

DST N°2 - Géométrie dans l'espace et Suites

N. Bancel

4 Décembre 2024

Durée : 2 heures. La calculatrice n'est pas autorisée

Une réponse donnée sans justification sera considérée comme fausse.

Cette interrogation contient 20 questions, sur 4 pages et est notée sur 21 points.

Exercice 1 : Jeux de rôles (8 points)

Extrait du BAC 2017 STD2A Nouvelle Calédonie

Dans les jeux de rôles, on utilise différents types de dés en plus du classique dé à six faces afin d'obtenir des résultats différents. Les polyèdres réguliers, connus aussi sous le nom de "solides de Platon", permettent d'obtenir des dés équiprobables, chaque face ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Par exemple, un dé à huit faces a la forme d'un octaèdre régulier.

Étude de l'octaèdre régulier

Un octaèdre régulier peut-être obtenu à partir d'un cube en prenant pour sommets de l'octaèdre les centres des faces du cube. On a représenté ci-dessous, en perspective parallèle, un octaèdre régulier ABCDEF inscrit dans un cube dont l'arête mesure 2 cm. Le point O est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.

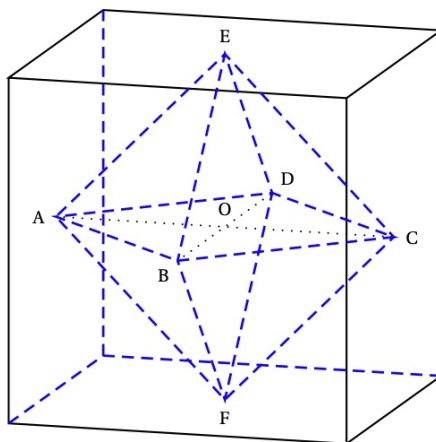


Figure 1: Octaèdre

On admet que $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ est un repère orthonormal de l'espace.

- (2.25 points) Donner les coordonnées des sommets de l'octaèdre régulier ABCDEF dans le repère orthonormal de l'espace $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$
- (1 point) Que peut-on dire de la sphère de centre O passant par A ?

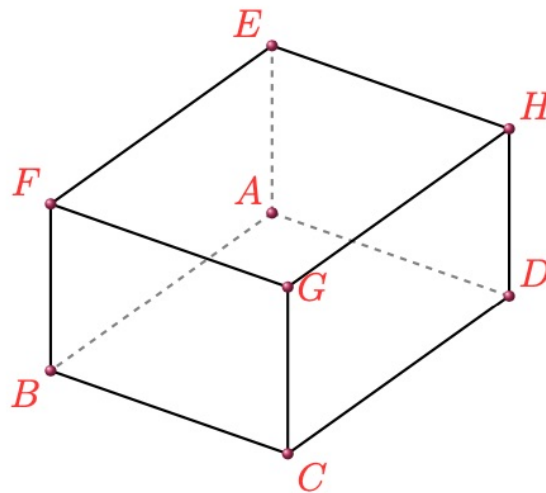
3. (1 point) En utilisant les coordonnées de A et de E , calculer la longueur AE de l'arête de l'octaèdre régulier $ABCD$.
4. (1 point) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Pythagore
5. (1 point) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{DF}
6. (0.75 points) En utilisant l'annexe et la question précédente, les droites (AE) et (DF) sont-elles perpendiculaires ? Justifier
7. (1 point) Calculer le volume de l'octaèdre régulier $ABCDEF$. On arrondira le résultat au cm^3 . On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

où B est l'aire de la base de la pyramide et h la hauteur relative à cette base.

Exercice 2 : Le parallélépipède rectangle (8 points)

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, tel que $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.



On se place dans le repère

$$\left(A; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \right).$$

1. (2 points) Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G dans ce repère.
2. (0.5 points) Donner les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} .
3. (0.5 points) On considère le point I tel que

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}.$$

Placer le point I sur le graphique. Pas besoin de calcul, vous devez pouvoir placer ce point grâce à la compréhension de la notion de vecteur.

4. (0.5 points) Donner les coordonnées du point I . Bonus : avec une équation (sans utiliser une simple lecture graphique), comment pouvait-on trouver proprement les coordonnées du point I ?
5. (0.5 points) En déduire les coordonnées du vecteur \overrightarrow{EI} .

6. (0.5 points) Soit J le point défini par

$$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}.$$

Placer le point J sur le graphique. Pas besoin de calcul, vous devez pouvoir placer ce point grâce à la compréhension de la notion de vecteur.

7. (0.5 points) Donner les coordonnées du point J . Bonus : avec une équation (sans utiliser une simple lecture graphique), comment pouvait-on trouver proprement les coordonnées du point J ?
8. (0.5 points) En déduire les coordonnées du vecteur \overrightarrow{FJ} .
9. (1 point) Quelle est la nature du quadrilatère $EIFJ$? Justifier. (On peut utiliser l'information en annexe pour s'aider à répondre à cette question)
10. (1 point) Calculer la longueur des segments $[EF]$ et $[EI]$.
11. (0.5 points) En déduire l'aire du quadrilatère $EIFJ$.

Exercice 3 : Suites - Exercice identique à celui du BAC Blanc. (5 points)

1. (2.5 points) Soit la suite (U_n) définie pour tout $n \geq 0$ par la relation suivante :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + n \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

- (a) (1 point) Calculer les trois premiers termes de la suite (U_n) .
- (b) (1 point) Calculer $U_{n+1} - U_n$
- (c) (0.5 points) Cette suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier
2. (2.5 points) Soit la suite (V_n) définie par la relation fonctionnelle :

$$V_n = 5 \times 2^n.$$

- (a) (1 point) Calculer les termes V_0 , V_1 et V_2 .
- (b) (1 point) Calculer le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$
- (c) (0.5 points) Déterminer si la suite (V_n) est géométrique, et préciser sa raison. Cette suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier

Annexe

- Un polygone est régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur
- On peut dire que deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs (les vecteurs qui suivent la direction de la droite) sont colinéaires.
- On dit que 2 vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} respectivement de coordonnées x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} et x_{CD}, y_{CD}, z_{CD} sont colinéaires si et seulement si on peut écrire

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_{CD} \\ y_{CD} \\ z_{CD} \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_{CD} \\ \alpha \cdot y_{CD} \\ \alpha \cdot z_{CD} \end{pmatrix}$$

- Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux.
- Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} de coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_{CD} \\ y_{CD} \\ z_{CD} \end{pmatrix}$$

sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0, c'est-à-dire :

$$x_{AB} \cdot x_{CD} + y_{AB} \cdot y_{CD} + z_{AB} \cdot z_{CD} = 0$$