Transformada de Fourier

Jefry Nicolás Chicaiza[1] y Jose Nicolás Zambrano[2]

[1] jefryn@unicauca.edu.co

[2] jnzambranob@unicauca.edu.co

1. Introducción

En el siguiente documento se desarrollará el informe del Trabajo 2 de la asignatura Teoría de las telecomunicaciones 1. El trabajo presenta inicialmente el desarrollo analítico de la Transformada de Fourier a la señal planteada, la cual es del tipo "diente de sierra"trasladado en el tiempo y no periódica.

Iniciar con el desarrollo analítico es necesario debido a que para alcanzar los resultados esperados en la simulación, se requiere conocer de antemano la función que representa dicha Transformada de la señal, esto permitirá comprobar los resultados obtenidos por medio de un algoritmo realizado en MATLAB.

Adicionalmente, las comprobaciones que se plantearán en simulación se realizan a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform), que es una clase de algoritmo computacional usado en el procesamiento de señales digitales para reducir en gran medida el número de cálculos en el uso de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa, hace de la DFT un procesamiento viable e indispensable [1].

Cabe destacar que la finalidad principal de este documento será realizar una comprobación de ¿Cómo se ve afectado el porcentaje de la densidad espectral de energía en un intervalo de frecuencia al modificar ciertos parámetros de la señal?.

Finalmente, el documento cuenta con una sección para la validación de los diferentes procesos empleados y el planteamiento de un plan de pruebas para analizar los efectos que presentan algunas propiedades consideradas para la investigación de este documento, además de una sección de análisis de resultados y discusión, y seguido de la sección de conclusiones.

2. Metodología

La metodología que se empleo para el desarrollo de la Transformada de Fourier a la señal planteada se logró mediante la aplicación de los teoremas del material guía a este documento, inicialmente se realizó el cálculo analíticamente para considerar un resultado a partir de dicha teoría y poder comprobar el resultado en una simulación computacional.

Para realizar el proceso del cálculo de la transformada de la señal es importante mencionar de donde surge el término de la Transformada de Fourier, surge a partir del estudio de señales periódicas que son representadas por las Series de Fourier, sin embargo, el estudio de las señales se interrumpe por las señales aperiódicas por no cumplir con la condición de periodicidad [2]. Por tanto, se plantea que las señales no periódicas se pueden ver como señales de periodos largos (que tienda al infinito), de esta forma la separación de sus componentes espectrales es despreciable y el espectro de estas señales es continuo [3].

Dado que la señal es no periódica, hablar de potencia promedio no seria adecuado debido a que la magnitud tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, en este caso la señal tiene una energía finita, la cual se define por una integral que puede existir o converger a un valor diferente de cero o indeterminado. Esta es la condición para que una señal pueda representarse en el dominio de la frecuencia utilizando la Transformada de Fourier [4]. Para la función de interés de este documento su valor de energía es:

$$\epsilon_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \left| \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right|^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$

Después de comprobar que la señal tiene una energía definida y es posible denominarla como no periódica, se procedió a calcular la transformada de la señal resolviendo la integral característica del teorema, antes de esto se considera la función que representa la gráfica de esta señal de interés:

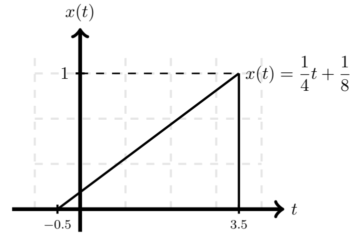


Figura 1: Gráfica de la señal asignada.

El resultado que se obtuvo de la transformada de esta señal con los intervalos observados en la figura 1 se aprecia a continuación (el paso a paso de el cálculo que se realizó para esta transformada se puede encontrar en la sección de anexos de este documento):

$$\tilde{x}(f) = \frac{e^{-j7pif}(1 - e^{j8\pi f} + j8\pi f)}{16\pi^2 f^2} \tag{1}$$

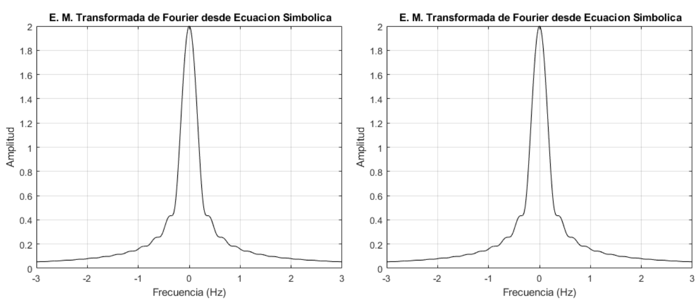
Para la comprobación del resultado de la ecuación 1 se desarrollo un algoritmo capas de calcular la integral característica de la Transformada de Fourier de tal manera que el resultado obtenido sea fácil de comparar. En la siguiente figura se visualiza el resultado que retorna el programa de simulación al ejecutar la integral.

```
trfu =
```

$$\frac{e^{-7\pi f\,i}\,(1 - e^{8\pi f\,i} + 8\pi f\,i)}{16\,f^2\,\pi^2}$$

Figura 2: Resultado de la simulación de la Transformada de Fourier de la señal.

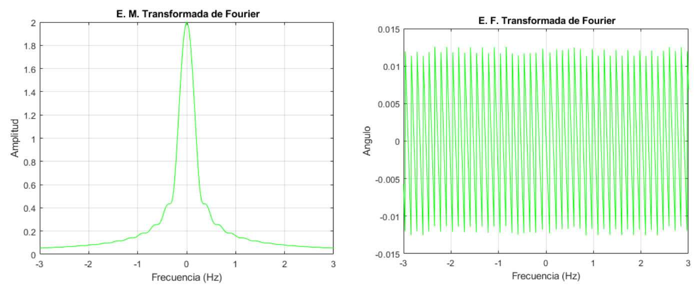
Además de comprobar el resultado numérico de los cálculos, se implementó en el algoritmo un ciclo capaz de evaluar el resultado de la figura 2 para poder ilustrar el espectro de la frecuencia de la transformada de la señal planteada.



(a) (b)

Figura 3: Gráficas del espectro de frecuencia de los cálculos simulados. (a) Gráfica espectro de magnitud, (b) Gráfica espectro de fase.

A partir de estas graficas obtenidas en la simulación, se realizaron comprobaciones con ayuda del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (mencionada en la introducción). El proceso de comprobación de las gráficas inicialmente requirió de una buena implementación del algoritmo FFT para realizar una validez al aplicar la propiedad de dualidad que manifiesta que $V(t) \rightarrow v(-f)$, donde la transformada en el dominio del tiempo su transformada será la señal original en el dominio de la frecuencia (en la simulación se realizaron las comprobaciones), por lo que se valida que la señal en el tiempo es discreta y en la frecuencia es de tipo periódico como nos plantea la teoría de la Transformada de Fourier, las gráficas obtenidas por el cálculo de la FFT son:



(a) (b)

Figura 4: Gráficas del espectro de frecuencia de FFT. (a) Gráfica espectro de magnitud, (b) Gráfica espectro de fase.

2.1. Plan de pruebas

Este es un texto de prueba de espacio para subsections, en este caso el Plan de pruebas

3. Análisis de Resultados

4. Conclusiones

A. Cálculo teórico

Realización de los cálculos matemáticos de la Transformada de Fourier de la señal asignada, la formula empleada para el cálculo de la transformada es la siguiente:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{2}$$

Recordando que del primer trabajo, la función correspondiente a la pendiente de la gráfica se expresa de la siguiente manera:

$$x(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \tag{3}$$

Esta función lineal se encuentra limitada por un intervalo de duración 4 segundos, como valor mínimo se tiene $-\frac{1}{2}$ y valor máximo $\frac{7}{2}$, lo que hace que esta función se vea como un "diente de sierra", por tanto su función más representativa o su intervalo descriptivo es el siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) rect\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{8}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}; & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{7}{2} \\ 0; & p.o.c. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

El proceso para obtener la Transformada de Fourier de la ecuación 4 se realiza a continuación, donde el valor $x(t)$ de la ecuación 2 será la ecuación 3, y el valor de los intervalos de la integral serán los que limitan la función lineal, como se menciono anteriormente [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(f) &= \int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} te^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{2}{3}+2} e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \\ &= e^{-j2\pi ft}\left(\frac{jt}{8\pi f} + \frac{1}{16\pi^2 f^2} + \frac{j}{16\pi f}\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} \\ &= \frac{je^{-j3\pi ft}e^{-j4\pi ft}}{8\pi f}\left[\frac{1}{j2\pi f} + 4 - e^{j8\pi ft}\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)\right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{16\pi^2 f^2} + \frac{j}{2\pi f}\right)e^{-j4\pi f} - \frac{e^{j4\pi f}}{16\pi^2 f^2}\right]e^{-j3\pi f} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

$$\tilde{x}(f) = \frac{e^{-j7pif}(1 - e^{j8\pi f} + j8\pi f)}{16\pi^2 f^2} \tag{5}$$

Bibliografía

[1] A. D. Poularikas, *Signals and Systems Primer with MATLAB*, 1st ed. Florida, Boca Ratón: CRC Press, 2007, pág. 189, ISBN: 9781420006957. DOI: https://doi.org/10.1201/b13774.

[2] V. H. Sauchelli, *Teoria de senales y sistemas lineales*, es. Jorge Sarmiento Editor - Universitas, 2020, pág. 310, ISBN: 9789879406731. dirección: https://elibro.net/es/lc/unicauca/titulos/175159.

[3] M. Silva, "Capítulo II: Análisis de Fourier," *Notas de clase*, págs. 50-69, 2021.

[4] I. V. Fabián y M. Pérez, "TEORÍA DE TELECOMUNICACIONES I Sistemas Analógicos." dirección: http://artemisa.unicauca.edu.co/%7B~%7Dvflorez/TTL1/Documento%20Clase%20-%20Teoria%20de%20Telecomunicacion%20I%20VM.pdf.

[5] M. Silva, "Ejercicio Transformada de Fourier," *Notas de clase*, 2021.