Corrigé - Contrôle N°1 : Suites numériques

N. Bancel

Novembre 2024

Partie 1 : Cours (2 points)

1. (0.5 points) **Définition d'une suite arithmétique** : Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite.

2. (0.5 points) **Conditions pour qu'une suite arithmétique soit croissante ou décroissante** :

- La suite (u_n) est **croissante** si $r > 0$.
- La suite (u_n) est **décroissante** si $r < 0$.
- La suite est **constante** si $r = 0$.

Justification :

Soit une suite arithmétique (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = u_n + r$, où r est la raison de la suite.

- Si $r > 0$:
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$.
  - Comme $r > 0$, cela implique que $u_{n+1} > u_n$. Concrètement, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme suivant (qui est d'indice $n+1$) est plus grand que le terme précédent (qui est d'indice n), donc la suite croît (les valeurs de la suite / les termes sont de plus en plus grands)
  - Ainsi, la suite (u_n) est **strictement croissante**.
- Si $r < 0$:
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également $u_{n+1} - u_n = r$.
  - Comme $r < 0$, cela implique que $u_{n+1} < u_n$. Concrètement, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme suivant (qui est d'indice $n+1$) est plus petit que le terme précédent (qui est d'indice n), donc la suite croît (les valeurs de la suite / les termes sont de plus en plus petits)
  - Par conséquent, la suite (u_n) est **strictement décroissante**.
- Si $r = 0$:
  - Dans ce cas, $u_{n+1} - u_n = r = 0$, ce qui signifie que $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Concrètement, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme suivant (qui est d'indice $n+1$) est égal au terme précédent (qui est d'indice n), donc la suite ne varie pas (les valeurs de la suite / les termes sont toujours les mêmes)
  - La suite est donc **constante**.

Conclusion : Le signe de r détermine la variation de la suite arithmétique :

- Si $r > 0$, la suite est croissante.

- Si $r < 0$, la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Attention à ne donc pas confondre l'étude de la monotonie d'une suite (est-ce qu'elle est croissante ou décroissante) avec son signe (est-ce qu'elle est positive ou négative). Une suite croissante peut tout à fait être positive, tout comme elle peut être négative.

3. (0.5 points) **Définition d'une suite géométrique** : Une suite (v_n) est dite **géométrique** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel q tel que :

$$v_{n+1} = q \cdot v_n.$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite.

4. (0.5 points) **Conditions pour qu'une suite géométrique soit croissante ou décroissante** :

- La suite (v_n) est **croissante** si $q > 1$ et $v_n > 0$.
- La suite (v_n) est **décroissante** si $0 < q < 1$ et $v_n > 0$.
- Si $q = 1$, la suite est **constante**.

Justification :

Soit une suite géométrique (v_n) définie par la relation $v_{n+1} = q \cdot v_n$, où q est la raison de la suite. Analysons la variation de la suite en fonction de la valeur de q et de v_n.

- Si $q > 1$ et $v_n > 0$:
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = q \cdot v_n$, et donc $v_{n+1} > v_n$, car $q > 1$ multiplie un terme positif v_n.
  - La suite est alors **strictement croissante**.
- Si $0 < q < 1$ et $v_n > 0$:
  - Dans ce cas, q est un nombre entre 0 et 1. Lorsque $v_{n+1} = q \cdot v_n$, cela réduit la valeur de v_n, car $q < 1$.
  - On a donc $v_{n+1} < v_n$, et la suite est **strictement décroissante**.
- Si $q = 1$:
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \cdot v_n = 1 \cdot v_n = v_n$.
  - La suite est alors **constante**, car chaque terme est égal au précédent.

Conclusion : Le comportement de la suite géométrique dépend de la valeur de q et de v_n :

- Si $q > 1$ et $v_n > 0$, la suite est croissante.
- Si $0 < q < 1$ et $v_n > 0$, la suite est décroissante.
- Si $q = 1$, la suite est constante.

Partie 2 : Suites définies de manière fonctionnelle et récurrente (5 points)

1. (2.5 points) Soit (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + n \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

(a) (1 point) **Calcul des quatre premiers termes :**
Attention : dans cette partie, 2 notions sont mixées : la notion d'indice (n) et de terme (U_n). A chaque calcul d'un nouveau terme : le terme précédent U_n ainsi que l'indice lui même n entrent en jeu

$$U_0 = 2.$$

Pour $n = 0$:

$$U_1 = U_0 + 0 = 2 + 0 = 2.$$

Pour $n = 1$:

$$U_2 = U_1 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Pour $n = 2$:

$$U_3 = U_2 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Donc, les quatre premiers termes sont : $U_0 = 2$, $U_1 = 2$, $U_2 = 3$, $U_3 = 5$.
Que l'on peut aussi écrire : $\{2, 2, 3, 5, \ldots\}$

(b) (1 point) **Calcul de $U_{n+1} - U_n$:** Par définition

$$U_{n+1} = U_n + n$$

donc

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (U_n + n) - U_n \\ &= n. \end{aligned}$$

Cela pouvait se vérifier rapidement avec quelques exemples :
Pour $n = 0$

$$\begin{aligned} & U_{n+1} - U_n = U_1 - U_0 \\ \text{or} \quad & U_1 = 2 \quad \text{et} \quad U_0 = 2 \\ \text{donc} \quad & U_{n+1} - U_n = 2 - 2 \\ & \phantom{U_{n+1} - U_n} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à la valeur de n ($n = 0$)
Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} & U_{n+1} - U_n = U_2 - U_1 \\ \text{or} \quad & U_1 = 3 \quad \text{et} \quad U_1 = 2 \\ \text{donc} \quad & U_{n+1} - U_n = 3 - 2 \\ & \phantom{U_{n+1} - U_n} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à la valeur de n ($n = 1$)

(c) (0.5 points) **La suite est-elle croissante ou décroissante ?**
D'après la question précédente, $U_{n+1} - U_n = n$
Or on sait que n est toujours positif : $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} & U_{n+1} - U_n = n \\ & \qquad \text{or} \quad n \geq 0 \\ \text{donc} \quad & U_{n+1} - U_n = n \geq 0 \\ & U_{n+1} - U_n \geq 0 \end{aligned}$$

La suite (U_n) est donc **strictement croissante**.

2. (3 points) Soit (V_n) définie par :

$$V_n = 5 \times 2^n.$$

(a) (1 point) **Calcul des termes V_0, V_1, et V_2 :**

$$V_0 = 5 \times 2^0 = 5 \times 1 = 5.$$

$$V_1 = 5 \times 2^1 = 5 \times 2 = 10.$$

$$V_2 = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20.$$

Donc, $V_0 = 5$, $V_1 = 10$, $V_2 = 20$.

(b) (1 point) **Calcul du rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$:**

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2.$$

(c) (0.5 points) **La suite est-elle géométrique ? Si oui, quelle est sa raison ?**
Oui, (V_n) est une suite géométrique, car $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ est constant et vaut 2. La raison est $q = 2$.
D'après le cours, la suite (V_n) est **strictement croissante**, car $q > 1$ et $V_n > 0$.

Partie 3 : Suites arithmétiques et géométriques (3 points)

1. (1.5 points) Soit (W_n) définie par :

$$\begin{cases} W_{n+1} = W_n + 4 \\ W_1 = 6 \end{cases}$$

   (a) (0.5 points) **La suite est-elle arithmétique ou géométrique ?** La suite (W_n) est **arithmétique** avec une raison $r = 4$, car elle est définie sous la forme

$$W_{n+1} = W_n + r$$

   où r est une constante (r vaut 4)

   (b) (1 point) **Calcul de W_4 et W_6 :** Pour calculer W_4, nous procédons en calculant chaque terme de la suite jusqu'à W_4 :

$$W_1 = 6 \quad \text{(donné dans l'énoncé).}$$
$$W_2 = W_1 + 4 = 6 + 4 = 10.$$
$$W_3 = W_2 + 4 = 10 + 4 = 14.$$
$$W_4 = W_3 + 4 = 14 + 4 = 18.$$

   Ainsi, $W_4 = 18$.

   —

   Pour calculer W_6, nous continuons à partir des termes précédents jusqu'à W_6 :

$$W_5 = W_4 + 4 = 18 + 4 = 22.$$
$$W_6 = W_5 + 4 = 22 + 4 = 26.$$

   Ainsi, $W_6 = 26$.

   Conclusion : En calculant chaque terme successivement, nous obtenons :

$$W_4 = 18 \quad \text{et} \quad W_6 = 26.$$

2. (1.5 points) Soit (X_n) définie par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 2X_n \\ X_1 = 3 \end{cases}$$

   (a) (0.5 points) **La suite est-elle arithmétique ou géométrique ?**
   La suite (X_n) est **géométrique** avec une raison $q = 2$, car car elle est définie sous la forme

$$X_{n+1} = q \cdot X_n$$

   où q est une constante, positive et vaut 2

   (b) (1 point) **Calcul de X_3 et X_5 :**
   Pour calculer X_3, nous procédons étape par étape :

$$X_1 = 3 \quad \text{(donné dans l'énoncé).}$$
$$X_2 = 2 \cdot X_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$
$$X_3 = 2 \cdot X_2 = 2 \cdot 6 = 12.$$

   Ainsi, $X_3 = 12$.
   Pour calculer X_5, nous continuons étape par étape à partir de X_3 :

$$X_4 = 2 \cdot X_3 = 2 \cdot 12 = 24.$$
$$X_5 = 2 \cdot X_4 = 2 \cdot 24 = 48.$$

   Conclusion : En calculant chaque terme successivement, nous obtenons :

$$X_3 = 12 \quad \text{et} \quad X_5 = 48.$$