Chapitre 2 - Les suites

N. Bancel

October 9, 2024

Qu'est ce qu'une suite ?

Définition : xxx

Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n (n = 0, 1, 2) associe un nombre réel noté $U(n)$ ou U_n. On parle du terme de rang / d'indice n de la suite. Une suite est une liste ordonnée d'élements

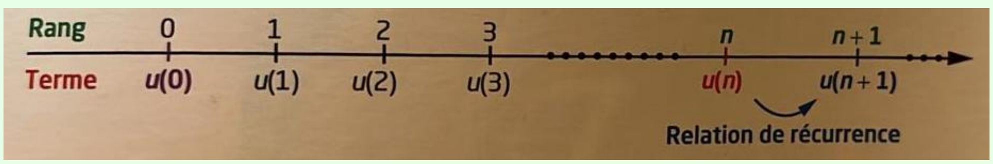

Figure 1: Suite

Exemples

$u = \{15, -3, 7, 8, 97, ...\}$ est une suite.
En faisant commencer l'indice de la suite à 0, le terme d'indice 4, noté $u(4)$ est égal à 8

$$u(4) = 8$$

Dans certains cas on comptera les positions à partir de 0, dans d'autres à partir de 1 (l'énoncé dira quelle convention utiliser).

Par exemple dans la suite u ci-dessus :

- $u(2) = -3$ si on compte les positions à partir de 1,
- $u(2) = 7$ si on compte les positions à partir de 0.

Si l'énoncé dit "pour tout entier naturel n" ou "pour $n \in \mathbb{N}$" , cela voudra dire que l'on compte à partir de 0. De façon générale, on peut commencer notre suite à n'importe quel rang $n \geq 0$.

Exemples

Soit v la suite des nombres impairs. Donner $v(5)$ en supposant que les indices débutent à 0.

Réponse: $v = \{1;3;5;7;9;11;...\}$, d'où $v(5) = 11$.

Exercices

Exercices 1, 3, 5, 6

Représentation graphique d'une suite

La représentation graphique d'une suite u sera un nuage de points. Ces points auront pour coordonnées $(n;U_n)$. En reprenant l'exemple de la suite u des multiples de 2, la représentation graphique de u est :

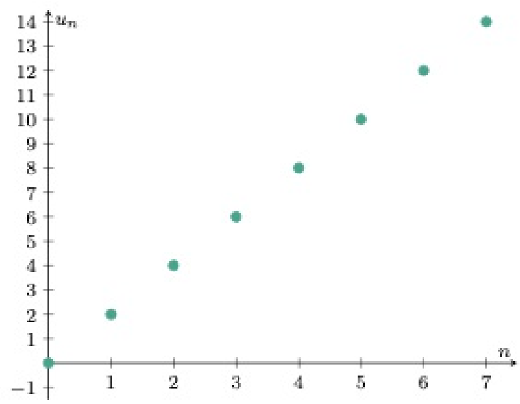

Figure 2: Représentation graphique

Suite définie comme une fonction

Plutôt que de donner chacun des termes d'une suite, on peut la définir à l'aide d'une formule. La première façon de définir une suite est à l'aide d'une **fonction du rang n** . On dit que la suite est définie **de façon explicite / fonctionnelle.**

Exercices

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2n - 3$.
On trouve chaque terme de la suite en remplaçant n par 0,puis 1, 2, etc. Ainsi $u(10) = 2 \times 10 - 3 = 17$ et de façon plus générale $u = \{-3;-1;3;3;...\}$.

Représenter graphiquement la suite U

C'est comme si on échantillonait une fonction (c'est-à-dire qu'on ne sélectionnait les valeurs que pour des valeurs de x données (des nombres entiers))

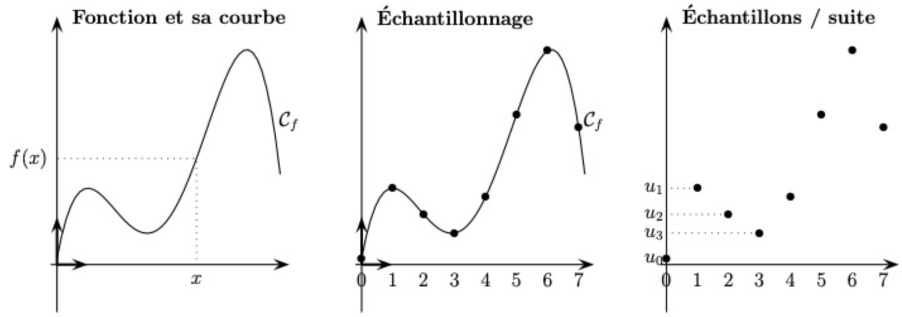

Figure 3: Echantillonage

Exercices

On considère la suite $U(n) = n^2$. Donner les 4 premiers termes de la suite en commençant à $n = 0$

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(1) = 1^2 = 1 \\ U(2) = 2^2 = 4 \\ U(3) = 3^2 = 9 \end{cases}$$

Expression de U_{N-1}, U_{N+1}, U_{2N}, ...

Si l'expression de U_n est donnée, on peut donner celle de U_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ (en n'oubliant pas les parenthèses). De même on peut donner l'expression de U_{2n} en remplaçant n par $2n$.

Exemple : Soit la suite u définie pour tout entier naturel par

$$U_n = 7n + 5$$

Donner l'expression de U_{n+1} et de U_{2n}

Exercices

Exercice N°17 page 123 et Question 2 de Exercice N°19

Suite définie par récurrence

Préambule Pour maîtriser la partie qui suit, il est nécessaire de comprendre que :

- $u(n+1)$ est le terme après $u(n)$,
- $u(n)$ est le terme après $u(n-1)$,
- $u(n-1)$ est le terme après $u(n-2)$,
- etc.

Et aussi que :

- si $u(n+1)$ est $u(4)$, alors $u(n)$ est $u(3)$,
- si $u(n+1)$ est $u(12)$, alors $u(n)$ est $u(11)$,
- si $u(n)$ est $u(10)$, alors $u(n-1)$ est $u(9)$.

La seconde façon de définir une suite est par récurrence. Dans ce cas, pour calculer la valeur d'un terme de la suite, on a besoin d'un ou plusieurs termes précédents. Ainsi, on aura par exemple une formule du type :

$$u_{n+1} = \dots u_n \dots$$

ou

$$u_n = \dots u_{n-1} \dots$$

Exercices

Soit la suite définie comme suit :

$$\begin{cases} u(n+1) = 4u(n) + 7 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Calculer $u(1)$ et $u(2)$
Pour calculer u_1

$$u(1) = 4u(0) + 7 = 4 \times (-1) + 7 = 3$$

Maintenant que l'on connaît u_1, on peut calculer u_2 :

$$u(2) = 4u(1) + 7 = 4 \times 3 + 7 = 19$$

Faire l'exercice 66. Conjecturer le sens de variation

Sens de variation

- Une suite est **croissante** si un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent :

$$u(n+1) \geq u(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Une suite est **décroissante** si :

$$u(n+1) \leq u(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Définition d'une suite arithmétique

Une suite est dite *arithmétique* lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. Ainsi, pour tout n :

$$u(n+1) = u(n) + r$$

Le nombre r est appelé *raison* de la suite arithmétique.

Exemples

- La suite définie par $u(n+1) = u(n) + 4$ est une suite arithmétique de raison 4.
- La suite définie par $u(n) = u(n-1) + 12$ est une suite arithmétique de raison 12.

Monotonie / Sens de variation

- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.

Exemple

La suite définie par $u(n+1) = u(n) - 4$ est une suite décroissante.

Reconnaître une suite arithmétique

Suite définie explicitement

Une suite donnée sous forme explicite peut être une suite arithmétique. Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u(n) = n + 4$$

est une suite arithmétique. Comment le prouver ?

1. Exprimer $u(n+1)$.
2. Calculer $u(n+1) - u(n)$.
3. Si le résultat est une constante, c'est-à-dire s'il ne dépend pas de la variable n, alors la suite est arithmétique.

Réponses

1. $u(n+1) = (n+1) + 4 = n + 1 + 4 = n + 5$
2. $u(n+1) - u(n) = (n+5) - (n+4) = n + 5 - n - 4 = 1$
3. Comme le résultat de $u(n+1) - u(n)$ est une constante (1), la suite est arithmétique de raison 1.

On peut donc réécrire u sous la forme :

$$u(n+1) = u(n) + 1$$

Exercices

Exercice N°89, N°95, N°97, N°100 page 129-130