Universidad
del Cauca

Trabajo 2 – Teoría de las telecomunicaciones I

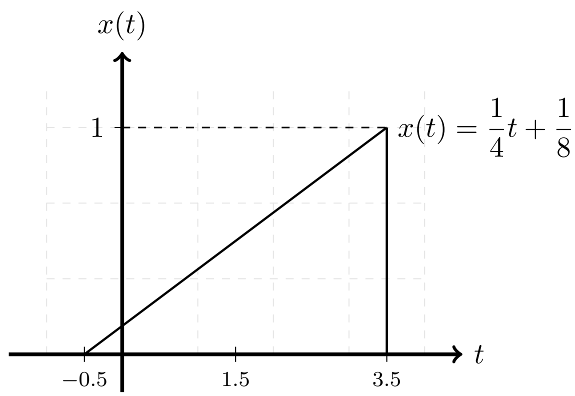
Tema: Transformada de Fourier

Jefry Nicolás Chicaiza[1] y Jose Nicolás Zambrano[2]

[1]jefryn@unicauca.edu.co
[2]jnzambranob@unicauca.edu.co

Ejercicio

Asumiendo que la señal de la figura no es periódica calcule su Transformada de Fourier.



Después compruebe los resultados obtenidos en simulación al aplicar la Transformada Rápida Fourier (FFT, Fast Fourier Transform).

Para interpretar los resultados de la FFT se sugiere analizar la dualidad en tiempo y frecuencia, ante las características de periódico y discreto. Adicionalmente, es posible simular el cálculo del espectro, con el fin de contrastar los resultados obtenidos con el de la FFT, el cual corresponde al algoritmo computacionalmente más eficiente.

Una nez se tenga claridad con respecto a las gráficas del espectro de la señal, se deben analizar los efectos que tienen, sobre el espectro de la señal, las propiedades de:

- Multiplicación por un escalar.
- Cambio de escala.
- Traslación en el tiempo.
- Traslación en frecuencia.

Solución

Realización de los cálculos matemáticos de la Transformada de Fourier de la señal asignada, la formula empleada para el cálculo de la transformada es la siguiente:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

Recordando que del primer trabajo, la función correspondiente a la pendiente de la gráfica se expresa de la siguiente manera:

$$x(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \tag{2}$$

Esta función lineal se encuentra limitada por un intervalo de duración 4 segundos, como valor mínimo se tiene $-\frac{1}{2}$ y valor máximo $\frac{7}{2}$, lo que hace que esta función se vea como un "diente de sierra", por tanto su función más representativa o su intervalo descriptivo es el siguiente:

$$x(t) = \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) rect\left(\frac{t}{4} + \frac{3}{8}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}; & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{7}{2} \\ 0; & p.o.c. \end{cases} \tag{3}$$

El proceso para obtener la Transformada de Fourier de la ecuación 3 se realiza a continuación, donde el valor $x(t)$ de la ecuación 1 será la ecuación 2, y el valor de los intervalos de la integral serán los que limitan la función lineal, como se menciono anteriormente: [1]

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(f) &= \int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) e^{-j2\pi ft} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} te^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{2}{3}+2} e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \\
&= \frac{jt}{8\pi f}e^{-j2\pi ft} + \frac{1}{16\pi^2 f^2}e^{-j2\pi ft} + \frac{j}{16\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{\frac{3}{2}-2}^{\frac{3}{2}+2} \\
&= \frac{je^{-j2\pi ft\left(\frac{3}{2}+2\right)}}{8\pi f}\left[\left(\frac{3}{2}+2\right) + \frac{1}{j8\pi f} + \frac{1}{8}\right] - \frac{je^{-j2\pi ft\left(\frac{3}{2}-2\right)}}{8\pi f}\left[\left(\frac{3}{2}-2\right) + \frac{1}{j8\pi f} + \frac{1}{8}\right] \\
&= \frac{e^{-j3\pi f}e^{-j4\pi f}}{4\pi f}\left(\frac{j3}{4} + j + \frac{j}{4} + \frac{1}{4\pi f}\right) - \frac{e^{-j3\pi f}e^{j4\pi f}}{4\pi f}\left(\cancel{\frac{j3}{4}} - \cancel{j} + \cancel{\frac{j}{4}} + \frac{1}{4\pi f}\right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{16\pi^2 f^2} + \frac{j}{2\pi f}\right)e^{-j4\pi f} - \frac{e^{j4\pi f}}{16\pi^2 f^2}\right]e^{-j3\pi f}
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier

$$\boxed{\tilde{x}(f) = \frac{e^{-j7pif}(1 - e^{j8\pi f} + j8\pi f)}{16\pi^2 f^2}} \tag{4}$$

Bibliografía

[1] M. Silva, “Ejercicio Transformada de Fourier,” *Notas de clase*, 2021.

[2] ——, “Capítulo II: Análisis de Fourier,” *Notas de clase*, págs. 50-69, 2021.