Chapitre 1 - Les fonctions

N. Bancel

September 26, 2024

Les fonctions

Les fonctions polynomes de degré 2

On appelle fonction polynôme de degré 2, toute fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels, et a doit être non nul.
Cette fonction peut parfois s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec x_1 et x_2 des nombres réels et a non nul.

- Dans le premier cas on parlera de *forme développée*
- Dans le second de *forme factorisée*.

Exemple
Montrer que l'on peut réécrire la fonction $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$ sous la forme $f(x) = 3(x-3)(x-2)$

Racines d'un polynôme du 2nd degré

On appelle racine d'un polynôme du second degré les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dans le cas où le polynôme est donné sous forme factorisée :

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

les racines seront x_1 et x_2.
Exemple

- Quelles sont les racines du polynôme $-4(x-5)(x+1)$?
- 2 est-il racine de $x^2 - 3x + 7$

Trouver la forme factorisée à partir d'une racine

Si une racine est donnée, on peut trouver la seconde par identification.
Exemple
Factoriser $-4x^2+16x+20$ sachant que -1 est une racine.
On sait d'après l'énoncé que :

$$-4x^2+16x+20 = -4(x+1)(x-\alpha)$$

où α est la seconde racine que nous cherchons.
Si nous développons $-4(x+1)(x-\alpha)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
-4(x+1)(x-\alpha) &= -4(x^2-\alpha x+x-\alpha) && (1)\\
&= -4(x^2+x(1-\alpha)-\alpha) && (2)\\
&= -4x^2-4x(1-\alpha)-4\alpha && (3)
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on s'aperçoit que :

$$\begin{cases} -4(1-\alpha) = 16 \\ 4\alpha = -20 \end{cases}$$

On peut utiliser l'une des équations pour trouver α : la seconde, par exemple, nous donne : $\alpha = \frac{20}{-4} = -5$. On en déduit que la seconde racine est -5.

Représentation graphique

La fonction parabolique

On considère la fonction polynôme du second degré :

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
— Le sens de variation de f dépend uniquement du signe de a.
— Le signe de f dépend du signe de a ainsi que des racines de f.

Sommet et axe de symétrie

La fonction polynôme du second degré admet pour axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$ (forme développée) ou $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ (forme factorisée).

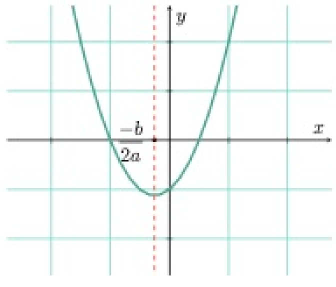

Figure 1: Symétrie d'une parabole

Son sommet a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$ avec a > 0	$+\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$+\infty$
$f(x)$ avec a < 0	$-\infty$	$f(-\frac{b}{2a})$	$-\infty$

Pause exercices

Notions à intégrer

- Appartenance d'un point à une courbe
- Résolution graphique d'équation
- Racines de polynomes

Faire les exercices 13, 14, 28, 31, 37, Questions 1 et 2 de l'exercice 47

Résolution d'inéquation du 2nd degré

Tableau de signe

Si f a deux racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Si f a 1 racine :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Si f n'a pas de racine :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Exemple

- Donner le tableau de signe de la fonction $f(x) = -4(x-2)(x+3)$
- Résoudre l'inéquation $-4(x-2)(x+3) \leq 0$

Fonction polynôme de degré 3

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 3, toute fonction de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont des réels et a est non nul.

Exemple

La fonction $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3$ est une fonction polynôme de degré 3.

Forme développée et forme factorisée

Tout comme pour les fonctions polynômes de degré 2, une fonction polynôme de degré 3 peut éventuellement s'écrire sous forme factorisée :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

avec a, x_1, x_2 et x_3 des nombres réels et a est non nul.

Exemple

Montrer que l'on peut réécrire la fonction $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 20x - 16$ sous la forme :

$$f(x) = 2(x-4)(x+2)(x+1)$$

Réponse:

$$
\begin{aligned}
2(x-4)(x+2)(x+1) = 2(x-4)(x^2+x+2x+2) &= 2(x-4)(x^2+3x+2) && (4)\\
&= 2(x^3+3x^2+2x-4x^2-12x-8) && (5)\\
&= 2(x^3-x^2-10x-8) && (6)\\
&= 2x^3-2x^2-20x-16 && (7)
\end{aligned}
$$

Remarque: Un polynôme de degré 3 n'a pas forcément une forme factorisée.

Racines d'un polynôme de degré 3

On appelle racines d'un polynôme de degré 3 les solutions de l'équation : $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Dans le cas où le polynôme est donné sous forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, les racines seront x_1, x_2 et x_3.

Tableau de signes de $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Dans le cas où la fonction polynôme de degré 3 a trois racines, son tableau de signes sera :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Inéquations de degré 3

Même principe que inéquations de degré 2 : on utilise un tableau de signe (si le polynôme est factorisable)

Exemple

Résoudre l'inéquation

$$4(x-1)(x+7)(x-1) > 0$$