



Universidad
del Cauca

Transformada de Fourier

Jeffry Nicolás Chicaiza¹ y Jose Nicolás Zambrano²

¹ jeffryn@unicauca.edu.co

² jnzambranob@unicauca.edu.co

1. Introducción En el siguiente documento se desarrollará el informe del Trabajo 2 de la asignatura Teoría de las telecomunicaciones 1. El trabajo presenta inicialmente el desarrollo analítico de la Transformada de Fourier a la señal planteada, la cual es del tipo "diente de sierra" trasladado en el tiempo y no periódica.

Iniciar con el desarrollo analítico es necesario debido a que para alcanzar los resultados esperados en la simulación, se requiere conocer de antemano la función que representa dicha Transformada de la señal, esto permitirá comprobar los resultados obtenidos por medio de un algoritmo realizado en MATLAB.

Adicionalmente, las comprobaciones que se plantearán en simulación se realizan a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform), que es una clase de algoritmo computacional usado en el procesamiento de señales digitales para reducir en gran medida el número de cálculos en el uso de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa, hace de la DFT un procesamiento viable e indispensable [1].

Cabe destacar que la finalidad principal de este documento será realizar una comprobación de ¿Cómo se ve afectado el espectro en frecuencia al modificar ciertos parámetros de la señal? Para lo que se espera que la modificación de un parámetro que afecte directamente al espectro de la magnitud, también afecte a su componente en fase.

Finalmente, el documento cuenta con una sección para la validación de los diferentes procesos empleados y el planteamiento de un plan de pruebas para analizar los efectos que presentan algunas propiedades consideradas para la investigación de este documento, además de una sección de análisis de resultados y discusión, y seguido de la sección de conclusiones.

2. Metodología La metodología que se empleó para el desarrollo de la Transformada de Fourier a la señal planteada se logró mediante la aplicación de los teoremas del material guía a este documento, inicialmente se realizó el cálculo analíticamente para considerar un resultado a partir de dicha teoría y poder comprobar el resultado en una simulación computacional.

Para realizar el proceso del cálculo de la transformada de la señal, es importante mencionar de donde surge el término de

la Transformada de Fourier, surge a partir del estudio de señales periódicas que son representadas por las Series de Fourier, sin embargo, el estudio de las señales se interrumpe por las señales aperiódicas por no cumplir con la condición de periodicidad [2]. Por tanto, se plantea que las señales no periódicas se pueden ver como señales de periodos largos (que tienda al infinito), de esta forma la separación de sus componentes espectrales es despreciable y el espectro de estas señales es continuo [3].

Dado que la señal es no periódica, hablar de potencia promedio no sería adecuado debido a que la magnitud tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, en este caso la señal tiene una energía finita, la cual se define por una integral que puede existir o converger a un valor diferente de cero o indeterminado. Esta es la condición para que una señal pueda representarse en el dominio de la frecuencia utilizando la Transformada de Fourier [4]. Para la función de interés de este documento su valor de energía es:

$$\epsilon_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \left| \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right|^2 dt = \frac{4}{3}$$

Después de comprobar que la señal tiene una energía definida y es posible denominarla como no periódica, se procedió a calcular la transformada de la señal resolviendo la integral característica del teorema, antes de esto se considera la función que representa la grafica de la señal de interés observada en la figura 1.

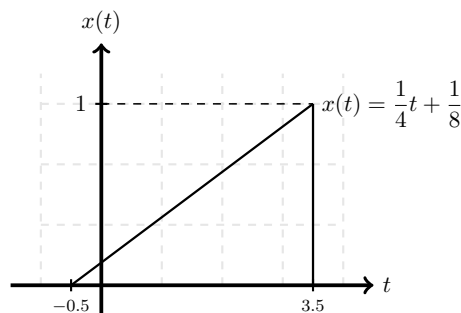


Figura 1: Gráfica de la señal asignada.



Universidad
del Cauca

El resultado que se obtuvo de la transformada de esta señal con los intervalos observados en la figura 1 se aprecia en la ecuación 1 (el paso a paso del cálculo que se realizó para esta transformada se puede encontrar anexo junto a este documento).

$$\tilde{x}(f) = \frac{e^{-j7\pi f}(1 - e^{j8\pi f} + j8\pi f)}{16\pi^2 f^2} \quad (1)$$

Después de haber realizado el planteamiento de los fundamentos matemáticos requeridos para solucionar el problema, se procedió a realizar la planificación de la simulación requerida para verificar y analizar los escenarios planteados por el problema.

Se puede identificar 6 objetivos clave a desarrollar con la simulación en MATLAB:

1. Cálculo y representación gráfica de la transformada de Fourier de la señal.
2. Análisis de la Transformada versus FFT.
3. Análisis de los efectos sobre el espectro al multiplicar la señal por un escalar.
4. Análisis de los efectos sobre el espectro al cambiar de escala del dominio de la señal.
5. Análisis de los efectos sobre el espectro al trasladar la señal en el tiempo.
6. Análisis de los efectos sobre el espectro al trasladar la señal en el dominio de la frecuencia.

Después de realizar el análisis de los requerimientos anteriores, se plantea un esquema general para el desarrollo de la simulación en la figura 2.

Para la realización del Script de simulación se utilizó el paradigma de programación estructurada, ya que el mismo permite agilidad en el desarrollo del código, así como también facilita el desarrollo de los planteamientos matemáticos necesarios para lograr los objetivos de la simulación. Adicionalmente la programación estructurada, brinda al observador del código una perspectiva secuencial en el desarrollo del algoritmo de simulación, y, por lo tanto, un orden lógico y trazable de los resultados esperados en la ejecución de este.

2.1. Plan de pruebas Retomando los 4 objetivos clave a desarrollar con la simulación, se plantea el siguiente plan de pruebas a realizar:

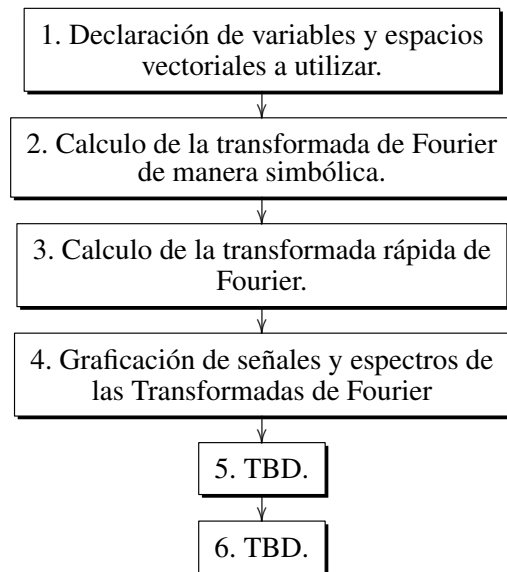


Figura 2: Diagrama para el desarrollo de los escenarios.

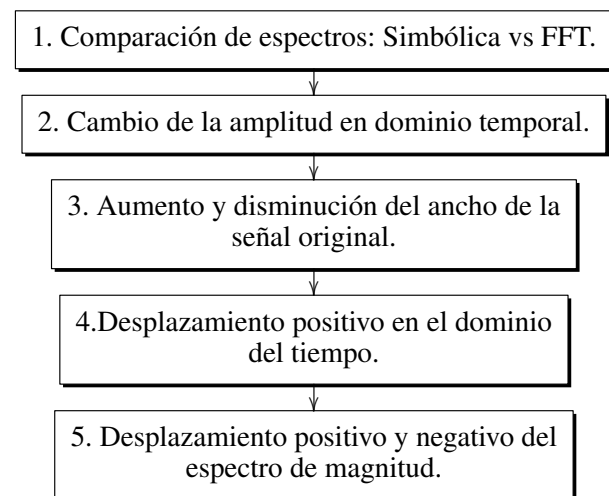


Figura 3: Diagrama para el desarrollo de los escenarios.

3. Análisis de Resultados Para la comprobación del resultado de la ecuación 1 se desarrollo un algoritmo capaz de calcular la integral característica de la Transformada de Fourier de tal manera que el resultado obtenido sea fácil de comparar. En la siguiente figura se visualiza el resultado que retorna el programa de simulación al ejecutar la integral.



Universidad
del Cauca

$$\text{trfu} = \frac{e^{-7\pi f i} (1 - e^{8\pi f i} + 8\pi f i)}{16 f^2 \pi^2}$$

Figura 4: Resultado de la simulación de la Transformada de Fourier de la señal.

Además de comprobar el resultado numérico de los cálculos, se implementó en el algoritmo un ciclo capaz de evaluar el resultado de la figura 4 para poder ilustrar el espectro de la frecuencia de la transformada de la señal planteada.

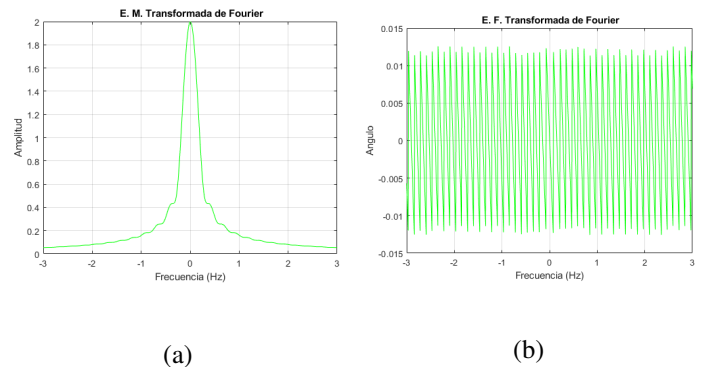


Figura 6: Gráficas del espectro de frecuencia de FFT. (a) Gráfica espectro de magnitud, (b) Gráfica espectro de fase.

4. Conclusiones

Bibliografía

- [1] A. D. Poularikas, *Signals and Systems Primer with MATLAB*, 1st ed. Florida, Boca Ratón: CRC Press, 2007, pág. 189, ISBN: 9781420006957. DOI: <https://doi.org/10.1201/b13774>.
- [2] V. H. Sauchelli, *Teoría de señales y sistemas lineales*, es. Jorge Sarmiento Editor - Universitas, 2020, pág. 310, ISBN: 9789879406731. dirección: <https://elibro.net/es/lc/unicauca/titulos/175159>.
- [3] M. Silva, "Capítulo II: Análisis de Fourier," *Notas de clase*, págs. 50-69, 2021.
- [4] I. V. Fabián y M. Pérez, "TEORÍA DE TELECOMUNICACIONES I Sistemas Analógicos." dirección: <http://artemisa.unicauca.edu.co/%7B%7Dvlflorez/TTL1/Documento%20Clase%20-%20Teoria%20de%20Telecomunicacion%20I%20VM.pdf>.

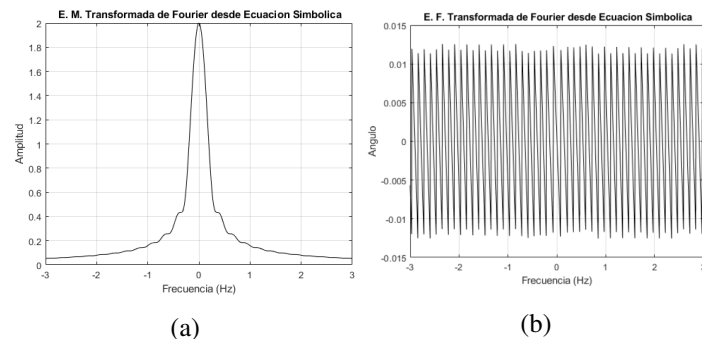


Figura 5: Gráficas del espectro de frecuencia de los cálculos simulados. (a) Gráfica espectro de magnitud, (b) Gráfica espectro de fase.

A partir de las figuras 5a y 5b obtenidas en la simulación, se realizaron comprobaciones con ayuda del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (mencionada en la sección 1).

El proceso de comprobación de las gráficas inicialmente requirió de una buena implementación del algoritmo FFT para realizar una validez al aplicar la propiedad de dualidad que manifiesta que $V(t) \rightarrow v(-f)$, donde la transformada en el dominio del tiempo su transformada será la señal original en el dominio de la frecuencia (en la simulación se realizaron las comprobaciones), por lo que se valida que la señal en el tiempo es discreta y en la frecuencia es de tipo periódico como nos plantea la teoría de la Transformada de Fourier, las gráficas obtenidas por el cálculo de la FFT se observan en la figura 6.