Bac Blanc - Mathématiues : Correction

N. Bancel

22 Novembre 2024

Exercice 1 [5 points] Géométrie dans l'espace

Rappel de l'image donnée :

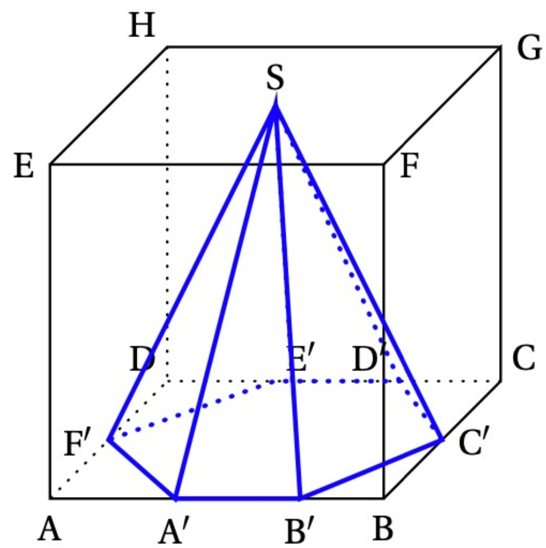

Figure 1: Représentation de la pyramide

Question 1

On donne les coordonnées des points dans le repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

- Le sommet S est le centre de la face $EFGH$.
  Sur l'axe des X ($\vec{\imath}$), il est donc entre le "x" de E et le "x" de F. Donc il se situe en 4
  Sur l'axe des Y (qui correspond à $\vec{\jmath}$ et à l'alignement dans le sens $\overrightarrow{AD}$, il est entre E et H (et donc entre A et D en terme d'alignement sur l'axe des Y) : Donc en 4 Sur l'axe des Z (qui correspond à $\vec{k}$ et à l'alignement dans le sens $\overrightarrow{AE}$), il est au niveau de E, c'est à dire à la hauteur 8
  Donc les coordonnées sont $S = (4;4;8)$
  Une autre méthode consiste à prendre la moyenne de chaque coordonées des points E, F, G, H puisque S est le centre du carré EFGH. Cela implique de déjà connaître les coordonées de E, de F, de G, et de H, mais la formule ressemblerait à cela :

$$S = \left(\frac{0+8+8+0}{4};\frac{8+8+0+0}{4};\frac{8+8+8+8}{4}\right) \quad (1)$$

$$= (4;4;8). \quad (2)$$

- Le point A' est à 3 cm de A sur $[AB]$. $[AB]$ correspond à l'axe des "abscisses" : il ne génère aucune avancée sur l'axe des "y", ni sur l'axe des "z". Et on sait que AA' = 3cm. Une unité de 1cm correspond à un incrément de 1 en termes de coordonées. Ses coordonnées sont :

$$A' = (3;0;0).$$

- Pour B, on raisonne avec les longueurs : de AA', et de A'B'

$$AB' = AA' + A'B'$$
$$AB' = 3 + 3$$
$$AB' = 6$$

$$B' = (6;0;0).$$

- Le point C' est le milieu de $[BC]$. On peut lire les coordonées, en sachant que C est avancé de 8 sur l'axe des abscisses, et de 4 sur l'axe des ordonnées. Une réponse sans justification était correcte. On pouvait aussi déterminé les coordonées de B et C : $B = (8;0;0)$ et $C = (8;8;0)$ puis appliquer la formule pour trouver les coordonées du milieu d'un côté :

$$\begin{cases} x_{C'} = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_{C'} = \frac{y_B + y_C}{2} \\ z_{C'} = \frac{z_B + z_C}{2} \end{cases}$$

Ses coordonnées sont :
$$C' = \left(\frac{8+8}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (8;4;0).$$

- Le point E' : Le point E' est au même niveau que D sur l'axe des "y", il est donc à 8. En terme de "z", il est à 0 (il est au niveau du sol). La complexité réside dans sa valeur sur l'axe des x. On sait que DC = 8 (c'est une arête du cube). Et on sait que CD' = 3 et E'D' = 3. Donc

$$DE' + E'D' + D'C = 8$$
$$DE' + 3 + 3 = 8$$
$$DE' = 2$$

$$E' = (2;8;0).$$

- Le point F' est le milieu de $[AD]$. On applique le même raisonnement que pour les coordonées du point C. Les coordonnées de F' sont :
$$F' = (0;4;0).$$

Résultat final :

$$S(4;4;8)$$
$$A'(3;0;0)$$
$$B'(6;0;0)$$
$$C'(8;4;0)$$
$$E'(2;8;0)$$
$$F'(0;4;0)$$

Question 2

Calcul de la longueur du segment $[B'C']$ **:** On utilise la formule de distance dans l'espace :

$$d(B',C') = \sqrt{(x'_C - x'_B)^2 + (y'_C - y'_B)^2 + (z'_C - z'_B)^2}.$$

Substituons les coordonnées $B'(6;0;0)$ et $C'(8;4;0)$:

$$d(B',C') = \sqrt{(8-6)^2 + (4-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2 \times \sqrt{5}$$

Conclusion : La longueur de $[B'C']$ est $\sqrt{20} \approx 4.47$ cm

Analyse du polygone de base : En terme de longueurs, on sait que A'B' = 3 cm. Et on vient de montrer que $B'C' \approx 4.47$ cm. Les côtés adjacents $[A'B']$ et $[B'C']$ ont des longueurs différentes, donc le polygone A'B'C'D'E'F' ne peut pas être régulier.

Question 3

On peut aussi trouver la longueur de B'C' en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle $B'BC'$ rectangle en B:

$$B'C'^2 = B'B^2 + BC'^2.$$

Pour calculer les longueurs de B'B et BC', il n'y a pas besoin d'utiliser les notions de coordonées. Un simple calcul de distances le long d'une droite suffit. :
Puisque A, A', B, B' sont alignés :

$$\begin{aligned} AA' + A'B' + B'B &= 8 \\ \text{or} \quad AA' = 3 \quad \text{et} \quad A'B' &= 3 \\ 3 + 3 + B'B &= 8 \\ B'B &= 2 \end{aligned}$$

C' est au milieu de BC. La longueur de BC est 8. Donc on peut affirmer que BC' = 4. On substitue :

$$B'C'^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 20 \implies B'C' = \sqrt{20}$$

Conclusion : La longueur trouvée est cohérente avec la question précédente.

Question 4

Les vecteurs $\overrightarrow{F'E'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont donnés par leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{F'E'} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 8-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 8-6 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Testons la colinéarité : il doit exister un réel α tel que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'éaglité fonctionne pour $\alpha = 1$. Plus précisément, les vecteurs sont totalement égaux :

$$\overrightarrow{F'E'} = \overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont donc colinéaires et on peut en conclure que les droites $(F'E')$ et $(B'C')$ sont parallèles.

Exercice 2 [6 points] Les suites

1. (3 points) Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3, \\ U_0 = 2. \end{cases}$$

(a) (1 point) **Calcul des termes U_1, U_4, et U_6 :**
Pour calculer chaque terme, nous devons partir de la définition de la suite et ajouter 3 au terme précédent. Voici les étapes détaillées :

- Calcul de U_1 :
$$U_1 = U_0 + 3 = 2 + 3 = 5.$$
- Calcul de U_2 :
$$U_2 = U_1 + 3 = 5 + 3 = 8.$$
- Calcul de U_3 :
$$U_3 = U_2 + 3 = 8 + 3 = 11.$$
- Calcul de U_4 :
$$U_4 = U_3 + 3 = 11 + 3 = 14.$$
- Calcul de U_5 :
$$U_5 = U_4 + 3 = 14 + 3 = 17.$$
- Calcul de U_6 :
$$U_6 = U_5 + 3 = 17 + 3 = 20.$$

Résultat : Les termes demandés sont $U_1 = 5$, $U_4 = 14$, et $U_6 = 20$.

(b) (1 point) **Calcul de $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:**
Par définition de la suite, nous savons que :
$$U_{n+1} = U_n + 3.$$
Ainsi :
$$U_{n+1} - U_n = (U_n + 3) - U_n = 3.$$
Conclusion importante : La différence entre deux termes consécutifs de cette suite est toujours égale à 3.

(c) (0.5 points) **La suite est-elle croissante ou décroissante ?**
Une suite est croissante si chaque terme est strictement supérieur au précédent. Ici, puisque $U_{n+1} - U_n = 3$ (un nombre positif), on peut conclure que la suite (U_n) est croissante.

(d) (0.5 points) **Observation sur la nature de la suite dès la lecture de l'énoncé :**
Une suite où l'on ajoute un nombre fixe (ici, +3) à chaque étape est appelée une suite arithmétique. Dès que l'on voit cette propriété dans l'énoncé, on sait que la suite sera croissante si la constante ajoutée est positive (ici +3) ou décroissante si elle est négative.

2. (3 points) Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n^2 + U_n + 2, \\ U_0 = 1. \end{cases}$$

(a) (1 point) **Calcul des termes U_1, U_2, et U_3 :**

- Calcul de U_1 :
$$U_1 = U_0^2 + U_0 + 2 = 1^2 + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4.$$
- Calcul de U_2 :
$$U_2 = U_1^2 + U_1 + 2 = 4^2 + 4 + 2 = 16 + 4 + 2 = 22.$$
- Calcul de U_3 :
$$U_3 = U_2^2 + U_2 + 2 = 22^2 + 22 + 2 = 484 + 22 + 2 = 508.$$

Résultat : Les termes demandés sont $U_1 = 4$, $U_2 = 22$, et $U_3 = 508$.

(b) (1 point) **Calcul de $U_{n+1} - U_n$:**
D'après l'expression de la suite :
$$U_{n+1} - U_n = (U_n^2 + U_n + 2) - U_n = U_n^2 + 2.$$
Résultat : $U_{n+1} - U_n = U_n^2 + 2$.

(c) (1 point) **Nature de la suite :**
Le terme $U_{n+1} - U_n = U_n^2 + 2$ est toujours strictement positif, car $U_n^2 \geq 0$ pour tout n (carré d'un nombre) et +2 est une constante positive. Par conséquent, la suite (U_n) est strictement croissante.

Correction de l'Exercice 2 [9 points] Les fonctions

1. (2 points) Montrer que la fonction $g(x) = x^2 - 4x - 12$ peut s'écrire sous la forme $(x-6)(x+2)$.

   Pour factoriser $g(x)$, on utilise une méthode simple :

   - On cherche deux nombres dont :
     - le produit vaut -12 (le terme constant) ;
     - la somme vaut -4 (le coefficient de x).
   - Ces deux nombres sont -6 et 2 (car $-6 \times 2 = -12$ et $-6 + 2 = -4$).
   - On peut alors écrire :
   $$g(x) = x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2).$$

   Conclusion : La fonction $g(x)$ est bien factorisée sous la forme $(x-6)(x+2)$.

2. (0.5 points) En déduire les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

   L'équation $g(x) = 0$ revient à résoudre :
   $$(x-6)(x+2) = 0.$$
   Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc :
   $$x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0.$$
   D'où :
   $$x = 6 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$
   Conclusion : Les solutions de $g(x) = 0$ sont $x = 6$ et $x = -2$.

3. (0.5 points) Quelle est l'image de $x = 1$ par la fonction g ?

   On remplace $x = 1$ dans l'expression de $g(x)$:
   $$g(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 - 12.$$
   Effectuons les calculs étape par étape :

   - $1^2 = 1$;
   - $-4 \cdot 1 = -4$;
   - $1 - 4 = -3$;
   - $-3 - 12 = -15$.

   Donc :
   $$g(1) = -15.$$
   Conclusion : L'image de $x = 1$ par la fonction g est -15.

4. (1 point) Le point $C(1;-12)$ appartient-il à la courbe représentative de g ? Qu'en est-il du point $D(-2;0)$? Justifier.

   Un point $P(a;b)$ appartient à la courbe représentative de g si et seulement si $g(a) = b$.

   - Pour $C(1;-12)$:
   $$g(1) = -15 \quad \text{(calculé précédemment)}.$$
   Comme $-15 \neq -12$, le point C n'appartient pas à la courbe.
   - Pour $D(-2;0)$:
   $$g(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 12.$$
   Calculons étape par étape :
     - $(-2)^2 = 4$;
     - $-4 \cdot (-2) = 8$;
     - $4 + 8 = 12$;

– $12 - 12 = 0$.

Donc $g(-2) = 0$.

Comme $g(-2) = 0$, le point $D(-2;0)$ appartient à la courbe.

Conclusion : C n'appartient pas à la courbe, mais D appartient à la courbe.

5. (2 points) Construire le tableau de signe de la fonction g sur le domaine de définition $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Étape 1 : Les solutions de $g(x) = 0$ sont $x = -2$ et $x = 6$.

Étape 2 : $g(x)$ change de signe aux valeurs $x = -2$ et $x = 6$. On teste les signes dans les intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, 6[$ et $]6, +\infty[$:

- Si $x < -2$, les deux facteurs $(x-6)$ et $(x+2)$ sont négatifs, donc leur produit est positif.
- Si $-2 < x < 6$, un facteur est positif et l'autre est négatif, donc leur produit est négatif.
- Si $x > 6$, les deux facteurs sont positifs, donc leur produit est positif.

Tableau de signe :

x	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,6[$
6	$]6,+\infty[$		
$g(x)$	$+$	0	$-$
0	$+$		

6. (1 point) En déduire les solutions de l'inéquation $g(x) \leq 0$.

D'après le tableau de signe, $g(x) \leq 0$ pour $x \in [-2;6]$.

Conclusion : Les solutions sont $x \in [-2;6]$.

7. (1 point) L'extremum (maximum ou minimum) d'un polynôme de degré 2 du type $ax^2 + bx + c$ est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$. Quelles sont les coordonnées de l'extremum de g ?

Ici, $a = 1$, $b = -4$, donc :

$$x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Pour trouver l'ordonnée correspondante :

$$g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 12.$$

Calculons étape par étape :

- $2^2 = 4$;
- $-4 \cdot 2 = -8$;
- $4 - 8 = -4$;
- $-4 - 12 = -16$.

Donc :

$$g(2) = -16.$$

Conclusion : L'extremum est un minimum de coordonnées $(2;-16)$.

8. (1 point) En vous aidant du signe de a et grâce à la réponse à la question précédente, dresser le tableau de variation de g.

Le coefficient directeur $a = 1$ est positif, donc la courbe a une forme de parabole ouverte vers le haut.

Tableau de variation :

x	$]-\infty,2[$	2	$]2,+\infty[$
$g(x)$	$\nearrow$	-16	$\searrow$