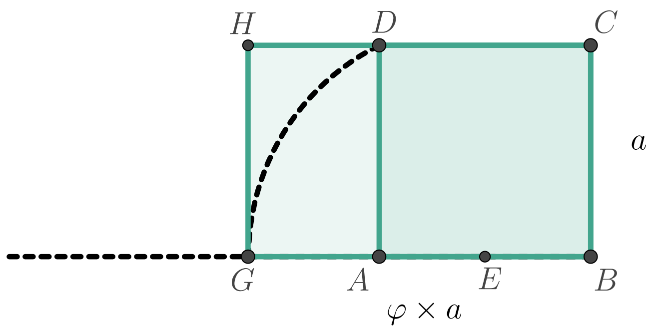
Rectangle d'or :

Pour construire la spirale d'or, il est nécessaire de construire une succession de rectangles d'or. Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport longueur sur largeur est égal au nombre d'or. Par exemple un rectangle tel que $l = 1$ et $L = \varphi$ est un rectangle d'or.

Pour construire un tel rectangle :

1. tracez un carré de longueur a,
2. placez votre compas sur le milieu d'un des côtés et ouvrez-le jusqu'à un des sommets opposés,
3. repérez l'intersection du cercle avec le côté où est placé votre compas
4. et prolongez le carré jusqu'à ce point afin d'obtenir un rectangle d'or.



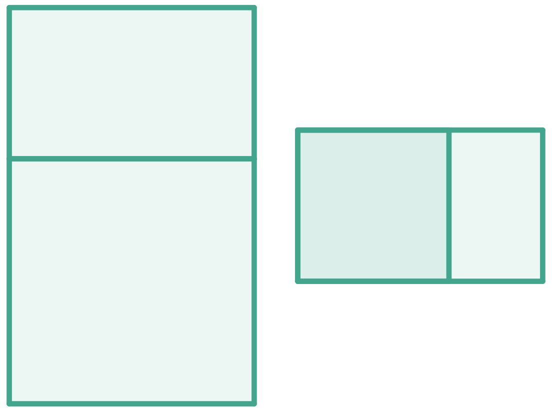
Si $a = 1$, démontrer que la longueur GB est bien égale à φ.

Spirale d'or :

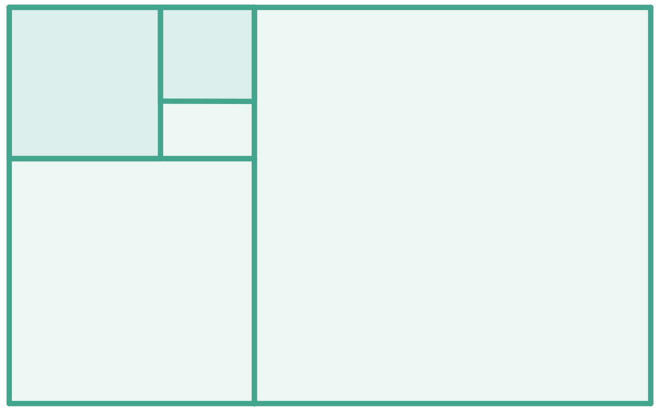
On peut construire un nouveau rectangle d'or en :

— ajoutant un carré sur une de ses longueurs

— ou en divisant le rectangle obtenu en un carré et un rectangle.



En répétant plusieurs fois cette opération, on obtient une structure qui nous permet de tracer une spirale d'or.



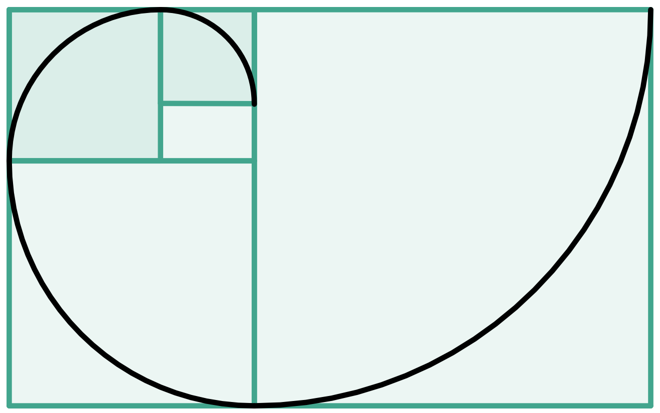
Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des longueurs des rectangles d'or que l'on construit par ajout d'un carré. On pose $L_0 = a\varphi$.

1. Calculer L_1.
2. Exprimer L_{n+1} en fonction de L_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que L est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
4. Donner L_5.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des aires de ces mêmes rectangles d'or.

5. Calculer A_0 et A_1.
6. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n pour tout entier naturel n.
7. En déduire que A est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
8. Donner A_5.

En reliant les sommets opposés de chacun des carrés tracés comme illustré ci-dessous, nous obtenons la spirale d'or.



On note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des rayons de chacun des arcs de cercles. Ainsi $R_0 = a$.

9. Calculer R_1.
10. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n pour tout entier naturel n.
11. En déduire que R est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.

On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des longueurs de chacun des arcs de cercles.

12. Calculer C_0 et C_1.
13. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n pour tout entier naturel n.
14. En déduire que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
15. Calculer $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Que représente cette somme ?

158

On rappelle qu'une diagonale d'un polygone est un segment qui relie deux sommets non consécutifs. Soit $(u_n)_{n\geqslant 3}$ la suite correspondant au nombre de diagonales d'un polygone à n côtés.

1. Déterminer la valeur de u_3, u_4 et u_5.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Combien de diagonales possède un polygone à 10 côtés ?

159

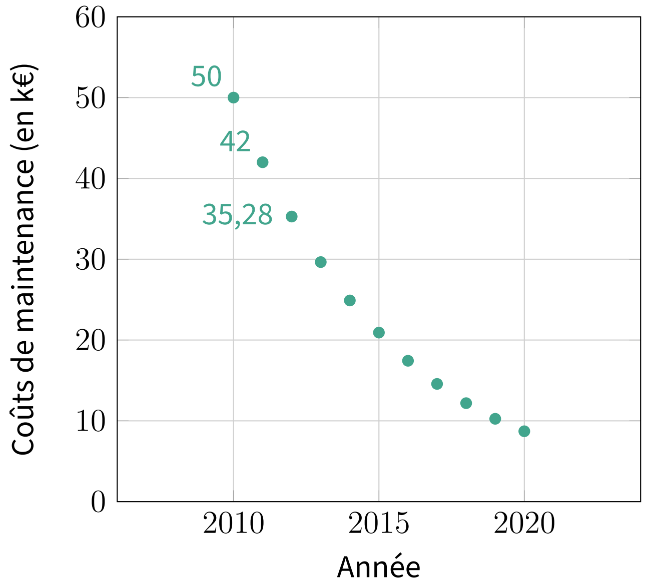
On injecte à une plante une solution nutritive contenant 5 mg d'un élément essentiel. On suppose que cet élément est absorbé uniformément par la plante et que, chaque jour, 20 % de cet élément est éliminé par la plante.

Pour tout entier n, on note p_n la masse en mg de l'élément présent dans la plante au bout de n jours.

1. Montrer que $p_1 = 4$ et interpréter ce résultat.
2. Calculer la masse en mg de l'élément nutritif présent dans la plante au bout de 3 jours. Arrondir le résultat à 0,01 près.
3. Montrer que la suite (p_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et donner le premier terme de cette suite.
4. Donner le sens de variation de cette suite puis interpréter ce résultat.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer après combien de jours la quantité de l'élément nutritif présent dans la plante sera inférieure à $0{,}1$ mg.

160

Une municipalité prévoit de réduire ses frais de maintenance pour ses bâtiments publics au cours des 10 prochaines années. Les coûts de maintenance, en milliers d'euros, depuis 2010 sont illustrés ci-dessous.



1. Calculer, en pourcentage, la variation des coûts de maintenance entre 2010 et 2011, puis entre 2011 et 2012.
2. Supposons que les coûts diminuent chaque année de ce même pourcentage jusqu'en 2020.
   a) Modéliser le montant des coûts de maintenance en fonction de l'année par une suite. Préciser la relation de récurrence, la nature de la suite et son terme initial.
   b) Vérifier que le montant des coûts de maintenance en 2014 est de 24,896k€.
3. a) Déterminer l'année à partir de laquelle les coûts de maintenance seront inférieurs à 10 000 €. Justifier votre réponse en utilisant un outil numérique.
   b) Calculer les coûts de maintenance prévus pour 2020 avec une précision de 1€.