

## Résolution numérique de l'équation de la chaleur

### Barême

Votre travail devra être présenté lors d'une soutenance orale en binome (**durée complète : 14 minutes**). Les 2 membres du binome doivent tout d'abord présenter les résultats pendant **une durée de 7 minutes**. Des transparents peuvent être utilisés pour présenter vos résultats mais il est surtout demandé de montrer et commenter votre code et de faire une ou plusieurs démos.

Lors de la séance de questions (**durée : 7 minutes**), vous devez prouver que vous maîtrisez toutes les méthodes et les algorithmes que vous avez utilisés.

Vous avez le droit d'utiliser tous les documents et les outils informatiques que vous voulez.

La prise d'initiative et la créativité seront largement récompensés : si vous voulez explorer des pistes non mentionnées dans le sujet, n'hésitez pas !

- **6 points pour la partie 1, environ 2 minutes de présentation**
- **7 points pour la partie 2, environ 2 minutes de présentation**
- **7 points pour la partie 3, environ 3 minutes de présentation**

On s'intéresse dans ce TP à l'évolution de la température dans une pièce supposée bidimensionnelle, contenant des bureaux/objets/personnes (la conductivité n'est donc pas constante), soumise à une source de chaleur avec des conditions aux bords variés : Dirichlet (si la température est fixée), de Neumann (si il y a un radiateur) ou plus généralement de Fourier (si il y a un climatiseur). Ce problème présente de multiples difficultés que nous allons aborder progressivement :

- à l'aide de formules de quadrature, nous allons considérer des coefficients variables ;
- à l'aide de la technique de pseudo-élimination, nous allons prendre en compte des conditions de type Dirichlet homogènes ou non-homogènes ;
- en assemblant la matrice de masse surfacique, nous allons prendre en compte des conditions de Fourier ;
- tous ces aspects seront réunis dans un problème stationnaire dans un premier temps puis dans un problème non stationnaire.

## Exercice 1. Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit  $\Omega$  un ouvert borné à frontière polygonale de  $\mathbb{R}^2$ . On s'intéresse au calcul de la température  $T \equiv T(x, y)$ , solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Dirichlet :

*Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  telle que*

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  sont tels que  $\alpha$  est une constante strictement positive, et la conductivité  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière par morceaux, et

$$\exists \sigma_{max}, \sigma_{min} > 0, \quad \sigma_{min} \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_{max}, \quad \text{presque pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

Les données sont la source de chaleur  $S \in L^2(\Omega)$ , et la température fixée au bord  $T_\Gamma$ .

**1.1** - On suppose dans un premier temps que  $T_\Gamma$  est constante. Si on exprime la température  $T$  sous la forme  $T(x, y) = T_\Gamma + u(x, y)$ ,  $(x, y)$  parcourant  $\bar{\Omega}$ , il est facile de montrer que la nouvelle inconnue  $u$  est solution du problème

*Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que*

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

en précisant la valeur du second membre  $f$ .

**1.2** - Rappeler la formule d'intégration par parties avec la divergence, et vérifier que la formulation variationnelle du problème (2) s'écrit :

*Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que*

$$(3) \quad \alpha \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} fv \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**1.3** - Montrer que la formulation variationnelle est bien posée.

### Discrétisation :

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ , et  $V_h$  l'approximation de  $H^1(\Omega)$  par des éléments finis  $P^1$  associés à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . On note  $(T_\ell)_{\ell=1,L}$  les triangles de  $\mathcal{T}_h$ ,  $(M_I)_{I=1,N}$  les sommets des triangles et  $(\phi_I)_{I=1,N}$  la base de  $V_h$  définie par  $\phi_I(M_J) = \delta_{IJ}$ ,  $1 \leq I, J \leq N$ . On introduit :

$$V_h^0 = \operatorname{Vect} \{ \phi_I, \quad M_I \notin \partial\Omega \}.$$

Par construction,  $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ .

**1.4** - Ecrire la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée  $u_h$ .

**1.5** - La solution approchée  $u_h$  s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) = \sum_{I, M_I \notin \partial\Omega} u_h(M_I) \phi_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(4) \quad \mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0,$$

où la  $I$ ème composante du vecteur  $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$  vaut  $u_h(M_I)$  et où on écrira  $\mathbb{A}^0 = \alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$ , avec  $\mathbb{M}^0$  la matrice de masse, et  $\mathbb{K}^0$  la matrice de rigidité.

**1.6** - Dans la pratique, plutôt que de résoudre le système linéaire (4), on préfère

1. assembler la matrice  $\mathbb{A}$  et le vecteur  $\vec{L}$  avec toutes les fonctions de base (comme si on résolvait un problème avec conditions de Neumann),
2. construire ensuite  $\tilde{\mathbb{A}}$  et  $\tilde{\vec{L}}$  à l'aide de la technique de *pseudo-élimination*
3. résoudre le système linéaire ainsi obtenu.

$$(5) \quad \tilde{\mathbb{A}} \vec{U} = \tilde{\vec{L}}.$$

Rappeler les expressions de  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $\vec{L} \in \mathbb{R}^N$  en fonction de  $\mathbb{A}^0$  et  $\vec{L}^0$  dans le cas où on suppose que les noeuds de la frontière  $\partial\Omega$  sont numérotés de  $N_0 + 1$  à  $N$  (et que les noeuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à  $N_0$ ).

Expliquer comment modifier dans le cas général  $\mathbb{A}$  et  $\vec{L}$  pour calculer  $\vec{U}^0$ . On appellera  $\tilde{\mathbb{A}}$  et  $\tilde{\vec{L}}$  les matrices obtenues.

Avant d'effectuer la pseudo-élimination, nous allons donc calculer les matrices élémentaires et assembler les matrices  $\mathbb{A}$  et  $\vec{L}$ .

### Géométrie et maillages :

On veut résoudre le problème dans un ouvert  $\Omega$  composé de deux zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On

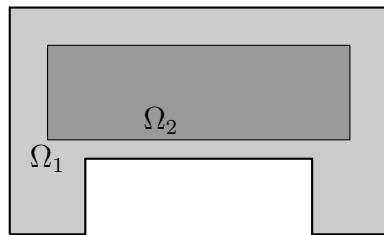


FIGURE 1 – Le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

appelle  $\sigma_1 = \sigma|_{\Omega_1}$  et  $\sigma_2 = \sigma|_{\Omega_2}$  les restrictions de  $\sigma$  à chacun des sous-domaines. C'est

lors du calcul des matrices élémentaires qu'il faudra distinguer si un triangle est dans le domaine  $\Omega_1$  (dans ce cas, on prendra  $\sigma = \sigma_1$ ) ou dans le domaine  $\Omega_2$  (dans ce cas, on prendra  $\sigma = \sigma_2$ ). Pour générer le maillage avec gmsh, on utilisera le fichier `domaine.geo`. Pour les validations, on utilisera le fichier `geomRectangle.geo` qui correspond au cas où  $\Omega_1 = (0, 2)^2$  et  $\Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2)$ .

### Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence :

On se place sur un triangle  $T_\ell$ . Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle, nous allons utiliser une méthode de calcul, plus générale que les coordonnées barycentriques. Pour calculer les intégrales volumiques sur le triangle  $T_\ell$  (composé des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ ), on se ramène tout d'abord au triangle de référence  $\hat{T}$  (composé des points  $\hat{M}_1 = (0, 0), \hat{M}_2 = (1, 0)$  et  $\hat{M}_3 = (0, 1)$ ).

**1.7** - Calculer la transformation  $\mathcal{F}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}) = \mathcal{B}_\ell \hat{M} + S_\ell, \mathcal{B}_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

qui permet de passer du triangle de référence au triangle  $T_\ell$  :

$$\forall i, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}_i) = M_i.$$

Les intégrales de masse sur  $T_\ell$  peuvent alors s'écrire

$$\int_{T_\ell} \phi_I(M) \phi_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_I(\hat{M}) \hat{\phi}_J(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}$$

et de rigidité

$$\begin{aligned} \int_{T_\ell} \sigma(M) \nabla \phi_I(M) \cdot \nabla \phi_J(M) d\Omega = \\ \int_{\hat{T}} \sigma(\mathcal{F}_\ell(\hat{M})) \left[ (\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\phi}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[ (\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{\phi}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

**1.8** - Rappeler les expressions de  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$  et  $\hat{\phi}_3$ . En déduire le calcul de la matrice de masse élémentaire.

**1.9** - Quand les coefficients sont variables, il n'est pas toujours possible de calculer ces intégrales exactement. On approche alors ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à  $N_q$  points : pour  $G$  une fonction continue par morceaux de  $T_\ell$

$$\int_{\hat{T}} G d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N_q} \omega^q G(\hat{S}^q).$$

où  $\hat{S}^q$  sont des points de quadrature dans  $\hat{T}$  et  $\omega^q$  les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient

par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné, ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 3 points de Gauss Legendre qui est d'ordre 2 et qui est définie sur le triangle de référence  $\hat{T}$  par

$$\begin{array}{c|cc|cc} \hat{S}^q & (s_0, s_0) & (s_1, s_0) & (s_0, s_1) \\ \hat{\omega}^q & \omega_0 & \omega_0 & \omega_0 \end{array}$$

avec

$$s_0 = \frac{1}{6}, \quad s_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{6}.$$

à l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Il faudra modifier la routine `matK_elem.m`, en prenant comme argument supplémentaire le tableau `Reftri` pour déterminer à quelle zone chaque triangle appartient. En fonction de la zone, on utilisera les fonctions `sigma_1.m` et `sigma_2.m`, que vous pouvez modifier.

**1.10 -** Valider le calcul pour un triangle quelconque dans le cas  $\sigma = 1$  en comparant au calcul de la matrice élémentaire du TP précédent.

#### Assemblage des matrices et vecteur second membre :

La routine `principal_chaleur.m` est le programme principal pour résoudre le problème (5), ce qui permet de calculer la température approchée  $T_h$ .

**1.11 -** Reprendre la partie assemblage du TP précédent, permettant de construire la matrice  $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K}$  et le vecteur  $\vec{L}$ , *avant la pseudo-élimination*. Comme au TP précédent, pour une donnée  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ , le vecteur  $\vec{L}$  sera construit à l'aide d'une technique d'interpolation.

**1.12 -** Ecrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

```
[tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)
```

qui réalise la pseudo-élimination des noeuds du bord en utilisant le vecteur `Refneu`. Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_chaleur.m`.

#### Validation du code :

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée  $u_h$  correcte. Pour cela, on résout le problème (2) avec les paramètres

$$\Omega_1 = (0, 2)^2, \quad \Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2), \quad \alpha = 1, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1,$$

et une solution  $u$  égale à  $u(x, y) = \sin(3\pi x) \sin(\pi y)$ , pour  $(x, y) \in \overline{\Omega}$  (le maillage sera généré à l'aide de `geomRectangle.geo`).

**1.13 -** Calculer la donnée  $f$  correspondante et modifier la routine `f.m`.

**1.14** - En assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$ , donner une estimation de la norme  $L^2$  de l'erreur,  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ . Comment évolue cette erreur en fonction de  $h$ ? Comparer au résultat théorique du cours.

**1.15** - Mêmes questions pour la semi-norme  $H^1$  de l'erreur,  $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ .

### Résolution numérique<sup>1</sup> :

On choisit les valeurs suivantes pour les paramètres et données

$$\alpha = 1, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = \sqrt{3}/2, S(x, y) = 600 \exp\left(-\left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-4}{0.8}\right)^2\right), T_\Gamma = 285,$$

et le domaine est celui de la figure 1, le maillage étant généré à l'aide du fichier `domaine.geo`

**1.16** - Résoudre le problème discret et représenter la température approchée  $T_h$ . Donner sa valeur maximale. Quel phénomène observe-t-on dans  $\Omega_2$  ?

**1.17** - On change maintenant seulement  $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{var}} \quad \text{où} \quad \sigma_{\text{var}}(x, y) = 1/4(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$$

Résoudre le problème discret et représenter la température approchée  $T_h$ . Qu'observez-vous?

## Exercice 2. Prise en compte d'autres conditions aux limites

### Conditions de Dirichlet non homogènes :

**2.1** - Revenons maintenant au problème (1) avec une donnée sur le bord  $T_\Gamma$  qui n'est plus une fonction constante. On suppose que  $T_\Gamma \in C^1(\partial\Omega)$ . Ecrire la formulation variationnelle vérifiée par  $u = T$  puis la formulation variationnelle discrète où on remplace la condition  $u|_{\partial\Omega} = T_\Gamma$  par  $u_h|_{\partial\Omega} = T_{\Gamma,h}$  où  $T_{\Gamma,h}$  est l'interpolée de  $T_\Gamma$  :

$$T_{\Gamma,h} = \sum_{j, S_j \in \partial\Omega} T_\Gamma(S_j) \phi_j.$$

En déduire le système linéaire équivalent.

---

1. Préciser pour chaque simulation numérique le pas du maillage choisi.

**2.2** - Comme vu dans le cours, il est possible d'étendre la technique de pseudo-élimination aux cas des conditions de Dirichlet non homogènes. En supposant que les noeuds de la frontière sont numérotés en dernier, montrer qu'il suffit de modifier la matrice assemblée avec toutes les fonctions de base

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{II} & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{A}_{BI} & \mathbb{A}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_I \\ \mathbb{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_I \\ \mathbb{L}_B \end{bmatrix}$$

et d'imposer  $\mathbb{A}_{BI} = 0$ ,  $\mathbb{A}_{BB} = \mathbb{I}$  et  $\mathbb{L}_B = T_{\Gamma,h}$  où on a identifié la fonction  $T_{\Gamma,h}$  et le vecteur colonne composé des valeurs prises par  $T_{\Gamma,h}$ .

**2.3** - Créer une routine `T_Gamma.m` qui renvoie la valeur de  $T_{\Gamma,h}$  à un sommet (ou un vecteur de sommets) donné et modifier la routine `elimine.m`.

**2.4** - Valider votre code avec une solution connue, pour  $(x, y) \in \Omega$ , le domaine  $\Omega$  étant celui de la figure 1. On choisira  $f$  et  $T_\Gamma$  en conséquence.

**2.5** - Calculer la solution pour  $f = 0$ ,  $T_\Gamma = 290$  sur le bord supérieur  $\partial\Omega \cap \{y = 6\}$  et 260 sur le reste du bord.

### Conditions de type Fourier :

On s'intéresse maintenant au calcul de la température  $T \equiv T(x, y)$ , solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Fourier (qui modélise un climatiseur : le flux de chaleur est positif si  $T < T_c$  et négatif si  $T > T_c$ , où  $T_c$  est la température de référence du climatiseur) :

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

avec  $\alpha$ ,  $\sigma$  et  $S$  vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment,  $\lambda > 0$  et  $T_c \in L^2(\partial\Omega)$ .

**2.6** - Ecrire la formulation variationnelle du problème (6).

**2.7** - On souhaite discréteriser (6) en utilisant des éléments finis de Lagrange  $P^1$ . Après avoir introduit l'espace d'approximation  $V_h$ , écrire la formulation discrète dans  $V_h$  et prouver que le problème discret se met sous la forme

$$(\mathcal{P}_h^N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{U} \in \mathbb{R}^N \text{ telle que} \\ (\mathbb{K} + \alpha \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}) \vec{U} = \vec{F} \end{cases}$$

où on précisera la définition des différentes matrices et vecteurs.

**2.8** - Construire le terme  $\vec{F}$  pour une donnée  $S \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , et  $T_c \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$  à l'aide d'une technique d'interpolation.

**2.9** - Ecrire le code permettant de calculer la solution discrète. On complètera la routine `mat_elem_surface.m` qui à partir des coordonnées de 2 sommets du bord donne la matrice élémentaire de masse surfacique. On assemblera la matrice  $\mathbb{S}$  en effectuant une boucle sur les arêtes.

**2.10** - Valider votre code et expliquer vos différentes validations.

**2.11** - Représenter la solution dans les 2 cas suivants

- (i)  $S(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2)$  et  $\Omega_1 = (0, 2)^2$ ,  $\Omega_2 = (0.2, 1.8) \times (0.2, 1.2)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\lambda = 0$ ;
- (ii) Reprendre les données de la Question 1.17 pour le domaine de la figure 1 avec  $\lambda = 1$  et  $T_c = 285$ .

Commenter.

### Exercice 3. Problème complet : Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes

On veut maintenant modéliser l'équation de la chaleur, avec une température  $T \equiv T(x, y, t)$  dépendant du temps  $t$ . On résout dans ce cas

Trouver  $T(t) \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T|_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} .$$

$S \equiv S(x, y, t)$  est la source de chaleur, et  $T_0 \equiv T_0(x, y)$  est la valeur initiale de la température.

**3.1** - On (semi-)discrétise en espace, en cherchant  $T_h(t) \in V_h$ , puis on discrétise en temps à l'aide du schéma de votre choix. Si on note  $\Delta t$  le pas de temps et  $t^k = k \Delta t$  les instants discrets,  $k$  variant de 0 à  $K = t_{max}/(\Delta t)$ , on approche  $T(t^k)$  par  $T_h^k \in V_h$  :

$$T_h^k(x, y) = \sum_{I=1}^N T_I^k \phi_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

On introduit le vecteur  $\vec{T}^k \in \mathbb{R}^N$  dont la  $I$ ème composante vaut  $T_I^k$ , et le vecteur  $\vec{U}_\Gamma$  dont la  $I$ ème composante vaut  $T_\Gamma(S_I)$  si  $S_I \in \partial\Omega$  et 0 sinon. Ecrire le système linéaire correspondant en faisant intervenir les matrices  $\tilde{\mathbb{M}}$ ,  $\tilde{\mathbb{K}}$  obtenues à la question 1.20 et le vecteur second membre  $\tilde{\vec{L}}^{k+1}$  calculé à chaque pas de temps .

On choisit les valeurs suivantes pour les paramètres et données

$$t_{max} = 1, \Delta t = 0.01 \text{ à changer éventuellement en fonction du maillage}$$

$$\sigma_1 = 5, \sigma_2 = \sigma_{\text{var}}, T_\Gamma = 285, T_0 = 310,$$

$$S(x, y, t) = 600e^{-5t} \exp\left(-\left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2 - \left(\frac{y-4}{0.8}\right)^2\right).$$

**3.2** - Résoudre le problème discret et représenter l'évolution de la température au cours du temps.

**3.3** - On suppose maintenant que sur une partie du bord une condition de Fourier est imposée. Modifier les maillages (on pourra modifier dans les fichiers `.geo`) et le code pour représenter la solution d'un tel problème. Vous choisissez les données et pourrez les faire varier. Vous pouvez également changer les conditions aux bords pour que sur une partie du bord, la température soit fixée, une autre correspond à un radiateur et une dernière partie un climatiseur.

**3.4** - On se donne une pièce dans laquelle un des bords est à une température fixe et assez basse (par exemple une porte ouverte en hiver). Jouer sur les paramètres pour stabiliser la température de la pièce à une température plus élevée en utilisant des climatiseurs et/ou des radiateurs sur le reste du bord.