Séquence : Dérivée des fonctions numériques

Séance 1:
Objectif:
Rappels sur la droite.

I. Droites:

1. Rappels

$y = ax + b$ est l'équation d'une droite, avec a et b des nombres réels.
On appelle a le coefficient directeur de la droite et b son ordonnée à l'origine.

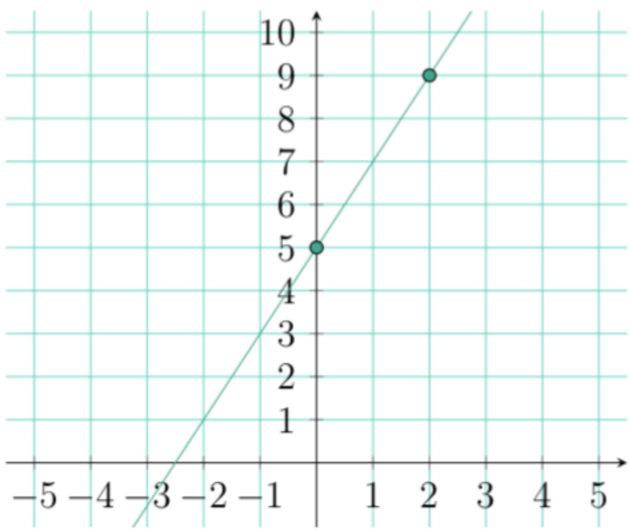
2. Tracer une droite à partir de son équation:

Si l'équation d'une droite $y = ax + b$ nous est donnée, pour
tracer celle-ci il nous suffit de deux points. Pour obtenir ces deux points nous devons prendre deux valeurs (au hasard) pour x et calculer y pour chacun.
On obtiendra alors les coordonnées des deux points appartenant à la droite.

Exemple:
Tracer la droite d'équation $y = 2x + 5$

- On prend au hasard $x = 0$. On trouve $y = 2 \times 0 + 5 = 5$
.
Notre premier point est le point de coordonnées $(0; 5)$

$-$ On prend au hasard $x = 2$. On trouve $y = 2 \times 2 + 5 = 9$
.
Notre deuxième point est le point de coordonnées $(2; 9)$.
.
Il ne nous reste plus qu'à placer ces points et à les relier.

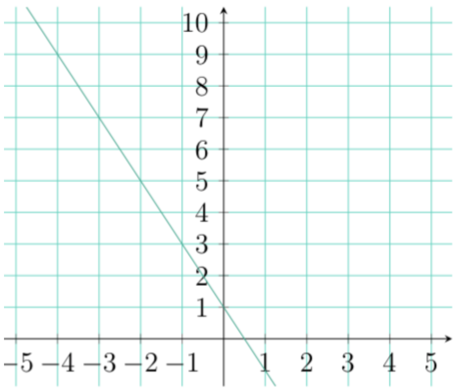


3. Trouver une équation de droite à partir de son tracé:

<u>1ère étape</u> : on prend deux points sur la droite que l'on nomme A et B. On trouve alors le coefficient directeur en calculant : $\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

- **2ème étape**: pour l'ordonnée à l'origine, la méthode la plus simple consiste à donner l'ordonnée
de la droite en $x = 0$. On peut sinon résoudre l'équation $y = ax + b$ où l'inconnue est b, après a avoir remplacé a par le résultat trouvé pour le coefficient directeur, et après avoir remplacé x et y par leurs valeurs de x_A et y_B.

Exemple:
Donner l'équation de la droite représentée ci-dessous.



Les ponts $(-3; 7)$ et $(-2; 5)$ appartiennent à la droite. On en déduit le coefficient directeur
$a = \dfrac{7-5}{-3-(-2)} = \dfrac{2}{-1} = -2$.
Par lecture graphique, l'ordonnée à l'origine est $b = 1$.
On en conclut que l'équation de la droite représentée est $y = -2x + 1$.
Exercices (1;2 page 73)

4. Fonctions affines :

Les fonctions du type $f(x) = ax + b$ sont appelées **fonctions affines.** Leur représentation graphique est une droite.
Si $a > 0$ la fonction est croissante. Si $a < 0$ la fonction sera décroissante.
Le tableau de signes de f dépend du signe du coefficient directeur.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple:
Donner le tableau de signes de la fonction
$f(x) = -4x + 8$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3 Page 73

Séance 2:
Objectif:
Fonction dérivée
II. Fonction dérivée:
Soit f une fonction défini sur intervalle I_1. On associe a cette fonction, sa fonction dérivée notée f' définie sur un intervalle I_2.
1. Dérivées des fonctions usuelles:

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) =$ nombre	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

2. Dérivées de kU:
Soit u une fonction et k un réel. Alors

$$\boxed{(k \times u)' = k \times u'}$$

Exemple:

Donner la dérivée de $f(x) = 5x^2$

$f'(x) = 5 \times 2x \;=\; 10x$

3. Dérivées de $u + v$
Soit u et v deux fonctions. Alors :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Méthode: 💙

Pour dériver une fonction il faudra :
1. séparer les termes et les traiter séparément;
2. reconnaître, si nécessaire, dans ces termes, le produit par un scalaire;
3. dériver séparément en s'aidant du tableau ci-dessus et en multipliant, éventuellement, par le scalaire.

Exemple:
Donner la dérivée de $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3$
<u>Réponse</u>

$$f'(x) = 12x^2 + 10x$$

Exercices (10 à 14 page 74)

III. Dérivée et sens de variation:

1. Propriété:

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Si pour tout $x \in I$.

- $f'(x) \geq 0$, alors f **est croissante sur I.**
- $f'(x) \leq 0$, alors f **est décroissante sur I.**
- $f'(x) = 0$, alors f **est constante sur I.**

2. Méthode: 💙

Si on cherche le tableau de variation d'une fiction on:

1. **Dérive** la fonction
2. Étudie le **signe de cette dérivée;**
3. On en **déduit le sens de variation de la fonction** (initiale)

Exemple d'étude de variations:
Établir le tableau de variation de $f(x) = -6x^2 + 9x + 15.$

<u>Réponse</u>

$$f'(x) = -12x + 9$$

On obtient alors le tableau de signes de f' ci-dessous, dont on déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{147}{8}$	↘	

Remarque :
Là où la dérivée s'annule on observe le plus souvent un maximum ou un minimum.
Mais ce n'est pas toujours le cas: par exemple $f(x) = x^3$ a une dérivée $f'(x) = 3x^2$ qui est nulle lorsque $x = 0$. Mais $x = 0$ n'est ni un minimum, ni un maximum.

Exemple

Dans l'exemple précédent, $f'(\frac{3}{4}) = 0$ et f atteint bien son maximum en $x = \frac{3}{4}$.

IV. Tangente et fonction dérivée:

1. Taux de variation

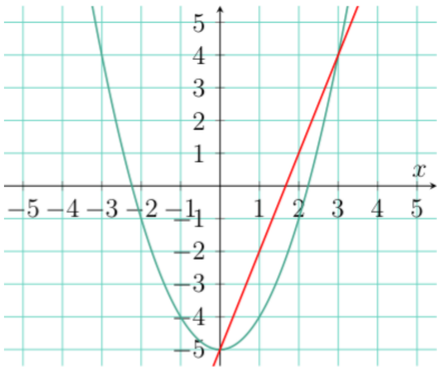
Soit f une fonction et a et b deux réel appartenant à l'ensemble de définition de f.

Le taux de variation de f entre a et b est le quotient :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Exemple:

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 5$. calculer son taux de variation entre 0 et 3.



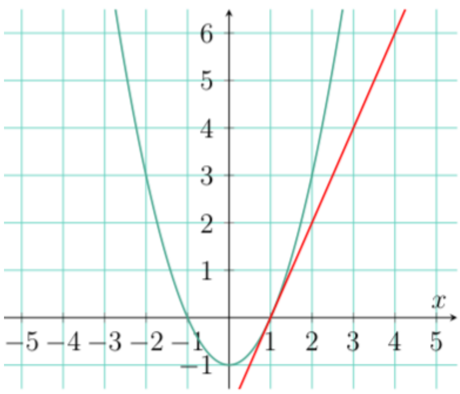
<u>Réponse</u>

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{4 - (-5)}{3} = 3$$

2. Nombre dérivé:

On appelle **nombre dérivée de f en a,** noté $f'(a)$, la limite, quand elle existe, du taux de variation lorsque b tend vers a **:**

$$\boxed{f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



3. Vocabulaire :

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « toutche » la courbe au plus près au voisinage de ce point.

Propriété:

Soit f une fonction. Si la courbe représentative de f, notée C_f, admet une tangente au point d'abscisse $x = a$, alors le coefficient directeur de cette tangente sera le nombre dérivé $f'(a)$.

On peut maintenant calculer ce dernier en :

1. Obtenant la dérivée $f'(x)$ associée à $f(x)$,
2. Et en calculant $f'(a)$ en remplaçant x par a.

Exemple:
Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ en $x = 2$

<u>Réponse</u>
On a $f'(x) = 6x - 5$ d'où $f'(2) = 7$. Le coefficient directeur de la tangente à C_f en $x = 2$ est de 7.

Rappel
Pour que la tangente soit parallèle à l'**axe des abscisses,** il faut que son coefficient directeur soit égal à 0.

4. Propriété:
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f, en $x = a$ est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)(x - x) + f(a)}$$

Exemple:
Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$ en $x = 2$.

Réponse
D'après les calculs précédents $f'(2) = 7$.
Qui plus est $f(2) = 10$. L'équation réduite de la tangente est:
$y = 7(x - 2) + 10$

5. Sens de variation
On remarque que lorsque le taux de variation est positif la fonction est croissante. Lorsqu'il négatif, la fonction est décroissante. Ceci explique l'étude du signe de la fonction dérivée que nous avons vue précédemment.

Exercices (17;22;27 et 28 Page 75)