y, on fait :

- Repérer la valeur de y sur l'axe des ordonnées (vertical).
- Aller horizontalement jusqu'à croiser la courbe.
- Descendre (ou monter) jusqu'à l'axe des abscisses : la ou les valeurs de x obtenues sont les antécédents de y.

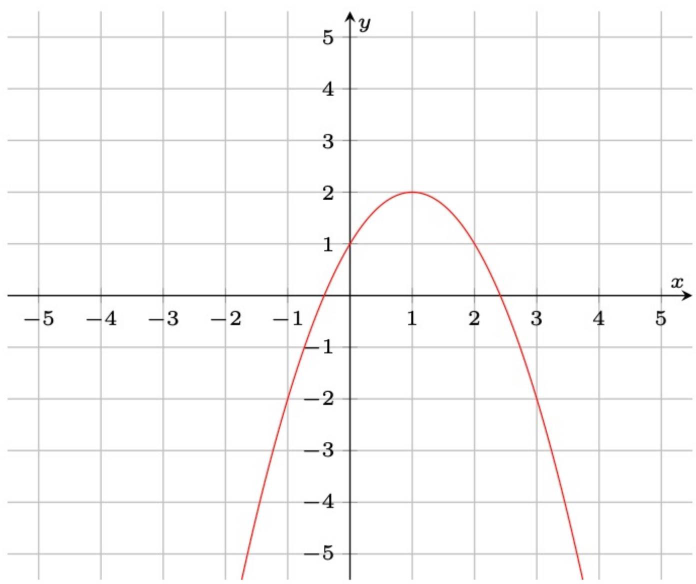
Résoudre une inéquation graphiquement

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 3$, on suit ces étapes :

- Tracer (ou repérer) la courbe de $f(x)$.
- Tracer éventuellement la droite $y = 0$ ou $y = 3$ (si nécessaire).
- Repérer les zones du graphique où la courbe est **au-dessus** ou **en dessous** du niveau demandé.
- Lire les bornes sur l'axe des abscisses pour en déduire les intervalles de solution.

Astuce : une solution graphique est souvent approximative. Si on connaît une équation précise de la courbe, on peut la vérifier par le calcul.

Exemple d'exercice



Soit f la fonction représentée ci-dessus

1. Déterminer l'image de 3 par la fonction f
2. Déteminer le ou les antécédents de -2 par la fonction f
3. Déterminer le tableau de variation de la fonction f
4. Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 1$

Solution de l'exercice

1. Image de 3 : -2, car $f(3) = -2$
2. Antécédents de -2 par f : $\{-1\ ;\ 3\}$ car $f(-1) = -2$ et $f(3) = -2$
3. Tableau de variations :

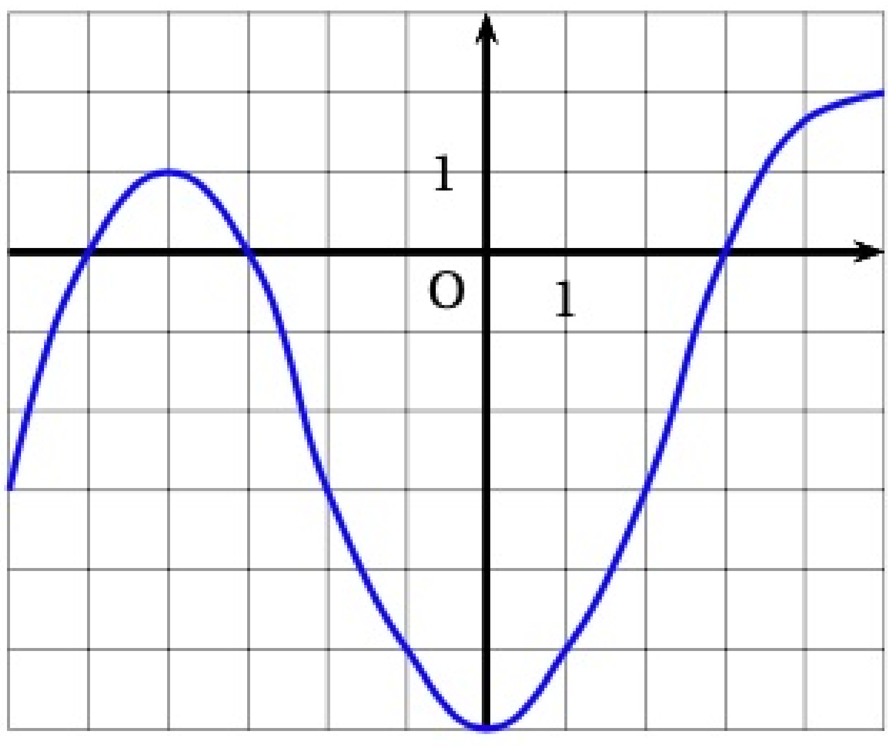
x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. $f(x) \leq 1$ pour $S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

Exercice supplémentaire

Extrait de Baccalauréat Métroplole La Réunion Série N°2 - Série Techno e3c Année 2020

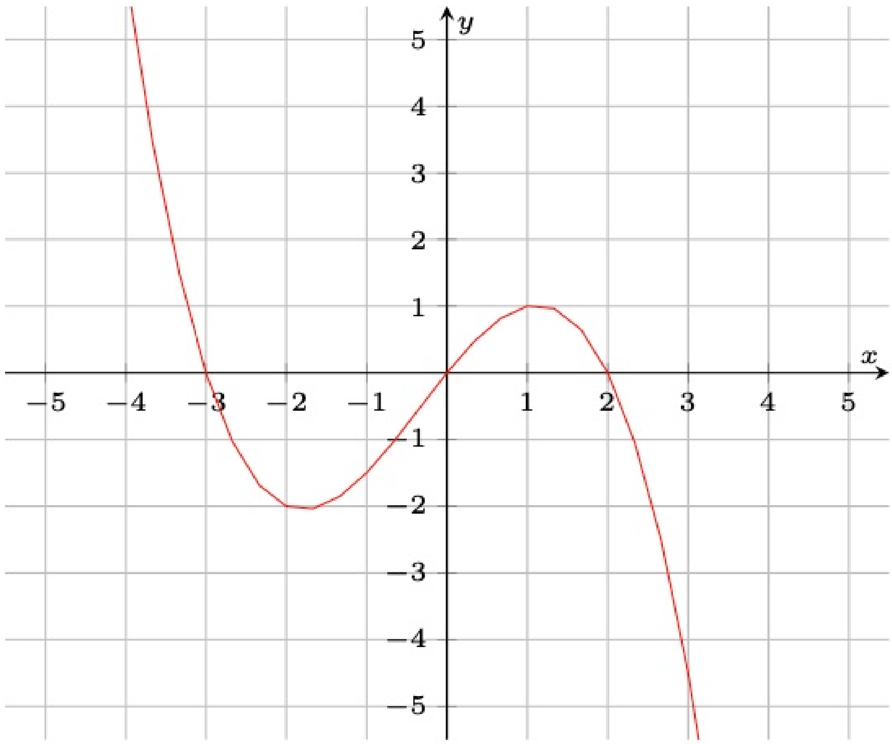
On considère la fonction h, définie sur l'intervalle $[-6\,;5]$, et représentée par la courbe ci-dessous



1. Déterminer les antécédents de -3 par la fonction h.
2. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \leq 0$.
   (b) En déduire le tableau de signe de la fonction h
   (c) Compléter le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[-6\,;5]$.

Exercice supplémentaire II

On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de variation de la fonction
2. Dresser le tableau de signe de la fonction
3. En déduire les solutions de l'équation $m(x) \geq 0$

Dérivée

Equation de droite et interprétation graphique de la dérivée

Extrait du brevet Série Générale e3c N°1 Année 2021

Méthode – Trouver l'équation d'une droite à partir de deux points

Pour déterminer l'équation d'une droite passant par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$, on suit les étapes suivantes :

- **Étape 1 – Calculer le coefficient directeur a :**

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ce coefficient correspond à la pente de la droite.

- **Étape 2 – Utiliser la forme de l'équation de la droite :**
  On utilise la forme :

$$y = ax + b$$

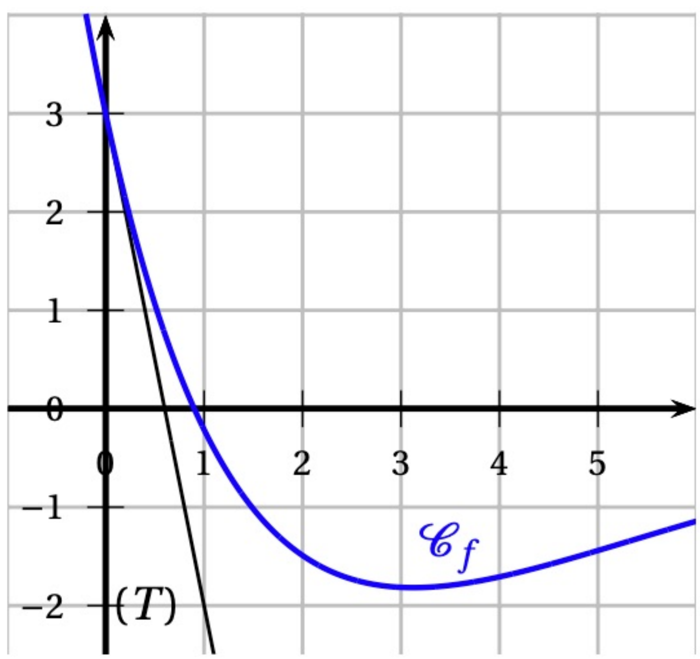
  Pour trouver b, on remplace x et y par les coordonnées d'un des deux points (par exemple A) :

$$y_1 = ax_1 + b \quad \Rightarrow \quad b = y_1 - ax_1$$

- **Étape 2bis - Ordonnée à l'origine**
  Si la droite coupe l'axe des ordonnées en une valeur entière / évidente, alors elle correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 appartenant à la droite. Cette valeur correspond à b
- **Étape 3 – Écrire l'équation de la droite :**
  Une fois a et b connus, on peut écrire l'équation complète :

$$y = ax + b$$

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative est donnée ci-contre. La tangente à la courbe au point A est la droite $\mathscr{T}$.



1. Déterminer l'équation de la droite T
2. En déduire la valeur que prend la dérivée de la fonction f en 0, autrement dit $f'(0)$

Exercice corrigé

Question 1

On cherche l'équation de la droite passant par les points particuliers $A(0;3)$ et $B(1;-2)$.
Étape 1 – Calcul du coefficient directeur a :
On utilise la formule :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{-2-3}{1-0} = \frac{-5}{1} = -5$$

Étape 2 – Détermination de b, l'ordonnée à l'origine :
On utilise la forme $y = ax + b$, et on remplace par les coordonnées du point $A(0;3)$:

$$3 = -5 \times 0 + b \Rightarrow b = 3$$

Conclusion :
L'équation de la droite est donc :

$$y = -5x + 3$$

Question 2

La tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation :

$$y = -5x + 3$$

Par définition, le coefficient directeur de cette tangente donne la valeur de la dérivée de f au point considéré.

Donc :

$$f'(0) = -5$$