Transformada de Fourier

Jefry Nicolás Chicaiza[1] y Jose Nicolás Zambrano[2]
[1] jefryn@unicauca.edu.co
[2] jnzambranob@unicauca.edu.co

1. Introducción

En el siguiente documento se desarrollará el informe del Trabajo 2 de la asignatura Teoría de las telecomunicaciones 1. El trabajo presenta inicialmente el desarrollo analítico de la Transformada de Fourier a la señal planteada, la cual es del tipo "diente de sierra"trasladado en el tiempo y no periódica.

Iniciar con el desarrollo analítico es necesario debido a que para alcanzar los resultados esperados en la simulación, se requiere conocer de antemano la función que representa dicha Transformada de la señal, esto permitirá comprobar los resultados obtenidos por medio de un algoritmo realizado en MATLAB.

Adicionalmente, las comprobaciones que se plantearán en simulación se realizan a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier Transform), que es una clase de algoritmo computacional usado en el procesamiento de señales digitales para reducir en gran medida el número de cálculos en el uso de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su inversa, hace de la DFT un procesamiento viable e indispensable [1].

Cabe destacar que la finalidad principal de este documento será realizar una comprobación de ¿Cómo se ve afectado el espectro en frecuencia al modificar ciertos parámetros de la señal? Para lo que se espera que la modificación de un parámetro que afecte directamente al espectro de la magnitud, también afecte a su componente en fase.

Finalmente, el documento cuenta con una sección para la validación de los diferentes procesos empleados y el planteamiento de un plan de pruebas para analizar los efectos que presentan algunas propiedades consideradas para la investigación de este documento, además de una sección de análisis de resultados y discusión, y seguido de la sección de conclusiones.

2. Metodología

La metodología que se empleo para el desarrollo de la Transformada de Fourier a la señal planteada se logró mediante la aplicación de los teoremas del material guía a este documento, inicialmente se realizó el cálculo analíticamente para considerar un resultado a partir de dicha teoría y poder comprobar el resultado en una simulación computacional.

Para realizar el proceso del cálculo de la transformada de la señal, es importante mencionar de donde surge el término de la Transformada de Fourier, surge a partir del estudio de señales periódicas que son representadas por las Series de Fourier, sin embargo, el estudio de las señales se interrumpe por las señales aperiódicas por no cumplir con la condición de periodicidad [2]. Por tanto, se plantea que las señales no periódicas se pueden ver como señales de periodos largos (que tienda al infinito), de esta forma la separación de sus componentes espectrales es despreciable y el espectro de estas señales es continuo [3].

Dado que la señal es no periódica, hablar de potencia promedio no seria adecuado debido a que la magnitud tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, en este caso la señal tiene una energía finita, la cual se define por una integral que puede existir o converger a un valor diferente de cero o indeterminado. Esta es la condición para que una señal pueda representarse en el dominio de la frecuencia utilizando la Transformada de Fourier [4]. Para la función de interés de este documento su valor de energía es:

$$\epsilon_x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \left|\frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$

Después de comprobar que la señal tiene una energía definida y es posible denominarla como no periódica, se procedió a calcular la transformada de la señal resolviendo la integral característica del teorema, antes de esto se considera la función que representa la grafica de la señal de interés observada en la figura 1.

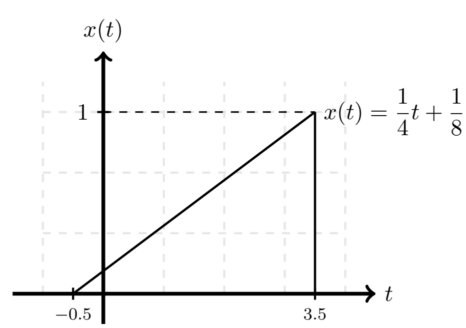


Figura 1: Gráfica de la señal asignada.

El resultado que se obtuvo de la transformada de esta señal con los intervalos observados en la figura 1 se aprecia en la ecuación 1 (el paso a paso del cálculo que se realizó para esta transformada se puede encontrar anexo junto a este documento).

$$\tilde{x}(f) = \frac{e^{-j7pif}(1 - e^{j8\pi f} + j8\pi f)}{16\pi^2 f^2} \tag{1}$$

Después de haber realizado el planteamiento de los fundamentos matemáticos requeridos para solucionar el problema, se procedió a realizar la planificación de la simulación requerida para verificar y analizar los escenarios planteados por el problema.

Se puede identificar 6 objetivos clave a desarrollar con la simulación en MATLAB:

1. Cálculo y representación gráfica de la transformada de Fourier de la señal.
2. Análisis de la Transformada versus FFT.
3. Análisis de los efectos sobre el espectro al multiplicar la señal por un escalar.
4. Análisis de los efectos sobre el espectro al cambiar de escala del dominio de la señal.
5. Análisis de los efectos sobre el espectro al trasladar la señal en el tiempo.
6. Análisis de los efectos sobre el espectro al trasladar la señal en el dominio de la frecuencia.

Después de realizar el análisis de los requerimientos anteriores, en la figura 2 se plantea un esquema general para el desarrollo de la simulación..

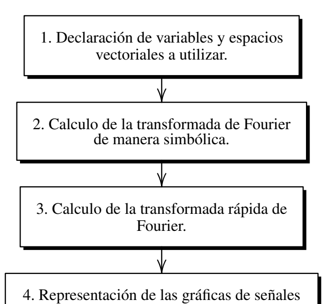


Figura 2: Diagrama para el desarrollo de la simulación.

Para la realización del Script de simulación se utilizó el paradigma de programación estructurada, ya que el mismo permite agilidad en el desarrollo del código, así como también facilita el desarrollo de los planteamientos matemáticos necesarios para lograr los objetivos de la simulación.Adicionalmente la programación estructurada, brinda al observador del código una perspectiva secuencial en el desarrollo del algoritmo de simulación, y, por lo tanto, un orden lógico y trazable de los resultados esperados en la ejecución de este.

2.1. Plan de pruebas

Retomando los 6 objetivos clave a desarrollar con la simulación, se plantea el siguiente plan de pruebas para los escenarios a realizar:

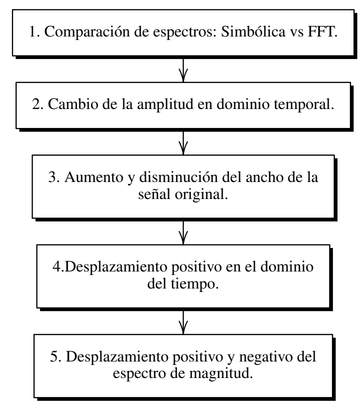


Figura 3: Diagrama para el plan de pruebas.

3. Análisis de resultados

Para alcanzar los resultados se realizó un único Script, que en primer lugar es capaz de obtener el valor de la Transforma de Fourier a partir de la solución de la integral característica del teorema, de tal manera que el resultado obtenido sea fácil de comparar. Además en el algoritmo se implemento un ciclo que es ideal para evaluar el resultado de la integral en un determinado intervalo de frecuencia, con el fin de representar las gráficas del espectro en frecuencia.

En segundo lugar, la implementación del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (mencionada en la sección 1) permitió validar que las gráficas obtenidos con la simulación de los cálculos son correctas. El proceso de comprobación de las gráficas inicialmente requirió de una buena implementación del algoritmo FFT para realizar una validez al aplicar la propiedad de dualidad que manifiesta que: $V(t) \rightarrow v(-f)$, donde la transformada en el dominio del tiempo su transformada será la señal original en el dominio de la frecuencia (en la simulación se realizaron las comprobaciones), por lo que se valida que la señal en el tiempo es discreta y en la frecuencia es de tipo periódico como nos plantea la teoría de la Transformada de Fourier.

Cabe destacar que el algoritmo desarrollado está pensado para generalizar los escenarios planteados en el plan de pruebas y permita alcanzar conclusiones completas del mismo.

3.1. Desarrollo del objetivo clave 1–Comparación de espectros: Simbólica versus FFT

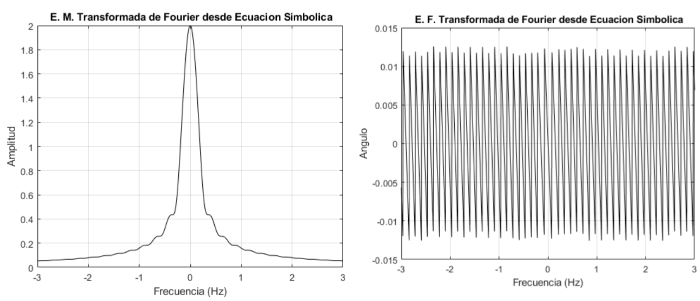
Antes de comparar y analizar los espectros obtenidos de los diferentes procesos en la siguiente figura se visualiza el resultado que retorna el programa de simulación al ejecutar la integral simbólica.

```
trfu =
```

$$\frac{e^{-7\pi f i}\,(1 - e^{8\pi f i} + 8\pi f i)}{16 f^2 \pi^2}$$

Figura 4: Resultado de la simulación de la Transformada de Fourier de la señal.

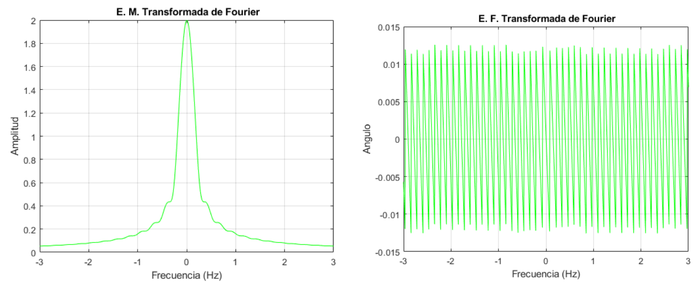
Realizando la comparación con la ecuación 1, se evidencia que se trata de la misma ecuación, por lo que se puede considerar que obtener la transformada de Fourier por medio de una integral simbólica es una buena alternativa. Además de comprobar el resultado numérico de los cálculos, se implementó en el algoritmo un ciclo capaz de evaluar el resultado de la figura 4 para poder representar las grafica del espectro de la frecuencia de la transformada de la señal planteada.



(a) (b)

Figura 5: Gráficas del espectro de frecuencia de los cálculos simulados. (a) Espectro de magnitud, (b) Espectro de fase.

A partir de las figuras 5a y 5b obtenidas en la simulación, se realizaron comprobaciones con ayuda del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (mencionada en la sección 1). las gráficas obtenidas por el cálculo de la FFT se observan en la figura 6.



(a) (b)

Figura 6: Gráficas del espectro de frecuencia de FFT. (a) Espectro de magnitud, (b) Espectro de fase.

En la figuras 6a y 6b es evidente observar la similitud con las graficas en la figura 5, por lo que el método de evaluar una función obtenida a partir de una integral simbólica, resulta ser efectiva para este tipo de actividades

Después de haber realizado estas validaciones para tener claridad acerca de lo que se observa en las gráficas, se dio inicio a la investigación que se plantea en este documento con el análisis de algunos escenarios que se idearon en la simulación. las propiedades de la Transformada de Fourier que se usaron para el análisis fueron:

- Multiplicación por un escalar.
- Cambio de escala.
- Traslación en el tiempo.
- Traslación en frecuencia.

3.2. Desarrollo del objetivo clave 2–Cambio de amplitud en el dominio temporal - Linealidad

La propiedad de linealidad indica que al realizarse la transformada de una función multiplicada por un escalar, se obtendrá como resultado la misma transformada pero multiplicada por el escalar de la siguiente forma:

$$Ax(t) \rightarrow A\tilde{x}(f) \tag{2}$$

Para la verificación de esta propiedad se evaluaron dos escenarios, uno en el cual se realiza la transformada simbólica y la FFT sin ningún tipo de modificación a la señal original y otro escenario donde se multiplica la señal original por un escalar arbitrario:

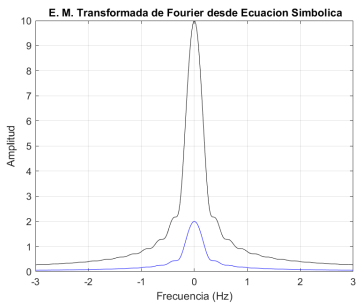


Figura 7: Gráficas del espectro: (negro) Espectro de magnitud con amplitud 5, (azul) Espectro de magnitud original.

Por inspección se confirma que la propiedad es aplicada correctamente al modificar los parámetros de la simulación para un escalar $A = 5$. Por confirmación, se evalúa la transformada simbólica en dos puntos específicos de frecuencia $0Hz$ y $1Hz$ para obtener confirmación numérica de la aplicación de la propiedad y se obtienen los resultados esperados para la ecuación 2.

3.3. Desarrollo del objetivo clave 3–Cambio de escala

La propiedad de cambio de escala indica que al realizarse la transformada de una función con un cambio de proporción en su variable independiente, se obtendrá una transformada con relación inversamente proporcional a ese cambio de la siguiente forma:

$$x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}\tilde{X}(\frac{f}{a}) \tag{3}$$

Para la verificación de esta propiedad se evaluaron dos escenarios; uno en el cual se realiza la transformada simbólica y la FFT sin ningún tipo de modificación a la señal original y otro escenario donde se cambia la escala así:

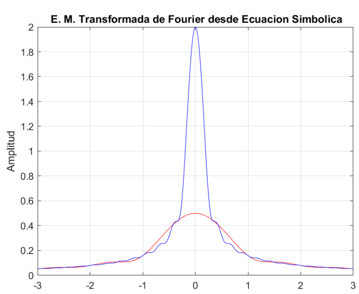


Figura 8: Gráficas del espectro: (rojo) Gráfica espectro de magnitud con escala $esc = 4$, (azul) Gráfica espectro de magnitud original.

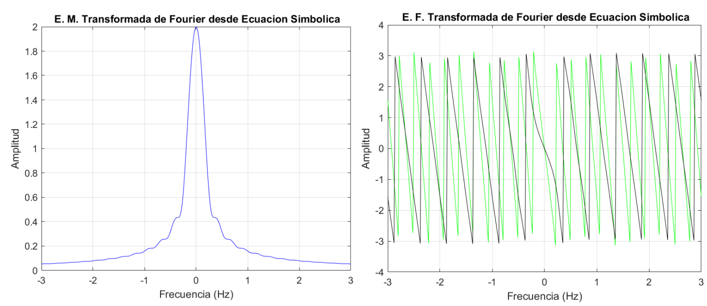
Se puede apreciar que al multiplicar la variable independiente "t"por un escalar $esc = 4$, el espectro de magnitud tiene un comportamiento descrito por la notación (3). Este comportamiento tiene un efecto similar al que se encontró en el taller anterior cuando se modificó en periodo de la señal. Desde un punto de vista aritmético, cambiar la escala de una función periódica, equivale a cambiar escalarmente el periodo de su frecuencia fundamental.

3.4. Desarrollo del objetivo clave 4–Translación en el dominio temporal

La propiedad de translación en el tiempo indica que al realizarse la transformada de una función que tiene un desplazamiento temporal, se obtendrá como resultado la transformada de la función original pero multiplicada por un exponencial complejo de la siguiente forma:

$$x(t - to) \rightarrow \tilde{X}(f)e^{-j2\pi fto} \tag{4}$$

Para la evaluación de este escenario se hace necesario tener en cuenta la información entregada por el espectro de fase, ya que en la notación (4) es notorio que el resultado de aplicar un desplazamiento temporal únicamente va a tener efectos en la parte imaginaria de la transformada de Fourier debido a la forma del exponencial complejo que acompaña al par transformado.



(a) (b)

Figura 9: (a) Superposición de espectros de magnitud, (b) Superposición de espectros de fase (verde) Fase sin aplicar desplazamiento - (negro) Fase al aplicar desplazamiento $sh = 2$.

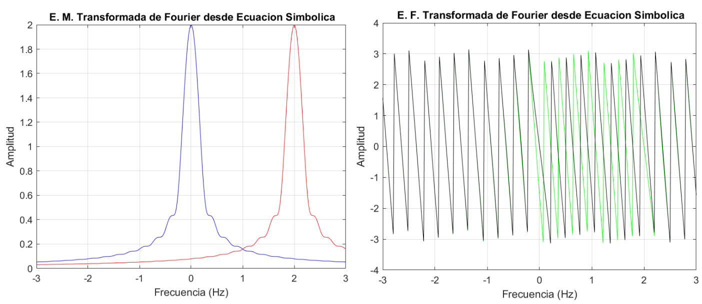
Al inspeccionar las gráficas obtenidas, se confirma que en el caso de translación temporal, el espectro de magnitud no sufre ninguna modificación; Sin embargo, el espectro de fase si cambia debido a que el movimiento de la señal en el dominio del tiempo refleja su información en la fase de la transformada.

3.5. Desarrollo del objetivo clave 5–Translación en el dominio de la frecuencia

La propiedad de translación en frecuencia indica que al realizarse la transformada de una función en el tiempo la cual esta multiplicada por un exponencial complejo tal que cause un cambio en la frecuencia, se obtendrá como resultado la misma transformada pero desplazada en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma:

$$x(t)e^{j2\pi fot} \rightarrow \tilde{X}(f - fo) \tag{5}$$

Al realizar los cambios en la simulación, se obtuvieron los siguientes resultados:



(a) (b)

Figura 10: (a) Superposición de espectros de magnitud (azul) original (rojo) con desplazamiento $shf = 2$, (b) Superposición de espectros de fase (verde) Fase sin aplicar desplazamiento - (negro) Fase al aplicar desplazamiento $shf = 2$.

Se evidencia gráficamente que el espectro de magnitud de la señal presenta un desplazamiento hacia la derecha, esto producto de la multiplicación por el exponencial complejo en el dominio del tiempo. El espectro de fase también presenta un cambio justo en el rango de frecuencias donde se presenta el desplazamiento ($0 < f < 2$). Cabe resaltar que multiplicar la señal en el dominio del tiempo por un exponencial complejo, lleva irrevocablemente a la señal al plano complejo, por lo que la señal real original se convierte en la magnitud o valor absoluto de esta señal compleja resultante.

4. Conclusiones

En el dominio del tiempo cuando se tiene una señal de tiempo discreto o de periodo infinito, su magnitud en frecuencia tiende a ser cero en el infinito, por tanto sus valores de intensidad decaen generando que su potencia promedio tienda a cero. Por ello se concluye que al tratarse con señales de periodo infinito se define la energía total que existe en vez de la potencia.

Debido a una relación biunívoca que existe entre una función en el dominio del tiempo con su dominio de frecuencia pueden formar únicamente un par transformado. por esta razón una señal no puede tener dos o más transformadas de Fourier.

La propiedad de cambio de escala muestra un efecto de compresión cuando su parámetro es mayor a la unidad y de expansión cuando es menor a la unidad, así mismo su valor cuando es negativo se produce su invertida, lo cual produce una modificación en el periodo. Por tanto los efectos de esta propiedad causara una modificación recíproca en la magnitud de la frecuencia.

Al evaluar la propiedad de desplazamiento en frecuencia, se evidenció gráficamente que la misma equivale a multiplicar una señal armónica simple y convertir a la señal original en su envolvente. Si se aplica la función de valor absoluto sobre esta multiplicación, se obtiene nuevamente la señal original, por lo cual, se podría afirmar que la componente armónica esta dando forma o 'modulando' a la señal original.

La translación de una señal en el dominio del tiempo no genera cambios de ningún tipo en el espectro de magnitud de la señal. Los cambios únicamente se ven reflejados en el espectro de fase de la misma.

De acuerdo a la relación obtenida de la simulación entre los tiempos de computo de la función FFT y los valores de la transformada de Fourier obtenidos desde la ecuación calculada simbólicamente, se concluye que la función FFT es mas de 1000 veces mas rápida que la sustitución de valores en una ecuación simbólica.

Bibliografía

[1] A. D. Poularikas, *Signals and Systems Primer with MATLAB*, 1st ed. Florida, Boca Ratón: CRC Press, 2007, pág. 189, ISBN: 9781420006957. DOI: https://doi.org/10.1201/b13774.

[2] V. H. Sauchelli, *Teoria de senales y sistemas lineales*, es. Jorge Sarmiento Editor - Universitas, 2020, pág. 310, ISBN: 9789879406731. dirección: https://elibro.net/es/lc/unicauca/titulos/175159.

[3] M. Silva, "Capítulo II: Análisis de Fourier," *Notas de clase*, págs. 50-69, 2021.

[4] I. V. Fabián y M. Pérez, "TEORÍA DE TELECOMUNICACIONES I Sistemas Analógicos," dirección: http://artemisa.unicauca.edu.co/%7B~%7Dvflorez/TTL1/Documento%20Clase%20-%20Teoria%20de%20Telecomunicacion%20I%20VM.pdf.