



Universidad
del Cauca

Transformada de Fourier

Jefry Nicolás Chicaiza¹ y Jose Nicolás Zambrano²

¹jefryn@unicauca.edu.co

²jnzambranob@unicauca.edu.co

1. Introducción

En el siguiente documento se desarrollará el informe del Trabajo 2 de la asignatura Teoría de las telecomunicaciones 1. El trabajo presenta inicialmente el desarrollo analítico de la Transformada de Fourier a la señal planteada, la cual es del tipo "diente de sierra" trasladado en el tiempo y no periódica.

Iniciar con el desarrollo analítico es necesario debido a que para alcanzar los resultados esperados en la simulación, se requiere conocer de antemano la función que representa dicha Transformada de la señal, esto permitirá realizar una comparación para llegar a confirmar que se hizo una correcta adecuación del algoritmo realizado en MATLAB.

Posteriormente se abordaran las hipótesis planteadas en el documento guía del trabajo y se buscará llegar a conclusiones y síntesis a partir de los datos obtenidos en la simulación de los diferentes escenarios.

Los teoremas e hipótesis nos dicen que la serie de Fourier de cualquier señal periódica de potencia finita la podemos obtener por medio de una suma infinita de funciones sinusoidales. La serie de Fourier de una señal pueden expresarse de dos maneras, una representada por serie trigonométrica y otra con representación de serie compleja.

En este documento unicamente se realiza los cálculos de la serie de Fourier para la señal propuesta con la representación trigonométrica, que observamos a continuación:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Donde los términos a_0 , a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier, de los cuales es necesario realizar cálculos para encontrar sus valores y lograr representar la serie de la señal dada.

El desarrollo de este documento esta constituido por una sesión que brinda información de como se obtuvo las diferentes expresiones y el plan de pruebas, que hacen posible la implementación de variados escenarios en la simulación.

2. Metodología

La metodología empleada para el desarrollo de la serie de Fourier a la señal planteada se logro mediante la aplicación de los teoremas e hipótesis, en el apartado anterior se menciono la necesidad de calcular los valores de ciertos términos para logra obtener la representación matemática de la serie de Fourier de la señal planteada.

En primer lugar es importante conocer el comportamiento que nos describe los términos, el primer termino de la serie, a_0 , no está asociado con una frecuencia y es una constante, además es conocido como el nivel DC de la señal, representa el cambio de la señal sobre un nivel arbitrario de referencia. Este termino lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (2)$$

De la expresión anterior podemos deducir que el termino DC representa el área bajo la curva de la señal [1], que hasta el momento no conocemos la función que la representa, por



Universidad
del Cauca

tanto es necesario obtener la función a partir de su gráfica. En la figura 1 observamos la señal asignada.

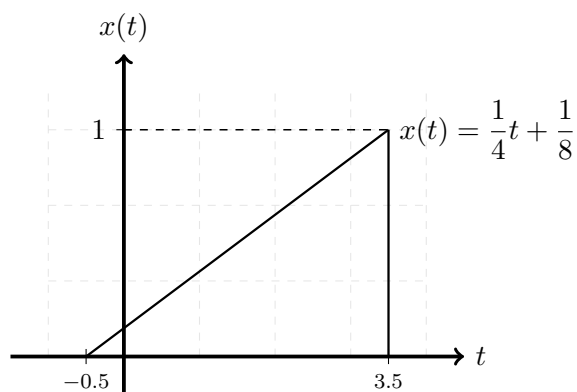


Figura 1: Gráfica de la señal tipo "diente de sierra" no periódica.

En [2] se menciona que durante el intervalo en el que se presenta la señal, la función que responde a una onda diente de sierra se da de la siguiente manera:

$$x(t) = \frac{A}{T}t$$

Por lo que la función a la que responde la señal que se plantea debe ser del mismo modo, la expresión de la señal es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \quad (3)$$

Ahora que conocemos la expresión de la señal se procederá a obtener el valor del término a_0 , con las ecuaciones 2 y 3:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{8} \right) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Para el valor de los términos restantes es importante mencionar que con frecuencia las simetrías simplifican a los problemas matemáticos. En el caso de la serie de Fourier, se

utiliza la simetría en la paridad para simplificar el problema. En el caso de funciones pares el desarrollo de la serie de Fourier implica solamente la necesidad de calcular a_0 y a_n , y sólo b_n para impares [3].

La señal que concierne a este texto podemos deducir de su gráfica (figura ??) que no se comporta igual que su imagen respecto al eje y , ni tampoco hay presencia de simetría al rotar la gráfica en 180 grados. Por tanto, se trata de una función sin paridad, lo que implica la necesidad de calcular todos los términos de la serie trigonométrica de Fourier.

Las siguientes expresiones corresponden al cálculo de los coeficientes a_n y b_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (6)$$

los resultados obtenidos al realizar los cálculos para los coeficientes son los siguientes (los cálculos que se presentan en este documento están simplificados, por tal motivo se integra el paso a paso en el apartado de Anexos):

■ Cálculo a_n

$$a_n = \frac{1}{8} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} t \cos(2\pi n f_0 t) dt + \frac{1}{16} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \right) \quad (7)$$

■ Cálculo b_n

$$b_n = \frac{1}{8} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} t \sin(2\pi n f_0 t) dt + \frac{1}{16} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(\sin\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \right) \quad (8)$$

Lo siguiente será completar la serie de Fourier para obtener la representación matemática de las funciones sinusoidales



Universidad
del Cauca

que construyen la señal planteada, reemplazamos las ecuaciones 7 y 8 en la ecuación 1:

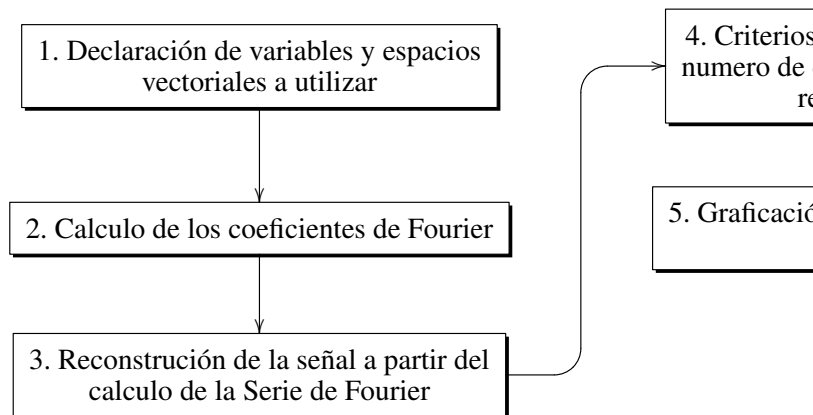
un análisis de la serie de Fourier a través de una simulación realizada en computadora, en ella podremos visualizar como se resuelve para cientos, o incluso miles, de componentes. Podemos comprobar qué tan buena es la representación reconstruyendo la señal utilizando diferentes cantidades de componentes, para esto se realizaran pruebas con un Script desarrollado en MATLAB.

Después de haber realizado el planteamiento de los fundamentos matemáticos requeridos para solucionar el problema, se procedió a realizar la planificación del diseño practico requerido para solucionar el mismo.

Se pueden identificar 6 objetivos clave a desarrollar con la simulación en MATLAB:

1. Reconstrucción de la señal dada a partir de la serie de Fourier.
2. Justificación del número de coeficientes necesarios para ua reconstrucción adecuada de la señal original.
3. Análisis del espectro de magnitud cuando el periodo T de la señal reconstruida cambia.
4. Análisis del espectro de magnitud cuando se agrega espacio de tiempo donde $x(t) = 0$ entre los pulsos periódicos "diente de sierra".
5. Análisis de la continuidad del número de coeficientes necesarios cuando el periodo de la señal cambia.
6. Análisis de la continuidad del número de coeficientes necesarios cuando se agregan ceros como en el objetivo 4.

Después de realizar el análisis de los requerimientos anteriores, se plantea el siguiente esquema general para el desarrollo de la simulación:



Para la realización del script de simulación se utilizó el paradigma de programación estructurada, ya que el mismo permite agilidad en el desarrollo del código, así como también facilita el desarrollo de los planteamientos matemáticos necesarios para lograr los objetivos de la simulación.

Adicionalmente la programación estructurada, brinda al observador del código una perspectiva secuencial en el desarrollo del algoritmo de simulación, y, por lo tanto, un orden lógico y trazable de los resultados esperados en la ejecución de este.

2.1. Plan de pruebas

Retomando los 6 objetivos clave a desarrollar con la simulación; se plantea el siguiente plan de pruebas para cadaa uno de ellos:

Análisis de Resultados

Para la obtención de los resultados se realizaron dos scripts en MATLAB. En el primer script se realizó el calculo de los coefientes de Fourier de manera manual y se transcribieron los resultados al código. En dicha simulación, los coeficientes A_n cuando n es mayor que 0, se cancelaban. Esta primera simulación resultaba valida para reconstruir la señal original a partir de la expresión de la serie de Fourier, sin embargo, evaluar los diferentes escenarios de pruebas planteadas en el trabajo como agregar espacios en blanco o modificar el periodo de la señal requeriría de cambios



Universidad
del Cauca

Transformada de Fourier aplicado a una función Diente de Sierra no periódica Teoría de telecomunicaciones I, Grupo A12 11 de abril de 2021

drásticos en la escritura y evaluación del código.

El anterior escenario fue motivación para realizar una segunda versión del script, que permitiera generalizar los escenarios planteados en el trabajo y permitiera alcanzar conclusiones completas del mismo.

El segundo código realiza los cálculos de los coeficientes de manera simbólica, los cuales luego son evaluados en vectores numéricos aumentando así su velocidad de procesamiento. El límite práctico en tiempo de ejecución se encontró en un valor cercano a los 5000 armónicos. Sin embargo, debido a que no es necesaria tal cantidad de cálculos, se acotó el máximo posible de armónicos a 100, los cuales permiten de manera suficiente alcanzar los objetivos esperados del trabajo.

Desarrollo del Objetivo Clave 1–Reconstrucción de la señal

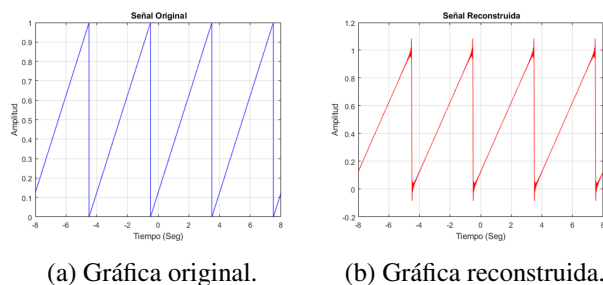


Figura 2: Gráficas del primer script.

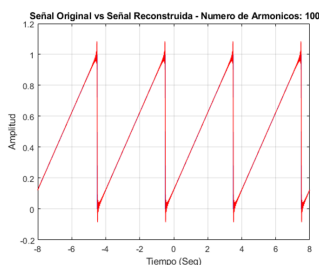


Figura 3: Gráfica sobrepuestas de la señal original y reconstruida.

En las figuras 2a, 2b y 3 se puede observar el principal resultado visible de esta simulación: Al desarrollar

computacionalmente la sumatoria de la serie de Fourier se obtiene como resultado una señal gráficamente muy similar a la señal original. Se observan similitudes en las regiones continuas del diente de sierra o rampa. Sin embargo, como es de esperarse, las señales no son completamente idénticas, ya que en los puntos de discontinuidad de la señal periódica original se generan picos de amplitud explicados por el fenómeno de Gibbs. Las figuras anteriormente expuestas corresponden a una simulación realizada con la sumatoria de los 100 primeros armónicos. Mas adelante se abordarán escenarios de simulación con diferentes cantidades de armónicos en la serie.

Desarrollo del Objetivo Clave 2–Justificación del Numero de Coeficientes

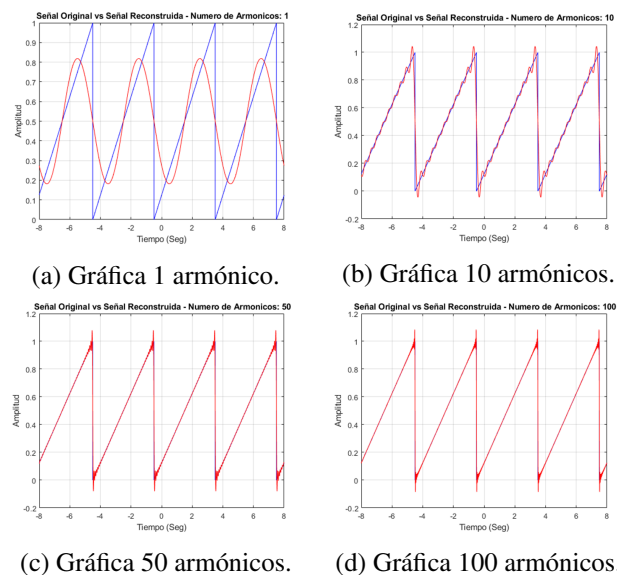


Figura 4: Gráficas sobrepuestas de las señales con diferente número de armónicos.

Para justificar la cantidad de coeficientes o armónicos que son necesarios para reconstruir esta señal de manera adecuada, se usaran dos criterios diferentes: **La igualdad de Parseval** y el **fenómeno de Gibbs evaluado en el punto de la discontinuidad**.

Se considerará que la cantidad de armónicos es suficiente cuando la relación entre los dos lados de la igualdad de



Universidad
del Cauca

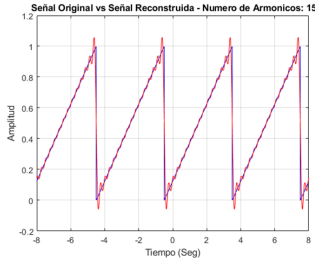


Figura 5: Gráficas sobrepuestas de las señales para 15 armónicos.

Parseval **supere el 99 % de similitud**, esto es:

$$\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=narm} (a_n^2 + b_n^2)$$

Por lo tanto, para encontrar el ratio de similitud proponemos la siguiente expresión:

$$100 \frac{\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=narm} (a_n^2 + b_n^2)} > 99$$

Evalutando en la simulación encontramos que en el armónico $narm = 15$, el ratio de similitud supera el 99 % ubicándose en 99.0198 %. Esta es la señal reconstruida para ese número de armónicos:

Como segundo criterio de confirmación de la cantidad de armónicos necesarios para la reconstrucción de la señal, evaluamos la vecindad de la discontinuidad en $t = 3.5$ para confirmar que el valor de la señal reconstruida en la discontinuidad es igual a el valor medio de la suma de los limites por la izquierda y por la derecha en la señal original, es decir:

$$Sf(t_0) \cong \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

donde $t_0 = 3.5$ que es el valor de la discontinuidad. Al evaluar en la simulación confirmamos que:

$Sf(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = 0.5000$ por lo que se confirma que el fenómeno de Gibbs en la desigualdad converge a

su valor medio. Por lo tanto, verificamos que 15 armónicos son suficientes para tener una reconstrucción aceptable de la señal.

Desarrollo del Objetivo Clave 3 – Análisis del espectro de magnitud cuando el periodo T cambia

Para desarrollar este objetivo clave se realizaron 4 escenarios diferentes de simulación variando la duración del diente de sierra, es decir, su periodo. Se realiza las simulaciones con un número de 100 armónicos; esto se hace para poder apreciar mejor el espectro de magnitud discreto con los 100 valores obtenidos.

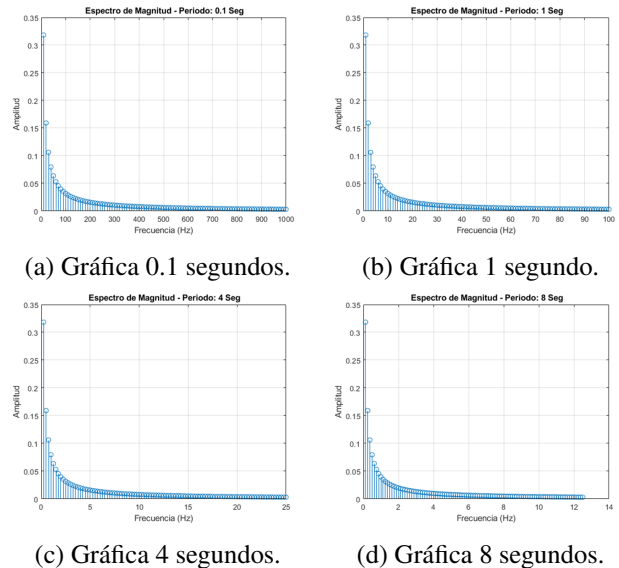


Figura 6: Gráficas del espectro de magnitud en 4 valores de T diferentes.

se puede apreciar que las magnitudes de cada armónico se mantienen iguales en todos los periodos simulados. Esto indica que el **cambio en el periodo de la señal no afecta a las magnitudes** debido a que la **forma de la señal periódica permanece igual y el periodo es compensado por el cambio de la pendiente de la rampa**, por lo cual las integrales que definen a los coeficientes permanecen iguales ya que sus periodos se normalizan. Para el periodo afecta directamente a la frecuencia.

Se puede concluir que un cambio en el periodo de la señal



Universidad
del Cauca

Transformada de Fourier aplicado a una función Diente de Sierra no periódica Teoría de telecomunicaciones I, Grupo A12 11 de abril de 2021

únicamente cambia el valor de frecuencia normalizada al que pertenece cada armónico. Para periodos mas pequeños, se tiene que la frecuencia aumente, y para periodos grandes la frecuencia disminuye tal cual la definición formal de frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

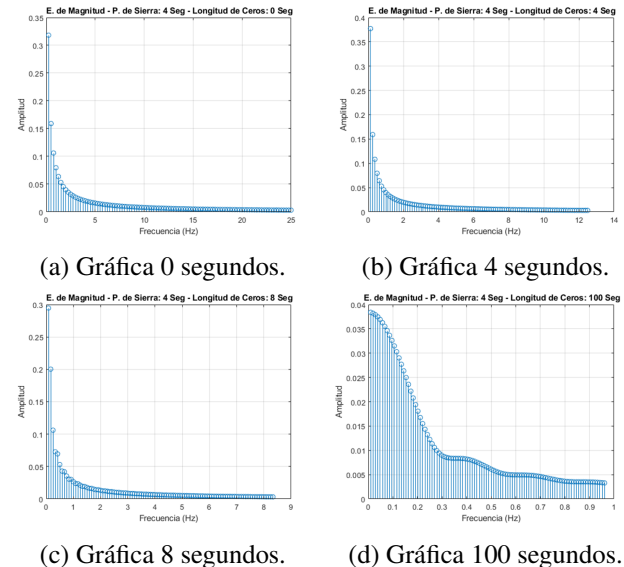


Figura 7: Gráficas del espectro de magnitud en 4 valores de T diferentes.

Se puede evidenciar que para este caso si existen cambios en las componentes del espectro de magnitud. Hay tres cambios principales:

1. Cambio en la amplitud de las magnitudes de los armónicos, los cuales tienden a disminuir cuando se aumenta la longitud de los ceros. Esto nos indica que entre mas se aumenten los ceros, la magnitud y por lo tanto la energía de la señal tiende a cero.
2. Cambio en la frecuencia normalizada de cada armónico debido al cambio de la frecuencia de la nueva señal resultante.
3. Cambio en la diferencia de magnitud entre cada armónico la cual se presenta porque todos los armónicos sin excepción tienden a aproximarse a cero.

En la ultima gráfica puede apreciarse que la envolvente del espectro de magnitud tiene la forma de un seno cardinal rectificado, pero sin cruces por cero, esto debido al cambio en la composición de los coeficientes antes mencionada.

Desarrollo del Objetivo Clave 5 – ¿El número de coeficientes requeridos cambian cuando T cambia?

Desarrollo del Objetivo Clave 4 – Análisis del espectro de magnitud cuando se agregan ceros

En este escenario se simulan ceros añadidos al terminar cada diente de sierra; el periodo del diente se mantiene constante en 4 segundos, y se varia la longitud de los ceros en 4 escenarios: sin ceros, 4 segundos, 8 segundos y 100 segundos de ceros. El periodo se esta **nueva señal resultante** está definido por: $T = \frac{1}{T_0 + T_r}$ donde T_0 es el periodo de duración de los ceros y T_r es el periodo del pulso diente de sierra. Este cambio en el periodo completo de la señal afecta directamente el calculo de los coeficientes debido al cambio que existe en la frecuencia fundamental dentro de las integrales. Para estos casos, los coeficientes A_n ya no se cancelan y se forman otro tipo de coeficientes basados en la función seno cardinal.



Universidad
del Cauca

Transformada de Fourier aplicado a una función Diente de Sierra no periódica Teoría de telecomunicaciones I, Grupo A12 11 de abril de 2021

Los valores que se toman para este escenario son $T = (0.1, 1, 4, 8, 100)$, es decir, los mismos periodos que para el Objetivo 3 sin ceros añadidos; se adiciona el valor de 100 para llevar el periodo a un valor mucho más grande que el valor del periodo original de la señal. En esta ocasión se limita a simular y comparar los resultados de la identidad de Parseval para cada uno de los periodos a evaluar y a observar el fenómeno de Gibbs en las discontinuidades, como se hizo en el Objetivo 2.

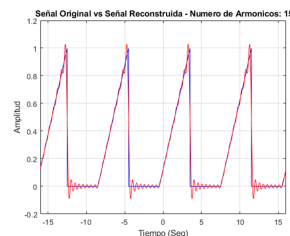
De los valores en la tabla se puede concluir que el cambio en el periodo del diente de sierra no afecta el número de armónicos requeridos como mínimo para reconstruir la señal. Esto ocurre debido a que las funciones periódicas que componen a los coeficientes se ajustan proporcionalmente al ancho del pulso, modificando de forma proporcional su frecuencia fundamental.

Para el caso del valor de la serie en la discontinuidad para el periodo $T = 8$, este desfase ocurre porque la simulación computarizada no tiene valores infinitos para definir el vector de tiempo y el vector de la serie de Fourier. Todos los valores son discretos, por lo que hay escenarios en los cuales el tiempo t no está definido para el valor exacto donde se presenta la discontinuidad. Esto hace que se presente un error de cuantificación el cual se evade parcialmente en la simulación encontrando el valor más cercano a la discontinuidad y tomando ese valor.

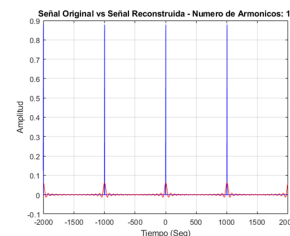
Desarrollo del Objetivo Clave 6 – ¿El número de coeficientes requeridos cambian cuando se agregan ceros

Tomando como referencia los mismos valores del Objetivo 4; se simulan los mismos escenarios: $T_0 = (0, 4, 8, 100, 1000)$. Se agrega el valor de 1000 con el objetivo de evaluar si la forma de la señal reconstruida mantiene su integridad. El periodo de la rampa se mantiene constante en 4 segundos.

Es evidente que al igual que en el objetivo 4, el agregar ceros a la función original modifica de manera importante a la señal reconstruida. Para este caso se observa que, para cada escenario de simulación, es necesario aumentar el número de armónicos si se quiere continuar con el criterio de aceptación de la señal.



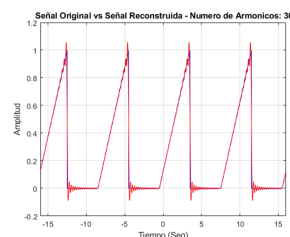
(a) Gráfica de la señal original para un periodo de ceros de 4 segundos.



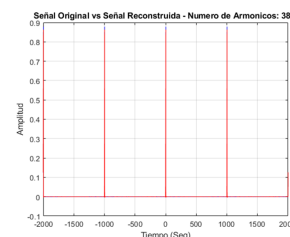
(b) Gráfica de la señal original para un periodo de ceros de 1000 segundos.

Se encuentra por sustitución el número de armónicos requeridos para obtener nuevamente el criterio establecido del 99 por ciento, encontrando así los siguientes valores:

Se concluye que el número de armónicos requeridos para tener una reconstrucción adecuada de la señal aumenta proporcionalmente a la duración del periodo de ceros añadido.



(a) Señal de periodo de ceros 4 seg. reconstruida con los 1000 armónicos requeridos.



(b) Señal de periodo de ceros 1000 seg. reconstruida con los armónicos requeridos.

Sin embargo, a pesar de que el criterio de la igualdad de Parseval se puede mantener, no se puede decir lo mismo del criterio de Gibbs. Esto ocurre debido a que, para valores del periodo de ceros muy grande, el **fenómeno de Gibbs** añade demasiada oscilación en la vecindad de la discontinuidad. Una forma de solucionar esto es aumentar el tiempo de muestreo en el vector del tiempo (eje de abscisas para la serie), sin embargo, el tiempo computacional requerido por el número de armónicos tan grande crecería, además, proporcionalmente al aumento en el valor del muestreo; Por lo que la simulación se toma computacionalmente difícil.



Universidad
del Cauca

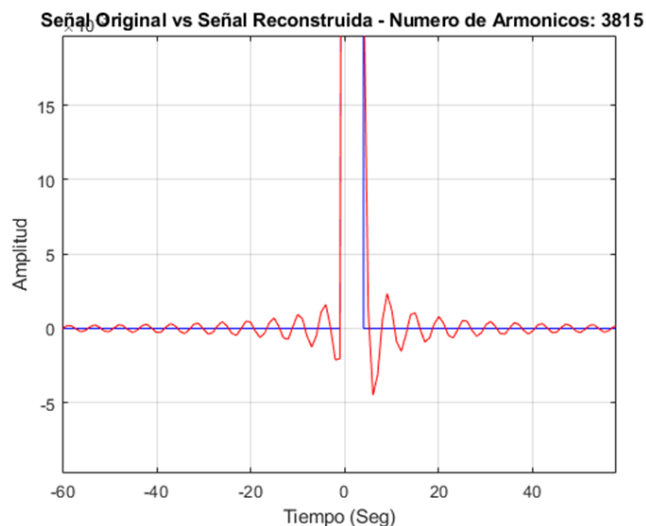


Figura 10: Fenómeno de Gibbs evidenciado en la señal de periodo de ceros de 1000 segundos.

Conclusiones

Se concluye que una adecuada optimización del código es necesaria para la evaluación de cantidades considerables de armónicos. Una inadecuada implementación del código puede llevar a hacer inviable la simulación en situaciones de múltiples repeticiones. Además el uso de cálculos numéricos en vez de cálculos simbólicos acelera el tiempo de ejecución del algoritmo de simulación.

Un adecuado plan de pruebas es necesario antes de iniciar con la construcción de un algoritmo de simulación. Esto debido a que si se inicia construyendo primero la simulación, se corre el riesgo de perder trabajo debido a un inadecuado planteamiento del algoritmo.

La igualdad de Parseval es una herramienta simple y adecuada para evaluar si la reconstrucción de una señal a partir de la serie de Fourier es adecuada o no. Por otro lado, el criterio de Gibbs presenta dificultades para su evaluación en sistemas de tiempo discreto como lo es una simulación computacional. Esto debido a la incertidumbre generada en los puntos de desigualdad y al error de cuantificación que se introduce debido a ello.

Agregar ceros entre las repeticiones de un pulso periódico

causa que el espectro de magnitud se empiece a asemejar al espectro de magnitud de un tren de pulsos rectangulares. Otro aspecto a considerar es el desplazamiento temporal de una función periódica no causa modificaciones a su espectro magnitud.

Referencias

- [1] M. Silva, “Capítulo II: Análisis de Fourier,” Notas Cl., pp. 3–70, 2021.
- [2] A. Engineering, M. Subject, L. Transform, and O. F. Periodic, “Snpit & rc,” p. 11, [Online]. Available: <https://www.slideshare.net/surtikaushal/laplace-periodic-function-with-graph>.
- [3] E. Rojero, “Matemáticas Avanzadas,” Univ. Nac. Autónoma México, vol. 0.1, p. 52, 2009, [Online]. Available: <https://openlibra.com/es/book/download/matematicas-avanzadas>.