150

Djamal paye 75 euros un abonnement annuel pour visiter tous les musées de son département. Il doit ensuite payer 5 euros supplémentaires pour chaque exposition qu'il souhaite visiter. On note P le prix que Djamal dépensera dans l'année pour ses visites au musée et n le nombre d'expositions qu'il aura faites.

1. Donner l'expression de P_n en fonction de n.
2. Combien payera-t-il au total s'il visite 20 expositions durant l'année ?

151

En 2019, Elisabeth possède une bibliothèque de livre d'arts contenant 100 ouvrages. À partir de 2020 elle décide de donner chaque année 5$\%$ de ses ouvrages à une œuvre de charité et d'acheter 10 nouveaux livres.

1. Combien aura-t-elle d'ouvrages en 2020?
2. On note o_n le nombre d'ouvrages qu'elle possède en $2019+n$. Donner l'expression de o_{n+1} en fonction de o_n.

152

Un somme de 3000 euros est placée à 3$\%$ par an, à intérêts composés – à la fin de chaque année les intérêts sont intégrés à l'ancien capital.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose : $S_0 = 3000$.

1. Calculer le capital acquis à la fin de la première année.
2. Calculer le capital acquis à la fin de la deuxième année.
3. Démontrer que le capital n'est pas en progression arithmétique.
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.
5. Ecrire une formule de récurrence permettant de calculer S_{n+1} en fonction de S_n.
6. Calculer et interpréter S_5.

153

On place une somme de 5000 euros à 4% par an, à intérêts simples – à la fin de chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital initialement placé.

On modélise le capital acquis tous les ans par une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose : $S_0 = 5000$.

1. Calculer le capital acquis à la fin de la 1ère année.
2. Calculer le capital acquis à la fin de la 2ème année.
3. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélisant le capital est arithmétique dont on précisera la raison.
4. Calculer S_{10}. Que représente cette valeur ?

154

Un designer souhaite créer une armature en métal issue de la superposition de plusieurs couches d'aluminium. La première couche serait de 1cm. Les épaisseurs suivantes auraient une épaisseur qui diminuerait à chaque fois de 15%. On modélise l'épaisseur de chacune de ces couches par une suite (e_n) : on note e_n l'épaisseur de la nième couche en centimètres. Ainsi $e_1 = 1$.

1. Calculer e_2 et e_3.
2. Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire que e est une suite géométrique dont vous donnerez la raison.
4. Donner e_7.
5. L'industriel qui produira ces lames d'aluminium ne peut produire des épaisseurs inférieures à 0.3cm. Combien de couches au maximum le designer peut-il superposer ? Dans ce cas quelle sera l'épaisseur totale de l'armature ?

155

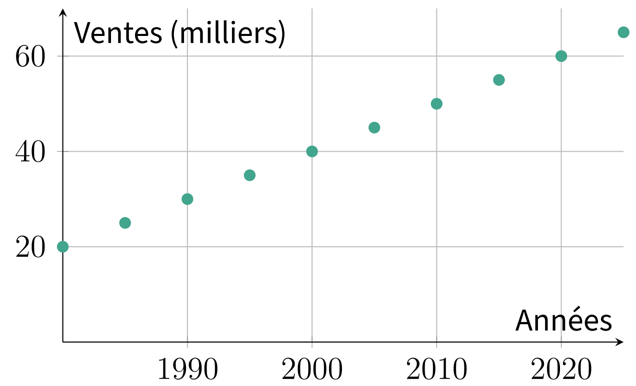
Démontrer que la moyenne de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est toujours égale au terme central.

156

Le tableau ci-dessous donne les chiffres des ventes annuelles d'une entreprise de 1980 à 2025 (en milliers d'unités).

Année	Ventes (milliers)
1980	20
1985	25
1990	30
1995	35
2000	40
2005	45
2010	50
2015	55
2020	60
2025	65

Ces données sont illustrées par le graphique ci-dessous.



1. La croissance des ventes semble-t-elle linéaire sur la période 1980-2025 d'après le graphique ci-dessus ?
2. On suppose que la croissance des ventes est linéaire sur la période 1980-2025.
   (a) Calculer l'accroissement annuel moyen sur cette période.
   (b) Si cette hypothèse de croissance linéaire se maintenait au-delà de 2025, quel serait le chiffre de ventes en 2030 ?
3. On suppose désormais que le taux de croissance annuel est constant et égal à 5% depuis 1980.
   (a) Comment peut-on qualifier ce type de croissance ?
   (b) Quel serait le chiffre de ventes en 2030 si ce taux de croissance se maintenait au-delà de 2025 ? en 2050 ?

157

La suite de Fibonacci, le nombre d'or et la spirale d'or

Partie A : La suite de Fibonacci

1. La suite de Fibonacci $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent avec $\mathscr{F}_0 = 1$ et $\mathscr{F}_1 = 1$.
   (a) Calculer $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$ et $\mathscr{F}_4$.
   (b) Donner une expression par récurrence de la suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) La suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite arithmétique ? géométrique ?
2. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n = \frac{\mathscr{F}_{n+1}}{\mathscr{F}_n}$$

   (a) Calculer P_0, P_1 et P_2.
   (b) A l'aide de la calculatrice, représenter le nuage de points associé à la suite P.
   (c) Qu'observe-t-on ? Quelle est la valeur prise par P_n lorsque n devient grand ?

Partie B : Le nombre d'or et la spirale d'or

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant au « taux de croissance » de la suite de Fibonacci converge vers un nombre $\varphi \approx 1{,}618$ que l'on appelle le nombre d'or. Sa valeur exacte est donnée par

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Luca Pacioli, un moine franciscain italien, le surnomma « divine proportion », et durant les XIXe et XXe siècles on postulera que le nombre d'or est une clé pour la compréhension de nombreux domaines, tant artistiques – architecture, peinture, musique –, que scientifiques – biologie, anatomie. Rares, au final, furent les domaines qui étayèrent cette thèse, mais il reste un pilier esthétique important des créations humaines. Nous allons dans la suite de cet exercice nous intéresser à une des constructions faisant intervenir le nombre d'or : la spirale d'or.