Suites Numériques:

I. Généralité:

1. Définition et Exemple:

Une suite est un ensemble d'éléments ordonnés.

Exemple:

$U = \{-15, -3, 7, 8, 97\}$

2. Terme et indice:

On appelle **terme,** un élément de cette suite, et **indice ou rang** sa position dans a suite.

Par exemple le terme d'indice 4 de la suite U donnée par

$$\{-15, -3, 7, 8, 97\}$$

est 8.

3. Notations:

Le terme d'indice n de la suite U se note $U(n)$ ou U_n.

Dans l'exemple précédent, le terme d'indice 4 est noté $U(4)$ et est égal à 8.

On note aussi $U_4 = 8$.

`**Remarque:**

- Dans certains cas on comptera les positions à partir de 0, dans d'autres à partir de 1. (l'énoncé dira quelle convention utiliser).

Par exemple dans la suite U ci-dessus:

$U(2) = -3$ si on compte les positions à partir de 1.

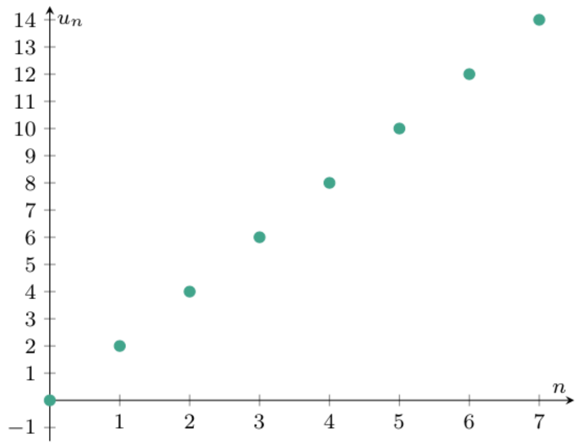
$U(2) = 7$ si on compte les positions à partir de 0.

-

4. Représentation graphique:

La représentation graphique d'une suite U sera un nuage de points. Ces points auront pour coordonnées $(n; U_n)$.

La suite U des multiples de 2, définie par $U = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ est représentée ci-contre.



5. Suite définie comme une fonction:

Plutôt que de donner chacun des termes d'une suite, on peut la définir à l'aide d'une formule.

a. Définition:

La première façon de définir une suite est à l'aide d'une fonction du rang n. On dit que la suite est **définie de façon explicite.**

Exemple : Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 5n + 7$. On trouve chaque terme de la suite en remplaçant n par 0, puis $1, 2$, etc. Ainsi $u(10) = 5 \times 10 + 7 = 57$ et de façon plus générale $u = \{7; 12; 17; 22; \ldots\}$.

b. Expression de $U_{N+1}, U_{2N}, \ldots$:

Si l'expression de U_n est donnée, on peut donner celle de U_{n+1} en remplaçant n par $n+1$
(**en oubliant pas les parenthèses**).
De même on peut donner l'expression de U_{2n}, en remplaçant n par $2n$.

Exemple:

Soit la suite u définie pour tout entier naturel par $u_n = 7n+5$. Donner l'expression de u_{n+1} et de u_{n-1}.

Réponse : $u_{n+1} = 7(n+1) + 5 = 7n + 7 + 5 = 7n + 12$. Donc $u_{n+1} = 7n + 12$.

Et $u_{n-1} = 7(n-1) + 5 = 7n - 7 + 5 = 7n - 2$. Donc $u_{n-1} = 7n - 2$.

EXERCICES (4 à 7 page 89)

6. Suite définie par récurrence:

Pour maîtriser la partie qui suit, il est nécessaire de comprendre que :
- $u(n+1)$ est le terme après $u(n)$,
- $u(n)$ est le terme après $u(n-1)$,
- $u(n-1)$ est le terme après $u(n-2)$,
- etc.

Et aussi que :
- si $u(n+1)$ est $u(4)$, alors $u(n)$ est $u(3)$.
- si $u(n+1)$ est $u(12)$, alors $u(n)$ est $u(11)$.
- si $u(n)$ est $u(10)$, alors $u(n-1)$ est $u(9)$.
- etc.

a. Définition:

La seconde façon de définir une suite est par **récurrence.** Dans ce cas, pour calculer la valeur d'un terme de la suite, on a besoin d'un ou plusieurs termes précédents. Ainsi on aura par exemple une formule du type.

$U_{n+1} = \ldots U_n$ ou $U_n = \ldots U_{n-1} \ldots$.

Exemple:

$$\begin{cases} u(n+1) = 4u(n) + 7 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Pour calculer u_1 :

$$u(1) = 4u(0) + 7 = 4 \times (-1) + 7 = 3.$$

Maintenant que l'on connaît u_1, on peut calculer u_2 :

$$u(2) = 4u(1) + 7 = 4 \times 3 + 7 = 19.$$

EXERCICES (13 à 16 page 89)

7. Sens de variation:

Propriété:

- Une suite est croissante si un terme de la suite est toujours plus grand que son précédent

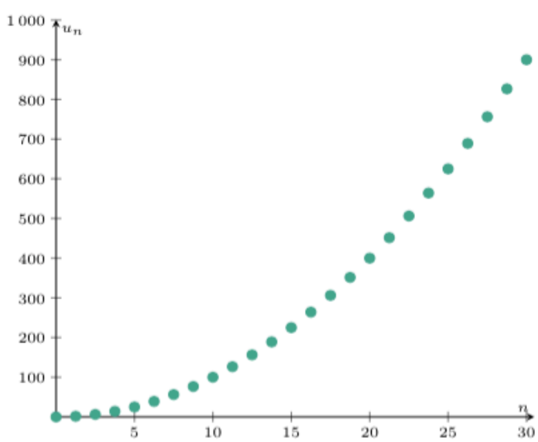
$$u(n+1) \geq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

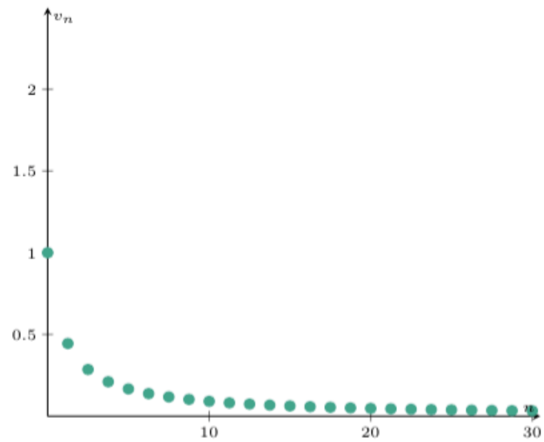
- Une suite est **décroissante** si:

$$u(n+1) \leq u(n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple:

Donner le sens de variation des suites représentées ci-dessous.





Réponse : La suite u est croissante, la suite v est décroissante.

EXERCICES (17 et 18 page 89)