Exemple

On considère la suite $u(n) = n^2$. Donner les 4 premiers termes de cette suite en commençant à $n = 0$.

Réponse : $u(0) = 0^2 = 0$, $u(0) = 1^2 = 1$, $u(2) = 2^2 = 4$, $u(3) = 3^2 = 9$.

Expression de U_{N+1}, U_{2N}, ...

Si l'expression de u_n est donnée, on peut donner celle de u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ (**en n'oubliant pas les parenthèses**). De même on peut donner l'expression de u_{2n} en remplaçant n par $2n$.

Exemple

Soit la suite u définie pour tout entier naturel par $u_n = 7n+5$. Donner l'expression de u_{n+1} et de u_{n-1}.

Réponse : $u_{n+1} = 7(n+1)+5 = 7n+7+5 = 7n+12$. Donc $u_{n+1} = 7n+12$.

Et $u_{n-1} = 7(n-1)+5 = 7n-7+5 = 7n-2$. Donc $u_{n-1} = 7n-2$.

Suite définie par récurrence

Avant-propos

Pour maîtriser la partie qui suit, il est nécessaire de comprendre que :
- $u(n+1)$ est le terme après $u(n)$,
- $u(n)$ est le terme après $u(n-1)$,
- $u(n-1)$ est le terme après $u(n-2)$,
- etc.

Et aussi que :
- si $u(n+1)$ est $u(4)$, alors $u(n)$ est $u(3)$.
- si $u(n+1)$ est $u(12)$, alors $u(n)$ est $u(11)$.
- si $u(n)$ est $u(10)$, alors $u(n-1)$ est $u(9)$.
- etc.

Exemple

Si $u(n+15)$ est $u(115)$, alors $u(n)$ est $u(100)$.

Définition

La seconde façon de définir une suite est par **récurrence**. Dans ce cas, pour calculer la valeur d'un terme de la suite, on a besoin d'un ou plusieurs termes précédents. Ainsi on aura par exemple une formule du type $u_{n+1} = \dots u_n \dots$ ou $u_n = \dots u_{n-1} \dots$.

Exemple :

$$\begin{cases} u(n+1) = 4u(n)+7 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Pour calculer u_1 :

$$u(1) = 4u(0)+7 = 4\times(-1)+7 = 3.$$

Maintenant que l'on connaît u_1, on peut calculer u_2 :

$$u(2) = 4u(1)+7 = 4\times 3+7 = 19.$$

Remarque

On voit que dans le cas d'une suite définie par récurrence il faut une formule, mais aussi le premier terme.

Exemple

Considérons la suite v définie par

$$\begin{cases} v(0) = 2 \\ v(n) = 3v(n-1)+6 \end{cases}$$

Donner les termes de la suite du rang 0 au rang 3.

Réponse :

$$\begin{cases} v(0) = 2 \\ v(1) = 3v(0)+6 = 3\times 2+6 = 12 \\ v(2) = 3v(1)+6 = 3\times 12+6 = 42 \\ v(3) = 3v(2)+6 = 3\times 42+6 = 132 \end{cases}$$

Sens de variation

Propriété

- Une suite est **croissante** si un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent :

$$u(n+1) \geq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Une suite est **décroissante** si :

$$u(n+1) \leq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$