Collège Lycée Suger **Mathématiques**

Année 2024-2025 **1ères STD2A**

Bac Blanc - Mathématiues

N. Bancel

22 Novembre 2024

Durée du devoir : 2 heures

La calculatrice EST autorisée. Total des points : 20 points

Note importante

Toutes les réponses doivent être justifiées Une réponse non justifiée sera considérée comme fausse.

Une aide est disponible à la fin de l'énoncé : elle pourra vous être utile pour répondre à certaines questions

Il est permis d'admettre le résultat de certaines questions pour ne pas rester bloqué, en prenant soin d'indiquer sur la copie les résultats admis.

Exercice 1 [5 points] Géométrie dans l'espace - Le parfumeur

Un parfumeur souhaite créer un flacon original pour son nouveau parfum. Un verrier lui propose un flacon modélisé par une pyramide représentée ci-dessous.

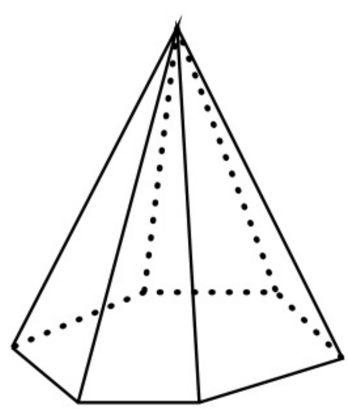

Figure 1: Modèle de flacon

On donne ci-après une représentation en perspective de cette pyramide notée SA'B'C'D'E'F'.

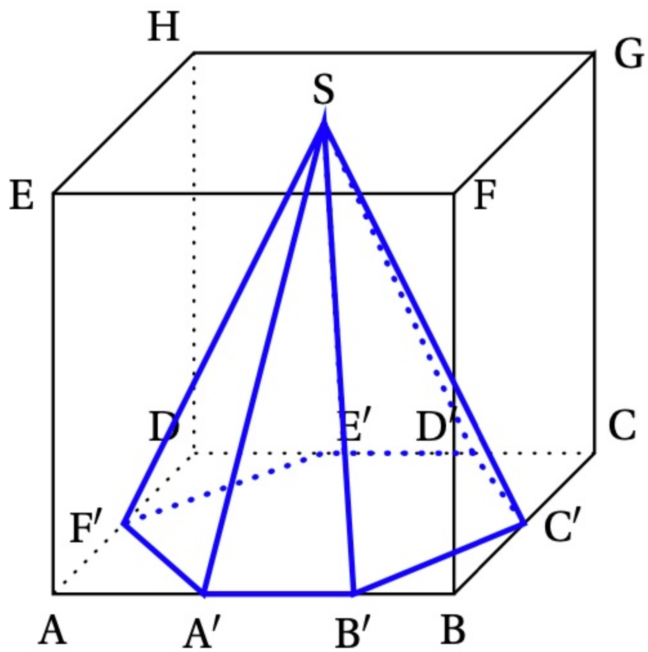

Figure 2: Pyramide dans l'espace

- La pyramide SA'B'C'D'E'F' est inscrite dans un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm.
- Le sommet S de la pyramide est le centre de la face EFGH du cube.
- La base A'B'C'D'E'F' de cette pyramide est contenue dans la face ABCD du cube.
- Les points C'et F'sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].
- Les points A' et B' appartiennent au segment [AB].
- Les points D'et E'appartiennent au segment [CD].
- Et AA' = A'B' = CD' = E'D' = 3cm.

Etude de la pyramide

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'origine A et d'unité 1 cm, tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}; \vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}; \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE};$$

Ainsi, dans ce repère le point G a pour coordonnées $(8;8;8)$ et le point C a pour coordonnées $(8;8;0)$.

1. (1.5 points) Donner les coordonnées de chacun des points S, A', B', C', E', et F' dans ce repère.
2. (1 point) Calculer la longueur du segment [B'C']. La base de la pyramide est-elle un polygone régulier ? (Justifier)
3. (1 point) En utilisant le théorème de Pythagore sur le triangle B'BC' (qui est rectangle en B), vérifier que la longueur de [B'C'] trouvée dans la question 2 est cohérente.
4. (1.5 points) Déterminer les coordonées des vecteurs $\overrightarrow{F'E'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$. Que peut-on dire de la relation entre ces deux vecteurs ? Que peut-on en déduire des droites $(F'E')$ et $(B'C')$?

Exercice 2 [6 points] Les suites

1. (3 points) Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3 \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

(a) (1 point) Calculer les termes U_1, U_4, et U_6. Il est obligatoire de bien justifier.

(b) (1 point) Calculer $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (autrement dit n est entier et $n \geq 0$).

(c) (0.5 points) La suite est-elle croissante ou décroissante ?

(d) (0.5 points) D'après le cours sur les suites géométriques et arithmétiques, comment pouvait-on immédiatement - dès la lecture de l'énoncé - dire si la suite allait être croissante ou décroissante ?

2. (3 points) Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n^2 + U_n + 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

(a) (1 point) Calculer les termes U_1, U_2, et U_3.

(b) (1 point) Calculer $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (autrement dit n est entier et $n \geq 0$).

(c) (1 point) Connaissant le signe des nombres carrés, que peut-on en déduire sur le signe de $U_{n+1} - U_n$? En déduire si la suite est croissante ou décroissante.

Exercice 3 [9 points] Les fonctions

1. (2 points) Montrer que la fonction $g(x) = x^2 - 4x - 12$ peut s'écrire sous la forme

$$(x-6)(x+2).$$

2. (0.5 points) En déduire les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
3. (0.5 points) Quelle est l'image de $x = 1$ par la fonction g ?
4. (1 point) Le point C de coordonnées $(1; -12)$ appartient-il à la courbe représentative de g ? Qu'en est-il du point D de coordonnées $(-2; 0)$? Justifier.
5. (2 points) Construire le tableau de signe de la fonction g sur le domaine de définition $\mathscr{D} =]-\infty; +\infty[$.
6. (1 point) En déduire les solutions de l'inéquation

$$g(x) \leq 0.$$

On prendra le soin de bien écrire les intervalles.

7. (1 point) L'extremum (maximum ou minimum) d'un polynome de degré 2 du type $ax^2 + bx + c$ est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$. Quelles sont les coordonées de l'extremum de la courbe représentative de g ?
8. (1 point) En vous aidant du signe de a et grâce à la réponse à la question précédente, dresser le tableau de variation de la fonction g.

Aide

- Un polygone est régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur
- On peut dire que deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs (les vecteurs qui suivent la direction de la droite) sont colinéaires.
- On dit que 2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ respectivement de coordonées x_{AB}, y_{AB}, z_{AB} et x_{CD}, y_{CD}, z_{CD} sont colinéires si et seulement si on peut écrire

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_{CD} \\ y_{CD} \\ z_{CD} \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_{CD} \\ \alpha \cdot y_{CD} \\ \alpha \cdot z_{CD} \end{pmatrix}$$