04. TP

Les images de synthèse tridimensionnelles

Dans l'ensemble de cette activité, nous nous placerons dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Préambule

1. Combien de points sont nécessaires pour définir un plan dans l'espace ?
2. En déduire le nombre de vecteurs nécessaires pour définir un plan.
3. Application : décrire les plans dirigés par les vecteurs suivants $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (1; 0; 0)$ et $\vec{v} = (0; 1; 0)$
   (b) $\vec{u} = (1; 0; 0)$ et $\vec{v} = (0; 0; 1)$
   (c) $\vec{u} = (1; -1; 0)$ et $\vec{v} = (0; -1; 1)$

Principe du rendu tridimensionnel

Comme la perspective parallèle, le rendu tridimensionnel repose sur une *projection* :

— un plan $\mathcal{P}$ est choisit. Il correspond, par exemple, à l'objectif d'une caméra, ou à un tableau. Ce plan est défini par deux vecteurs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— L'objet est projeté sur ce plan suivant une direction donnée, le transformant alors en une représentation en 2D.

L'outil mathématique permettant d'effectuer cette projection s'appelle le produit scalaire. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = (x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v} = (x'\,;\,y'\,;\,z')$ est donné par la formule :

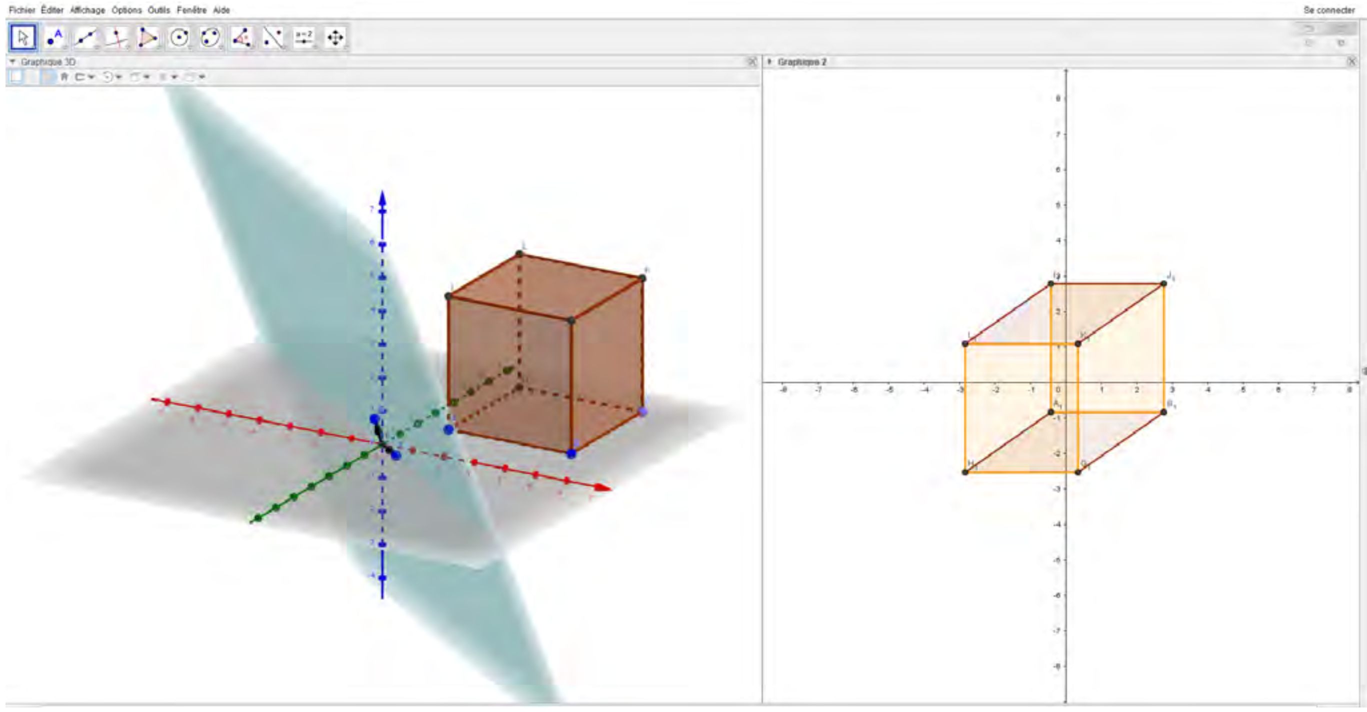
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Prenons un cube ABCDEFGH tel que :

$A(1\,;2\,;0)$,	$C(5\,;6\,;0)$,	$E(1\,;2\,;4)$,	$G(5\,;6\,;4)$,
$B(5\,;2\,;0)$,	$D(1\,;6\,;0)$,	$F(5\,;2\,;4)$,	$H(1\,;6\,;4)$.

1. Donner les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, etc.
2. Calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}$ dans le cas où $\vec{u} = (1; -1; 0)$ et $\vec{v} = (0; -1; 1)$
3. On appelle x et y les deux résultats obtenus précédemment. Placer le point $A'(x\,;\,y)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
4. Reprendre la question précédente en remplaçant $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$, puis par $\overrightarrow{OC}$, etc.
5. Relier les points obtenus pour compléter la représentation du cube dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
6. Reprendre les trois questions précédents, mais cette fois avec les vecteurs $\vec{u} = (1; 0; 0)$ et $\vec{v} = (0; 1; 0)$. Qu'obtient-on ? Ce résultat était-il prévisible ?

Application sous GeoGebra



Télécharger le fichier Geogebra

1. Ouvrir un graphique 3D et un graphique 2D côte-à-côte (aller dans *Affichage > Graphique 3D* et *Affichage > Graphique 2D*).
2. Sélectionner le graphique 3D, en cliquant dans la fenêtre correspondante et placer les points A et B du cube défini dans la première partie.
3. Tracer un cube en sélectionnant l'outil *cube* et en cliquant sur les points A et B.
4. Nous allons tout d'abord définir les vecteurs caractérisant le plan en entrant dans le champ de saisie *u=Vecteur(1,-1,0)* et *v=Vecteur(0,-1,1)*.
5. Tracer le plan défini par les vecteurs précédents, en entrant dans le champ de saisie : *P = Plan(u,v)*.

   Afin de créer la vue en perspective parallèle de ce cube :

6. cliquer dans la fenêtre Graphique 2D, et dans le champ de saisie, entrer : *A_1 = (ProduitScalaire(u, Vecteur(O, A)), (ProduitScalaire(v, Vecteur(O, A))*. On demande de cette façon au logiciel de placer le point A_1 dont les coordonnées sont $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OA}$, dans le repère $(O\,;\,\vec{x},\vec{y})$.
7. Procéder de la même façon pour obtenir la projection des autres points du cube.
8. Modifier l'orientation du plan et commenter.