Rolf Haftmann

Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik mit ausführlichen Lösungen

– Auszug –

Stand: 17. Oktober 2014

Vorwort

Vom Herbst 1978 bis zum Sommer 2013 war ich an der heutigen Technischen Universität Chemnitz an mathematischen Lehrveranstaltungen für Studierende verschiedener Fachrichtungen, vor allem ingenieur- und wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge beteiligt, ganz am Anfang als Forschungsstudent auf Honorarbasis, seit März 1979 als Wissenschaftlicher Mitarbeiter. Dabei hat sich eine große Sammlung von Aufgaben für Übungen, Hausaufgaben und Klausuren mit den entsprechenden Musterlösungen gebildet. Der Ursprung der Aufgaben ist in vielen Fällen für mich nicht so einfach rekonstruierbar.

Die ersten von mir gehaltenen Lehrveranstaltungen waren Übungen zur Vorlesung Analysis für Physiker an der damaligen Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, am Anfang von Prof. Volkmar Friedrich, dann von den Hochschuldozenten Wilfried Weinelt und Michael Fröhner. Sofern dafür überhaupt vorab Übungsblätter ausgereicht wurden, waren diese handgeschrieben und im Spirit-Umdruckverfahren („Ormig“) vervielfältigt. Neben anderen Lehrveranstaltungen war ich dann in den 1980er Jahren auch an Höhere Mathematik-Kursen für Studenten des Maschineningenieurwesens beteiligt. Für diese wurden spezielle Aufgabensammlungen [1] zum Preis von 80 Pfennig verkauft, z.T. wurden Aufgabenblätter auch zum Abschreiben ausgehängt.

Für die von mir entworfenen Übungen habe ich zunächst teilweise auf Übungshefter aus meinem eigenen Studium, dann auf die Aufgabensammlung von Minorski [22], die unter anderem von meinem ersten Mathematiklehrer in Karl-Marx-Stadt, Gerhard Liebold, aus dem Russischen übersetzt worden war und die mich schon durch mein Studium begleitet hat, sowie auf die Übungsbände Ü1 – Ü3 ([26], [27] und [23]) der damals viel benutzten „MINÖL“-Reihe zurückgegriffen. Zum großen Teil handelte es sich bei den von mir verwendeten Aufgaben um Standardaufgaben, die so oder ähnlich auch in anderen Aufgabensammlungen zu finden sind. Die genannten Aufgabensammlungen enthalten als Lösungen meist nur kurz die jeweiligen Endergebnisse der Aufgaben. Besonders gemocht habe ich die Aufgabensammlung zum Kurs der Höheren Mathematik für Technische Hochschulen von Djubjuk, Kručkovič und anderen [8] mit teils sehr ausführlichen Lösungen.

Ab 1993 habe ich den Studenten teilweise, ab 1996 dann nur noch mit LaTeX geschriebene Aufgabenblätter zur Verfügung gestellt. Dies betraf insbesondere auch Übungen und Seminare zu Kursen Algebra/Geometrie von Prof. Klaus Beer. Dafür konnte ich teilweise auf Material von Uwe Würker zurückgreifen. Für die Kurse wurden auch Aufgaben aus der Aufgabensammlung von Ikramov [16] verwendet.

1996 kamen die Übungen zu der von Prof. Reinhold Schneider gehaltenen dreisemestrigen Vorlesung Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure hinzu. Zum Wintersemester 1996/97 wurden an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Chemnitz-Zwickau erstmalig Studenten für die beiden genannten Studiengänge im Grundstudium immatrikuliert, nachdem es vorher den Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen nur als Aufbaustudiengang gegeben hatte. Deshalb war von der Fakultät für Mathematik nun auch ein Höhere-Mathematik-Kurs mit sowohl ingenieur- als auch wirtschaftswissenschaftlichen Bezügen anzubieten.

Die mit LaTeX geschriebenen Aufgabenblätter für den Kurs wurden teils kopiert verteilt, teils als Kopierexemplare in der Nähe von von den Studenten nutzbaren Kopierern ausgehängt. Ab November 1996 wurden sie auch zum Download als Postscript-Files bereitgestellt, was mit erheblichen Nutzungs- und Akzeptanzschwierigkeiten bei den Kursteilnehmern verbunden war, ab Wintersemester 1999/2000 schließlich als Pdf-Files.

Im Studienjahr 2000/01 wurde die Vorlesung Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure von Prof. Horst Martini gelesen, an der Erarbeitung der Klausuren dafür waren auch Lars Göhler und Walter Wenzel beteiligt. 2001 wurde der Kurs geteilt, ich war dann für den Übungsbetrieb für die Wirtschaftsingenieure zuständig. Die Vorlesung hielt Hochschuldozentin Sybille Meyer bzw. bei Mathematik III 2001/02 und Mathematik I-II 2002/03 nochmals Prof. Reinhold Schneider. Die Aufgabenblätter wurden nun nur noch elektronisch zur Verfügung gestellt.

Von 2000 bis 2003 war die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz Teilnehmerin des EU-Projektes „TRIAL-SOLUTION“ (Tools for Reusable, Integrated, Adaptable Learning – Systems/standards for Open Learning Using Tested, Interoperable Objects and Networking), in dem eine Technologie zur Erstellung personalisierter Lehrmaterialien getestet wurde (s. [2], [3], [12]). Um testbaren Inhalt für dieses Projekt zu generieren, wurden u.a. ursprünglich unter Mitarbeit von Michael Konik und Helmut Harbrecht erstellte Teile des Vorlesungsskripts Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure von Prof. Schneider aufgearbeitet und um die vorliegenden Übungs- und Klausuraufgaben mehrerer Kurse aus den Jahren 1996 bis 2003 ergänzt ([24]). Inhaltlich waren an dieser Bearbeitung neben mir vor allem Michael Armbruster, Tino Eibner und Thomas Beckmann, mit kleineren Beiträgen auch Olaf Benedix, Ronny Joachim und weitere studentische Hilfskräfte beteiligt. Damit war ein erster Grundstock der hier vorliegenden Aufgabensammlung geschaffen. Insgesamt enthielt das Manuskript 480 Aufgaben, davon 170 mit Lösungen. Letztere waren vor allem aus den im Netz veröffentlichten Musterlösungen der Hausaufgaben entstanden.

Für jede im Manuskript bearbeitete Aufgabe lag ein strukturierter LaTeX-Code mit Aufgabennummer, Aufgaben- und ggf. Lösungstext vor. In dieser Form habe ich dann alle ab 2003 von mir für Übungen, Hausaufgaben und Klausuren verwendeten Aufgaben erfasst, wobei ich dann auch die zuvor meist nur handschriftlich vorliegenden Musterlösungen vollständig mit LaTeX gesetzt habe. Die in den Lösungen enthaltenen Bilder wurden entweder aus den alten handschriftlichen Lösungen eingescannt oder mit dem Computeralgebrasystem Maple erzeugt. Von 1995 bis 2006 war ich an den Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften von Prof. Bernd Luderer beteiligt. Dem dafür von Prof. Luderer zur Verfügung gestellten Übungsmaterial [19] habe ich etliche Aufgaben, vor allem auch einführende Aufgaben zu einigen Kapiteln, und Lösungsdarstellungen entnommen. Ansonsten sind neben von mir neu aufgestellten Aufgaben wie oben erwähnt solche aus verschiedenen Quellen eingeflossen, die Musterlösungen wurden aber alle neu erstellt.

Der überwiegende Teil der ab 2003 erfassten Aufgaben entstammt den Kursen Mathematik I-III für Wirtschaftsingenieure und Höhere Mathematik I für verschiedene Bachelorstudiengänge. Ersterer wurde als dreisemestriger Kurs durchgeführt und begann letztmalig 2005, die Vorlesungen hielt wie erwähnt Hochschuldozentin Sybille Handrock [14]. Nach der Bachelorumstellung wird seit 2006 der zweisemestrige Kurs Höhere Mathematik I.1 und Höhere Mathematik I.2 angeboten. Zielgruppe sind die Bachelorstudiengänge Automobilproduktion, Print and Media Technology (bis 2009/10 Media Produktion), Sports Engineering, Technikkommunikation und Wirtschaftsingenieurwesen, ab 2007 Chemie (2007/08 noch als Diplomstudiengang) sowie ab 2009 Sensorik und koginitive Psychologie. Vorlesende waren 2006/07 und 2007/08 Hochschuldozentin Sybille Handrock [13], von 2008 an dann Prof. Roland Herzog [15] und Prof. Horst Martini im jährlichen Wechsel.

Einige der Aufgaben aus der „Bachelorzeit“ stammen von Michael Weise, der von 2007 bis 2009 speziell für Wiederholer zum gerade besprochenen Kurs bestimmte Hausaufgabenkomplexe erstellt hat. Wenige Aufgaben sind auch dem Material von PD Uwe Streit zu den Übungen Höhere Mathematik I für Maschinenbau [25], an denen ich seit 2008 beteiligt war, entnommen. Des Weiteren habe ich einige Aufgaben im Zusammenhang mit Zugangsprüfungen von Ingeburg Hambach übernommen. Die MATLAB-Aufgaben in Kapitel 25 wurden von Frank Schmidt für den Kurs 2008/09 von Prof. Herzog aufgestellt.

Ich habe mich bemüht, hier die Kollegen und Studenten zu erwähnen, die in irgendeiner Weise direkt an der Generierung der Aufgaben- und Lösungstexte beteiligt waren. Sollte ich dabei jemanden übersehen haben, bitte ich das zu entschuldigen. Daneben habe ich im Laufe der Jahre für die Übungen, Hausaufgaben und Klausuren mit vielen Kollegen und studentischen Hilfskräften zusammengearbeitet, denen ich für viele Anregungen und Rückmeldungen sehr dankbar bin. Stellvertretend sei hier nur Andreas Günnel genannt, der als Student und Mitarbeiter an den Übungen zu den Kursen von HSD Handrock, Prof. Herzog und Prof. Martini beteiligt war.

Neben den Aufgaben aus dem Skript [24] lag für alle Kurse ab 2003, für die ich die Übungsblätter erstellt habe, pro Semester jeweils ein File in strukturierter Form mit den Aufgaben einschließlich Lösung und systematischer Nummerierung vor, das übrige Material aus den Jahren zuvor in weniger strukturierter Form und meist nur mit handschriftlicher Musterlösung. Insgesamt handelte es sich am Ende des Wintersemesters 2009/10 in unterschiedlicher Form um 3143 Aufgaben in insgesamt 4890 Versionen. Ich habe Ende 2009 begonnen, parallel zur Erstellung der laufenden Übungsblätter die vorhandenen Aufgaben zu überarbeiten und vereinheitlichen. Dazu wurden die Versionen der einzelnen Aufgaben aus den verschiedenen Jahren verglichen, Dopplungen entfernt, die im Laufe der Jahre und in Abhängigkeit von den jeweiligen Vorlesenden gebrauchten unterschiedlichen Bezeichnungen vorsichtig angeglichen und Bezüge zu konkreten Vorlesungen, z.B. auf nummerierte Sätze, so verändert, dass die Aufgaben und Musterlösungen auch unabhängig davon verwendbar sind. Für Aufgaben aus der Zeit vor 2003 habe ich die Musterlösungen neu mit LaTeX gesetzt, wenn mir diese für Höhere Mathematik-Kurse für Nichtmathematiker geeignet und für die vorliegende Aufgabensammlung interessant schienen.

Nach der Beseitigung von Dopplungen blieben 2529 Aufgaben in teils mehreren Versionen aus den verschiedenen Jahren übrig. In die vorliegende Aufgabensammlung einbezogen wurden aber nur Aufgaben mit ausführlicher Musterlösung, allerdings manchmal sehr ähnliche Aufgaben. Wenn z.B. Aufgaben für Klausuren vereinfacht oder für Hausaufgaben abgewandelt wurden und für beide Versionen die Musterlösung vorlag, wurden diese als verschiedene Aufgaben aufgenommen. Einführende Beispiele sind vielfach mit einer zur Wiederholung in der Übung bestimmten kurzen Einführung in die Theorie versehen.

Für die Aufgabensammlung wurden die Aufgaben in eine inhaltlich sinnvolle Reihenfolge gebracht und die Sammlung in 25 Kapitel gegliedert. Von den für Höhere Mathematik-Kurse relevanten Themen nicht vertreten sind Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, da diese immer in separaten Kursen behandelt wurden, an deren Durchführung ich nicht beteiligt war. Ansonsten sind aber die Themen durch die Mitarbeit an Kursen verschiedener Vorlesender und für unterschiedliche Zielgruppen relativ gut abgedeckt. Bei allen Aufgaben sind die Lösungen anklickbar. Die bei den Aufgaben selbst angeführten Quellenangaben sind nicht vollständig, hierzu wird auf die obigen Ausführungen und das Quellenverzeichnis verwiesen.

Die beschriebene Strukturierung wurde im Sommersemester 2012 abgeschlossen. Unter Einbeziehung der seit 2010 neu entstandenen Aufgaben enthielt die Aufgabensammlung am Ende des Sommersemesters 2012 insgesamt 1641, am Ende des Sommersemesters 2013 dann 1710 Aufgaben mit ausführlichen Musterlösungen. Daneben lagen noch ca. 1000 weitere Aufgaben meist ohne in LaTeX gesetzte Musterlösung vor, von denen ca. 700 inhaltlich für die Verwendung in dieser Aufgabensammlung geeignet wären.

Da zahlreiche Aufgaben aus dieser Aufgabensammlung noch in der Lehre an der Technischen Universität Chemnitz verwendet werden bzw. z.B. für Hausaufgaben verwendbar sind, wird hier nur ein Auszug veröffentlicht. 364 Aufgaben sind deshalb ganz herausgelassen, dadurch kommt es zu Lücken in der Nummerierung. Außerdem wird für die meisten in den Übungen Höhere Mathematik I.1 des Wintersemesters 2013/14 und Höhere Mathematik I.2 des Sommersemesters 2013 behandelten Aufgaben sowie für die bisher nicht für Hausaufgaben genutzten Klausuraufgaben seit 2009 zumindest vorerst keine Lösung veröffentlicht. Dies betrifft 213 Aufgaben. Bei diesen sind die sonst auf die Lösungen zeigenden Links grün gekennzeichnet und zeigen auf die Übungs- bzw. Klausurblätter, die sie enthalten. Die übrigen 1133 Aufgaben sind hier mit ausführlicher Musterlösung veröffentlicht.

Hinweise zu der Aufgabensammlung nehme ich gern per Email unter haftmann@mathematik.tu-chemnitz.de entgegen.

Inhaltsverzeichnis

1 Elementarmathematik

Dreisatzrechnung

Aufgabe 1.1

Für 5 jeweils zu 80 % einer Vollzeitkraft beschäftigte Personen entsteht ein monatlicher Lohnaufwand von 9200 €. Es stehen zusätzlich monatlich Lohnmittel in Höhe von 6210 € zur Verfügung. Dafür sollen zu gleichem Stundenlohn 6 Arbeitskräfte eingestellt werden. Zu welchem Anteil können sie beschäftigt werden?

Aufgabe 1.2 **Lösung**

Von zwei Körpern gleichen Volumens hat der erste die Dichte 7.3 kg/dm^3, der zweite die Dichte 2.7 kg/dm^3. Welche Masse hat der zweite Körper, wenn der erste die Masse 4.8 kg hat?

Aufgabe 1.3 **Lösung**

Ein 40 cm langer Draht vom Durchmesser 4 mm hat die Masse 36,7 g. Wieviel Meter Draht von gleichem Material, aber vom Durchmesser 6 mm haben die Masse 90 kg?

Aufgabe 1.4 **Lösung**

Draht aus gleichem Material, aber von unterschiedlichem Durchmesser, wird mit den Angaben 120 g/m und 85 g/m angeboten. Die zuerst genannte Sorte hat einen Durchmesser von 5 mm. Welchen Durchmesser hat die zweite Sorte?

Aufgabe 1.5 **Lösung**

15 Kugeln mit einem Umfang von 70 cm wiegen 6,5 kg. Wieviel wiegen 25 Kugeln aus gleichem Material mit einem Umfang von 60 cm?

Aufgabe 1.6 **Lösung**

4 Arbeiter erledigen die Hälfte einer Arbeit in 18 Stunden. Die andere Hälfte der Arbeit soll bei gleicher Durchschnittsleistung in 8 Stunden erledigt werden. Wieviel Arbeiter werden benötigt?

Vereinfachung von Termen

Aufgabe 1.7 **Lösung**

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $3(2a-5b)-2[3(a+b)-(2a+5b)]$, b) $(3a-11b)(c-a+2b)$!

Aufgabe 1.8 **Lösung**

Kürzen Sie folgende Brüche:

a) $\dfrac{2a+6b}{3a+9b}$, b) $\dfrac{a^3b^5c^7}{a^7b^4c}$!

Aufgabe 1.10

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $20x^2\dfrac{3a}{5x}-\dfrac{a(x+6)}{3}$, b) $\dfrac{a-b}{2x}:\dfrac{b-a}{2x}$, c) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$, d) $\dfrac{2x^4+2x^3+7x^2+5x+5}{x^2+x+1}$,

e) $x^{3k+2}\,3x^{4k+7}\,7x^{n-9-7k}$, f) $\left(\dfrac{x^2y}{u^2v^2}\right)^4:\left(\dfrac{xy^3}{u^2v}\right)^2$, g) $(-a)^{-2}a$, h) $-a^{-2}a$,

i) $\sqrt[5]{32y^{10}}$, j) $\sqrt{a^2b^4\sqrt[3]{c^3}}$, k) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{24}}}$!

Aufgabe 1.14 **Lösung**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{x-y}{y-x}$, b) $\sqrt{(-x)^{-6}}$, c) $\dfrac{x^5+2x^4+6x^3+9x^2+19x+35}{x^2+2x+5}$,

d) $\dfrac{2-x}{4-x^2}+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+2x}$, e) $\dfrac{(x^2)^4-x^{(2^4)}}{x^8}+x^8$, f) $\dfrac{x^{6n+2}x^{3-n}}{(x^2)^n(x^{n+3})^2}$!

Aufgabe 1.15

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{y-x}{x-y}$, b) $\sqrt{x^2}$, c) $\left(\cos\pi+\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, d) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x^2+2}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x}$!

Aufgabe 1.16

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{x^3-y^2-z}{z+y^2-x^3}$, b) $\sqrt[24]{x^8}$, c) $\dfrac{\ln 16-\ln 4}{\ln 2}$, d) $\left(\cos 0-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$!

Aufgabe 1.18 **Lösung**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{a+b-c}{c-b-a}$, b) $\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$,

c) $\sqrt[11]{(x^2)^3\,x^{2^3}\,(-x)^{2^3}}$, d) $\dfrac{x^6+3x^5-9x^4+2x^3+30x^2-19x-56}{x^2+3x-8}$, e) $\dfrac{x^{1-n}\,x^{5n+7}}{(x^2)^{n+3}\,(x^n)^2}$,

f) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{3+x-3x^2}{x^2-3x+2}$, g) $\lg 800+3\lg\dfrac{1}{20}+\dfrac{\ln 153-\ln 17}{\ln 3}$!

Aufgabe 1.19 **Lösung**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{a^5-b^5}{b^5-a^5}$, b) $\left(\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cot\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$, c) $\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

d) $\sqrt[24]{x^{3^3}\Big/\left(x^{3^2}\left(x^3\right)^2\right)}$ e) $\dfrac{x^6-x^5+2x^4+10x^3-4x^2+16x+32}{x^3+2x+4}$, f) $\dfrac{\left(\tan^2 x\right)^3\cos^5 x}{\tan x\,\sin^4 x}$,

g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{20}{x^2+x-6}-\dfrac{3}{x^2+3x}$, h) $\dfrac{(3\ln x+2\ln xy+\ln y)\ln\dfrac{1}{x}}{\ln\dfrac{1}{x^5y^3}}$!

Aufgabe 1.21 **Lösung**

Bilden Sie für $1-\dfrac{3}{x^2-2x}+\dfrac{5}{9x-18}-\dfrac{7}{3x}$ den Hauptnenner und führen Sie die Addition aus!

Aufgabe 1.23 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{2x-1}{2-x}=\dfrac{7}{3x+4}$!

Aufgabe 1.24 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{x+1}{2x-4}=\dfrac{x+2}{x-2}$!

Lösen von Gleichungen

Aufgabe 1.25 **Lösung**

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $2-3(7-4x)=5x-7+2(4x+3)$, b) $x(x-15)(x+23)=0$, c) $x^2-21x+110=0$,

d) $\dfrac{6x-1}{3x+2}=\dfrac{2x}{x-1}$, e) $\lg(3x+4)=3$, f) $\sqrt{x+16}-\sqrt{x-12}=2$, g) $\cos 4x=1$!

Aufgabe 1.31 **Lösung**

Auf einer 152 km langen Straße von A nach B fährt 12.00 Uhr von A ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h in Richtung B und 12.30 Uhr von B ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h in Richtung A. Wann begegnen sich die beiden Fahrzeuge?

Quadratische Gleichungen und Polynome

Aufgabe 1.32 **Lösung**

Was versteht man unter quadratischer Ergänzung? Geben Sie ein Beispiel für eine Aufgabenstellung an, bei der ihre Anwendung nützlich ist!

Aufgabe 1.33 **Lösung**

Bestimmen Sie ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_2\neq 0$! Welcher Zusammenhang besteht zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen?

Aufgabe 1.34 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichungen a) $8x^2-14x=9$, b) $x^4-\frac{7}{4}x^2-\frac{9}{8}=0$!

Aufgabe 1.35 **Lösung**

$x=-2$ und $x=6$ sind Nullstellen des Polynoms $x^4-5x^3-38x^2+132x+360$. Ermitteln Sie die beiden anderen Nullstellen!

Prozentrechnung

Aufgabe 1.38 **Lösung**

Am 01.01.2001 wurden im öffentlichen Dienst Ostdeutschlands die Vergütungen von 87 % auf 88,5 % der Westbezüge erhöht. Um wieviel Prozent erhöhten sich dabei die Vergütungen?

Aufgabe 1.39 **Lösung**

Am 01.01.2002 wurden im öffentlichen Dienst Ostdeutschlands die Vergütungen von 88.5 % auf 90 % der Westbezüge erhöht. Um wieviel Prozent erhöhten sich dabei die Vergütungen?

Aufgabe 1.41 **Lösung**

Am 01.01.2008 wurden die monatlichen Tabellenentgelte der Beschäftigten der ostdeutschen Länder in den unteren Entgeltgruppen von 92,5 % auf 100 % der bisherigen Westentgelte erhöht, die ihrerseits aber zum gleichen Termin um 2,9 % erhöht wurden. Letztere Erhöhung wurde dann im Osten am 01.05.2008 nachgeholt.

a) Wie groß war die relative Erhöhung der Entgelte der genannten Beschäftigten am 01.01. 2008, wie hoch war sie am 01.05.2008?
b) Um wieviel Prozent war das Maientgelt 2008 gegenüber dem Dezemberentgelt 2007 gestiegen?
c) Wieviel Prozent des Westentgelts bezogen die genannten Beschäftigten von Januar bis April 2008?

Aufgabe 1.42

Ein Elektronikmarkt gewährt in der ersten Verkaufswoche des Jahres auf bestimmte Produkte einen Rabatt von 19 %. Der so bestimmte tatsächliche Bruttoverkaufspreis enthält 19 % Umsatzsteuer auf den tatsächlichen Nettoverkaufspreis. Bestimmen Sie für ein derartiges Produkt, das unrabattiert 119 € kostet, den tatsächlichen Brutto- und Nettoverkaufspreis sowie die Umsatzsteuer!

Aufgabe 1.43 **Lösung**

Eine Fachmarktkette warb damit, am ersten Verkaufstag eines Jahres für ihre Kunden die Mehrwertsteuer, die seinerzeit 16 % Mehrwertsteuer betrug, zu übernehmen, d.h. sie verkaufte zu dem Preis, der normalerweise Nettoverkaufspreis ohne Mehrwertsteuer war.

a) Wie hoch war der Rabatt?
b) Auch für Verkäufe an dem genannten Tag entstanden natürlich 16 % Mehrwertsteuer. Wieviel Mehrwertsteuer musste an diesem Tag für den Verkauf einer Ware, die normalerweise einen Bruttoverkaufspreis von 100 € hat, ausgewiesen werden?

Aufgabe 1.45 **Lösung**

Für eine Ware wurde ein Rabatt von 15 % gewährt. Unter Berücksichtigung dieses Rabatts musste der Käufer 14.78 DM zzgl. 15 % MWSt. bezahlen. Welchen Betrag hatte der Käufer dabei gegenüber dem ursprünglich zu zahlenden Betrag einschließlich der gesparten Mehrwertsteuer gespart?

Aufgabe 1.46 **Lösung**

Am 01.01.2007 stieg der allgemeine Umsatzsteuersatz von 16 % auf 19 % des Nettoverkaufspreises, während der ermäßigte Umsatzsteuersatz bei 7 % verblieb.

a) Wie groß war die relative Erhöhung des allgemeinen Umsatzsteuersatzes?
b) Angenommen, ein Verkäufer konnte die Erhöhung des allgemeinen Umsatzsteuersatzes voll an den Kunden weitergeben. Um wieviel Prozent stieg der Bruttoverkaufspreis?
c) Angenommen, der Verkäufer konnte die Erhöhung des allgemeinen Umsatzsteuersatzes überhaupt nicht an den Kunden weitergeben. Um wieviel Prozent fiel der Nettoverkaufspreis?
d) Jemand nimmt an, dass seine monatlichen Bruttoausgaben zu je 25 % Ausgaben betreffen, die nicht umsatzsteuerpflichtig sind, dem ermäßigten Umsatzsteuersatz unterliegen, dem allgemeinen Umsatzsteuersatz unterliegen und bei denen die Umsatzsteuererhöhung vom Verkäufer voll weitergegeben werden konnte bzw. dem allgemeinen Umsatzsteuersatz unterliegen und bei denen die Umsatzsteuererhöhung vom Verkäufer überhaupt nicht weitergegeben werden konnte. Um wieviel Prozent stiegen die monatlichen Bruttoausgaben durch die Umsatzsteuererhöhung, wenn unterstellt wird, dass sich das Verbrauchsverhalten durch die Steuererhöhung nicht geändert hat?

Aufgabe 1.47 **Lösung**

Das Wahlprogramm von CDU/CSU zur Bundestagswahl am 18.09.2005 sah eine Umsatzsteuererhöhung von 16 % auf 18 % vor.

a) Wie groß wäre die relative Erhöhung der Umsatzsteuer gewesen?
b) Angenommen, ein Verkäufer hätte diese Steuererhöhung voll an den Kunden weitergeben können. Um wieviel Prozent wäre der Bruttoverkaufspreis gestiegen?
c) Angenommen, der Verkäufer hätte diese Steuererhöhung überhaupt nicht an den Kunden weitergeben können. Um wieviel Prozent wäre der Nettoverkaufspreis gesunken?

Aufgabe 1.49 **Lösung**

Das Verhältnis der Differenz von Verkaufs- und Einkaufspreis zum Verkaufspreis einer Ware wird als Handelsspanne bezeichnet. Eine Faustregel des Handels lautet, dass bei 10 % Preisnachlass der Umsatz um 70 % steigen muss, um den gleichen Gewinn zu erzielen. Von welcher Handelsspanne beim nicht rabattierten Preis muss man ausgehen, um zu dieser Aussage zu gelangen?

Aufgabe 1.50 **Lösung**

Der Anteil der Nebenkosten an der Bruttomiete einer Wohnung betrug 40 %. Diese Bruttomiete wurde wegen eines Mangels um 30 % gemindert. Um wieviel Prozent steigt die vom Mieter zu leistende Zahlung nach Beseitigung des Mangels

a) bei sonst unveränderten Bedingungen bzw.
b) wenn sich die Nebenkosten zum gleichen Zeitpunkt um 10 % erhöhen?

Aufgabe 1.51 **Lösung**

An Hand eines Warenkorbes wurde festgestellt, dass sich die Preise gegenüber dem Vergleichszeitpunkt vor zwei Jahren um 3,16 % erhöht haben.

a) Wieviel musste für den Warenkorb vor zwei Jahren bezahlt werden, wenn jetzt dafür 1000 € zu bezahlen sind?
b) Wie hoch ist die durchschnittliche jährliche Inflationsrate?

Umrechnung von Einheiten

Aufgabe 1.52

Rechnen Sie folgende Angaben um:

a) $0{,}4\ \mathrm{hl/s}$ in $\mathrm{m^3/h}$,
b) $20\ \mathrm{yd/s}$ in $\mathrm{km/h}$ (1 yd (yard) = 36 in (inches), s. Aufgabe 1.55),
c) $0{,}0263\ \mathrm{lb/in^2}$ in $\mathrm{kg/m^2}$ (1 lb (international avoirdupois pound) = 453,59237 g)!

Aufgabe 1.53 **Lösung**

Rechnen Sie eine Beschleunigung von 11 $\mathrm{m/s^2}$ in Seemeilen pro Stundenquadrat und in Lichtjahre pro (julianische) Jahrequadrat um!

Aufgabe 1.54 **Lösung**

Rechnen Sie eine Energie von 0,64 Kilokalorien in Pferdestärkenstunden und in Tonnenhektar pro Tagequadrat um!

Aufgabe 1.55

Ein von einer Digitalkamera mit einer Auflösung von 8 Megapixel im Seitenverhältnis 4 : 3 aufgenommenes Bild soll mit einer relativen Auflösung von 600 dpi gedruckt werden. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Ausdrucks in Zentimetern! Die Begriffe Pixel und Punkt (dot) sollen dabei hier gleichgesetzt werden. Für die Einheit Zoll wird der 1958 durch eine britisch-amerikanische Vereinbarung festgelegte „international inch“ mit einer Länge von 2,54 cm verwendet.

Wer sich für die Abgrenzung zwischen den Begriffen Pixel und Punkt genauer interessiert, findet Näheres z.B. in dem Wikipediaartikel Punktdichte (Relative Auflösung).

Aufgabe 1.56 **Lösung**

Ein Textverarbeitungsprogramm hat als Voreinstellungen für die Seitengröße

(A) für den amerikanischen Markt das Letterformat (8,5 x 11″) mit Seitenrändern von je 1″ und

(E) für den europäischen Markt das A4-Format (21 x 29,7 cm) mit Seitenrändern links, rechts und oben von 2,5 cm, unten von 2 cm.

a) Welche Fläche haben die Satzspiegel in den beiden Versionen in cm^2?

b) Ein längeres Dokument, das auch Zeichnungen im Maßstab 1:100 und Bilder mit einer Auflösung von 300 dpi enthält, ist im Format (A) angefertigt worden, soll aber im Format (E) ausgegeben werden. Da eine Neuformatierung zu aufwändig ist, sollen die Seiten proportional so angepasst werden, dass der zur Verfügung stehende Platz so gut wie möglich genutzt wird. Auf wieviel Prozent ändert sich dabei die tatsächlich genutzte Fläche? Welchen Maßstab bekommen die Zeichnungen, welche Auflösung die Bilder, wenn deren Pixelzahl unverändert bleibt?

c) Beantworten Sie die gleichen Fragen für den Fall, dass das Dokument im Format (E) angefertigt und im Format (A) ausgegeben werden soll!

Aufgabe 1.57 **Lösung**

Beim Druck und in entsprechenden Anwendungsprogrammen wird als Einheit oft der DTP-Punkt verwendet, dabei gilt 1 in $=$ 72 pt.

Die Papierformate der A-Reihe sind so festgelegt, dass das Format A0 den Flächeninhalt von $1\,\mathrm{m}^2$ hat und bei Halbierung der längeren Seite jedes Mal ein Blatt mit gleichem Seitenverhältnis entsteht, das dann die um 1 höhere Nummer in der Reihe erhält.

a) Stellen Sie in einer Skizze dar, wie sich das Format A4 aus dem Format A0 herleitet!

b) Leiten Sie her, wie groß das Seitenverhältnis sein muss!

c) Berechnen Sie die Seitenlängen des A4-Formates in DTP-Punkten!

Aufgabe 1.58 **Lösung**

In den USA ist es üblich, das Papiergewicht in Pfund pro Ries (500 Bogen) vor dem Zuschnitt in die Verkaufsform anzugeben, wobei für das dem A4-Format grob entsprechende Letterformat (8,5 $\times$ 11 Zoll) gängigerweise die Bögen in vier Teile geschnitten werden.

a) Rechnen Sie ein Papiergewicht von 20 lb in die in Europa übliche Einheit g/m^2 um!

b) Wie stark ist ein Blatt solchen Papiers in Millimeter, wenn das Papier eine Dichte von 50 lb/cu ft (Pfund pro Kubikfuß, 1 ft = 12 in) hat?

Aufgabe 1.59 **Lösung**

Der Body-Mass-Index berechnet sich als $\mathrm{BMI} = \frac{\text{Körpergewicht}}{(\text{Körpergröße})^2}$. Im angelsächsischen Raum erhält man bei Verwendung der traditionellen Maßeinheiten Pfund (lb) und Zoll (in) einen Wert in $\mathrm{lb/in}^2$. Um die in gängigen Tabellen in $\mathrm{kg/m}^2$ angegebenen Normwerte des BMI verwenden zu können, müssen die Zahlenwerte von $\mathrm{lb/in}^2$ durch Multiplikation mit einem Faktor C in $\mathrm{kg/m}^2$ umgerechnet werden.

C ist einer der Werte 0,00142; 0,142; 7,03 oder 703. Begründen Sie anhand der Umrechnungsfaktoren $1\,\mathrm{in} = 2{,}54\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{lb} \approx 453{,}6\,\mathrm{g}$ ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel, welcher der angegebenen Werte für C richtig ist!

Aufgabe 1.60 **Lösung**

Im Hexadezimalsystem seien die Ziffern mit 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F bezeichnet.

a) Stellen Sie die Dezimalzahl 47 hexadezimal dar!

b) Ermitteln Sie 2A1 + 1FB !

Summen- und Produktzeichen

Aufgabe 1.61

Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	2	1	4	3	–2	1
b_n	15	3	1	2	0	4

a_{ij} :

$i \setminus j$	0	1	2
1	2	1	5
2	3	–1	2

Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{3} a_n b_n,\ \sum\limits_{i=0}^{3}(a_i b_i + 1),\ \sum\limits_{i=3}^{6} i a_{i-1},\ \sum\limits_{i=3}^{6} i \sum\limits_{j=4}^{5} a_j,\ \prod\limits_{i=2}^{5} a_i,\ \prod\limits_{i=2}^{5} a_0$ und $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=0}^{2} a_{ij}$!

Aufgabe 1.64 **Lösung**

Gegeben seien folgende Größen:

j	0	1	2	3	4	5
a_j	5	4	4	3	2	1
b_{1j}	11	10	-5	10	12	13
b_{2j}	1	-2	3	-4	5	-6
b_{3j}	0	1	2	0	1	2

Berechnen Sie

$$\sum_{j=0}^{5} a_j,\ \sum_{i=1}^{5}(a_i - 1),\ \sum_{i=1}^{5} a_{i-1},\ \sum_{k=0}^{3} a_2,\ \sum_{m=1}^{4} m a_m,$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} b_{ij},\ \sum_{k=0}^{5} b_{2k} b_{3k},\ \sum_{l=1}^{2}\sum_{m=0}^{2} b_{lm} a_{m+3}\ !$$

Aufgabe 1.65 **Lösung**

Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	6	5	4	3	2	1
b_{1n}	7	8	9	10	11	12
b_{2n}	-1	-2	-3	-4	-5	-6
b_{3n}	1	-1	1	-1	1	-1

Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{2} a_{2n},\ \sum_{i=0}^{4}(a_i + 1),\ \sum_{i=0}^{4} a_{i+1},\ \sum_{i=0}^{4} a_i + 1,\ \sum_{i=1}^{3} b_{ii},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{5} b_{ij},\ \sum_{k=1}^{3} b_{3k} b_{k5},\ \sum_{l=1}^{3}\left(l \sum_{m=l+1}^{4} b_{lm} \right)\ !$$

Aufgabe 1.66 **Lösung**

Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
c_n	1	1	2	2	3	3
d_{n1}	11	12	13	14	15	16
d_{n2}	-1	-2	-3	-4	-5	-6
d_{n3}	1	0	1	0	1	0

Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{5} c_n,\ \sum_{i=0}^{4}(c_i + 1),\ \sum_{i=0}^{4} c_{i+1},\ \sum_{i=0}^{3} i c_i,\ \sum_{i=3}^{5} c_3,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} d_{ij},\ \sum_{k=0}^{5} d_{k2} d_{k3},\ \sum_{l=0}^{3} d_{l1}\left(\sum_{m=2}^{3} d_{lm} \right)\ !$$

Aufgabe 1.67 **Lösung**

Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3
a_n	9	10	11	12
b_{1n}	5	6	7	8
b_{2n}	1	2	3	4

Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{3} a_n,\ \sum\limits_{i=0}^{3}(a_i + 1),\ \sum\limits_{i=0}^{2} i a_i,\ \sum\limits_{i=0}^{2} a_0,$

$\prod\limits_{n=0}^{3} a_n,\ \prod\limits_{i=0}^{2} a_0,\ \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=0}^{3} b_{ij}$ und $\sum\limits_{i=0}^{3}\sum\limits_{j=1}^{2} b_{ji}$!

Aufgabe 1.69

Begründen Sie, warum die Veränderung des Preisniveaus vom Basisjahr B zum Berichtsjahr A durch den (Laspeyres-)Preisindex

$$I_B^A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^A q_i^B}{\sum_{i=1}^{n} p_i^B q_i^B}$$

beschrieben werden kann, wobei i ein Laufindex für verschiedene Waren, p_i deren Preise und q_i deren Mengen seien!

Aufgabe 1.70 **Lösung**

Berechnen Sie für die Daten

	2007		2009	
Ware	Preis	Menge	Preis	Menge
Brötchen	0,40	300	0,43	365
Brot	1,90	50	2,00	43
Kuchen	0,80	100	0,95	85

den Laspeyres-Preisindex (s. Aufgabe 1.69) von 2009 bezogen auf das Basisjahr 2007 sowie die durchschnittliche jährliche Preissteigerung!

Aufgabe 1.71 **Lösung**

Ein Geschäft erzielt in den Monaten eines Jahres folgende Umsätze:

Monat i	Umsatz U_i
1	3000 €
2	2800 €
3	3500 €
4	2500 €
5	3000 €
6	2000 €
7	1000 €
8	1500 €
9	3000 €
10	5000 €
11	8000 €
12	11000 €

Berechnen Sie $\frac{\sum_{i=10}^{12} U_i}{\sum_{i=1}^{12} U_i}$! Wie kann diese Größe interpretiert werden?

Aufgabe 1.72 **Lösung**

Zwischen den Orten A und B bestand 8 Stunden lang ein Bus-Pendelverkehr im 10-Minuten-Takt. Dafür waren 6 Busse im Einsatz, die sich nicht überholten und jeweils 30 Minuten nach der Abfahrt an dem einen Ort am anderen zur Rückfahrt starteten. Es bezeichne a_{ijk} die Anzahl der Fahrgäste im i-ten Bus ($i = 1, \ldots, 6$) beim j-ten Umlauf ($j = 1, \ldots, 8$) in der Richtung k, wobei $k = 1$ die Fahrt von A nach B und $k = 2$ die Fahrt von B nach A bezeichnet. Drücken Sie folgende Sachverhalte mithilfe des Summenzeichens aus:

a) Insgesamt wurden 2219 Fahrgäste befördert.
b) Es wurden mehr Fahrgäste von A nach B als von B nach A befördert.
c) In der Richtung von A nach B waren die Busse durchschnittlich mit 23,9 Fahrgästen besetzt.
d) Mit dem fünften Bus wurden insgesamt 455 Fahrgäste befördert.
e) Beim zweiten Umlauf wurden mehr als doppelt so viele Fahrgäste befördert als beim ersten Umlauf.
f) Beim achten Umlauf fuhr der vierte Bus leer hin und zurück.

Aufgabe 1.73 **Lösung**

An einer Klausur, bei der 40 Punkte zu erreichen waren und bei der nur ganzzahlige Punkte vergeben wurden, nahmen Studenten aus 6 verschiedenen Studiengängen teil. Zum Bestehen waren 16 Punkte erforderlich. Es bezeichne a_{ij} die Anzahl der Studenten des Studienganges i $(i = 1, 2, \dots, 6)$, die j Punkte erreichten. Drücken Sie folgende Sachverhalte mithilfe des Summenzeichens aus:

a) An der Klausur nahmen insgesamt 411 Studenten teil.
b) 222 Teilnehmer haben die Klausur nicht bestanden.
c) 3 Klausurteilnehmer schafften keinen einzigen Punkt.
d) 86 Klausurteilnehmer gehörten zum Studiengang 3.
e) Vom Studiengang 5 haben 52 Teilnehmer bestanden.
f) $43{,}1\,\%$ der Teilnehmer aus dem Studiengang 6 haben die Klausur nicht bestanden.
g) Die Teilnehmer aus dem Studiengang 1 erreichten durchschnittlich $15{,}1$ Punkte.

Aufgabe 1.75 **Lösung**

m Ziegeleien beliefern über einen Zeitraum von einem Jahr n Baustellen. Es bezeichne B_{ij} den Bedarf an Ziegelsteinen von Baustelle i im Monat j sowie K_{ij} die Lieferkapazität der Ziegelei i im Monat j. Drücken Sie folgende Sachverhalte unter Verwendung des Summenzeichens in Formeln aus:

a) Die Baustelle 5 benötigt im II. Quartal 1 Mio. Steine.
b) Im Monat November haben die Ziegeleien eine Gesamtlieferkapazität von 1,5 Mio. Steinen.
c) Im Oktober macht die Lieferkapazität von Ziegelei 3 mehr als 40 % der Kapazität aller Ziegeleien aus.
d) Der Bedarf aller Baustellen außer 1 und 2 im Mai kann allein durch Ziegelei 1 gedeckt werden.
e) Im Februar reichen die Lieferungen der Ziegeleien 3 bis 5 nicht aus, den Bedarf der Baustellen 4 bis 7 zu decken.
f) Mehr als die Hälfte des Gesamtjahresbedarfs aller Baustellen wird im II. Halbjahr von den Baustellen 1 bis 6 benötigt.

Aufgabe 1.77 **Lösung**

Ein Geschäft hat n Filialen. Es bezeichnet den im Kalendermonat j $(j=1,\dots,12)$ in der Filiale i $(i=1,\dots,n)$ erzielten Umsatz mit U_{ij} und die in diesem Monat in dieser Filiale entstandenen Kosten mit K_{ij}. Drücken Sie folgende Sachverhalte unter Verwendung des Summenzeichens in Formeln aus:

a) Der Jahresgewinn des Geschäfts beträgt 100 000 €.
b) 40 % des Jahresumsatzes werden in den Filialen 1 und 2 erwirtschaftet.
c) Die Filiale 3 erzielt mehr als die Hälfte ihres Jahresumsatzes im IV. Quartal.
d) Die Filiale 4 hat einen doppelt so hohen Jahresumsatz wie die Filiale 5.
e) Die Filiale 5 ist im I. Halbjahr defizitär.

Aufgabe 1.79 **Lösung**

Zur Umsatzanalyse in Abhängigkeit von der Tageszeit erfasst ein Handelsunternehmen mit l Filialen F_i $(i = 1, \dots, l)$ seinen Tagesumsatz nach Artikeln A_j $(j = 1, \dots, m)$ und Verkaufsstunden T_k, letztere reichen jeweils von k.00 Uhr bis k.59 Uhr. Es sei p_j der Verkaufspreis einer Einheit des Artikels A_j und a_{ijk} die Anzahl der in der Filiale F_i in der Stunde T_k verkauften Einheiten des Artikels A_j. Drücken Sie unter Verwendung des Summenzeichens aus:

a) den Tagesumsatz der Filiale F_i,
b) den Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,
c) den Anteil des ab 19.00 Uhr erzielten Umsatzes am Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,
d) den Umsatz, den die Filialen F_2, F_3 und F_4 zusammen ab 19.00 Uhr erzielen,
e) den Umsatz, den das Gesamtunternehmen vor 10.00 Uhr an den Artikeln A_4, A_5, A_6 und A_7 erzielt!

Aufgabe 1.80 **Lösung**

Ein Unternehmen stellt in m Betriebsstätten n Erzeugnisse her, wobei jedes Erzeugnis E_j $(j = 1, \dots, n)$ in jeder Betriebsstätte B_i $(i = 1, \dots, m)$ gefertigt werden kann. Es wird die Produktion eines Kalenderjahres betrachtet, $t = 1, \dots, 12$ seien die Monate. Ferner sei
p_j der Verkaufspreis einer Einheit des Erzeugnisses E_j,
k_{ij} die Kosten der Fertigung einer Einheit des Erzeugnisses E_j in der Betriebsstätte B_i,
x_{ijt} die Zahl der Einheiten E_j, die in B_i im Monat t hergestellt werden,
Gewinn = Verkaufserlös − Fertigungskosten.

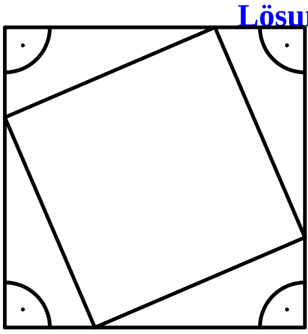
Drücken Sie unter Verwendung des Summenzeichens aus

a) wie viele Einheiten des Erzeugnisses E_j in dem Jahr insgesamt hergestellt werden,
b) welcher Verkaufspreis aus den im II. Quartal in der Betriebsstätte B_i gefertigten Einheiten des Erzeugnisses E_j erlöst werden kann,
c) welcher Gewinn aus der gesamten Jahresfertigung der Betriebsstätte B_i erzielt wird, wenn alle Erzeugnisse verkauft werden,
d) welcher Gewinn aus der gesamten Jahresfertigung an Erzeugnissen E_2 und E_3 erzielt wird, wenn alle Erzeugnisse verkauft werden!

Elementargeometrie

Aufgabe 1.81 **Lösung**

Beweisen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Satz des Pythagoras!



Aufgabe 1.83 **Lösung**

Ermitteln Sie durch Betrachtung der Winkel im gleichseitigen bzw. im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck den Sinus, Kosinus und Tangens von 30°, 45° und 60° !

Aufgabe 1.84 **Lösung**

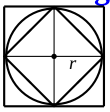
Wie kann man den Mittelpunkt eines kreisrunden Bierdeckels mit einem Stift sowie

a) Zirkel und Lineal bzw.
b) einem (rechtwinkligen) Zeichendreieck

bestimmen?

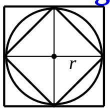
Aufgabe 1.85 **Lösung**

π ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises. Zeigen Sie mithilfe der nebenstehenden Abbildung, dass $2{,}8 < \pi < 4$ gilt!



Aufgabe 1.86 **Lösung**

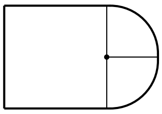
r sei der Radius eines Kreises. Angenommen, Sie sind sich unsicher, ob für den Flächeninhalt des Kreises $A = \pi r^2$, $A = \frac{\pi}{4} r^2$ oder $A = 2\pi r^2$ gilt. Entscheiden Sie sich mithilfe der nebenstehenden Abbildung für eine dieser drei Formeln!



Aufgabe 1.89 **Lösung**

Ein geradliniger Weg führt in der Mitte zwischen zwei Pfeilern rechtwinklig unter einer Brücke hindurch. Die beiden Pfeiler haben einen Abstand von 80 Metern. Ein sich auf dem Weg befindender Betrachter stellt durch Peilung fest, dass er sie in einem Winkel von 20° sieht. Wie weit ist er von der Brücke entfernt?

Aufgabe 1.91 **Lösung**



In einem Möbelhaus wird ein Tisch bestellt, der die Form eines Quadrates mit Seitenlänge 80 cm haben soll, an dessen eine Seite ein Halbkreis angesetzt ist. Für die Berechnung des Preises muss der Verkäufer u.a. die Kantenlänge des Tisches berechnen. Ermitteln Sie diese!

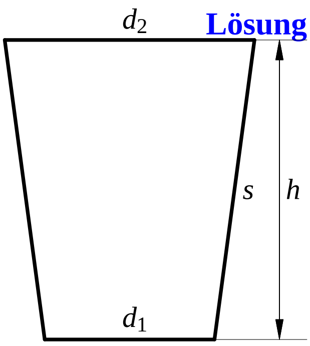
Aufgabe 1.92 **Lösung**

Die Erde hat am Äquator einen Umfang von ca. 40 075 km. Um diesen sei ein Seil genau dieser Länge gespannt. Nun werde das Seil um einen Meter verlängert und so gespannt, dass es von der Erdoberfläche einen konstanten Abstand hat. Bestimmen Sie diesen Abstand!

Aufgabe 1.93 **Lösung**

Der in der nebenstehenden Schnittzeichnung dargestellte Abfallbehälter habe die Form eines geraden Kegelstumpfes mit folgenden Maßen: $d_1 = 17\,\text{cm}$, $d_2 = 25\,\text{cm}$, $h = 30\,\text{cm}$.

a) Berechnen Sie das Fassungsvermögen des Behälters in Litern!
b) Ermitteln Sie die Länge der Mantellinie s (siehe Skizze)!
c) Wie hoch ist der Materialverbrauch für die Herstellung eines solchen Behälters in Quadartmetern?



2 Logik

Aufgabe 2.1

Handelt es sich bei folgenden Formulierungen um Aussagen? Bestimmen Sie ggf. den Wahrheitswert!

a) Kopernikus war ein Astronom. b) O du fröhliche!
c) Mampu ist kakatylisch. d) Auf dem Jupiter gibt es keine Spuren von Leben.
e) $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

Aufgabe 2.2

Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen:

a) $3 < 4 \wedge 4 < 3$, b) $3 < 4 \vee 4 < 3$, c) $3 < 4 \wedge \neg(4 < 3)$, d) $3 < 4 \Leftrightarrow \neg(4 < 3)$,
e) Für alle reellen Zahlen x gilt $x > 3 \Leftrightarrow \neg(x < 3)$.
f) Es gibt ein reelles x, für das $\neg(x < 3) \wedge \neg(x > 3)$ gilt.
g) $3 < 4 \wedge$ Jupiter ist ein Planet.
h) $3 < 4 \vee$ Der Mond ist aus Käse.
i) Wenn meine Großmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus.
j) Für alle reellen Zahlen x hat $\frac{x}{|x|}$ den Betrag 1.
k) Wenn es sich bei einem Vieleck um ein Dreieck handelt, so beträgt die Winkelsumme $180°$.

Aufgabe 2.3

a) Das Mietenüberleitungsgesetz vom 6.6.1995 (BGBl I S. 748) erlaubte unter gewissen Voraussetzungen eine Mieterhöhung von 20 % und regelte dann:
Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der nicht mit einer Zentralheizung und einem Bad ausgestattet ist.

b) Nachdem die Vorschrift von Vermietern, Mietern und Gerichten unterschiedlich interpretiert worden war, änderte der Bundestag diesen Satz. Hierüber meldete die „Freie Presse“ am 2.12.1995 auf der Titelseite:
Der Bundestag hat nun das „und“ gegen ein „oder“ ausgetauscht.

c) Tatsächlich jedoch wurde der zitierte Satz durch das Gesetz zur Änderung des Gesetzes zur Regelung der Miethöhe vom 15.12.1995 (BGBl I S. 1722) geändert in:
Der Erhöhungssatz ermäßigt sich auf 15 vom Hundert bei Wohnraum, bei dem die Zentralheizung oder das Bad oder beide Ausstattungsmerkmale fehlen.

Formalisieren und analysieren Sie die Zitate vom Standpunkt der Aussagenlogik!

Aufgabe 2.4 **Lösung**

Bei der 5. Sächsischen Landesgartenschau in Reichenbach 2009 betrugen die Eintrittspreise für Tages-Einzelbesucher 13 €, bei Anreise mit ÖPNV 11 €. Vergünstigungen gab es für „Begünstigte", für die der Preis generell 10 €, sowie für Kinder, Jugendliche und Studenten, für die der Preis generell 3 € betrug. Für Kinder unter 6 Jahre musste kein Eintritt bezahlt werden.

Stellen Sie durch Verknüpfung der Aussagen

b: Besucher war „Begünstigter" j: Besucher war Kind, Jugendlicher oder Student
k: Besucher war Kind unter 6 Jahren o: Besucher war mit ÖPNV angereist

mit den Junktoren $\neg$, $\vee$ und $\wedge$ dar, in welchen Fällen der Eintrittspreis für Tages-Einzelbesucher 13 € sowie in welchen Fällen er 11 € betrug! Wenden Sie auf die von Ihnen angegebenen Darstellungen die de Morganschen Regeln an und geben Sie mit ihrer Hilfe jeweils eine weitere Darstellung an!

Aufgabe 2.5 **Lösung**

Für welche der folgenden Intervalle A ist die Aussage $x \in A \Longrightarrow \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ wahr:

a) $A = (-\infty, 0)$, c) $A = (0, \infty)$, e) $A = (1, \infty)$?
b) $A = [0, \infty)$, d) $A = [1, \infty)$,

Aufgabe 2.6 **Lösung**

Zeigen Sie, dass für alle Aussagen x, y, z das Distributivgesetz $x \wedge (y \vee z) \Longleftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ gilt!

Aufgabe 2.7 **Lösung**

$*$ und $\circ$ seien zwei verschiedene der Operationen $\wedge$, $\vee$ und $\Leftrightarrow$. In welchen Fällen gilt das Distributivgesetz $a * (b \circ c) \Longleftrightarrow (a * b) \circ (a * c)$, in welchen nicht?

(Dallmann, H. und Elster, K.-H.: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Band I. Jena: Gustav Fischer 1987, S. 32 und 780: Übungsaufgabe 7 aus Abschnitt 1.7.)

Aufgabe 2.8 **Lösung**

a) Vereinfachen Sie die Aussage $a \vee (\neg a \wedge b)$!
b) Drücken Sie die Aussage und ihre Vereinfachung mit umgangssprachlichen Mitteln aus!

Aufgabe 2.9

Bestimmen Sie den Wahrheitswert des Ausdrucks $p \wedge [(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)]$ in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von p und q und vereinfachen Sie den Ausdruck!

Aufgabe 2.10 **Lösung**

Vereinfachen Sie die Aussage $p \vee [(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)]$!

Aufgabe 2.11 Lösung

Negieren Sie folgende Aussage: „Zu jedem Mann gibt es eine Frau, die ihn nicht liebt.“

(Wenzel, H.; Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner. 1. (einbändige) Aufl. 2005 (zuvor 2 Bände), Aufgabe 1.6b, S. 9)

Aufgabe 2.12

Beweisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle den Satz von der Kontraposition (Prinzip des indirekten Beweises): $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$!

Aufgabe 2.14

Es gelte folgende Implikation:

{Die Ware ist verdorben.}⇒{Die Ware darf nicht verkauft werden.}

Welche Folgerungen können getroffen werden, wenn folgende Aussagen wahr sind:

a) Die Ware ist verdorben.
b) Die Ware ist nicht verdorben.
c) Die Ware darf verkauft werden.
d) Die Ware darf nicht verkauft werden.

(Wenzel, H.; Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner. 1. (einbändige) Aufl. 2005 (zuvor 2 Bände), Aufgabe 1.2, S. 9)

Aufgabe 2.15 Lösung

p und q seien folgende Aussagen: p: Die Person wird in das Stadion eingelassen.
q: Die Person hat eine Eintrittskarte.

Am Einlass eines Stadions gelten folgende Regeln:

- Wer keine Eintrittskarte vorweisen kann, wird nicht eingelassen.
- Wer betrunken ist, wird nicht eingelassen.
- ...

a) Notieren Sie die erste Regel formal! Welche Bedingung ist notwendig, welche Bedingung ist hinreichend?
b) Welche Schlussfolgerungen kann man daraus ziehen, dass jemand eine Eintrittskarte hat?
c) Welche Schlussfolgerungen kann man daraus ziehen, dass jemand in das Stadion eingelassen worden ist?

Aufgabe 2.16 Lösung

a und b seien folgende Aussagen:
a: $\sqrt{2}$ ist irrational.
b: Die Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Es sei bekannt, dass die Aussage b wahr ist. Führen Sie den indirekten Beweis dafür, dass $\sqrt{2}$ irrational ist!

Aufgabe 2.17 **Lösung**

Es ist bekannt, dass der Besucher bei schönem Wetter mit dem Fahrrad kommt. Aus welchen der folgenden Aussagen können deshalb Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?

a) Der Besucher kommt mit dem Fahrrad.
b) Der Besucher kommt nicht mit dem Fahrrad.
c) Das Wetter ist schön
d) Das Wetter ist nicht schön.

Aufgabe 2.18 **Lösung**

Einige Krankenschwestern sind teilzeitbeschäftigt. Krankenschwestern, die Nachtdienst haben, haben immer eine volle Stelle. Begründen Sie mit den Regeln der mathematischen Logik, welche der folgenden Schlussfolgerungen wahr bzw. falsch sind:

a) Krankenschwestern mit einer vollen Stelle haben auch Nachtdienst.
b) Krankenschwestern haben dann und nur dann Nachtdienst, wenn sie eine volle Stelle haben.
c) Es gibt einige Krankenschwestern, die nachts nicht arbeiten.

(nach FR-Info-Grafik nach Hesse/Schrader, Testtraining 2000plus, Eichborn-Verlag. Frankfurter Rundschau 16.01.2004, Berichtigung Frankfurter Rundschau 23.01.2004)

Aufgabe 2.19 **Lösung**

Gegeben sei die Aussage: *„Ein Regenbogen kann nur dann zu sehen sein, wenn es regnet und die Sonne scheint."*

a) Die Aussage soll als Implikation dargestellt werden. Geben Sie die Prämisse und die Konklusion der Implikation an!
b) Formulieren Sie die Aussage mit *„ist hinreichend dafür, dass"* sowie mit *„ist notwendig dafür, dass"*.
c) Geben Sie die Kontraposition zu der Aussage so an, dass in der Prämisse der Kontraposition bei formaler Notation keine Klammern gesetzt werden müssten!

Aufgabe 2.20 **Lösung**

Gegeben sei die Aussage: *„Die Gäste kommen nur, wenn es warm ist und nicht regnet."*

a) Die Aussage soll als Implikation dargestellt werden. Geben Sie die Prämisse und die Konklusion der Implikation an!
b) Formulieren Sie die Aussage mit *„ist hinreichend dafür, dass"* sowie mit *„ist notwendig dafür, dass"*.
c) Geben Sie die Kontraposition zu der Aussage so an, dass in der Prämisse der Kontraposition bei formaler Notation keine Klammern gesetzt werden müssten!

Aufgabe 2.21 **Lösung**

Es gelte die Implikation „Wenn es regnet, ist die Straße nass". Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?

a) Es regnet.
b) Es regnet nicht.
c) Die Straße ist nass.
d) Die Straße ist trocken.
e) Überall in der Stadt regnet es.
f) Nirgends in der Stadt regnet es.
g) Über einigen Straßen der Stadt regnet es, über einigen nicht.
h) Alle Straßen der Stadt sind nass.
i) Alle Straßen der Stadt sind trocken.
j) Einge Straßen der Stadt sind nass, einige trocken.

Aufgabe 2.22 **Lösung**

Seien p, q, r und s Aussagen. Beweisen Sie $(p \vee q) \to (r \wedge s) \implies p \to r$!

Aufgabe 2.24 **Lösung**

Für den Besuch einer Veranstaltung gilt *„Studenten zahlen den ermäßigten Eintrittspreis"*. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?

a) Der Besucher ist Student.
b) Der Besucher ist kein Student.
c) Der Besucher zahlt den ermäßigten Preis.
d) Der Besucher zahlt den vollen Preis.
e) Eine Besuchergruppe besteht nur aus Studenten.
f) Eine Besuchergruppe besteht aus Studenten und Nichtstudenten.
g) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den vollen Preis.
h) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den ermäßigten Preis.

Aufgabe 2.26 **Lösung**

Betrachtet wird eine Studentengruppe. Einige dieser Studenten haben einen Seminarschein bekommen, einige nicht. Alle Studenten, die einen Seminarschein bekommen haben, haben an mindestens 10 Seminaren teilgenommen und mindestens einen Vortrag gehalten. Welche der folgenden Schlussfolgerungen können aus dieser Aussage gezogen werden:

a) Alle Studenten, die an mindestens 10 Seminaren teilgenommen haben und mindestens einen Vortrag gehalten haben, haben einen Seminarschein bekommen.
b) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben oder keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
c) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben und keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
d) Es gibt einen Studenten, der an mindestens 10 Seminaren teilgenommen hat.
e) Es gibt einen Studenten, der an weniger als 10 Seminaren teilgenommen hat.

Aufgabe 2.27 **Lösung**

Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei für a) bis g) die Aussagen und ihre Negationen auch mit dem Existenz- bzw. Allquantor und geben Sie an, ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist!

a) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
b) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
c) Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.
d) Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.
e) Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.
f) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat eine reelle Lösung.
g) Jedes Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck ist, ist ein Quadrat.
h) Jeder Student ist bei der Vorlesung anwesend.
i) Es gibt einen Studenten, der nicht im Wohnheim wohnt.

Aufgabe 2.28

Nutzen Sie die Implikation $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ zur Lösung der Gleichung $\sqrt{28-x}-\sqrt{x-3}=1$!

Aufgabe 2.29 **Lösung**

Lösen Sie unter Verwendung der Implikation $a = b \implies a^2 = b^2$ die Gleichung $\sqrt{x-1}-\sqrt{21-x}=2$!

Aufgabe 2.30 **Lösung**

Lösen Sie unter Verwendung der Implikation $a = b \implies a^2 = b^2$ die Gleichung $\sqrt{30-x}-\sqrt{x-4}=4$!

Aufgabe 2.31 **Lösung**

Nutzen Sie die Implikation $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ zur Lösung der Gleichung $x+6\sqrt{x-1}-8=0$!

Aufgabe 2.32

Unter welchen Voraussetzungen an die reellen Zahlen a, b, c und d sind die Aussagen $ab > cd$ und $\frac{a}{d} > \frac{c}{b}$ äquivalent?

Aufgabe 2.33

Es sei bekannt, dass $(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$, $\neg s \Rightarrow p$ und $s \Rightarrow r$ gilt. Welche Schlüsse kann man daraus ziehen, dass q falsch ist?

Aufgabe 2.34

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen p, q und r den Wahrheitswert von $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$!

Aufgabe 2.35 **Lösung**

Mit $\dot\vee$ sei die Kontravalenz zweier Aussagen („entweder…oder…“) bezeichnet. Geben Sie die Wahrheitswerttafel an und beweisen Sie die Beziehung

$$a \dot\vee b \iff (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \iff (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) \iff \neg(a \Leftrightarrow b) \ !$$

Aufgabe 2.36 **Lösung**

Als „Nor-Funktion“ (von not or) wird die Verknüpfung zweier Aussagen bezeichnet, die genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen falsch sind („weder…noch…“): $p \downarrow q \iff \neg(p \vee q)$. Stellen Sie Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz allein mit Hilfe der Nor-Funktion dar! (Mit Hilfe der Nor-Funktion kann eine logische Grundschaltung ("‘Nor-Gatter"’) realisiert werden.)

Aufgabe 2.37 **Lösung**

In einer dreiwertigen Logik sollen die Wahrheitswerte w (wahr), f (falsch) und m (möglich) unterschieden werden. Stellen Sie die Wahrheitswerttafeln der im üblichen Sinne definierten Operationen $\neg$ (Negation), $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion, Alternative), $\Rightarrow$ (Implikation) und $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz) auf!

(Dallmann, H. und Elster, K.-H.: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Band I. Jena: Gustav Fischer 1987, S. 32 und 780: Übungsaufgabe 6 aus Abschnitt 1.7.)

Aufgabe 2.38 **Lösung**

Beweisen Sie die Formel $\sum\limits_{n=1}^{N} n = \dfrac{N(N+1)}{2}$

a) durch Umformung von $(N+1)^2 = \sum\limits_{n=1}^{N+1} n^2 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^2 = \sum\limits_{n=0}^{N} (n+1)^2 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^2$ und

b) durch vollständige Induktion!

Aufgabe 2.39 **Lösung**

Beweisen Sie die Formel $\sum\limits_{n=1}^{N} n^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

a) durch Umformung von $(N+1)^3 = \sum\limits_{n=1}^{N+1} n^3 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^3 = \sum\limits_{n=0}^{N} (n+1)^3 - \sum\limits_{n=0}^{N} n^3$ und

b) durch vollständige Induktion!

Aufgabe 2.40 **Lösung**

Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$!

Aufgabe 2.41 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^3 - n$ durch 3, die Zahl $n^5 - n$ durch 5 und die Zahl $n^7 - n$ durch 7 teilbar ist!

b) Gilt allgemein, dass für ungerade Zahlen k die Zahl $n^k - n$ durch k teilbar ist?

Aufgabe 2.42 **Lösung**

Beweisen Sie die Beziehung $\sum\limits_{k=1}^{n} k \sin kx = \dfrac{(n+1)\sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$!

3 Mengenlehre

Aufgabe 3.1

Sei $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ die Menge der natürlichen und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Beschreiben Sie (ggf. grafisch) folgende Mengen:

a) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,3\le x\le 7\}$, b) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,5\le x^2\le 50\}$, c) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,2<x\le 7\}$,
d) $(1,4)$, $[1,4)$, $(1,4]$, $[1,4]$, $[1,\infty)$, $(-\infty,4)$,
e) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+6=0\}$, f) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^2-5x+6=0\}$, g) $(1,4)\cap\mathbb{N}$,
h) $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\le 9\}$, i) $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ y\ge 3x+4\}$,
j) $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ |x|\le 5,\ |y|\le 3\}$, k) $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ |x-3|\le 2,\ |y+1|\le 4\}$!

Aufgabe 3.2

Bilden Sie für folgende Mengen jeweils die Mengen $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$ und $B\backslash A$ und stellen Sie diese grafisch dar:

a) $A=(-\infty,4]$, $B=(1,\infty)$, b) $A=[-1,2)$, $B=[0,2]$,
c) $A=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\le 25\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\ge 9\}$!

Aufgabe 3.3 Lösung

Bilden Sie die Komplementärmengen von $\{2,3\}$ bezüglich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$!

Aufgabe 3.4 Lösung

Stellen Sie die Menge der Punkte (x,y) der Zahlenebene, für die $x^2+y^2\le 9$ gilt, und die Menge der Punkte (x,y) der Zahlenebene, für die $(x-7)^2+y^2\le 16$ gilt, grafisch dar! Welche Punkte gehören beiden Mengen gleichzeitig an?

Aufgabe 3.6

Welchen Wahrheitswert hat die Aussage
Menge aller Schimpansen $\cap$ Menge aller Giraffen $=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-2x+2\le 0\}$?

Aufgabe 3.7

Veranschaulichen Sie die Beziehung $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ am Venn-Diagramm und beweisen Sie mit Mitteln der Aussagenlogik!

Aufgabe 3.8 Lösung

Veranschaulichen Sie am Venn-Diagramm und beweisen Sie

a) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$,
b) $(A\cup B)\backslash(A\cap B)=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$!

Aufgabe 3.9 **Lösung**

Beweisen Sie, dass die Beziehung $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$, nicht aber die Beziehung $(A\cap C)\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(C\cup D)$ für beliebige Mengen A, B, C und D gilt!

Aufgabe 3.10 **Lösung**

Sei $\overline{A}=\Omega\backslash A$ die Komplementärmenge der Menge A bezüglich der Obermenge Ω. Beweisen Sie $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$!

Aufgabe 3.11

Sei $A=\{(x,y)\,|\,2x+3y=8\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x+2y=5\}$. Stellen Sie die Lösung des Gleichungssystems $2x+3y=8,\ x+2y=5$ als Menge dar (auch grafisch)!

Aufgabe 3.12 **Lösung**

Sei $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ |x|\le 1,\ |y+1|\le 2\}$, $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ |x-2|\le 2,\ |y-3|\le 3\}$.

a) Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!
b) Stellen Sie $A\cap B$ möglichst einfach mit mathematischen Symbolen dar!

Aufgabe 3.15 **Lösung**

Sei $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ x\le 2-(y-1)^2\}$ und $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ (x-3)^2+(y-1)^2\le 1\}$. Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!

Aufgabe 3.16 **Lösung**

Es seien folgende Mengen gegeben: $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ 2(x-1)^2+y\le -1\}$,
$B=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ (x-1)^2+(y+1)^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ x\ge 0\}$.

a) Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!
b) Stellen Sie $(A\cup B)\cap C$ und $(A\cap B)\cup C$ grafisch dar!

Aufgabe 3.17 **Lösung**

Die Mengen $A=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ y\ge x^2\}$, $B=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$ und $C=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ seien gegeben.

a) Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!
b) Stellen Sie $(A\cup B)\cap C$ und $(A\cap B)\cup C$ grafisch dar!

Aufgabe 3.19 **Lösung**

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, $\mathbb{R}^-$ die Menge der negativen reellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und $\mathbb{R}_0^-$ die Menge der nichtpositiven reellen Zahlen. Bestimmen Sie $A\cap B, A\cup B, A\backslash B, B\backslash A$

für

a) $A=\mathbb{R}^+, B=\mathbb{R}^-$,
b) $A=\mathbb{R}^+, B=\mathbb{R}_0^+$,
c) $A=\mathbb{R}^+, B=\mathbb{R}_0^-$,
d) $A=\mathbb{R}^-, B=\mathbb{R}_0^+$,
e) $A=\mathbb{R}^-, B=\mathbb{R}_0^-$,
f) $A=\mathbb{R}_0^+, B=\mathbb{R}_0^-$!

Aufgabe 3.20 **Lösung**

Für welche Mengen X gilt $\{1,2\} \subset X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$?

Aufgabe 3.21 **Lösung**

Seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Wie viele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

Aufgabe 3.22 **Lösung**

Interpretieren Sie folgende Produktmengen geometrisch:
a) $[-1,1] \times [3,4]$, b) $[0,1] \times [0,2] \times [0,3]$!

Aufgabe 3.23 **Lösung**

Geben Sie Beispiele für Sachverhalte an, die mit folgenden Mengen beschrieben werden können:

a) $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 31\} \times \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 12\} \times \mathbb{N}$,
b) $\{29\} \times \{2\} \times (\{n \in \mathbb{N} : 4|n \wedge 100 \nmid n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : 400|n\})$,
c) $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
d) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$,
e) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$!

Aufgabe 3.24 **Lösung**

Gelten für beliebige Mengen A,B,C,D die Beziehungen:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$?

4 Ungleichungen und Beträge

Aufgabe 4.1

Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

a) $|x-1| \geq 4$, b) $|x-3| \leq 2|x-1|$

jeweils rechnerisch durch Fallunterscheidung sowie durch Interpretation der Beträge als Abstand von zwei Punkten auf der Zahlengeraden!

Aufgabe 4.2 **Lösung**

Lösen Sie die Ungleichung $|x-1| \leq 1$!

Aufgabe 4.3 **Lösung**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{4}{x-3} \leq 1$?

Aufgabe 4.4 **Lösung**

Für welche reellen x gilt $\dfrac{x}{2x+1} < 2$?

Aufgabe 4.5 **Lösung**

Für welche reellen x gilt $6 + \dfrac{1}{x+3} < 1$?

Aufgabe 4.6

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{|1-x|}{x+3} \geq -2$?

Aufgabe 4.7 **Lösung**

Für welche reellen Zahlen x gilt $\dfrac{2|x|}{x+3} \leq 1$?

Aufgabe 4.12 **Lösung**

Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

a) $|2x+4| \leq x+5$, und b) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$!

Aufgabe 4.13 **Lösung**

Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

a) $x^2 - 6x + 9 > 1$, b) $|x+1| + |x+2| \leq 2$ und c) $\dfrac{|x+3|}{6-x} > \dfrac{1}{2}$!

Aufgabe 4.15 **Lösung**

Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen, das heißt die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt:

a) $2x^2 < 8 - 6x$, b) $x^4 + 3x^3 - 4x > 0$, c) $\dfrac{2x+4}{5x-7} > 3$, d) $\dfrac{x+2}{x^2-x-2} < -1$!

Aufgabe 4.18 **Lösung**

Für welche reellen x gilt $1 - \dfrac{6(x+3)}{|4+2x|} > -1$?

Aufgabe 4.19 **Lösung**

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+8x-9} \leq \dfrac{1}{8}$, b) $|8-x| + |2x+3| \leq 14$, c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x-3} \leq 4$?

Aufgabe 4.20 **Lösung**

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\dfrac{x^2+6x-67}{x+5} \geq 2$, b) $|x+4| + |9-5x| \leq 7$, c) $\dfrac{1}{|x-3|} + \dfrac{1}{x+3} \geq 6$?

Aufgabe 4.21 **Lösung**

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $|3x-2| + |3-2x| \geq 2$, b) $\dfrac{1}{3x-2} + \dfrac{1}{3-2x} \geq 2$?

Aufgabe 4.22 **Lösung**

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $|2x+4| + |10-x| \leq 30$, b) $\dfrac{5}{x+5} - \dfrac{5}{x-5} < -1$?

Aufgabe 4.24 **Lösung**

Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\left|2 - \dfrac{x}{3}\right| + \left|\dfrac{x}{5} + 1\right| \leq 3$, b) $\dfrac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15} \geq 1$?

Aufgabe 4.26 **Lösung**

Lösen Sie die Ungleichung $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$!

Aufgabe 4.27 **Lösung**

Lösen Sie die Ungleichung $|x^2-1| - 2x < 0$!

Aufgabe 4.28

Ein an einer mit einer Kilometrierung versehenen Straße wohnender Kunde erhält von einem am Kilometer 86 dieser Straße liegenden Auslieferungslager ein Gerät geliefert, an Fahrtkosten muss er dafür 3 € je Entfernungskilometer (einfache Entfernung) vom Auslieferungslager zahlen. Für die Installation muss zusätzlich ein Techniker von einem am Kilometer 112 dieser Straße liegenden Servicestützpunkt zum Kunden kommen, als Fahrtkosten fallen dabei 1 € je Entfernungskilometer vom Servicestützpunkt an.

In welchem Bereich der Straße ist die Summe der Fahrtkosten nicht größer als 50 €?

Aufgabe 4.29 **Lösung**

Ein an einer mit einer Kilometrierung versehenen Straße wohnender Kunde erhält von einem am Kilometer 87 dieser Straße liegenden Auslieferungslager ein Gerät geliefert, an Fahrtkosten muss er dafür 3 € je Entfernungskilometer (einfache Entfernung) vom Auslieferungslager zahlen. Für die Installation muss zusätzlich ein Techniker von einem am Kilometer 112 dieser Straße liegenden Servicestützpunkt zum Kunden kommen, als Fahrtkosten fallen dabei 2 € je Entfernungskilometer vom Servicestützpunkt an.

In welchem Bereich der Straße ist die Summe der Fahrtkosten nicht größer als 100 €?

Aufgabe 4.30 **Lösung**

Stellen Sie die Menge $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ 2|x| + |y| \leq x+1\}$ grafisch dar!

Aufgabe 4.31 **Lösung**

Stellen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen

a) $(2x+y)(y-x+1) \geq 0,$ b) $\dfrac{(x-1)(y+2)}{y-x} < 0$

grafisch dar!

Aufgabe 4.32 **Lösung**

Beweisen Sie, dass für beliebige positive x die Ungleichung $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ erfüllt ist! Wann gilt das Gleichheitszeichen?

5 Komplexe Zahlen

Algebraische Darstellung

Aufgabe 5.1

Sei $z_1 = 2+3\mathrm{i}$, $z_2 = 3-5\mathrm{i}$.

a) Berechnen Sie z_1+z_2, z_1-z_2 und $2z_1$!
b) Stellen Sie z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2 und $2z_1$ in der komplexen Ebene dar!
c) Berechnen Sie z_1z_2, $z_1\overline{z_2}$, $z_2\overline{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $|z_2|$!

Aufgabe 5.2 **Lösung**

Beweisen Sie die Beziehung $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$!

Aufgabe 5.3 **Lösung**

Berechnen Sie $|\sqrt{3}\,\mathrm{i}-6|$!

Aufgabe 5.5 **Lösung**

Berechnen Sie die Beträge von folgenden komplexen Zahlen:

a) $z_1 = 0{,}4-0{,}3\,\mathrm{i}$, b) $z_2 = \mathrm{i}\,z_1$, c) $z_3 = z_1^2$, d) $z_4 = \cos 50^\circ + \mathrm{i}\sin 50^\circ$!

Aufgabe 5.6 **Lösung**

Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Bedingung $|z| = |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|$?

Aufgabe 5.7 **Lösung**

Begründen Sie anschaulich die für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gültige Ungleichung $|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$!

Aufgabe 5.8 **Lösung**

Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen!

Aufgabe 5.10 **Lösung**

Stellen Sie die Mengen aller komplexen Zahlen, für die

a) $|z| = |\sqrt{13}\,\mathrm{i}-6|$ bzw. b) $z = |\sqrt{13}\,\mathrm{i}-6|$

gilt, grafisch dar!

Aufgabe 5.11 **Lösung**

Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ |z+1-2\mathrm{i}| \geq 2\}$!

Aufgabe 5.12

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z - 4 + 3\mathrm{i}| \leq 4$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!
b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - 4 + 3\mathrm{i}| \leq 4\}$!

Aufgabe 5.13 **Lösung**

Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge
$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0.5\}$!

Aufgabe 5.14 **Lösung**

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq 1 - \mathrm{Re}(z)$.

a) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!
b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 - \mathrm{Re}(z)\}$!

Aufgabe 5.15 **Lösung**

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}$.

a) Beschreiben Sie den Sachverhalt durch eine reelle Ungleichung für x und y !
b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}\}$!

Hinweis zu b): quadratische Ergänzung

Aufgabe 5.16 **Lösung**

Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und es gelte $|z+1| \geq 2|z-1|$.

a) Beschreiben Sie den mit der Ungleichung ausgedrückten Sachverhalt verbal!
b) Geben Sie eine Ungleichung an, die den Zusammenhang zwischen dem Realteil x und dem Imaginärteil y beschreibt!
   Hinweis: Bringen Sie eine Seite der Ungleichung in die Form $(x-a)^2 + (y-b)^2$!
c) Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Ungleichung!

Aufgabe 5.17 **Lösung**

a) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die der Bedingung $1 \leq |z-2+2\mathrm{i}| \leq 2\sqrt{2}$ genügen!
b) Enthält die Menge reelle Zahlen, wenn ja, welche?

Aufgabe 5.18 **Lösung**

a) Für welche reellen Zahlen t gilt $t \geq \dfrac{15}{t-2}$?
b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, für die $|z| \geq \dfrac{15}{|z|-2}$ gilt!

Aufgabe 5.19 **Lösung**

Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $|z-4-6\mathrm{i}| = |z+2-4\mathrm{i}|$ eine Gerade beschrieben wird und bestimmen Sie ihre Gleichung in der Form $y = mx + n$! Lösen Sie diese Aufgabe unabhängig voneinander

a) auf geometrischem Wege unter entsprechender Interpretation der Beträge und
b) rechnerisch durch Einsetzen von $z = x + \mathrm{i}y$ in die Gleichung!

Aufgabe 5.20 **Lösung**

Skizzieren Sie in der komplexen Ebene jeweils die Menge aller Zahlen z, die folgenden Bedingungen genügen:

a) $|z-2| > 3$, b) $2 \leq |z-2+5\mathrm{i}| \leq 5$,
c) $-2 < \mathrm{Re}(z) \leq 6$, d) $|z+1-4\mathrm{i}| \geq |z-3-2\mathrm{i}|$!

Hinweis: Ermitteln Sie ggf. ausgehend von $z = x + \mathrm{i}y$ eine Beziehung zwischen Realteil x und Imaginärteil y !

Aufgabe 5.23

Lösen Sie die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ und führen Sie die Probe aus!

Aufgabe 5.24 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 2z + 5 = 0$ und führen Sie die Probe aus!

Aufgabe 5.25 **Lösung**

Zeigen Sie, dass z^2 genau dann reell ist, wenn z reell oder rein imaginär ist!

Aufgabe 5.26 **Lösung**

Zeigen Sie, das zwei komplexe Zahlen a und b genau dann beide reell oder zueinander konjugiert sind, wenn sowohl $a+b$ als auch $a \cdot b$ reelle Zahlen sind!

Aufgabe 5.27 **Lösung**

Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild der komplexen Zahl z bei Spiegelung
a) am Ursprung, b) an der reellen Achse, c) an der imaginären Achse,
d) an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten,
e) an der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten?

Aufgabe 5.28 **Lösung**

Berechnen Sie $\dfrac{(3-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$!

Aufgabe 5.29 **Lösung**

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 8+2\mathrm{i}$ löst!

Aufgabe 5.30

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{-1+\mathrm{i}}{10}z+\dfrac{5+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{4}{3}+\mathrm{i}$ löst!

Aufgabe 5.31 **Lösung**

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, für die $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{25}z+\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=-\dfrac{7\mathrm{i}}{5}$ gilt!

Aufgabe 5.32 **Lösung**

Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-50+19\mathrm{i}$ löst!

Aufgabe 5.34 **Lösung**

Bestimmen Sie die komplexe Zahl z, welche die Gleichung $\dfrac{(4-5\mathrm{i})z-12+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-6\mathrm{i}$ löst!
Geben Sie das Ergebnis in algebraischer, Polar- und Exponentialdarstellung an!

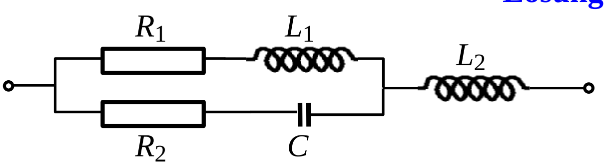
Aufgabe 5.35 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $(3-2\mathrm{i})z+75+3\mathrm{i}=\dfrac{1+9\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-2(1+2\mathrm{i})z$, geben Sie die Lösung in algebraischer und Polardarstellung an!

Aufgabe 5.36 **Lösung**

Der Scheinwiderstand der abgebildeten Wechselstromschaltung berechnet sich zu

$$Z=\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_1+\mathrm{i}\,\omega L_1}+\cfrac{1}{R_2-\cfrac{\mathrm{i}}{\omega C}}}+\mathrm{i}\,\omega L_2.$$



Berechnen Sie den Scheinwiderstand für $R_1=5000\,\Omega$, $R_2=4000\,\Omega$, $L_1=0.5\,\mathrm{H}$, $L_2=0.3\,\mathrm{H}$, $C=2\mu\mathrm{F}$, $\omega=2500\,\mathrm{Hz}$ (Es gilt $1\,\mathrm{H}=1\dfrac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$, $1\,\mathrm{F}=1\dfrac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}$.)!

(nach Burg, K.; Haf, H.; Wille,F.: Höhere Mathematik für Ingenieure. Band I: Analysis. Teubner. 8. Aufl. 2008, S. 188, Übung 2.33)

Polar- und exponentielle Darstellung

Aufgabe 5.37

Stellen Sie die folgenden Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar und ermitteln Sie ihre Polar- (trigonometrische) und ihre exponentielle Darstellung:

a) 3, b) $-2\mathrm{i}$, c) -4, d) $1+\mathrm{i}$, e) $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, f) $\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$!

Aufgabe 5.38 **Lösung**

Deuten Sie anschaulich die für alle $\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}$ gültige Gleichung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$!

Aufgabe 5.40 **Lösung**

Zeichnen Sie die Mengen

a) $\{z\in\mathbb{C} : z=1+\lambda+\lambda\mathrm{i},\ -1\le\lambda\le 2\}$ und b) $\{z\in\mathbb{C} : z=3+4\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{2\lambda\mathrm{i}},\ 0\le\lambda\le\frac{3\pi}{4}\}$!

Aufgabe 5.41 **Lösung**

Sei a eine negative reelle Zahl und $z=a\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\,a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Geben Sie die Polar- und die exponentielle Darstellung von z an!

Aufgabe 5.42

Skizzieren Sie folgende in Polarkoordinaten (r,φ) beschriebene Kurven $r=f(\varphi)$:

a) $r=f(\varphi)=2$, b) $r=f(\varphi)=\varphi,\ 0\le\varphi<2\pi$, c) $r=f(\varphi)=1+\cos\varphi$!

Aufgabe 5.43 **Lösung**

Geben Sie die Gleichung der Geraden $y=x-1$ in Polarkoordinaten in der Form $r=r(\varphi)$ an und ermitteln Sie den Definitionsbereich dieser Funktion!

Aufgabe 5.44

Berechnen Sie mithilfe der binomischen Formel

a) $(1+\mathrm{i})^4$, b) $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^3$, c) $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3$!

Aufgabe 5.45

Ermitteln Sie mithilfe der Polardarstellung $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$!

Aufgabe 5.46

Berechnen Sie mithilfe der Formel von Moivre

a) $(1+\mathrm{i})^4$, b) $(1+\mathrm{i})^{25}$, c) $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3$, d) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^{15}}{(1-\mathrm{i})^6}$!

Aufgabe 5.47 **Lösung**

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+b\mathrm{i}$ dar:

a) $\dfrac{(2\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-2)+1}{(2-\mathrm{i})^2-2+\mathrm{i}}$, b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\mathrm{i})\right)^{20}$, c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\mathrm{i})\right)^{30}$!

Aufgabe 5.49 **Lösung**

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,z=\dfrac{12}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}$, geben Sie diese in algebraischer und in Polardarstellung an! Berechnen Sie außerdem die sechste Potenz dieser Lösung!

Aufgabe 5.50

Berechnen Sie $\dfrac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^9}{(1+\mathrm{i})^{14}}$!

Aufgabe 5.51 **Lösung**

Berechnen Sie $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{15}}{(1-\mathrm{i})^{22}}$!

Aufgabe 5.52 **Lösung**

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+b\mathrm{i}$ und in Polarform dar:

a) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$, b) $\dfrac{15-9\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})^2+1-3\mathrm{i}}$!

Aufgabe 5.54 **Lösung**

Geben Sie die Zahlen

a) $\dfrac{(3+2\mathrm{i})(8-20\mathrm{i})+40+72\mathrm{i}}{(5-2\mathrm{i})^2-(1-12\mathrm{i})}$, b) $\dfrac{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}}$

jeweils in algebraischer und in Polardarstellung an!

Hinweis: Führen Sie die Rechnung zunächst in der für die jeweilige Aufgabe zweckmäßigeren Darstellung aus und rechnen Sie das Ergebnis in die andere Darstellung um!

Aufgabe 5.56 **Lösung**

Bestimmen Sie die Polardarstellungen der komplexen Zahlen $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=\sqrt{27}+3\mathrm{i}$ und $z_3=36$ und berechnen Sie mit ihrer Hilfe $\dfrac{z_1^{10}z_2^4}{z_3^2}$! Geben Sie das Ergebnis auch in algebraischer Darstellung an!

Aufgabe 5.57 **Lösung**

Bestimmen Sie die Polardarstellungen der komplexen Zahlen $z_1=4-\sqrt{48}\mathrm{i}$, $z_2=-\sqrt{75}-5\mathrm{i}$ und $z_3=-4+4\mathrm{i}$ und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^4, $\dfrac{z_1^3}{z_2^7}$, z_3^6, $\overline{z_3}^6$ und $\overline{z_3^6}$! Geben Sie die Ergebnisse auch in algebraischer Darstellung an!

Aufgabe 5.58 **Lösung**

Bestimmen Sie die Polardarstellungen der komplexen Zahlen $z_1=-\sqrt{12}+2\mathrm{i}$ und $z_2=-3-\sqrt{27}\,\mathrm{i}$ und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^5 und $\dfrac{\overline{z_2}^2}{z_1^{10}}$! Geben Sie die Ergebnisse auch in algebraischer Darstellung an!

Aufgabe 5.60 **Lösung**

Berechnen Sie $\dfrac{12^{333\,335}}{(\sqrt{3}+3\mathrm{i})^{666\,666}}$!

Aufgabe 5.61 **Lösung**

Berechnen Sie $1{,}5^{222\,222}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{444\,444}$!

Aufgabe 5.63 **Lösung**

Berechnen Sie $2^{-1\,000\,000}\left(\dfrac{5+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}-\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{999\,999}$!

Aufgabe 5.65 **Lösung**

Berechnen Sie durch Auswertung von $(1+\mathrm{i})^n$ mit der binomischen Formel und mit der Moivreschen Formel die Summen $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$!

Aufgabe 5.66 **Lösung**

Ermitteln Sie die algebraische Darstellung von $10^{1+\mathrm{i}}$!

Wurzelziehen aus komplexen Zahlen

Aufgabe 5.67 **Lösung**

Wo steckt der Fehler in der Gleichungskette $\mathrm{i}^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$?

Aufgabe 5.68 **Lösung**

Ermitteln Sie die komplexen

a) Quadrat-, vierten und sechsten Wurzeln aus 1,
b) Quadratwurzeln aus $2\,(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$,
c) Quadrat- und dritten Wurzeln aus i !

Aufgabe 5.69 **Lösung**

Geben Sie die Polardarstellung der komplexen Zahl $z=-32(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$ an und berechnen Sie die Quadratwurzeln aus dieser Zahl!

Aufgabe 5.70 **Lösung**

Ermitteln Sie alle dritten Wurzeln aus der Zahl $-216\,\mathrm{i}$ in trigonometrischer und in algebraischer Darstellung!

Aufgabe 5.72 **Lösung**

Ermitteln Sie alle sechsten Wurzeln aus der Zahl -4096 in algebraischer und in trigonometrischer Darstellung!

Aufgabe 5.73 **Lösung**

Sei a eine positive reelle Zahl und $z = -8a^2 + 8a^2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

a) Geben Sie die Polar- und die exponentielle Darstellung von z an!
b) Bestimmen Sie alle vierten Wurzeln aus z !

Aufgabe 5.75 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$!

Aufgabe 5.76 **Lösung**

a) Ermitteln Sie die Quadratwurzeln aus $-\dfrac{15}{4} + 2\mathrm{i}$ mit Hilfe der Moivreschen Formel!
b) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (3-2\mathrm{i})z + (5-5\mathrm{i}) = 0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Aufgabe 5.79 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $z^2 + \mathrm{i}z - 1 - \mathrm{i} = 0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Aufgabe 5.81 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (2+4\mathrm{i})z + 5 + (4-8\sqrt{3})\mathrm{i} = 0$ mit Hilfe der üblichen Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Logarithmieren komplexer Zahlen

Aufgabe 5.83 **Lösung**

Berechnen Sie $\ln(3+4\mathrm{i})$!

Aufgabe 5.84 **Lösung**

Sei $-1 \le x \le 1$. Berechnen Sie $\ln(x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2})$!

Aufgabe 5.85 **Lösung**

Geben Sie $(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$ in algebraischer und trigonometrischer Darstellung an!

Aufgabe 5.86 **Lösung**

Berechnen Sie $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{i}}$!

6 Lineare Algebra

Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Aufgabe 6.1

Die Komponenten x_i eines Vektors $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^5$ seien Mengen von Waren i in entsprechenden Mengeneinheiten. Ein Lager habe zu Beginn einer Woche einen Warenbestand

$\begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 8 \\ 50 \\ 235 \end{pmatrix}$, es erhalte in der Woche eine Lieferung von $\begin{pmatrix} 800 \\ 50 \\ 0 \\ 10 \\ 250 \end{pmatrix}$ und realisiere 5 Auslieferungen von je $\begin{pmatrix} 200 \\ 20 \\ 1 \\ 5 \\ 45 \end{pmatrix}$.

Wie groß ist der Lagerbestand am Ende der Woche?

Aufgabe 6.2 Lösung

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 57 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ Elemente des $\mathbb{R}^4$. Ermitteln Sie $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ und $2\vec{a}-5\vec{b}$!

Aufgabe 6.3

Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$:

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$?

Aufgabe 6.4

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist.

b) Bei einem Bäcker soll ein Kunde für 1 Brot und 12 Brötchen 5 €, ein zweiter Kunde für 2 Brote und 4 Brötchen 4 € und ein dritter Kunde für 1 Brot und 8 Brötchen ebenfalls 4 € bezahlen. Warum kann das nicht sein?

Aufgabe 6.5

a) Welches der Vektorsysteme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, wann handelt es sich um eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Geben Sie die Dimensionen der linearen Hüllen der beiden Vektorsysteme an!

c) Stellen Sie, sofern das möglich ist, die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen der Vektorsysteme aus a) sowie als Linearkombinationen der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ („kanonische Basis“) dar! Sind die Darstellungen eindeutig?

Aufgabe 6.6 Lösung

Sei $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist! (Diese Basis wird „kanonische Basis“ genannt.)

b) Zeigen Sie, dass $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist!

c) Zeigen Sie, dass $\{\vec{i}, \vec{x}_1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist!

d) Zeigen Sie, dass es im $\mathbb{R}^2$ unendlich viele Basen gibt!

e) Zeigen Sie, dass $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ gilt!

Aufgabe 6.7 Lösung

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist!

b) Wie kann man aus den unter a) genannten Vektoren eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$ bilden? Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis an!

Aufgabe 6.8 Lösung

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

Aufgabe 6.9 **Lösung**

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der linearen Abhängigkeit von zwei Vektoren und der Lagebeziehung zwischen zwei Geraden? (Zur Beantwortung der Frage reicht ein Satz.)

Aufgabe 6.10

a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von n Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ $(n \geq 1)$!
b) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Begriffs anhand der möglichen Lagebeziehungen von drei Vektoren im dreidimensionalen Raum!

Aufgabe 6.11 **Lösung**

Wann handelt es sich bei einer Ebene um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 6.12

a) Wann heißt eine Menge Unterraum des $\mathbb{R}^n$?
b) Beschreiben Sie geometrisch, welche Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind!

Aufgabe 6.13

a) Definieren Sie die Begriffe Dimension und Basis eines Vektorraumes!
b) Für welche Werte des Parameters a handelt es sich bei der Ebene $x+y+z=a$ um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie in dem Fall, dass es sich um einen Unterraum handelt, eine Basis dieses Unterraumes an!

Aufgabe 6.14 **Lösung**

Beweisen Sie, dass jedes beliebige System von n linear unabhängigen Vektoren eines n-dimensionalen linearen Vektorraumes diesen Raum aufspannt, der Raum also lineare Hülle dieses Systems ist!

Aufgabe 6.15 **Lösung**

L_1 und L_2 seien zwei Unterräume des linearen Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass dann auch $L_1 \cap L_2$ Unterraum von V ist!

Aufgabe 6.16 **Lösung**

Sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie folgende Mengen darauf, ob es sich um lineare Räume handelt:

a) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$,
c) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_4, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_4, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$!

Wenn ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Aufgabe 6.17 **Lösung**

Bestimmen Sie eine Basis der Menge $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$. Was stellt die Menge geometrisch dar?

Aufgabe 6.18 **Lösung**

Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$,

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+2 \\ x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$?

Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Aufgabe 6.19

a) Für welche Werte von c ist der Vektor $\begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Linearkombination von $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, für welche nicht?

b) In welchen Fällen handelt es sich bei den Mengen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \text{ und}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

um Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Aufgabe 6.21 **Lösung**

Gegeben sei die Menge $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt!

b) Bestimmen Sie die Dimension dieses Unterraumes und geben Sie eine Basis des Unterraumes an!

c) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen dieser Basis dar, falls das möglich ist!

d) Was stellt die Menge geometrisch dar?

Andere lineare Vektorräume

Aufgabe 6.25 **Lösung**

Zeigen Sie, dass die Menge P_3 aller Polynome 3. Grades über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein linearer Vektorraum ist und geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an!

Aufgabe 6.26 **Lösung**

Zeigen Sie, dass die Menge P aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar ein linearer Vektorraum ist! Was kann man zu diesem Raum bezüglich Dimension und Basis aussagen?

Aufgabe 6.27 **Lösung**

Sei P_2 der lineare Raum aller Parabeln über $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit einem Skalar.

a) Geben Sie die Dimension von P_2 an!
b) Welcher der Vektoren $2x+11x^2$ und $2x+12x^2$ ist Linearkombination der Vektoren $2+4x+3x^2$ und $3+5x-x^2$?
c) Welches der beiden Vektorsysteme $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+11x^2\}$ und $\{2+4x+3x^2, 3+5x-x^2, 2x+12x^2\}$ ist linear unabhängig, wann handelt es sich um eine Basis des P_2?

Aufgabe 6.28 **Lösung**

Zeigen Sie, dass die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, d.h. der Folgen mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 < \infty$, mit den Operationen $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ und $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$ einen linearen Vektorraum bildet!

Aufgabe 6.29 **Lösung**

Sei L ein linearer Vektorraum, $\vec{x},\vec{y} \in L$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\beta\vec{x}+\alpha\vec{y}$ genau dann gilt, wenn $\alpha=\beta$ oder $\vec{x}=\vec{y}$ ist!

Skalarprodukt, Orthogonalität, Winkel

Aufgabe 6.30 **Lösung**

Gegeben seien die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Vektoren grafisch dar!
b) Berechnen Sie die Skalarprodukte zwischen den Vektoren! Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?
c) Berechnen Sie die Normen der Vektoren und normieren Sie die Vektoren (d.h., bestimmen Sie Vektoren gleicher Richtung der Norm 1)!

Aufgabe 6.31 **Lösung**

Beweisen Sie mithilfe des Satzes des Pythagoras den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie und zeigen Sie damit, dass sich der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ durch die Beziehung $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{x}_1\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1\|\,\|\vec{x}_2\|}$ berechnen lässt, wobei das Skalarprodukt wie üblich durch $\vec{x}_1\vec{x}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ definiert ist!

Aufgabe 6.32 **Lösung**

a) Wie kann der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren im Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) allgemein definiert werden? Welche Werte kann der so definierte Winkel annehmen?

b) Die in a) anzugebende Definition kann auch im $\mathbb{R}^1$, d.h. in der Menge der reellen Zahlen, angewendet werden. Begründen Sie, welche Werte der so definierte Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann!

Aufgabe 6.33 **Lösung**

Wie ändert sich der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren, wenn man einen von ihnen mit einer negativen Zahl multipliziert? Argumentieren Sie sowohl geometrisch als auch mit der Berechnung des Winkels über das Skalarprodukt!

Aufgabe 6.34 **Lösung**

Beweisen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ genau dann orthogonal zueinander sind, wenn für ihre Normen $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ gilt!

Aufgabe 6.35

Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Notieren Sie für die drei Paare dieser Vektoren jeweils die Dreiecksungleichung! Welche geometrische Bedeutung hat diese?

Aufgabe 6.36 **Lösung**

Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} \\ -12+4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

Aufgabe 6.37

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem Sie tatsächlich nur ein einziges Skalarprodukt ausrechnen!

Aufgabe 6.38 **Lösung**

Als Kugel mit dem Radius r wird die Menge aller Punkte des Raumes bezeichnet, deren Ortsvektoren $\vec{x}$ vom Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}_0$ den Abstand r haben! Geben Sie die Gleichung der Kugel vektoriell und komponentenweise an! Welcher Zusammenhang besteht zum Satz des Pythagoras?

Aufgabe 6.39 **Lösung**

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mit Mitteln der Vektorrechnung!

Aufgabe 6.40 **Lösung**

Zeigen Sie, dass die Koordinaten eines Vektors der Länge 1 bezüglich einer orthonormalen Basis gleich den Kosinussen der Winkel zwischen dem Vektor und den Basisvektoren sind, und damit $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1$ als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ gilt!

Aufgabe 6.41 **Lösung**

Beweisen Sie den Satz des Thales **sowohl** durch Zerlegung des Dreiecks am Halbkreis in zwei gleichschenklige Dreiecke **als auch** mit Mitteln der Vektorrechnung!

Aufgabe 6.42 **Lösung**

Ermitteln Sie eine Orthonormalbasis des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$ mit üblichem Skalarprodukt, der ein zum Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ paralleler Vektor angehört!

Aufgabe 6.43 **Lösung**

Ermitteln Sie eine orthogonale Basis des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit üblichem Skalarprodukt, der der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ angehört!

Aufgabe 6.44 **Lösung**

Orthogonalisieren Sie das Vektorsystem $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$, d.h., bestimmen Sie ein orthogonales Vektorsystem, dessen lineare Hülle mit der des gegebenen Vektorsystems übereinstimmt!

Hinweis: Lassen Sie z.B. den Vektor $\vec{x}_1$ unverändert und suchen Sie einen dazu orthogonalen Vektor in der Form $\vec{x}_2{}' = \vec{x}_2 - \lambda \vec{x}_1$, d.h., bestimmen Sie λ so, dass $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2{}'$ zueinander orthogonal werden! Dieses Verfahren heißt Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Aufgabe 6.45

Gegeben seien die Vektoren $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Längen der Vektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel!
b) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{F}$ in seine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{s}$ und die dazu orthogonale Komponente!
c) Bestimmen Sie die Arbeit, die die Kraft $\vec{F}$ längs des Weges $\vec{s}$ leistet!

Aufgabe 6.46 Lösung

Ein Körper wird durch eine Kraft $\vec{F} = (3 \quad 4 \quad 5)^{\mathsf{T}}$ vom Punkt $(8,2,-3)$ zum Punkt $(5,8,3)$ bewegt.

a) Zerlegen Sie die Kraft in eine Komponente in Bewegungsrichtung und in eine dazu orthogonale Komponente!
b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen Kraft- und Bewegungsrichtung!
c) Bestimmen Sie die bei der Bewegung von der Kraft an dem Körper verrichtete Arbeit!

Aufgabe 6.47 Lösung

Ein Körper wird durch eine Kraft $\vec{F} = (5 \quad 5 \quad 0)^{\mathsf{T}}$ vom Punkt $(4,1,-2)$ zum Punkt $(4,4,1)$ bewegt.

a) Bestimmen Sie den Betrag der Kraft, die Länge des zurückgelegten Weges sowie die bei der Bewegung von der Kraft an dem Körper verrichtete Arbeit!
b) Zerlegen Sie die Kraft in eine Komponente in Bewegungsrichtung und in eine dazu orthogonale Komponente!
c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen Kraft- und Bewegungsrichtung!

Aufgabe 6.48 Lösung

Eine in Richtung der Winkelhalbierenden des IV. Quadranten der x-z-Ebene wirkende Kraft verrichte an einem Körper auf der geraden Strecke vom Punkt $(13,-10,18)$ zum Punkt $(9,2,4)$ eine Arbeit von 141 J, wobei als Längeneinheit cm verwendet wurde. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft in kN!

Aufgabe 6.49 Lösung

Für Vektoren $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Ungleichung und dem Wertebereich des Kosinus? Wann ist die Ungleichung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt?
b) Erläutern Sie die Ungleichung anhand der maximal möglichen Arbeit, die eine Kraft vom Betrag F in Abhängigkeit von ihrer Wirkungsrichtung in eine vorgegebene Richtung $\vec{s}$ verrichten kann!

Aufgabe 6.50 **Lösung**

a) Leiten Sie durch Quadrieren der Dreiecksungleichung für $\vec{x}+\vec{y}$ und $\vec{x}-\vec{y}$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung her!

b) Überzeugen Sie sich für die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ von der Gültigkeit der Ungleichungen!

Aufgabe 6.51 **Lösung**

Beweisen Sie die Ungleichungen:

a) $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, b) $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$, c) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 6.52 **Lösung**

Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ in seine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die dazu orthogonale Komponente!

Aufgabe 6.53

a) Unter welchem Winkel sieht man die Strecke zwischen den Punkten $(2,-3,6)$ und $(2,4,8)$ vom Punkt $(0,0,7)$ aus?

b) Von welchen Punkten der z-Achse aus sieht man sie unter einem rechten Winkel?

Matrizen

Aufgabe 6.54

Berechnen Sie $2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.55

In einer Firma werden die drei Produkte P_1, P_2 und P_3 hergestellt. An Material werden dafür die drei Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit P_1 2 Einheiten R_1, 1 Einheit R_2 und 4 Einheiten R_3, für eine Einheit P_2 5 Einheiten R_1 und 5 Einheiten R_3 sowie für eine Einheit P_3 1 Einheit R_1, 3 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 verwendet.

Für einen Auftrag sollen 50 Einheiten P_1, 30 Einheiten P_2 und 10 Einheiten P_3 produziert werden.

Geben Sie die Aufwandsmatrix sowie in vektorieller Form den Produktionsauftrag an und ermitteln Sie daraus den Rohstoffbedarf in vektorieller Form!

Aufgabe 6.56

Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 4 \\ 8 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} (3\ \ 4\ \ 5)$,

f) $(3\ \ 4\ \ 5) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.57 Lösung

Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.58 Lösung

Berechnen Sie die Produkte

a) $(1\ \ -1\ \ \ 1\ \ -1\ \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} (1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

und

b) $(1\ \ -1\ \ \ 1\ \ -1\ \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

sofern diese existieren!

Aufgabe 6.60 Lösung

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{ABC}$ und $\boldsymbol{CBA}$, falls diese existieren!

Aufgabe 6.61

Berechnen Sie $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}$ für $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\4&0&3\\5&1&-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&5&-3\\3&1&2\\2&0&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4&2\\0&-1\\5&-3\end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.62

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&2&2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert? Was stellen sie dar (Zahl, Vektor, Matrix)? Berechnen Sie die Ausdrücke, sofern sie existieren!
a) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, b) $\vec{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{x}$, c) $\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{y}$, d) $\vec{x}^\mathsf{T}(\vec{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A})^\mathsf{T}$, e) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T}$, f) $\vec{y}\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$, g) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\vec{y}\vec{x}^\mathsf{T}$.

Aufgabe 6.63 Lösung

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(3\quad 1)$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2\\-4&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{AC}\vec{x}$, b) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\vec{x}^\mathsf{T}$, c) $\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, d) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}$, e) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{C}^\mathsf{T}$, f) $\boldsymbol{AC}\vec{y}$, g) $\boldsymbol{BC}\vec{y}$, h) $\vec{x}^\mathsf{T}\vec{y}$, i) $\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T}$!

Aufgabe 6.64 Lösung

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&3&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{y}$, b) $\vec{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}+\vec{x}$, c) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, d) $\vec{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{x}$, e) $\vec{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{y}$, f) $\vec{x}^\mathsf{T}(\vec{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A})^\mathsf{T}$, g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T}$, h) $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\vec{y}\vec{x}^\mathsf{T}$!

Aufgabe 6.65 Lösung

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\-2&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{AB}\vec{d}$, b) $\vec{d}\boldsymbol{BA}^\mathsf{T}$, c) $\vec{d}\vec{c}^\mathsf{T}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, d) $\boldsymbol{A}\vec{d}+\vec{c}$, e) $\boldsymbol{B}\vec{c}+\vec{d}$, f) $\boldsymbol{B}\vec{d}+\vec{c}^\mathsf{T}$, g) $\vec{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{d}$, h) $(\boldsymbol{A}\vec{d})^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$!

Aufgabe 6.66 Lösung

Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $\boldsymbol{A}$ die Matrix $\boldsymbol{AA}^\mathsf{T}$ existiert und symmetrisch ist!

Aufgabe 6.67 Lösung

Eine Matrix heißt schiefsymmetrisch, wenn $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=-\boldsymbol{A}$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Matrizen $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, dass sich jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darstellen lässt!

Aufgabe 6.68 **Lösung**

Zerlegen Sie die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix!

Aufgabe 6.69 **Lösung**

Es werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und diese aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei im Einzelnen folgender Bedarf besteht:

	je P_1	je P_2	je P_3
B_1	2	4	4
B_2	2	0	2
B_3	2	2	6

	R_1	R_2	R_3
je B_1	2	4	1
je B_2	1	2	2
je B_3	3	1	1

a) Stellen Sie dar, wie sich aus den beiden gegebenen Matrizen die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Ausgangsstoffen je Endprodukt errechnet und führen Sie diese Berechnung aus!

b) Es wird ein Auftrag zur Herstellung von 200 P_1, 100 P_2 und 300 P_3 sowie zusätzlich von 100 B_1 und 80 B_2 als Austauschbaugruppen erteilt. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden insgesamt benötigt? Nutzen Sie für die Rechnung die Multiplikation von Aufwandsmatrizen und Auftragsvektoren!

Aufgabe 6.71 **Lösung**

In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppen verkauft werden. Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall, für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff, für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt. Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen, eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen durch Matrizenmultiplikation die Aufwandssmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!

b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter Verwendung der Aufwandssmatrizen aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

Aufgabe 6.72

In einer Firma werden aus Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und aus den Ausgangstoffen und Baugruppen Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit B_1 4 Einheiten A_1, 1 Einheit A_2 und 2 Einheiten A_3, für eine Einheit B_2 6 Einheiten A_2 und 4 Einheiten A_3 sowie für eine Einheit B_3 je 4 Einheiten A_2 und A_3 benötigt, während für ein Stück E_1 5 Einheiten A_1 und je eine Baugruppe B_1, B_2 und B_3, für ein Stück E_2 je 2 Einheiten A_1 und A_3 und eine Baugruppe B_3 und für ein Stück E_3 3 Einheiten A_1, 1 Einheit A_2 und eine Baugruppe B_2 benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Baugruppen, für den Zusammenhang von Baugruppen und Endprodukten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Endprodukten an!
b) Ein Kunde bestellt 100 Stück E_1 und je 50 Stück E_2 und E_3 sowie 50 Einheiten B_1. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

Aufgabe 6.73 **Lösung**

In einer Firma werden aus Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus den Ausgangs- und Zwischenprodukten Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit Z_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten A_2 und 1 Einheit A_3, für eine Einheit Z_2 6 Einheiten A_1 und 2 Einheiten A_3 sowie für eine Einheit Z_3 4 Einheiten A_1 und je 2 Einheiten A_2 und A_3 benötigt, während für ein Stück E_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten Z_1, 3 Einheiten Z_2 und 1 Einheit Z_3, für ein Stück E_2 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 und für ein Stück E_3 je eine Einheit Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Zwischenprodukten, für den Zusammenhang von Zwischen- und Endprodukten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Endprodukten an!
b) Ein Kunde bestellt 10 Stück E_1, 20 Stück E_2 und 30 Stück E_3 sowie 20 Einheiten Z_1. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

Aufgabe 6.74 **Lösung**

Eine Elektronikfirma stellt aus Draht, Spulen und Widerständen Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und aus den Baugruppen und aus Draht Geräte G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Baugruppe B_1 12 Einheiten Draht, 3 Spulen und 2 Widerstände, für eine Baugruppe B_2 15 Einheiten Draht, 2 Spulen und 4 Widerstände und für eine Baugruppe B_3 10 Einheiten Draht, 2 Spulen und 2 Widerstände benötigt. Für ein Gerät G_1 werden 2 Baugruppen B_1, eine Baugruppe B_3 und 20 Einheiten Draht benötigt, während für ein Gerät G_2 je eine Baugruppe B_1, B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Draht benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Baugruppen, für den Zusammenhang von Baugruppen und Geräten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Geräten an!
b) Ein Kunde bestellt 1000 Geräte G_1, 800 Geräte G_2 und für Austauschzwecke 100 Baugruppen B_1, 20 Baugruppen B_2 und 50 Baugruppen B_3. Welche Mengen an Ausgangsmaterial werden benötigt?

Aufgabe 6.76 **Lösung**

In einer Großbäckerei werden drei Sorten Kuchen mit Äpfeln hergestellt. Dafür werden drei Grundteige verwendet. Für ein Blech Quark-Apfel-Kuchen werden je 600 g der Grundteige A, B und C, 800 g Quark und 4 Äpfel benötigt; für ein Blech Apfel-Quark-Kuchen 1000 g Grundteig B, 800 g Grundteig C, 400 g Quark und 7 Äpfel; für ein Blech Apfelkuchen 1000 g Grundteig A, je 500 g Grundteig B und C und 10 Äpfel.

Die Grundteige werden in der Teigmischmaschine hergestellt. Für einen Backtrog mit 200 kg Teig werden neben anderen Zutaten benötigt beim Grundteig A 110 kg Mehl, 20 kg Zucker und 60 kg Margarine; beim Grundteig B 100 kg Mehl, 25 kg Zucker und 70 kg Margarine und beim Grundteig C 120 kg Mehl, 35 kg Zucker und 40 kg Magarine.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Bedarf an Mehl, Zucker und Margarine je Backtrog Grundteig, den Bedarf an Grundteig je Blech Kuchen sowie für den Bedarf an Quark und Äpfeln je Blech Kuchen an!
b) Stellen Sie dar, wie sich aus diesen Matrizen die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Mehl, Zucker und Margarine je Blech Kuchen errechnet und führen Sie diese Berechnung aus!
c) Es sind 120 Bleche Quark-Apfel-Kuchen, 80 Bleche Apfel-Quark-Kuchen und 100 Bleche Apfelkuchen zu backen. Ermitteln Sie unter Verwendung der Matrizen aus a) und b) den hierfür entstehenden Bedarf an den genannten Ausgangsstoffen!

Aufgabe 6.78 **Lösung**

Was bewirkt die Multiplikation einer dreizeiligen Matrix von links mit

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6.79 **Lösung**

$\boldsymbol{A}$ sei eine beliebige Matrix. Mit welcher Matrix $\boldsymbol{B}$ muss man die Matrix $\boldsymbol{A}$ von links multiplizieren (d.h. $\boldsymbol{BA}$ berechnen), damit

a) die 1. Zeile mit 3 multipliziert wird,
b) eine einzeilige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Spalten der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind,
c) das Doppelte der 1. Zeile zur 3. Zeile addiert wird,
d) die 1. mit der 2. Zeile vertauscht wird?

Aufgabe 6.80 **Lösung**

$\boldsymbol{A}$ sei eine beliebige Matrix. Mit welcher Matrix $\boldsymbol{B}$ muss man die Matrix $\boldsymbol{A}$ von rechts multiplizieren (d.h. $\boldsymbol{AB}$ berechnen), damit

a) die 1. Spalte verdoppelt wird,
b) eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind,
c) von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird,
d) die letzte und die vorletzte Spalte vertauscht werden,
e) die Spalten in entgegengesetzter Reihenfolge entstehen, d.h. die letzte Spalte zur 1. Spalte wird usw.?

Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

Aufgabe 6.81 **Lösung**

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{n}$ heißt obere Dreiecksmatrix der Ordnung n, wenn $m_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ seien obere Dreiecksmatrizen gleicher Ordnung. Zeigen Sie, dass dann auch $\boldsymbol{AB}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 6.82 **Lösung**

Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ quadratische Matrizen der Ordnung n mit $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

a) Zeigen Sie, dass dann $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ und $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{B}^{n-i}$ gilt!

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass bei $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ diese Formeln nicht gelten müssen!

Aufgabe 6.83

Welchen Rang haben die Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$?

Berechnen Sie für a) und b) auch die Determinanten der Matrizen! Welcher Zusammenhang besteht zum Rang?

Aufgabe 6.87 **Lösung**

Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & a & b & c \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von a, b und c !

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 6.90 **Lösung**

Gesucht sind zwei reelle Zahlen mit folgenden Eigenschaften: Ihre Summe ist 4. Vermindert man das Dreifache der einen Zahl um das Doppelte der anderen Zahl, so erhält man 52.

Aufgabe 6.91

Aus einer 92%-igen und einer 64%-igen Schwefelsäure sollen 3.5 kg einer 72%-igen Schwefelsäure hergestellt werden. Man berechne die Massen der zu mischenden Säuren!

Aufgabe 6.95 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 14 \\ -5x + 2y &= 20 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 14 \\ -6x - 8y &= 14 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 14 \\ -6x - 8y &= -28 \end{aligned}$

grafisch und rechnerisch!

Aufgabe 6.97 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch:

a) $\begin{aligned} 6x + 7y &= 15 \\ 7x + 8y &= 17 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 6x + 7y &= 15 \\ 12x + 14y &= 17 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 6x + 7y &= 15 \\ 12x + 14y &= 30 \end{aligned}$!

Aufgabe 6.98 **Lösung**

a) Wie müssen die Parameter a und b gewählt werden, damit die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ den Rang 0, 1 bzw. 2 hat?

b) Lösen Sie in den drei Fällen das homogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$!

Aufgabe 6.99 **Lösung**

Aus 2 Rohstoffen R_1 und R_2 werden 3 Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Je Stück E_1 werden 6 Einheiten R_1, je Stück E_2 14 Einheiten R_1 und 16 Einheiten R_2 und je Stück E_3 10 Einheiten R_1 und 8 Einheiten R_2 benötigt. Wieviel Stück der einzelnen Erzeugnisse müssen hergestellt werden, um 36 Einheiten R_1 und 24 Einheiten R_2 vollständig zu verbrauchen?

Aufgabe 6.100

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 3x + y - 5z &= 0 \\ 2x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 3x + y - 5z &= 0 \\ 5x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ -2x + 4y - 6z &= 0 \\ 3x - 6y + 9z &= 0 \end{aligned}$!

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungsmengen der Gleichungssysteme, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und den Rängen der Koffizientenmatrizen?

Aufgabe 6.101

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 5x - 3y + z &= 8 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 5x - 3y + z &= 13 \end{aligned}$!

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Aufgabe 6.103 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} x + y + 2z &= 6 \\ 2x - 2y - 4z &= 16 \\ 3x - y + z &= 19 \end{aligned}$

mit dem Gaußalgorithmus!

Aufgabe 6.107 **Lösung**

Bei der zweistelligen Gleitpunktarithmetik wird jede Zahl auf zwei gültige Ziffern gerundet, z.B. $247 \approx 25 \cdot 10^1 = 250$, $-0.03438 \approx -34 \cdot 10^{-3} = -0.034$.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 0.01 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) exakt,

b) in zweistelliger Gleitpunktarithmetik mit dem Gaußschen Algorithmus ohne Zeilen- und Spaltentausch,

c) in zweistelliger Gleitpunktarithmetik mit dem Gaußschen Algorithmus mit Spaltenpivotisierung (Wahl des betragsgrößten Elements der jeweiligen Spalte als Pivotelement)!

Aufgabe 6.108 **Lösung**

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

a) $\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 14 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & -3 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 & = & 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{array}$

Aufgabe 6.109

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!
b) Geben Sie drei linear unabhängige spezielle Lösungen des Gleichungssystems an!
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösungsmenge, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und dem Rang der Koffizientenmatrix?

Aufgabe 6.110 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & 2 \end{array}$.

a) Geben Sie eine spezielle und die allgemeinen Lösung an des Gleichungssystems an!
b) Welcher Zusammenhang besteht zu den Rängen der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix?
c) Geben Sie drei linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}$ an!
d) Können vier Lösungen dieses homogenen Systems linear unabhängig sein?

Aufgabe 6.113 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -10 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_1 und x_2 frei gewählt werden können!
b) Gibt es eine spezielle Lösung, die in allen Komponenten positiv ist?

Aufgabe 6.115

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie, sofern das möglich ist, eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_4 und x_5 frei gewählt werden können!
b) Geben Sie, sofern das möglich ist, eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der x_3 und x_4 frei gewählt werden können!
c) Geben Sie die spezielle Lösung an, für die $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ gilt!
d) Gibt es eine spezielle Lösung, die in allen Komponenten positiv und ganzzahlig ist?
e) Geben Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an!

Aufgabe 6.116 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = & 13 \\ x_1 & & +6x_3 & +5x_4 & = & -4 \\ -x_1 & -8x_2 & +6x_3 & -\ x_4 & = & -24 \end{array} \quad !$$
Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix, wie hängt dieser mit der Zahl der freien Variablen (frei wählbaren Parameter in der allgemeinen Lösung) zusammen? Führen Sie für die ermittelte allgemeine Lösung auch die Probe aus!

Aufgabe 6.117 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & x_2 & & +\ 4x_4 & = & 5 \\ 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + & x_2 + & x_3 + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$
mit dem Gaußalgorithmus!

Aufgabe 6.119 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrrrcr} 4x_1 & +2x_2 & & +8x_4 & -4x_5 & & = & 12 \\ & 6x_2 & +2x_3 & & +2x_5 & & = & 6 \\ & 9x_2 & & -\ x_4 & +3x_5 & & = & 4 \\ & 8x_2 & & & +4x_5 & -2x_6 & = & 8 \end{array}$$
mit dem Gaußschen Algorithmus!

Aufgabe 6.120 **Lösung**

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 + & 3x_3 & +4x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & +4x_2 + & x_3 & +3x_4 & = & 9 \\ 3x_1 + & x_2 + & 9x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & +5x_2 & +12x_3 & +5x_4 & = & 11 \end{array} \quad !$$

Aufgabe 6.123 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & x_2 - & 2x_3 - & x_4 & = & 9 \\ x_1 & +3x_2 + & 2x_3 - & 9x_4 & = & 13 \\ 2x_1 - & x_2 + & x_3 - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & -3x_2 & -10x_3 & +15x_4 & = & 1 \\ -4x_1 & +9x_2 + & x_3 & -15x_4 & = & 23 \end{array} \quad !$$

Aufgabe 6.124 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrcr} (1+\mathrm{i})z_1 + & (2+\mathrm{i})z_2 & = & 11+\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})z_1 & +(1+2\mathrm{i})z_2 & = & 12-\mathrm{i} \end{array} \quad !$$

Aufgabe 6.125 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rrrcr} \mathrm{i}\ z_1 & +(1-\mathrm{i})z_2 + & (1+\mathrm{i})z_3 & = & 2-2\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})z_1 + & 2\mathrm{i}\ z_2 - & \mathrm{i}\ z_3 & = & -1+6\mathrm{i} \\ (2-\mathrm{i})z_1 + & \mathrm{i}\ z_2 & +(1+2\mathrm{i})z_3 & = & 5+2\mathrm{i} \end{array} \quad !$$

Aufgabe 6.126 **Lösung**

Sei ε eine beliebige reelle Zahl. Handelt es sich bei $\{(1,2,3)^\mathsf{T},(2,5,7)^\mathsf{T},(3,7,10+\varepsilon)^\mathsf{T}\}$ um eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie ggf. die Koeffizienten von $(1,1,1)^\mathsf{T}$ in dieser Basis

a) allgemein, b) für $\varepsilon = 1$, c) für $\varepsilon = 0{,}0001$!

Aufgabe 6.127 **Lösung**

Ein Betrieb stellt Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3 her, die auf Maschinen M_1, M_2 und M_3 bearbeitet werden. Aus der nachfolgenden Tabelle ist ersichtlich, wie viele Stunden auf den Maschinen jeweils benötigt werden, um eine Einheit E_i zu bearbeiten:

	M_1	M_2	M_3
je E_1	3	2	1
je E_2	2	0	2
je E_3	3	5	4

Wie viele Einheiten eines jeden Erzeugnisses werden produziert, wenn jede Maschine genau 120 Stunden arbeitet?

Aufgabe 6.129 **Lösung**

Für die Vorbereitung von insgesamt 30 Frühstücksgedecken sollen 54 Portionspackungen Wurst, 88 Portionspackungen Käse und 62 Portionspackungen Marmelade verwendet werden. Für die einzelnen Gedecke werden benötigt:

Gedeck A: 1 Wurst, 3 Käse, 3 Marmelade;
Gedeck B: 1 Wurst, 4 Käse, 2 Marmelade;
Gedeck C: 3 Wurst, 2 Käse, 1 Marmelade;
Gedeck D: 4 Wurst, 1 Käse, 2 Marmelade.

Welche Anzahl der einzelnen Gedecke kann vorbereitet werden?

Aufgabe 6.130 **Lösung**

An 30 Personen sollen Preise im Wert von 30 €, 24 € bzw. 18 € vergeben werden, wofür insgesamt genau 600 € verwendet werden sollen. Welche Möglichkeiten zum Kauf der 30 Preise gibt es, wenn jede Wertstufe mindestens einmal vertreten sein soll?

Aufgabe 6.131

In einer Stanzerei werden aus Blechtafeln drei verschiedene Teile T_1, T_2 und T_3 gestanzt. Dazu werden vier verschiedene Stanzschablonen S_1, S_2, S_3 und S_4 genutzt. Bei Verwendung dieser Schablonen entstehen folgende Stückzahlen der Teile:

	pro Stanzvorgang			
	S_1	S_2	S_3	S_4
Anzahl T_1	1	1	0	0
Anzahl T_2	1	0	1	0
Anzahl T_3	2	4	6	8

Es ist nun ein Auftrag von 3 T_1, 2 T_2 und 40 T_3 zu stanzen. Wie oft müssen die einzelnen Schablonen zur Anwendung kommen, wenn möglichst wenig Blechtafeln verbraucht werden sollen?

(nach Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 7. Aufl. Vieweg+Teubner 2009, Übungsaufgabe 4.23, S. 166, 412f.)

Aufgabe 6.132 **Lösung**

In einer Cafeteria gibt es Speisen zu 3, 8 und 11 €. Wie viele der einzelnen Speisen müssen bestellt werden, damit 23 Personen jeweils genau eine Speise bekommen, wenn dafür insgesamt genau 200 € ausgegeben werden sollen?

Aufgabe 6.133

Für die Herstellung von Endprodukten E_1, E_2, E_3 und E_4 werden Baugruppen B_1, B_2 und B_3 nach folgendem Schema benötigt:

	B_1	B_2	B_3
E_1	1	2	3
E_2	2	2	3
E_3	2	3	0
E_4	5	2	3

Es stehen 50 Baugruppen B_1, 50 Baugruppen B_2 und 30 Baugruppen B_3 zur Verfügung. Wie viele der einzelnen Endprodukte sind daraus zu fertigen, wenn alle vorhandenen Baugruppen verwendet werden sollen?

Aufgabe 6.135 **Lösung**

Ein Chemiebetrieb produziert vier Waschmittel, wobei drei Rohstoffe in folgenden Mengen verbraucht werden:

	je Tonne			
	WM_1	WM_2	WM_3	WM_4
R_1 (in t)	1/2	0	1/2	1/4
R_2 (in t)	3/5	3/5	0	3/5
R_3 (in t)	0	1	3/5	3/5

Es sind 2t R_1, 3t R_2 und 1t R_3 vorhanden. Welche Waschmittel müssen in welchen Mengen produziert werden, damit alle Rohstoffe vollständig verbraucht werden? Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung!

Aufgabe 6.137 **Lösung**

Für die Produktion von 2 Sorten Mischbrot werden Mischungen von Roggen- und Weizenmehl im Verhältnis 70:30 und 80:20 hergestellt. Welche Mengen der beiden Mehlmischungen müssen hergestellt werden, um 2 t Roggenmehl und 700 kg Weizenmehl vollständig zu verbrauchen?

Stellen Sie die sich aus dem Bedarf an den einzelnen Rohstoffen ergebenden beiden Abhängigkeiten zwischen den herzustellenden Mengen der beiden Mehlmischungen auch grafisch dar!

Aufgabe 6.138 **Lösung**

Für die Produktion von 3 Sorten Mischbrot werden Mischungen von Roggen- und Weizenmehl im Verhältnis 60:40, 70:30 und 80:20 hergestellt. Welche Mengen der drei Mehlmischungen müssen hergestellt werden, um 2 t Roggenmehl und 700 kg Weizenmehl vollständig zu verbrauchen?

Aufgabe 6.140 **Lösung**

Für die Auszahlung von jeweils 90 € an 40 Personen stehen 30 50€–Scheine, 70 20€–Scheine und 70 10€–Scheine zur Verfügung. Jede Person soll den Betrag passend erhalten, wobei niemand mehr als 5 Scheine bekommen soll. Deshalb kommen nur die Stückelungen $50+2\times 20$, $50+20+2\times 10$, $50+4\times 10$ und $4\times 20+10$ in Frage. Wie oft müssen die einzelnen Stückelungsversionen zur Anwendung kommen? Ermitteln Sie alle möglichen Lösungen! Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

Aufgabe 6.141 **Lösung**

Eine Firma verkauft 3 Produkte A, B und C zu Preisen von 4000, 1000 und 2000 Euro. Die Herstellung von Produkt A benötigt 3 Einheiten von Rohstoff 1 und 5 Einheiten von Rohstoff 2, für Produkt B werden je 1 Einheit der beiden Rohstoffe benötigt und für Produkt C 1 Einheit von Rohstoff 1 und 3 Einheiten von Rohstoff 2.

Bei einer kompletten Tagesproduktion wurden 17 Einheiten Rohstoff 1 und 31 Einheiten Rohstoff 2 verarbeitet, die Tagesproduktion wurde zu einem Gesamtpreis von 24 000 Euro verkauft.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der produzierten Zahl der einzelnen Produkte auf!
b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es? Geben Sie diese an!

Aufgabe 6.142 **Lösung**

In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen lässt) an Studenten zum Preis von 1, 2 bzw. 3 € und an Mitarbeiter zum Preis von 2, 4 bzw. 5 € abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 € erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 € sowie bei den Essen B und C 1,50 € pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 €. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B 1,50 € sowie beim Essen C 2 € pro Person und insgesamt an diesem Tag 4950 €.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!
b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschrieben Sachverhalt gibt es?

Aufgabe 6.144 **Lösung**

Für einen Flug werden Tickets in den Beförderungsklassen Economy und Business angeboten. Die 300 Economyplätze werden zu unterschiedlichen Sonderkonditionen zu Preisen von 20 € und 220 € sowie zum Normalpreis von 420 € verkauft. Die 50 Businessplätze werden zu Sonderkonditionen zum Preis von 600 € und zum Normalpreis von 1000 € verkauft. Zu den beiden Normalpreisen werden zusammen 100 Tickets verkauft.

Geben Sie alle möglichen Lösungen dafür an, wie viele Tickets der einzelnen Preiskategorien verkauft werden müssen, um bei voll besetztem Flugzeug einen Erlös von insgesamt 124 000 € zu erzielen!

Aufgabe 6.145 **Lösung**

In einem Konfektionsbetrieb ist eine Jacke in 3 Größen je mindestens 4200 mal zu fertigen. Für den Zuschnitt aus den hierfür verwendeten Stoffballen stehen 4 Varianten zur Verfügung:

Variante	1	2	3	4
Größe S	3	12	0	8
Größe M	6	0	7	0
Größe L	2	0	4	4

Es soll versucht werden, jede Größe exakt 4200 mal zuzuschneiden. Ermitteln Sie durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems, ob das möglich ist! Wenn ja, geben Sie alle Lösungen und den bei diesen bestehenden Bedarf an Stoffballen an!

Aufgabe 6.147 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 3x - 7y + 2z &= -7 \\ x + y - z &= 6 \\ 8x - 2y + \lambda z &= \mu \quad . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 2$, $\mu = 8$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar? Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit auch die Lösung an! Welche geometrische Bedeutung haben die drei Fälle?

Aufgabe 6.148 **Lösung**

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 4x + 3y - 10z &= 5 \\ 5x - 3y + az &= b \end{aligned}$$
in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Aufgabe 6.151 **Lösung**

Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix}$ linear abhängig? Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

Aufgabe 6.152 **Lösung**

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} -3x + 4y + z &= 2 \\ x - y + 2z &= 5 \\ -4x + 7y + az &= b \end{aligned}$$
in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Aufgabe 6.153 **Lösung**

Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\-1\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$ linear abhängig? Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

Aufgabe 6.154 **Lösung**

Für welche Werte der Parameter a und b hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= -4 \\ 2x+\ \ y+\ \ z &= \ \ 2 \\ x+ay+2z &= \ \ b \end{aligned}$$

keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die ggf. existierenden Lösungen! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Aufgabe 6.157

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+6x_5 &= 0 \\ 2x_1+5x_2+7x_3+9x_4+9x_5 &= 0 \\ x_1+4x_2+5x_3+6x_4+ax_5 &= 1 \\ x_1+3x_2+4x_3+5x_4+3x_5 &= b \quad . \end{aligned}$$

a) Wenden Sie auf das Gleichungssystem den Gaußschen Algorithmus an! Für welche Werte der Parameter a und b ist das Gleichungsystem lösbar? Geben Sie im Falle der Existenz die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an!
b) Wie viele frei wählbare Parameter enthält die allgemeine Lösung des zu dem gegebenen Gleichungsystem zugehörigen homogenen Systems? Geben Sie diese Lösung an!

Aufgabe 6.159 **Lösung**

a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+2x_4 &= -8 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4 &= 13 \\ 2x_1+\ \ x_2+2x_3+\ \ x_4 &= 11 \\ 3x_1+4x_2+5x_3-3x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

an!
b) Für welche Werte des Parameters λ ist das Gleichungssystem lösbar?
c) Ermitteln Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!
d) Geben Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogen Gleichungssystems an!

Aufgabe 6.160 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+\ \ 3x_2+2x_3+4x_4 &= 7 \\ 2x_1+\ \ \ \ x_2+4x_3+3x_4 &= 9 \\ 3x_1+\ \ 9x_2+\ \ x_3+2x_4 &= 1 \\ 4x_1+12x_2+5x_3+\lambda x_4 &= \mu . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda=5$, $\mu=11$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

Aufgabe 6.162 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \lambda x_4 &= \mu \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = -3$, $\mu = 5$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

Aufgabe 6.163

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x \qquad + 2z &= -1 \\ \lambda x + y + 2z &= 2 \\ \lambda y - 4\lambda z &= 15 \quad . \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!
b) Für welche λ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
c) Für welche λ ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?
d) Für welche λ ist das Gleichungssystem unlösbar?
e) Berechnen Sie die Lösung im Falle c)!
f) Wie können die Ergebnisse von b) – d) geometrisch interpretiert werden?

Aufgabe 6.164

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + 2z &= 1 \quad . \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!
b) Für welche λ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
c) Für welche λ ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?
d) Für welche λ ist das Gleichungssystem unlösbar?
e) Berechnen Sie die Lösung im Falle c)!
f) Wie können die Ergebnisse von b) – d) geometrisch interpretiert werden?

Aufgabe 6.166 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

a) Welcher Bedingung müssen die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ genügen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?
b) Lösen Sie das Gleichungssystem für die spezielle rechte Seite $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.167 **Lösung**

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades $P_5(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$, die an den Stellen $x=-2,-1,0,1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte 74, 12, 4, 2 und -18 annehmen!

b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

Aufgabe 6.168 **Lösung**

Bestimmen Sie ein Polynom höchstens 3. Grades $P(x)$, für das $P(1)=0$, $P'(1)=-2$, $P(2)=3$, $P'(2)=10$ gilt!

Aufgabe 6.169 **Lösung**

Bestimmen Sie ein Polynom höchstens 3. Grades $P(x)$, für das $P(1)=2$, $P'(1)=-2$, $P(-1)=10$, $P'(-1)=-10$ gilt!

Aufgabe 6.170 **Lösung**

Bestimmen Sie ein Polynom $P(x)$ höchstens 5-ten Grades, für welches die Beziehungen $P(1)=-2$, $P'(1)=-7$, $P''(1)=-14$, $P'''(1)=24$, $P(2)=-4$, $P'(2)=25$ gelten!

(Ikramov, Ch. D.: Russisch: Икрамов, Х. Д.: Задачник по линенйной алгебре. Москва: Наука 1975. Aufgabe 4.5.51. S. 104)

Aufgabe 6.171 **Lösung**

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller „trigonometrischen Polynome zweiten Grades“ $T_2(x)=a+b\cos x+c\sin x+d\cos 2x+e\sin 2x$, die an den Stellen $x=0,\pi/2,\pi$ in dieser Reihenfolge die Werte 4, 5 und 6 annehmen!

b) Welches trigonometrische Polynom ersten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

c) Welches trigonometrische Polynom zweiten Grades nimmt neben den angegebenen Werten auch noch an den Stellen $3\pi/4$ bzw. $3\pi/2$ die Werte -7 bzw. 7 an?

Aufgabe 6.172 **Lösung**

Gesucht ist das komplexe quadratische Polynom $P_2(z)=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})z+(a_2+b_2\mathrm{i})z^2$, für das $P_2(1)=8-6\mathrm{i}$, $P_2(\mathrm{i})=5+\mathrm{i}$ und $P_2(1+\mathrm{i})=12-\mathrm{i}$ gilt. Stellen Sie dazu durch Trennung der drei Gleichungen in Real- und Imaginärteil ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 und b_2 auf und lösen Sie dieses mit dem Gaußschen Algorithmus!

Aufgabe 6.173 **Lösung**

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, sie schneiden die x-Achse für $x=a$, $x=b$ bzw. $x=c$. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass die Koordinaten des Schnittpunkts (x,y,z) der 3 Ebenen durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ berechnet werden!

Inverse Matrix und Determinanten

Aufgabe 6.174

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$!

b) Welche Dimension hat die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$? Geben Sie eine Basis dieser linearen Hülle an! Was stellt sie geometrisch dar?

c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & a \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -13 & 18 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter a!

d) Stellen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen der Basis aus b) dar, falls das möglich ist!

e) Berechnen Sie die Determinate $\begin{vmatrix} 5 & 2 & a \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{vmatrix}$! Welcher Zusammenhang besteht zum Ergebnis von c)?

Aufgabe 6.175

a) Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige zweireihige quadratische Matrix. Berechnen Sie die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$, wenn diese existiert!

b) Lösen Sie mithilfe des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 2x+3y &= 0 \\ 7x+5y &= 11 \end{aligned}$!

Aufgabe 6.176 Lösung

Ein Produkt wird von zwei Produzenten in unterschiedlichen Qualitäten hergestellt und zu Preisen p_1 bzw. p_2 verkauft. Die Nachfragefunktionen lauten $N_1 = -p_1 + p_2 + 5$ und $N_2 = p_1 - p_2 + 15$, während die Angebotsfunktionen $A_1 = 3p_1 - a$ und $A_2 = 5p_2 - b$ seien.

a) Ermitteln Sie mittels Matrizeninversion, wie sich der Vektor der Gleichgewichtspreise $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ aus dem Vektor des festen Aufwands $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ errechnet!

b) Für welche Preise stehen im Fall $a = 9,\ b = 39$ Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht?

Aufgabe 6.178 Lösung

Es stehen zwei Sorten Pflanzsubstrat zur Verfügung, die 20 bzw. 40 % gut verrotteten Kompost enthalten. Stellen Sie mithilfe der inversen Matrix dar, wie diese zu mischen sind, um einen Kubikmeter Substrat mit einem Kompostanteil von a % zu erhalten!

Aufgabe 6.179 Lösung

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lösen Sie die Gleichung $\vec{z} - \boldsymbol{A}\vec{z} - \vec{y} = \vec{0}$!

Aufgabe 6.180

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6.181 **Lösung**

Berechnen Sie, indem Sie nach der zweiten Spalte entwickeln: $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$!

Aufgabe 6.183 **Lösung**

Seien a und b beliebige reelle Parameter. Berechnen Sie $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & -1 \end{vmatrix}$!

Für welche Parameterwerte verschwindet die Determinante?

Aufgabe 6.184 **Lösung**

Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante $\begin{vmatrix} 5 & 0 & c & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 3 & 1 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 7 & b & -2 & 7 \end{vmatrix}$!

Für welche Werte der Parameter a, b und c verschwindet die Determinante?

Aufgabe 6.185 **Lösung**

Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & b & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 3 & d & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$!

Für welche Werte der Parameter a, b, c und d verschwindet die Determinante?

Aufgabe 6.188 **Lösung**

Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 7&2&3&0&0&0\\ 4&7&6&1&0&0\\ 2&5&9&4&4&0\\ 8&5&1&2&7&1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\ 4&1&0&0&0&0&0\\ 3&7&3&0&0&0&0\\ 5&8&5&1&0&0&0\\ 1&4&5&6&4&0&0\\ 7&2&3&4&9&1&0\\ 5&6&7&3&4&5&5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\ 7&1&0&0&0&0&0&0\\ 4&6&3&0&0&0&0&0\\ 3&7&5&1&0&0&0&0\\ 9&2&4&5&4&0&0&0\\ 2&7&3&9&5&1&0&0\\ 6&4&1&8&7&9&5&0\\ 5&8&3&2&4&5&9&1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&3&2&7\\ 0&0&1&6&7&4\\ 0&4&4&9&5&2\\ 1&7&2&1&5&8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&1&4\\ 0&0&0&0&3&7&3\\ 0&0&0&1&5&8&5\\ 0&0&4&6&5&4&1\\ 0&1&9&4&3&2&7\\ 5&5&4&3&7&6&5 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&1&7\\ 0&0&0&0&0&3&6&4\\ 0&0&0&0&1&5&7&3\\ 0&0&0&4&5&4&2&9\\ 0&0&1&5&9&3&7&2\\ 0&5&9&7&8&1&4&6\\ 1&9&5&4&2&3&8&5 \end{vmatrix}\;!$$

Aufgabe 6.189 **Lösung**

Berechnen Sie die Determinanten
$$\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1,n-2}&a_{1,n-1}&a_{1n}\\ 0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n-2}&a_{2,n-1}&a_{2n}\\ 0&0&a_{33}&\cdots&a_{3,n-2}&a_{3,n-1}&a_{3n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&a_{n-2,n-2}&a_{n-2,n-1}&a_{n-2,n}\\ 0&0&0&\cdots&0&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\ 0&0&0&\cdots&0&0&a_{nn} \end{vmatrix}$$

und
$$\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1,n-2}&a_{1,n-1}&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n-2}&a_{2,n-1}&0\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3,n-2}&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n-2,1}&a_{n-2,2}&a_{n-2,3}&\cdots&0&0&0\\ a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&0&\cdots&0&0&0\\ a_{n1}&0&0&\cdots&0&0&0 \end{vmatrix}\;!$$

Aufgabe 6.190 **Lösung**

Wie ändert sich eine Determinante der Ordnung n, wenn man

a) bei allen Elementen das Vorzeichen in das entgegengesetzte abändert,
b) jedes Element a_{ik} mit $c^{i-k}(c \neq 0)$ multipliziert,
c) die erste Spalte an die Stelle der letzten setzt und jede andere Spalte um eins nach links verschiebt (Reihenfolge soll erhalten bleiben),
d) man die Zeilen in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt?

Aufgabe 6.191

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & b & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$!

Wie groß kann der Rang der Matrix maximal werden? Welche Bedingungen müssen die Parameter a und b erfüllen, damit die Matrix diesen maximalen Rang hat?

Aufgabe 6.193 **Lösung**

Berechnen Sie die Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ und d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 10 & 14 & -16 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 12 & 8 & 10 \end{vmatrix}$!

Aufgabe 6.194 **Lösung**

In einer Determinante 3-ter Ordnung mögen nur die Zahlen $+1$ und -1 auftreten. Welches ist der größte Wert, den die Determinante haben kann?

Aufgabe 6.195 **Lösung**

Die Zahlen 20 604, 53 227, 25 755, 20 927 und 289 sind durch 17 teilbar. Zeigen Sie, dass auch die Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ durch 17 teilbar ist!

Aufgabe 6.196 **Lösung**

Berechnen Sie die Determinanten, indem Sie sie auf Dreiecksform bringen:

a) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & x \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$!

Aufgabe 6.197 **Lösung**

Berechnen Sie $\det \boldsymbol{A}$ für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$ unter Verwendung von $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top\right)$!

Aufgabe 6.198 **Lösung**

Welche Werte kann die Determinante einer orthogonalen Matrix annehmen?

Aufgabe 6.199 **Lösung**

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ sowie ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ bestehe nur aus ganzen Zahlen. Bestimmen Sie $\det \boldsymbol{A}$!

Aufgabe 6.200 **Lösung**

Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ und $C(x_3,y_3)$. Zeigen Sie, dass sein Flächeninhalt gleich $\left| \begin{vmatrix} 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right|$ ist!

Aufgabe 6.201 **Lösung**

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,3)$, $B(4,-1)$ und $C(6,5)$!

Aufgabe 6.202 **Lösung**

Zeigen Sie, dass $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$ die Gleichung der Gerade durch die Punkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2) ist!

Aufgabe 6.204 **Lösung**

Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=4 \\ 3x+y-5z&=5 \\ 2x-3y+3z&=8 \end{aligned}$$
(vgl. Aufgaben 6.101a) und 6.210 mithilfe der Cramerschen Regel!

Aufgabe 6.205 **Lösung**

Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x+y+z&=\lambda \\ x+\lambda y+z&=\lambda \\ x+y+\lambda z&=\lambda \end{aligned}$$
mithilfe der Cramerschen Regel!

Aufgabe 6.206

Berechnen Sie sofern existent die Inversen der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ und b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$!

Welcher Zusammenhang besteht zum Ergebnis von Aufgabe 6.180c) und d) sowie zum Ergebnis von Aufgabe 6.101?

Aufgabe 6.207 **Lösung**

Berechnen Sie die Inverse zur Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (vgl. Aufgabe 6.175a)) mithilfe der Adjunkten!

Aufgabe 6.208 **Lösung**

Berechnen Sie mithilfe der Adjunkten die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ (vgl. Aufgabe 6.206a)) !

Aufgabe 6.209 **Lösung**

Berechnen Sie (sofern existent) die Inversen der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -10 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ und b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -10 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$!

Welcher Zusammenhang besteht zum Ergebnis von Aufgabe 6.148?

Aufgabe 6.210 **Lösung**

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

durch Anwendung der Inversen der Koeffizientenmatrix (s. Aufgabe 6.206a) auf die rechte Seite!

Aufgabe 6.211 **Lösung**

a) Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

b) Lösen Sie mit Hilfe der inversen Matrix die Gleichungssyteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 8 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.212 **Lösung**

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\top}$!

Aufgabe 6.213 **Lösung**

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 & a \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ und lösen Sie mit ihrer Hilfe das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 5x+2y+z &= 13 \\ 4x+3y+7z &= 13 \\ x+4y+18z &= -13 \end{aligned}$!

Welcher Zusammenhang besteht zur Aufgabe 6.174?

Aufgabe 6.214 **Lösung**

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x \phantom{{}+3y} + 3z &= 3 \\ 2x + y + 8z &= 2 \\ 2x - 3y + 6z &= 0 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.215

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + 2y \phantom{{}+z} &= 0 \\ 2x + 5y + z &= 3 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 2 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.216 **Lösung**

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 7 \\ 3x + y + 5z &= 12 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.217 **Lösung**

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !
b) Welcher Zusammenhang besteht zur Lösung von Aufgabe 6.152?
c) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 4 \\ -3x + 4y + z &= -3 \\ -4x + 7y + 12z &= 10 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.218 **Lösung**

Gegeben seien die Matrizen $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !
b) Für welche a existiert die Inverse zur Matrix $\boldsymbol{A}$? Berechnen Sie diese im Falle ihrer Existenz!
c) Lösen Sie im Falle $a=3$ das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=(5\ \ 6\ \ 5)^{\mathsf{T}}$!
d) Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ und geben Sie ihren Rang in Abhängigkeit von a an!

Aufgabe 6.219 **Lösung**

Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & a & b \end{pmatrix}$.

a) Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus dem Ergebnis von Aufgabe 6.87 hinsichtlich der Invertierbarkeit der Matrix $\boldsymbol{A}$ ziehen?
b) Berechnen Sie im Falle ihrer Existenz mit dem Gaußschen Algorithmus die zu $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix!
c) Lösen Sie mithilfe der bei b) ermittelten inversen Matrix das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 9 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 6.222 **Lösung**

In dem Gleichungssystem $x_1=y_1,\ x_3=y_2,\ x_2=y_3,\ ax_3+bx_4=y_4$ seien y_i $(i=1,2,3,4)$ gegeben und x_i $(i=1,2,3,4)$ gesucht.

a) Notieren Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise, bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Koeffizientenmatrix und notieren Sie mit Hilfe dieser Inversen die Lösung des Gleichungssystems!
b) Für welche Werte der Parameter a und b existiert die Inverse nicht? Geben Sie die ggf. dennoch existierende Lösung des Gleichungssystems an!

Orthogonale Matrizen

Aufgabe 6.223 **Lösung**

Kann man Parameter c und d finden, für die die Matrix $c\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & d \end{pmatrix}$ orthogonal wird?

Aufgabe 6.225 **Lösung**

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

und untersuchen Sie die Matrizen auf Orthogonalität!

Matrizengleichungen

Aufgabe 6.226

Lösen Sie folgende Gleichungen nach $\boldsymbol{A}$ auf, wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix sei und alle erforderlichen Invertierungen möglich sein sollen:

a) $4\boldsymbol{D} = 3\boldsymbol{BA} + 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$, b) $(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{EA})^\mathsf{T} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T} + \boldsymbol{E}$, c) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}^{-1}) = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}$!

Aufgabe 6.228 **Lösung**

Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ quadratische Matrizen gleicher Ordnung. Lösen Sie die Gleichung $4\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ nach $\boldsymbol{A}$ auf, wobei die dabei erforderliche Invertierung möglich sein soll!

Aufgabe 6.229 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $5\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{AB} + 3\boldsymbol{C} = (2\boldsymbol{DA}^\mathsf{T} + \boldsymbol{E})^\mathsf{T}$ nach $\boldsymbol{A}$ auf, wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix sei und die erforderliche Invertierung möglich sein soll!

7 Analytische Geometrie

Vektoren in der Analytischen Geometrie

Aufgabe 7.1

Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(6,-5)$, $B(5,1)$ und $C(-3,13)$. Geben Sie die Seitenhalbierende der Seite BC vektoriell an und ermitteln Sie ihre Länge!

Aufgabe 7.3 **Lösung**

Der Ortsvektor des Eckpunktes A eines Parallelogramms $ABCD$ sei $\vec{x}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die von A ausgehenden Seiten haben die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Eckpunkte B, C und D !
b) Berechnen Sie die Richtungsvektoren der Diagonalen und ihre Längen!
c) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Diagonalen!

Aufgabe 7.4 **Lösung**

Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren!

Aufgabe 7.6

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks ABC sowie $\vec{s}_A$, $\vec{s}_B$ und $\vec{s}_C$ die (Richtungs-, d.h. freien) Vektoren der Seitenhalbierenden zu den gegenüberliegenden Seiten. Berechnen Sie $\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{s}_A$, $\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{s}_B$ und $\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{s}_C$! Welche geometrischen Aussagen können aus dem Ergebnis gefolgert werden?

Aufgabe 7.7 **Lösung**

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks und a, b und c die Seitenlängen der den Ecken gegenüberliegenden Seiten. Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \dfrac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c}$ der Ortsvektor des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden, d.h. der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ist!

Aufgabe 7.8 **Lösung**

Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden!

Aufgabe 7.9 **Lösung**

Zeigen Sie mit Mitteln der Vektorrechnung, dass die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ein zu dem Ausgangsdreieck ähnliches Dreieck bilden!

Aufgabe 7.10 **Lösung**

Gegeben sei ein Dreieck $A_1B_1C_1$. Die Mittelpunkte der Seiten A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 seien C_2, A_2 und B_2. Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ im gleichen Punkt schneiden!

Aufgabe 7.11 **Lösung**

Seien M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 und M_6 die Mittelpunkte der Seiten eines Sechseckes. Zeigen Sie, das die Schwerpunkte der Dreiecke $M_1M_3M_5$ und $M_2M_4M_6$ übereinstimmen!

Geraden

Aufgabe 7.15 **Lösung**

Gegeben seien die Punkte $A(-1,12)$, $B(1,2)$ und $C(6,12)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Gerade durch die Punkte A und B sowie der Gerade durch die Punkte B und C ! In welchen Punkten schneiden die beiden Geraden die Koordinatenachsen?
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel durch die Punkte A, B und C ! In welchen Punkten schneidet die Parabel die Koordinatenachsen? Wo liegt ihr Scheitelpunkt?
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC !

Aufgabe 7.16

a) Ermitteln Sie, ob sich die Gerade durch die Punkte $(6,5,5)$ und $(9,11,14)$ und die Gerade durch die Punkte $(-5,4,-7)$ und $(1,2,-3)$ schneiden und bestimmen Sie ggf. den Schnittpunkt!
b) Wie kann mit Hilfe des Spatproduktes ermittelt werden, ob sich die Geraden schneiden?

Aufgabe 7.17 **Lösung**

Ermitteln Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 7.18 **Lösung**

Geben Sie die Gleichung der Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Parameter- und in parameterfreier Form an!

Aufgabe 7.19 **Lösung**

Geben Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P(2,-2)$ und $Q(5,7)$ in Parameterform und in parameterfreier Form an!

Aufgabe 7.20 **Lösung**

In der Ebene sei die Gerade $y = 3x + 4$ gegeben. Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden an!

Aufgabe 7.21 **Lösung**

Geben Sie die Gleichung der Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ an!

Aufgabe 7.22 **Lösung**

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P(3,-4,9)$ und $Q(5,1,10)$!
b) In welchen Punkten schneidet diese Gerade die x-y-Ebene?

Aufgabe 7.23 **Lösung**

Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden

a) $y = 3x - 7$ und $y = 7x - 3$
b) $y = 3x - 7$ und $y = 7x + 14$
c) $y = 3x - 7$ und $y = 3x + 14$
d) $3x - y = 7$ und $-6x + 2y = -14$?

Aufgabe 7.24 **Lösung**

Geben Sie die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(2,3)$ geht und die Gerade $y = 3x - 7$ im rechten Winkel schneidet, in Parameter- und in parameterfreier Form an!

Aufgabe 7.25

In der x–y–Ebene werde die Gerade $3x - 4y = 12$ betrachtet.

a) Geben Sie die Gleichung der Gerade in Parameterform an!
b) Geben Sie die zur Geradenrichtung orthogonale Richtung an!
c) Welcher der Punkte $A(18,23)$ und $B(-37,-37)$ liegt auf der gleichen Seite der Gerade wie der Koordinatenursprung?
d) Geben Sie die Gleichungen der Lote von den Punkten A und B auf die Gerade an, bestimmen Sie die Lotfußpunkte und die Abstände der Punkte von der Geraden!

Aufgabe 7.27 **Lösung**

In der x-y-Ebene werde die Gerade $4x - 5y = 20$ betrachtet.

a) Geben Sie die Gleichung der Gerade in Parameterform an!
b) Geben Sie die zur Geradenrichtung orthogonale Richtung an!
c) Geben Sie die Geradengleichung der Lots vom Punkt $P(2,-2)$ auf die Gerade an, bestimmen Sie den Lotfußpunkt und den Abstand des Punktes P von der Geraden!

Aufgabe 7.28 **Lösung**

Ermitteln Sie die Geradengleichung des Lotes von $P(7,-6)$ auf die Gerade $y = 3x - 7$ und bestimmen Sie den Lotfußpunkt sowie den Abstand zwischen dem Punkt und der Gerade!

Aufgabe 7.32 **Lösung**

Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(-1,5)$. Ermitteln Sie rechnerisch

a) die Größe des Innenwinkels beim Punkt A,
b) die Gleichung der Geraden, die auf der Mitte der Seite AB senkrecht steht,
c) den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks,
d) den Radius des Umkreises des Dreiecks!

Aufgabe 7.33 **Lösung**

Ermitteln Sie auf der Kurve $x^2-2x+y^2=0$ diejenigen Punkte, deren Abstand vom Punkt $(0,-1)$ maximal bzw. minimal ist!

Aufgabe 7.35 **Lösung**

Bestimmen Sie den Abstand der Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ vom Koordinatenursprung!

Aufgabe 7.36 **Lösung**

Vom Punkt $(-2,15,27)$ werde auf die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}$ das Lot gefällt. Ermitteln Sie den Lotfußpunkt, geben Sie die Geradengleichung des Lotes an und bestimmen Sie den Abstand des Punktes von der Gerade!

Aufgabe 7.38

Bestimmen Sie durch Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors zwischen der Gerade g durch die Punkte $(1,5,8)$ und $(-1,2,3)$ und dem Punkt $P(15,2,-11)$ auf die Geradenrichtung den Fußpunkt des Lotes von P auf g sowie den Abstand zwischen P und g !

Aufgabe 7.39 **Lösung**

Bestimmen Sie durch Projektion irgendeines Verbindungsvektors zwischen der Gerade g durch die Punkte $(-3,0,-1)$ und $(9,12,5)$ und dem Punkt $P(2,2,3)$ auf die Geradenrichtung den Fußpunkt des Lotes von P auf g sowie den Abstand zwischen P und g !

Kreuzprodukt

Aufgabe 7.40

Berechnen Sie das Skalar- und das Kreuzprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$!

Aufgabe 7.41 **Lösung**

Im Raum $\mathbb{R}^3$ mit üblichem Skalarprodukt seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben!

a) Berechnen Sie $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$!
b) Notieren Sie für die konkreten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Cauchy-Schwarzsche und die Dreiecksungleichung!
c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!
d) Ermitteln Sie die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms!

Aufgabe 7.42 **Lösung**

Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$!

Aufgabe 7.43

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,1,0)$, $(2,5,5)$ und $(3,2,-2)$!

Aufgabe 7.44 **Lösung**

Berechnen Sie die Seitenlängen, die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-2,1)$, $B(4,4)$, $C(2,-7)$!

Aufgabe 7.46 **Lösung**

Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A(7,5,2)$, $B(4,3,11)$ und $C(2,1,5)$ ein rechtwinkliges Dreieck ist und bestimmen Sie den Winkel $\sphericalangle CAB$!

Aufgabe 7.47 **Lösung**

Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1,1,1)$, $B(2,-1,4)$ und $C(4,2,-4)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!
b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks!
c) Berechnen Sie den Winkel beim Punkt A !
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mithilfe des Kreuzproduktes!

Aufgabe 7.50 **Lösung**

Sei α der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ eingeschlossene Winkel.

a) Leiten Sie aus dem Zusammenhang zwischen Kosinus und Skalarprodukt her, wie sich $\sin\alpha$ aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen lässt!
b) Zeigen Sie mithilfe dieser Darstellung, dass das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$ hat!
c) Wie lässt sich dieser Sachverhalt mit Hilfe des Kreuzproduktes darstellen?
d) Welche entsprechende Aussage gilt für das Spatprodukt?

Aufgabe 7.51

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms!

b) Welches dreidimensionale Analogon hat das Ergebnis von a)?

Aufgabe 7.52 Lösung

Gegeben seien zwei zueinander orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem Raum $\mathbb{R}^3$ und eine reelle Zahl b. Zeigen Sie, dass $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ die Gleichung einer Ebene und $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ die Gleichung einer Geraden ist!

Aufgabe 7.53 Lösung

Ein Stab ist mit einem Ende im Koordinatenursprung gelagert, ansonsten aber frei beweglich. An das andere Ende des Stabes im Punkt $(1,2,1)$ greife die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ an. Berechnen Sie die Richtung der Drehachse, das Drehmoment und seinen Betrag! Vergleichen Sie die Situation mit der von Aufgabe 6.45c)!

Ebenen

Aufgabe 7.54 Lösung

Geben Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte $(1,1,0)$, $(2,3,3)$ und $(1,2,4)$ in Parameterform und in parameterfreier Form an!

Aufgabe 7.56 Lösung

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ enthält (Parameterform und parameterfrei)!

Aufgabe 7.57 Lösung

Geben Sie die Gleichung der Ebene $x + 2y + 3z = 6$ in Parameterform an!

Aufgabe 7.58 Lösung

Geben Sie die Gleichung der Ebene, die den Punkt $P(9,4,3)$ enthält und zum Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist, in parameterfreier und in Parameterform an!

Aufgabe 7.59

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte $(1,1,3)$, $(-3,2,8)$ und $(3,-1,-3)$ in parameterfreier Form!

b) Zerlegen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}$ in eine zu dieser Ebene orthogonale Komponente und eine Komponente in dieser Ebene!

Aufgabe 7.60

a) Zerlegen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ in eine zur Ebene $x+y-2z=0$ orthogonale Komponente und eine Komponente in dieser Ebene!

b) Geben Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $(7,5,0)$ auf die Ebene $x+y-2z=0$ an und bestimmen Sie den Abstand zwischen diesem Punkt und der Ebene!

Aufgabe 7.61 Lösung

Zeigen Sie mit Mitteln der Vektorrechnung, dass die Mittelpunkte der Seiten eines aus vier beliebigen Punkten des $\mathbb{R}^3$ gebildeten Vierecks in einer Ebene liegen und ein Parallelogramm bilden! (Zu Letzterem siehe auch Aufgabe 7.8.)

Aufgabe 7.62 Lösung

Ermitteln Sie die Schnittgerade der Ebenen $x-2y+3z=4$ und $3x+y-5z=5$ (vgl. Aufgaben 7.97 und 6.101c)) unter Anwendung des Kreuzproduktes!

Aufgabe 7.63 Lösung

Ermitteln Sie unter Anwendung des Kreuzproduktes die parameterfreie Darstellung der Gleichung der Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 7.68 Lösung

In welchem Punkt schneidet die Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Ebene $x+3y-z=1$?

Aufgabe 7.69

Die Ebene E sei durch die Punkte $(1,0,1)$, $(2,2,0)$ und $(3,-1,-2)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!

b) Geben Sie den Schnittpunkt der Ebene mit der z–Achse und die Schnittgerade der Ebene mit der x–y–Ebene an!

c) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebene $x+3y+z=3$ mit der Ebene E !

d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(17,2,9)$ auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!

e) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(17,2,9)$ von der Ebene E ?

Aufgabe 7.70 **Lösung**

Die Ebene E sei durch die Punkte $(1,5,3)$, $(2,-1,0)$ und $(3,3,1)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene E mit den Koordinatenebenen!
c) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der Ebene E mit den Koordinatenachsen und -ebenen!
d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(-13,14,-23)$ auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!
e) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(-13,14,-23)$ von der Ebene E ?

Aufgabe 7.72 **Lösung**

Die Ebene E sei durch die Punkte $(2,1,0)$, $(5,2,1)$ und $(4,0,0)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen an!
c) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E mit der Ebene $x+3y+z=3$!
d) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(6,14,-12)$ auf die Ebene E sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E!

Aufgabe 7.73 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass die Geraden $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen!
b) Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form an!
c) Ermitteln Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $P(6,14,-12)$ auf diese Ebene sowie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene!

Aufgabe 7.76

Gegeben seien die Punkte $(0,2,1)$, $(1,5,2)$ und $(3,1,0)$.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den 3 Punkten gebildeten Dreiecks!
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E durch die 3 Punkte in Parameterform und in parameterfreier Form!
c) Bestimmen Sie die Geradengleichung des Lotes vom Punkt $(3,4,1)$ auf die Ebene E, den Lotfußpunkt sowie den Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene!

Aufgabe 7.77 **Lösung**

Die Punkte $A(3,0,-1)$, $B(3,3,0)$ und $C(7,3,1)$ liegen in der Ebene E.

a) Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene E und die Gleichung der Ebene in parameterfreier Form!
b) Zerlegen Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$ in eine zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ parallele und eine zu diesem orthogonale Komponente!
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC **sowohl** mithilfe des Ergebnisses von a) **als auch** mithilfe des Ergebnisses von b)!
d) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $(13,20,-20)$ auf die Ebene E und den Abstand dieses Punktes von der Ebene!

Aufgabe 7.80 **Lösung**

Gegeben seien die Punkte $A(1,2,1)$, $B(2,3,0)$, $C(3,1,-2)$ und $D(-8,3,-4)$.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC !
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in parameterfreier Form!
c) Bestimmen Sie die Geradengleichung des Lotes von D auf die Ebene E !
d) Ermitteln Sie den Fußpunkt dieses Lotes und den Abstand zwischen dem Punkt D und der Ebene E !
e) In welchem Winkel schneidet die Gerade durch die Punkte D und A die Ebene E ?

Aufgabe 7.81

Gegeben seien die Punkte $A(1,0,0)$, $B(2,-1,-1)$, $C(1,1,-1)$ und $D(2,2,-1)$.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC !
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in parameterfreier Form!
c) Bestimmen Sie die Geradengleichung des Lotes von D auf die Ebene E !
d) Ermitteln Sie den Fußpunkt dieses Lotes und den Abstand zwischen dem Punkt D und der Ebene E !
e) In welchem Winkel schneidet die Gerade durch die Punkte A und D die Ebene E ?

Aufgabe 7.86 **Lösung**

Betrachtet werden die Dreiecke ABC mit den Eckpunkten $A(1,0,-1)$, $B(2,2,1)$, $C(4,-2,5)$ und DEF mit den Eckpunkten $D(4,4,11)$, $E(5,6,13)$ und $F(7,2,17)$.

a) Zeigen Sie, dass die Dreiecke kongruent und parallel zueinander sind!
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!
d) Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

Aufgabe 7.87 **Lösung**

a) Ermitteln Sie die parameterfreie Gleichung der Ebene, die die Punkte $(3,1,1)$ und $(2,2,2)$ enthält und zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel ist!
b) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(-10,6,-10)$ auf diese Ebene und den Lotfußpunkt!
c) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(-10,6,-10)$ von der Ebene?

Aufgabe 7.90 **Lösung**

Bestimmen Sie den Spiegelpunkt des Koordinatenursprungs an der Ebene $3x+2y-4z=58$!

Aufgabe 7.91 **Lösung**

Gegeben seien die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $E_2: \; 2x + 8y + z = 36$ sowie die Gerade $g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Gleichung der Ebene E_1 in parameterfreier Form an!
b) Ermitteln Sie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_1 sowie den Abstand zwischen der Gerade g und der Ebene E_2 !
c) In welcher Gerade schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 ?

Aufgabe 7.93 **Lösung**

Bestimmen Sie, sofern sie existiert, die Gleichung der Ebene, die zur Ebene $5y - 12z = 0$ senkrecht ist und die

a) die Ebene $5y-12z=0$ in der y-Achse schneidet,
b) die Ebene $5y-12z=0$ in der x-Achse schneidet!

Aufgabe 7.94 **Lösung**

Bestimmen Sie, sofern sie existiert, die Gleichung der Ebene, die zur Ebene $5y - 12z = 0$ senkrecht ist und die

a) von der x-Achse den Abstand 26 hat,
b) von der y-Achse den Abstand 5 hat!

Aufgabe 7.95 **Lösung**

Bestimmen den Mittelpunkt und Radius des Kreises, der bei Rotation des Punktes $(-1, -2, 10)$ um die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, sowie die Gleichung der Ebene, in der dieser Kreis liegt!

Aufgabe 7.96 **Lösung**

Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen $-x + 2y + 2z = 4$ und $2x + y - 4z = -3$!

Aufgabe 7.97 **Lösung**

Ermitteln Sie Schnittgerade und Schnittwinkel der Ebenen $x-2y+3z=4$ und $3x+y-5z=5$!

Aufgabe 7.98 **Lösung**

Welchen Winkel bildet die Schnittgerade der Ebenen $x + 2y - z = 1$ und $2x + y + 3z = 1$

a) mit der x–Achse,
b) mit der x–y–Ebene?

Aufgabe 7.101 **Lösung**

Untersuchen Sie die Lagebeziehungen der Ebenen $x+2y+3z=4\cdot 10^{120}$, $-x+4y+2z=10^{122}$ und $8x-2y+az=b+2\cdot 10^{121}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b ! (Die Gleichung der ggf. existierenden Schnittmenge der 3 Ebenen muss nicht angegeben werden.)

Aufgabe 7.103 **Lösung**

Gegeben seien die Ebenen E_1: $x+2y+3z=6$, E_2: $2x+4y+6z=6$, E_3: $2x+4y+6z=12$ und E_4: $2x-4y+6z=12$. Bestimmen Sie die Lagebeziehungen dieser Ebenen untereinander, ermitteln Sie den Abstand und ggf. die Schnittgerade und den Schnittwinkel!

Aufgabe 7.104 **Lösung**

In welchen Punkten schneiden folgende Geraden die Ebene durch die Punkte $(1,1,0)$, $(2,3,3)$ und $(1,2,4)$:

a) $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 8\\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\\ 8\\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3\\ 8\\ 17 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 4\\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3\\ 8\\ 17 \end{pmatrix}$?

Welcher Zusammenhang besteht zur Lösung von Aufgabe 6.7a)?

Aufgabe 7.105 **Lösung**

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der orthogonalen Projektion des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(24,16,14)$ in die Ebene $3x+2y+z=6$!

Windschiefe Geraden

Aufgabe 7.106

Gegeben seien die Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14\\ 0\\ 9 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die zu beiden Geraden senkrechte Richtung (Richtung des gemeinsamen Lotes)!
b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden durch Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors auf die Richtung des gemeinsamen Lotes!
c) Bestimmen Sie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes durch Lösung eines Gleichungssystems!

Aufgabe 7.107 **Lösung**

In einem kartesischen Koordinatensystem mit den Koordinaten x, y und z werden die z-Achse sowie die Gerade durch die Punkte $(-1,7,6)$ und $(-5,10,7)$ betrachtet.

a) Ermitteln Sie die zu diesen beiden Geraden senkrechte Richtung (Richtung des gemeinsamen Lotes)!
b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden durch Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors auf die Richtung des gemeinsamen Lotes!
c) Bestimmen Sie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes durch Lösung eines Gleichungssystems!

Aufgabe 7.108 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zueinander windschief sind!
b) Ermitteln Sie die Richtung ihres gemeinsamen Lotes!
c) Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot enthält!
d) Wo schneidet diese Ebene die Gerade g_2 ?
e) Wo beginnt das Lot auf der Geraden g_1 ?
f) Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden voneinander?
g) Ermitteln Sie zwei zueinander parallele Ebenen, von denen die eine die Gerade g_1 und die andere die Gerade g_2 enthält! Welchen Abstand haben diese Ebenen voneinander?

Aufgabe 7.109

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 7.111 **Lösung**

Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade, die die Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im rechten Winkel schneidet und ermitteln Sie den Abstand der beiden gegebenen Geraden!

Aufgabe 7.113 **Lösung**

Bestimmen Sie den Abstand der Gerade durch die Punkte $(15, -3, -14)$ und $(17, -2, -16)$ von den drei im Folgenden genannten Geraden! In welchen Punkten der Geraden wird der Abstand realisiert?

a) Gerade $z = -x + 1$ in der x-z-Ebene,
b) x-Achse,
c) Schnittgerade der Ebenen $x = 2y$ und $z = -2y$.

Aufgabe 7.114 **Lösung**

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -30 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonale Richtung!
b) Projizieren Sie die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$ auf den bei a) ermittelten Vektor!
c) Ermitteln Sie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ und $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$ sowie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ und $\vec{x} = \vec{c} + t\vec{v}$!
d) Welches der bei c) betrachteten Geradenpaare liegt in einer Ebene? Geben Sie deren Gleichung in parameterfreier Form an!

Spatprodukt

Aufgabe 7.115

Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelepipeds, das ist ein von drei Paaren paralleler und kongruenter Parallelogramme begrenzter Hexaeder! Projizieren Sie hierzu den einen Vektor auf den Normalenvektor der von den beiden anderen Vektoren aufgespannten Ebene!

Aufgabe 7.116 **Lösung**

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds)!

Aufgabe 7.118 **Lösung**

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{b} \times \vec{c}$ sowie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelepipeds)!

Aufgabe 7.119 **Lösung**

Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ (Längeneinheit jeweils cm) aufgespannten Parallelepipeds in Litern!

Aufgabe 7.120 **Lösung**

Beweisen Sie, das die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ genau dann in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, wenn ihr Spatprodukt $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ positiv ist!

Aufgabe 7.121 **Lösung**

Ein Prisma ist „ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung einer ebenen Fläche (der Grundfläche) entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht.“ (Wikipedia bis 2006) Die Grundfläche sei das Dreieck ABC, die dazu parallele Deckfläche DEF. Gegeben seien die Punkte $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,3)$, $C = (3,2,1)$ und $D = (5,6,6)$.

a) Bestimmen Sie die Punkte E und F !
b) Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche, die Höhe und das Volumen des Prismas!

Aufgabe 7.123 **Lösung**

Bestimmen Sie mithilfe des Spatproduktes den Parameter d so, dass die Punkte $A(1,1,2)$, $B(5,5,2)$, $C(0,2,-1)$ und $D(1,0,d)$ in einer Ebene liegen!

Aufgabe 7.124 **Lösung**

Ein oben offener quaderförmiger Behälter mit einer Grundfläche von 30 cm $\times$ 20 cm und einer Höhe von 50 cm werde durch eine Flüssigkeit senkrecht von oben mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s gefüllt. Wie lange dauert es, bis der Behälter vollständig gefüllt ist? Wie ließe sich die Berechnung mit dem Spatprodukt darstellen?

Aufgabe 7.125 **Lösung**

In einer Flüssigkeitsströmung befindet sich ein oben offener quaderförmiger Behälter mit einer Grundfläche von 30 cm $\times$ 20 cm und einer Höhe von 50 cm. Die Fließgeschwindigkeit beträgt 0,5 m/s, die Fließrichtung bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 30^{o} und ist orthogonal zur kurzen Seite der Grundfläche.

a) Legen Sie ein geeignetes Koordinatensystem fest und geben Sie in diesem die Strömung vektoriell an!
b) Wie lange dauert es, bis der Behälter vollständig gefüllt ist?

Aufgabe 7.129 **Lösung**

Bei einem spatförmigen Behälter werde die Grundfläche ausgehend vom Punkt $A(-2,0,1)$ durch die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ aufgespannt, die ihr gegenüberliegende Fläche sei offen. Der dritte den Spat von A ausgehend aufspannende Vektor sei $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$. Längeneinheit ist der Meter.

a) Bestimmen Sie die Eckpunkte des Spates!
b) Berechnen Sie das Volumen des Behälters!
c) Welche Masse hat der Behälter, wenn für seinen Bau Material der Dichte von $5\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2$ verwendet wurde?
d) Der Behälter befinde sich in einer Flüssigkeitsströmung. Wie lange dauert es, bis er gefüllt ist, wenn die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beträgt?

8 Lineare Optimierung

Modellierung

Aufgabe 8.1 **Lösung**

In einer Tischlerei sind unter anderem drei Sorten Tische in der Produktion. Die Lieferung einer gewissen Anzahl von Tischen wurde bereits fest vereinbart. Der Zeit- und Materialaufwand soll jeweils gewisse Fonds nicht überschreiten:

in gewissen Einheiten	Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Fonds
Gewinn je Stück	3	1	2	
Zeitaufwand je Stück	2	1	1	40
Materialaufwand je Stück	4	2	3	100
fest vereinbart	3	2	2	

Stellen Sie das Modell zur Maximierung des Gewinns unter den vorgegebenen Bedingungen auf!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 8.2 **Lösung**

In einem Konfektionsbetrieb ist eine Jacke in 3 Größen je mindestens 4200 mal zu fertigen. Für den Zuschnitt aus den hierfür verwendeten Stoffballen stehen 4 Varianten zur Verfügung:

Variante	1	2	3	4
Größe S	3	12	0	8
Größe M	6	0	7	0
Größe L	2	0	4	4

Stellen Sie das mathematische Modell für die Minimierung des für diesen Auftrag erforderlichen Bedarfs an Stoffballen auf!

Aufgabe 8.3 **Lösung**

In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1 und R_2 Erzeugnisse E_1 und E_2 hergestellt, wobei je Erzeugnis E_1 3 Geldeinheiten und je Erzeugnis E_2 7 Geldeinheiten Gewinn erwirtschaftet werden.

Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_1 werden 1 Einheit R_1, 5 Einheiten R_2, 3 Einheiten Energie und 20 Minuten Arbeitszeit benötigt, während für die Herstellung eines Erzeugnisses E_2 3 Einheiten R_1, 2 Einheiten R_2, 2 Einheiten Energie und 1 Stunde Arbeitszeit benötigt werden.

Stellen Sie das mathematische Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn insgesamt 350 Einheiten R_1, 1050 Einheiten R_2, 630 Einheiten Energie und 168 Stunden Arbeitszeit zur Verfügung stehen!

Aufgabe 8.5 **Lösung**

Ein Unternehmen produziert drei Erzeugnisse E_1, E_2 und E_3, für deren Herstellung Erzeugnisse E_1 bis E_3 selbst sowie Rohstoffe R_1 bis R_4 gemäß folgender Tabelle benötigt werden:

	Eigenverbrauch an			Verbrauch an				Gewinn
	E_1	E_2	E_3	R_1	R_2	R_3	R_4	
je E_1	1/2	0	1/4	2	4	0	2	2
je E_2	0	0	1/4	1	1	1	0	1
je E_3	1/2	1/2	0	0	3	0	4	3

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn bereits 5 E_1, 8 E_2 und 6 E_3 vertraglich gebunden sind sowie an Rohstoffen 150 Einheiten R_1, 200 Einheiten R_2, 50 Einheiten R_3 und 200 Einheiten R_4 zur Verfügung stehen!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Grafische Lösung

Aufgabe 8.7 **Lösung**

Lösen Sie folgende Optimierungsaufgaben auf grafischem Wege:

a)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2&\to\max\\ 2x_1-x_2&\geq 2\\ -x_1+2x_2&\leq 5\\ x_1\geq 2,\ x_2&\geq 1\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2&\to\min\\ 2x_1-x_2&\geq 2\\ -x_1+2x_2&\leq 5\\ x_1\geq 2,\ x_2&\geq 1\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -4x_1+2x_2&\to\max\\ 2x_1-x_2&\geq 2\\ -x_1+2x_2&\leq 5\\ x_1\geq 2,\ x_2&\geq 1\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -x_1+x_2&\to\max\\ 2x_1-x_2&\geq 2\\ 3x_1-x_2&\leq 3\\ x_1\geq 2,\ x_2&\geq 1\end{aligned}$$

Aufgabe 8.8 **Lösung**

Lösen Sie das mathematische Modell von 8.3 grafisch!

Aufgabe 8.9

In einem Landwirtschaftsbetrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Der Betrieb verfügt über Ställe für 75 Kühe und 300 Schafe sowie über 27 ha Weideland. Von letzterem werden pro Kuh 2500 m^2 und pro Schaf 500 m^2 benötigt. Zur Versorgung des Viehs können jährlich bis zu 15000 Arbeitsstunden geleistet werden. Für eine Kuh sind jährlich 150, für ein Schaf jährlich 25 Arbeitsstunden erforderlich. Der jährlich erzielbare Gewinn beträgt 100 € pro Kuh und 18 € pro Schaf. Ermitteln Sie auf grafischem Wege, welcher Gewinn maximal erzielbar ist!

Aufgabe 8.10 **Lösung**

Eine Elektronikfirma stellt aus Draht, Spulen und Widerständen Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und aus den Baugruppen und aus Draht Geräte G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Baugruppe B_1 12 Einheiten Draht, 3 Spulen und 2 Widerstände, für eine Baugruppe B_2 15 Einheiten Draht, 2 Spulen und 4 Widerstände und für eine Baugruppe B_3 10 Einheiten Draht, 2 Spulen und 2 Widerstände benötigt. Für ein Gerät G_1 werden 2 Baugruppen B_1, eine Baugruppe B_3 und 20 Einheiten Draht benötigt, während für ein Gerät G_2 je eine Baugruppe B_1, B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Draht benötigt werden.

Für die Herstellung von y_i Geräten G_i $(i=1,2)$ und zusätzlich x_i Baugruppen B_i $(i=1,2,3)$ sollen 705 Einheiten Draht, 105 Spulen und 120 Widerstände vollständig verbraucht werden. Die Geräte G_1 und G_2 werden zu Preisen von 40 bzw. 53 Geldeinheiten verkauft, die Baugruppen B_1, B_2 und B_3 zu Preisen von 8, 12 bzw. 4 Geldeinheiten. Ermitteln Sie die zur Erzielung des unter den gegebenen Bedingungen maximal erreichbaren Erlöses herzustellenden Stückzahlen und den dabei erreichbaren Erlös! Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
b) Lösen Sie das Gleichungssystem für x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 mit dem Gaußalgorithmus zunächst ohne Rücksicht auf Ganzzahligkeits- und Nichtnegativitätsforderungen! Stellen Sie die Lösung dabei so dar, dass y_1 und y_2 frei gewählt werden können.
c) Nun soll gesichert werden, dass weder die Anzahl der herzustellenden Geräte noch die der Baugruppen negativ wird. Stellen Sie dazu aus der Lösung von b) ein lineares Ungleichungssystem auf und lösen dieses auf grafischem Wege!
d) Schließlich soll noch gesichert werden, dass die Anzahl der herzustellenden Geräte und Baugruppen ganzzahlig ist. Welche Lösungen sind möglich?
e) Welche der Lösungen ist optimal?

Aufgabe 8.11 **Lösung**

Ein Getränkehersteller stellt aus Wasser und zwei Zusatzstoffen Z_1 und Z_2 Grundmischungen B_1, B_2 und B_3 und aus den Grundmischungen und aus Wasser Fertiggetränke G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Einheit Grundmischung B_1 12 Einheiten Wasser, 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2, für eine Einheit B_2 15 Einheiten Wasser, 2 Einheiten Z_1 und 4 Einheiten Z_2 und für eine Einheit B_3 10 Einheiten Wasser, 2 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 benötigt. Für eine Einheit Fertiggetränk G_1 werden 2 Einheiten B_1, eine Einheit B_3 und 20 Einheiten Wasser benötigt, während für eine Einheit G_2 je eine Einheit B_1, B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Wasser benötigt werden.

Für die Herstellung von y_i Einheiten Fertiggetränk G_i $(i=1,2)$ und zusätzlich x_i Einheiten Grundmischung B_i $(i=1,2,3)$ sollen 705 Einheiten Wasser, 105 Einheiten Z_1 und 120 Einheiten Z_2 vollständig verbraucht werden. Die Fertiggetränke G_1 und G_2 werden zu Preisen von 40 bzw. 53 Geldeinheiten pro Einheit verkauft, die Grundmischungen B_1, B_2 und B_3 zu Preisen von 8, 12 bzw. 4 Geldeinheiten pro Einheit. Sämtliche Ausgangsstoffe, Zwischen- und Endprodukte können beliebig geteilt werden, also nicht nur in ganzen Einheiten verwendet oder abgegeben werden. Ermitteln Sie die zur Erzielung des unter den gegebenen Bedingungen maximal erreichbaren Erlöses herzustellenden Mengen und den dabei erreichbaren Erlös!

Simplexverfahren

Aufgabe 8.12 **Lösung**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 \qquad &= 8 \\ x_3 + x_4 \qquad + x_6 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Algorithmus! Welche der Variablen in der von Ihnen ermittelten Lösung werden im Zusammenhang mit dem Simplexverfahren als Basisvariablen, welche werden als Nichtbasisvariablen bezeichnet? Geben Sie eine Basislösung an!

Aufgabe 8.13 **Lösung**

Überführen Sie die in Aufgabe 8.7 betrachteten Optimierungsaufgaben

a)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\to \max \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\to \min \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\to \max \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\to \max \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 2,\ x_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

in Normalform und lösen Sie sie mit dem Simplexverfahren!

Aufgabe 8.14 **Lösung**

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) auf grafischem Wege **und**
b) mit dem Simplexverfahren!

Zeichen Sie die bei dem Simplexalgorithmus durchlaufenen Basislösungen in das Bild der grafischen Lösung ein!

Aufgabe 8.15

Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\longrightarrow \max \\ 3x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1,\quad x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad !$$

Aufgabe 8.16 **Lösung**

Bestimmen Sie unter den Nebenbedingungen $2x_1 + 3x_2 \leq 21$, $3x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 5$ die Optima der Zielfunktionen

a) $z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$,
b) $z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \min$,
c) $z = 4x_1 + 6x_2 \longrightarrow \max$

jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die beim Simplexverfahren durchlaufenen Basislösungen jeweils in die Skizze der grafischen Lösung ein! Für welche Argumente x_1, x_2 werden die Optima erreicht?

Aufgabe 8.19 **Lösung**

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $z(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 + 4$ für solche x_1 und x_2, die die Bedingungen $2x_1 - 2x_2 \geq 5$, $-x_1 + 4x_2 \leq -1$, $x_1 \geq 2$ und $x_2 \geq -1$ erfüllen, jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die bei dem Simplexalgorithmus durchlaufenen Basislösungen in die Skizze der grafischen Lösung ein. Für welche Argumente werden die Optima erreicht?

Aufgabe 8.22 **Lösung**

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 32x_1 + 48x_2 &\longrightarrow \max \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 80 \\ 21x_1 + 28x_2 &\leq 630 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
mit Hilfe des Simplexverfahrens die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Aufgabe 8.23

Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\longrightarrow \min \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
!

Aufgabe 8.24 **Lösung**

Lösen Sie mit dem Simplexalgorithmus die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6 &\longrightarrow \min \\ -2x_1 + 6x_2 &\leq 13 \\ -x_1 + 12x_2 &\leq 29 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
!

Aufgabe 8.25 **Lösung**

Ermitteln Sie für die lineare Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 1 &\to \max \\ 4x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert mit dem Simplexalgorithmus!

Aufgabe 8.27 **Lösung**

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\longrightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$
auf zwei verschiedenen Wegen, und zwar a) auf grafischem Wege und
b) mit dem Simplexverfahren!

Aufgabe 8.30 **Lösung**

Überführen Sie die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 20 \\ x_1 \geq 3, \quad x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$
in Normalform, bestimmen Sie mit Hilfe eines Hilfsproblems eine zulässige Basislösung und lösen Sie davon ausgehend die Ausgangsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Hätte das auf diesem Wege erhaltene Ergebnis auch einfacher ermittelt werden können?

Aufgabe 8.31 **Lösung**

Wenden Sie auf die Optimierungsaufgaben

a) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \longrightarrow & \max \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ x_1, \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$ und b) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \longrightarrow & \max \\ -x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ x_1 - x_2 & \geq & 1 \\ x_1, \; x_2 & \geq & 0 \end{array}$

die Simplexmethode an und veranschaulichen Sie die Situation auf grafischem Wege!

Aufgabe 8.32

Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - 2x_3 & \to & \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq & 16 \\ \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0} \end{array}$$
mit dem Simplexverfahren!

Aufgabe 8.33 **Lösung**

Lösen Sie die Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 & \to & \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 & = & 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 & = & 12 \\ x_1, \; x_3, \; x_4, \; x_5 & \geq & 0 \\ x_2 & \leq & 0 \end{array}$$
!

Aufgabe 8.35 **Lösung**

Bestimmen Sie mit der Simplexmethode die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert der Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 & \longrightarrow & \max \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 & \geq & -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0} \end{array}$$
!

Aufgabe 8.37 **Lösung**

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 3x_2 - x_3 & \to & \max \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ -x_2 + 2x_3 & \leq & 15 \\ -5x_2 + 3x_3 & \leq & 12 \\ \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0} \end{array}$$
die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Aufgabe 8.40 **Lösung**

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe
$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 5x_2 + x_3 & \to & \max \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + 5x_2 & \leq & 10 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0} \end{array}$$
mit Hilfe des Simplexverfahrens die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Aufgabe 8.42 **Lösung**

Ein Eisverkäufer verkauft Eisportionen „Vanilletraum“ mit 3 Kugeln Vanille- und 1 Kugel Schokoeis sowie „Schokotraum“ mit 1 Kugel Vanille- und 3 Kugeln Schokoeis. Er erzielt pro Portion Vanilletraum einen Gewinn von 3 Geldeinheiten und pro Portion Schokotraum einen Gewinn von 2 Geldeinheiten. Zur Verfügung stehen 630 Kugeln Vanille- und 450 Kugeln Schokoeis. Wie viele Portionen der beiden Sorten müssen verkauft werden, um den in dieser Situation maximal möglichen Gewinn zu erreichen? Stellen Sie das mathematische Modell hierzu auf und lösen Sie es mit dem Simplexverfahren!

Aufgabe 8.45 **Lösung**

In einer Werkstatt werden kleine und große Regale gefertigt. Zur Herstellung eines kleinen Regals wird 1 Stunde benötigt, dabei entstehen Kosten in Höhe von 50 € und beim Verkauf ist ein Gewinn von 20 € zu erzielen. Ein großes Regal wird in 4 Stunden hergestellt, die Herstellungskosten betragen 300 € und der zu erzielende Verkaufsgewinn 130 €. Es stehen maximal 100 Stunden zur Verfügung, die Herstellungskosten sollen insgesamt 6000 € nicht überschreiten.

a) Stellen Sie das mathematische Modell für die Gewinnmaximierung unter diesen Bedingungen auf!
b) Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe mittels Simplexverfahren! Wie groß ist der maximale Gewinn?
c) Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.46 **Lösung**

In einem Betrieb werden aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 mit gleichem Aufwand Erzeugnisse E_1 und E_2 gefertigt, wobei pro Erzeugnis E_1 2 Geldeinheiten und pro Erzeugnis E_2 1 Geldeinheit Gewinn erwirtschaftet werden.

Für ein Erzeugnis E_1 werden 1 Einheit R_1, 2 Einheiten R_2 und 3 Einheiten R_3 benötigt, während pro Erzeugnis E_2 3 Einheiten R_1, 3 Einheiten R_2 und 1 Einheit R_3 benötigt werden.

Stellen Sie das Modell für die Gewinnmaximierung auf, wenn 18 Einheiten R_1, 21 Einheiten R_2 und 21 Einheiten R_3 zur Verfügung stehen, und lösen Sie diese Optimierungsaufgabe!

Aufgabe 8.47

In einer Tischlerei sind unter anderem drei Sorten Tische in der Produktion. Die Lieferung einer gewissen Anzahl von Tischen wurde bereits fest vereinbart. Der Zeit- und Materialaufwand soll jeweils gewisse Fonds nicht überschreiten:

in gewissen Einheiten	Tisch 1	Tisch 2	Tisch 3	Fonds
Gewinn je Stück	3	1	2	
Zeitaufwand je Stück	2	1	1	40
Materialaufwand je Stück	4	2	3	100
fest vereinbart	3	2	2	

Überführen Sie das mathematische Modell (Aufgabe 8.1) in Normalform und lösen Sie die Aufgabe mit dem Simplexverfahren!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 8.48

Ein Unternehmen stellt unter Verwendung von 3 Rohstoffen 3 Erzeugnisse her, wobei der Verbrauch an den einzelnen Rohstoffen gewisse Fonds nicht überschreiten darf:

in gewissen Einheiten	Erzeugnis A	Erzeugnis B	Erzeugnis C	Fonds
Bedarf an Rohstoff 1 je Stück	1	2	3	3
Bedarf an Rohstoff 2 je Stück	2	3	1	12
Bedarf an Rohstoff 3 je Stück	3	1	2	12
Gewinn je Stück	4	3	3	

Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Gewinn maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele der einzelnen Erzeugnisse sind herzustellen, welcher Gewinn ist erzielbar?
c) Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.49 Lösung

Ein Betrieb stellt zwei Erzeugnisse A und B her, die pro Stück den gleichen Gewinn abwerfen. Arbeitszeit-, Energie- und Materialaufwand sind jedoch verschieden und sollen gewisse Fonds nicht überschreiten:

in gewissen Einheiten	Erzeugnis A	Erzeugnis B	Fonds
Arbeitszeitaufwand je Stück	1	2	170
Energieaufwand je Stück	2	1	100
Materialaufwand je Stück	4	1	160

a) Stellen Sie das mathematische Modell zur Maximierung des Gewinns auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe auf grafischem Wege!
c) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Zeichnen Sie die dabei durchlaufenen Basislösungen in die Skizze aus b) ein!
d) Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.51 Lösung

In einem Landwirtschaftsbetrieb werden Kühe und Schafe gehalten. Der Betrieb verfügt über Ställe für 75 Kühe und 300 Schafe sowie über 27 ha Weideland. Von letzterem werden pro Kuh 2500 m^2 und pro Schaf 500 m^2 benötigt. Zur Versorgung des Viehs können jährlich bis zu 15000 Arbeitsstunden geleistet werden. Für eine Kuh sind jährlich 150, für ein Schaf jährlich 25 Arbeitsstunden erforderlich. Der jährlich erzielbare Gewinn beträgt 100 € pro Kuh und 18 € pro Schaf.

Überführen Sie das mathematische Modell (Aufgabe 8.9) in Normalform und lösen Sie die Aufgabe mit dem Simplexverfahren! Welcher Gewinn ist maximal erzielbar? Welche Bedeutung haben die in der optimalen Lösung erreichten Werte der Schlupfvariablen?

Aufgabe 8.52 Lösung

Für die Herstellung von drei Sorten Fleischsalat stehen 50 kg Fleischwurst, 14 kg Mayonnaise und 720 Gewürzgurken zur Verfügung. Der pro Einheit der einzelnen Sorten zu erzielende Gewinn und entstehende Materialbedarf ist in folgender Tabelle dargestellt:

	Sorte A	Sorte B	Sorte C
Gewinn	5 €	5 €	8 €
Fleischwurst	3 kg	2 kg	4 kg
Mayonnaise	2 kg	3 kg	1 kg
Gewürzgurken	50	40	60

Aufgrund vertraglicher Bindung sind mindestens 2 Einheiten Sorte A herzustellen. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Gewinn maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele Einheiten der einzelnen Sorten sind herzustellen, welcher Gewinn ist erzielbar?
c) Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.53 Lösung

In einer Mensa werden die Essen 1 bis 4 (damit in der Klausur, in der die Aufgabe erstmals gestellt worden ist, mit einfachen Zahlen gerechnet werden konnte) auch zu Preisen von 1 bis 4 € verkauft. Für die einzelnen Essen entstehen Personalkosten, Wareneinsatz und sonstige Sachkosten in der in folgender Tabelle angegebenen Höhe, wobei diese Kosten insgesamt jeweils die angegebenen Fonds nicht überschreiten dürfen:

Verkaufte Portionen	Essen 1	Essen 2	Essen 3	Essen 4	Fonds
Personalkosten pro Portion	1	2	2	2	3400
Wareneinsatz pro Portion	1	1	2	2	3000
Sonstige Sachkosten pro Portion	2	2	2	3	3900
Verkaufspreis je Portion	1	2	3	4	

Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Umsatz (Erlös) maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell der Optimierungsaufgabe auf!
b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus! Wie viele Portionen der einzelnen Essen sind für maximalen Umsatz zu verkaufen, welcher Umsatz ist erzielbar?
c) Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexalgorithmus ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.54 Lösung

Lösen Sie die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3 &\to \max \\ x_1 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

mit dem Simplexverfahren!

Aufgabe 8.55 Lösung

Bestimmen Sie mit dem Simplexverfahren die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert der Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\longrightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \quad ! \end{aligned}$$

Aufgabe 8.57 **Lösung**

Ermitteln Sie für die Optimierungsaufgabe
$$\begin{aligned} -16x_1+3x_2+x_3-x_4+x_5+5900 &\longrightarrow \max \\ -x_1+2x_2+2x_3-x_4+x_5 &= 420 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5 &= 20 \\ x_1\le 400,\ x_2\ge 200,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5&\ge 0 \end{aligned}$$
mit Hilfe der Simplexmethode die optimale Lösung und den optimalen Zielfunktionswert!

Aufgabe 8.59 **Lösung**

Überprüfen Sie mit dem Simplexalgorithmus, ob das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\le 4 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &\ge 9 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

lösbar ist!

Hinweis: Versuchen Sie, mit der Hilfsaufgabe zum Simplexalgorithmus eine zulässige Basisdarstellung zu finden!

Aufgabe 8.60 **Lösung**

In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden 40 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden 20 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € erlöst. Es stehen **höchstens** je 800 hl Gartenerde und Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber **mindestens** 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
b) Wenden Sie das grafische Lösungsverfahren auf das Modell an! Welche Schlussfolgerung ergibt sich?
c) Wenden Sie das Simplexverfahren auf das Modell an!

Aufgabe 8.61

In einem Supermarkt sollen so preisgünstig wie möglich mindestens 10 gelbe, 8 rote und 10 grüne Paprikaschoten eingekauft werden. Diese werden dort nur in Netzen mit 2 gelben, 1 roten und 1 grünen Paprikaschote für 4 € und mit 1 gelben, 1 roten und 2 grünen Paprikaschoten für 3 € verkauft.

Lösen Sie die Optimierungsaufgabe mit dem Simplexverfahren! Welcher Preis muss mindestens für die gewünschte Menge gezahlt werden? Wie viele gelbe, rote und grüne Paprikaschoten werden dabei gekauft? Welche Bedeutung haben die mit dem Simplexverfahren ermittelten Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Aufgabe 8.63 **Lösung**

In einer Stanzerei werden aus Blechtafeln drei verschiedene Teile T_1, T_2 und T_3 gestanzt. Dazu werden vier verschiedene Stanzschablonen S_1, S_2, S_3 und S_4 genutzt. Bei Verwendung dieser Schablonen entstehen folgende Stückzahlen der Teile und Kosten in Geldeinheiten:

	pro Stanzvorgang			
	S_1	S_2	S_3	S_4
Anzahl T_1	1	1	0	0
Anzahl T_2	1	0	1	0
Anzahl T_3	2	4	6	8
Kosten	3	4	4	3

Es ist nun ein Auftrag von 3 T_1, 2 T_2 und 30 T_3 zu stanzen. Ermitteln Sie mit dem Simplexverfahren, wie oft die einzelnen Schablonen zur Anwendung kommen müssen, wenn die Kosten für das Stanzen minimal werden sollen! Wie viele Teile und welche Kosten entstehen dabei?

(vgl. Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 7. Aufl. Vieweg+Teubner 2009, Übungsaufgabe 4.23, S. 166)

Aufgabe 8.64 **Lösung**

Für einen Flug werden Tickets in den Beförderungsklassen Economy und Business angeboten. Die 300 Economyplätze werden zu unterschiedlichen Sonderkonditionen zu Preisen von 20 € und 220 € sowie zum Normalpreis von 420 € verkauft. Die 50 Businessplätze werden zu Sonderkonditionen zum Preis von 600 € und zum Normalpreis von 1000 € verkauft. Aufgrund einer Werbekampagne sollen in den Preiskategorien 20 € und 600 € zusammen mindestens 40 und in den Preiskategorien 220 € und 600 € zusammen mindestens 200 Tickets angeboten werden.

Ermitteln Sie mithilfe der Simplexmethode, welcher Erlös unter diesen Bedingungen maximal erzielbar ist und wieviele Tickets der einzelnen Kategorien dafür verkauft werden müssen! Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen im optimalen Ergebnis?

Aufgabe 8.65 **Lösung**

In einem Konfektionsbetrieb ist eine Jacke in 3 Größen je mindestens 1800 mal zu fertigen. Für den Zuschnitt der hierfür verwendeten Stoffballen stehen 6 Varianten zur Verfügung:

Variante	1	2	3	4	5	6
Größe S	12	0	0	6	6	0
Größe M	0	9	0	0	3	6
Größe L	0	0	8	4	2	4

Ermitteln Sie mit der Simplexmethode, wie viele Ballen mindestens benötigt werden!

9 Folgen und Reihen

Folgen

Aufgabe 9.1

Ein auf 100°C erhitzter Körper habe nach n Minuten die Temperatur $T_n = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{n}{10}}\,[°\mathrm{C}]$.

a) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge, dass die Temperatur des Körpers gegen die (Umgebungs-)Temperatur von 20°C konvergiert.
b) Ermitteln Sie, nach wieviel Minuten die Temperatur des Körpers unter 25°C, 20.5°C, 20.05°C bzw. 20.005°C gefallen ist!

Aufgabe 9.2 — Lösung

Ein Vermögen V_0 unterliegt einer jährlichen Verzinsung von 4 %, Abschreibung von 5 % und Besteuerung von 1 % jeweils auf das bzw. aus dem aktuellen Vermögen.

a) Geben Sie die Folge V_n der Vermögenswerte nach n Jahren an!
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass (V_n) gegen 0 konvergiert!
c) Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren ein Vermögen von $V_0 = 200\,000$ € unter
(i) 100 000 €, (ii) 10 000 €, (iii) 1000 €, (iv) 100 €
gefallen ist!

Aufgabe 9.3 — Lösung

An einer bestimmten Stelle betrage die Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop n Jahre nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl $A_n = 100\,\mathrm{e}^{-0.023\,n}[\mathrm{kBq}/\mathrm{m}^2]$.

a) Beweisen Sie mithilfe der Definition, dass A_n eine Nullfolge ist!
b) Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren die Flächenbelastung unter 50, 5, 0.5 bzw. 0.05 $\mathrm{kBq}/\mathrm{m}^2$ gefallen ist!

Aufgabe 9.4 — Lösung

Die Schaumhöhe in einem Bierglas betrage n Sekunden nach dem Eingießen $h_n = 4 \cdot 0.992^n$ [cm]. (vgl. Leike, A.: Demonstration of the exponential decay law using beer froth, Eur J. Phys. 23(2002), 21-26)

a) Beweisen Sie mithilfe der Definition, dass h_n eine Nullfolge ist!
b) Ermitteln Sie, nach wieviel Sekunden die Schaumhöhe unter 2, 1, 0.5 bzw. 0.1 cm gefallen ist!

Aufgabe 9.5 — Lösung

Die Folge $a_k = \dfrac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N}$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen 0, weil für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_0(\varepsilon)$ gilt. Bestimmen Sie ein solches $N_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}001$ und allgemein für beliebiges $\varepsilon > 0$!

Aufgabe 9.6 **Lösung**

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $x_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^3}$ gegen 0 konvergiert!

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+\sqrt{n}+1}{n^3}$!

Aufgabe 9.7 **Lösung**

Mit welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 20 Jahren verdreifacht?

Aufgabe 9.8 **Lösung**

Wie hoch war die durchschnittliche jährliche Inflationsrate, wenn für einen Warenkorb, für den vor 15 Jahren 100 Währungseinheiten zu zahlen waren, jetzt 150 Währungseinheiten zu zahlen sind?

Aufgabe 9.9

Wann spricht man von einer geometrischen Folge? In welchen Fällen konvergiert eine geometrische Folge, in welchen divergiert sie bestimmt und in welchen divergiert sie unbestimmt? Geben Sie im Falle der Konvergenz auch die Grenzwerte an!

Aufgabe 9.10

Untersuchen Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) konvergieren, bestimmt oder unbestimmt divergieren, und geben Sie ggf. die Grenzwerte an:

a) $a_n = (-0.99999)^n$, b) $a_n = (-1.00001)^n$, c) $a_n = 1.00001^n$,

d) $a_n = \frac{0.01\,n^6+0.1\,n^5}{100\,n^5+500\,n^4+200}$, e) $a_n = \frac{2n^5+3n^4+4n^2+7}{(3n+1)^2(4n^3-3n^2+n+3)}$, f) $a_n = \frac{n^2+9n+4}{\sqrt[4]{n^9}+2n+1}$,

g) $a_n = (2^n+(-2)^n)\,3^{-n}$, h) $a_n = (2^n+(-2)^n)\,2^{-n}$, i) $a_n = (2^{2n}+(-2)^{2n})\,2^{-2n}$,

j) $a_n = (2^{2n+1}+(-2)^{2n+1})\,2^{-(2n+1)}$,

k) $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, l) $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1000}-\sqrt{n})$,

m) $a_n = \left(10+\frac{1}{\sqrt[10]{n}}\right)^{10}$, n) $a_n = \sin n$, o) $a_n = \sin\frac{1}{n}$, p) $a_n = \frac{\sin n}{n}$!

Aufgabe 9.11

Betrachtet wird die Folge $a_n = \frac{1{,}001^n}{n}$.

a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_n für $n = 10$, 100 und 1000 !
b) Welchen Grenzwert hat die Folge?
c) Berechnen Sie die Folgenglieder a_n für $n = 10.000$, 100.000 und 1.000.000 !
d) Von welchem n an ist die Folge monoton wachsend?
e) Beweisen Sie die Aussage von b)!

Aufgabe 9.13

Berechnen Sie a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+10n^2+4}{\sqrt[3]{n^{10}}+2}$ und b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)^2\,(3n+4)}{6n^3+5n^2+4n+3}$!

Aufgabe 9.14

Lösung

Berechnen Sie a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^{100}\,n}{n^2+5}$ und b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+1)^5\,(4n^3+2)^3}{(2n+3)^8\,(n+4)^{11}}$!

Aufgabe 9.16

Lösung

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-5-\dfrac{n^3}{n^2+5}\right)$!

Aufgabe 9.17

Lösung

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^4+n^3+n^2}{2n^2+n}-2n^2-1\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^4+2n^3+n^2}{2n^2+n}-2n^2-1\right)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^4+2n^3+2n^2}{2n^2+n}-2n^2-1\right)$!

Aufgabe 9.18

Lösung

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{9n+2}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\pi$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n(n+1)\pi$!

Aufgabe 9.19

Lösung

Berechnen Sie mit Hilfe des bekannten Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+10}$!

Aufgabe 9.20

Vor ihrer Abschaffung Ende 2012 wurden Finanzierungsschätze des Bundes mit einer Laufzeit von ein und zwei Jahren zu einem Zinssatz von 0,0001 % p.a. verkauft. Geben Sie ohne Benutzung von Hilfsmitteln an, auf welchen Betrag ein Euro anwachsen würde, wenn man ihn für eine Million Jahre zu einem derartigen Zinssatz ohne Rundungseffekte anlegen würde!

Aufgabe 9.21

Lösung

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^2(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{4n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3+7n^2}{(n+2)(n+1)}-2n+1\right)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+8}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6}\right)$!

Aufgabe 9.24 **Lösung**

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{2+\sqrt[3]{5}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \frac{12n^3}{12n^2+6n+1}\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$!

Aufgabe 9.25 **Lösung**

Seien γ und a_0 positive Zahlen. Durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$ sei rekursiv eine Folge definiert.

a) Berechnen Sie für $\gamma=2$ und das Startglied $a_0=1$ einige Glieder der Folge und stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert auf!
b) Ermitteln Sie für beliebiges positives γ unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, den Grenzwert der Folge!
c) Was passiert für $a_0=\sqrt{\gamma}$?
d) Sei nun $a_0 \neq \sqrt{\gamma}$. Zeigen Sie, dass dann für $n \geq 1$ in jedem Falle $a_n > \sqrt{\gamma}$ gilt!
e) Zeigen Sie, dass im Falle $a_0 \neq \sqrt{\gamma}$ die Folge (a_n) für $n \geq 1$ streng monoton fällt!
f) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge (und damit die Zulässigkeit der Voraussetzung von b)!

Aufgabe 9.26 **Lösung**

Eine Folge von Dreiecken wird in der Weise erzeugt, dass die Seitenmitten eines Dreiecks jeweils die Eckpunkte des nächsten Dreiecks sind. Gegen welchen Punkt konvergiert dieser Prozess?

Reihen

Aufgabe 9.27 **Lösung**

a) Berechnen Sie die Partialsumme der geometrischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ und allgemein von $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $q \in \mathbb{R}$!

b) Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, geben Sie im Fall der Konvergenz die Summe an!

Aufgabe 9.28

Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe

a) $\sum\limits_{n=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, c) $\sum\limits_{n=9}^{16} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, d) $\sum\limits_{n=0}^{8} \left(\frac{3}{2}\right)^n$, e) $\sum\limits_{n=9}^{16} \left(\frac{3}{2}\right)^n$!

Aufgabe 9.29 **Lösung**

Berechnen Sie a) $\sum\limits_{m=2}^{\infty} 2^{-2m}3^m$ und b) $\sum\limits_{m=2}^{50} 2^{2m}3^{-m}$!

Aufgabe 9.30 **Lösung**

Wie groß muss n mindestens gewählt werden, damit sich die Partialsumme $\sum_{k=0}^{n} 0.9^k$ von der Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k$ um weniger als 10^{-6} unterscheidet?

Aufgabe 9.31 **Lösung**

Für den Temperaturansatz für Lastprofile werden von Energieversorgern zur Berücksichtigung der Wärmespeicherfähigkeit von Gebäuden auch Temperaturen mehrerer Vortage einbezogen. So heißt es im Lieferantenrahmenvertrag eines Energieversorgers:

„*Verwendet wird die mittels geometrischer Reihe ermittelte Temperatur T nach folgender Formel (...):* $T = (T_t + 0{,}5 \cdot T_{t-1} + 0{,}25 \cdot T_{t-2} + 0{,}125 \cdot T_{t-3})/1{,}875$
mit: T_t $=$ *Temperatur des Betrachtungstages (Prognosetemperatur)*
T_{t-1} $=$ *Temperatur des Vortages (Prognosetemperatur)*
T_{t-2} $=$ *Temperatur des Vor-Vortages (Isttemperatur)*
T_{t-3} $=$ *Temperatur des Vor-Vor-Vortages (Isttemperatur)*“

(https://www.evf.de/bilder-dateien/geschaeftspartner/lrv-anlage-4-lastprofile-okt09.pdf)

a) Notieren Sie die Formel für den Temperaturansatz unter Verwendung des Summenzeichens in Zähler **und** Nenner, wenn statt 3 nach dem gleichen Prinzip n Vortage in die Berechnung einbezogen werden!
b) Welchen Bezug haben die in der von Ihnen notierten Formel vorkommenden Ausdrücke bei korrekter mathematischer Begriffsbildung zum Begriff „geometrische Reihe“?

Aufgabe 9.32

Beim Auswaschen eines Feststoffs aus einer Lösung der Masse u wird beim k-ten Abguss ($k = 1, 2, 3, \ldots$) Feststoff der Masse $u/100^k$ gewonnen. Welche Masse des Feststoffs hat man nach n Abgüssen insgesamt gewonnen? Was ergibt sich für $n \to \infty$?

Aufgabe 9.33

Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) und die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergieren:

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) $a_n = \frac{99^n}{100^n}$, c) $a_n = \frac{101^n}{100^n}$, d) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, e) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$,
f) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, g) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, h) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
i) $a_n = \frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2}{n+1}$!

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

Aufgabe 9.34

a) Geben Sie im Falle der Konvergenz die Grenzwerte an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-3)^n$, (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}}$.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Formel für die Partialsummen: (i) $\sum_{n=0}^{5} 3^n$, (ii) $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{3^n}$.

c) Geben Sie im Falle der Konvergenz die Summen folgender Reihen an, im Falle der Divergenz, ob diese bestimmt oder unbestimmt ist:
(i) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$, (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n$, (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 9.35

Lösung

a) Geben Sie die Formeln für die Partialsummen von $(3^n)_{n=0}^{\infty}$ und $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=0}^{\infty}$ an!

b) Bestimmen Sie mithilfe dieser Formeln $\sum_{n=0}^{4} 3^n$ und $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n}$!

c) Wogegen konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$?

d) Welches Guthaben erreicht ein zu 200 % p.a. verzinstes Konto, in das 5 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 10 Währungseinheiten eingezahlt werden, am Ende des 5. Jahres?

Aufgabe 9.37

Berechnen Sie a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^n}{17^n}$ und b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17^n}{16^n}$!

Aufgabe 9.38

Lösung

Berechnen Sie a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{10^n}$ und b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{8^n}$!

Aufgabe 9.39

Lösung

Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) und die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergieren:

a) $a_n = \frac{50n^4+1000n^3+999}{2n^4+5n^2+9} + \frac{999n}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{5^n}{3^n}$, c) $a_n = \frac{5^n}{3^{2n}}$, d) $a_n = \frac{1}{(n+11)(n+12)}$,

e) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+12} - \sqrt{n})$, f) $a_n = (-1)^n$, g) $a_n = (-1)^{n(n+1)}$, h) $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$!

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

Aufgabe 9.42

Lösung

Berechnen Sie folgende Summen bzw. Reihen:

a) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$, c) $\sum_{n=1}^{100} 1.01^n$, d) $\sum_{n=10}^{\infty} (-0.04)^n$!

Aufgabe 9.44 **Lösung**

Welche der folgenden Reihen sind konvergent:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin^2 n$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, h) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-2n})$, i) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} 3^{-2n}$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Summen!

Aufgabe 9.45 **Lösung**

Berechnen Sie a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-3n} + 3^{-2n})$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$!

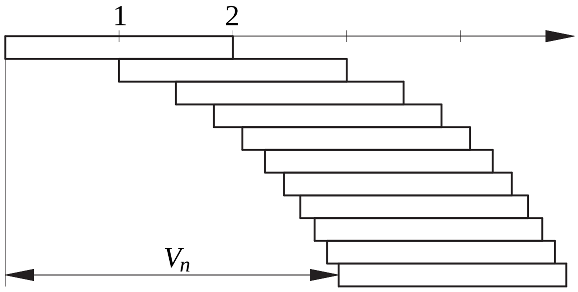
Aufgabe 9.46 **Lösung**

Berechnen Sie S_{20} und falls existent $\lim_{n \to \infty} S_n$ für

a) $S_n = \sum_{k=3}^{n} 2^k 3^{-k}$, b) $S_n = \sum_{k=3}^{n} 2^{-k} 3^k$, c) $S_n = \sum_{k=3}^{n} \left(2 - 2^{-k}\right)$!

Aufgabe 9.47 **Lösung**

n gleiche Holzbretter der Länge 2 werden so übereinander gelegt, dass in eine Richtung jedes Brett das darunterliegende so weit überragt, wie das ohne Kippen möglich ist. Bestimmen Sie die horizontale Verschiebung V_n zwischen dem obersten und dem untersten Brett! Was passiert für $n \to \infty$?



Hinweis:
Bestimmen Sie schrittweise die horizontale Komponente des Abstands zwischen maximalem Überhang und Schwerpunkt des Stapels, indem Sie den Schwerpunkt des auf einem Brett liegenden Stapels jeweils auf die Kante dieses Bretts legen!

(Meyberg, K. und Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6. Aufl. Springer 2003, S. 101)

Aufgabe 9.48 **Lösung**

Wo liegt der Fehler in der Gleichungskette

$$\begin{aligned}
2 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\\
&= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)+\cdots\\
&= (1+1)+\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{3}{4}+1\right)+\cdots+\left(-\frac{2^n-1}{2^n}+1\right)+\cdots\\
&= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\\
&= 3 \quad ?
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.49 **Lösung**

Notieren Sie die folgenden Aussagen und ihre Negationen in formaler mathematischer Schreibweise mit Existenz- und Allquantor:

a) Die Elemente der Folge $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$ nähern sich beliebig dicht der Zahl 2, wenn man nur n groß genug wählt. (Konvergenz der geometrischen Reihe)

b) Es gibt keine reelle Zahl, der sich die Elemente der Folge $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ beliebig dicht nähern. (Divergenz der harmonischen Reihe)

Aufgabe 9.50 **Lösung**

Untersuchen Sie folgende Reihen mit Quotienten- bzw. Wurzelkriterium auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$!

Hinweis: $\mathrm{e} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

10 Finanzmathematik

Zins- und Barwertrechnung

Aufgabe 10.1

Eine Bank verzinst Spareinlagen mit 4 % p.a., innerhalb der Zinsperiode wird mit einfacher Verzinsung gerechnet. Die Verzinsung beginnt mit dem Anlagedatum und endet am Tag vor dem Fälligkeitsdatum. Es wird mit 12 gleichlangen Monaten zu je 30 Tagen gerechnet („Deutsche Zinsmethode 30/360"), der 28. Februar bzw. der 30. jeden anderen Monats wird als das Monatsende angesehen.

a) Auf welchen Wert wächst ein Kapital von 5000 € innerhalb eines Vierteljahres an?
b) Welcher Betrag muss angelegt werden, damit ein Jahr später eine Summe von 5 000 € zur Verfügung steht?
c) In welcher Zeit bringt ein Kapital von 5 000 € Zinsen in Höhe von 180 €?
d) Auf welchen Wert wächst ein Kapital von 5000 € in drei Jahren an?
e) Am 16. Oktober 2010 wurden 5000 € angelegt, die Zinsen werden kalenderjährlich gutgeschrieben. Welches Guthaben stand am 16. Oktober 2013 zur Verfügung, wenn das Konto an diesem Tag aufgelöst wird?

Aufgabe 10.2 Lösung

Welches Endkapital erhielt man für ein Sparzertifikat über 8000 DM mit einer Verzinsung von 5 % und einer Laufzeit von 4 Jahren, wenn die Anlage am 15.06.1997 erfolgt war und die Zinsperiode a) das Jahr bzw. b) das Kalenderjahr war und Letzteres zu 12 Monaten von je 30 Tagen gerechnet wurde?

Aufgabe 10.3 Lösung

Eine Bank verzinst Spareinlagen mit 4 % p.a., innerhalb der Zinsperiode wird mit einfacher Verzinsung gerechnet. Die Verzinsung beginnt am Tag nach der Anlage und endet am Fälligkeitstag. Es wird mit 12 gleichlangen Monaten zu je 30 Tagen gerechnet („Deutsche Zinsmethode 30/360"), der 28. Februar bzw. der 30. jeden anderen Monats wird als das Monatsende angesehen.

Am 27.02.2000 wurden 1000 DM angelegt. Welches Kapital stand am 15.05.2003 zur Verfügung, wenn die Zinsgutschrift a) jährlich bzw. b) kalenderjährlich erfolgte?

Aufgabe 10.4 Lösung

Am 1. April eines Jahres werden 10 000 € für 4 Jahre zu 5 % Zinsen p.a. angelegt. Die Zinsen werden dem Kapital jeweils am Ende des zu 12 gleichlangen Monaten gerechneten Kalenderjahres zugeschlagen. Wie hoch ist das Guthaben nach 4 Jahren?

Aufgabe 10.6 **Lösung**

Eine Bank verzinst Einlagen mit 2,7 % p.a. und rechnet unterjährig mit einfacher Verzinsung sowie der deutschen Zinsmethode 30/360.

a) Welcher Betrag steht bei einer Anlage von 10000 € zur Verfügung, wenn das ganze Guthaben nach 4 Monaten ausgezahlt wird?
b) Welcher Betrag muss angelegt werden, um sich nach 7 Monaten 10000 € auszahlen lassen zu können?
c) Für welchen Zeitraum entstehen bei einer Anlage von 10000 € Zinsen in Höhe von 174 €?

Aufgabe 10.7 **Lösung**

Welchen Betrag muss man bei einer Verzinsung von 5 % p.a. anlegen, um nach
a) 5 Monaten, b) 5 Jahren
den Betrag von 5000 € ausgezahlt zu bekommen? Dabei soll innerhalb einer Zinsperiode mit einfacher Verzinsung gerechnet werden.

Aufgabe 10.9 **Lösung**

a) Ein Kapital von 10 000 € wird für 2 1/2 Jahre mit einer Verzinsung von 4,2 % p.a. angelegt, die jährlichen Zinsen werden dem Kapital am Ende des Sparjahres gutgeschrieben und von da an mit diesem verzinst. Auf welchen Betrag wächst das Kapital an?
b) Zu welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 20 Jahren verdoppelt?

Aufgabe 10.10 **Lösung**

Für ein Grundstück liegen zwei Angebote vor:

A: sofortige Zahlung von 200 000 €,
B: Zahlung von 100 000 € in 3 Jahren und 200 000 € in 10 Jahren.

Vergleichen Sie die beiden Angebote durch Ermittlung des Barwertes des Angebotes B bei Kalkulationszinssätzen von 6 % p.a.!

Aufgabe 10.11

Für ein Grundstück liegen zwei Angebote vor:

A: sofortige Zahlung von 100 000 €,
B: Zahlung von 50 000 € in 4 Jahren und 100 000 € in 8 Jahren.

a) Vergleichen Sie die beiden Angebote durch Ermittlung des Barwertes des Angebotes B bei Kalkulationszinssätzen von 5 % und 7 % p.a.!
b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Angebote gleich?

Aufgabe 10.12 **Lösung**

Für eine Anschaffung liegen zwei Finanzierungsangebote vor:
A: sofortige Zahlung von 5000 € und Zahlung von 9000 € in 2 Jahren,
B: sofortige Zahlung von 3000 € und Zahlung von 12500 € in 4 Jahren.

a) Ermitteln Sie die Barwerte beider Finanzierungsangebote zum Anschaffungszeitpunkt bei einem Kalkulationszinssatz von 7 % p.a.! Welches Angebot ist bei diesem Kalkulationszinssatz günstiger?
b) Für welchen Kalkulationszinsatz sind die Barwerte beider Finanzierungsangebote zum Anschaffungszeitpunkt gleich?

Aufgabe 10.13 **Lösung**

Welchen aktuellen Barwert hat eine in 5 Jahren fällige Forderung von 50000 €

a) für eine finanziell gut ausgestattete Person, die ihr Vermögen auf einem mit 3 % verzinsten Konto anlegt,
b) für eine verschuldete Person, die den Zahlungseingang zur Minderung einer mit 8 % verzinsten Schuld einsetzen will?

Aufgabe 10.14 **Lösung**

Der Kaufpreis einer Ware in Höhe von 10 000 € soll in 2 Teilbeträgen von je 5 000 € nach einem Monat bzw. nach zwei Monaten gezahlt werden. Welcher Rabatt ist bei sofortiger Barzahlung zu gewähren, wenn man von einfacher Verzinsung mit einem Kalkulationszinssatz von a) 3 %, b) 6 %, c) 12 % ausgeht?

Aufgabe 10.15 **Lösung**

Bei einem Computerkauf kann ein Kunde zwischen sofortiger Barzahlung von 1000 € und einer „Zahlpause“ von 2 Monaten wählen, wobei er dann 1008 € zu zahlen hat.

a) Vergleichen Sie die Barwerte zum Kaufdatum bei einem Kalkulationszinssatz von 4 % p.a. und einfacher Verzinsung!
b) Für welchen Kalkulationszinssatz bei einfacher Verzinsung sind die Barwerte gleich?

Aufgabe 10.16 **Lösung**

Bei einem Tarifabschluss wurde vereinbart, die Gehälter um 2,40 % zu erhöhen, sie aber einen halben Monat später als bisher auszuzahlen. Um wieviel steigt der Barwert der Gehälter bezogen auf den ursprünglichen Auszahlungszeitpunkt, wenn mit einem Kalkulationszinssatz von 3 % p.a. und einfacher Verzinsung gerechnet wird?

Aufgabe 10.17 **Lösung**

Wie groß ist bei einem Kalkulationszins von 5 % der Barwert einer am 30. September fälligen Forderung in Höhe von 20 000 €

a) am 15. August des gleichen Jahres,
b) am 15. August des Folgejahres,

wenn das Jahr zu 360 Zinstagen, der Monat zu 30 Zinstagen und mit einfacher Verzinsung gerechnet wird?

Aufgabe 10.18 **Lösung**

Für den Erwerb einer Ware mit einem Barpreis von 1000 € wird dem Käufer ein Teilzahlungsangebot ohne Anzahlung mit 4 Raten zu je 270 € unterbreitet, die nach 3, 6, 9 und 12 Monaten zu zahlen sind.

Welchem Barwert bei einfacher Verzinsung entspricht das Teilzahlungsangebot, wenn der Käufer

a) von einem Kalkulationszinssatz von 3 % p.a. ausgeht, da er den Barpreis einem entsprechend verzinsten Konto entnehmen könnte, bzw.
b) von einem Kalkulationszinssatz von 11 % p.a. ausgeht, da er für die sofortige Barzahlung seinen entsprechend zu verzinsenden Dispokredit in Anspruch nehmen müsste?
c) Wie hoch müsste die Teilzahlungsrate sein, damit diese einer Verzinsung des Barpreises von 11 % p.a. entsprechen würde?

Aufgabe 10.19 **Lösung**

Eine Handwerkerrechnung ist 30 Tage nach Rechnungsdatum zur Zahlung fällig. Bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen nach Rechnungsdatum wird ein Skonto von 2 % gewährt. Bei welchem Kalkulationszinssatz für einfache Verzinsung sind die Barwerte

a) zum Rechnungsdatum bzw.
b) zum Fälligkeitsdatum

gleich? (vgl. auch Aufgabe 10.20)

Aufgabe 10.20 **Lösung**

Eine Handwerkerrechnung über 5542 € ist 30 Tage nach Rechnungsdatum zur Zahlung fällig. Bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen nach Rechnungsdatum wird ein Skonto von 2 % gewährt.

a) Ermitteln Sie die Barwerte zum Rechnungsdatum, die sich bei einem Kalkulationszinssatz für einfache Verzinsung von 3 % für die Zahlung nach 30 Tagen sowie für die Zahlung nach 10 Tagen mit Skontoabzug ergeben!
b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Barwerte zum Rechnungsdatum gleich?
c) Welcher am Fälligkeitsdatum der Rechnung fälligen Verzinsung p.a. für die 20 Tage frühere Bezahlung entspricht der Skontoabzug?
d) In welcher Höhe könnte 10 Tage nach Rechnungsdatum ein mit 11,5 % p.a. zu verzinsender Überziehungskredit in Anspruch genommen werden, um einschließlich Überziehungszinsen die gleichen Schulden zu verursachen wie bei Inanspruchnahme in Höhe von 5542 € 30 Tage nach Rechnungsdatum? Vergleichen Sie mit dem bei Inanspruchnahme des Skontos 10 Tage nach Rechnungsdatum zu zahlendem Betrag!

(vgl. auch Aufgabe 10.19)

Aufgabe 10.22 **Lösung**

Bei der Bestellung einer Ware zum Preis von 2500 DM wurde eine sofort zu leistende Anzahlung von 2 % sowie Lieferung und Rechnungslegung in 2 Monaten vereinbart. Der offene Rechnungsbetrag sollte 30 Tage nach Rechnungslegung zur Zahlung fällig sein, wobei bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen ein Skonto von 2 % des offenen Betrages gewährt wurde.

a) Ermitteln Sie die Barwerte zum Bestelldatum, die sich bei einem Kalkulationszinssatz von 4 % für die Zahlung ohne und mit Skontoabzug ergeben, wenn jeweils am letzten Tag der Frist gezahlt wird!
b) Bei welchem Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

Aufgabe 10.23 **Lösung**

Welche Laufzeit besitzen Sparbriefe, bei denen man bei einer Verzinsung von 5,5 % p.a. am Ende der Laufzeit für 1000 € Anfangskapital 1534,69 € bekommt?

Aufgabe 10.24 **Lösung**

Eine Ware wird 4 Monate vor dem Liefertermin bestellt. Bei der Bestellung ist eine sofortige Anzahlung von 100 € zu leisten. Der Restkaufpreis in Höhe von 890 € ist zahlbar 10 Tage nach Liefertermin mit einem Skonto von 2 % auf den Restkaufpreis oder in voller Höhe 30 Tage nach Liefertermin.

a) Ermitteln Sie für beide Zahlungsversionen die Barwerte der für die Ware insgesamt zu leistenden Zahlungen zum Liefertermin bei einem Kalkulationszinssatz von 3 % p.a. und einfacher Verzinsung für Bruchteile der Zinsperiode, wobei jeweils Zahlung am Fälligkeitstermin angenommen wird!
b) Für welchen Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

Aufgabe 10.26 **Lösung**

Eine Ware zum Preis von 2000 € soll 3 Monate nach Kaufvertragsabschluss geliefert werden. Bei der Lieferung sind dem Lieferanten 200 € bar zu übergeben. Der Rest des Kaufpreises zu überweisen, er ist einen Monat später fällig, wobei bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen ein Skonto in Höhe von 2 % des Kaufpreisrestes gewährt wird.

a) Ermitteln Sie die Barwerte zum Datum des Kaufvertragsabschlusses, die sich bei einem Kalkulationszinssatz von 3 % für die Zahlung ohne und mit Skontoabzug ergeben, wenn jeweils am letzten Tag der Frist gezahlt wird! Dabei ist einfache Verzinsung und die „Deutschen Zinsmethode 30/360“ zu verwenden.
b) Für welchen Kalkulationszinssatz sind die Barwerte gleich?

Aufgabe 10.27 **Lösung**

In einem Jahr zum Nennwert von 1000 € fällige Finanzierungsschätze des Bundes werden mit einem Diskontabschlag von 2,53 % verkauft. Wie hoch ist der Ausgabepreis, wie hoch die Rendite?

Aufgabe 10.28 **Lösung**

Welche Rendite besaßen zweijährige am 20.12.2002 fällige Finanzierungsschätze des Bundes, die am 20.12.2000 mit einem Diskontabschlag von 8,42 % (4,21 % p.a.) verkauft wurden?

Aufgabe 10.29 **Lösung**

Bei einem Tagesgeldkonto mit einer Verzinsung von 3,5 % p.a. werden die Zinsen jeweils für das Quartal am Quartalsende dem Konto gutgeschrieben. Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins (Rendite)!

Aufgabe 10.30 **Lösung**

Bei einem zu 6,5 % p.a. verzinsten Darlehen werden die Zinsen monatlich nachträglich fällig, sonst fallen keine Gebühren usw. an. Bestimmen Sie den effektiven Jahreszins!

Aufgabe 10.31 **Lösung**

Wie hoch ist die Rendite eines Tagesgeldkontos mit einer Verzinsung von 2,8 % p.a., wenn die Zinsgutschrift

a) monatlich bzw.
b) vierteljährlich

erfolgt?

Aufgabe 10.32 **Lösung**

Ein Guthaben K_0 wird mit 6 % p.a. verzinst, wobei die Zinsgutschrift
(i) jährlich, (ii) vierteljährlich, (iii) monatlich, (iv) täglich
erfolgt, dabei wird mit der „Deutschen Zinsmethode 30/360“ gerechnet.

a) Welches Guthaben ist nach einem Jahr erreicht?
b) Ermitteln Sie jeweils den effektiven Jahreszins, d.h. den Zinssatz, für den bei einmaliger Zinsgutschrift am Jahresende das gleiche Guthaben erzielt würde!

Aufgabe 10.33 **Lösung**

Welchen Stand hat ein Konto, das am Jahresanfang einen Stand von 2000 € hat, am Jahresende, wenn es mit 3 % p.a. verzinst wird und die Zinsen

a) jährlich, b) quartalsweise, c) monatlich, d) täglich

gutgeschrieben werden? Geben Sie auch die jeweiligen Renditen an!

Aufgabe 10.34 **Lösung**

Ein Kapital K_0 wird mit p p.a. verzinst, wobei das Jahr in m gleiche Abschnitte aufgeteilt wird und die anteiligen Zinsen am Ende jedes Abschnitts dem Kapital gutgeschrieben und mit diesem verzinst werden.

a) Welches Guthaben wird nach einem Jahr erreicht, wie hoch ist der effektive Jahreszins?
b) Welcher Grenzwert ergibt sich für $m \longrightarrow \infty$ (kontinuierliche Verzinsung)?
c) Was ergibt sich bei einer Verzinsung von 6 % p.a.? Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis von Aufgabe 10.32!

Aufgabe 10.36 **Lösung**

In einem Kalenderjahr werden jeweils am Monatsende 300 € auf ein zu 2 % p.a. verzinstes Konto eingezahlt, bei dem innerhalb der Zinsperiode mit einfacher Verzinsung gerechnet wird. Welches Guthaben steht am Jahresende zur Verfügung?

Aufgabe 10.37 **Lösung**

Welches Guthaben liegt am Jahresende vor, wenn auf ein Konto mit 3 % Verzinsung von Ende März bis Ende Dezember monatlich je 200 € eingezahlt werden, das Jahr in 12 gleichlange Monate unterteilt wird und innerhalb des Jahres mit einfacher Verzinsung gerechnet wird?

Aufgabe 10.38 **Lösung**

Für die Berechnung eines *„effektiven Jahreszinses“* bei Krediten schreibt § 6 Abs. 2 der Preisangabenverordnung vor: *„Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“* Das bedeutet, dass die Leibnizsche Zinseszinsformel für beliebige, auch gebrochene Vielfache der Zinsperiode von einem Jahr anzuwenden ist. Beim Nominalzins wird dagegen üblicherweise für verbleibende Jahresbruchteile unter einem Jahr die einfache Verzinsung angewandt.

Ein Darlehen in Höhe von 20 000 € ist 1 Jahr und 4 Monate nach seiner Auszahlung einschließlich der Zinsen für die gesamte Laufzeit zur Rückzahlung fällig. Ermitteln Sie

a) den Fälligkeitsbetrag bei einem effektiven Jahreszins von 7,5 %,
b) den Fälligkeitsbetrag bei einem Nominalzins von 7,5 % p.a.,
c) den effektiven Jahreszins bei einem Fälligkeitsbetrag 22 000 €,
d) den Nominalzins bei einem Fälligkeitsbetrag 22 000 €!

Aufgabe 10.39 **Lösung**

Für die Berechnung eines *„effektiven Jahreszinses“* bei Krediten schreibt § 6 Abs. 2 der Preisangabenverordnung vor: *„Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“* Das bedeutet, dass die Leibnizsche Zinseszinsformel für beliebige, auch gebrochene Vielfache der Zinsperiode von einem Jahr anzuwenden ist. Beim Nominalzins wird dagegen üblicherweise für verbleibende Jahresbruchteile unter einem Jahr die einfache Verzinsung angewandt.

Ein Darlehen in Höhe von 10 000 € ist 1.5 Jahre nach seiner Auszahlung einschließlich der Zinsen für die gesamte Laufzeit zur Rückzahlung fällig. Ermitteln Sie

a) den Fälligkeitsbetrag bei einem effektiven Jahreszins von 6 %,
b) den Fälligkeitsbetrag bei einem Nominalzins von 6 % p.a.,
c) den effektiven Jahreszins bei einem Fälligkeitsbetrag 10 900 €,
d) den Nominalzins bei einem Fälligkeitsbetrag 10 900 €!

Aufgabe 10.43 **Lösung**

Für die Berechnung eines *„effektiven Jahreszinses“* bei Krediten schreibt § 6 Abs. 2 der Preisangabenverordnung seit 1. September 2000 vor: *„Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“* Das bedeutet, dass die Leibnizsche Zinseszinsformel für beliebige, auch gebrochene Vielfache der Zinsperiode von einem Jahr anzuwenden ist. Ferner ist nach der Anlage zu § 6 von einem Jahr mit 12 gleichlangen Monaten zu je $30,41666$ Tagen (d.h. 365/12) auszugehen („Zinsusance 30,41666/365“). Um die Berechnung im Detail ausführen zu können, muss man auf die Begründung der Verordnung zur Änderung der Preisangaben- und der Fertigpackungsverordnung vom 28. Juli 2000 (Bundesrats–Drucksache Nr. 180/00 zurückgreifen. Darin heißt es auf S. 36 (Pdf-Seite 42) mit Bezug auf Berechnungsbeispiele aus dem seinerzeitigen Anhang zu § 6 u.a.:

„Das Berechnungsbeispiel 6.5 zeigt, dass es keinen Einfluss auf die Höhe des effektiven Jahreszinses hat, ob Zahlungszeitpunkte auf einen 30. oder 31. eines Monats bzw. auf den 28. oder 29. Februar fallen oder ob innerhalb einer Zeitspanne von Zahlungszeitpunkten ein Monat mit 30 oder 31 Tagen bzw. ein Februar mit 28 oder 29 Tagen liegt. Der 30. eines Monats mit tatsächlich 31 Tagen und der 28. Februar in einem Schaltjahr werden jeweils als das Monatsende angesehen.

Das Berechnungsbeispiel 6.6 stellt die Vorgehensweise dar, wenn sich die Zeitspanne zwischen zwei Zahlungszeitpunkten nicht auf einen vollen standardisierten Monat oder auf ein Vielfaches von vollen standardisierten

Monaten zurückführen lässt. Dabei werden zunächst volle standardisierte Monate in Ansatz gebracht und der dann am Ende noch verbliebene Rest als Bruchteil eines Jahres mit 365 Tagen hinzugefügt. Hierbei gilt der 30. des übrig gebliebenen Monats wiederum als das Monatsende; dies gilt in diesem Fall ebenfalls für den Februar (...). Das tatsächliche Monatsende bleibt in diesen Fällen erneut unberücksichtigt.“

Ein Verkäufer bietet bei einem Kauf am 7. Februar eine „Zahlpause“ bis zum 22. März des gleichen Jahres gegen einen Preisaufschlag von 1 % an.

a) Welcher Verzinsung entspricht das Kreditangebot bei Anwendung der üblichen Formel der einfachen Verzinsung und der klassischen „Deutschen Zinsmethode 30/360“?
b) Berechnen Sie den „effektiven Jahreszins“ nach Preisangabenverordnung!

Aufgabe 10.44 **Lösung**

Ein Kredit der Höhe B mit einer Verzinsung von 20 % pro Halbjahr ist in zwei gleichen nachträglich zu entrichtenden Halbjahresraten von 500 € vollständig zurückzuzahlen.

a) Wie hoch ist der Kredit?
b) Bestimmen Sie den Zins- und Tilgungsplan des Kredits!
c) Geben Sie den effektiven Jahreszins nach Preisangabenverordnung an!
d) Bestimmen Sie den Zinssatz p.a., für den bei einfacher Verzinsung die Barwerte der Zahlung des Kreditgebers und der Zahlungen des Kreditnehmers jeweils bezogen auf den Zeitpunkt der vollständigen Kreditrückzahlung gleich sind! (Das ist **in diesem Falle** der effektive Jahreszins nach dem bis 31. August 2000 geltendem Recht.)

Aufgabe 10.45 **Lösung**

Welchen Barwert hat bei einem Kalkulationszinssatz von 4 % p.a. eine Forderung von 4000 €
a) 2 1/2 Jahre vor Fälligkeit bzw. b) 2 1/2 Jahre nach Fälligkeit
und zwar jeweils (i) bei gemischter Verzinsung bzw.
(ii) bei exponentieller Verzinsung für den gesamten Zeitraum?

Aufgabe 10.46 **Lösung**

Ein Versandhaus bietet für einen am 15. Oktober fälligen Betrag gegen einen Preisaufschlag von 1,5 % eine „Zahlpause“ bis zum 15. Januar des Folgejahres. Da der Käufer den Rechnungsbetrag aus seinem Tagesgeldkonto am ursprünglichen Fälligkeitstag bezahlen könnte, will er den Kreditzins mit dem Jahreszins seines Tagesgeldkontos vergleichen. Bestimmen Sie einen geeigneten Vergleichszinssatz!

Aufgabe 10.47 **Lösung**

Ein Betrag von 3000 € wird für die Zeit vom 1. Oktober 2002 bis 1. Juli 2006 zu 4 % p.a. angelegt, dabei soll die Verzinsung vom Einzahlungstag bis zum Tag vor dem Auszahlungstag erfolgen. Berechnen Sie, welcher Betrag am Auszahlungstag zur Verfügung steht, wenn

a) innerhalb eines Jahres mit einfacher Verzinsung gerechnet und die Zinsen nach jeweils einem Jahr dem Guthaben gutgeschrieben werden,
b) innerhalb eines Kalenderjahres mit einfacher Verzinsung gerechnet und die Zinsen jeweils am Kalenderjahresende dem Guthaben gutgeschrieben werden,
c) auch innerhalb eines Jahres mit exponentieller Verzinsung gerechnet wird!

Aufgabe 10.48 **Lösung**

Bei einem Ratenkauf sind für einen Artikel im Wert von 1000 € nach 6 und nach 12 Monaten jeweils 576.19 € zu zahlen. Ermitteln Sie den effektiven Jahreszins des Kredits

a) durch Vergleich der sich mit einfacher Verzinsung ergebenden Barwerte zum Zeitpunkt der Zahlung der letzten Rate des Kredits,
b) durch Vergleich der sich mit einfacher Verzinsung ergebenden Barwerte zum Kaufzeitpunkt,
c) durch Vergleich der sich mit exponentieller Verzinsung ergebenden Barwerte!

Rentenrechnung

Aufgabe 10.49

Ein 40-Jähriger schließt einen Sparplan ab, bei dem er 20 Jahre lang jeweils zu Beginn des Sparjahres 2000 € einzahlt und dafür anschließend 15 Jahre lang ebenfalls jährlich vorschüssig einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn die Verzinsung mit 6 % p.a. angenommen wird?

Aufgabe 10.50 **Lösung**

Ein 50-Jähriger schließt einen Sparplan ab, bei dem er 15 Jahre lang jeweils zu Beginn des Sparjahres 3000 € einzahlt und dafür anschließend 10 Jahre lang ebenfalls jährlich vorschüssig einen bestimmten Betrag ausgezahlt bekommt. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn die Verzinsung mit 2,5 % p.a. angenommen wird?

Aufgabe 10.52 **Lösung**

Für ein Grundstück liegen 3 Kaufangebote vor:

a) sofortige Zahlung von 70 000 €,
b) Zahlung von 80 000 € in 3 Jahren,
c) 10 jährliche Raten von 8400 €, wobei die 1. Rate sofort gezahlt werden soll.

Bestimmen Sie die Barwerte der 3 Angebote zum aktuellen Zeitpunkt bei einem Kalkulationszinssatz von 4 % p.a.! Welches der Angebote ist für den Verkäufer das günstigste?

Aufgabe 10.53 **Lösung**

Jemand zahlt auf ein Jugendgirokonto, das bei quartalsweiser Zinsgutschrift mit 0,5 % pro Quartal verzinst wird, jeweils zu Quartalsbeginn 40 € ein. Welches Guthaben steht nach 3 Jahren zur Verfügung, wenn unterstellt wird, dass keine anderen Kontobewegungen stattfinden?

Aufgabe 10.54 **Lösung**

Ein Student möchte durch jährliche Zahlung einer gleichbleibenden Rate in 40 Jahren 40 000 € ansparen, wobei die erste Rate sofort zu zahlen sein soll. Wie hoch muss die Rate bei einer Verzinsung von 2,75 % p.a. sein?

Aufgabe 10.55 **Lösung**

Ein zu 5 % p.a. verzinstes Guthaben von 100 000 € soll sofort beginnend in 5 gleichen Jahresraten vollständig verbraucht werden. Wie hoch sind die Jahresraten?

Aufgabe 10.58 **Lösung**

Durch 10 gleiche jährliche Raten, von denen die erste sofort zu zahlen ist, soll in 10 Jahren bei einer Verzinsung von 5,1 % ein Guthaben von 100 000 € angespart werden. Wie hoch müssen die Raten sein?

Aufgabe 10.59 **Lösung**

Ein 60-Jähriger verfüge über ein Kapital von 100 000 €. Das Kapital soll durch 30 Jahresraten konstanter Höhe vollständig verbraucht werden, wobei die erste Rate sofort entnommen werden soll. Wie hoch muss die Rate bei einer Verzinsung des Restkapitals zu 2,75 % p.a. sein?

Aufgabe 10.60 **Lösung**

a) Jemand möchte an seinem 61. Geburtstag und an den 29 folgenden Geburtstagen einem vorhandenen Kapital jeweils 20 000 € entnehmen. Wie hoch muss das Kapital am 60. Geburtstag sein, um bei einer Verzinsung von 4 % p.a. diese Entnahmen zu ermöglichen?
b) Angenommen, dieses Kapital wäre bei einer Verzinsung von ebenso 4 % p.a. durch Raten gleicher Höhe, die am 21. Geburtstag und den 39 folgenden Geburtstagen geleistet wurden, angespart worden. Wie hoch müssten die Raten gewesen sein?

Aufgabe 10.62 **Lösung**

Über 25 Jahre soll durch vorschüssige **Monats**raten in gleicher Höhe Kapital angespart werden, dass es ermöglicht, anschließend 10 Jahre lang eine vorschüssige **Monats**rente von 1000 € zu erhalten. Wie hoch muss die Sparrate sein, wenn mit einer Verzinsung von 0,5 % pro Monat gerechnet wird?

Aufgabe 10.63 **Lösung**

Ein Kredit von 1000 € mit einer Verzinsung von 20 % p.a. soll durch 2 gleiche nachträglich zu entrichtende Halbjahresraten vollständig getilgt werden. Für die Berechnung des Halbjahreszinses soll dabei wie üblich die Formel der einfachen Verzinsung angewendet werden.

a) Ermitteln Sie die Halbjahresrate!
b) Geben Sie den Zins- und Tilgungsplan an!
c) Ermitteln Sie den effektiven Jahreszins nach Preisangabenverordnung!

Aufgabe 10.64

Auf ein unverzinstes Konto werden von einem gewissen Jahr an jährlich 1000 € eingezahlt, außerdem werden jährlich 10 % des Vorjahresguthabens entnommen, so dass das Guthaben am Ende des ersten Jahres 1000 €, am Ende des zweiten Jahres 1900 €, am Ende des dritten Jahres 2710 € beträgt usw.

a) Stellen Sie die Entwicklung des Guthabens als Reihe dar!
b) Welches Guthaben wird asymptotisch erreicht, wenn dieser Prozess unendlich lange weitergeführt wird?

Aufgabe 10.65 **Lösung**

Auf ein unverzinstes Konto werden von einem gewissen Jahr an jährlich 1000 € eingezahlt, außerdem werden jährlich 4 % des Vorjahresguthabens entnommen, so dass das Guthaben am Ende des ersten Jahres 1000 €, am Ende des zweiten Jahres 1960 € beträgt usw.

a) Stellen Sie die Entwicklung des Guthabens als Reihe dar!
b) Welches Guthaben wird asymptotisch erreicht, wenn dieser Prozess unendlich lange weitergeführt wird?

Aufgabe 10.66 **Lösung**

Jemand erhält

– in einem Kalenderjahr eine monatliche Zahlung von 3000 €, die jeweils zu Monatsbeginn gezahlt wird,
– Anfang Dezember wird zusätzlich ein Weihnachtsgeld von 2100 € gezahlt.

Das Geld wird nicht ausgegeben, sondern immer gleich bei Auszahlung auf einem Tagesgeldkonto mit einer Verzinsung von 0.25 % pro Monat und monatlicher Zinsgutschrift angelegt. Welches Guthaben steht am Jahresende zur Verfügung?

Aufgabe 10.67 **Lösung**

a) Jemand erhält in einem Kalenderjahr jeweils am Monatsende eine Zahlung von 3000 €. Das Geld wird nicht ausgegeben, sondern immer gleich auf einem Tagesgeldkonto mit einer Verzinsung von 0,25 % pro Monat und monatlicher Zinsgutschrift angelegt. Am Jahresende wird das Guthaben abgehoben, welcher Betrag steht zur Verfügung?
b) Nun wird die Situation mit der des Vorjahres verglichen. Damals betrug die Monatszahlung zwar nur 2850 €, sie wurde aber jeweils zur Monatsmitte ausgezahlt und kam gleich auf das Tagesgeldkonto, so dass sie sich bis zum Monatsende durch einfache Zinsen vergrößerte. Auch das im Vorjahr letztmalig gezahlte Weihnachtsgeld in Höhe von 1800 €, welches Mitte Dezember mit ausgezahlt wurde, wurde bis zum Jahresende einfach verzinst. Im Übrigen galten im Vorjahr die gleichen Bedingungen, das heißt, das Geld blieb bis zum Jahresende auf dem Konto und wurde mit 0,25 % pro Monat bei Zinsgutschrift am Monatsende verzinst. Welches Guthaben stand am Jahresende zur Verfügung?

Aufgabe 10.68 **Lösung**

Einem Käufer wird für eine Ware, die bei sofortiger Zahlung 10 000 € kostet, eine Ratenzahlung von 5 jährlichen Raten, bestehend aus 4 Raten von 2000 € und einer Schlussrate von 4000 Euro angeboten, wobei die erste Rate sofort fällig ist. Der Käufer legt dem Vergleich der Angebote den Zinssatz seines Tagesgeldkontos von 3,8 % p.a. zugrunde. Bestimmen Sie den Barwert des Ratenkaufangebots! Ist dieses für den Käufer günstiger als die sofortige Zahlung?

Aufgabe 10.69 **Lösung**

Bei einem Ratenkauf sind für eine Ware, deren Ladenverkaufspreis 600 € beträgt, Monatsraten in Höhe von 30 € zu zahlen, die 3 bis 26 Monate nach dem Kaufzeitpunkt fällig sind.

a) Bestimmen Sie bei einem Kalkulationszinssatz von $\frac{1}{3}$ % pro Monat den Barwert des Ratenkaufpreises zum Zeitpunkt der Fälligkeit der ersten Rate, d.h. 3 Monate nach dem Kaufzeitpunkt!

b) Bestimmen Sie bei gleichem Kalkulationszinssatz den Barwert des Ratenkaufpreises zum Kaufzeitpunkt!
c) Ermitteln Sie die Barwerte des Ratenkaufpreises auch für einen Kalkulationszinssatz von 1,3 % pro Monat! Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dem Ergebnis ziehen?

Aufgabe 10.70 **Lösung**

In einen zu 25 % p.a. verzinsten Sparplan werden vier Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 256 Währungseinheiten eingezahlt. Welches Guthaben steht am Ende des vierten Jahres zur Verfügung?

Aufgabe 10.71

Eine Bank zahlt einem Kunden 8 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 1000 Währungseinheiten und fordert das so gewährte Darlehen am Ende des 8. Jahres in einer Summe einschließlich Zinsen zurück. Welchen Betrag fordert sie vom Kunden, wenn das Darlehen (sei es aus Wucher oder wegen einer sehr hohen Inflationsrate) mit 100 % pro Jahr zu verzinsen ist?

Renditerechnung

Aufgabe 10.72 **Lösung**

Ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Verzinsung von 7 % und einer Restlaufzeit von genau 2 Jahren wird zum Kurs von 104 verkauft.

a) Stellen Sie die Ausgaben und Einnahmen eines Anlegers, der das Papier kauft, bezogen auf einen Wertpapiernennwert von 100 € tabellarisch dar!
b) Bestimmen Sie die Rendite (Effektivverzinsung) des festverzinslichen Wertpapiers, indem Sie die Barwerte aller Ausgaben und die Barwerte aller Einnahmen des Anlegers gleichsetzen!

Aufgabe 10.73

Ein festverzinsliches Wertpapier mit einer Verzinsung von 7 % und einer Restlaufzeit von genau 2 Jahren wird zum Kurs von 105,45 verkauft.

a) Stellen Sie die Ausgaben und Einnahmen eines Anlegers, der das Papier kauft, bezogen auf einen Wertpapiernennwert von 100 € tabellarisch dar!
b) Bestimmen Sie die Rendite (Effektivverzinsung) des festverzinslichen Wertpapiers, indem Sie die Barwerte aller Ausgaben und die Barwerte aller Einnahmen des Anlegers gleichsetzen!

Aufgabe 10.74 **Lösung**

Eine DM–Auslandsanleihe mit einer Verzinsung von 8 % und einer Restlaufzeit von genau 2 Jahren wird zum Kurs von 93,00 verkauft. Wie hoch ist die Rendite?

Aufgabe 10.75 **Lösung**

Ermitteln Sie die Rendite eines festverzinslichen Wertpapieres mit einem Kurswert von 97 %, einer Restlaufzeit von 2 Jahren und einer Verzinsung von 3 % vom Nominalwert!

Aufgabe 10.76 **Lösung**

Für die Berechnung der Rendite eines Wertpapieres mit einem Verkaufskurs von C %, einer Restlaufzeit von n Jahren und einer jährlich nachträglich ausgezahlten Verzinsung von p % des Nominalwertes wird die Formel

$$Cq^n \;=\; pq^{n-1}+pq^{n-2}+\cdots+pq+p+100 \;=\; 100+p\frac{q^n-1}{q-1}$$

verwendet. Dabei ist die Rendite der fiktive Effektivzinssatz für den Kaufwert C, wobei unterstellt wird, dass die vor der Endfälligkeit des Wertpapieres ausgezahlten Zinsen zum Zinssatz der Rendite wiederangelegt werden können. q ist der zu der Rendite gehörende Aufzinsungsfaktor, d.h. $q=1+$Rendite.

Begründen Sie diese Formel!

Tilgungsrechnung

Aufgabe 10.77

Ein Darlehen von 150 000 € soll p.a. mit 5 % verzinst und mit 3 % zuzüglich der durch die bisherige Tilgung ersparten Zinsen getilgt werden. Zins und Tilgung sind monatlich nachträglich in einer Monatsrate zu erbringen, dabei ist innerhalb des Jahres die einfache Zinsrechnung anzuwenden.

a) Wie hoch ist die Restschuld nach 3 Monaten?
b) Wie hoch ist die Restschuld nach 12 Monaten?
c) Wie hoch wäre die Restschuld nach einem Jahr, wenn Zins und Tilgung jährlich nachträglich in einer Jahresrate zu erbringen wären? Ist diese Zahlungsvariante für den Darlehensnehmer günstiger?

Aufgabe 10.78 **Lösung**

Für ein Grundstück sind inklusive 3,48 % Maklercourtage 200 000 € zu zahlen. Der Betrag von 200 000 € soll durch ein jährlich mit 6 % zu verzinsendes und mit 1 % zuzüglich der durch die bisherige Tilgung ersparten Zinsen zu tilgendes Darlehen finanziert werden.

a) Wie hoch ist der Grundstückspreis, wie hoch ist die Courtage?
b) Wie hoch ist die Restschuld des Darlehens nach 4 Jahren, wenn Zins und Tilgung jährlich nachträglich in einer Jahresrate zu erbringen sind?
c) Wie hoch ist die Restschuld des Darlehens nach 4 Jahren, wenn Zins und Tilgung quartalsweise nachträglich in einer Quartalsrate zu erbringen sind?
d) Welche dieser beiden Darlehensbedingungen sind für den Darlehensnehmer effektiver?

Aufgabe 10.79 **Lösung**

Ein Darlehen zu 100 000 € wird mit einer Zinsfestschreibung von 5,5 % für 5 Jahre ausgereicht. Die Zinsen sind jährlich nachträglich zu entrichten. Gleichzeitig ist jeweils eine Tilgung von 3 % zuzüglich der durch die bisherige Tilgung ersparten Zinsen zu erbringen.

a) Berechnen Sie mithilfe der Formeln der Rentenrechnung den Schuldsaldo am Ende der Zinsfestschreibungszeit!
b) Stellen Sie den Zins- und Tilgungsplan auf!
c) Wann ist das Darlehen vollständig getilgt, wenn die angegebenen Konditionen für die gesamte Laufzeit gewährt werden?

Aufgabe 10.80 **Lösung**

Ein Darlehen von 50 000 € ist jährlich mit 8 % zu verzinsen und mit 4 % zuzüglich der durch die Tilgung ersparten Zinsen zu tilgen. Zinsen und Tilgung sind jeweils am Periodenende fällig. Wie groß ist die Restschuld nach 3 Jahren?

Aufgabe 10.81 **Lösung**

Ein zu 8 % verzinster Kredit von 1000 € soll durch 3 nachträglich zu entrichtende Jahresraten gleicher Höhe vollständig getilgt werden. Ermitteln Sie die Höhe der Jahresrate sowie die Restschuld nach einem Jahr!

Aufgabe 10.82 **Lösung**

Ein Darlehen von 100 000 € mit einer Verzinsung von 6 % p.a. soll durch 10 jährlich nachträglich zu erbringende Annuitäten in gleicher Höhe vollständig getilgt werden.

a) Wie hoch müssen die Annuitäten sein?
b) Welcher Prozentsatz ist als anfängliche Tilgung anzugeben?

11 Funktionen

Funktionsbegriff, grundlegende Eigenschaften und elementare Funktionen

Aufgabe 11.1

Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungsvorschriften um Funktionen:

a) Mütter $\longrightarrow$ Kinder, b) Kinder $\longrightarrow$ Mütter, c) $y = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$,

d) $y = |x-2|+2$, e) $x^2+4x+y^2-6y = 3$, f) $y = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$,

g) $y = \min(0, x+1, x^2-1)$?

Wenn ja, sind die Funktionen eineindeutig? Geben Sie ggf. Definitions-, Werte- und Monotoniebereiche sowie die Umkehrfunktion an! Wenn nein, durch welche Einschränkungen könnten durch die Vorschriften Funktionen definiert werden?

Aufgabe 11.2 Lösung

Sei $f(x) = x^2+2x-15$.

a) Ermitteln Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Nullstellen dieser Funktion!
b) Stellen Sie die Funktion als Produkt zweier linearer Funktionen dar!
c) Skizzieren Sie die Funktion!
d) Wo ist die Funktion monoton wachsend, wo ist sie monoton fallend?

Aufgabe 11.5 Lösung

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und geben Sie ihre Definitions- und Wertebereiche an:

a) $f(x) = 3\sin x + 4$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$!

Aufgabe 11.6 Lösung

Über der reellen Achse seien die Funktionen $f(x) = 4e^x - 1$ und $g(x) = 9 - e^x$ definiert.

a) Ermitteln Sie die Wertebereiche und die Nullstellen der Funktionen!
b) Stellen Sie die Grafen der beiden Funktionen in einer gemeinsamen Skizze dar!
c) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der beiden Grafen!

Aufgabe 11.7 Lösung

Die in Promille angegebene Konzentration eines Schadstoffs zum Zeitpunkt t betrage $f(t) = \frac{200}{c+2e^{-at}}$. Sie wurde zum Zeitpunkt $t=0$ mit 40 und zum Zeitpunkt $t=1$ mit $43{,}127$ gemessen.

a) Ermitteln Sie die Parameter c und a !
b) Welchen Wert kann die Schadstoffkonzentration maximal annehmen?

Aufgabe 11.8 Lösung

Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade bzw. haben keine dieser Eigenschaften:

a) $f(x) = x\sin x$, b) $f(x) = \arcsin x$, c) $f(x) = \arccos x$, d) $f(x) = \dfrac{(x^5+4x^3+2x)\sin^2 x}{|x|\cos x}$,
e) $f(x) = e^{-x}$, f) $f(x) = e^{\cos x}$, g) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, h) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,
i) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$?

Hinweis zu i): Berechnen Sie $f(x)+f(-x)$!

Aufgabe 11.9 Lösung

Welche der folgenden über $\mathbb{R}$ definierten Funktionen sind periodisch, gerade bzw. ungerade:

a) $f(x) = (x+8)^2+(x-8)^2$, b) $f(x) = (x+8)^2-(x-8)^2$,
c) $f(x) = (x+8)^3+(x-8)^3$, d) $f(x) = (x+8)^3-(x-8)^3$,
e) $f(x) = \sin(x+8)+\sin(x-8)$, f) $f(x) = \sin(x+8)-\sin(x-8)$?

Aufgabe 11.10 Lösung

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Periodizität und Beschränktheit! Geben Sie ggf. die kleinste Periodenlänge sowie den kleinsten und größten Funktionswert an:

a) $f(x) = \frac{5}{6}\sin(7x+8)$, b) $f(x) = e^{x+\sin x}$, c) $f(x) = \dfrac{1}{4+\sin x}$!

Aufgabe 11.11 Lösung

Gegeben sei die Funktion $f(\varphi) = c\,|\sin 2\varphi|$ mit einem nichtnegativen reellen Parameter c.

a) Skizzieren Sie die Funktion in kartesischen Koordinaten!
b) Geben Sie die kleinste Periodenlänge der Funktion an!
c) Wo ist die Funktion monoton wachsend, wo ist sie monoton fallend?
d) Ist die Funktion gerade bzw. ungerade?
e) Sei $c=1$. Skizzieren Sie die Menge aller Punkte der Ebene, für deren Polarkoordinaten (r,φ) die Beziehung $r = f(\varphi) = |\sin 2\varphi|$ gilt!

Aufgabe 11.14 Lösung

Ermitteln Sie die Definitions- und Wertebereiche sowie die Nullstellen der Funktionen
a) $f(x) = \ln\cos x$ und b) $f(x) = \cos\ln x$
und skizzieren Sie die Funktionen!

Aufgabe 11.15 **Lösung**

Für welche reellen x gilt

a) $2^{x+4} > 3$, b) $0.5^{x+4} > 3$, c) $\log_2(x+4) > 3$, d) $\log_{0.5}(x+4) > 3$?

Aufgabe 11.16 **Lösung**

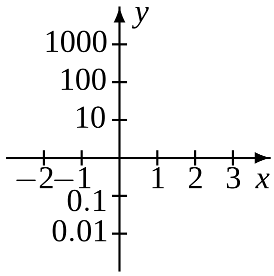
Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2}\lg(x-3)+\lg\frac{5}{2} = 1-\lg\sqrt{x+3}$!

Aufgabe 11.17 **Lösung**

Stellen Sie die Funktionen

a) $f(x) = 10^x$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = 1^x$,
d) $f(x) = 0.1^x$, e) $f(x) = 100x$, f) $f(x) = x$

in einem Koordinatensystem mit dekadisch-logarithmischer Ordinatenteilung dar!



Aufgabe 11.18 **Lösung**

Leiten Sie mit Hilfe der Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung bzw. der Moivreschen Formel her, wie $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$ durch $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ und $\sin y$ dargestellt werden können!

Aufgabe 11.19 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichungen $\sin x = \sin 2x$ und $\cos x = \cos 2x$!

Aufgabe 11.20 **Lösung**

Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2(\sin x - \cos^3 x) - \sin x \sin 2x$!

(Wenzel, H.; Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner. 1. (einbändige) Aufl. 2005 (zuvor 2 Bände), Aufgabe 6.13f, S. 21)

Aufgabe 11.21 **Lösung**

Vereinfachen Sie den Ausdruck $3\sin x\sin^2 y+2\sin x\cos^2 y+\sin(x+y)\cos y-\cos x\sin y\cos y$!

Aufgabe 11.23 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichungen

a) $\sin(x+5)-\cos 5\,\sin x = \frac{1}{2}\sin 5$, b) $\ln 4x^4+\ln\frac{3}{x^3}+\ln 2x^2+\ln\frac{1}{x} = \ln 384$!

Aufgabe 11.24

Um eine reelle Zahl x in Vorzeichen, Vor- und Nachkommastellen aufzuteilen, werden die Funktionen „Signum“ (Vorzeichen) und „Gaußklammer“ (ganzer Teil, „Entier“) durch

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \lfloor x \rfloor = z \in \mathbb{Z} :\ z \leq x < z+1$$

eingeführt. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = \operatorname{sign} x$ b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, c) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$,
d) $f(x) = \operatorname{sign} x \lfloor |x| \rfloor$, e) $f(x) = |x - \operatorname{sign} x \lfloor |x| \rfloor|$!

Welche Bedeutung haben die Funktionen? Welche der Funktionen sind periodisch, gerade bzw. ungerade?

Aufgabe 11.25

Nach § 13 Abs. 2 Satz 1 Nr. 2 der Straßen-Verkehrsordnung (StVO) ist dort, wo die Benutzung einer Parkscheibe vorgeschrieben ist, der „Zeiger der Scheibe auf den Strich der halben Stunde“ einzustellen, „die dem Zeitpunkt des Anhaltens folgt.“ Auf dem entsprechenden Zusatzzeichen sei eine Parkzeit von 2 Stunden angegeben.

a) Stellen Sie die tatsächlich mögliche Parkzeit in Abhängigkeit vom Zeitpunkt des Anhaltens grafisch dar!
b) Sei t die zum Zeitpunkt des Anhaltens seit Mitternacht vergangene Zeit in Sekunden. Geben Sie die tatsächliche mögliche Parkzeit mithilfe der Gaußklammer als Funktion von t an!
c) Geben Sie den Zeitpunkt t in der Form hh:mm:ss an!

Aufgabe 11.26

Von „kaufmännischer Rundung“ wird gesprochen, wenn bei positiven Zahlen im Falle der nachfolgenden Dezimalstelle 5–9 auf- und im Falle der nachfolgenden Dezimalstelle 0–4 abgerundet, bei negativen Zahlen im Falle der nachfolgenden Dezimalstelle 5–9 ab- und im Falle der nachfolgenden Dezimalstelle 0–4 aufgerundet wird. Beschreiben Sie die kaufmännische Rundung auf eine ganze Zahl mit Hilfe der Signum-Funktion und der Gaußklammer!

Umkehrfunktionen

Aufgabe 11.27 Lösung

Berechnen Sie $\arctan \tan \frac{5\pi}{4}$!

Aufgabe 11.28 Lösung

Berechnen Sie $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$!

Aufgabe 11.29

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}, \quad x \geq 0.$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitionsbereich!
b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion über ihren gesamten Definitionsbereichen streng monoton wachsend sind!

Aufgabe 11.30 Lösung

Sei $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ eine reellwertige Funktion.

a) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, zeigen Sie, dass sie eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertebereich!
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Aufgabe 11.31 Lösung

Sei $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich die Funktion $f(x)$, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Aufgabe 11.32 Lösung

Sei $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} + 3$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen. Bestimmen Sie ihren Definitionsbereich, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

Aufgabe 11.35 Lösung

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}, \quad x \geq 0$ eine Umkehrfunktion besitzt, ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

Aufgabe 11.39 Lösung

Durch zwei vorschüssige Jahresraten r sollen bei einer Verzinsung von i p.a. innerhalb von 2 Jahren 1000 € angespart werden. Geben Sie den Zusammenhang zwischen r und i an

a) als implizit definierte Funktion,
b) explizit als Funktion $r = f(i)$,
c) explizit als Funktion $i = g(r)$!

In welcher Beziehung stehen die Funktionen f und g zueinander? Skizzieren Sie die Funktionen! Was würde passieren, wenn man auch eine negative Aufzinsung zulassen würde?

Verkettung von Funktionen

Aufgabe 11.40 **Lösung**

Sei $f(x)=2x+3$ und $g(x)=x^2-2x-24$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f\circ g)(x)$ und $(g\circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f\circ g$ und $g\circ f$!

Aufgabe 11.41 **Lösung**

Sei $f(x)=4x^2-4x+4$ und $g(x)=x-2$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f\circ g)(x)$ und $(g\circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f\circ g$ und $g\circ f$!

Aufgabe 11.43 **Lösung**

Sei $f(x) = x^2+24x+128$ und $g(x) = 3x+2$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f\circ g)(x)$ und $(g\circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f\circ g$ und $g\circ f$!

Aufgabe 11.44 **Lösung**

Sei $f(x) = 2x + \operatorname{sign} x\, |x-3|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion, geben Sie ihren Definitions- und Wertebereich an! Ist die Funktion eineindeutig?
b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} sowie ihren Definitions- und Wertebereich!
c) Ermitteln Sie die Funktionen $f^{-1}\circ f$ und $f\circ f^{-1}$ sowie ihre Definitions- und Wertebereiche!

Polynome und rationale Funktionen

Aufgabe 11.45 **Lösung**

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms
$P_7(x) = x^7 - x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 36x^3 + 36x^2$!

Aufgabe 11.46 **Lösung**

a sei ein reeller Parameter. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, wie viele verschiedene reelle oder komplexe Lösungen die Gleichung $x^4+2x^2+a=0$ hat, welche Vielfachheit diese haben und ob sie reell sind!
(Die Lösungen müssen nicht ausgerechnet werden, es wird nur nach Anzahl und Eigenschaften gefragt.)

Aufgabe 11.47 **Lösung**

Spalten Sie die unecht gebrochen rationale Funktion $f(x) = \dfrac{x^4+4x^3+2x^2-4x-3}{x^2+5x+6}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion auf!

Aufgabe 11.48 **Lösung**

Spalten Sie die gebrochen-rationale Funktion $\dfrac{2x^3+7x^2-4x-1}{x^2+3x-4}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion (Grad des Zählerpolynoms kleiner Grad des Nennerpolynoms) auf!

Aufgabe 11.49 **Lösung**

Sei $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+a}$ mit einem reellem Parameter a. Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion in Abhängigkeit von a und skizzieren Sie die Funktion grob!

Aufgabe 11.50 **Lösung**

Die tarifliche Einkommensteuer nach § 32a Einkommensteuergesetz wurde für die Veranlagungszeiträume 1990 bis 1995 für Einkommen von 8154 bis 120041 DM folgendermaßen berechnet: War x das zu versteuernde Einkommen in DM und $y = \dfrac{54}{10000}\left\lfloor \dfrac{x-8100}{54} \right\rfloor$, dann betrug die Einkommensteuer $s = \lfloor 151{,}94y^2 + 1900y + 472 \rfloor$ DM. Dabei ist $\lfloor z \rfloor$ der ganze Teil der Zahl z (Gaußklammer): $\lfloor z \rfloor = n$ mit n ganz, $n \leq z < n+1$.

Bezüglich der Ausführung der Berechnung schrieb § 32a Abs. 3 EStG seinerzeit vor: *„Die zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer erforderlichen Rechenschritte sind in der Reihenfolge auszuführen, die sich nach dem Horner-Schema ergibt. Dabei sind die sich aus den Multiplikationen ergebenden Zwischenergebnisse für jeden weiteren Rechenschritt mit drei Dezimalstellen anzusetzen; die nachfolgenden Dezimalstellen sind fortzulassen.“*

Stellen Sie die Berechnung der Einkommensteuer s für ein zu versteuerendes Einkommen von 50000 DM mit allen Zwischenschritten dar!

Aufgabe 11.51 **Lösung**

§ 32a Abs. 1–3 des Einkommensteuergesetzes in der ab 01.01.2002 geltenden Fassung bestimmten den Einkommensteuertarif in folgender Weise:

(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §32b, §34, §34b und §34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.235 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.236 Euro bis 9.251 Euro: (768,85 · y + 1.990) · y;
3. von 9.252 Euro bis 55.007 Euro: (278,65 · z + 2 300) · z + 432;
4. von 55.008 Euro an: 0,485 · x – 9.872.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.200 Euro übersteigenden Teils des nach Absatz 2 ermittelten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 9.216 Euro übersteigenden Teils des nach Absatz 2 ermittelten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das nach Absatz 2 ermittelte zu versteuernde Einkommen.

(2) Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 36 ohne Rest teilbaren vollen Euro-Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 36 ohne Rest teilbar ist, und um 18 Euro zu erhöhen.

(3) Die zur Berechnung der tariflichen Einkommensteuer erforderlichen Rechenschritte sind in der Reihenfolge auszuführen, die sich nach dem Horner-Schema ergibt. Dabei sind die sich aus den Multiplikationen ergebenden Zwischenergebnisse für jeden weiteren Rechenschritt mit drei Dezimalstellen anzusetzen; die nachfolgenden Dezimalstellen sind fortzulassen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Sei t das ungerundete im Veranlagungszeitraum 2002 erzielte zu versteuernde Einkommen eines Steuerpflichtigen. Stellen Sie die tarifliche Einkommensteuer E dafür formelmäßig unter Verwendung der Gaußklammer dar!

Interpolation

Aufgabe 11.52 **Lösung**

Für die Größen x und y liegen folgende Werte vor:

x	2	2.5	4
$y(x)$	0.5	0.4	0.25

(z.B. erfüllt von $y(x) = \frac{1}{x}$).

a) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch lineare Interpolation aus $y(2)$ und $y(4)$!
b) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch lineare Interpolation aus $y(2.5)$ und $y(4)$!
c) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(3)$ durch quadratische Interpolation aus $y(2)$, $y(2.5)$ und $y(4)$!

Aufgabe 11.53

Für die Größen x und y liegen folgende Werte vor:

x	4	5	8
$y(x)$	0	24	60

$\left(\text{z.B. erfüllt von } y(x) = 120 - \frac{480}{x}\right)$.

a) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(6)$ durch lineare Interpolation aus $y(5)$ und $y(8)$!
b) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(6)$ durch quadratische Interpolation aus $y(4)$, $y(5)$ und $y(8)$!

Bestimmen Sie dabei die Interpolationspolynome durch Lagrange-Interpolation! Wie könnten die Polynome alternativ ohne Verwendung von Interpolationsformeln bestimmt werden?

c) Ermitteln Sie die beiden Interpolationspolynome nacheinander durch Newton-Interpolation!

Aufgabe 11.55 **Lösung**

Die Größen y_i hängen nach nebenstehender Tabelle von x ab. Nehmen Sie in den 5 Fällen die Lagrange-Interpolation vor! Skizzieren Sie die ermittelten Interpolationspolynome! Um was für Kurven handelt es sich? Welche Näherungswerte würden sich für $y_i(-0.5)$ ergeben? Kommentieren Sie die Ergebnisse!

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-1	1	0	0	0	0
0	1	2	2	2	2
1	1	4	6	6	12
2	1	6	12	18	126

Aufgabe 11.56 **Lösung**

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Interpolation das Polynom vierten Grades, welches an der Stelle 0 den Wert 4, an den Stellen $+1$ und -1 den Wert 12 und an den Stellen $+2$ und -2 den Wert 24 annimmt!

Aufgabe 11.57 **Lösung**

Zwischen den Größen x und y bestehe der funktionelle Zusammenhang $y = f(x) = 5 - \frac{10}{x^2+1}$.

a) Es seien nur die Funktionswerte an 5 Stellen bekannt:

x	-1	0	1	2	3
y	0	-5	0	3	4

Nehmen Sie für diese die Lagrange-Interpolation vor!

b) Stellen Sie dieses Interpolationspolynom und die Funktion $f(x)$ für $-4 \leq x \leq 6$, $-6 \leq y \leq 8$ in einer gemeinsamen Skizze dar!

Aufgabe 11.58 **Lösung**

Von einer Funktion $y = f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	0	0	180	48	0	0

a) Bestimmen Sie durch Lagrange-Interpolation das lineare Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x=1$ und 2, das quadratische Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x=0$, 1 und 2 sowie das Interpolationspolynom, das alle gegebenen Werte berücksichtigt!
b) Bestimmen Sie die Nullstellen der drei bei a) ermittelten Interpolationspolynome!
c) Welche „Näherungswerte“ ergeben sich mit den drei Polynomen für $f(1{,}5)$?
d) Stellen Sie die drei Interpolationspolynome in einer gemeinsamen Skizze dar!

Aufgabe 11.59 **Lösung**

Von einer Funktion $y = f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-1	0	1	2
y	$-2{,}24$	0	$0{,}24$	$4{,}48$

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ durch kubische Interpolation!
b) Warum ist die kubische Interpolation im vorliegenden Fall nicht geeignet, wenn bekannt ist, dass die Funktion $f(x)$ monoton wächst? Wie könnte man in diesem Falle einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ ermitteln?

Aufgabe 11.60 **Lösung**

Gegeben seien die Interpolationsknoten

$$(0,-4),\ (1,-8),\ (3,-40),\ (6,-148).$$

Berechnen Sie das Interpolationspolynom von Newton! Wie ändert sich das Ergebnis, wenn nachträglich noch der Punkt $(-1,104)$ berücksichtigt werden soll?

Aufgabe 11.61 **Lösung**

Gegeben seien die Interpolationsknoten

$$(-3,-40),\ (0,-4),\ (1,-8),\ (3,-40),\ (6,-148).$$

Berechnen Sie das Interpolationspolynom von Newton! Wie ändert sich das Ergebnis, wenn nachträglich noch der Punkt $(-1,104)$ berücksichtigt werden soll?

Aufgabe 11.62 **Lösung**

Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t) = 2\sin\frac{\pi}{6}t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

Es seien nur die Funktionswerte von $f(t)$ an den Stellen $t=-3$, $t=-1$ und $t=1$ bekannt. Bestimmen Sie mittels Newtoninterpolation daraus ein Interpolationspolynom! Welchen Wert hat dieses an der Stelle $t=3$?

Aufgabe 11.63 **Lösung**

Gegeben seien die Interpolationsknoten

$$(-2,-41),\ (-1,-14),\ (1,-2),\ (2,7).$$

Berechnen Sie das Interpolationspolynom von Newton! Wie ändert sich das Ergebnis, wenn nachträglich noch der Punkt $(0,-1)$ berücksichtigt werden soll? Geben Sie die beiden gesuchten Interpolationspolynome jeweils auch in der Form $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ an!

Aufgabe 11.64 **Lösung**

Geben Sie für die Funktion $f(x) = \cos 2x - 3\sin x$ mit dem Definitionsbereich $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ das Newtonsche Interpolationspolynom für die Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$ und $x_3 = \dfrac{\pi}{2}$ an!

Aufgabe 11.65 **Lösung**

Für äquidistante Stützstellen mit dem Abstand h berechnen sich die Steigungen für die Newtoninterpolation nach der Formel $[x_1 x_2 \ldots x_n] =$

$$\frac{1}{(n-1)!\,h^{n-1}}\left[f(x_n) - \binom{n-1}{1} f(x_{n-1}) + \binom{n-1}{2} f(x_{n-2}) \mp \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} f(x_1)\right].$$

Berechnen Sie mithilfe dieser Formel das Newtonsche Interpolationspolynom für die Interpolationsknoten $(0,-3)$, $(1,1)$, $(2,2)$ und $(3,3)$!

12 Differenzialrechnung

Grenzwerte

Aufgabe 12.1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-x)^2}{1-x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{4x^2+5x+6}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^5(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{15}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{2+\sqrt[3]{x^5}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$!

Aufgabe 12.2 Lösung

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+4)^2-(x-4)^2}{8x}$!

Aufgabe 12.3 Lösung

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x-4}$!

Aufgabe 12.5 Lösung

Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+9x+20}$ und b) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right)$!

Aufgabe 12.6 Lösung

Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-2x+3x^2-4x^3}{(1-2x)(4-3x^2)}$, b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{36-4x^2}{x^2+2x-15}$, c) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{11x+2}{2x^3+3x^2-5x+12}\right)$!

Aufgabe 12.7 Lösung

a und b seien reelle Parameter. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+2000x+2}{bx^2-5x-8}$!

Aufgabe 12.8 Lösung

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^7+4x^6-4x^5+3x^4-3x^3+2x^2-2x+1}{bx^7+7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}$ in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b !

Aufgabe 12.9

Berechnen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3}{x-2}$, d) $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{3}{x-2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}$!

Existieren auch die Grenzwerte?

Stetigkeit

Aufgabe 12.10

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen stetig:

a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{1-x^2}$, c) $f(x) = \cos x \sin x$, d) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$?

Aufgabe 12.11 Lösung

Skizzieren Sie folgende Funktionen, geben Sie ihre Definitions-, Werte- und Stetigkeitsbereiche an:

a) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$,
b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$!

Aufgabe 12.12 Lösung

Sei $f(x) = \frac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, hebbaren Unstetigkeitsstellen (Lücken), Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion! Bestimmen Sie auch die (ggf. einseitigen) Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen!

Aufgabe 12.13 Lösung

Beweisen Sie, dass jedes Polynom ungerader Ordnung stets mindestens eine reelle Nullstelle hat, während es für gerade Ordnungen immer Polynome gibt, die keine reellen Nullstellen haben!

Aufgabe 12.15 Lösung

Ein Unternehmen setzt ein Produkt zum Preis von p pro Stück ab und erzielt damit einen Umsatz (Erlös) von $U(p) = \frac{p}{ap+b}$ $(a,b>0)$. Der Preis kann auch negativ sein (sinnvoll z.B., wenn das Produkt sonst noch kostenaufwändiger entsorgt werden müsste), die abgesetzte Stückzahl $A(p)$ darf aber nicht negativ werden.

a) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben die Funktion $A(p)$! Wo ist diese definiert?
b) Es sei zusätzlich gegeben, dass $A(p)$ stetig ist. Ändert sich durch diese Angabe der Definitionsbereich? Wieviel Stück des Produktes werden abgesetzt, wenn es verschenkt wird (ohne dass vom Schenkenden noch etwas dazugezahlt wird)?
c) Wie verhält sich der Absatz für $p \to \infty$?

Aufgabe 12.16 **Lösung**

Sei t das ungerundete im Veranlagungszeitraum 2010 erzielte zu versteuernde Einkommen eines Steuerpflichtigen.

a) Stellen Sie die tarifliche Einkommensteuer dafür (s. Aufgabe 12.52) unter Verwendung der Gaußklammer und ohne die Nutzung weiterer Variablen formelmäßig als Funktion $S(t)$ dar!
b) Obwohl in der Realität für t nur Vielfache von $1/100$ in Frage kommen, sollen beliebige reelle t zugelassen werden. Untersuchen Sie unter dieser Voraussetzung die Funktion $S(t)$ aus a) an den Stellen $t = 13470$ und $t = 13471$ auf Stetigkeit!

Ableitung und Differenzial

Aufgabe 12.18 **Lösung**

Sei $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 + 2$.

a) Differenzieren Sie die Funktion!
b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0 = 1$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an! Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(1{,}01)$ und $f(1{,}02)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen!
c) x sei mit einer Genauigkeit von 0,01 zu 1 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

Aufgabe 12.19 **Lösung**

Sei $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

a) Differenzieren Sie die Funktion!
b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0 = 4$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an!
c) Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(4{,}01)$ und $f(4{,}1)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen! Notieren Sie für diese Situationen jeweils auch das Differenzial $\mathrm{d}f$ und die tatsächliche Funktionswertänderung Δf !
d) x sei mit einer Genauigkeit von 0,1 zu 4 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

Aufgabe 12.20

Ein Fahrzeug bewegt sich nach $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.

a) Differenzieren Sie die Funktion $s(t)$! Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Stunde, d.h. zum Zeitpunkt $t = 1$, zurückgelegt, mit welcher Geschwindigkeit fährt es da?
b) Geben Sie das Differenzial von s bezüglich t zum Zeitpunkt $t = 1$ an! Welche Strecke würde das Fahrzeug in 1, 6, 30 bzw. 60 Minuten zurücklegen, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde?
c) Vergleichen Sie die in b) berechneten Werte des Differenzials mit den tatsächlichen Wegänderungen!

d) Die Zeit t sei mit einer Genauigkeit von 5 Minuten zu $t=1$ bestimmt. Schätzen Sie mithilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $s(t)$ ab!
e) Approximieren Sie die Funktion $s(t)$ in der Nähe von $t=1$ durch eine Gerade! Welchen Weg hätte das Fahrzeug nach 61, 66, 90 bzw. 120 Minuten zurückgelegt, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde? Vergleichen Sie die Werte mit dem tatsächlich zurückgelegten Weg!

Aufgabe 12.21 **Lösung**

Das Anfangskapital $K(0)$ werde zu p p.a. kontinuierlich verzinst (s. Aufg. 10.34), $t \in \mathbb{R}$ sei die Zeit in Jahren.

a) Zeigen Sie, dass das Kapital proportional zu seiner Höhe wächst! Wie groß ist der Proportionalitätsfaktor?
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $K(t)$ im Punkt $(\bar{t}, K(\bar{t}))$!
c) In welchem Punkt schneidet die Tangente die t–Achse?

Aufgabe 12.22

Für die Produktion von $x \leq 2000$ Einheiten einer Ware laute die Gesamtkostenfunktion $K(x) = 1500 + 5x - 0{,}001x^2$.

a) Ermitteln Sie die durchschnittlichen Kosten pro Einheit, die bei der Produktion von x Einheiten entstehen (Durchschnittskostenfunktion) sowie die Grenzkostenfunktion!
b) Bestimmen Sie für $x = 1000$ und $x = 1900$ jeweils die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 1001. bzw. 1901.) Einheit!
c) Approximieren Sie $K(x)$ in der Nähe von $x_0 = 1900$ durch eine Gerade und geben Sie das Differenzial an!
d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzials näherungsweise die Kosten für die Herstellung zweier zusätzlicher Einheiten, wenn bereits 1900 Einheiten produziert sind, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den tatsächlichen Mehrkosten!

Aufgabe 12.23 **Lösung**

Für die Produktion von x Einheiten einer Ware ($x \leq 3000$) seien Gesamtkosten in Höhe von $K(x) = 800 + 2x - 0{,}0003x^2$ erforderlich.

a) Ermitteln Sie die Durchschnittskostenfunktion und die Grenzkostenfunktion!
b) Skizzieren Sie grob die drei Kostenfunktionen und interpretieren Sie sie!
c) Es seien 2000 Einheiten produziert worden. Ermitteln Sie die Kosten für die Produktion einer weiteren Einheit mit Hilfe der Grenzkostenfunktion und mit Hilfe der Gesamtkostenfunktion!

Aufgabe 12.24 **Lösung**

Für die Produktion von x Einheiten einer Ware ($x \leq 20\,000$) seien Gesamtkosten in Höhe von $K(x) = 2\,000 + 5x - 0{,}000\,1\,x^2$ erforderlich.

a) Ermitteln Sie die Durchschnittskostenfunktion und die Grenzkostenfunktion!
b) Es seien 15 000 Einheiten produziert worden. Ermitteln Sie die Kosten für die Produktion einer weiteren Einheit mit Hilfe der Grenzkostenfunktion und mit Hilfe der Gesamtkostenfunktion!

Aufgabe 12.26 **Lösung**

Für die Produktion von $x \leq 1000$ Einheiten einer Ware laute die (Gesamt-)Kostenfunktion $K(x) = -x^2 + 2000x + 210000$.

a) Skizzieren Sie $K(x)$ grob!
b) Wieso ist die Verwendung der Funktion $K(x)$ für $x > 1000$ als Gesamtkostenfunktion nicht sinnvoll?
c) Ermitteln Sie die Durchschnitts- und die Grenzkostenfunktion!
d) Bestimmen Sie für $x = 800$ die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 801.) Einheit!

Aufgabe 12.27 **Lösung**

Offensichtlich gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $y = \mathrm{e}^h - 1$, dass die Exponentialfunktion e^x abgeleitet sich selbst ergibt, dass heißt, gleich ihrem Anstieg ist!

Aufgabe 12.28

Differenzieren Sie nach x:

a) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$, b) $y = x + \sqrt{x}$, c) $y = x + \sqrt{x^2 + 3}$, d) $y = x\sin(ax + 3)$,
e) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, f) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$, g) $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{bx + c}\right)^2$, h) $y = \dfrac{(x+1)\,\sin(x+1)}{(x-1)^2}$!

Aufgabe 12.29 **Lösung**

Differenzieren Sie
a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x - 4$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}$, c) $f(x) = \sqrt{x + 1}\,(x^2 + 1)$!

Aufgabe 12.30 **Lösung**

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $y(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 13$,
b) $y(x) = \sqrt{x}$,
c) $y(x) = x^5 - \dfrac{2}{x^2}$,
d) $y(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x}$,
e) $y(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$,
f) $y(x) = \sqrt{x^2 + 64}$!

Aufgabe 12.35 **Lösung**

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (4x + 3\cos^2 x)^5$, b) $f(x) = 6^x x^6 \sin x$, c) $f(x) = \ln\sqrt{\mathrm{e}^x + x^4}$, d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 3}{4x^2 + 5}}$!

Aufgabe 12.36 **Lösung**

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (\mathrm{e}^{2x+3} + 4x + 5)^6$, b) $f(x) = (\sin^2 x + 1)(\ln x + 2)$, c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}$,
d) $f(x) = \ln\sqrt{x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,\ln x}$!

Aufgabe 12.39 **Lösung**

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x)=(3-2x)\,\sin\left((3-2x)^2\right)\,\left(\sin(3-2x)\right)^2$, b) $f(x)=(\mathrm{e}^x\ln x)^2$, c) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}}$,

d) $f(x)=\sin(3-x^2)^2+\cos(3-x^2)^2+\sin^2(3-x^2)+\cos^2(3-x^2)$, e) $f(x)=\dfrac{x\sin(ax+b)}{x^2+3}$!

Aufgabe 12.40 **Lösung**

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x)=(4x^3+2x)\,(\sin 3x+2)\,\sin(3x+2)$, b) $f(x)=(x\ln x)^5$, c) $f(x)=\ln\sqrt{x\sqrt{x}}$,

d) $f(x)=\sin^2(x^2+1)+\cos^2(x^2+1)+\sin(x^2+1)^2+\cos(x^2+1)^2$, e) $f(x)=\dfrac{x\cos(a-bx)}{x^2+1}$!

Aufgabe 12.41 **Lösung**

Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x)=x^5\,5^x$, b) $f(x)=(x+\sin^2 x+\cos^2 x)^5$, c) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+\sin^2 x}$,

d) $f(x)=\cos(x^2+2)\,(3x-4)^3\,\ln(3x-4)$, e) $f(x)=\dfrac{(x^2+3x+5)\sin x}{x\cos x}$!

Aufgabe 12.44 **Lösung**

Ermitteln Sie $f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ für $f(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$!

Aufgabe 12.45

Differenzieren Sie $y=(x\cos x)^x$!

Hinweis: $a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$

Aufgabe 12.46 **Lösung**

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+3}\right)^{\sin 2x}$ durch logarithmische Differenziation!

Aufgabe 12.47 **Lösung**

Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an die Funktion $y=x^3+x^2-x+1$ in den Punkten $x_0=-1$, $x_0=0$ und $x_0=1$!

Aufgabe 12.48

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x+8}{3x^2+2}}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0 = 0$!
b) Geben Sie mithilfe des Ergebnisses von a) Näherungswerte für $f(0{,}0008)$ und $f(0{,}008)$ an und vergleichen Sie diese mit den tatsächlichen Funktionswerten!
c) Notieren Sie für die Situationen in b) jeweils Differenzial $\mathrm{d}f$ und tatsächliche Funktionswertänderung Δf !

Aufgabe 12.49 Lösung

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$!
b) Geben Sie mithilfe des Ergebnisses von a) Näherungswerte für $f(1{,}001)$, $f(1{,}01)$, $f(1{,}1)$ und $f(2)$ an und vergleichen Sie diese mit den tatsächlichen Funktionswerten!
c) Notieren Sie für die Situationen in b) jeweils Differenzial $\mathrm{d}f$ und tatsächliche Funktionswertänderung Δf !

Aufgabe 12.50

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ im Punkt $x = \pi$ und skizzieren Sie $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$!

Hinweis: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Aufgabe 12.51 Lösung

Die Höhe einer Fichte in cm in Abhängigkeit vom Alter t in Jahren werde durch die Funktion
$h(t) = \dfrac{4000}{1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}058t}} - 400$ beschrieben.

a) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen, welcher Wertebereich ergibt sich? Wie groß kann die Fichte maximal werden?
b) Differenzieren Sie die Funktion $h(t)$! Mit welcher Geschwindigkeit wächst die Fichte im Alter von 10 Jahren?
c) Geben Sie das Differenzial von h bezüglich t zum Zeitpunkt $t = 10$ an! Um welchen Betrag würde die Fichte in 3, 6, 12 bzw. 24 Monaten wachsen, wenn sie die Wachstumsgeschwindigkeit, die sie zum Zeitpunkt $t = 10$ erreicht hat, beibehalten würde?
d) Vergleichen Sie die in c) berechneten Zahlenwerte des Differenzials mit dem tatsächlichen Höhenzuwachs in den angegebenen Zeiträumen!
e) Die Zeit t sei mit einer Genauigkeit von 1 Monat zu $t = 10$ bestimmt. Schätzen Sie mithilfe des Differenzial den Fehler bei der Bestimmung von $h(t)$ ab!
f) In welchem Alter erreicht die Fichte eine Höhe von 16 m? Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Alter?

Aufgabe 12.52

§ 32a Abs. 1 des Einkommensteuergesetzes (EStG) in der nach § 52 Abs. 41 dieses Gesetzes für die Veranlagungszeiträume 2010 bis 2012 anzuwendenen Fassung bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 8 004 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 8 005 Euro bis 13 469 Euro: $(912{,}17 \cdot y + 1\,400) \cdot y$;
3. von 13 470 Euro bis 52 881 Euro: $(228{,}74 \cdot z + 2\,397) \cdot z + 1\,038$;
4. von 52 882 Euro bis 250 730 Euro: $0{,}42 \cdot x - 8\,172$;
5. von 250 731 Euro an: $0{,}45 \cdot x - 15\,694$.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 8 004 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 13 469 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Um differenzieren zu können, soll hier von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen (im Folgenden Einkommen)!
b) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 23 469 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
c) Ein Steuerpflichtiger hat durch den Kauf von Fachliteratur zusätzliche Werbungskosten von 200 €. Schätzen Sie für Einkommen von 10 000, 100 000 und 300 000 € mit Hilfe des Grenzsteuersatzes ab, um wieviel sich dadurch seine Einkommensteuer vermindert! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Steuerverminderung!
d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente für $x = 52\,881$ an die für den Bereich 3. gegebene Parabel! Kommentieren Sie das Ergebnis!

(Stand des zitierten Gesetzes 17.04.2013 unter http://bundesrecht.juris.de/estg/, für Veranlagungzeiträume ab 2013 Tarifänderung nach dem Gesetz zum Abbau der kalten Progression vom 20.02.2013, BGBl I 2013 Nr. 9 S. 283)

Aufgabe 12.53 **Lösung**

§ 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
*2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: (883,74 * y + 1.500) * y;*
*3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: (228,74 * z + 2.397) * z + 989;*
*4. von 52.152 Euro bis 250.000 Euro: 0,42 * x – 7.914;*
*5. von 250.001 Euro an: 0,45 * x – 15.414.*

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Sei t das ungerundete zu versteuernde Einkommen (in Folgendem Einkommen) und $S(t)$ die tarifliche Einkommensteuer dafür jeweils in Euro.

a) Wie hoch muss das Einkommen mindestens sein, damit wenigstens 1 € Einkommensteuer entsteht?
b) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to 12740-} S(t)$ und $\lim\limits_{t\to 12740+} S(t)$!
c) Stellen Sie die Funktion $S(t)$ in den oben mit 4. und 5. bezeichneten Bereichen mithilfe der Gaußklammer dar!
d) Untersuchen Sie $S(t)$ an den Stellen $t = 250\,000$ und $t = 250\,001$ auf Stetigkeit!

Um differenzieren zu können, soll im Weiteren von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

e) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen und stellen Sie diesen grafisch dar!
f) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 10 000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
g) Für welche Einkommen kann durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € die tarifliche Einkommensteuer um ca. 15 €, ca. 30 €, ca 42 € bzw. ca. 45 € vermindert werden?

(Stand des zitierten Gesetzes vor der Änderung des Einkommensteuertarifs durch das Gesetz zur Sicherung von Beschäftigung und Stabilität in Deutschland vom 2. März 2009 (BGBl. I S. 416). Der zitierte Einkommensteuertarif galt so für die Veranlagungsjahre 2007 und 2008.)

Aufgabe 12.54 **Lösung**

§ 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes in der ab dem Veranlagungszeitraum 2005 anzuwendenden Fassung (§ 52 Abs. 41 EStG) bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 34, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: (883,74 · y + 1.500) · y;
3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: (228,74 · z + 2.397) · z + 989;
4. von 52.152 Euro an: 0,42 · x – 7.914.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Von den Rundungsvorschriften soll hier abgesehen werden.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen x und stellen Sie diesen grafisch dar!
b) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 24 000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 200 € erreicht wird!
c) Für welche Einkommen kann durch zusätzliche Werbungskosten von 200 € die tarifliche Einkommensteuer um ca. 30 €, ca. 57 € bzw. ca. 84 € vermindert werden?

(Einkommenssteuertarif für die Veranlagungsjahre 2005 und 2006, 2007 wurde dieser durch die „Reichensteuer“ ergänzt, blieb aber ansonsten für 2007 und 2008 unverändert.)

Aufgabe 12.55 **Lösung**

Nach der Flutkatastrophe 2002 wurde eine zuvor beschlossene Steuersenkung durch das Flutopfersolidaritätsgesetz vom 19.09.2002 (BGBl. I S. 3651) um ein Jahr verschoben, danach wäre § 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes erst und nur für das Jahr 2004 in folgender Fassung anzuwenden gewesen:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §32b, §34, §34b und §34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.426 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.427 Euro bis 12.755 Euro: (747,80 · y + 1.700) · y;
3. von 12.756 Euro bis 52.292 Euro: (278,59 · z + 2.497) · z + 1.118;
4. von 52.293 Euro an: 0,47 · x – 9.232.

„y" ist ein Zehntausendstel des 7.426 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z" ist ein Zehntausendstel des 12.755 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Von den Rundungsvorschriften soll hier abgesehen werden.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen x und stellen Sie diesen grafisch dar!
b) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 20000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen sowie den Grenzsteuersatz!

(Tatsächlich ist diese Fassung des Einkommensteuertarifs nie angewendet worden, er wurde vielmehr durch das Haushaltbegleitgesetz 2004 vom 29.12.2003 (BGBl. I S. 3076) abermals geändert.)

Aufgabe 12.56 **Lösung**

§ 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes in der ab 01.01.2002 geltenden Fassung bestimmt den Einkommensteuertarif in folgender Weise:

Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §32b, §34, §34b und §34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.235 Euro (Grundfreibetrag): 0;
2. von 7.236 Euro bis 9.251 Euro: (768,85 · y + 1.990) · y;
3. von 9.252 Euro bis 55.007 Euro: (278,65 · z + 2 300) · z + 432;
4. von 55.008 Euro an: 0,485 · x – 9.872.

„y" ist ein Zehntausendstel des 7.200 Euro übersteigenden Teils des nach Absatz 2 ermittelten zu versteuernden Einkommens. „z" ist ein Zehntausendstel des 9.216 Euro übersteigenden Teils des nach Absatz 2 ermittelten zu versteuernden Einkommens. „x" ist das nach Absatz 2 ermittelte zu versteuernde Einkommen.

Die Absätze 2 und 3 schreiben die Verwendung des Hornerschemas und spezieller Rundungsvorschriften vor (s. Aufgabe 11.51), die hier nicht beachtet werden sollen. Sei x also das zu versteuernde Einkommen in €, $S(x)$ sei die darauf zu entrichtende Einkommensteuer in €.

a) Geben Sie die Funktion $S(x)$ an!
b) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit von x und stellen Sie diesen grafisch dar!
c) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 20000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen sowie den Grenzsteuersatz!

Aufgabe 12.57 **Lösung**

Zur Berechnung des Grenzsteuersatzes für die Veranlagungszeiträume 1990 bis 1995, d.h. des Prozentsatzes, der vom letzten in diesen Jahren zugeflossenen Einkommen als Einkommensteuer zu zahlen war, betrachten wir die Parabel s, die sich ergibt, wenn in den Formeln aus Aufgabe 11.50 auf die Gaußklammer verzichtet wird, für $8100 \leq x \leq 119988$.

a) Geben Sie eine Formel für den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit von x an!
b) Wie hoch ist der Grenzsteuersatz für 8100 DM bzw. 119988 DM?

Aufgabe 12.58 **Lösung**

Einkommen x von jeweils einschließlich 10 000 € bis 70 000 € sollen einer Steuer $S(x)$ mit folgenden Eigenschaften unterworfen werden:

– Der Grenzsteuersatz beträgt $5 \cdot 10^{-6}x + 0{,}05$.
– Auf ein Einkommen von 10 000 € ist eine Steuer von 500 € zu entrichten.

a) Mit welcher Steuerersparnis ist ungefähr zu rechnen, wenn ein Einkommen von 40 000 € durch eine Sonderabschreibung um 100 € gemindert werden kann?
b) Ermitteln Sie die Steuer $S(x)$ und den Durchschnittssteuersatz (Anteil der Steuer am Einkommen)!
c) Welche Steuer ist auf 70 000 € zu entrichten, wie hoch ist in diesem Fall der Durchschnitts- und der Grenzsteuersatz?

Aufgabe 12.59 **Lösung**

Auf ein Einkommen x ist eine Steuer von $S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ \frac{3}{800}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{11}{8}, & 10 < x < 50 \\ \frac{19}{40}x - \frac{43}{4}, & 50 \leq x \end{cases}$

zu entrichten, Einkommen und Steuer werden dabei in Tausend € (T€) angegeben.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen x !
b) Berechnen Sie für ein Einkommen von 30 T€ die darauf erhobene Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen und den Grenzsteuersatz in Prozent!
c) Um wieviel Prozent springt der Grenzsteuersatz, wenn das Einkommen 10 T€ überschreitet?
d) Wie hoch ist der Spitzensteuersatz (d.h. der höchstmögliche Grenzsteuersatz) in Prozent?
e) Skizzieren Sie die Funktion $S(x)$ grob!

Aufgabe 12.60 **Lösung**

In der Diskussion um ein neues Steuersystem schlägt jemand einen „radikal einfachen“ Steuertarif vor:

– Bis zu einem Jahreseinkommen von 25 000 € soll keine Steuer erhoben werden.
– Ab einem Einkommen von 50 000 € soll die Steuer 30 % des Einkommens betragen.
– Nur wer ein Einkommen zwischen 25 000 und 50 000 € hat, braucht einen Taschenrechner: Ist x das Einkommen in €, so beträgt die Steuer $0{,}000012x^2 - 0{,}3x$ €.

a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen!

b) Was passiert mit dem Grenzsteuersatz bei 50 000 €, welche Konsequenzen hat das für jemanden, dessen Einkommen knapp unter 50 000 € liegt?
c) Vor Begeisterung über die Formel $S(x) = 0{,}000\,012x^2 - 0{,}3x$ wird in der nun anbrechenden öffentlichen Diskussion vorgeschlagen, diese Formel doch gleich für beliebige Einkommenshöhen anzuwenden. Welche Konsequenzen hätte das für jemanden, dessen Einkommen zwischen 0 und 25 000 € liegt?

Newtonverfahren

Aufgabe 12.61

a) Erläutern Sie das Newtonverfahren zur näherungsweisen Lösung nichtlinearer Gleichungen und leiten Sie seine Iterationsvorschrift her!
b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion $f(x) = \sin x - 2x + 1$ aus!

Aufgabe 12.62

Lösen Sie die Gleichung $x = \cos x$ mithilfe des Newtonverfahrens!

Aufgabe 12.63 **Lösung**

Ermitteln Sie eine Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\tan x = x$, indem Sie auf die Gleichung $\sin x - x\cos x = 0$ das Newtonverfahren anwenden!

Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes eine Skizze an!

Aufgabe 12.64 **Lösung**

Lösen Sie mithilfe des Newtonverfahrens die Gleichung $\sqrt{x} = 2\sin x$! Lassen sich alle Lösungen der Gleichung damit ermitteln?

Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung geeigneter Startwerte eine Skizze an!

Aufgabe 12.65 **Lösung**

Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Nullstellen von $f(x) = 3 - x^2 - \frac{1}{x}$!

Aufgabe 12.67

Wenden Sie zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ das Newtonverfahren mit den Startwerten $x_0^{(a)} = 1$ und $x_0^{(b)} = 0$ an! Kommentieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 12.68 **Lösung**

Die Gleichung $e^x = 3x$ soll mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden.

a) Ermitteln Sie zunächst eine Lösung dieser Gleichung ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$!
b) Verwenden Sie nun den Startwert $x_0 = 1{,}1$! Erklären Sie den dabei zu beobachtenden Effekt!
c) Wieviele Lösungen hat die Gleichung?
d) Bestimmen Sie die evtl. noch fehlenden Lösungen mithilfe des Newtonverfahrens!

Aufgabe 12.69 **Lösung**

Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x+4$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben a) bis c) ohne elektronische Hilfsmittel, für d) können Sie selbstverständlich solche Hilfsmittel benutzen.

a) Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!
b) Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!
c) Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!
d) Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-8} ! Stellen Sie die dabei durchlaufenen Iterationspunkte tabellarisch dar!

Aufgabe 12.70 **Lösung**

Als Rendite eines festverzinslichen Wertpapieres soll der fiktive effektive Jahreszinssatz für den Kaufwert bezeichnet werden, der sich ergibt, wenn man unterstellt, dass die vor der Endfälligkeit des Wertpapiers ausgezahlten Zinsen zum Zinssatz der Rendite wiederangelegt werden können. Ermitteln Sie die Rendite eines Papieres, das einen Kurswert von 105 % hat und mit 7 % p.a. vom Nennwert verzinst wird, wenn die Restlaufzeit

a) genau 1 Jahr, b) genau 2 Jahre, c) genau 3 Jahre

beträgt! Dabei soll die Rendite in den Fällen a) und b) exakt, im Falle c) mit dem Newtonverfahren bestimmt werden.

Aufgabe 12.71 **Lösung**

Ermitteln Sie mit dem Newtonverfahren die Rendite eines Wertpapieres mit einem Verkaufskurs von 116 %, einer Restlaufzeit von 5 Jahren und einem Zinssatz von 9 %!

Aufgabe 12.72 **Lösung**

Eine Anleihe mit einer Restlaufzeit von genau 9 Jahren und einem Kupon von 4 % p.a. wird zum Kurs von 91 % verkauft. Wie groß ist die Rendite?

l'Hospitalsche Regel

Aufgabe 12.73

Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$, b) $\lim\limits_{x\to\pi} (\pi - x)\tan\dfrac{x}{2}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$,
f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$!

Aufgabe 12.74 **Lösung**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2-x}$!

Aufgabe 12.75 **Lösung**

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\cot x$!

Aufgabe 12.76 **Lösung**

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}$!

Aufgabe 12.81 **Lösung**

Bestimmen Sie a) $\lim\limits_{a\to 7}\left(\dfrac{1}{a-7}-\dfrac{8}{a^2-6a-7}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan x}$!

Aufgabe 12.82 **Lösung**

Seien a und b positive Parameter. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{bx}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{bx^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$, d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$!

Aufgabe 12.85 **Lösung**

α und β seien beliebige reelle Parameter. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2\alpha x}-e^{3\beta x}}{\sin 4\alpha x-\sin 6\beta x}\ !$$

Aufgabe 12.86 **Lösung**

Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a das Verhalten der Funktion
$f(x)=(a-2x)\cot 3x$ für $x\to\pi$!

Aufgabe 12.87 **Lösung**

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cot x}$!

Aufgabe 12.88 **Lösung**

Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch $c(T) = R\dfrac{(T_0/T)^2\,\mathrm{e}^{T_0/T}}{\left(\mathrm{e}^{T_0/T}-1\right)^2}$ mit der Gaskonstanten R und der charakteristischen Temperatur T_0.

Berechnen Sie die Grenzwerte von $c(T)$ für $T \to 0$ und $T \to \infty$!

(Meyberg, K. und Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6. Aufl. Springer 2003, S. 129)

Elastizität

Aufgabe 12.89 **Lösung**

Ermitteln Sie für $f(x)=x^2$ näherungsweise mithilfe der Ableitung die absolute und mithilfe der Elastizität die relative Funktionsänderung, wenn x von $x=2$ aus um 5 %, d.h. um 0,1 erhöht wird! Vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den tatsächlichen Änderungen!

Aufgabe 12.90

Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $N(p)=\dfrac{20\,000}{2p+3}$. Ermitteln Sie für einen Preis von $p=2$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!

Aufgabe 12.91 **Lösung**

Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $N(p)=30\,000-200p$. Ermitteln Sie für einen Preis von $p=100$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1,5 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt! Warum stimmen die Ergebnisse überein?

Aufgabe 12.94 **Lösung**

Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $f(p) = \dfrac{1\,000\,000}{3p+5}$.

a) Ermitteln Sie die Preiselastiziät der Nachfrage!
b) Wo ist die Nachfrage elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch?
c) Ermitteln Sie für einen Preis von $p=5$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!
d) Wie verhält sich die Elastizität für $p \to \infty$?

Aufgabe 12.95 **Lösung**

Es sei bekannt, dass die Nachfrage nach einem Produkt linear von seinem Preis p abhängt, d.h. $N(p) = ap+b$. Ferner wurde festgestellt, dass sich bei einer Preiserhöhung um eine Geldeinheit die Nachfrage um 70 vermindert. Bei einem Preis von $p=60$ führt eine Preiserhöhung um 0,5 % zu einem Nachfragerückgang um 1 %.

a) Wie hoch ist die Preiselastiziät der Nachfrage für $p=60$?
b) Bestimmen Sie die Funktion $N(p)$!
c) Mit welcher Nachfrage ist zu rechnen, wenn das Produkt verschenkt wird?

Aufgabe 12.96 **Lösung**

Bei einem Preis von 1,20 € pro Liter werden in Deutschland 75 Millionen Liter Benzin pro Tag abgesetzt, die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises betrage −0,3.

a) Welche relative und welche absolute Entwicklung der Nachfrage ist ungefähr zu erwarten, wenn der Preis von 1.20 € auf 1.25 € steigt?
b) Bestimmen Sie die Nachfragefunktion $N(p)$ unter der Annahme, dass es sich um eine lineare Funktion handelt, d.h. $N(p)=ap+b$ gilt!

Aufgabe 12.98 **Lösung**

Aus den Pressemitteilungen des Statistischen Bundesamtes Nr. 035 vom 22.01.2004 und Nr. 022 vom 17.01.2005 ergeben sich für den Verkauf von Zigaretten in Deutschland in den Jahren 2003 und 2004 folgende Werte:

Jahr	Menge	Verkaufswert
2003	132.6 Milliarden Stück	21.1 Milliarden €
2004	111.7 Milliarden Stück	20.0 Milliarden €

a) Welchen Näherungswert für die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Verkaufspreises im Jahre 2003 kann man aus diesen Zahlen errechnen? Reagiert die Nachfrage elastisch auf die Preiserhöhung?
b) Für die Prognose der weiteren Entwicklung der Nachfrage soll mit der Funktion $N(p) = \left(\dfrac{4000}{p+6.3} - 3p\right) \cdot 10^9$ gearbeitet werden, wobei p der Preis in Cent sei. Ermitteln Sie die Elastiztät der Nachfrage bei einem Preis von 18 Cent!
c) Welche prozentuale Veränderung der Nachfrage ist zu erwarten, wenn der Preis von 18 Cent aus um 1.4 Cent erhöht wird und man den bei b) errechneten Elastizitätswert zu Grunde legt?

Aufgabe 12.99 **Lösung**

Ein Verkehrsverbund befördert bei einem Preis von 1.60 € pro Fahrt 90 Millionen Fahrgäste pro Jahr. Die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises betrage −0.2.

a) Welche relative Entwicklung der Nachfrage ist ungefähr zu erwarten, wenn der Preis von 1.60 € auf 1.70 € steigt?
b) Wieviele Fahrgäste sind nach dieser Preiserhöhung pro Jahr ungefähr zu erwarten?
c) Wie groß war der jährliche Erlös (Umsatz) vor der Preiserhöhung?
d) Errechnen Sie aus der gegebenen Nachfrageelastizität die Elastizität des Erlöses bezüglich des Preises! Welche relative Entwicklung des Erlöses ist durch die angebene Preiserhöhung ungefähr zu erwarten? Geben Sie den ungefähr zu erwartenden Erlös nach der Preiserhöhung an!
e) Bestimmen Sie die Nachfragefunktion $N(p)$ unter der Annahme, dass es sich um eine lineare Funktion handelt, d.h. $N(p) = ap + b$ gilt!
f) Ermitteln Sie mit Hilfe der in e) bestimmten Funktion die Nachfrage und den Erlös bei einem Preis von 1.70 € pro Fahrt! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen von b) und d)! Kommentieren Sie das Resultat!

Aufgabe 12.101 **Lösung**

Auf einen Ertrag x soll eine Steuer $S(x)$ erhoben werden. Dabei soll eine kubische Steuerfunktion $S(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ verwendet werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Für $x = 0$ soll keine Steuer erhoben werden und der Grenzsteuersatz 10 % betragen.
- Für $x = 10$ soll die Elastizität der Steuerfunktion 2 betragen.
- Für $x = 5$ soll der Grenzsteuersatz 37,5 % betragen

a) Welche relative Erhöhung der Steuer hat eine Steigerung des Ertrages von $x = 10$ aus um 0,5 % ungefähr zur Folge?
b) Ermitteln Sie die Steuerfunktion, die alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 12.102 **Lösung**

Sei $x > 0$. Berechnen Sie die Elastizität der Funktion $f(x) = 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$! Wo ist die Funktion elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch? Skizzieren Sie die Funktion und ihre Elastizitätsbereiche!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 12.104 **Lösung**

Der Radius einer Kugel wird mit einer Genauigkeit von 1 % bestimmt. Schätzen Sie mit Mitteln der Differenzialrechnung den relativen Fehler bei der Berechnung des Kugelvolumens ab!

Aufgabe 12.105

a) Wie errechnet sich der Radius einer Kugel (Körper), wenn Masse und Dichte bekannt sind?
b) Eine Kugel besteht aus einer Metalllegierung mit einer Dichte von (8 ± 0.1) g/cm^3 und wiegt 2 kg. Schätzen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Bestimmung des Radius aus diesen Angaben ab!

Extremwertaufgaben und Kurvendiskussion

Aufgabe 12.106 **Lösung**

Bestimmen Sie die Monotoniebereiche, Extrema und Wertebereiche folgender Funktionen:

a) $y(x) = 8 - 7x$,
b) $y(x) = x^2 + 3x - 28$,
c) $y(x) = x^3 + 27$,
d) $y(x) = x^3 - 27x$!

Aufgabe 12.107 **Lösung**

Bestimmen Sie die Extrema und Wertebereiche folgender Funktionen:

a) $y(x) = 4x - 17$,
b) $y(x) = 2x^2 - 4x - 30$,
c) $y(x) = x^3 - 3x^2$,
d) $y(x) = 50000 + 5000x - 0.1x^2$,
e) $y(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x}$!

Aufgabe 12.110 **Lösung**

Welches Rechteck mit gegebenem Umfang U hat die größte Fläche?

Aufgabe 12.111

Wie in Aufgabe 12.20 wird ein Fahrzeug betrachtet, das sich nach $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$ bewegt. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.

a) Berechnen Sie die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit! Ermitteln Sie ihren Zahlwert in $\mathrm{km/h^2}$ sowie in $\mathrm{m/s^2}$ zum Zeitpunkt $t=1$!
b) Von welchem Zeitpunkt an wird das Fahrzeug langsamer?
c) Von wann an fährt das Fahrzeug rückwärts?

Aufgabe 12.112

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ und ihrer ersten und zweiten Ableitung für $x \to 0$!

Aufgabe 12.113 **Lösung**

Bestimmen Sie die n-te Ableitung von $y = x f(x)$!

Aufgabe 12.116 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=x^3(x-3)$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.118 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{48-2x},\ x\in\mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.119 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{10(x-2)},\ x \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.121 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.122 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.123 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.124 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.125

a sei ein positiver Parameter. Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{a^2}{x}-\frac{3}{x^3}$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.126

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=(x^3-x^2+2x-2)\,\mathrm{e}^{x+1}$ und skizzieren Sie sie! Als Hilfestellung zur Anfertigung der Skizze ohne elektronische Hilfsmittel sind nebenstehend einige Funktionswerte angegeben.

x	$f(x)$
-4	$-4{,}4808$
-3	$-5{,}9548$
-2	$-6{,}6218$
-1	-6
0	$-5{,}4366$
1	0

Aufgabe 12.127 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=(x^3-4x^2+7x-6)\,\mathrm{e}^{x}$ und skizzieren Sie sie! Als Hilfestellung zur Bestimmung der Nullstellen sowie zur abschließenden Anfertigung der Skizze ohne elektronische Hilfsmittel sind nebenstehend einige Funktionswerte angegeben.

x	$f(x)$
-3	$-4{,}4808$
-2	$-5{,}9548$
-1	$-6{,}6218$
0	-6
1	$-5{,}4366$
2	0

Aufgabe 12.129 **Lösung**

a sei ein positiver Parameter. Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{|a+2x|}{x}$!

Aufgabe 12.130 **Lösung**

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ und skizzieren Sie sie!

Aufgabe 12.131

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

a) Diskutieren Sie den Verlauf der Funktion (Definitions- und Wertebereich, Stetigkeit, Achsenschnittpunkte, asymptotisches Verhalten, Monotonie, Extremwerte, Krümmung, Wendepunkte) und skizzieren Sie sie!
b) Approximieren Sie die Funktion mittels Taylorentwicklung im Punkt $x_0=2$ durch eine Parabel!

Aufgabe 12.133 **Lösung**

Die vertikale Bewegung eines Körpers werde durch seine Höhe h gegenüber einer Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben: $h(t)=(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}$. Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:

(A) Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
(B) Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
(C) Wie tief taucht er im Zeitintervall $[0,\infty)$ maximal ein?
(D) Wann steigt und wann fällt die Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$ am schnellsten?
(E) Skizzieren Sie die Funktion!

Aufgabe 12.134 **Lösung**

Die über einem Teil der reellen Achse definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin|x| & 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

werde so auf die komplette reelle Achse fortgesetzt, dass eine Funktion mit der Periodenlänge 2π entsteht. Diskutieren und skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion!

Aufgabe 12.135 **Lösung**

Ermitteln Sie die Extrema von $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+\dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ (x-2)^2-\dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$!

Aufgabe 12.136

Ein Massepunkt schwingt nach $x(t)=A\sin\omega t$ um seine Ruhelage. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Durchlaufen der Ruhelage und der größten Auslenkung! Zeigen Sie, dass die Bewegung der Differenzialgleichung $\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=0$ genügt!

Aufgabe 12.137

Ein Massepunkt schwingt nach $x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ um seine Ruhelage. Zeigen Sie, dass die Bewegung der Differenzialgleichung $\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=0$ genügt! Zu welchen Zeitpunkten durchläuft der Massepunkt die Ruhelage bzw. die größte Auslenkung? Wie groß ist die größte Auslenkung?

Hinweis: $\sin\arctan x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\arctan x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

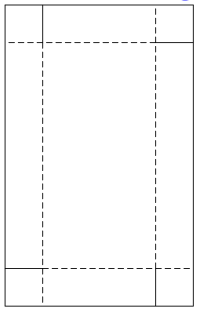
Aufgabe 12.138

Ein Mann befindet sich in einem Ruderboot vor einer geradlinigen Küste. Der Abstand zum nächsten Küstenpunkt K beträgt 8 km. Der Mann möchte zum Küstenpunkt Z, der vom Punkt K genau 10 km entfernt liegt. Der Mann rudert mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu einem Küstenpunkt M zwischen K und Z und läuft anschließend mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h zum Punkt Z. Welchen Küstenpunkt muss der Mann ansteuern, um sein Ziel in kürzester Zeit zu erreichen?

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 12.139 **Lösung**

Aus einem rechteckigen Blatt Karton im Format 10 cm $\times$ 16 cm soll durch Einschneiden an den durchgezogenen Linien und Falzen an den gestrichelten Linien eine quaderförmige Schachtel gebastelt werden. Wie tief müssen die Einschnitte sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?



Aufgabe 12.140 **Lösung**

Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit Grundseite d und Höhe h, auf das ein Halbkreis mit Durchmesser d aufgesetzt ist. Der Umfang des Querschnitts beträgt 20 m. Bestimmen Sie die Grundseitenlänge d, für die der Flächeninhalt des Querschnitts am größten wird!

Aufgabe 12.141 **Lösung**

Betrachtet werden Quader mit den Kantenlängen a, b und c, deren Volumen $1\,\mathrm{m}^3$ beträgt und bei denen die Kanten a und b im Verhältnis $1 : 3$ stehen. Wie müssen die Kantenlängen gewählt werden, damit der Oberflächeninhalt minimal wird? Wie groß ist die minimale Oberfläche?

Aufgabe 12.142 **Lösung**

Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie einen Inhalt von 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

Aufgabe 12.143 **Lösung**

Wie sind die Ausmaße eines zylindrischen Metalltrinkbechers zu wählen, damit er ein Fassungsvermögen von 400 mℓ hat und zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Becher in cm^2 ?

Aufgabe 12.144

Ein Unternehmen erzielt beim Absatz von x Mengeneinheiten einer Ware einen Gewinn von $G(x) = 100\sqrt{x} - 3x$. Danach wird eine Mengensteuer von $S(x) = rx$ erhoben. Bestimmen Sie denjenigen Steuersatz r, bei dem der Staat höchste Steuereinnahmen hat, wenn man nettogewinnorientiertes Verhalten des Unternehmers unterstellt!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 12.145 **Lösung**

In einem Betrieb werdem m Mengeneinheiten einer Ware pro Jahr gleichmäßig verbraucht. Dafür werden regelmäßig x Einheiten dieser Ware bestellt, die vor der nächsten Bestellung vollständig verbraucht werden. Für jede Bestellung entstehen Kosten in Höhe von B. Der Wert einer Mengeneinheit der Ware beträgt w, der Wert des durch eingelagerte Ware gebundenen Kapitals wird mit i p.a. verzinst.

a) Ermitteln Sie die Bestellmenge, bei der die Gesamtkosten für Bestellung und Lagerung minimiert werden!
b) Sei $m = 2800$, $B = 50$ €, $w = 100$ €, $i = 7$ %. Wie hoch ist die optimale Bestellmenge, welche Gesamtkosten entstehen dabei für Bestellung und Lagerung?

(nach Ohse, D.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I. Analysis. Vahlen, München. 6. Aufl. 2004, Aufgabe 6.8, S. 265f.)

Aufgabe 12.146

Sei $a,b,c > 0$. Diskutieren Sie den Verlauf der logistischen Funktion $y = \frac{a}{b+\mathrm{e}^{-ct}}$ und skizzieren Sie sie! Welche Sachverhalte könnten mit ihr beschrieben werden?

Aufgabe 12.147

Zum Zeitpunkt $t=0$ werden 1000 Bakterien in eine Nährlösung gegeben. Die Zahl der Bakterien entwickelt sich nach der Formel $f(t) = \frac{G}{1+A\mathrm{e}^{-0,2t}}$, wobei die Sättigungsgrenze bei 20 000 Bakterien liegt.

a) Bestimmen Sie die Parameter G und A !
b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)$ monoton wachsend ist!
c) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Zahl der Bakterien 10 000 ? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit der Population?
d) Zu welchem Zeitpunkt wächst die Population am stärksten?

Aufgabe 12.148 Lösung

Der prozentuale Ausstattungsgrad von Haushalten mit Fernsehern in Abhängigkeit von der Jahreszahl t werde durch die Funktion $f(t) = \frac{96}{1+\mathrm{e}^{-0.2(t-1965)}}$ beschrieben.

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(t)$ auf Monotonie und bestimmen Sie ihren Wertebereich!
b) In welchem Jahr hatten 48 % der Haushalte einen Fernseher? Wie groß war in diesem Jahr die Wachstumsgeschwindigkeit des Ausstattungsgrades?
c) In welchem Jahr wuchs der Ausstattungsgrad am stärksten?

Aufgabe 12.149 Lösung

Die Funktion $f(t) = \frac{20000}{1+\mathrm{e}^{-at}}$ beschreibe die Anzahl der Nutzer eines Produktes, wobei t die Zeit (gemessen in Jahren) sei. Zum Zeitpunkt $t = 1$ hat das Produkt 12000 Nutzer.

a) Wie groß ist der Parameter a ?
b) Welche Nutzerzahl ist zum Zeitpunkt $t = 3$ zu erwarten?
c) Zeigen Sie, dass $f(t)$ überall streng monoton wachsend ist!
d) Geben Sie den Wertebereich von $f(t)$ an!
e) Zu welchem Zeitpunkt wird das Produkt von 95 % der maximal möglichen Benutzer genutzt?
f) Zu welchem Zeitpunkt ist das Zuwachstempo (d.h. das Verhältnis der Änderungen von f und t) am größten?

Taylorentwicklung

Aufgabe 12.150

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 1$ nach der Taylorschen Formel!

b) Geben Sie die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades und die zugehörigen Restglieder an! Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades!

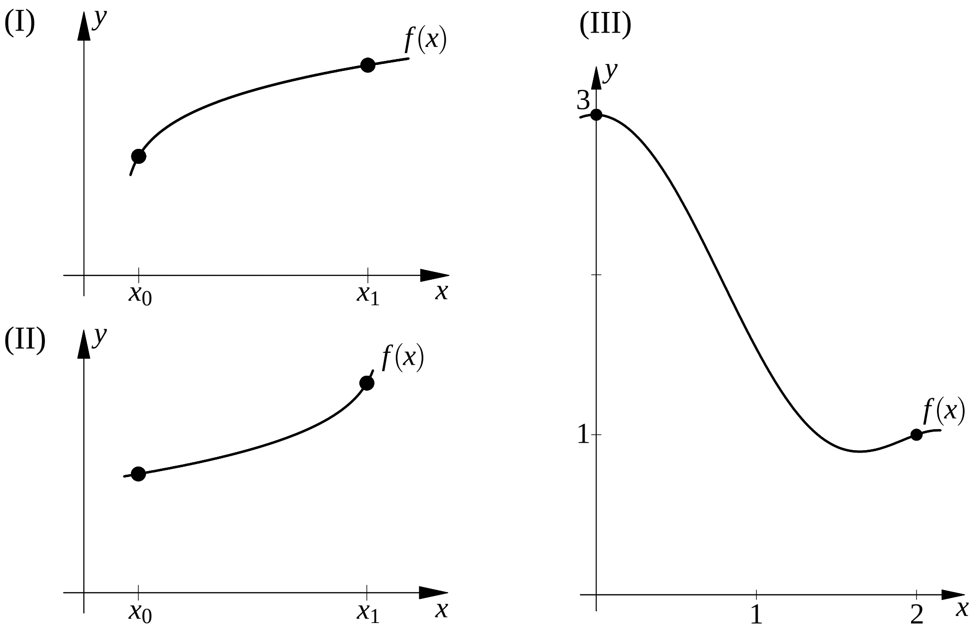
Aufgabe 12.151 Lösung

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=x^3-6x+3$ im Punkt $x_0=2$ nach der Taylorschen Formel!

b) Geben Sie die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades und die zugehörigen Restglieder an! Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades!

c) Bestimmen Sie mithilfe der Taylorpolynome ersten und zweiten Grades Näherungswerte für die in der Nähe von $x_0=2$ liegende Nullstelle von $f(x)$!

Aufgabe 12.152



a) Ermitteln Sie für die Funktion aus Bild (III) den Anstieg der Sekante zwischen den beiden markierten Punkten des Funktionsgrafen! Wo nimmt für diese Funktion der Betrag der Ableitung zwischen den Stellen $x_0=0$ und $x_1=2$ den maximalen Wert an?

b) Für stetig differenzierbare Funktionen erhält man als Spezialfall der Taylorschen Formel bei Abbruch der Taylorentwicklung schon nach dem absoluten Glied die Formel

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+R_0(x,x_0) \quad \text{mit} \quad R_0(x,x_0)=f'(\xi)(x-x_0),}$$

wobei ξ ein (unbekannter) Punkt zwischen x und x_0 ist. Diese Formel kann auch in der Form $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$ notiert werden und wird als „Mittelwertsatz der Differenzialrechnung“ bezeichnet. Erläutern Sie den damit beschriebenen Sachverhalt anschaulich!

c) Bestimmen Sie in den Bildern (I) – (III) die Punkte ξ in den Restgliedern $R_0(x_1,x_0)$ grafisch!

d) Für die Funktionen aus den Bildern (I) – (III) seien jeweils nur die Werte $f(x_0)$ und $\max\limits_{x\in[x_0,x_1]} |f'(x)|$ bekannt. Ermitteln Sie auf grafischem Wege, in welchem Bereich dann der Funktionswert $f(x_1)$ liegen kann!

Aufgabe 12.153 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-a^2}$ mit einem beliebigen reellen Parameter a.

a) Entwickeln Sie die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ nach der Taylorschen Formel bis zum linearen Glied!

b) Entwickeln Sie für $a = 1$ die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ nach der Taylorschen Formel bis zum quadratischen Glied und stellen Sie in einer Skizze die Funktion und ihre Approximation durch die Taylorpolynome 0-ten, 1-ten und 2-ten Grades gegenüber! (vgl. Aufgabe 12.123)

Aufgabe 12.154

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(\varphi) = \cos\varphi$ an der Stelle $\varphi_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!

b) Schätzen Sie mit dem Lagrangeschen Restglied den Fehler bei der Berechnung einer Näherung für $\cos 10^\circ$ nach der Formel $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$ ab!

Aufgabe 12.155 **Lösung**

Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei Anwendung der Näherungsformel $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Aufgabe 12.156 **Lösung**

Beweisen Sie, dass die Taylorentwicklung der Funktion $f(\varphi) = \cos\varphi$ an der Stelle $\varphi_0 = 0$ für jedes reelle φ gegen $\cos\varphi$ konvergiert!

Aufgabe 12.158 **Lösung**

Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei der näherungsweisen Berechnung des Sinus durch den Ausdruck $\varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!}$ die Fehlergrenze 10^{-6} eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Aufgabe 12.159

Berechnen Sie $\mathrm{e}^{-0,1}$ näherungsweise durch das quadratische Taylorpolynom von e^x an der Stelle $x_0 = 0$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Aufgabe 12.161 **Lösung**

Sei $x < 0$. Schätzen Sie ab, für welche x bei Anwendung der Näherungsformel $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$ die Fehlerschranke 0.0001 eingehalten wird!

Aufgabe 12.162 **Lösung**

Berechnen Sie $\ln 1{,}1$ näherungsweise durch das quadratische Taylorpolynom von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Aufgabe 12.163 **Lösung**

Sei $f(x) = 8x^{3/2}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum quadratischen Glied an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Aufgabe 12.164 **Lösung**

Sei $f(x) = 16\sqrt{x}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum kubischen Glied an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Aufgabe 12.165 **Lösung**

Berechnen Sie durch Taylorentwicklung der Funktion $f(\varphi) = \sin\varphi$ an der Stelle $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ bis zum quadratischen Glied mithilfe des bekannten Wertes von $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ einen Näherungswert für $\sin 46^\circ$ und schätzen Sie den dabei entstehenden Fehler mit dem Lagrangeschen Restglied ab!

Aufgabe 12.166 **Lösung**

a) Entwickeln Sie $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied!

b) Schätzen Sie ab, für welche x der Fehler bei der Berechnung von $\cos x$ durch diese nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung nicht größer als 10^{-3} ist!

Aufgabe 12.168 **Lösung**

a) Entwickeln Sie $f(x) = \sqrt{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied!

b) Schätzen Sie mit Hilfe des Restgliedes der Taylorschen Formel den Fehler ab, der entsteht, wenn man $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ nach dieser Formel berechnet!

c) Welcher Fehler entsteht bei der Berechnung von $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ nach dieser Formel tatsächlich?

Aufgabe 12.171 **Lösung**

Sei $f(x) = e^{2x}$.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied und geben Sie das zugehörige Lagrangesche Restglied an!

b) Schätzen Sie mit Hilfe des Lagrangeschen Restgliedes den Fehler ab, der bei der Approximation von $f(0.9)$ durch diese nach dem kubischen Glied abgebrochene Taylorentwicklung entsteht!

c) Vergleichen Sie diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Approximationsfehler!

Aufgabe 12.173 **Lösung**

Durch die Beziehungen $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ werden die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus definiert.

a) Untersuchen Sie die beiden Funktionen auf Monotonie, Extremwerte und Krümmungsverhalten!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
c) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $T_3(x,0)$ und $T_4(x,0)$ für $\sinh x$?
d) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
e) Zeigen Sie mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \leq 1$ die Abschätzung $|T_4(x,0) - \sinh x| < 0.013$ gilt!
f) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades zur Berechnung von $\sinh 1$ tatsächlich?
g) Beweisen Sie, dass die Taylorreihe für $\sinh x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für alle x konvergiert!

Aufgabe 12.174 **Lösung**

Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t) = 2\sin\frac{\pi}{6}t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

a) Approximieren Sie $f(t)$ durch Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = 1$ durch eine Parabel. Welchen Wert hat diese an der Stelle $t = 3$?
b) Konvergiert die durch Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = 1$ entstehende Taylorreihe für $t = 3$, wenn ja, gegen welchen Wert?

Aufgabe 12.175 **Lösung**

Sei $f(x) = e^{\sin x} - ax$.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied! (Das Restglied muss nicht angegeben werden.)
b) Wie muss man den Parameter a wählen, damit $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Extremwert hat? Argumentieren Sie dabei mithilfe der Taylorentwicklung!

Aufgabe 12.176

Sei $f(x) = e^{\sin x} - a(x + x^3)$.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied! (Das Restglied muss nicht angegeben werden.)
b) Wie muss man den Parameter a wählen, damit $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Extremwert hat? Argumentieren Sie dabei mithilfe der Taylorentwicklung!

Aufgabe 12.179

Überzeugen Sie sich anhand der Taylorentwicklung von e^x, $\cos x$ und $\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ davon, dass die Definition der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ sinnvoll ist!

Aufgabe 12.180 **Lösung**

Erläutern Sie die Bedeutung der Taylorpolynome nullten bis dritten Grades anhand der Position eines bewegten Objektes in Abhängigkeit von der Zeit!

Aufgabe 12.181

Ein Fahrzeug habe zum Zeitpunkt $t = 5\,\mathrm{s}$ nach seinem Start einen Weg von $20\,\mathrm{m}$ zurückgelegt, in diesem Moment betrage seine Geschwindigkeit $10\,\mathrm{m/s}$ und seine Beschleunigung $2.5\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Angenommen, die Beschleunigung bleibt vom genannten Zeitpunkt an konstant. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und zurückgelegtem Weg an! Welchen Weg hat das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$ zurückgelegt?
b) Angenommen, die Beschleunigung vermindert sich vom genannten Zeitpunkt an pro Sekunde um $0.5\,\mathrm{m/s^2}$. Geben Sie den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg und Zeit an! Welchen Weg hat das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$ zurückgelegt? Von wann an fährt das Fahrzeug rückwärts?
c) Angenommen, die Beschleunigung ändert sich vom genannten Zeitpunkt an pro Sekunde höchstens um $1\,\mathrm{m/s^2}$. Was kann man über den Weg sagen, den es zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$ zurückgelegt hat?

Aufgabe 12.182 **Lösung**

Ein 30 Jahre alter Baum ist 11,52 m hoch und wächst in diesem Alter mit einer Geschwindigkeit von 48 cm/a (a: Jahr). Die Wachstumsgeschwindigkeit wächst ihrerseits um 1,2 cm/a^2.

a) Bestimmen Sie mithilfe der Taylorschen Formel näherungsweise die Höhe, die der Baum in einem Alter von 35 Jahren erreicht haben wird!
b) Auch die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit ist nicht konstant. Es wird aber angenommen, dass sie sich in der betrachteten Zeit um nicht mehr als 0,3 cm/a^3 ändert. Schätzen Sie unter dieser Annahme den Fehler des Ergebnisses von a) ab!

Aufgabe 12.184 **Lösung**

Ein Körper werde aus einer Höhe von 2 m über der Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit von 9.81 m/s senkrecht nach oben geworfen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

a) Nach welcher Zeit erreicht der Körper seine größte Höhe, wieder die Höhe von 2 m bzw. den Erdboden?
b) Mit welcher Geschwindigkeit prallt der Körper auf den Erdboden auf?
c) Geben Sie die Taylorentwicklungen der Höhe nach der Zeit im Startzeitpunkt sowie in den drei unter a) genannten Zeitpunkten an!

Aufgabe 12.185 **Lösung**

Die Anzahl z der Fahrzeuge, die eine bestimmte Straße stündlich passieren können, lasse sich aus der mittleren Geschwindigkeit v in m/s bei einer mittleren Fahrzeuglänge von 4 m nach folgender Formel berechnen:

$$z(v) = 1000\frac{v}{4 + \frac{v}{4} + \frac{v^2}{12}}.$$

a) Die Straße werde durchschnittlich mit $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ passiert. Approximieren Sie z um v_0 durch ein Taylorpolynom 2. Grades!
b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich daraus für die Durchlassfähigkeit der Straße ziehen, wenn sich die Durchschnittsgeschwindigkeit gegenüber v_0 erhöht?
c) Bei welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h ist die Durchlassfähigkeit der Straße am größten?

Aufgabe 12.186 **Lösung**

Ein Unternehmen setzt ein Produkt zum Preis von p pro Stück ab und erzielt damit einen Umsatz (Erlös) von $U(p) = \dfrac{p}{ap+b}$ $(a, b > 0)$. Der Preis kann auch negativ sein (sinnvoll z.B., wenn das Produkt sonst noch kostenaufwändiger entsorgt werden müsste), die abgesetzte Stückzahl $A(p)$ darf aber nicht negativ werden (vgl. Aufgabe 12.15).

a) Zerlegen Sie die Funktion $U(p)$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion!
b) Wie ist der Definitionsbereich von $U(p)$ zu wählen, damit der Absatz wie gefordert nicht negativ wird?
c) Wie verhält sich der Umsatz für $p \to \infty$?
d) Untersuchen Sie die Funktion $U(p)$ auf Monotonie und Extremwerte und bestimmen Sie ihren Wertebereich!
e) Ist $U(p)$ invertierbar? Geben Sie ggf. die Umkehrfunktion sowie ihren Definitions- und Wertebereich an!
f) Entwickeln Sie $U(p)$ an der Stelle $p_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum quadratischen Glied!

13 Integralrechnung

Unbestimmte Integrale

Aufgabe 13.1 **Lösung**

Für die Produktion von $0 \leq x \leq 2000$ Einheiten einer Ware laute die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 5 - 0.002x$. Bei der Produktion von 1000 Einheiten entstehen Kosten in Höhe von 5500 Geldeinheiten. Wie lautet die Gesamtkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion? Berechnen Sie die Werte dieser Funktionen für $x = 1900$!

Aufgabe 13.2 **Lösung**

Für die Produktion von $0 \leq x \leq 20000$ Einheiten einer Ware laute die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 500 - \frac{x}{50}$. Bei der Produktion von 9000 Einheiten entstehen Kosten in Höhe von 3.7 Millionen Geldeinheiten. Wie lautet die Gesamtkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion? Berechnen Sie die Werte dieser Funktionen für $x = 10000$!

Aufgabe 13.3

Ein Körper, der zum Zeitpunkt $t = 0$ in $2000\,\mathrm{m}$ Höhe fallengelassen werde, erreiche eine Geschwindigkeit von $v(t) = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{5\,\mathrm{s}}}\right)$. Bestimmen Sie seine Höhe in Abhängigkeit von der Zeit!

Aufgabe 13.4

Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)^3}{x^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{5}x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{x+1} + 2^{-x} - \pi\right)\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.5 **Lösung**

Ermitteln Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.9

Integrieren Sie durch Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int (5\sin 4x - 3\cos 2x)\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \sqrt[5]{6x+7}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x^2+4}\,x\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.10 **Lösung**

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Substitution:

a) $\int (e^{-x} + e^{-2x})\,dx$, b) $\int (2\sin 3x + 3\cos 4x)\,dx$, c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,dx$,

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\,dx$, e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$, f) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$, g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}\,dx$,

h) $\int e^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$, i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$!

Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsinh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

Aufgabe 13.12

Berechnen Sie a) $\int \frac{\cos x\,dx}{(\sin x+2)^2}$ und b) $\int e^{3x^2+2x+1}(6x+2)\,dx$!

Aufgabe 13.14

Ermitteln Sie durch partielle Integration:

a) $\int x\,e^{2x}\,dx$, b) $\int \sin 3x\; x^2\,dx$!

Aufgabe 13.15 **Lösung**

Ermitteln Sie durch partielle Integration:

a) $\int x\sin x\,dx$, b) $\int x^2\cos x\,dx$, c) $\int \arctan x\,dx$!

Aufgabe 13.16 **Lösung**

Berechnen Sie $\int e^x\cos x\,dx$, indem Sie das Integral zunächst durch partielle Integration auf $\int e^x \sin x\,dx$ und letzteres Integral wieder auf $\int e^x\cos x\,dx$ zurückführen!

Aufgabe 13.17 **Lösung**

Ermitteln Sie $\int \sin^4 x\,dx$ durch Rückführung auf Grundintegrale mittels partieller Integration mit $u = \sin^3 x,\ v' = \sin x$!

Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Beziehung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und behandeln Sie $\int \sin^2 x\,dx$ auf analoge Weise!

Aufgabe 13.18 **Lösung**

Bestimmen Sie mittels Integration durch Substitution bzw. partieller Integration

a) $\int \sin x\,e^{\cos x}\,dx$, b) $\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy$, c) $\int \frac{dz}{\cos^2 z\,\sqrt{1+\tan z}}$,

d) $\int x\cos x\,dx$, e) $\int (ax^2+bx+c)\sin x\,dx$, f) $\int x^2\ln x\,dx$!

Aufgabe 13.20 Lösung

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(\frac{2}{3x+4} + 5\cos(6-7x) + 8 \right) \mathrm{d}x$, b) $\int \mathrm{e}^{a(x^4+\sin x+\cos x)} (4x^3+\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x \quad (a \neq 0)$,

c) $\int \frac{1}{2x^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+10x+26}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int (a\sin cx+b)\,\mathrm{e}^{\sin cx}\cos cx\,\mathrm{d}x \quad (c \neq 0)$, f) $\int \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2ax}}$!

Aufgabe 13.21 Lösung

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(6\sin(4-3x) + 3\mathrm{e}^{-2x} + 5\right) \mathrm{d}x$, b) $\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,(\mathrm{e}^{2x}+4x^7)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{x^2+49}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+2x+50}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$, f) $\int \left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$!

Hinweis zu e): Führen Sie $\int \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$ zunächst durch partielle Integration auf $\int \mathrm{e}^x \sin 3x\,\mathrm{d}x$ und letzteres Integral wieder auf $\int \mathrm{e}^x \cos 3x\,\mathrm{d}x$ zurück!

Aufgabe 13.22 Lösung

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(2\mathrm{e}^{-3x} + 4\cos 5x + 1\right) \mathrm{d}x$, b) $\int (9x^2+2x+5)\sqrt[5]{3x^3+x^2+5x+8}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{x^2+36}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+2x+37}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\int (x+5)\ln x\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.23

Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\cos x+3}$ mit Hilfe der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe!

Hinweis für die Probe: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

Aufgabe 13.24 Lösung

Berechnen Sie mithilfe geeigneter Substitutionen

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{3x}+5}$, b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x}$, d) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$, f) $\int \sin 4x \sin 6x\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.25 **Lösung**

Bestimmen Sie a) $\int \frac{x+3}{x+5}\,\mathrm{d}x$ und b) $\int \frac{x^2+2x+7}{x+5}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.26 **Lösung**

Berechnen Sie die Stammfunktionen von a) $f(x)=\frac{1}{x^2+25}$ und b) $f(x)=\frac{1}{x^2-25}$!

Nehmen Sie dafür im Falle b) eine „Partialbruchzerlegung“ vor, d.h., bestimmen Sie Konstanten A und B so, dass $\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5}$ gilt!

Überprüfen Sie in beiden Fällen Ihre Ergebnisse durch eine Probe!

Aufgabe 13.27 **Lösung**

Integrieren Sie $f(x)=\frac{9x-2}{x^2-x-6}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

Aufgabe 13.28 **Lösung**

Integrieren Sie $f(x)=\frac{x+29}{x^2+3x-28}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

Aufgabe 13.29 **Lösung**

Bestimmen Sie a) $\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$ und b) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$!

Hinweis: Gehen Sie ggf. analog zu Aufgabe 13.28 vor!

Aufgabe 13.30 **Lösung**

a) Wenden Sie auf das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ die Formel für die partielle Integration $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv-\int u'v\,\mathrm{d}x$ mit $u=\frac{1}{(x^2+1)^n}$, $v=1$ an!

b) Stellen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ durch $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}$ dar!

c) Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$!

Aufgabe 13.31 **Lösung**

Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}x$, c) $\int \frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.32 **Lösung**

Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{9x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}\, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 7x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 27x + 12}{x^2 + 2x + 10}\, dx$, e) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 13x - 10}{x^3 - 5x^2}\, dx$!

Aufgabe 13.33 **Lösung**

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{6x^2 + 11x - 5}{x^3 + 4x^2 - 5x}\, dx$!

Aufgabe 13.34 **Lösung**

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\, dx$!

Aufgabe 13.35 **Lösung**

Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$!

Aufgabe 13.38 **Lösung**

Sei $x > 0$. Von einer Funktion $f(x)$ sei bekannt, dass ihre Funktionswerte positiv sind, $f(2) = 3e$ ist und ihre Elastizität $\varepsilon_f(x) = 1 + \dfrac{x}{2}$ beträgt. Bestimmen Sie $f(x)$!

Hinweis: Integrieren Sie $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$!

Aufgabe 13.39 **Lösung**

Die Preiselastizität der Nachfrage nach einer Ware betrage $\varepsilon_N(p) = -\dfrac{3p}{3p + a}$. Ferner sei bekannt, dass bei einem Preis von $p = 10$ die Nachfrage 1000 beträgt und die relative Verminderung der Nachfrage halb so groß ist wie die relative Erhöhung des Preises. Ermitteln Sie die Nachfragefunktion!

Hinweis: Man kann $\ln N$ durch Integration von $\dfrac{N'(p)}{N(p)}$ ermitteln.

Bestimmte Integrale

Aufgabe 13.40 **Lösung**

Erläutern Sie den Begriff Riemannsche Integralsumme!

Aufgabe 13.41

Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} 2x^2\, dx$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$, c) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$, d) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2 + 9}$, e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x|\, dx$!

Aufgabe 13.42 **Lösung**

Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung** lautet: „Ist die Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$ stetig, so gibt es einen Zwischenpunkt $\xi \in [a,b]$, für den $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\,(b-a)$ gilt."

Berechnen Sie für das Integral $\int\limits_3^6 (10x - x^2 - 20)\,\mathrm{d}x$ den Punkt ξ und illustrieren Sie den Sachverhalt!

Aufgabe 13.43 **Lösung**

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung durch $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ den **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**:

Ist $f(x)$ stetig und $F(x) = \int\limits_a^x f(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}$, so gilt $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ und $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Aufgabe 13.44 **Lösung**

Sei $F(x) = x^2 + 1$ und $f(x) = F'(x) = 2x$. Stellen Sie für $x = 0{,}4$, $\Delta x = 0{,}2$ das Differenzial $\mathrm{d}F = F'(x)\,\Delta x = f(x)\,\Delta x = f(x)\,\mathrm{d}x$ grafisch als Strecke und als Rechteckfläche dar!

Aufgabe 13.45 **Lösung**

a) Berechnen Sie $\int\limits_{-2}^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$ und $y = 0$ begrenzt wird!

Aufgabe 13.47 **Lösung**

Ermitteln Sie das Integral $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.48 **Lösung**

Berechnen Sie $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$

a) mittels Integration durch Substitution und
b) durch partielle Integration!

Aufgabe 13.51 **Lösung**

Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1 + 20x - 3x^2 - 2x^3}\,(20 - 6x - 6x^2)\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.55 **Lösung**

Ermitteln Sie das Integral $\int_0^3 xe^{3x}\,dx$ durch partielle Integration!

Aufgabe 13.56 **Lösung**

Ermitteln Sie durch partielle Integration das Integral $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$!

Aufgabe 13.57 **Lösung**

Berechnen Sie $\int_1^{10} (3x^2+4x+5)\lg x\,dx$!

Aufgabe 13.58 **Lösung**

Berechnen Sie die bestimmten Integrale a) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+16}$ und b) $\int_2^4 \frac{|x-3|}{x^2}\,dx$!

Aufgabe 13.61 **Lösung**

Berechnen Sie bestimmten Integrale a) $\int_0^\pi x\cos 3x\,dx$ und b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$!

Aufgabe 13.65

a) Berechnen Sie $\int_0^4 (x-1)(x-2)(x-3)\,dx$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, $x=0$, $x=4$ und $y=0$ begrenzt wird!

Aufgabe 13.66 **Lösung**

Ermitteln Sie den Inhalt der von $y=-x^3+9x^2-23x+15$ und der x-Achse begrenzten Fläche!

(Wenzel, H.; Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner. 1. (einbändige) Aufl. 2005 (zuvor 2 Bände), Aufgabe 12.8a, S. 39)

Aufgabe 13.68 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt der von $x=0$, $x=4$, $y=0$ und $y=\frac{15}{2}\sqrt{x}\,(1-x)$ begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.69

Berechnen Sie den Inhalt der von $x=0,\ x=1, y=0$ und $y=\pi\cos\dfrac{(2x+1)\pi}{2}-x\,(1+x)\sqrt{x}-\dfrac{11}{35}$ begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.70 **Lösung**

Ermitteln Sie den Inhalt der von $y=\sin(2x+\pi)$, der x-Achse zwischen 0 und $\dfrac{9}{8}\pi$ sowie $x=\dfrac{9}{8}\pi$ begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.73 **Lösung**

Sei $a\neq 0$. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=x^5\mathrm{e}^{ax^6}$, $y=0$, $x=-1$ und $x=1$ begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.74 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$ und $y=-x^3+6x^2-8x$ begrenzten endlichen Fläche!

Aufgabe 13.75 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=2x^3+2x^2-4x$ und $y=-x^3-x^2+2x$ begrenzten endlichen Fläche!

Aufgabe 13.77 **Lösung**

Sei a ein positiver Parameter. Berechnen Sie den Inhalt der von $f(x)=\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}\,(x^3-x)$ für $-1\leq x\leq 1$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.78 **Lösung**

Sei $f(x)=\sqrt{2x-x^2}\,(1-x)$.

a) Für welche reellen x ist durch $f(x)$ eine reellwertige Funktion definiert?
b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ durch Rückführung auf ein Grundintegral mittels geeigneter Substitution!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der über dem in a) ermittelten Definitionsbereich von der Funktion $f(x)$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

Aufgabe 13.80 **Lösung**

Ein 100 cm langer Stab habe eine über seine Länge variierende Dichte, diese betrage $\left(30+\dfrac{\sqrt{x}\,(100-x)}{20}\right)\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}$, $0\leq x\leq 100$. Berechnen Sie seine Masse!

Aufgabe 13.81 **Lösung**

Ein 1 m langer konischer Stab habe einen Durchmesser von $(1+x)\,\mathrm{cm}$, $0\leq x\leq 1$ [m]. Berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 13.82 **Lösung**

Ein Körper entstehe durch Rotation der von der x-Achse und den Kurven $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ begrenzten Fläche um die x-Achse.

a) Geben Sie den Querschnitt des Körpers, d.h. den Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers mit der zur y-z-Ebene parallelen Ebene, in Abhängigkeit von x an!
b) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers!

Aufgabe 13.83 **Lösung**

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei der Rotation des Parabelstücks $y=x^2$, $0\leq y\leq 1$ um die y-Achse entsteht!

Aufgabe 13.84 **Lösung**

Ein Fahrzeug fährt vom Zeitpunkt $t=0$ bis zum Zeitpunkt $t=1$ (in h) mit der Geschwindigkeit $v(t)=100+10\frac{t^2-9}{t^2+9}$ (in km/h). Welchen Weg legt es in dieser Zeit zurück?

Aufgabe 13.86 **Lösung**

Ein Körper werde in einer Höhe von 19,62 m über der Erdoberfläche waagerecht mit einer Geschwindigkeit von 9,81 m/s geworfen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

a) Nach welcher Zeit erreicht der Körper den Erdboden, wo prallt er auf diesen auf?
b) Welche Geschwindigkeit erreicht der Körper bis zum Aufprall?
c) Bestimmen Sie die Länge des Weges, den der Körper bis zu seinem Aufprall zurücklegt!

Aufgabe 13.87 **Lösung**

Sei $0<a<b$. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\frac{b-a}{b}\leq \ln\frac{b}{a}\leq\frac{b-a}{a}$ gilt!

Hinweis: Gilt für eine über $[a,b]$ mit $a<b$ Riemann–integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$m\leq f(x)\leq M$, so gilt $m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq M(b-a)$.

Aufgabe 13.88

Die Herstellungskosten für ein Produkt werden für die 12 Monate eines Jahres mit $K_m = 100\left(10+m+2me^{-m/12}\right)$, $m=1,2,\ldots,12$ prognostiziert. Durch Addition erhält man als Jahressumme $\sum\limits_{m=1}^{12} K_m\approx 27834{,}94$.

a) Die Kostenprognose für das Jahr soll mit Hilfe des Integrals $\int\limits_0^{12} K(t)\mathrm{d}t$ erfolgen, wobei $K(t)=100\left(10+t+2te^{-t/12}\right)$ ist. Berechnen Sie dieses Integral!
b) Stellen Sie das Integral und die Summe als Flächen dar!
c) Warum wird bei der Prognose mit dem Integral die Jahressumme unterschätzt? Wie könnte diese für die gegebene Funktion besser mit einem Integral prognostiziert werden?

Quadraturformeln

Aufgabe 13.89 **Lösung**

Ermitteln Sie näherungsweise $\int_0^2 x^2\,dx$ und $\int_0^2 x^4 dx$ mit der Rechteckregel, der Trapezregel, der Simpsonregel sowie mit der Gaußformel mit 2 Stützstellen und der Gaußformel mit 3 Stützstellen!

(Die Gaußformeln mit 2 und 3 Stützstellen lauten für das Intervall $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f(-0{,}5773502692)+f(0{,}5773502692),$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{1}{9}[5f(-0{,}7745966692)+8f(0)+5f(0{,}7745966692)].)$$

Aufgabe 13.90 **Lösung**

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Zahl π durch Quadratur der Funktion $\frac{4}{1+x^2}$ über dem Intervall von 0 bis 1 nach der verallgemeinerten Rechteckregel mit 2 und mit 5 Stützstellen sowie nach der Gaußformel mit 2 und mit 3 Stützstellen!

Uneigentliche Integrale

Aufgabe 13.91

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, b) $\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, c) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx$, d) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$, e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$!

Aufgabe 13.92 **Lösung**

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, wobei α eine beliebige reelle Zahl sei:

a) $\int_0^1 x^\alpha\,dx$, b) $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$, c) $\int_2^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$, d) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$, e) $\int_0^\infty 2xe^{-2x}dx$!

Aufgabe 13.93 **Lösung**

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese existieren:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$, b) $\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^3}$, c) $\int_0^\infty \cos x\,dx$, d) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+1}$!

Aufgabe 13.94 **Lösung**

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, b) $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, c) $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$, d) $\int_{-\infty}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}$!

Aufgabe 13.97 **Lösung**

Über einem endlichen oder unendlichen Intervall der reellen Achse wird $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ betrachtet.

a) Für welche a und b handelt es sich dabei um
   (i) ein bestimmtes Integral,
   (ii) ein konvergentes uneigentliches Integral,
   (iii) ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral bzw.
   (iv) ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral?

b) Berechnen Sie das Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein konvergentes uneigentliches Integral handelt!

Aufgabe 13.98 **Lösung**

a) Für welche reellen x ist durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}$ eine reelle Funktion definiert?

b) Berechnen Sie die Stammfunktion dieser Funktion!

c) Wie müssen in $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ die Grenzen a und b gewählt werden, damit es sich dabei um ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert handelt?

d) Berechnen Sie dieses Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert handelt!

Aufgabe 13.99 **Lösung**

Berechnen Sie $\int_4^7 \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^6}$!

Aufgabe 13.101

Berechnen Sie a) $\int_5^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$ und b) $\int_{-2}^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}}$!

Aufgabe 13.102 **Lösung**

Welchen Wert haben die Integrale a) $\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ und b) $\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^2}}$?

Aufgabe 13.104 **Lösung**

Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \frac{65}{x^2+15x+50}\,\mathrm{d}x$!

Aufgabe 13.108 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $f(x)=\dfrac{x^{654320}\,e^{x^{654321}}}{e^{2x^{654321}}+1}$ und der x-Achse!

Aufgabe 13.110 **Lösung**

Sei a ein positiver reeller Parameter und $f(x)=\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos ax}}$.

a) Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, sofern diese existieren!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, zunächst $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$ zu berechnen!

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ durch Rückführung auf Grundintegrale mittels geeigneter Substitution!

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi/a} f(x)\,\mathrm{d}x$! Handelt es sich dabei um ein uneigentliches Integral?

Aufgabe 13.111 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass für $n\geq 1$ die Beziehung $\dfrac{1}{n} > \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ gilt!

b) Beweisen Sie mithilfe dieser Beziehung die Divergenz der harmonischen Reihe!

Veranschaulichen Sie die Überlegungen grafisch!

Aufgabe 13.112 **Lösung**

Es wird erwartet, dass von einem Erzeugnis, dass zum Zeitpunkt $t=0$ auf den Markt gebracht wird, pro Zeiteinheit $f(t)=12000\dfrac{e^{-t/a}}{\left(2+e^{-t/a}\right)^2}$ Stück verkauft werden können, wobei a ein großer positiver Parameter sei. Genauer soll angenommen werden, dass in der n-ten Zeiteinheit $f(n-0{,}5)$ Stück verkauft werden können, d.h. in der 1. Zeiteinheit $f(0{,}5)$ Stück, in der 2. Zeiteinheit $f(1{,}5)$ Stück usw.

a) Was passiert für $t\longrightarrow\infty$?

b) Wieviel Stück des Erzeugnisses können insgesamt verkauft werden?

Aufgabe 13.113 **Lösung**

Die Lebensdauer eines Bauteils in Jahren sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$ mit einem positiven Parameter λ. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Bauteils zwischen a und b Jahren beträgt, ist dann gleich $\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass mit der verwendeten Wahrscheinlichkeitsdichte gesichert ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil irgendwann ausfällt, gleich 1 ist!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil mindestens 5 Jahre, mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt es zuvor aus?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E = \int_0^\infty t\, p(t)\, \mathrm{d}t$ sowie die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\int_0^\infty (t-E)^2\, p(t)\, \mathrm{d}t}$ der Lebensdauer!

14 Funktionenreihen

Konvergenz von Funktionenreihen

Aufgabe 14.1 **Lösung**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$!

Taylorreihen

Aufgabe 14.2 **Lösung**

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe!

b) Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Taylorreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums!

c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe in jedem Intervall $[a,b]$ mit $-1 < a < b < 1$ gleichmäßig konvergiert!

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Aufgabe 14.3 **Lösung**

a) Sei $b > 0$. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{b-x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe!

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Aufgabe 14.4 **Lösung**

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$ an der Stelle $x_0 = 3$ in eine Taylorreihe!

b) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe. Geben Sie deren Mittelpunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius!

c) Für welche x konvergiert die Taylorreihe?

Aufgabe 14.6 **Lösung**

Sei m eine beliebige reelle Zahl.

a) Entwickeln Sie $f(x) = (1+x)^m$ nach Potenzen von x !

b) Beweisen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe für $|x| < 1$ konvergiert!

c) Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ $\quad (1+x)^{-3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}(-x)^n$ gilt!

d) Stellen Sie 1.001^{-3} und die Approximation davon durch Taylorpolynome nullten, ersten, zweiten und dritten Grades gegenüber!

Aufgabe 14.7 **Lösung**

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln(2x+3)$ an der Stelle $x_0 = -1$ in eine Taylorreihe!
b) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe. Geben Sie deren Mittelpunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius!
c) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n} = \ln\frac{3}{2}$ gilt!

Fourierreihen

Aufgabe 14.8 **Lösung**

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$

a) in eine reine Kosinusreihe,
b) in eine reine Sinusreihe!
c) Bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$!

Aufgabe 14.9 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = x,\ 0 \le x < 2\pi$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.10 **Lösung**

Sie Funktion $f(t) = \mathrm{e}^t,\ -\pi < t \le \pi$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.11 **Lösung**

Sei $a \neq 0$. Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{ax},\ -\pi < x \le \pi$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion für $a = 1/2$!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.12 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right),\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

a) Skizzieren Sie $f(x)$!
b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Hilfe der Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 1. Grades $T_1(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x$!

Aufgabe 14.13 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin|x| & 0 \le |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie $f(x)$ mittels Fourierentwicklung durch ein trigonometrisches Polynom 2. Grades $T_2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} a_k \cos kx + b_k \sin kx$!

Hinweis: $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$

Aufgabe 14.14 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.15 **Lösung**

Die Funktion $f(t) = \begin{cases} \cos t - \frac{1}{2}, & 0 \le |t| \le \frac{\pi}{3} \\ 0, & \frac{\pi}{3} < |t| \le \pi \end{cases}$ werde 2π–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!

b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe! Geben Sie dabei die Koeffizienten bis einschließlich $k=2$ zahlenmäßig an!

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Hinweis: $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

Aufgabe 14.17 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = |\sin 2x|$.

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Wie groß ist die (kürzeste) Periodenlänge?

c) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

d) Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$!

Aufgabe 14.18 **Lösung**

Die über dem Intervall $[-5,5]$ durch $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{5}x, & |x| \le \dfrac{5}{\pi} \\ 0, & \dfrac{5}{\pi} < |x| \le 5 \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Untersuchen Sie die Fourierreihe mit dem Satz von Dirichlet auf Konvergenz!

Aufgabe 14.19 **Lösung**

Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t) = 2\sin\dfrac{\pi}{6}t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

Die Funktion $f(t)$ soll nur über dem Intervall $-3 < t \le 3$ durch die obige Vorschrift gegeben und außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt und durch eine Fourierreihe approximiert werden.

a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
b) Berechnen Sie die Fourierreihe!
Hinweis: $\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$, $\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$
c) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe für $t = 3$?

Aufgabe 14.20 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = x^2,\ -1 \le x \le 1$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$!

Aufgabe 14.22 **Lösung**

Entwickeln Sie $f(x) = \cos^2 x$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: Formen Sie den Integranden $\cos^2 x\cos 2kx$ durch zweimalige Anwendung der Formel
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ in eine Summe von Kosinusfunktionen um!

Aufgabe 14.23 **Lösung**

Die über dem Intervall $-4 < t \le 4$ durch $f(t) = \cos\dfrac{\pi}{8}t$ definierte Funktion soll außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt werden.

a) Skizzieren Sie die durch periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
b) Berechnen Sie die Fourierreihe!
Hinweis: $\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$, $\cos\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big)$
c) Gegen welchen Werte konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.24 **Lösung**

Die über dem Intervall $-\pi < t \leq \pi$ durch $f(t) = \begin{cases} 1 - \sin t, & -\pi < t < 0 \\ 1 + \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $f(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe!

Hinweis: $\cos x \, \sin y = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$

Aufgabe 14.25 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & 1 < |x| \leq 4 \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt und mittels Fourierentwicklung durch trigonometrische Polynome $F_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kCx + b_k \sin kCx)$ approximiert.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!
b) Wie groß ist die Periodenlänge, wie muss die Konstante C gewählt werden?
c) Berechnen Sie $F_2(x)$!
d) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge $\{F_n(x)\}$?

Aufgabe 14.28 **Lösung**

Die über dem Intervall $-\pi \leq t \leq \pi$ durch $f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ |t| + 1, & \dfrac{\pi}{2} < |t| \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $f(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die periodisch fortgesetzte Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(t)$ in eine Fourierreihe, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten bis $k = 3$!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.29 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ werde 4–periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Wie muss bei der Fourierentwicklung $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kCx + b_k \sin kCx)$ der Parameter C gewählt werden?
c) Berechnen Sie die Fourierreihe $F(x)$! Geben Sie insbesondere explizit die Approximation der Funktion durch ein trigonometrisches Polynom 1. Grades $F_1(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos Cx + b_1 \sin Cx$ an!
d) Für welche x konvergiert die Fourierreihe $F(x)$ gegen $f(x)$, was passiert für die x, für die keine Konvergenz gegen $f(x)$ erfolgt?

Aufgabe 14.30 **Lösung**

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} -3, & -2 < x \leq -1 \\ -1, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ werde 4-periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

Aufgabe 14.32 **Lösung**

Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ sei bezüglich $x = \frac{\pi}{2}$ symmetrisch, d.h., es gelte $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Welche ihrer Fourierkoeffizienten sind mit Sicherheit gleich 0 ?

Aufgabe 14.33 **Lösung**

Diskutieren Sie die Unterschiede zwischen Fourier- und Taylorentwicklung von Funktionen einer reellen Veränderlichen!

Aufgabe 14.34 **Lösung**

Die Funktion $f(t) = \begin{cases} \sin^2 t, & 0 \leq t \leq \pi \\ -\sin^2 t, & -\pi < t < 0 \end{cases}$ werde periodisch fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die durch die periodische Fortsetzung entstehende Funktion!
b) Entwickeln Sie die Funktion in eine Fourierreihe!
c) Für welche t konvergiert die Fourierreihe, wann erfolgt Konvergenz gegen $f(t)$?
d) Kann die Funktion an der Stelle $t_0 = 0$ bzw. an der Stelle $t_0 = \pi/2$ in eine Taylorreihe entwickelt werden? Führen Sie die Entwicklung aus, wenn das möglich ist!
e) Für welche t konvergiert die ermittelte Taylorreihe? Wann liegt nach dem Satz von Taylor Konvergenz gegen $f(t)$ vor?
f) Bestimmen Sie Näherungswerte für $f(\pi/2)$ und $f(\pi/6)$, indem Sie die Fourier- bzw. Taylorentwicklung jeweils nach dem Glied mit $k = 4$ abbrechen, und stellen Sie die so ermittelten Werte den exakten Funktionswerten gegenüber! Kommentieren Sie das Ergebnis!

Hinweis: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ (auch für Taylorentwicklung nützlich!), $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Aufgabe 14.35 **Lösung**

Die über dem Intervall $-\pi < t \leq \pi$ durch $g(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & -\pi < t < 0 \\ \cos t - 1, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$ definierte Funktion werde periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Die so entstandene Funktion soll überall mit $g(t)$ bezeichnet werden.

a) Skizzieren Sie die Funktion $g(t)$!
b) Entwickeln Sie die Funktion $g(t)$ in eine Fourierreihe!

   Hinweis: $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?

d) Kann die Funktion $g(t)$ an der Stelle $t_0 = 0$ bzw. an der Stelle $t_0 = \pi/4$ in eine Taylorreihe entwickelt werden? Führen Sie die Entwicklung aus, wenn das möglich ist!

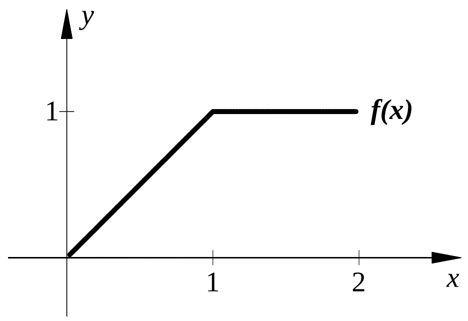
Hinweis: Da $\frac{k(k+1)}{2}$ genau dann gerade ist, wenn k bei Division durch 4 den Rest 0 oder 3 lässt, ist für eine zusammengefasste Darstellung der Reihe die Verwendung des Ausdrucks $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ nützlich.

e) In welcher Situation wäre die Taylorentwicklung aus d) gegenüber der Fourierentwicklung aus b) zu bevorzugen?

f) Für welche t konvergiert die ermittelte Taylorreihe? Wann liegt nach dem Satz von Taylor Konvergenz gegen $g(t)$ vor?

Aufgabe 14.36 Lösung

Über dem Intervall $(0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert.



Die Funktion $f(x)$ werde 2-periodisch auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt.

a) Berechnen Sie die Fourierreihe dieser Funktion!
b) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourierreihe?
c) Geben Sie die komplexe Form der Fourierreihe an!

Aufgabe 14.37 Lösung

Ermitteln Sie die Fourierreihe von $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ in reeller und komplexer Form!

15 Vektorfunktionen

Differenziation von Vektorfunktionen

Aufgabe 15.1 **Lösung**

Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}\sin 2x\\ \sin x^2\\ \sin^2 x\end{pmatrix}$!

Aufgabe 15.2

a) Stellen Sie den Kreis mit dem Radius r um den Punkt (x_0, y_0) in der Ebene als Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ dar!

b) Berechnen Sie die Ableitung $\vec{x}\,'(t)$!

c) Beschreiben Sie den oberen Halbkreis als Funktion $y = f(x)$!

d) Berechnen Sie die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$ und überzeugen Sie sich davon, dass beide Ergebnisse gleich sind!

e) Stellen Sie den Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung und den Tangentenvektor $\vec{x}\,'(t)$ in seinem Punkt $(\sqrt{3}, 1)$ grafisch dar! Notieren Sie mithilfe des Tangentenvektors die Gleichung der Tangente in diesem Punkt an den Kreis!

f) Geben Sie die Gleichung der soeben ermittelte Gerade in parameterfreier Form an und überzeugen Sie sich davon, dass dies die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = \sqrt{3}$ ist!

Aufgabe 15.3 **Lösung**

Betrachtet werden die Kurven $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ y_1(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix}x_2(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix}x_3(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ jeweils für $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt! Welches Analogon hat diese Beziehung für Winkelfunktionen?

b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren für die drei Kurven!

c) Geben Sie mithilfe der Beziehungen aus a) parameterfreie Gleichungen der drei Kurven an!

d) Stellen Sie die drei Kurven grafisch dar! Wie oft werden die Kurven für $-\infty < t < \infty$ durchlaufen?

e) Beschreiben Sie die in der oberen Halbebene (einschließlich x-Achse) gelegenen Teile der drei Kurven als Funktionen $y = f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$!

f) Berechnen Sie für die drei Funktionen die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$!

g) Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ sollen zu einer einheitlichen über der gesamten x-Achse definierten Funktion zusammengefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion durch einen einheitlichen Ausdruck!

h) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an die gegebenen Kurven in den Punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(1,0)$ und $(2, \sqrt{3})$ und zeichnen Sie die Tangenten in das Bild aus d) ein!

Aufgabe 15.4 **Lösung**

a) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2+5\cos t \\ 3+5\sin t \\ t \end{pmatrix}$? Skizzieren Sie die Kurve!

b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Kurve durch die x-y-Ebene und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt!

c) In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-y-Ebene?

Aufgabe 15.7 **Lösung**

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2\sin^2 t \\ 16t^2 \end{pmatrix}$ im Punkt $(1, 1, \pi^2)$!

Aufgabe 15.8 **Lösung**

Betrachtet wird die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ 2\pi - t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2\pi$.

a) Skizzieren Sie die Kurve! Achten Sie dabei auf korrekte Darstellung des Anfangs- und des Endpunktes!

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(-\pi, 0, \pi)$!

Aufgabe 15.9 **Lösung**

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$ im Koordinatenursprung!

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ebene $z = 0{,}11$!

c) Vergleichen Sie diesen Schnittpunkt mit den Schnittpunkten der Kurve $\vec{x}(t)$ mit dieser Ebene! Was stellen Sie fest?

Aufgabe 15.10

Sei $\vec{x}(t)$ differenzierbar und $\|\vec{x}(t)\| = \text{const}$. Zeigen Sie, dass dann $\vec{x}(t) \cdot \vec{x}\,'(t) = 0$ gilt! Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 15.11

Ein Punkt bewege sich gemäß $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}$ von $t = 0$ bis π.

a) Längs welcher Kurve erfolgt die Bewegung?

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und ihren Betrag!
c) Berechnen Sie die Beschleunigung und ihren Betrag!
d) Wie groß ist die auf die zurückgelegte Strecke bezogene Geschwindigkeit, die auf einem Tachometer angezeigt würde?
e) Wie groß ist die auf die zuletzt berechnete Geschwindigkeit bezogene Beschleunigung? Erläutern Sie den Zusammenhang zum Ergebnis von c)!

Aufgabe 15.12 **Lösung**

Ein Fahrzeug bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius 20 nach $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 20\cos\frac{t}{2} \\ 20\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor!
b) Zeigen Sie, dass in diesem Falle der Beschleunigungsvektor orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor ist!
c) Warum ist der Betrag der Beschleunigung nicht gleich 0, obwohl auf dem Tachometer eine konstante Geschwindigkeit angezeigt wird? Welcher Zusammenhang besteht zu der Orthogonalität von Geschwindigkeit und Beschleunigung?

Aufgabe 15.14 **Lösung**

Gegeben sei die Vektorfunktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass durch diese Vektorfunktion eine geschlossene Kurve beschrieben wird, die auf der Kugel $x^2+y^2+z^2=4$ verläuft!
b) Zeigen Sie, dass alle Punkte dieser Kurve in einer Ebene liegen, geben Sie die Gleichung dieser Ebene an!
c) Um was für eine Kurve handelt es sich?
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(0,0,2)$!
e) $\vec{x}(t)$ beschreibe die Bewegung eines Massepunktes. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung! Sind Geschwindigkeit und Beschleunigung zueinander orthogonal? Begründen Sie die Orthogonalität bzw. Nichtorthogonalität dieser beiden Vektoren auch physikalisch!

Aufgabe 15.15 **Lösung**

Ein Fahrzeug bewegt sich in Abhängigkeit von der in Sekunden gemessenen Zeit t gemäß $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cos(t^2/100) \\ 50\sin(t^2/100) \end{pmatrix}$ (x und y in Meter).

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit, die auf dem Tachometer angezeigt wird, und die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksbeschleunigung!
b) Geben Sie für $t=0$ den Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor und für $t=\sqrt{50\pi}$ diese Vektoren sowie die auf den zurückgelegten Weg bezogene Augenblicksgeschwindigkeit und -beschleunigung zahlenmäßig an!
c) Skizzieren Sie die Bahnkurve von $t=0$ bis $t=\sqrt{50\pi}$! Zeichnen Sie in dieses Bild grob einige Geschwindigkeitsvektoren ein (analog zur Veranschaulichung von Vektorfeldern durch Pfeile)!

Aufgabe 15.16 **Lösung**

Zwei Körper bewegen sich für $t \geq 0$ gemäß $\vec{s}_{\mathrm{A}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_{\mathrm{B}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie jeweils die Entfernung vom Koordinatenursprung, den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die Normalenrichtung in Abhängigkeit von t !

b) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven! Zeichnen Sie jeweils für $t=\pi$ den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvekor ein!

Aufgabe 15.17 **Lösung**

In einem Gelände der Höhe $h(x,y) = 400 - \dfrac{x^2+y^2}{2500}$ wird vom Berggipfel bei $(x,y) = (0,0)$ zum auf Höhenniveau 0 befindlichen Meer längs $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\ t\ \cos t \\ 100\ t\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \geq 0$, eine Straße gebaut.

a) Stellen Sie die Straße auf einer Landkarte grafisch dar!

b) In welchem Punkt erreicht die Straße das Meer?

c) In welche Richtung zeigt die Kartendarstellung der Straße in $(x,y) = (-100\,\pi, 0)$?

d) Bestimmen Sie den Anstieg der Straße an dieser Stelle!

Begleitendes Dreibein und Krümmung

Aufgabe 15.19 **Lösung**

Geben Sie eine Parameterdarstellung des Kreises mit dem Radius 2 um den Punkt $(1,2)$ in der x-y-Ebene an, bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Einheitsvektor), ermitteln Sie seine Krümmung und den Krümmungsradius!

Aufgabe 15.20 **Lösung**

Bestimmen Sie das begleitende Dreibein, die Schmiegebene und den Krümmungskreis an die Schraubenlinie $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\ \cos t \\ 2\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ im Punkt $(2,0,0)$!

Aufgabe 15.21 **Lösung**

Geben Sie eine natürliche Parametrisierung, das ist eine Parameterdarstellung, bei der der Parameter die Bogenlänge ist, des Kreises an, der beim Schnitt der Einheitskugel des dreidimensionalen Raumes mit der Ebene $y=x$ entsteht und bestimmen Sie sein begleitendes Dreibein!

Aufgabe 15.22 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin t \\ 2 - \sqrt{2}\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie das begleitende Dreibein im Punkt $\vec{x}(t)$!

b) Ermitteln Sie für den Punkt $\vec{x}(t)$ die Schmiegebene, die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt!

c) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)$?

Aufgabe 15.23 **Lösung**

Ermitteln Sie für $t=1$ die Gleichungen der Tangente sowie der Normal- und der Schmiegebene an die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 15.24 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 6t^2 \\ 24t \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie

a) die Länge des Kurvenstücks zwischen dem Koordinatenursprung und $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$,

b) die Tangente an die Kurve im Koordinatenursprung (Was ist das für eine Gerade?),

c) die Schmiegebene der Kurve im Koordinatenursprung und

d) den Krümmungskreis der Kurve im Koordinatenursprung!

Aufgabe 15.25 **Lösung**

Eine Schraubenlinie sei durch die Parameterdarstellung $x(t)=2\cos t,\ y(t)=2\sin t,\ z(t)=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegmentes $t\in[0,1]$!

b) Ermitteln Sie den Krümmungsradius im Punkt $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$!

Aufgabe 15.26 **Lösung**

Bestimmen Sie ausgehend von einer Parameterdarstellung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ den Krümmungsradius in ihren Scheitelpunkten!

Aufgabe 15.27 **Lösung**

Sei $a>0$. Zeigen Sie, dass in einem beliebigen Punkt der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ der Krümmungsradius gleich $3\sqrt[3]{a|xy|}$ ist!

Hinweis: Parameterdarstellung der Astroide: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$

Aufgabe 15.28 **Lösung**

$y=y(x)$ sei eine Kurve in der Ebene mit der Parameterdarstellung $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Leiten Sie aus der Formel $\kappa=\frac{||\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}||}{||\dot{\vec{x}}||^3}$ für die Krümmung die Formel $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ her!

Aufgabe 15.29 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve und skizzieren Sie sie!
Hinweis: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$

Im Folgenden soll nur der Abschnitt der Kurve von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ betrachtet werden:

b) Bestimmen Sie das begleitende Dreibein!
Hinweis: $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}, \quad \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$
c) Bestimmen Sie den Krümmungsradius!
d) Ermitteln Sie die Länge des Kurvenabschnitts!
e) Ermitteln Sie den Inhalt der von dem Kurvenabschnitt und der x–Achse begrenzten Fläche!

Aufgabe 15.30

a) Ermitteln Sie die Schnittkurven der Fläche $z^2 = x^2 + y^2$ mit den Koordinatenebenen sowie mit den zur x-y-Ebene parallelen Ebenen $z = a$ und skizzieren Sie die Fläche grob! Um was für eine Fläche handelt es sich?
b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}$ eine konische Schraubenlinie beschreibt!
c) Bestimmen Sie den Tangentenvektor an die konische Schraubenlinie!
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die konische Schraubenlinie im Koordinatenursprung!
e) Durch Differenziation des „Tangenteneinheitsvektors“, das ist ein Vektor der Länge 1 in Tangentenrichtung, erhält man einen zur Tangentenrichtung orthogonalen Vektor (s. Aufgabe 15.10). Die Richtung dieses Vektors bezeichnet man als „Hauptnormalenrichtung“. Bestimmen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor an die konische Schraubenlinie im Koordinatenursprung!
f) Tangenten- und Hauptnormalenrichtung spannen die „Schmiegebene“ auf, in die sich die Kurve in der Umgebung des jeweiligen Punktes einschmiegt. Der Normalenvektor der Länge 1 der Schmiegebene wird als „Binormaleneinheitsvektor“ bezeichnet. Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormaleneinheitsvektor bilden das „begleitende Dreibein“ der Kurve. Bestimmen Sie das begleitende Dreibein der konischen Schraubenlinie im Koordinatenursprung!
g) Bestimmen Sie den Krümmungsradius der konischen Schraubenlinie im Koordinatenursprung!

16 Eigenwertprobleme

Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierung

Aufgabe 16.1

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren!
b) Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal?
c) Führen Sie die Diagonalisierung aus!
d) Wie kann man $\boldsymbol{A}^n$ ($n \geq 1$, ganz) auf einfache Weise berechnen?
e) Berechnen Sie $\boldsymbol{A}^5$ und $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$!

Aufgabe 16.2 **Lösung**

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung mithilfe der Matrix aus den Eigenvektoren rechnerisch aus!

Aufgabe 16.3

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung aus! Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal?

Aufgabe 16.4 **Lösung**

Sei $\vec{x}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix $\boldsymbol{A}$, ferner sei $\boldsymbol{E}$ wie üblich die Einheitsmatrix.

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\vec{x}$!
b) Geben Sie für die Matrizen $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ aus den Aufgaben 16.1 und 16.3 die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ an!

Aufgabe 16.5

Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Matrizen a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$!

Was ist hinsichtlich der Diagonalisierbarkeit der Matrizen zu sagen?

Aufgabe 16.6 Lösung

Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$!

Hinweis: Analog zur Betragsdefinition für komplexe Zahlen $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ muss das Skalarprodukt komplexer Vektoren durch $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum x_i \overline{y_i}$ definiert werden. Für die Norm eines komplexen Vektors gilt daher $\|\vec{z}\| = \sqrt{\sum z_i \overline{z_i}}$.

Aufgabe 16.7

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.8 Lösung

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.9

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.11

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.12 Lösung

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.14 Lösung

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 37 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.15 **Lösung**

Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Determinante!
b) Invertieren Sie die Matrix!
c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren!

Aufgabe 16.17 **Lösung**

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige reelle Matrix vom Typ 2×2.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte!
b) Wann hat die Matrix zwei voneinander verschiedene reelle Eigenwerte?
c) Wann hat die Matrix zwei voneinander verschiedene komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindendem Imaginärteil?
d) Wann hat die Matrix einen doppelten reellen Eigenwert, zu dem zwei voneinander linear unabhängige Eigenvektoren gehören? Geben Sie in diesem Falle auch die Eigenvektoren an!
e) Wann hat die Matrix einen doppelten reellen Eigenwert, zu dem es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor gibt?

Aufgabe 16.20 **Lösung**

Obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Hauptdiagonale $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben offensichtlich den dreifachen Eigenwert 1. Geben Sie je eine solche Matrix an, für die zu diesem Eigenwert genau ein, genau zwei bzw. genau drei linear unabhängige Eigenvektoren gehören!

Definitheit symmetrischer Matrizen

Aufgabe 16.21 **Lösung**

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen mit dem Kriterium von Sylvester auf Definitheit:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 16.22 **Lösung**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und mit deren Hilfe die Definitheitseigenschaften der Matrizen aus Aufgabe 16.21 a) – f) !

Aufgabe 16.23 **Lösung**

Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 10 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$!

Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal? Sind die Matrizen definit?

Aufgabe 16.24 **Lösung**

Sei a ein beliebiger reeller Parameter. Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 10 & a \\ a & 10 \end{pmatrix}$! Sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal? Sind die Matrizen definit?

Aufgabe 16.25 **Lösung**

Untersuchen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ auf Definitheit!

Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

Aufgabe 16.26

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$!

b) Bilden Sie aus den normierten Eigenvektoren eine Matrix $\boldsymbol{V}$, überzeugen Sie sich von ihrer Orthogonalität und führen Sie mit ihr die Diagonalisierung aus!

Aufgabe 16.27 **Lösung**

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$!

b) Bilden Sie aus den normierten Eigenvektoren eine Matrix $\boldsymbol{V}$, überzeugen Sie sich von ihrer Orthogonalität und führen Sie mit ihr die Diagonalisierung aus!

Aufgabe 16.28 **Lösung**

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung der Matrix rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

Aufgabe 16.29 **Lösung**

Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

Aufgabe 16.30 **Lösung**

Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}$!

Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 6.45b)) verwendet.

17 Kurven und Flächen 2. Ordnung

Kurven 2. Ordnung

Aufgabe 17.1 **Lösung**

Gegeben seien die Kurven

(I) $4x^2 + 25y^2 - 56x + 100y + 196 = 0$ und (II) $2x^2 + 2y^2 - 28x + 20y + 76 = 0.$

a) Um was für Kurven handelt es sich? Bestimmen Sie ggf. ihre Mittelpunkte und Halbachsen!

b) Skizzieren Sie die Kurven!

Aufgabe 17.2 **Lösung**

a) Seien a und b positive Zahlen. Zeigen Sie, dass sich die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in der Form $\left\{ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \; 0 \leq t < 2\pi \right\}$ darstellen lässt!

b) Stellen Sie die Kurven (I) und (II) aus Aufgabe 17.1 in dieser Form dar!

Aufgabe 17.3 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $25x^2 + 150x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$ eine Ellipse beschrieben wird!

b) Geben Sie den Mittelpunkt und die Halbachsen der Ellipse an!

c) Transformieren Sie die Koordinaten so, dass der Mittelpunkt der Ellipse im Ursprung des neuen Koordiantensystems liegt!

d) Stellen Sie die Ellipse wie in Aufgabe 17.2a) dar!

Aufgabe 17.4 **Lösung**

Klassifizieren und skizzieren Sie die Kurve $x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 33 = 0$!

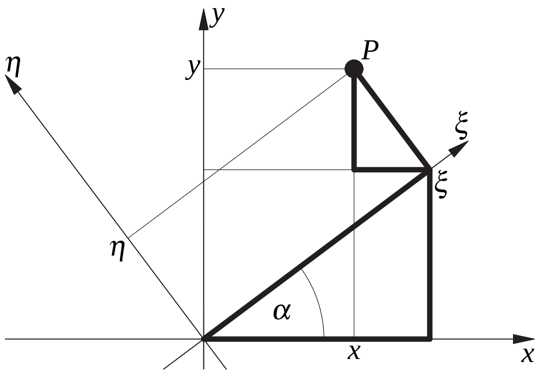
Drehung von Koordinatensystemen

Aufgabe 17.5

Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x, y) der Ebene gehe durch Drehung um den Winkel α in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ, η) hervor.

a) Leiten Sie unter Verwendung der Beziehungen zwischen den Seiten der in der nebenstehenden Skizze hervorgehobenen Dreiecke her, wie sich die Koordinaten eines Punktes P im x-y-System aus seinen Koordinaten im ξ-η-System errechnen!

b) Stellen Sie die Koordinatentransformation in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ dar und zeigen Sie, dass es sich bei $\boldsymbol{V}$ um eine orthogonale Matrix mit $\det \boldsymbol{V} = 1$ handelt!



Aufgabe 17.6 **Lösung**

Beweisen Sie, dass sich jede orthogonale zweireihige Matrix in der Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$ darstellen lässt! Welche Folgerung ergibt sich daraus für Koordinatentransformationen mit orthogonalen Matrizen?

Aufgabe 17.7 **Lösung**

Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene gehe durch Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt (x_0,y_0) und Drehung um den Winkel α in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ,η) hervor. Geben Sie an, wie sich (x,y) aus (ξ,η) errechnet!

Aufgabe 17.8 **Lösung**

Notieren Sie die Transformationsgleichungen für die Drehung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems um den Winkel α in positive Richtung sowie für die Rücktransformation (Drehung um den Winkel α in negative Richtung)! Was passiert, wenn man diese ineinander einsetzt?

Aufgabe 17.9 **Lösung**

Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene gehe durch Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt $(2,4)$ und Drehung um 45^{o} in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ,η) hervor. Beschreiben Sie die Gerade $y = \frac{x}{2} + 3$ in dem neuen Koordinatensystem!

Aufgabe 17.11 **Lösung**

Im kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene sei die Gerade $y = 4x + \frac{22}{13}$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Gerade in dem Koordinatensystem (ξ,η), das aus dem System (x,y) durch Verschiebung des Koordinatenurprungs in den Punkt $(x,y) = \left(-\frac{27}{13}, \frac{20}{13}\right)$ und Drehung um den Winkel $\arctan \frac{12}{5}$ in positive Richtung hervorgeht!

Hinweis: Die Verwendung der Zahlen 13, 12 und 5 soll die Rechnung zahlenmäßig vereinfachen. Warum ist das so?

Hauptachsentransformation für Kurven 2. Ordnung

Aufgabe 17.12 **Lösung**

Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene gehe durch Drehung um 45^o in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ,η) hervor. Transformieren Sie die Gleichung $xy = 8$ in das neue Koordinatensystem! Skizzieren Sie die Kurve! Um was für eine Kurve handelt es sich?

Aufgabe 17.13

Führen Sie unter Verwendung der Matrix $\boldsymbol{V}$ aus Aufgabe 16.26b) für die Kurve $16x^2+24xy+9y^2+15x-20y=0$ die Hauptachsentransformation aus! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve grafisch dar!

Hinweis: $16x^2+24xy+9y^2+15x-20y = (x \quad y)\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (15 \quad -20)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 17.14 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $16x^2+24xy+9y^2+20x+140y+500=0$ die Hauptachsentransformation aus, klassifizieren Sie sie und stellen Sie sie grafisch dar!

Aufgabe 17.15 **Lösung**

Führen Sie unter Verwendung der Matrix $\boldsymbol{V}$ aus Aufgabe 16.27b) für die Kurve $8x^2+4xy+5y^2=36$ die Hauptachsentransformation aus! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve grafisch dar!

Aufgabe 17.16 **Lösung**

Beseitigen Sie das gemischte Glied in der quadratischen Form $q(x,y)=8x^2+4xy+5y^2$

a) durch Hauptachsentransformation entsprechend Aufgabe 17.15 und
b) durch quadratische Ergänzung von $8x^2+4xy$!
c) Stellen Sie die Basisvektoren des x-y-Koordinatensystems und der beiden transformierten Systeme grafisch dar und diskutieren Sie den Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen!
d) Minimieren Sie die Funktion $q(x,y)$ für $x,y\in\mathbb{R}$ mithilfe der beiden Transformationen!

Aufgabe 17.17 **Lösung**

Führen Sie die Hauptachsentransformation für die Kurve $x^2-6xy+y^2+6\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=18$ aus und skizzieren Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem!

Aufgabe 17.18 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $50x^2-240xy+288y^2+104x-689y+169=0$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Kurve handelt es sich?
c) Um welchen Winkel wurde das Koordinatensystem bei der Hauptachsentransformation gedreht?
d) Skizzieren Sie die Kurve unter Angabe beider Koordinatensysteme!

Aufgabe 17.19

Bringen Sie die Kurven a) $2xy=1$ und b) $13x^2+10xy+13y^2=72$ in Hauptachsenlage! Um was für Kurven handelt es sich? Stellen Sie sie grafisch dar!

Aufgabe 17.20 **Lösung**

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation für die Kurve $2xy+\sqrt{2}(x+y)=0$ durch!
b) Zeichnen Sie die Kurve!

Aufgabe 17.21 **Lösung**

In der kartesischen Koordinatenebene sei die Kurve $21x^2+8\sqrt{3}xy+13y^2=225$ gegeben.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Klassifizieren Sie die Kurve und skizzieren Sie sie in dem transformierten Koordinatensystem!
c) Um welchen Winkel werden bei der Hauptachsentransformation die Koordinatenachsen gedreht? Skizzieren Sie die Kurve im Ausgangskoordinatensystem!

Aufgabe 17.22 **Lösung**

a) Führen Sie für die Kurve $13x^2-10\,xy+13y^2=288$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie!
b) Zeichnen Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!

Aufgabe 17.27 **Lösung**

a) Führen Sie für die Kurve $-3x^2+10\sqrt{3}xy-13y^2+2\sqrt{3}x+2y=16$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie!
b) Zeichnen Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!

Aufgabe 17.29 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $4xy+3y^2+4x-2y-5=0$ die Hauptachsentransformation aus, klassifizieren Sie sie und zeichnen Sie sie im transformierten Koordinatensystem!

Aufgabe 17.30 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $19x^2+6xy+11y^2+20\sqrt{10}\,x+35=0$ die Hauptachsentransformation durch, klassifizieren Sie sie und skizzieren Sie sie im transformierten Koordinatensystem!

Aufgabe 17.33 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $x^2+xy+y^2=6$ die Hauptachsentransformation durch und stellen Sie die Kurve im transformierten und im Ausgangskoordinatensystem graphisch dar!

Aufgabe 17.34 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=0$ die Hauptachsentransformation durch! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

Aufgabe 17.35 **Lösung**

Drehen Sie das kartesische x-y-Koordinatensystem so, dass die die Kurve $x^2+6xy+9y^2+3\sqrt{10}x-\sqrt{10}y=0$ in Hauptachsenlage überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Kurve im x-y-System!

Aufgabe 17.36 **Lösung**

Führen Sie für die Kurve $9x^2+12xy+4y^2+26\sqrt{13}x+13\sqrt{13}y=0$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie! Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

Aufgabe 17.37 **Lösung**

a) Führen Sie für die Kurve $13x^2-18xy+37y^2-2\sqrt{10}x+6\sqrt{10}y=\frac{75}{2}$ die Hauptachsentransformation aus! Um welche Art von Kurve handelt es sich?
b) Skizzieren Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!
c) Um welchen Winkel wurde bei der Hauptachsentransformation gedreht?
d) Geben Sie die Geradengleichungen der Achsen des transformierten Koordinatensystems im Ausgangssystem an!
e) Skizzieren Sie die Kurve im Ausgangssystem!

Hauptachsentransformation für Flächen 2. Ordnung

Aufgabe 17.38 **Lösung**

Bringen Sie die Gleichung der Fläche $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-108=0$ in Hauptachsenform! Um was für eine Fläche handelt es sich?

Aufgabe 17.40 **Lösung**

a) Transformieren Sie die Fläche $2x^2+4xz+4y^2+5z^2=36$ in Hauptachsenlage!
b) Klassifizieren Sie die Fläche und ermitteln Sie ihre Halbachsen!

Aufgabe 17.41 **Lösung**

Gegeben sei die Fläche $4x^2+5y^2+6z^2+4xy+4yz+16x+32y+32z=-40$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich?
c) Bestimmen Sie im transformierten Koordinatensystem den Mittelpunkt und die Schnittpunkte der Fläche mit den Koordinatenachsen!
d) Skizzieren Sie grob die Fläche in den transformierten Koordinaten!

Aufgabe 17.43 **Lösung**

Führen Sie die Hauptachsentransformation für $5x^2+8y^2+5z^2+8xy-2xz+8yz=12$ aus! Um was für eine Fläche handelt es sich? Wie groß sind die Hauptachsenabschnitte? Skizzieren Sie die Fläche in den transformierten Koordinaten!

Aufgabe 17.45 **Lösung**

Gegeben sei die Fläche $9x^2 + 9y^2 + 8z^2 - 12xz - 12yz = 153$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich?
c) Skizzieren Sie die Fläche im transformierten Koordinatensystem!

Aufgabe 17.46 **Lösung**

Gegeben sei die Fläche $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz = 0$.

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch!
Hinweis: 6 ist ein Eigenwert.
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittkurven der Fläche mit den Koordinatenebenen des transformierten Koordinatensystems! Um was für Kurven handelt es sich?
c) Um was für eine Fläche handelt es sich?
d) Skizzieren Sie grob die Fläche in den transformierten Koordinaten!

18 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Funktionsbegriff und Darstellungsformen

Aufgabe 18.1 **Lösung**

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c berechnet sich nach der Heronschen Formel zu $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei s der halbe Umfang des Dreiecks ist.

Stellen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Umfang 2 als Funktion von zwei Seitenlängen x und y dar und geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an! Welche Bedeutung haben die Ecken des Definitionsbereichs?

Aufgabe 18.2 **Lösung**

Ein Produktionsergebnis P hänge von den Faktoren x und y (z.B. Arbeitszeit, Kapitaleinsatz) nach der Formel $P(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2}$ ab.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion handelt!
b) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen? Welcher Wertebereich ergibt sich?
c) Es sei vorgegeben, dass das Produktionsergebnis C erzielt werden muss. Lässt sich der damit implizit gegebene Zusammenhang zwischen x und y explizit nach x bzw. y auflösen?
d) Mit welchen Kombinationen der Produktionsfaktoren x und y lassen sich die Ergebnisse $P = 1$, $P = 2$, $P = 3$ bzw. $P = 4$ erreichen?
e) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!
f) Stellen Sie die Funktion als Fläche („Gebirge“ über der x-y-Ebene) dar!

Hinweis: Als Cobb–Douglas–Funktion bezeichnet man eine Funktion der Art

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i > 0,\ i = 0,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Aufgabe 18.3 **Lösung**

Die Höhe eines Geländepunktes werde durch die Funktion $h(x,y) = 36+6x-x^2+10y-y^2$ angegeben.

a) Klassifizieren Sie die Fläche $z = 36+6x-x^2+10y-y^2$!
b) Stellen Sie die Funktion $h(x,y)$ durch Höhenlinien grafisch dar!
c) Hat die Funktion $h(x,y)$ globale Maxima bzw. Minima? Wenn ja, wo liegen diese, wie kann man sie interpretieren?
d) Stellen Sie die Funktion als Fläche grafisch dar!
e) Der Meeresspiegel entspreche dem Höhenniveau 0. Welche Geländepunkte liegen auf Meeresspiegelhöhe?

Aufgabe 18.4 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y$.

a) Von welcher Art sind die Niveaulinien der Funktion?
b) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild!
c) Ist die Funktion beschränkt?

Aufgabe 18.5 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$, wobei x, y und z reelle Argumente seien.

a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich!
b) Sei C eine beliebige reelle Zahl. Beschreiben Sie die Niveaufläche $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = C\}$!

Stetigkeit

Aufgabe 18.7 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Wie verhält sich die Funktion, wenn man sich längs einer Geraden dem Koordinatenursprung nähert? Ist sie stetig?

Differenziation

Aufgabe 18.8

Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Herstellern produziert. Hersteller 1 muss für die Herstellung von einem Stück 4 €, Hersteller 2 muss 5 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück des Herstellers 1 und p_2 für ein Stück des Herstellers 2 abhängige Nachfrage betrage $N_1(p_1, p_2) = 40\,000 - 20\,000\, p_1 + 10\,000\, p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 1 und $N_2(p_1, p_2) = 60\,000 + 10\,000\, p_1 - 10\,000\, p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 2. Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Hersteller, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen!

Aufgabe 18.9 **Lösung**

Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Firmen produziert. Firma 1 muss für die Herstellung von einem Stück 6 €, Firma 2 muss 3 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück der Firma 1 und p_2 für ein Stück der Firma 2 abhängige Nachfrage betrage in 10 000 Stück $N_1(p_1, p_2) = 39 - 3p_1 + 3p_2$ für das Produkt der Firma 1 und $N_2(p_1, p_2) = 15 + 4p_1 - 9p_2$ für das Produkt der Firma 2. Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Firmen, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen! Welche Gewinne werden dabei erzielt?

Aufgabe 18.10 **Lösung**

Eine Ferienanlage verfügt über Zimmer von zwei unterschiedlichen Qualitäten, die von den Firmen Seeblick GmbH zum Preis p_1 bzw. Landblick GmbH zum Preis p_2 (jeweils in €) vermietet werden, die von diesen Preisen abhängige Nachfrage betrage $N_1 = 200 - 2p_1 + p_2$ bzw. $N_2 = 180 + p_1 - 3p_2$. Die beiden Firmen wollen unabhängig voneinander ihren jeweiligen Umsatz maximieren. Bei welchen Preisen wird ein Gleichgewicht erzielt, welche Umsätze werden dabei erwirtschaftet?

Aufgabe 18.11

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:

a) $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1^4 x_2^2$ an der Stelle $x_1 = 1,\ x_2 = 2$,

b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 \mathrm{e}^{x_2} + \arctan x_3$,

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$!

Sind die Funktionen total differenzierbar?

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.14 **Lösung**

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:

a) $f(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$,

b) $f(x,y) = \sin(ax+by)$ allgemein und für $(x,y) = (0,0)$,

c) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2 \ln x_3 - x_1^2 x_2 \mathrm{e}^{x_1}$!

Aufgabe 18.15

Berechnen Sie $\dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{x \cos y}{x^2+y^2}$!

Aufgabe 18.16 **Lösung**

Bestimmen Sie Gradient und Hessematrix der Funktion $f(x,y,z) = x^3y^2z + z$ allgemein und im Punkt $(-1,1,2)$!

Aufgabe 18.17

Sei $g(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Welche Konsequenzen hätte es, wenn in der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

statt „∂“ einfach „d“ geschrieben und mit den partiellen Differenzialquotienten wie mit Brüchen gerechnet würde, wie das bei gewöhnlichen Differenzialquotienten zulässig ist?

Aufgabe 18.18

Sei $z=3x^2+2xy$ mit $x=\sin t$ und $y=\cos t$. Berechnen Sie $\dot{z}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

a) mit der Kettenregel,
b) durch Einsetzen!

Aufgabe 18.19 Lösung

Sei $F(x)=f\big(x,g(x)\big)$. Berechnen Sie $F'(x)$

a) allgemein,
b) für $f(x,y)=\ln(x+y)$, $g(x)=\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}$!

Aufgabe 18.20 Lösung

Sei $z=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$, $y=x^2$. Berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$!

Aufgabe 18.21 Lösung

Sei $u=f(\xi,\eta)$ mit $\xi=x+y$, $\eta=x-y$. Berechnen Sie $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$!

Aufgabe 18.22 Lösung

Sei $f(x,y)=u(\xi,\eta)=\sin\xi+\xi^2\eta$ mit $\xi=x^2+y^2$, $\eta=xy$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$!

Aufgabe 18.24 Lösung

Beseitigen Sie in der partiellen Differenzialgleichung $8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=36$ durch Hauptachsentransformation entsprechend Aufgabe 17.15 das gemischte Glied!

Aufgabe 18.25 Lösung

Sei $f(x,y)=x^3-2xy^2+y+4$.

a) Berechnen Sie das vollständige Differenzial!
b) Wie ändert sich der Funktionswert, wenn ausgehend von $x=y=1$ x um 0.002 zu- und y um 0.001 abnimmt! Ermitteln Sie einen Näherungswert mit Hilfe des vollständigen Differenzials sowie die tatsächliche absolute Änderung!
c) Schätzen Sie mit Hilfe des vollständigen Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x,y)$ ab, der entstehen kann, wenn die Werte $x=1$ und $y=1$ jeweils mit einer Genauigkeit von 0.002 ermittelt worden sind!
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt $(x,y,z)=(1,1,4)$ (Taylorentwicklung bis zu den linearen Gliedern)!

Aufgabe 18.27 Lösung

Für die Herstellung eines Produktes werden Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt, deren Preise mit p_1, p_2 und p_3 bezeichnet werden. Der Gewinn pro verkaufter Mengeneinheit des Produkts betrage $G(p_1, p_2, p_3) = 800 - 3p_1 - 2p_2 - 5p_3$. Es sei $p_2 = 50$ und $p_3 = 20$. Für welche Preise p_1 ist der Gewinn positiv und im Verhältnis zu p_1 elastisch?

Hinweis: Die **partielle Elastizität** wird analog der gewöhnlichen Elastizität eingeführt: Das Verhältnis der relativen Änderungen der Größen $f(x_1, \ldots, x_n)$ und x_i beträgt ungefähr $\varepsilon_{f,x_i} = \frac{\partial f / \partial x_i}{f} x_i$, wenn die Größen x_j, $j \neq i$ unverändert bleiben.

Aufgabe 18.28 Lösung

Eine von den Produktionsfaktoren x_1 bis x_4 abhängige Produktionsfunktion laute
$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt[10]{x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^4}$.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Funktion handelt!
b) Ermitteln Sie die partiellen Elastizitäten des Produktionsergebnisses bezüglich der einzelnen Faktoren!
c) Welche prozentuale Erhöhung des Produktionsergebnisses ist zu erwarten, wenn der Faktor x_i $(i = 1, \ldots, 4)$ um 2,5 % erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

Aufgabe 18.29

Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x,y)$?
c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$!
e) Ermitteln Sie mithilfe des vollständigen Differenzials sowie mithilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!
g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(3,4,5)$!

Aufgabe 18.30 Lösung

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!
b) Ermitteln Sie im Punkt $(x,y) = (2,2)$ die Richtungsableitung in Richtung der Winkelhalbierenden des I. Quadranten!
c) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an $z = f(x,y)$ im Punkt $(x,y,z) = (2,0,2)$?

Aufgabe 18.32 Lösung

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y) = \frac{8}{x^2 + y^2}$ im Punkt $(x,y) = (\sqrt{3}, 1)$ in die Richtung, die mit der positiven x-Achse einen Winkel von $5\pi/3$ bildet!

Aufgabe 18.33 **Lösung**

Berechnen Sie die Richtungsableitung von $U(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$ im Punkt $(x,y,z) = (4,6,15)$ in Richtung $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 18.34

Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y) = \dfrac{1000 + x + y + \sqrt{xy + 76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$!

Aufgabe 18.36 **Lösung**

Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ die partiellen Ableitungen sowie die Ableitung in Richtung der Geraden $y = x$ im Koordinatenursprung!

Aufgabe 18.37 **Lösung**

Ein Temperaturfeld sei durch $T(x,y,z) = 2x^2 - 3yz + 4$ gegeben.

a) In welche Richtung ändert sich die Temperatur ausgehend vom Punkt $(2,0,2)$ am stärksten?
b) Wie groß ist ausgehend von diesem Punkt der maximale Temperaturanstieg pro Längeneinheit?
c) Wie groß ist die tatsächliche Temperaturänderung, wenn von dem Punkt ausgehend ein Zwanzigstel bzw. eine volle Längeneinheit in Richtung des maximalen Temperaturanstiegs zurückgelegt wird?

Aufgabe 18.38 **Lösung**

Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = y - x^2 + 2x$.

a) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!
b) Ermitteln Sie für den Punkt $(x,y) = (0,1)$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(x,y)$ sowie die Richtungsableitung in diese Richtung! Zeichnen Sie die Richtung in das Niveaulinienbild ein!
c) In welche Richtung ist die Richtungsableitung im Punkt $(x,y) = (0,1)$ gleich 0? Zeichnen Sie auch diese Richtung in das Bild ein!
d) Welche Beziehung besteht zwischen der Niveaulinie durch den Punkt $(x,y) = (0,1)$ und der Gerade mit der bei c) ermittelten Richtung durch diesen Punkt?

Aufgabe 18.39

Betrachtet wird die Funktion $f(x,y) = x - y^2 + 4y$.

a) Stellen Sie die Niveaulinie der Funktion $f(x,y)$ durch den Punkt $(x,y) = (4,0)$ als Funktion einer Veränderlichen $x = x(y)$ dar!

b) Skizzieren Sie das Niveaulinien der Funktion $f(x,y)$! Heben Sie in diesem die bei a) ermittelte Niveaulinie hervor!
c) Ermitteln Sie für den Punkt $(x,y)=(4,0)$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(x,y)$ sowie die Richtungsableitung in diese Richtung! Zeichnen Sie die Richtung in das Niveaulinienbild ein!
d) In welche Richtung ist die Richtungsableitung im Punkt $(x,y)=(4,0)$ gleich 0? Zeichnen Sie auch diese Richtung in das Bild ein!
e) Welche Beziehung besteht zwischen der Niveaulinie durch den Punkt $(x,y)=(4,0)$ und der Gerade mit der bei d) ermittelten Richtung durch diesen Punkt?

Taylorentwicklung

Aufgabe 18.40 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)=2^{x_1}e^{x_2}3^{x_3}$.

a) Entwickeln Sie die $f(x_1,x_2,x_3)$ an der Stelle $(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})$ nach der Taylorformel bis zu den linearen Gliedern!
b) Ein Produktionsergebnis hänge durch die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)$ von den Faktoren x_1, x_2 und x_3 ab. Ermitteln Sie näherungsweise die relative Zunahme des Produktionsergebnisses, die die Vergrößerung des Faktors x_i $(i=1,2,3)$ um ein Prozent ausgehend von $(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})=(2,1,1)$ mit sich bringt!

Aufgabe 18.41 **Lösung**

Entwickeln Sie $f(x,y)=x^y$ für $(x_0,y_0)=(1,1)$ nach der Taylorformel bis zu den quadratischen Gliedern und bestimmen Sie damit näherungsweise $1{,}01^{1{,}02}$!

Aufgabe 18.42 **Lösung**

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=\sqrt{xy}$ im Punkt $(x,y,z)=(3,12,6)$!

Aufgabe 18.43 **Lösung**

Entwickeln Sie $z=\dfrac{\cos x}{\cos y}$ an der Stelle $(x,y)=(0,0)$ nach der Taylorformel bis zu den quadratischen Gliedern und geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an!

Aufgabe 18.44 **Lösung**

Sei $f(x,y)=\sqrt{1-x-y}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt $(0,0)$!
b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $z=f(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ an!
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $x=t$, $y=t$, $z=\sqrt{1-2t}$ im Punkt $(0,0,1)$!
d) Zeigen Sie, dass die in c) ermittelte Tangente in der in b) ermittelten Tangentialebene liegt!

Aufgabe 18.45 **Lösung**

Entwickeln Sie $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ für $(x_0,y_0) = (0,0)$ nach der Taylorschen Formel bis zu den Gliedern vierter Ordnung!

Aufgabe 18.46 **Lösung**

Betrachtet werden die Funktionen $f_1(x,y) = 2(x^2+y^2)$ und $f_2(x,y) = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}(x^2+y^2)$.

a) In welcher Kurve schneiden sich die beiden Paraboloide?

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an die beiden Paraboloide im Punkt $(1,0,2)$! Zeigen Sie, dass die Stellungsvektoren dieser Tangentialebenen zueinander orthogonal sind!

(nach Luderer, B.; Paape, C. u. Würker, U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. 5. Aufl. Teubner 2008, Beispiel 7.7, S. 202f.)

Aufgabe 18.47 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$ auf dem elliptischen Paraboloid $z = x^2+y^2$ verläuft!

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}\right)^{\mathsf{T}}$ Doppelpunkt auf dieser Kurve ist, d.h. sich für zwei verschiedene Werte des Parameters t ergibt!

c) Ermitteln Sie für diesen Punkt die Gleichungen der beiden Tangenten an die Kurve und mit deren Hilfe die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid!

d) Entwickeln Sie $f(x,y) = x^2+y^2$ für $(x_0,y_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ in eine Taylorreihe!

e) Bestimmen Sie die Tangentialebene mit Hilfe der Taylorentwicklung!

Implizite Differenziation

Aufgabe 18.48 **Lösung**

Lässt sich der implizit durch $F(x,y) = 0$ definierte Zusammenhang von x und y explizit nach y als Funktion $y = y(x)$ auflösen, so gilt unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} .$$

a) Begründen Sie diese Formel mit der Kettenregel!

b) Ein Zusammenhang zwischen den Größen x und y sei durch $h(x,y) = 36+6x-x^2+10y-y^2 = 45$ beschrieben. Ermitteln Sie $y'(x)$ für $x=6, y=1$ durch implizite Differenziation sowie durch explizite Auflösung nach y und anschließende Differenziation!

c) Was passiert in gleichem Zusammenhang im Punkt $x=8, y=5$?

Aufgabe 18.49 **Lösung**

In der Umgebung des Punktes $(1,2)$ werde durch $F(x,y) = x^5+y^4-4xy-11x+2 = 0$ eine Funktion $y = y(x)$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass durch $F(x,y) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(1,2)$ eine Funktion $y = y(x)$ definiert wird!

b) Berechnen Sie $y'(1)$!

c) Ermitteln Sie näherungsweise $y(1.1)$!

Aufgabe 18.51 **Lösung**

Betrachtet wird das Nullniveau der Funktion $f(x,y)=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y$ (vgl. Aufgabe 18.84).

a) Zeigen Sie, dass in der Umgebung des Punktes $(x,y)=(0,-\frac{12}{5})$ durch das Nullniveau eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert wird!
b) Bestimmen Sie für diese Funktion die Ableitung $\varphi'(0)$ durch implizite Differenziation!
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $T(x)$ im Punkt $(x,y)=(0,-\frac{12}{5})$ an die Niveaulinie!
d) Vergleichen Sie $T(0.1)$ und $\varphi(0.1)$!

Aufgabe 18.53 **Lösung**

Sei $h(x,y)=\sqrt{x^2-4x+4y^2+8y+17}$ die Höhe des Geländepunktes (x,y).

a) Wo ist der niedrigste Punkt des Geländes, welche Höhe hat er?
b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Höhenlinie $h(x,y)=5$ mit den Koordinatenachsen sowie mit den Geraden $x=2$ und $y=-1$!
c) Skizzieren Sie die Höhenlinie $h(x,y)=5$!
d) Ermitteln Sie durch implizite Differenziation der Funktion $F(x,y)=(h(x,y))^2-25=0$ den Anstieg der Tangenten an die Höhenlinie $h(x,y)=5$ in ihren Schnittpunkten mit der x–Achse!

Aufgabe 18.54 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $F(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2-3$.

a) Gibt es in der Umgebung des Punktes $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(1,2)$ eine eindeutig bestimmte Funktion φ mit $x_2=\varphi(x_1)$, so dass $F(x_1,\varphi(x_1))=0$?
b) Wie muss die Variable x_2 in einer Umgebung des Punktes $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(1,2)$ auf kleine Änderungen der Variablen x_1 reagieren, damit die Gleichung $F(x_1,x_2)=0$ noch näherungsweise erfüllt bleibt?
c) Stellen Sie die Lösungsmenge von $F(x_1,x_2)=0$ in der Umgebung von $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(1,2)$ grafisch dar! Benutzen Sie dafür Taylorpolynome ersten und zweiten Grades!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.55 **Lösung**

Durch die Gleichung $F(x,y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2=0$ wird implizit eine „Astroide“ beschrieben.

a) Zeigen Sie, dass sich diese Astroide durch $\vec{x}(\varphi)=\begin{pmatrix}x(\varphi)\\y(\varphi)\end{pmatrix}=2^{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\cos^3\varphi\\\sin^3\varphi\end{pmatrix}$ auch als Vektorfunktion beschreiben lässt!
b) Skizzieren Sie die Kurve!

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Astroide im Punkt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

c) durch Differenziation der Vektorfunktion $\vec{x}(\varphi)$,
d) durch implizite Differenziation von $F(x,y)=0$,
e) durch explizite Auflösung von $F(x,y)=0$ und anschließende Differenziation!

Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

Zusammenfassung **Gradient, Hessematrix, Definitheit, Taylorentwicklung und Extremwertaufgaben von Funktionen mehrerer Variabler**

Aufgabe 18.56

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und untersuchen Sie mittels der zweiten partiellen Ableitungen, ob Extrema vorliegen und von welchem Typ diese sind:

a) $f(x,y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$,

b) $f(x,y) = (x+y)^2$,

c) $f(x,y) = x + y + \dfrac{8}{xy}$,

d) $f(x,y) = x\ln y - 2x^2$!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.57 — Lösung

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=2x^2+y^2+xy+x-5y$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.58

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=3x^2+2y^2-4xy+22x-16y$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.59 — Lösung

Sei $f(x,y) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an $z = f(x,y)$ in den Punkten $(0,0,10)$ und $(0,1,6)$!

b) Ermitteln Sie die lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$!

c) Hat die Funktion $f(x,y)$ globale Extrema?

Aufgabe 18.61 — Lösung

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = (x-6)^2 + (x+2)y^2 + 10$ auf stationäre Punkte und Extremwerte!

Aufgabe 18.62

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=2x^2+3y^2-4xy-12x+14y+22$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.63 — Lösung

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x^2(2-y) + y^2$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.65 — Lösung

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^3y - 3xy + y^2 + 1,\ \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$!

b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

Aufgabe 18.66 **Lösung**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=12xy-x^3y+16\ln y-32y$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.67

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=27xy-xy^3-57x+6\ln x$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.68 **Lösung**

a) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y)=x^2y-6xy+9y+y\ln y$!
b) Handelt es sich um globale Extremwerte?

Aufgabe 18.70 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=(x^3+2x^2+1)(y^2+1),\ x,y\in\mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen!
b) Ermitteln Sie die Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion!
c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion an!

Aufgabe 18.71 **Lösung**

Sei $f(x,y)=10-2x^2-3y^2+4xy-4x+8y$.

a) Entwickeln Sie $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) in eine Taylorreihe!
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)$ auf Extremwerte!
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ am Extremum und die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ am Koordiantenursprung an!
d) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebenen an die Fläche $z=f(x,y)$ im Extremum sowie im Koordinatenursprung an!

Aufgabe 18.74 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=(x^3+3x^2+1)\cosh y$.

a) Hat die Funktion globale Extrema?
b) Ermitteln Sie die relativen Extrema und Sattelpunkte!
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ für den Entwicklungspunkt $(0,0)$ bis zu den quadratischen Gliedern an!

Aufgabe 18.75

Betrachtet wird die Funktion $f(x,y)=x(\ln x+y^4-32y+47)$ für $x>0$ und $y\in\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte dieser Funktion!
b) Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung in Richtung $(4 \quad 3)^{\mathsf{T}}$ näherungsweise, wie sich $f(x,y)$ ändert, wenn man sich von $(x,y)=(1\,,\,1)$ nach $(x,y)=(1{,}004\,,\,1{,}003)$ bewegt!
c) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y)=(1\,,\,1)$ aus am stärksten?

Aufgabe 18.76 **Lösung**

Für $x > 0$, $y > 0$ sei die Funktion $f(x,y) = x - y + \ln\dfrac{y}{x}$ definiert.

a) Hat die Funktion globale oder lokale Extrema bzw. Sattelpunkte?
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\mathrm{e}, 1)$ an $z = f(x,y)$!
c) Sei $\vec{a}$ ein Vektor in gegenüber der positiven x-Achse im positiven Sinne um 60^{o} gedrehter Richtung. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e}, 1)$!
d) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y) = (\mathrm{e}, 1)$ am stärksten?

Aufgabe 18.77

Bestimmen Sie die Sattelpunkte und die lokalen und globalen Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 4xy + 6x + 2y + 3$ über dem Quadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \le x,y \le 5\}$!

Aufgabe 18.78

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = x^3 + y^3 + 4axy$, wobei a ein beliebiger reeller Parameter sei! Handelt es sich um globale Extrema?

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.79 **Lösung**

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$!

Aufgabe 18.80 **Lösung**

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ über dem Gebiet $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$!

Aufgabe 18.81

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z$ auf Extremwerte!

Aufgabe 18.83 **Lösung**

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion
$f(x,y,z) = y^3 + x^2 + 12y^2 + z^2 + 12xy - 240y + 6z$!
b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

Aufgabe 18.84 **Lösung**

Sei $f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y$, $x,y \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen!
b) Führen Sie für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ die Hauptachsentransformation aus!
c) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild im transformierten Koordinatensystem und im Ausgangssystem!
d) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y)$!

Aufgabe 18.85 **Lösung**

Sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y,z)$ und ermitteln Sie durch Definitheitsuntersuchung der Hessematrix, ob es sich um Extrema handelt und von welchem Typ diese sind!
b) Beseitigen Sie in $f(x,y,z)$ durch Hauptachsentransformation das gemischte Glied! Welche Art haben die Niveauflächen der Funktion, welches sind ihre globalen Extremwerte?
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Wegen?

Aufgabe 18.86 **Lösung**

Ermitteln Sie, sofern existent, die lokalen und globalen Extremstellen der Funktionen

a) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y$,
b) $f(x,y,z) = 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 4xy + 4yz + 16x + 32y + 32z$!

Von welcher Art sind die Niveaulinien bzw. Niveauflächen dieser Funktionen? Welcher Zusammenhang besteht zu den Aufgaben 17.17 und 17.41?

Aufgabe 18.88 **Lösung**

Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = \mathrm{e}^x\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4}\right)$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen!
b) Hat die Funktion globale Extrema?
c) Ermitteln Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion über dem Würfel $\{(x,y,z) : |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$!

Aufgabe 18.89 **Lösung**

a) Ermitteln Sie die Extrema von $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$ $(x,y,z > 0)$!
b) Hat die Funktion über dem I. Oktanten globale Extrema?

Aufgabe 18.92 **Lösung**

Sei $f(x,y) = y^4 - 4x^3y + 96x - 1$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte!
b) In der Umgebung von $(x,y) = (0,1)$ sei durch $f(x,y) = 0$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert. Ermitteln Sie durch implizite Differenziation einen Näherungswert für $\varphi(0.001)$!

Aufgabe 18.93 **Lösung**

Sei $f(x,y) = x^4 - 4xy^3 + 96y + 72$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte!
b) In der Umgebung von $(x,y) = (2,-1)$ sei durch $f(x,y) = 0$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert. Ermitteln Sie durch implizite Differenziation einen Näherungswert für $\varphi(2.01)$!

Aufgabe 18.95 **Lösung**

Sei $f(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 36x + 2y$.

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen!
b) Durch $f(x,y) = 0$ sei in der Umgebung des Punktes $(x,y) = (0,0)$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert. Bestimmen Sie durch implizite Differenziation $\varphi'(0)$ und mit Hilfe dieser Ableitung einen Näherungswert für $\varphi(0.0001)$!
c) Führen Sie für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ die Hauptachsentransformation aus!
d) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
e) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y)$!

Aufgabe 18.96 **Lösung**

Ein Produkt wird mit 2 verschiedenen Etikettierungen verkauft als Markenprodukt zum Preis von p_1 € und als Nonameprodukt zum Preis von p_2 €, der Herstellungsaufwand beträgt in beiden Fällen 1 € pro Stück. Die von beiden Preisen abhängige Nachfrage betrage in 10 000 Stück $N_1 = 33 - 6p_1 + p_2$ nach dem Markenprodukt und $N_2 = 3p_1 - 3p_2$ nach dem Nonameprodukt.

a) Geben Sie den insgesamt zu erzielenden Gewinn als Funktion von p_1 und p_2 an!
b) Wie sind die Preise p_1 und p_2 zu wählen, damit maximaler Gewinn erzielt wird?

Aufgabe 18.97 **Lösung**

Unter der Annahme, dass sich die Aufwendungen und die Nachfragefunktionen nicht ändern, sollen die wirtschaftlichen Auswirkungen einer möglichen Verschmelzung der beiden Firmen aus Aufgabe 18.9 untersucht werden.

a) Geben Sie den Gewinn der Gesamtfirma als Funktion $G(p_1, p_2)$ an!
b) Ermitteln Sie das totale Differenzial dieser Funktion!
c) Der Preis p_1 soll von 17,00 auf 17,10 € und gleichzeitig der Preis p_2 von 7,50 bzw. 7,55 € erhöht werden. Ermitteln Sie die daraus resultierende Gewinnänderung näherungsweise mit dem totalen Differenzial und vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Gewinnänderung!
d) Die Gesamtfirma will ihren Gewinn maximieren. Wie sind die Preise festzusetzen, welcher Gewinn wird dabei erzielt?

Aufgabe 18.98 **Lösung**

Unter der Annahme, dass sich die Nachfragefunktionen nicht ändern, sollen die wirtschaftlichen Auswirkungen einer möglichen Verschmelzung der Firmen Seeblick GmbH und Landblick GmbH aus Aufgabe 18.10 untersucht werden.

a) Geben Sie den Umsatz der Gesamtfirma als Funktion $U(p_1, p_2)$ an!
b) Ermitteln Sie das totale Differenzial dieser Funktion!
c) Der Preis p_1 soll von 70 auf 72 € und gleichzeitig der Preis p_2 von 35 bzw. 36 € erhöht werden. Ermitteln Sie die daraus resultierende Umsatzänderung näherungsweise mit dem totalen Differenzial und vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Umsatzänderung!
d) Die Gesamtfirma will ihren Umsatz maximieren. Wie sind die Preise festzusetzen, welcher Umsatz wird dabei erzielt?

e) Für das konstante Umsatzniveau $U(p_1,p_2)=12\,000$ [€] soll der Zusammenhang zwischen den Preisen durch die Funktion $p_2=\varphi(p_1)$ beschrieben werden. Bestimmen Sie $\varphi(60)$ und durch implizite Differenziation $\varphi'(60)$!

f) Bestimmen Sie aus $\varphi(60)$ und $\varphi'(60)$ einen Näherungswert für $\varphi(61)$ und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert!

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Aufgabe 18.99 **Lösung**

Wenden Sie die Einsetz- und die Lagrangemethode zur Bestimmung der Extrema der Funktion $f(x,y)=1+yx^2$ längs des Einheitskreises $x^2+y^2=1$ an!

(nach Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 7. Aufl. Vieweg+Teubner 2009, Beispiel 8.13, S. 359ff.)

Aufgabe 18.100 **Lösung**

Wo nimmt die Funktion $f(x,y)=x^2y$ über dem im I. Quadranten $(x\geq 0, y\geq 0)$ gelegenen Teil des Ellipsenbogens $4x^2+9y^2=36$ ihren größten bzw. kleinsten Wert an?

Aufgabe 18.101 **Lösung**

a) Untersuchen Sie, ob die Punkte $\left(3,-2,-\frac{1}{2}\right)$, $(3,-1,0)$, $\left(3,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ für die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_3-3x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1+x_2-x_3=2$, $x_1-x_2+x_3=4$ stationär sind!

b) Geben Sie eine Schätzung ab, wie sich der optimale Funktionswert für die betrachtete Zielfunktion unter den beiden angegebenen Nebenbedingungen ändert, wenn die rechte Siete der zweiten Nebenbedingung von 4 auf 3,9 vermindert wird.

Hinweis: Mit dem Langrange-Multiplikator λ_i kann näherungsweise angegeben, wie sich der optimale Funktionswert bei einer kleinen Änderung der Konstante C_i in der entsprechenden Nebenbedingung ändert: $\Delta f\approx -\lambda_i\Delta C_i$.

(nach Luderer, B.; Paape, C. u. Würker, U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. 5. Aufl. Teubner 2008, Aufgabe A8.8, S. 221, 331)

Aufgabe 18.102 **Lösung**

Bestimmen Sie sofern existent den größten und den kleinsten Wert der Funktion $f(x,y)=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y$ (vgl. Aufgabe 18.84) über der Geraden $11x+5y=23$

a) mit der Einsetzmethode,

b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

Aufgabe 18.103 **Lösung**

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y)=x^2-6xy+y^2+6\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y$ unter der Nebenbedingung $y=x$

a) mit der Einsetzmethode,

b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

Wie hängt das Ergebnis mit den Ergebnissen der Aufgaben 17.17 und 18.86a) zusammen?

Aufgabe 18.105 **Lösung**

Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x,y)=xy$ auf dem Kreis $x^2+y^2=2$!

Aufgabe 18.107 **Lösung**

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 - 3\sqrt{2}y$ über dem Teil der Hyperbel $x^2-y^2=1$, für den $x \geq 1$ gilt!

Aufgabe 18.108 **Lösung**

Ermitteln Sie alle Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ über dem Ellipsoid $x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$!

Aufgabe 18.109 **Lösung**

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2$ über der Schnittgeraden der Ebenen $x+3y=30$ und $y+2z=20$

a) mit der Lagrangemethode,
b) durch Ermittlung der Geradengleichung und Einsetzen!

Aufgabe 18.110 **Lösung**

Ermitteln Sie die Extrema von $f(x,y,z)=x+y+z$ längs der Ellipse, in der sich die Ebene $x+z=1$ und der Zylinder $x^2+y^2=4$ schneiden!

Aufgabe 18.112 **Lösung**

Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei Produktionsstätten P_1 und P_2 her, wobei jeweils fixe Kosten in Höhe von $c_0=500$ sowie variable Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl in Höhe von $c_1(x)=\frac{1}{2}x_1^2$ in P_1 und in Höhe von $c_2(x)=x_2^2+2x_2$ in P_2 anfallen. Es sollen 80 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden. Ermitteln Sie, wie die Produktion auf die beiden Produktionsstätten zu verteilen ist,

a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.113 **Lösung**

Eine Ware kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei der Produktion von x Einheiten nach Technologie A entstehen Kosten in Höhe von $50+11x+\frac{x^2}{10}$, während nach Technologie B Kosten in Höhe von x^2+x entstehen. Insgesamt sollen 60 Einheiten kostenminimal produziert werden. Wie oft sind dafür die beiden Technologien anzuwenden?

Aufgabe 18.114 **Lösung**

Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei verschiedenen Produktionsstätten P_1 und P_2 her. In der Produktionsstätte P_1 entstehen für die Produktion von x Stück des Erzeugnisses Kosten in Höhe von $K_1(x) = \frac{x^2}{3} + 100\,000$, während in der Produktionsstätte P_2 Kosten in Höhe von $K_2(x) = x^2 + 8x + 30\,000$ entstehen. Es sollen 300 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden.

a) Wie ist die Produktion auf beide Produktionsstätten zu verteilen, wenn aus Kapazitätsgründen keine der Produktionsstätten den Auftrag allein fertigen kann?
b) Welche Kosten entstehen bei dieser Verteilung?
c) Wie ist zu verfahren, wenn die Produktionsstätten den Auftrag auch allein fertigen können und die Möglichkeit besteht, auf eine der Produktionsstätten zu verzichten?

Aufgabe 18.116 **Lösung**

Ein Unternehmen stellt vier Produkte her, die zu Preisen p_1, p_2, p_3 bzw. p_4 verkauft werden. Der tägliche Absatz beträgt in Abhängigkeit von den jeweiligen Preisen $a_1 = 1000 - 20p_1$, $a_2 = 1500 - 10p_2$, $a_3 = 1000 - 10p_3$ bzw. $a_4 = 2000 - 10p_4$. Aus Kapazitätsgründen muss die tägliche Produktion der Gleichung $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 7800$ genügen. Berechnen Sie die Preise, unter denen der tägliche Umsatz unter den beschriebenen Bedingungen maximal ist, sowie den damit zu erreichenden Umsatz!

Aufgabe 18.117 **Lösung**

Die Funktion $f(x,y) = 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ beschreibe für ein öffentlich gefördertes Projekt zum Gemüseanbau den Ertrag pro Hektar (in Mengeneinheiten) in Abhängigkeit von den eingesetzten Aufwendungen x für Bewässerung und y für Dünger (beide gemessen in Geldeinheiten). Es stehen insgesamt C Geldeinheiten an Fördermitteln zur Verfügung, die unbedingt vollständig verbraucht werden sollen.

In welchem Verhältnis sind die Fördermittel aufzuteilen, um einen maximalen Ertrag zu sichern? Lösen Sie die Aufgabe a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.118 **Lösung**

Das Produktionsergebnis P hänge von den Personalkosten x und den Sachkosten y nach der Formel $P(x,y) = 6x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ ab.

a) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen, welcher Wertebereich ergibt sich dafür?
b) x und y werden in Geldeinheiten gemessen, es sollen insgesamt genau 100 Geldeinheiten verwendet werden. Wie sind diese auf x und y aufzuteilen, um ein maximales Produktionsergebnis zu erzielen?
c) Für das konstante Produktionsniveau $P(x,y) = 48$ soll der Zusammenhang zwischen Personal- und Sachkosten durch die Funktion $y = \varphi(x)$ beschrieben werden. Bestimmen Sie $\varphi(1)$ und durch implizite Differenziation $\varphi'(1)$!
d) Bestimmen Sie aus $\varphi(1)$ und $\varphi'(1)$ einen Näherungswert für $\varphi(1.01)$ und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert!

Aufgabe 18.119 **Lösung**

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y,z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $x+y+z=5$ und $xy+xz+yz=8$!

Aufgabe 18.120 **Lösung**

Einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ soll ein Rechteck einbeschrieben werden. Welchen Flächeninhalt kann es maximal haben?

Aufgabe 18.121 **Lösung**

Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 1 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Quaders!

Aufgabe 18.122 **Lösung**

Bestimmen Sie den Punkt der Gerade $-7x+y=5$, der dem Punkt $(1,2)$ am nächsten liegt!

a) mit Mitteln der Analytischen Geometrie **und**
b) durch Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen!

Aufgabe 18.124 **Lösung**

Bestimmen Sie den Punkt der Ebene $2x-y=1$, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt, durch Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung!

Aufgabe 18.125 **Lösung**

Ermitteln Sie auf der Kreislinie $x^2+y^2=25$ diejenigen Punkte, deren Abstand vom Punkt $(2,4)$ maximal bzw. minimal ist!

Aufgabe 18.126 **Lösung**

Auf der Hyperbel $x^2-y^2=4$ ist der Punkt gesucht, der vom Punkt $(0,2)$ den geringsten Abstand hat!

Aufgabe 18.127 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $x^2+y^2+(x+y)^2=2$.

a) Zeigen Sie, dass kein Punkt der Kurve außerhalb des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung liegt!
b) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multipikatoren die Punkte der Kurve, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!
Hinweis: Es ist zweckmäßig, das Quadrat des Abstands zu minimieren bzw. maximieren!
c) Klassifizieren und skizzieren Sie die Kurve auf Grund des Ergebnisses von b)! Geben Sie außerdem ihre Gleichung in Hauptachsenlage an!

Lineare Ausgleichsrechnung

Aufgabe 18.128 **Lösung**

Zur Bestimmung einer Größe x liegen die widersprüchlichen Gleichungen $2x=1$ und $x=1$ vor. Bestimmen Sie den Wert von x, der die widersprüchlichen Gleichungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am besten erfüllt!

Aufgabe 18.129 **Lösung**

Die Gewinnentwicklung eines Unternehmens in den Jahren 2000 bis 2004 zeigt folgende Ergebnisse:

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Gewinn (in Mill. €)	50	51	52	54	58

Es soll ermittelt werden, mit welchen Gewinnen 2005, 2006 und 2007 zu rechnen war, wenn unveränderte wirtschaftliche Rahmenbedingungen unterstellt werden.

a) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem linearen Ansatz!
b) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem quadratischen Ansatz!
c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b) und nehmen Sie eine kritische Wertung vor!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Aufgabe 18.130 **Lösung**

Eine Fondsanalyse zeigt folgende Wertentwicklung:

Jahr	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Wert	100	110	140	170	185	296	225	205	143

Approximieren Sie die Wertentwicklung mit der Methode der kleinsten Quadrate durch Polynome 1. bis 5. Grades, stellen Sie das Ergebnis tabellarisch und grafisch dar!

Aufgabe 18.132 **Lösung**

Für die Größe y liegen in Abhängigkeit von x folgende Werte vor:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-8	-1	0	2	8

a) Approximieren Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate den Zusammenhang zwischen den Größen x und y durch eine Gerade!
b) Approximieren Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate den Zusammenhang zwischen den Größen x und y durch eine Parabel!
c) Ermitteln Sie mit beiden Approximationen Schätzwerte für y bei $x = 1.5$ und $x = 2.5$!

Aufgabe 18.133 **Lösung**

Um den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v eines Fahrzeuges in km/h und seinem Bremsweg s in m zu ermitteln, wurden Messungen bei $v = 10, 20, 30$ und 40 km/h vorgenommen, deren Ergebnisse in folgender Tabelle angegeben sind:

v		10	20	30	40
s		3	9	15	25

Der Zusammenhang soll mit der Methode der kleinsten Quadrate durch einen quadratischen Ansatz $s \approx f(v) = av^2 + bv + c$ approximiert werden. Dabei soll auch der offensichtlich bekannte Bremsweg für $v = 0$ einbezogen werden. Zur Erleichterung der Rechnung kann die Substitution $w = \dfrac{v}{10} - 2$ verwendet werden. Ermitteln Sie die Funktion $f(v)$!

Aufgabe 18.134 **Lösung**

Über dem Intervall $-3 \le x \le 3$ wird die Funktion $f(x) = 12 \cos \dfrac{\pi}{6} x$ betrachtet. Bestimmen Sie Ihre Approximation bzw. Interpolation durch eine Parabel mittels

a) der Methode der kleinsten Quadrate aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -3, -2, 0, 2, 3$,
b) Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$,
c) Newtoninterpolation aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -3, 0, 3$,
d) Newtoninterpolation aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -2, 0, 3$!

Stellen Sie in einer Tabelle die exakten Funktionswerte und die Werte auf den 4 Parabeln an den Stellen $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ gegenüber! Stellen Sie außerdem die gegebene Funktion und die Parabel aus d) grafisch dar!

Aufgabe 18.135 **Lösung**

Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t) = 2 \sin \dfrac{\pi}{6} t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

Es seien nur die Funktionswerte von $f(t)$ an den Stellen $t = -3$, $t = -1$, $t = 1$ und $t = 3$ bekannt. Approximieren Sie die Funktion aus diesen Werten mit der Methode der kleinsten Quadrate mit einem quadratischen Ansatz! Kommentieren Sie das Ergebnis! Welchen Wert hat das Approximationspolynom an der Stelle $t = 3$?

19 Vektorwertige Funktionen von Vektoren

Funktionsbegriff und Darstellung

Aufgabe 19.1 **Lösung**

Vektorwertige Funktionen von Vektoren werden auch als **Vektorfelder** bezeichnet.

a) Veranschaulichen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, indem Sie sich in jedem Punkt $\vec{x}$ einen Pfeil, der die Richtung $\vec{u}(\vec{x})$ repräsentiert, mit seinem Anfangspunkt angeheftet denken, und einige dieser Pfeile zeichnen!
b) Zeichnen Sie das Feldlinienbild!

Aufgabe 19.2 **Lösung**

Veranschaulichen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ durch Pfeile und skizzieren Sie sein Feldlinienbild!

Aufgabe 19.3 **Lösung**

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Für $r \geq 1$ sei das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(r,\varphi) \\ v(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2r^2} \\ -\frac{\sin 2\varphi}{2r^2} \end{pmatrix}$ definiert.

a) Veranschaulichen Sie das Vektorfeld durch Pfeile!
b) Zeigen Sie, dass der Einheitskreis Feldlinie ist!
c) Skizzieren Sie das Feldlinienbild!
d) Welcher physikalische Sachverhalt wird durch das Vektorfeld beschrieben?

Differenziation

Aufgabe 19.4 **Lösung**

Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Herstellern produziert. Hersteller 1 muss für die Herstellung von einem Stück 4 €, Hersteller 2 muss 5 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück des Herstellers 1 und p_2 für ein Stück des Herstellers 2 abhängige Nachfrage betrage $N_1(p_1,p_2) = 40\,000 - 20\,000\,p_1 + 10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 1 und $N_2(p_1,p_2) = 60\,000 + 10\,000\,p_1 - 10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 2.

a) Stellen Sie den Gewinn der beiden Hersteller als vektorwertige Funktion $\vec{G}$ des Preises $\vec{p}$ dar!
b) Berechnen Sie für $p_1 = 6$, $p_2 = 9$ den Gewinn $\vec{G}(\vec{p})$ und die Jacobimatrix $\vec{G}'(\vec{p})$!

c) Ermitteln Sie mithilfe der Jacobimatrix näherungsweise, wie sich der Gewinn entwickelt, wenn der Preis p_1 von 6,00 auf 6,10 € erhöht und der Preis p_2 gleichzeitig von 9,00 auf 8,90 € gesenkt wird!

d) Geben Sie $\vec{G}\left(\begin{pmatrix} 6{,}1 \\ 8{,}9 \end{pmatrix}\right)$ exakt an! Vergleichen Sie die tatsächliche Gewinnentwicklung mit der mithilfe der Jacobimatrix vorausgesagten!

Newtonverfahren

Aufgabe 19.5 **Lösung**

Zeigen Sie, dass man bei der Anwendung des Newtonverfahrens auf die Lösung

a) einer linearen Gleichung,
b) eines eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems

in einem Schritt unabhängig von der Startnäherung die exakte Lösung erhält!

Aufgabe 19.6 **Lösung**

Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{array}{l} 2y^3 - x^2 - 1 = 0 \\ x^3 y - x \ \ - 4 = 0 \end{array}$ mit dem Newtonverfahren!

Aufgabe 19.7 **Lösung**

Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + 4y \ &= 13 \\ x \ + 3y^2 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

an und führen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (2, 2)$ aus!

Aufgabe 19.8 **Lösung**

Lösen Sie iterativ das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{array}{r} 2x^5 + \ y^5 = 3 \\ x^8 + 2y^8 = 3{,}05 \end{array}$!

Aufgabe 19.9 **Lösung**

Auf das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{array}{r} x^4 + 2xy^2 = 3{,}1 \\ x^2 y + \ y^3 \ = 2{,}1 \end{array}$

soll das Newtonverfahren angewendet werden.

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems an!
b) Ermitteln Sie überschlägig eine geeignete Startnäherung!
c) Führen Sie für diese Startnäherung einen Iterationsschritt aus!

Aufgabe 19.10 **Lösung**

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{array}{l} \sin x - y = 0 \\ x - \cos y = 0 \end{array}$ mit dem Newtonverfahren für das System!

Aufgabe 19.12 **Lösung**

Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcl} -2\sqrt{x} & + & 3y^2 & & & = & 0{,}23 \\ 4x\sqrt{x} & - & 5y & & & = & 0{,}824 \\ z^3 & + & 6z^2 & + & 5z & = & 14{,}091 \end{array}$$
mit dem Newtonverfahren und dem Startwert $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$!

Vektoranalysis

Aufgabe 19.13 **Lösung**

Ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ heißt **Potenzialfeld**, wenn es Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{x})$ (d.h. einer skalarwertigen Funktion eines Vektors) ist, d.h. $\vec{u} = \operatorname{grad} U = \nabla U$ gilt.

Das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$ ist ein Potenzialfeld. Ermitteln Sie ein Potenzial durch sukzessive Integration nach dx (d.h. $U(x,y,z) = \int \frac{\partial U}{\partial x} \mathrm{d}x + C(y,z)$), dy und dz !

Aufgabe 19.14 **Lösung**

Das Potenzial $U(\vec{x})$ eines konservativen Feldes $\vec{F}(\vec{x})$ hänge nur vom Abstand vom Koordiantenursprung ab: $U(\vec{x}) = f(\|\vec{x}\|)$, wobei $f(r)$ eine differenzierbare Funktion sei. Bestimmen Sie $\vec{F}(\vec{x})$!

Aufgabe 19.15 **Lösung**

Berechnen Sie die Divergenz und Rotation folgender Vektorfelder:

a) $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, b) $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -z \end{pmatrix}$, c) $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$!

Welche der Felder sind quellen- bzw. wirbelfrei?

Aufgabe 19.17 **Lösung**

Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{\|\vec{x}\|}$!

Aufgabe 19.18 **Lösung**

Untersuchen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ -2xyz^2 \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit!

Aufgabe 19.19 **Lösung**

Untersuchen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \sin z \\ \sin x \cos y \sin z \\ \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit!
Handelt es sich um ein Potenzialfeld? Bestimmen Sie ggf. sein Potenzial!

Aufgabe 19.21 **Lösung**

Zeigen Sie, dass das Feld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z \\ \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + z\cos yz \\ y\cos yz - x \end{pmatrix}$ wirbelfrei ist und berechnen Sie sein Potenzial!

Aufgabe 19.22 **Lösung**

In einem Rohr, dessen Achse die y–Achse und dessen Durchmesser $2R$ ist, ströme eine Flüssigkeit nach $\vec{v} = (R^2 - x^2 - z^2)\,\vec{j}$. Veranschaulichen Sie die Strömung durch Pfeile und zeigen Sie, dass sie quellen-, aber nicht wirbelfrei ist!

Aufgabe 19.23 **Lösung**

Betrachtet wird das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 \\ -2xy/(x^2+y^2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2+y^2 \geq 1$.

Zeigen Sie, dass es sich dabei bis auf einen konstanten Faktor um die in Aufgabe 19.3 beschriebene Kreiszylinderumströmung handelt und dass diese quellen- und wirbelfrei ist!

Aufgabe 19.24 **Lösung**

Berechnen Sie die Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, veranschaulichen Sie es durch Pfeile und zeichnen Sie das Feldlinienbild!

Aufgabe 19.26 **Lösung**

Sei $f(x,y,z) = 1 - 2x^2 - 3y^2$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$!

Aufgabe 19.27 **Lösung**

Sei U ein Skalar- und $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die „Produktregel“
$\operatorname{div}(U\vec{v}) = \operatorname{grad} U \cdot \vec{v} + U \operatorname{div}\vec{v}$!

20 Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

Ebene Bereichsintegrale

Aufgabe 20.1 **Lösung**

Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$. Berechnen Sie $\iint\limits_B (x+y^3)\,\mathrm{d}b$!

Aufgabe 20.2 **Lösung**

a) Skizzieren Sie den Bereich $B = \{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3-2x\}$!
b) Berechnen Sie $\iint\limits_B x^2 y\,\mathrm{d}b$!

Aufgabe 20.3 **Lösung**

Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt der mit Masse der Dichte 2 belegten Fläche, die von $y=\sqrt{x}$, $y=0$ und $x+y=2$ begrenzt wird!

Aufgabe 20.4 **Lösung**

Ermitteln Sie den Schwerpunkt der gleichmäßig mit Masse belegten Fläche, die von der Parabel $y=x^2$ und der Gerade $y=4x$ begrenzt wird!

Aufgabe 20.5 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt und den Schwerpunkt der von $y=x^2$ und $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$ begrenzten Fläche!

Hinweis: Zur Ausführung der Integration ist die Formel $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \implies \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ nützlich.

Aufgabe 20.6 **Lösung**

Integrieren Sie $f(x,y) = xy^2$

a) über dem Rechteck mit den Eckpunkten $(-1,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$ und $(-1,2)$,
b) über der von der Parabel $y = x^2$, der Gerade $x = 2$ und der x-Achse begrenzten Fläche sowie
c) über der von der Parabel $x = y^2$, der Gerade $y = 2$ und der y-Achse begrenzten Fläche!

Aufgabe 20.7 **Lösung**

Integrieren Sie $f(x,y) = x+y^2$ über dem Gebiet,

a) das von der Parabel $4x=y^2$ und von der Gerade $x=4$ begrenzt wird!
b) das von der Parabel $4x=y^2$ und von der Gerade $y=2x-12$ begrenzt wird!

Aufgabe 20.8 **Lösung**

Berechnen Sie $\iint\limits_B \frac{x}{y}\,\mathrm{d}B$, wobei das Gebiet B durch $y=x^2$ und $x=y^2$ begrenzt sei!

Aufgabe 20.9 **Lösung**

B sei das Parallelogramm mit den Eckpunkten $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(2,7)$ und $D(1,5)$. Stellen Sie das Integral $\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ so dar, dass

a) zunächst nach y bzw.
b) zunächst nach x

integriert wird!

Aufgabe 20.10 **Lösung**

Stellen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ so um, dass zunächst nach x und dann nach y integriert wird!

Aufgabe 20.11 **Lösung**

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z=0$ und $y+z=2$ sowie vom parabolischen Zylinder $y=x^2$ begrenzt wird!

Räumliche Bereichsintegrale

Aufgabe 20.12 **Lösung**

Ermitteln Sie die Masse des mit Masse der Dichte $\rho(x,y,z)=x+y+z$ versehenen Einheitswürfels $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x,y,z\le 1\}$!

Aufgabe 20.13 **Lösung**

Berechnen Sie $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^3 \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$!

Variablensubstitution in Bereichsintegralen

Aufgabe 20.14 **Lösung**

Integrieren Sie die Funktion $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ über dem Einheitskreis, indem Sie zunächst die kartesischen durch Polarkoordinaten substituieren!

Aufgabe 20.15 **Lösung**

Die obere (d.h. oberhalb der x–Achse gelegene) Halbkreisfläche mit Radius 4 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y)=40-x^2-y^2-3y$ belegt. Ermitteln Sie seine Masse!

Aufgabe 20.16 **Lösung**

Berechnen Sie $\iint\limits_B \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}b$, wobei B durch die Kreise $x^2+y^2=\pi^2$ und $x^2+y^2=4\pi^2$ begrenzt sei!

Aufgabe 20.17 **Lösung**

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von der Einheitskreisfläche der kartesischen x-y-Ebene, dem Kreiszylinder $x^2+y^2=1$ und vom Paraboloid $z=3-x^2-y^2$ begrenzt wird!

Aufgabe 20.18 **Lösung**

Bekanntlich hat die Einheitskugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi$. Verifizieren Sie dies mit Hilfe eines Doppelintegrals!

Aufgabe 20.20 **Lösung**

Ein Rotationskörper wird vom Paraboloid $z=24-x^2-y^2$ und vom Kegel $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzt.

a) In welcher Höhe gegenüber der x-y-Ebene hat der Körper seinen maximalen Durchmesser, wie groß ist dieser Durchmesser?
b) Skizzieren Sie den Körper!
c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers!

Aufgabe 20.21 **Lösung**

Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des gleichmäßig mit Masse der Dichte 1 belegten Körpers, der von dem Paraboloid $z=3-x^2-y^2$ und der Ebene $z=0$ begrenzt wird!

Hinweis: Der Schwerpunkt des Körpers K ist $\left(\frac{\iiint\limits_K x\rho\,\mathrm{d}V}{m}, \frac{\iiint\limits_K y\rho\,\mathrm{d}V}{m}, \frac{\iiint\limits_K z\rho\,\mathrm{d}V}{m}\right)$.

Für die Integration ist ein Übergang zu Zylinderkoordinaten zweckmäßig.

Aufgabe 20.22 **Lösung**

Der von den Flächen $z=0$, $x^2+y^2=1$ und $z=2+\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzte Körper bestehe aus Material der Dichte $\rho(x,y,z)=\begin{cases}2-z, & 0\le z\le 1\\ 1, & 1<z\le 2+\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$.

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie sein Volumen und seine Masse!

Aufgabe 20.23 **Lösung**

Die obere (d.h. oberhalb der x–y–Ebene gelegene) Halbkugel (Körper) mit Radius 2 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y,z)=3-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ belegt. Ermitteln Sie ihre Masse!

Aufgabe 20.24 **Lösung**

Berechnen Sie die Masse der mit Material der Dichte $\rho(x,y,z)=30-x^2-y^2-z^2$ belegten Kugel (Körper) mit Radius 5 um den Koordinatenursprung!

Aufgabe 20.26 **Lösung**

Sei V der von $x^2+y^2+z^2=z$ begrenzte Körper.

a) Skizzieren Sie den Körper!
b) Geben Sie die Gleichung der Oberfläche des Körpers in Kugelkoordinaten an!
Hinweis: Die Kugelkoordinaten sind wie üblich auf den Koordinatenursprung des gegebenen kartesischen Koordinatensystems zu beziehen.
c) Beschreiben Sie den Körper in Kugelkoordinaten!
d) Berechnen Sie $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$!

Aufgabe 20.27 **Lösung**

Durch die Gleichung $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ wird in kartesischen Koordinaten eine „Lemniskate“ beschrieben.

a) Stellen Sie die Lemniskate durch eine Funktion $r=r(\varphi)$ in Polarkoordinaten dar!
Hinweis: $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$
b) Skizzieren Sie die Lemniskate!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Lemniskate eingeschlossenen Fläche!

Aufgabe 20.28 **Lösung**

Sei $a>0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des im I. Quadranten gelegenen Teils der von der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ eingeschlossenen Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals und der Substitution $x=r\cos^3\varphi$, $y=r\sin^3\varphi$!

Hinweis: Die Stammfunktion von $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ kann besseren Formelsammlungen entnommen werden. Alternativ ist eine Rückführung auf Grundintegrale unter Verwendung der Formeln $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ möglich!

Aufgabe 20.29 **Lösung**

Berechnen Sie den Inhalt der von $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$ $(a>0,\ b>0)$, $x=0$ und $y=0$ begrenzten Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals und der Substitution $x=a\,r\cos^8\varphi$, $y=b\,r\sin^8\varphi$!

Aufgabe 20.30 **Lösung**

Über dem I. Quadranten wird die Variablensubstitution $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\sin^2\varphi$ betrachtet.

a) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung von r und φ aus x und y an!
b) Aus welchem Bereich müssen r und φ gewählt werden, um den I. Quadranten einschließlich seiner Ränder vollständig und bis auf den Koordinatenursprung eindeutig zu beschreiben?
c) Geben Sie die Substitutionsformel für Bereichsintegrale für diese Variablensubstitution an!
d) Berechnen Sie mit dieser Formel den Flächeninhalt des von $y=0$, $x+y=1$ und $x=0$ begrenzten Dreiecks!

Kurvenintegrale 1. Art

Aufgabe 20.31 **Lösung**

Sei C der Geradenabschnitt von $(0,0)$ nach $(1,2)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art $\int\limits_C \sqrt{8x^2+3y^2}\,\mathrm{d}l$!

Aufgabe 20.32 **Lösung**

Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art von $U(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+13}$ über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(3,3,-3)$!

Aufgabe 20.33 **Lösung**

Sei C der Abschnitt der Spirale $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2\pi$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}l$!

Aufgabe 20.34 **Lösung**

Berechnen Sie die Bogenlängen folgender Kurven:

a) $x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3,\quad 0 \le t \le 3,$

b) $y = \sqrt{x^3},\quad 0 \le x \le \frac{4}{3},$

c) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \ a > 0,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(im I. Quadranten gelegener Teil der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$) !

Aufgabe 20.35 **Lösung**

Berechnen Sie die Länge von

a) $y(x) = 1 - \ln\cos x$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ und von

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t \\ \mathrm{e}^t\sin t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2$!

Aufgabe 20.37 **Lösung**

Gegeben sei die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2\cos t \\ t^2\sin t \\ 2t \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Länge des Kurvensegments für $0 \le t \le \pi$!

b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{x}(\pi)$ an!

Aufgabe 20.38 **Lösung**

Bestimmen Sie die Länge der Kurve $x = t - \sin t \cos t$, $y = 1 - \cos^2 t$, $z = 2 \sin t$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$!

Aufgabe 20.39 **Lösung**

Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der bei der Rotation der Astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi$ um die x-Achse entsteht!

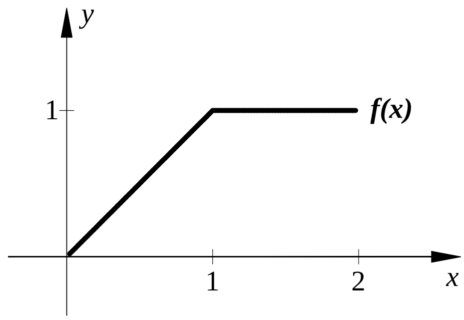
Aufgabe 20.40 **Lösung**

Die Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$ sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 1 + y^2$ belegt. Berechnen Sie die Masse der Kreislinie!

Aufgabe 20.41 **Lösung**

Über dem Intervall $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, ihr Graph werde als Kurve C bezeichnet.

Die Kurve C sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 1 + x + y$ belegt. Berechnen Sie ihre Masse!



Aufgabe 20.42 **Lösung**

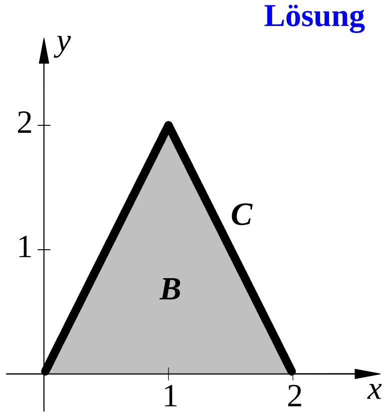
Berechnen Sie den Schwerpunkt des im I. Quadranten liegenden Sektors des Einheitskreises sowie den Schwerpunkt der Berandungskurve des Kreissektors (geschlossene Kurve)!

Aufgabe 20.43 **Lösung**

Über dem Intervall $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\}$ sei die in der Abbildung fett dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, ihr Graph werde als Kurve C bezeichnet, die von ihr und der x-Achse begrenzte Fläche werde mit B bezeichnet.

a) Die Kurve C sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 2 - x + y$ belegt. Berechnen Sie ihre Masse!

b) Die Fläche B sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 2 - x + y$ belegt. Berechnen Sie ihre Masse!



Aufgabe 20.44 **Lösung**

In einem Gelände der Höhe $h(x,y) = 400 - \dfrac{x^2 + y^2}{2500}$ wird vom Berggipfel bei $(x,y) = (0,0)$ zum auf Höhenniveau 0 befindlichen Meer längs $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\, t \cos t \\ 100\, t \sin t \end{pmatrix}$, $t \ge 0$, eine Straße gebaut. Beschreiben Sie den Straßenverlauf durch eine dreidimensionale Vektorfunktion und berechnen Sie die Länge der Straße!

Hinweis: $\int \sqrt{t^2 + a^2}\, \mathrm{d}t$ kann Formelsammlungen entnommen werden.

Kurvenintegrale 2. Art

Aufgabe 20.46 **Lösung**

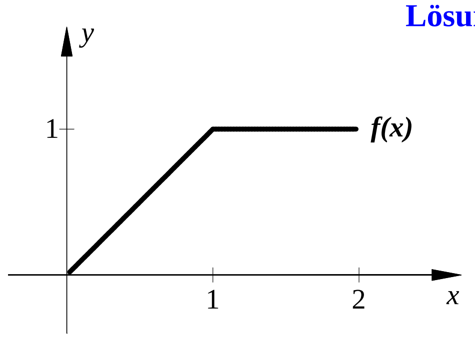
Gegeben seien die Punkte $A(4,2)$, $B(2,0)$ und $O(0,0)$ sowie die geradlinigen Wege C_1 von O nach A und C_2 von O über B nach A. Berechnen Sie für die Kraftfelder

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix}$ und b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 auf diesen Wegen von O nach A zu bewegen! Welches der Felder ist konservativ? Geben Sie für dieses auch die potenzielle Energie an!

Aufgabe 20.47 **Lösung**

Über dem Intervall $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, ihr Graph werde als Kurve C bezeichnet.



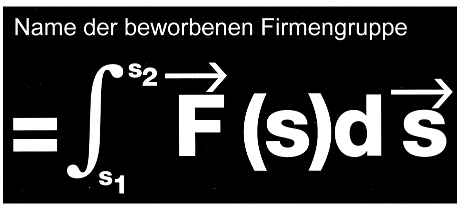
Berechnen Sie für die Kraftfelder

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix}$ und b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

welche Arbeit erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 längs der Kurve C von $(0,0)$ nach $(2,1)$ zu bewegen! Welches der Felder ist konservativ? Geben Sie für dieses auch die potenzielle Energie an!

Aufgabe 20.48 **Lösung**

Vor einiger Zeit lag in der Mensa ein Magazin aus, auf dessen Rücktitel eine Firmengruppe mit nebenstehender Darstellung warb. Kommentieren Sie diese Darstellung und erläutern Sie sie jemandem, der von Mathematik weniger versteht als Sie!



Aufgabe 20.49 **Lösung**

a) Untersuchen Sie die Vektorfelder $\vec{u}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1+yz \\ 1+zx \\ 1+xy \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (x+1)\,yz \\ (y+1)\,zx \\ (z+1)\,xy \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit! Handelt es sich um Potenzialfelder? Bestimmen Sie im Falle der Existenz das Potenzial!

b) Berechnen Sie für die beiden Felder das Kurvenintegral 2. Art von $\vec{u}_i$ über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(1,1,1)$. Sind diese Kurvenintegrale wegunabhängig?

Aufgabe 20.51 **Lösung**

Seien C_1 bzw. C_2 die in der oberen Halbebene gelegene Bogenstücke des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ bzw. von $(1,1)$ nach $(-1,1)$.

a) Berechnen Sie $\int\limits_{C_1} y\,\mathrm{d}l$ und $\int\limits_{C_2} y\,\mathrm{d}l$!

b) Berechnen Sie $\int\limits_{C_1} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ und $\int\limits_{C_2} \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$!

c) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Punkt der Masse 1 in dem Kraftfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ auf C_1 von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ bzw. auf C_2 von $(1,1)$ nach $(-1,1)$ zu bewegen? Argumentieren Sie, wenn das möglich ist, sowohl mit dem Kurvenintegral aus auch mit dem Potenzial des Kraftfeldes!

d) Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = y$ belegten Bogenstücks C_1 bzw. C_2 !

Aufgabe 20.52 **Lösung**

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$ ein Potenzialfeld ist!

b) Berechnen Sie das Potenzial des Feldes!

c) Das gegebene Feld $\vec{F}(x,y,z)$ sei ein Kraftfeld. Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, einen Punkt der Masse 1 in diesem Feld von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$ zu bewegen!

Aufgabe 20.54 **Lösung**

Die Kurve C verbinde die Punkte $(0,0)$ und $(0,2)$. Sie verlaufe vom Koordinatenursprung zunächst längs der x–Achse bis zum Punkt $(2,0)$ und dann längs des Kreises mit Radius 2 um den Koordinatenursprung zum Punkt $(0,2)$.

a) Die Kurve sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$ belegt. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt!

b) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Punkt der Masse 1 in dem Kraftfeld $\vec{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2+2 \end{pmatrix}$ auf C von $(0,0)$ nach $(0,2)$ zu bewegen? Argumentieren Sie, wenn das möglich ist, sowohl mit dem Kurvenintegral als auch mit dem Potenzial des Kraftfeldes!

c) Beantworten Sie die bei b) gestellte Frage für das Feld $\vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+2 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 20.55 **Lösung**

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 in einem Kraftfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2-x \end{pmatrix}$ längs des entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreises vom Punkt $(-1,0)$ zum Punkt $(1,0)$ zu bewegen!

Aufgabe 20.56 **Lösung**

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 in einem Kraftfeld

a) $\vec{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2-x \end{pmatrix}$, b) $\vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ 2+x \end{pmatrix}$

längs der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ vom Punkt $(0,-2)$ zum Punkt $(0,2)$ zu bewegen! Führen Sie die Berechnung, wenn es möglich ist, sowohl über das Potenzial als auch mit einem Kurvenintegral aus! Liegt Wegunabhängigkeit vor?

Hinweis: Für die Integration empfiehlt sich die Verwendung einer Parameterdarstellung der Ellipse und der Formel $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$.

Aufgabe 20.57 **Lösung**

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um einen Punkt der Masse 1 im Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$ von $(0,0,0)$ nach $(1,2,3)$ zu bewegen!

Oberflächenintegrale 1. und 2. Art

Aufgabe 20.58 **Lösung**

Berechnen Sie die Integrale

a) $\iint\limits_S z\sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}s$ und

b) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

über der Fläche $S = \{(x,y,z) : z = xy, 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$!

Aufgabe 20.59 **Lösung**

Berechnen Sie die Integrale

a) $\iint\limits_S \sqrt{1+2z}\,\mathrm{d}S$ und

b) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (4x+3y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

über der Fläche $S = \{(x,y,z) : z = \frac{x^2+y^2}{2}, -x \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$!

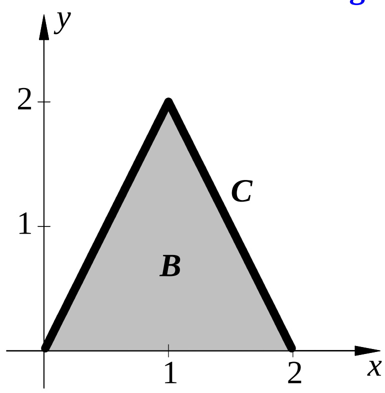
Aufgabe 20.60 **Lösung**

Sei B die Vierecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,2)$ in der x-y-Ebene. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8-x-4y, (x,y) \in B\}$!

Aufgabe 20.61 **Lösung**

Über dem Intervall $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 2\}$ sei die in der Abbildung fett dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, die von ihr und der x–Achse begrenzte Fläche werde mit B bezeichnet.

Über B sei durch $S = \{(x,y,z) : z = \varphi(x,y) = 2-x+y, (x,y) \in B\}$ die Fläche S beschrieben. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche S mit Hilfe eines Oberflächenintegrals!



Aufgabe 20.62 **Lösung**

Sei B die Fläche des Kreises mit Radius $2\sqrt{3}$ um den Koordinatenursprung in der x–y–Ebene und S die darüber durch $z = 12-x^2-y^2,\ (x,y) \in B$ beschriebene Fläche.

a) Berechnen Sie $\iint\limits_S \mathrm{d}S$!

b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des durch die Flächen S und B begrenzten Körpers!

Aufgabe 20.63 **Lösung**

Sei F der im I. Oktanten gelegene Teil der Ebene $x+y+z=1$ und S die Oberseite von F.

a) F sei mit Masse der Dichte $\dfrac{1}{(1+x+z)^2}$ belegt. Berechnen Sie die Masse der Fläche!

b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral 2. Art $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$!

Aufgabe 20.64 **Lösung**

Betrachtet wird der von den Flächen $z=0\ (x^2+y^2 \le 4)$, $z=18-2x^2-2y^2$ und $x^2+y^2=4$ begrenzte Körper.

a) Skizzieren Sie den Körper!

b) Berechnen Sie sein Volumen!

c) Berechnen Sie seine Oberfläche!

d) Der Körper bestehe aus Material der Dichte $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{3+\sqrt{x^2+y^2}}$. Berechnen Sie seine Masse!

Aufgabe 20.66 **Lösung**

Betrachtet wird der von der Fläche $z=2-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$ und von der x-y-Ebene begrenzte Körper.

a) Skizzieren Sie den Körper!

b) Berechnen Sie sein Volumen!

c) Bei dem Körper handele es sich um einen Hohlkörper, dessen Außenhaut aus Material der Dichte $\rho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+y^2}}}}, & z>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}, & z=0 \end{cases}$ besteht. Berechnen Sie seine Masse!

Aufgabe 20.67 **Lösung**

Eine Flüssigkeit fließe mit einer Geschwindigkeit von $-2.5 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dfrac{\mathrm{dm}}{\mathrm{s}}$

a) durch die Fläche S_1: $z = \varphi(x,y) = 0,\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ (jeweils in dm),

b) durch die Fläche S_2: $z = \varphi(x,y) = (x-3)^2,\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ (jeweils in dm).

Berechnen Sie mit Hilfe des Oberflächenintegrals 2. Art, welche Flüssigkeitsmenge pro Sekunde durch die Fläche S_i $(i=1,2)$ strömt!

Aufgabe 20.68 **Lösung**

Eine Flüssigkeit fließe mit einer Geschwindigkeit von $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ durch die Fläche $z=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $x^2+y^2 \leq 1$, alle Koordinaten in m.

a) Veranschaulichen Sie die Situation zeichnerisch!
b) Wieviel Liter fließen pro Sekunde durch die Fläche?

Aufgabe 20.69 **Lösung**

Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über die Oberseite des Teils des Paraboloids $x^2+y^2+z=1$, für den $z \geq 0$ gilt!

Aufgabe 20.70 **Lösung**

Gegeben sei die Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$. Als obere bzw. untere Halbkugel sollen die Teile der Kugel bezeichnet werden, für die $z \geq 0$ bzw. $z \leq 0$ gilt. Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

a) über der Oberseite der oberen Halbkugel,
b) über der Oberseite der unteren Halbkugel,
c) über der Unterseite der unteren Halbkugel,
d) über der Außenseite der Kugel!

Integralsätze

Aufgabe 20.71 **Lösung**

Berechnen Sie das Integral $\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über der Außenseite der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ (vgl. Aufgabe 20.70) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes!

Aufgabe 20.72 **Lösung**

Sei S die Oberfläche des Körpers, der von $x^2+y^2+z=1$ und der x-y-Ebene begrenzt wird. Berechnen Sie das Integral $\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes! Wieso stimmt das Ergebnis mit dem von Aufgabe 20.69 überein?

Aufgabe 20.73 **Lösung**

Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\oiint\limits_S (3y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über der Außenseite des Zylinders $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x^2+y^2 \leq 4, \ -1 \leq z \leq 2\right\}$!

Aufgabe 20.74 **Lösung**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x-2z \\ 3z-4x \\ 5x+\ y \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche des Tetraeders mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$!

Aufgabe 20.75 **Lösung**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x^3+xz \\ y^3+yz \\ z^3+z^2 \end{pmatrix}$ durch die Kugel mit dem Radius 3 um den Koordinatenursprung!

Aufgabe 20.76 **Lösung**

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ das Integral $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ über der Oberseite des oberen Halbellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$!

b) Wenden Sie auf das berechnete Integral den Gaußschen Integralsatz an und geben Sie mit Hilfe des Ergebnisses das Volumen des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ an!

Aufgabe 20.77 **Lösung**

Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$ über dem Dreieck mit den Eckpunkten $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ und $(0,0,a)$ mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes!

Aufgabe 20.78 **Lösung**

Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} y-x \\ 2x-y \\ z \end{pmatrix}$ über dem Rand des im I. Quadranten liegenden Sektors der Kreisfläche mit Radius 3 um den Koordinatenursprung in der x–y–Ebene!

Aufgabe 20.79 **Lösung**

Sei C eine geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass das Integral $\oint\limits_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ gleich Null ist!

Aufgabe 20.80 **Lösung**

Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ über dem in der Richtung $ABCA$ durchlaufenen Dreieck mit den Eckpunkten $A(1,2,1)$, $B(3,10,-2)$ und $C(1,5,2)$

a) durch Integration längs des Randes,

b) mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes!

21 Differenzialgleichungen

Begriff und Richtungsfelder

Aufgabe 21.1 **Lösung**

Ein Fahrzeug hat nach 3 Stunden 250 km zurückgelegt und fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h. Welche Strecke hat es nach 3 Stunden 15 Minuten zurückgelegt, wenn es die angegebene Geschwindigkeit beibehält.

Aufgabe 21.2

Skizzieren Sie die Richtungsfelder der Differenzialgleichungen $y'(x)=1$ und $y'(x)=x$ und stellen Sie in diesen die Lösungsmengen dieser Differenzialgleichungen dar!

Aufgabe 21.3 **Lösung**

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung $y'(x)=\dfrac{1}{x}$ und stellen Sie in diesem die Lösungsmenge dieser Differenzialgleichung dar!

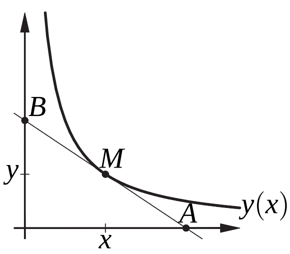
Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 21.4

a) Beschreiben Sie die Kurve $y=y(x)$, für die der durch die Schnittpunkte A und B mit den Koordinatenachsen begrenzte Abschnitt einer beliebigen Kurventangente vom jeweiligen Berührungspunkt $M(x,y)$ halbiert wird, durch eine Differenzialgleichung!

b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld dieser Differenzialgleichung!

c) Lösen Sie die Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen!



d) Bestimmen Sie die Kurve mit der in a) beschriebenen Eigenschaft, die durch den Punkt $(2,2)$ geht!

Aufgabe 21.5

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'(x)=2xy,\ y(0)=3$!

Aufgabe 21.6 **Lösung**

Lösen Sie die Randwertaufgabe $y''(x)=1,\ y(0)=1,\ y(1)=3$!

Aufgabe 21.7

In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100°C erhitzt wurde, bei einer Außentemperatur von 20°C auf 25°C ab, wenn er sich in 10 Minuten auf 60°C abkühlt und die Abkühlgeschwindigkeit proportional der Temperaturdifferenz von Körper und Außentemperatur ist?

Aufgabe 21.8 **Lösung**

An einer bestimmten Stelle wurde nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl eine Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop von 200 kBq/m^2 gemessen. Ein Jahr später wurde an der gleichen Stelle eine Belastung von noch 195,43 kBq/m^2 gemessen. Bekannt ist, dass die Änderungsgeschwindigkeit der Radioaktivität proportional zu ihrer Höhe ist. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Belastung auf 150 kBq/m^2 gefallen sein wird!

Aufgabe 21.9 **Lösung**

Lösen Sie die Differenzialgleichungen des exponentiellen und logistischen Wachstums

a) $y'(x) = a\,y(x)$ und b) $y'(x) = a\,y(x)\,(b-y(x))$

durch Trennung der Veränderlichen!

Hinweis: $\dfrac{1}{x\,(c-x)} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{c-x}\right)$

Aufgabe 21.10 **Lösung**

Ein Kapital, das am Jahresende 2004 einen Stand von 10 000 € hatte, entwickelt sich nach $\dot{K}(t) = 0{,}035\,K(t)$, wobei t die Zeit in Jahren sei. Ermitteln Sie die Funktion $K(t)$ sowie den effektiven Jahreszins!

Aufgabe 21.11 **Lösung**

Zur Untersuchung der zeitlichen Entwicklung des Ausstattung von Haushalten mit Fernsehern soll der Einfachheit halber angenommen werden, dass der Ausstattungsgrad maximal 96 % erreichen kann, 1965 48 % betrug und damals jährlich um 4,8 % wuchs.

Das jährliche Wachstum der prozentualen Ausstattung y wächst mit steigendem Ausstattungsgrad (je mehr Nachbarn einen Fernseher haben, desto schneller will man auch einen haben) und fällt mit zunehmender Sättigung. Deshalb soll angenommen werden, dass es proportional zu $y\,(96-y)$ ist. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung von y und skizzieren Sie diese!

Aufgabe 21.12 **Lösung**

Gesucht ist die Kurve $y = f(x)$, die durch den Punkt $(2, 16)$ geht und für die in jedem Punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x = \bar{x}$ und $y = f(\bar{x})$ begrenzte Rechteck viermal so groß ist wie die von den Koordinatenachsen, der Gerade $x = \bar{x}$ und der Kurve begrenzte Fläche.

Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$.

Aufgabe 21.13

Lösen Sie die Differenzialgleichungen

a) $y' = y^2$,
b) $y' = (y-5)\cos x$,
c) $y' = (2y+1)\cot x$
d) $x^2y' + y^2 = 0$!

Aufgabe 21.14

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{y^2}{x^2}$!

Aufgabe 21.16

Lösung

Lösen Sie die Differenzialgleichung $(1+y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$!

Aufgabe 21.19

Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = (\cos x^2)\,xy$!

Aufgabe 21.20

Lösung

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$!

Hinweis: Substitution: $t(x) = \frac{y(x)}{x}$

Aufgabe 21.21

Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{(x+29)\,y}{x^2+3x-28}$!

Aufgabe 21.22

Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{(9x-2)\,y}{x^2-x-6}$!

Aufgabe 21.23

Lösung

Für die Geschwindigkeit des freien Falls eines Körpers der Masse m gilt unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Differenzialgleichung $\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$, wobei g die Erdbeschleunigung und k die Reibungskonstante bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein Körper fallengelassen.

a) Geben Sie die Geschwindigkeit des Körpers als Funktion der Zeit an!
b) Welchen Wert kann die Geschwindigkeit nicht überschreiten, wenn $m = 50\,\mathrm{kg}$ und $k = 10\,\mathrm{kg/s}$ beträgt?

Aufgabe 21.24

Lösung

Gegeben sei die Differenzialgleichung $x^2y'' + xy' - y = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $y_1(x) = x$ eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung ist!
b) Lösen Sie davon ausgehend die Differenzialgleichung allgemein durch Reduktion der Ordnung mit der Substitution $y(x) = y_1(x)u(x)$ und Lösung der sich dadurch ergebenden Differenzialgleichung für u' !

Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 21.25

Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$,

b) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$,

c) $y' - y\tan x = \cos x$!

Aufgabe 21.26 Lösung

Ermitteln Sie für die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung $y' + y = x e^x$ die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung, für die $y(1) = 0$ gilt!

Aufgabe 21.27 Lösung

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'(x) - y(x)\cos x = \sin x \cos x$!

Aufgabe 21.28

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + 2xy = 4x\, e^{x^2}$!

Aufgabe 21.29 Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + \frac{x}{x^2+3}y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$!

Aufgabe 21.31 Lösung

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' - 2\frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 4$!

Aufgabe 21.32 Lösung

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' - \frac{y}{2x+1} = 1,\ y(12) = 50$!

Homogene lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 21.35 Lösung

Lösen Sie mithilfe des Ansatzes $y(x) = Ce^{\lambda x}$ folgende linearen homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y' - 2y = 0$,

b) $y'' - 5y' + 6y = 0$,

c) $y'' + \omega^2 y = 0 \ (\omega > 0)$!

Hinweis: Wie bei der Lösung homogener linearer Gleichungssysteme ist jede Linearkombination, speziell also auch die Summe von Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung wieder Lösung dieser Differenzialgleichung. Nutzen Sie dies im Falle c), um reellwertige Lösungen der Differenzialgleichung anzugeben!

Aufgabe 21.36 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden homogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0,$
b) $y'' - 4y' + 13y = 0,$
c) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$
d) $y^{(4)} - 16y = 0,$
e) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$!

Aufgabe 21.38 **Lösung**

Lösen Sie die Differenzialgleichungen

a) $y^{(6)} - 5y^{(5)} + 33y^{(4)} - 29y''' = 0$ und
b) $y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$!

Aufgabe 21.39 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

a) $y''' - 3y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = 4,$
b) $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0,\ \ s(0) = \dot{s}(0) = 1$!

Aufgabe 21.40 **Lösung**

Lösen Sie die Randwertaufgabe $\ddot{s} + 2\dot{s} + 2s = 0,\ \ s(0) = s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$!

Aufgabe 21.42 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe
$y'''(x) - 7y''(x) - 18y'(x) = 0,\ \ y(0) = -29,\ \ y'(0) = 49,\ \ y''(0) = 1$!

Aufgabe 21.43 **Lösung**

Ermitteln Sie die Lösungen folgender Randwertaufgaben, sofern diese existieren:

a) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$

d) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$

e) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$!

Aufgabe 21.44 **Lösung**

Lösen Sie die Randwertaufgabe $y''(x) + 14y'(x) + 53y(x) = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 1$!

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 21.46

Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

a) $y' - y = 3$,
b) $y' + 3y = 9x^2 + 7$,
c) $y' - 2y = 3\sin x - 4\cos x$,
d) $y' - 2y = \cos 2x$!

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

Aufgabe 21.47 Lösung

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y' = -2y + 3$, b) $y' = -2y + 3\cos 4x$!

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

Aufgabe 21.48 Lösung

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y' = y + 2\sin 2x - \cos 2x$, b) $y' = y + \sin 2x$!

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

Aufgabe 21.49

In einem elektrischen Stromkreis befinden sich in Reihenschaltung eine Spule mit der Selbstinduktionsspannung $U_L(t) = LI'(t)$ und ein Widerstand mit dem Spannungsabfall $U_R(t) = RI(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde

a) eine Gleichspannung U bzw.
b) eine Wechselspannung $U \sin \omega t$

angelegt. Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $I(t)$ jeweils

(i) (aufwändig) mit Variation der Konstanten und
(ii) (weniger aufwändig) mit Lösungsansatz in Form der rechten Seite!

Aufgabe 21.50 Lösung

Wir betrachten eine Volkswirtschaft. Sei $t \geq 0$ die Zeit, $y(t)$ das Volkseinkommen, $c(t)$ der Konsum und $i(t)$ die Investitionen. Dann lautet das Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding:

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t) + i(t) \\ c(t) &= \alpha + \beta y(t) && \alpha \geq 0,\ 0 < \beta < 1 \\ y'(t) &= \gamma i(t) && \gamma > 0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

a) Welche Bedeutung haben die Parameter α, β, γ und y_0 ?
b) Ermitteln Sie $y(t)$!
c) Unter welchen Bedingungen wächst, unter welchen Bedingungen sinkt $y(t)$?

Hinweis: $y_0 - \dfrac{\alpha}{1-\beta} = \dfrac{y(0)-c(0)}{1-\beta}$

d) Ermitteln Sie für den Fall, dass $y(t)$ sinkt, wann überhaupt nichts mehr konsumiert werden kann!

(nach Nollau, V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Teubner. 3. Aufl. 1999, S. 190f.)

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 21.51 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 4y' + 3y = 9x\mathrm{e}^{4x}$,
b) $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{x}$,
c) $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^{2x}$,
d) $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x}$,
e) $y'' - 4y = 8x^3$,
f) $y'' - 2y' = x^2 - x$!

Aufgabe 21.52 **Lösung**

Lösen Sie die Randwertaufgabe $y'' + 9y = \sin x,\ \ y(0) = 2,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$!

Aufgabe 21.53 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

a) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$,
b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$
c) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$,
d) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$,
e) $y'' + 16y = 3\sin 2x$!

Aufgabe 21.55 **Lösung**

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y''(x) - 5y'(x) - 24y(x) = 9\,\mathrm{e}^{-x}$!

Aufgabe 21.56 **Lösung**

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'' + y' - 56y = 56$!

Aufgabe 21.57 **Lösung**

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y''' + y'' - 56y' = 56$!

Aufgabe 21.59 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'' - 6y' - 7y = 24\mathrm{e}^x$, $y(0) = y'(0) = 0$!

Aufgabe 21.60 **Lösung**

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) $y'' + 4y = \sin x$ und
b) $y'' + 4y = \sin 2x$!

Handelt es sich bei den Lösungen um beschränkte Funktionen?

Aufgabe 21.61 **Lösung**

(vgl. Aufgabe 21.60)

a) An einen an einer Feder aufgehängten Massepunkt greife ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine periodisch wirkende äußere Kraft $F \sin t$ an, die bei Vernachlässigung der Dämpfung eine Schwingung nach der Gleichung $\ddot{x}(t) + 4x(t) = F \sin t$ auslöst. Ermitteln Sie die Auslenkung des Massepunktes gegenüber der Gleichgewichtslage!
b) Bei welcher äußeren Kraft würde es für die Gleichung $\ddot{x}(t) + 4x(t) = F(t)$ zur Resonanz kommen? Wieso würde es in diesem Falle zur Zerstörung des Systems kommen?

Aufgabe 21.62 **Lösung**

a) An einen an einer Feder aufgehängten Massepunkt greife ab dem Zeitpunkt $t = 0$ eine periodisch wirkende äußere Kraft $F \sin 5t$ an, die bei Vernachlässigung der Dämpfung eine Schwingung nach der Gleichung $\ddot{x}(t) + 16x(t) = F \sin 5t$ auslöst. Ermitteln Sie die Auslenkung des Massepunktes gegenüber der Gleichgewichtslage!
b) Bei welcher äußerer Kraft würde es für die Gleichung $\ddot{x}(t) + 16x(t) = F(t)$ zur Resonanz kommen? Begründen Sie mit Hilfe des zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung zu verwendenden Ansatzes, dass es in diesem Falle zur Zerstörung des Systems kommen würde! (Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden.)

22 Differenzialgleichungssysteme

Homogene lineare Differenzialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 22.1

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x+8y\\ \dot{y} &= 3x-8y\end{aligned}$

a) direkt,
b) durch Rückführung auf eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für x,
c) durch Rückführung auf eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für y !

Aufgabe 22.2

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x+\ y\\ \dot{y} &= 6x-3y\end{aligned}$!

Aufgabe 22.3 — Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= 8x-\ 6y\\ \dot{y} &= -6x+17y\end{aligned}$!

Aufgabe 22.6 — Lösung

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x+2y\\ \dot{y} &= -\frac{3}{2}x+6y\end{aligned}$!

Aufgabe 22.7

a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems $\begin{aligned}\dot{x} &= -7x+\ y\\ \dot{y} &= -2x-5y\end{aligned}$!

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die $x(0) = y(0) = 1$ gilt!

Aufgabe 22.8 — Lösung

a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems $\begin{aligned}\dot{x} &= -x+4y\\ \dot{y} &= -2x+3y\end{aligned}$!

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die $x(0)=3$ und $y(0)=5$ gilt!

Aufgabe 22.10 — Lösung

Ermitteln Sie die Lösung des Differenzialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= 4x-5y\\ \dot{y} &= 10x+6y\end{aligned}$,

für die $x(0) = 10$ und $\dot{x}(0) = 50$ gilt!

Aufgabe 22.12 **Lösung**

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= x + 5y \\ \dot{y} &= -x - 3y\end{aligned}$!

Aufgabe 22.13

Lösen Sie die folgenden Systeme linearer homogener Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

a) $\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y - z \\ \dot{y} &= -x + y + z \\ \dot{z} &= x - z\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}\dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y\end{aligned}$ c) $\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -x + y + z\end{aligned}$!

Aufgabe 22.14 **Lösung**

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + 4z \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= 2x - z\end{aligned}$!

Aufgabe 22.17 **Lösung**

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$!

Aufgabe 22.18 **Lösung**

Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4x\end{aligned}$!

Aufgabe 22.19 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) + z(t), & x(0) &= 2 \\ \dot{y}(t) &= x(t) + z(t), & y(0) &= 1 \\ \dot{z}(t) &= x(t) + y(t), & z(0) &= 6\end{aligned}$!

Aufgabe 22.20 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\begin{aligned}\dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 3x - 5y \\ \dot{z} &= 2x - 4y + z\end{aligned}$
$x(0) = 3,\ y(0) = -2,\ z(0) = -1$!

Aufgabe 22.22 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \vec{y}(x),\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 22.23 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 2y - z \\ \dot{y} &= 3x - 5y - 3z \\ \dot{z} &= 2x - 4y - z\end{aligned}$
$x(0) = 2,\ y(0) = -2,\ z(0) = -1$!

Inhomogene lineare Differenzialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 22.24 **Lösung**

Lösen Sie das inhomogene System $\begin{aligned}\dot{x} &= -2y + \mathrm{e}^{3t}\\ \dot{y} &= -2x + 4\mathrm{e}^{3t}\end{aligned}$!

Aufgabe 22.25 **Lösung**

Lösen Sie das inhomogene Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= -2y\\ \dot{y} &= -2x + 2\mathrm{e}^{3t}\end{aligned}$!

Aufgabe 22.26 **Lösung**

Lösen Sie das inhomogene System $\begin{aligned}\dot{x} - 2x - 8y &= 5\mathrm{e}^{t}\\ \dot{y} - 3x + 8y &= -18\mathrm{e}^{t}\end{aligned}$!

Aufgabe 22.27

Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - 7y + 6\\ \dot{y} &= 2x - 5y\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - 7y - 3\sin 2t\\ \dot{y} &= 2x - 5y + \sin 2t\end{aligned}$!

Aufgabe 22.28

Wenden Sie die Methode des Lösungsansatzes in Form der rechten Seite auf die Differenzialgleichungssysteme a) $\begin{aligned}\dot{x} &= y + \sin 2t\\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$ und b) $\begin{aligned}\dot{x} &= y + \sin t\\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$ an! Was stellen Sie fest?

Aufgabe 22.29 **Lösung**

Wenden Sie die Methode des Ansatzes vom Typ der rechten Seite auf die Differenzialgleichungssysteme a) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y - 4\\ \dot{y} &= 3x + y - 10\end{aligned}$ und b) $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y - 4\\ \dot{y} &= x + y - 10\end{aligned}$ an! Was stellen Sie fest?

Aufgabe 22.30 **Lösung**

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= -4x - 9y - 1\\ \dot{y} &= 3x + 8y + 2\end{aligned}$!

Aufgabe 22.31 **Lösung**

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem $\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y - 2\\ \dot{y} &= x - 3y + z + 1\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z - 1\end{aligned}$!

Aufgabe 22.33 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\dot{\vec{x}}(t) = \boldsymbol{A}\vec{x}(t) + \vec{F}\sin t$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$!

Aufgabe 22.34

In einem Transformator sollen für den Primärstrom $I_1(t)$ und den Sekundärstrom $I_2(t)$ die Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} &L_1\dot{I}_1(t)+M\dot{I}_2(t)+R_1I_1(t)=U\sin\omega t \quad \text{und}\\ &L_2\dot{I}_2(t)+M\dot{I}_1(t)+R_2I_2(t)=0 \end{aligned}$$

erfüllt sein, wobei L_1 und L_2 die Selbstinduktivitäten der Spulen, M die Wechselinduktivität der Spulen, R_1 und R_2 Ohmsche Widerstände sowie $U\sin\omega t$ die angelegte Primärspannung sei. Stellen Sie das Problem in der Form $\dot{\vec{I}}(t)=\boldsymbol{A}\vec{I}(t)+\vec{c}(t)$ dar und formulieren Sie eine geeignete Anfangswertaufgabe!

(nach Dallmann, H. und Elster, K.-H.: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Band III. Jena: Gustav Fischer 1983, S. 193f. und 605: Übungsaufgabe 8 zu Abschnitt 5.4, dort auch Skizze und Lösung)

23 Laplacetransformation mit Anwendung bei Differenzialgleichungen

Laplacetransformation

Aufgabe 23.1 **Lösung**

Berechnen Sie die Laplacetransformationen von

a) $f(t) = \sin t$ und b) $f(t) = \sinh t$

und geben Sie die Konvergenzhalbebenen an!

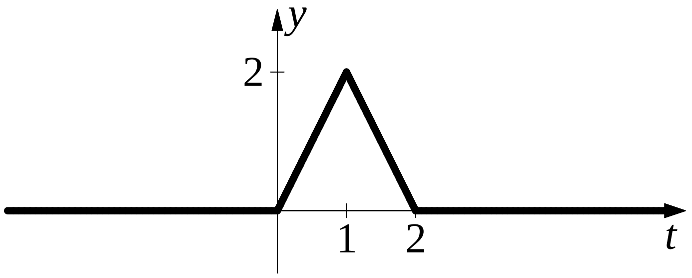
Aufgabe 23.2 **Lösung**

Berechnen Sie die Laplacetransformationen $L(p) = L[f(t)]$ folgender Funktionen mit Hilfe der Eigenschaften der Laplacetransformation:

a) $f(t) = \sin at \quad (a > 0)$,
b) $f(t) = e^{3t} \sin t$,
c) $f(t) = t^2 \sin t$,
d) $f(t) = \cos t = \dfrac{d}{dt} \sin t$,
e) $f(t) = \int\limits_0^t e^{3\tau} \sin \tau \, d\tau$,
f) $f(t) = \int\limits_0^t e^{\tau} \sin(t - \tau) \, d\tau$!

Aufgabe 23.3 **Lösung**

Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $s(t)$:



a) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung von $s(t)$ an!

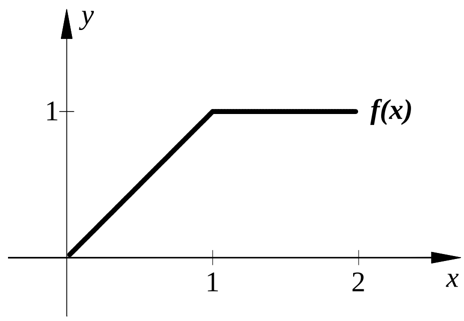
b) Ermitteln Sie $L(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} s(t) \, dt$ durch Berechnung des Integrals!

c) Sei $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$. Berechnen Sie die Laplacetransformation von $s(t)$, indem Sie $s(t)$ in der Form $s(t) = a_1 f(t) + a_2 f(t-1) + a_3 f(t-2)$ mit geeigneten Parametern a_1, a_2 und a_3 darstellen und nur die Beziehungen $L[f(t)] = \dfrac{1}{p^2}$,

$L[k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)]+k_2 L[f_2(t)]$ (Additionssatz) und
$L[f(t-b)] = \mathrm{e}^{-pb} L[f(t)]$ (Verschiebungssatz) ausnutzen!

Aufgabe 23.4 **Lösung**

Über dem Intervall $[0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$ sei die in der Abbildung dargestellte Funktion $f(x)$ definiert, außerhalb dieses Intervalls werde sie durch 0 auf die gesamte reelle Achse fortgesetzt. Berechnen Sie die Laplacetransformation dieser Funktion!



Aufgabe 23.5 **Lösung**

Berechnen Sie die Laplace-Rücktransformationen $f(t) = L^{-1}[L(p)]$ folgender Funktionen mit Hilfe der Eigenschaften der Laplacetransformation:

a) $L(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2+1}$,

b) $L(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$,

c) $L(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$,

d) $L(p) = \dfrac{1}{(p^2+4)^2}$!

Aufgabe 23.6 **Lösung**

Berechnen Sie die Laplace-Rücktransformationen $f(t) = L^{-1}[L(p)]$ von

$L(p) = \dfrac{3p^2-10p+21}{p^3-2p^2+9p-18}$!

Anwendung der Laplacetransformation zur Lösung von Differenzialgleichungen

Aufgabe 23.7 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgaben (vgl. Aufgabe 21.60)

a) $y''+4y = \sin x,\ y(0) = y'(0) = 0$,
b) $y''+4y = \sin 2x,\ y(0) = y'(0) = 0$

mit Hilfe der Laplacetransformation!

Aufgabe 23.8 **Lösung**

Lösen Sie die inhomogenen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) $y''-3y'+2y = \mathrm{e}^{3x}$,

b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$
c) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$,
d) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$,
e) $y'' + 16y = 3\sin 2x$

(vgl. Aufgabe 21.53) mit Hilfe der Laplacetransformation!

Aufgabe 23.9 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y''(x)+36y(x) = 6,\ y(0) = y'(0) = 0$ mit Hilfe der Laplacetransformation!

Aufgabe 23.11 **Lösung**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'' + 64y = 96\cos 4x,\ y(0) = y'(0) = 0$!

24 Numerische Mathematik

Fixpunktiteration

Aufgabe 24.1 **Lösung**

Zur numerischen Lösung der Gleichung $x = \arccos x$ wird auf dem Taschenrechner ausgehend vom Startwert 0.7

(I) fortlaufend die arccos-Taste bzw.
(II) fortlaufend die cos-Taste

gedrückt.

a) Wieso konvergiert das eine Verfahren und das andere nicht?
b) Berechnen Sie mit dem konvergenten Verfahren die Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma! Wie viele Iterationsschritte sind erforderlich?
c) Geben Sie ein schnelleres Iterationsverfahren an! Wie viele Iterationsschritte sind bei diesem erforderlich?

Aufgabe 24.2 **Lösung**

Die Gleichung $f(x) = x - \sin x - 0.25 = 0$ soll numerisch gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die bei der Picarditeration verwendete Funktion $F(x) = x - f(x)$ über dem Intervall $[1.1, 1.3]$ eine Selbstabbildung ist, die der Kontraktionsbedingung genügt!
b) Lösen Sie die Gleichung durch Picarditeration ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$!
c) Lösen Sie die Gleichung mit dem Newtonverfahren ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$!

Aufgabe 24.3 **Lösung**

Die Gleichung $\mathrm{e}^x = 3x$ soll numerisch gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$ über dem Intervall $[0.5, 0.7]$ eine Selbstabbildung ist, die der Kontraktionsbedingung genügt!
b) Ermitteln Sie durch Picarditeration mit $F(x)$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.6$ die Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma genau! Welcher Aufwand ist erforderlich?
c) Geben Sie ein schnelleres Iterationsverfahren an! Wie viele Iterationsschritte sind bei diesem beim Startwert $x_0 = 0.6$ für eine Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma erforderlich?
d) Warum funktioniert eine Picarditeration mit $F(x) = \ln 3x$ nicht?

Bisektion

Aufgabe 24.4 **Lösung**

Lösen Sie die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 0$, die in Aufgabe 12.67 mit dem Newtonverfahren gelöst wurde, mit der Intervallhalbierungsmethode für das Intervall $[-1, 1]$!

Gesamt- und Einzelschrittverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Aufgabe 24.5 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!
b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!
c) Führen Sie je fünf Iterationsschritte mit dem Startvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch und vergleichen Sie mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

Aufgabe 24.7 **Lösung**

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschriften des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens auf!
b) Prüfen Sie die Konvergenz der Verfahren!
c) Bestimmen Sie eine Startnäherung für die Iteration, indem Sie die Nichtdiagonalelemente vernachlässigen!
d) Führen Sie mit diesem Startvektor je zwei Iterationsschritte durch und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung des Gleichungssystems!

Aufgabe 24.8 **Lösung**

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
100x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & = 96 \\
x_1+ & 100x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & = 97 \\
x_1+ & x_2+ & 100x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & = 98 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & 100x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & = 99 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & 100x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & =100 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & 100x_6+ & x_7+ & x_8+ & x_9 & =101 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & 100x_7+ & x_8+ & x_9 & =102 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & 100x_8+ & x_9 & =103 \\
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6+ & x_7+ & x_8+ & 100x_9 & =104
\end{array}$$

soll mit dem Jacobischen Gesamtschrittverfahren iterativ nach der Vorschrift

$$\vec{x}^{(n+1)} = \frac{1}{100}\left(\begin{pmatrix} 96 \\ 97 \\ 98 \\ 99 \\ 100 \\ 101 \\ 102 \\ 103 \\ 104 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}^{(n)} \right)$$

gelöst werden.

a) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!

b) Wählen Sie einen geeigneten Startvektor und führen Sie mit diesem einen Schritt des Iterationsverfahrens aus!

Aufgabe 24.9 **Lösung**

In einer Stadt gibt es 100 Bäcker B_i $(i = 1, \ldots, 100)$. Jeder von ihnen verkauft in seinem Laden x_i Brötchen, von denen er $10/12$ selbst herstellt, während er je $1/12$ von seinen Nachbarkollegen B_{i-1} und B_{i+1} bezieht. Dabei habe der Bäcker B_1 die Nachbarn B_{100} und B_2 sowie der Bäcker B_{100} die Nachbarn B_{99} und B_1.

Die Bäcker B_1 bis B_{50} stellen je 1000 Brötchen, die Bäcker B_{51} bis B_{100} stellen je 2000 Brötchen her. Es wird angenommen, dass alle hergestellten Brötchen auf die beschriebene Weise auch verkauft werden.

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der x_i auf!
b) Geben Sie für dieses Gleichungssystem die Iterationsvorschrift des Jacobischen Gesamtschrittverfahrens an!
c) Begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens!
d) Um eine Startnäherung für die Jacobiiteration zu erhalten, wird angenommen, dass jeder Bäcker seine Produktion vollständig im eigenen Laden verkauft. Führen Sie von dieser Startnäherung ausgehend einen Jacobiiterationsschritt aus!
e) Berechnen Sie für x_{50} und x_{51} auch das Ergebnis des zweiten Jacobiiterationsschritts!

25 Einstieg in MATLAB/Octave

Aufgabe 25.1 **Lösung**

Arbeiten Sie sich (z.B. mithilfe der beigefügten Einführung) in das Computernumeriksystem `MATLAB` ein und lösen Sie damit dann die folgenden Aufgaben. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Berechnen Sie $\sin\frac{\pi}{6}$, $\sqrt[3]{42}$ (also $42^{\frac{1}{3}}$) und e^{π} (also $\exp(\pi)$).
2. Plotten Sie die Funktion $f(x) = -x^3+3x^2+x-2$ im Intervall $[-1.2\,, 3.4]$. Geben Sie dem Plot einen Titel und beschriften Sie auch die Achsen entsprechend.
3. Bestimmen Sie unter Verwendung des Befehls `roots` (siehe $\gg$ `help roots`) die Nullstellen des Polynoms $f(x) = -x^3+3x^2+x-2$. Vergleichen Sie mit dem Plot von oben.
   Hinweis: $\gg$ `roots([1,-2,-3])` bestimmt die Nullstellen von $f(x) = x^2-2x-3$.
4. Plotten Sie die Funktion $g(x) = 2\sin(5x)$ in dasselbe Fenster wie $f(x)$. Verwenden Sie dabei eine andere Farbe. Passen Sie den Titel an und erstellen Sie eine Legende ($\gg$ `help legend`).

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.2 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab. Hinweise zur Anwendung von `MATLAB` für komplexe Zahlen und für Logikaufgaben sind beigefügt.

1. Lösen Sie die Aufgabe 4.20b) mit Hilfe von `MATLAB`. Zeichnen Sie dazu die Funktion $|x+4|+|9-5x|$ und die konstante Funktion 7 in einem geeigneten Bereich in einen gemeinsamen Plot. Geben Sie dem Plot einen Titel, beschriften Sie die Koordinatenachsen und erstellen Sie eine Legende. Markieren Sie (nach dem Ausdrucken) die x, welche der Bedingung $|x+4|+|9-5x| \le 7$ genügen.
2. Es sei $z_1 := 4+2\mathrm{i}$ und $z_2 := 3-\mathrm{i}$. Berechnen Sie z_1+z_2, z_1*z_2, $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1*z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1)*\mathrm{Im}(z_2)$, $|z_1|*|z_2|$, $|z_1*z_2|$.
3. Bestimmen Sie mit dem Befehl `roots` alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3+x^2-x+15$.
4. Geben Sie die Wahrheitswerttabelle zur Aussage $A \Rightarrow (B \vee C)$ an.
5. Es wird eine Party veranstaltet. Leider gibt es Unstimmigkeiten in einer Gruppe mit den Personen A, B, C und D. Sie knüpfen den Besuch der Party an verschiedene Bedingungen. Insgesamt sind die folgenden Aussagen als wahr bekannt.

a) Mindestens einer geht zur Party.
b) Wenn A zur Party geht, dann gehen auch B und D.
c) Wenn A nicht zur Party geht, dann gehen B und C zur Party.
d) Wenn B oder C oder D zur Party geht, dann geht auch A.
e) C geht genau dann zur Party, wenn D geht und A nicht geht.
Hinweis: Es gilt: $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$

Bestimmen Sie mit einer Wahrheitstabelle, wer zur Party geht.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.3 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = 3.$$
   a) Berechnen Sie $A+B$, $A-B$, αA, $A\vec{w}$, $AB\vec{w}$, $\vec{w}^\top$, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top\vec{w}$ und $\left(A^\top\right)^\top$.
   b) Berechnen Sie AB, BA, $(A+B)^\top$, $A^\top+B^\top$, $(\alpha A)^\top$, $\alpha A^\top$, $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$ sowie $A^\top B^\top$. Überzeugen Sie sich für dieses Beispiel von der Nichtkommutativiät der Multiplikation und den Rechenregeln für das Transponieren.
2. Lösen Sie Aufgabe 6.64 mit Hilfe von `MATLAB`. Geben Sie dabei alle Ausdrücke von a) bis h) ein.
3. Es sei
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie EC, CE, $E\vec{p}$, $C\vec{p}$, $\vec{p}^\top C$, CP und PC. (Überlegen Sie sich vor der Befehlseingabe, welche Ergebnisse zu erwarten sind.)
4. Weiter sei
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$
   a) Berechnen Sie $\|\vec{s}\|$, $\|\vec{t}\|$, $\|\vec{s}+\vec{t}\|$, $\|\vec{s}\|+\|\vec{t}\|$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Dreiecksungleichung erfüllt ist.
   b) Berechnen Sie den Winkel Zwischen $\vec{s}$ und $\vec{t}$. Geben Sie den Winkel sowohl in Bogenmaß als auch in Grad an.
   Hinweis: Die `arccos`-Funktion heißt in `MATLAB` `acos`.
5. Es sei
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Stellen Sie die lineare Hülle grafisch dar. Plotten Sie dazu die neun Linearkombinationen $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ für $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ in einen Plot. Drehen Sie die Ansicht so, dass zu erkennen ist, dass alle Vektoren in einer Ebene liegen. Geben Sie dem Plot einen Titel, der Ihren Namen enthält.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.4 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. Aufgabe 6.101a) und Aufgabe 6.151).

   a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.

   b) Finden Sie mithilfe der `rank`-Funktion heraus, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und welche Dimension ihre lineare Hülle hat.

   c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Lösen Sie das in 6.167b) auftretende lineare Gleichungssystem mit `MATLAB`. Stellen Sie anschließend das berechnete Polynom vierten Grades zusammen mit den vorgegebenen Werten und einem von Ihnen ausgewählten Polynom (echt) fünften Grades aus Aufgabenteil a) in einem gemeinsamen Plot dar. Beschriften Sie die Achsen und fügen Sie eine Legende hinzu.
Hinweis: Der Plotfunktion kann ein weiterer Parameter übergeben werden, mit dem die Farbe und der Stil der Verbindungslinien eingestellt werden kann. Zum Beispiel wird mit `'rx'` an jedem Punkt ein roter „x-Marker“ gezeichnet (siehe $\gg$ `help plot` und $\gg$ `doc plot`). Dies eignet sich, um die vorgegebenen Werte als einzelne Punkte darzustellen und um mehrere Funktionen durch verschiedene Farben leichter unterscheiden zu können.

3. Stellen Sie die drei Ebenen

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \qquad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \qquad 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8$$

(vgl. Aufgabe 6.101a)) in einem gemeinsamen Plot dar. Wählen Sie Ihre Darstellung so, dass die Schnitte der Ebenen zu erkennen sind.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.5 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (vgl. Aufgabe 6.173). Bestimmen Sie die inverse Matrix von A.
2. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe Aufgabe 6.185 für
   a) $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$
   b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
   c) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 4$
   d) $a = 6, b = 4, c = 4, d = 6$.
3. Zeichnen Sie die Kanten des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgespannten Parallelepipedes. Versuchen Sie, die Ansicht so zu wählen, dass die Orthogonalität von $\vec{a}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ und von $\vec{b}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ zu erkennen ist.
4. a) Stellen Sie die Ebene aus Aufgabe 7.105, die drei gegebenen Punkte A, B, C sowie das von diesen erzeugte Dreieck in einem Plot geeignet dar.
   b) Projizieren Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ in die Ebene (d.h., berechenen Sie die zum Normalenvektor senkrechte Komponente). Zeichnen Sie die projizierten Vektoren in die Ebene ein (angesetzt am Punkt A bzw. B).
   c) Berechnen Sie den Lotfußpunkt von C bzgl. der gegebenen Ebene. Zeichnen Sie den Lotfußpunkt und die Strecke vom Punkt zum Lotfußpunkt. Berechnen Sie auch den Abstand des Punktes zur Ebene.
   d) Bestimmen Sie den in Aufgabe 7.105 gefragten Flächeninhalt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.6 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Lösen Sie die Interpolationsaufgabe aus Aufgabe 11.56, indem Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten aufstellen und lösen (vgl. Aufgabe 11.53 und Aufgabe 2 aus Aufgabe 25.4). Zeichnen Sie die gegeben Punkte und das berechnete Interpolationspolynom in einen gemeinsamen Plot.
2. a) Erstellen Sie ein `m-File` für die Funktion $f(x) = \ln(x+1)\sin(x^2)$. Bestimmen Sie (analytisch) die Ableitung der Funktion und erstellen Sie für diese ein weiteres `m-File`.
   Hinweis: Die Funktion `log` ist in `MATLAB` der natürliche Logarithmus.
   b) Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-0.5, 5]$ und zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = 1.4$ und $x_2 = 3.75$ die Tangente an den Graphen der Funktion ein.

3. Manchmal ist es zu aufwendig, für eine komplizierte Funktion eine analytische Ableitung anzugeben. In diesem Fall kann man die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 durch den Differenzenquotienten

$$f'_{\text{approx}}(x_0;h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

für einen geeigneten (kleinen) Wert von h annähern, denn die Ableitung ist ja der Grenzwert dieser Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Es soll untersucht werden, wie gut die Annäherung $f'_{\text{approx}}(x_0;h)$ in Abhängigkeit von h ist. Dafür soll die Funktion f aus Aufgabe 2 an der Stelle $x_0 = 1,85$ verwendet werden.

Berechnen Sie zunächst die exakte Ableitung $f'(x_0)$ und vergleichen Sie diese mit der Näherung $f'_{\text{approx}}(x_0;h)$ für $h = 0.1$, $h = 0.001$, $h = 10^{-5}$, $h = 10^{-7}$, $h = 10^{-9}$ und $h = 10^{-11}$, indem Sie jeweils die Differenz $f'_{\text{approx}}(x_0;h) - f'(x_0)$ angeben.

Zeichnen Sie nun den Fehler der Annäherung, d.h. $\left|f'_{\text{approx}}(x_0;h) - f'(x_0)\right|$ in Abhängigkeit von h im Intervall $(0,\, 10^{-6}]$. Was können Sie beobachten?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit ≫ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und die angefertigten Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.7 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und die Taylor-Polynome ungeraden Grades bis zur 11ten Ordnung mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$ in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende. Verwenden Sie den Befehl `axis`, um einen angemessenen Bildausschnitt auszuwählen.

2. a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren. Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben

   - die Funktion F, auf die das Verfahren angewandt werden soll (in Form eines `function-handles`),
   - die Ableitung der Funktion F (in Form eines `function-handles`),
   - der Startwert x_0.

   Zurückgegeben werden soll ein Vektor $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, welcher die gesamte Iterationsfolge enthält. Verwenden Sie $\varepsilon = 10^{-8}$ als Parameter für das Abbruchkriterium.

   b) Wenden Sie Ihr `m-File` zum Newton-Verfahren auf die Funktion aus Aufgabe 2a) aus Aufgabe 25.6 ($f(x) = \ln(x+1)\,\sin(x^2)$) mit den Startwerten

      i. x_0=`1.50`

ii. x_0=`1.43`

iii. x_0=`1.40`

an. Zeichnen Sie jeweils die Funktion f und den Verlauf der Iterierten.

c) Setzen Sie nun das Newton-Verfahren ein, um x mit $f'(x) = 0$ zu finden. Verwenden Sie die Startwerte

i. x_0=`1.70`

ii. x_0=`3.17`

iii. x_0=`0.70`

und zeichnen Sie die Funktion f und f' sowie jeweils den Verlauf der Iterierten. Bestätigen Sie anhand der zweiten Ableitung, dass es sich bei der jeweils letzten Iterierten um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum bzw. einen Sattelpunkt handelt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.8 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die in Aufgabe 15.9 gegebene Kurve $\vec{x}(t)$ in $t = [-2, 2]$ zusammen mit der in Aufgabe 15.9a) gefragten Tangente in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende.

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `plot3`.

2. Auf Computern kann man bestimmte Integrale bequem durch Riemann-Summen approximieren.

   a) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Riemann-Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

   mit $x_i = a + (b-a)\,\frac{i-1}{n-1}$ berechnet. Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben:

   - die Funktion f, für die das bestimmte Integral berechnet werden soll (in Form eines `function-handles`),
   - die untere Integrationsgrenze a,
   - die obere Integrationsgrenze b,
   - die Anzahl der x_i, d.h. n.

   Zurückgegeben werden soll die obige Riemann-Summe.

b) Benutzen Sie Ihre Funktion, um das bestimmte Integral aus der obigen Aufgabe 2a) für $n = 2$, $n = 32$ und $n = 512$ anzunähern und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

c) Plotten Sie nun den Fehler in Abhängigkeit von n ($n \in [2^1, 2^{10}]$) in einen normalen und in einen doppelt-logarithmischen Plot (Plot, bei dem beide Achsen logartihmisch geteilt sind). Was können Sie beobachten?

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `loglog` zum zeichnen eines doppelt-logarithmischen Plots.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.9 **Lösung**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung aus Aufgabe 21.3 zusammen mit einigen ausgewählten Lösungen der Gleichungen in einen gemeinsamen Plot und beschriften Sie die Achsen. Beachten Sie, dass sich die Pfeile nur im Anstieg, nicht aber in ihrer Länge unterscheiden sollen.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der in den Aufgaben 22.8 und 22.20 auftretenden Systemmatrizen und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.
3. Zeichnen Sie die Punkte (x, y), welche die Gleichung in Aufgabe 17.36 erfüllen, unter Verwendung des `contour`-Befehls und beschriften Sie die Achsen.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Aufgabe 25.10 **Lösung**

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. a) Bestimmen Sie (ohne `MATLAB`) die reelle Lösung von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. Aufgabe 22.28) für $\omega \neq \pm 1$ in Abhängigkeit von ω.

b) Zeichnen Sie die x-Komponente der Lösung für $\omega = 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ über dem Intervall $[0, 10\pi]$. In Aufgabe 22.28 wird für $\omega = 1$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

ermittelt. Ermitteln Sie auch hierzu die Lösung der Anfangswertaufgabe und zeichnen Sie deren x-Komponente ein.

c) Wie lautet die Periodenlänge der unter (a) bestimmten Lösung für rationale ω (in Abhängigkeit von ω)?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus.

Quellen und Literatur

[1] *Aufgabensammlung für Studenten des Maschineningenieurwesens. Höhere Mathematik*. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion: Mathematik, WB: Numerik. Broschur, 74 S. 1982.

Frühere Ausgabe: *Aufgabensammlung für Studenten des Maschineningenieurwesens. Höhere Mathematik – 1./2. Semester*. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt, Sektion: Mathematik, WB: Numerik. Broschur, 60 S. 1980.

[2] Dahn, B. I.; Wolter, H.: *Analysis Individuell. Kompakt zum Prüfungserfolg*. ISBN 978-3-540-66989-0. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer 2000.

[3] Dahn, I.; Armbruster, M.; Furbach, U.; Schwabe, G.: *Slicing Books – The Author's Perspective*. In: *Writing Hypertext and Learning. Conceptual and Empirical Approaches*. Ed. by R. Bromme and E. Stahl. Oxford: Pergamon Press (Elsevier) 2002. S. 125 - 151.

[4] Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik. Band I*. 2., überarb. Aufl. ISBN 3-334-00119-9. Jena: Gustav Fischer 1987.

Neuere Auflage: Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik. Band I*. 3., überarb. Aufl. ISBN 978-3-8252-8056-7. Jena: Gustav Fischer/UTB für Wissenschaft 1991.

[5] Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Band II*. 1. Aufl. Jena: Gustav Fischer 1981.

Neuere Auflage: Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik. Band II*. 2., überarb. Aufl. ISBN 978-3-8252-8061-1. Jena: Gustav Fischer/UTB für Wissenschaft 1991.

[6] Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Band III*. 1. Aufl. Jena: Gustav Fischer 1983.

Neuere Auflage: Dallmann, H.; Elster, K.-H.: *Einführung in die höhere Mathematik. Band III*. 2., überarb. Aufl. ISBN 978-3-8252-8065-9. Jena: Gustav Fischer/UTB für Wissenschaft 1992.

[7] Demidovič, B. P.:

Russisch: Демидович, Б. П.: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. 4. Aufl. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1958.

[8] Djubjuk, P. E.; Kručkovič, G. I. u. a.:

Russisch: Дюбюк, П. Е.; Кручкович, Г. И. u. a.: *Сборник задач по курсу высшей математики для втузов*. Москва: Высшая школа 1963.

[9] Günter, N. M.; Kusmin, R. O.: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band I*. 3., bericht. Aufl. A. d. Russ. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss. 1962.

Neuere Auflage: Günter, N. M.; Kusmin, R. O.: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band I*. 13., unveränd. Aufl. ISBN 978-3-8171-1345-3. Frankfurt am Main, Thun: Deutsch 1993.

[10] Günter, N. M.; Kusmin, R. O.: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band II*. A. d. Russ. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss. 1957.

Neuere Auflage: Günter, N. M.; Kusmin, R. O.: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band II*. 9., unveränd. Aufl. ISBN 978-3-8171-1346-0. Frankfurt am Main, Thun: Deutsch 1993.

[11] Haftmann, R.: *EAGLE-GUIDE: Differenzialrechnung. Vom Ein- zum Mehrdimensionalen*. ISBN 978-3-937219-29-5. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz 2009.

[12] Haftmann, R.: *TRIAL-SOLUTION: strukturierte Bereitstellung von Lehrmaterialien im Internet – ein Projektbericht*. Vortrag. 15. ÖMG-Kongress/Jahrestagung der Deutschen Mathematikervereinigung. 16. bis 22. September 2001 in Wien. Sektion IuK – Information und Kommunikation.

[13] Handrock, S.: *Vorlesungsskript Mathematik I.1 für die Bachelorstudiengänge BAINE, BAINM, BAP, BMEP, BSPE, BTK, CH. Wintersemester 2007/08*. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik, und desgl. *Mathematik I.2*. *Sommersemester 2008*.
Analog auch für den Kurs 2006-07.

[14] Handrock, S.: *Vorlesungsskript Mathematik I für Wirtschaftsingenieure. Wintersemester 2005/06*. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik, und desgl. *Mathematik II Sommersemester 2006*, und *Mathematik III Wintersemester 2006/07*.
Analog auch für die Kurse 2001-03, 2003-05 und 2004-06.

[15] Herzog, R.: *Skript zur Vorlesung Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge*. Wintersemester 2012/13 – Sommersemester 2013. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik.
Analog auch für die Kurse 2008-09 und 2010-11.

[16] Ikramov, Ch. D.:
Russisch: Икрамов, Х. Д.: *Задачник по линейной алгебре*. Москва: Наука 1975.

[17] Luderer, B.; Paape, C.; Würker, U.: *Arbeits und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. Beispiele – Aufgabe – Formeln*. ISBN 3-519-02573-6. Stuttgart: Teubner 1996.
Neuere Auflage: Luderer, B.; Paape, C.; Würker, U.: *Arbeits und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. Beispiele – Aufgabe – Formeln*. 6. Aufl. ISBN 978-3-8348-1254-4. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2011.

[18] Luderer, B.; Würker, U.: *Einstieg in die Wirtschaftsmathematik*. ISBN 3-519-025098-X. Stuttgart: Teubner 1995.
Neuere Auflage: Luderer, B.; Würker, U.: *Einstieg in die Wirtschaftsmathematik.*. 8., überarb. u. erw. Aufl. ISBN 978-3-8348-1501-9. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2011.

[19] Luderer, B.; Würker, U.: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler 1./2. Semester – Übungs- und Hausaufgabenblätter*. Technische Universität Chemnitz-Zwickau: Fakultät für Mathematik 1995/96.
Jährliches Übungsmaterial, z.B.: Paape, C.: *Übungen und Hausaufgabenkomplexe zur Vorlesung Mathematik I für Studierende der Wirtschaftswissenschaften bei Prof. Luderer im Wintersemester 2000/2001. Version für Übungsleitende*. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik 2000, und desgl. *Mathematik II im Sommersemester 2001*.

[20] Meyberg, K.; Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*. 1. korr. Nachdruck. ISBN 3-540-51798-7. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer 1990.
Neuere Auflage: Meyberg, K.; Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 1*. *Differential-*

und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6., korr. Aufl. ISBN 978-3-540-41850-4. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer 2001.

[21] Meyberg, K.; Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 2. Differentialgleichungen. Funktionentheorie. Fourier-Analysis. Variationsrechnung*. ISBN 3-540-52334-0. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer 1991.
Neuere Auflage: Meyberg, K.; Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik 2. Differentialgleichungen. Funktionentheorie. Fourier-Analysis. Variationsrechnung*. 4., korr. Aufl. ISBN 978-3-540-41851-1. Berlin, Heidelberg u.a.: Springer 2001.

[22] Minorski, W. P.: *Aufgabensammlung der höheren Mathematik*. 3. Aufl. A. d. Russ. Leipzig: Fachbuchverlag 1969.
Neuere Ausgabe: Minorski, V. P.: *Aufgabensammlung der höheren Mathematik*. 15., aktualis. Aufl. Bearb. v. K. Dibowski u. H. Schlegel. A. d. Russ. ISBN 978-3-446-41616-1. Leipzig: Fachbuchverlag im Hanser Verlag 2008.

[23] Pforr, E.-A.; Oehlschlaegel, L.; Seltmann, G.: *Übungsaufgaben zur linearen Algebra und linearen Optimierung*. 1. Aufl. ISBN 3-322-00373-6. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungsaufgaben 3. Leipzig: Teubner 1987.
Frühere Ausgabe: Pforr, E.-A.; Oehlschlaegel, L.; Seltmann, G.: *Lineare Algebra und lineare Optimierung. Übungen*. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungen 3. Zwickau: Zentralst. f. Lehr- u. Org.mittel d. Min. f. Hoch- u. Fachschulwesen 1982.
Neuere Auflage: Pforr, E.-A.; Oehlschlaegel, L.; Seltmann, G.: *Übungsaufgaben zur linearen Algebra und linearen Optimierung Ü3*. 5., durchges. Aufl. ISBN 3-519-00224-8. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Stuttgart, Leipzig: Teubner 1998.

[24] Schneider, R.; Haftmann, R.: *Mathematik für Wirtschaftsinformatiker und -ingenieure. Vorlesung und Übungen 1996 – 2003*. Skript. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik 2003.

[25] Streit, U.: *Höhere Mathematik I (MB) – Übungs- und Hausaufgabenblätter*. Jährliches Übungsmaterial. Technische Universität Chemnitz: Fakultät für Mathematik 2007ff.

[26] Wenzel, H.; Heinrich, G.: *Übungsaufgaben zur Analysis 1*. 4. Aufl. ISBN 3-322-00366-3. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungsaufgaben 1. Leipzig: Teubner 1990.
Frühere Ausgabe: Wenzel, H.; Heinrich, G.: *Analyis 1. Übungen*. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungen 1. Zwickau: Zentralst. f. Lehr- u. Org.mittel d. Min. f. Hoch- u. Fachschulwesen 1982.

[27] Wenzel, H.; Heinrich, G.: *Übungsaufgaben zur Analysis 2*. 3., bearb. Aufl. ISBN 3-322-00367-1. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungsaufgaben 2. Leipzig: Teubner 1989.
Frühere Ausgabe: Wenzel, H.; Heinrich, G.: *Analyis 2. Übungen*. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte. Übungen 2. Zwickau: Zentralst. f. Lehr- u. Org.mittel d. Min. f. Hoch- u. Fachschulwesen 1982.

[28] Neuere Ausgabe von [26] und [27] in einem Band: Wenzel, H.; Heinrich, G.: *Übungsaufgaben zur Analysis*. 1. Aufl. ISBN 978-3-8351-0066-4 Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Wiesbaden: Teubner 2005.