Series de Fourier

Jefry Nicolás Chicaiza - jefryn@unicauca.edu.co
Jose Nicolás Zambrano - jnzambranob@unicauca.edu.co

Introducción

En el siguiente documento se desarrollará el informe del Trabajo 1 de la asignatura Teoría de las telecomunicaciones 1. El trabajo presenta inicialmente el desarrollo analítico mediante serie de Fourier de la señal planteada, la cual es del tipo "diente de sierra"trasladado en el tiempo.

Iniciar con el desarrollo analítico es necesario debido a que para alcanzar los resultados esperados en la simulación, se requiere conocer de antemano los coeficientes de la serie de Fourier que permitirán reconstruir la señal a través de iteraciones realizadas con MATLAB.

Posteriormente se abordaran las hipótesis planteadas en el documento guiá del trabajo y se buscará llegar a conclusiones y síntesis a partir de los datos obtenidos en la simulación de los diferentes escenarios.

Los teoremas e hipótesis nos dicen que la serie de Fourier de cualquier señal periódica de potencia finita la podemos obtener por medio de una suma infinita de funciones sinusoidales. La serie de Fourier de una señal pueden expresarse de dos maneras, una representada por serie trigonométrica y otra con representación de serie compleja.

En este documento unicamente se realiza los cálculos de la serie de Fourier para la señal propuesta con la representación trigonométrica, que observamos a continuación:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Donde los términos a_0, a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier, de los cuales es necesario realizar cálculos para encontrar sus valores y lograr representar la serie de la señal dada.

El desarrollo de este documento esta constituido por una sesión que brinda información de como se obtuvo las diferentes expresiones y el plan de pruebas, que hacen posible la

Metodología

La metodología empleada para el desarrollo de la serie de Fourier a la señal planteada se logro mediante la aplicación de los teoremas e hipótesis, en el apartado anterior se menciono la necesidad de calcular los valores de ciertos términos para logra obtener la representación matemática de la serie de Fourier de la señal planteada.

En primer lugar es importante conocer el comportamiento que nos describe los términos, el primer termino de la serie, a_0, no está asociado con una frecuencia y es una constante, además es conocido como el nivel DC de la señal, representa el cambio de la señal sobre un nivel arbitrario de referencia. Este termino lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t)dt \tag{2}$$

De la expresión anterior podemos deducir que el termino DC representa el área bajo la curva de la señal [1], que hasta el momento no conocemos la función que la representa, por tanto es necesario obtener la función a partir de su gráfica. En la figura 1 observamos la señal asignada.

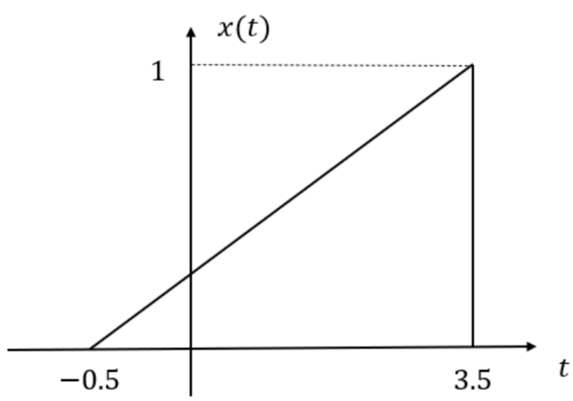

Figura 1: Gráfica de la señal tipo "diente de sierra".

En [2] se menciona que durante el intervalo en el que se presenta la señal, la función que responde a una onda diente de sierra se da de la siguiente manera:

$$x(t) = \frac{A}{T}t$$

Por lo que la función a la que responde la señal que se plantea debe ser del mismo modo, la expresión de la señal es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \tag{3}$$

Ahora que conocemos la expresión de la señal se procederá a obtener el valor del termino a_0, con las ecuaciones 2 y 3:

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Para el valor de los términos restantes es importante mencionar que con frecuencia las simetrías simplifican a los problemas matemáticos. En el caso de la series de Fourier, se utiliza la simetría en la paridad para simplificar el problema. En el caso de funciones pares el desarrollo de la serie de Fourier implica solamente la necesidad de calcular a_0 y a_n, y sólo b_n para impares [3].

La señal que concierne a este texto podemos deducir de su gráfica(figura 1) que no se comporta igual que su imagen respecto al eje y, ni tampoco hay presencia de simetría al rotar la gráfica en 180 grados. Por tanto, se trata de una función sin paridad, lo que implica la necesidad de calcular todos los términos de la serie trigonométrica de Fourier .

Las siguientes expresiones corresponden al calculo de los coeficientes a_n y b_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)cos(2\pi n f_0 t)dt \tag{5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)sin(2\pi n f_0 t)dt \tag{6}$$

los resultados obtenidos al realizar los cálculos para los coeficientes son los siguientes (los cálculos que se presentan en este documento están simplificados, por tal motivo se integra el paso a paso en el apartado de Anexos):

- Calculo a_n

$$a_n = \frac{1}{8}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} tcos(2\pi n f_0 t)dt + \frac{1}{16}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n}sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) \tag{7}$$

- Calculo b_n

$$b_n = \frac{1}{8}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} tsin(2\pi n f_0 t)dt + \frac{1}{16}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} sin(2\pi n f_0 t)dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) \tag{8}$$

Lo siguiente sera completar la serie de Fourier para obtener la representación matemática de las funciones sinusoidales que construyen la señal planteada, reemplazamos las ecuaciones 7 y 8 en la ecuación 1:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n}sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)\right] cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right) ... \\ + \left[-\frac{1}{\pi n}cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)\right] sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora que se ha obtenido la expresión que representa la serie de Fourier de la señal, se procederá a realizar un análisis de la serie de Fourier a través de una simulación realizada en computadora, en ella podremos visualizar como se resuelve para cientos, o incluso miles, de componentes. Podemos comprobar qué tan buena es la representación reconstruyendo la señal utilizando diferentes cantidades de componentes, para esto se realizaran pruebas con un Script desarrollado en MATLAB.

En esta sección explican de forma clara cómo fue el proceso para obtener los resultados:

1. Aspectos fundamentales de su simulación. No me refiero a pantallazos del código (de hecho, eviten hacer eso en cualquier documento a menos de que les indiquen lo contrario, en cuyo caso es más aconsejable mandarlo a un apéndice), sino a consideraciones o suposiciones que hicieron para el planteamiento de la simulación, con el fin de que ésta tenga congruencia con la teoría y por lo tanto validez.

2. Plan de pruebas. En caso de que su objetivo sea comprobar una hipótesis, entonces deben plantear un plan de pruebas, es decir, mostrar la forma en la que proponen variar parámetros de la simulación para crear diferentes escenarios que les permitan hacer la validación. Busquen crear escenarios en los que varíen una cosa a la vez, de tal forma que sea fácil interpretar los resultados, ya que saben qué es lo que está influenciando los cambios. Si crean escenarios en los que todo cambia al mismo tiempo, luego no será posible analizar el por qué de dichos resultados.
3. Para proyectos más grandes, como sus trabajos de grado, es necesaria una guía, que permita plantear fases y conseguir una sumatoria resultados pequeños que conduzcan al objetivo final, por eso en esos casos en esta sección se describe la metodología utilizada; sin embargo, para nuestro caso no será así.

Análisis de Resultados

Recuerden que presentar resultados no es lo mismo que adjuntar mil y una imágenes de forma consecutiva. La sección de resultados es muy importante porque en ésta es en donde ustedes realizan el análisis y ojo que ANÁLISIS ES DIFERENTE DE DESCRIPCIÓN.
... En la Figura 1 se observa que la línea roja por encima de la azul en todo momento... (Muy amable por su descripción, pero eso también lo estoy viendo yo).
...Los resultados mostrados en la Figura 1 implican que para este escenario el método A es superior al método B, debido a que con el método A se favorecen...
La forma en la que ustedes interpretan lo que obtienen en la simulación me indica a mí su dominio del tema. Si hay un resultado que no tiene sentido no traten de forzar sobre él una explicación estrambótica, revisen si existen problemas en la simulación o el planteamiento, pero para esto ustedes deben tener el tema claro, de lo contrario no tendrán el criterio necesario para saber si el resultado tiene sentido o no.

Conclusiones

Aunque puede parecer que gastaron sus mejores ideas en la sección de análisis, la diferencia de las conclusiones es que en este punto ustedes tienen una visión completa del trabajo, ya han abordado todas las fases y por lo tanto están en la capacidad de realizar un compendio de los aprendizajes obtenidos.
Esos aprendizajes deben estar estrechamente relacionados con lo que buscan en el trabajo, con lo que plantearon en el pro qué y el para qué en la introducción. Si esto fuera su trabajo de grado, las conclusiones deben estar relacionadas con los objetivos de ese trabajo.
Lo anterior implica que la siguiente conclusión no es una conclusión válida:

... MATLAB es un entorno de simulación muy adecuado, ya que permite implementar sistemas de telecomunicaciones...

Referencias

[1] M. Silva, "Capítulo II: Análisis de Fourier," Notas Cl., pp. 3–70, 2021.

[2] A. Engineering, M. Subject, L. Transform, and O. F. Periodic, "Snpit & rc," p. 11, [Online]. Available: https://www.slideshare.net/surtikaushal/laplace-periodic-function-with-graph.

[3] E. Rojero, "Matemáticas Avanzadas," Univ. Nac. Autónoma México, vol. 0.1, p. 52, 2009, [Online]. Available: https://openlibra.com/es/book/download/matematicas-avanzadas.