Universidad del Cauca

ISO 9001

ISO 9001: SC-CER450832

IQNet: CO- SC-CER450832

Una Acreditación con Rostro Humano

Hacia una Universidad comprometida con la paz territorial

Universidad del Cauca

Capítulo 3: Sistemas LTI

Sistemas LTI

Un sistema es un dispositivo/ función/ operación/ transformación que relaciona una señal de salida $y(t)$ con una señal de entrada $x(t)$, donde: $y(t) = F\{x(t)\}$

F es la relación funcional entrada/salida.

Ej:

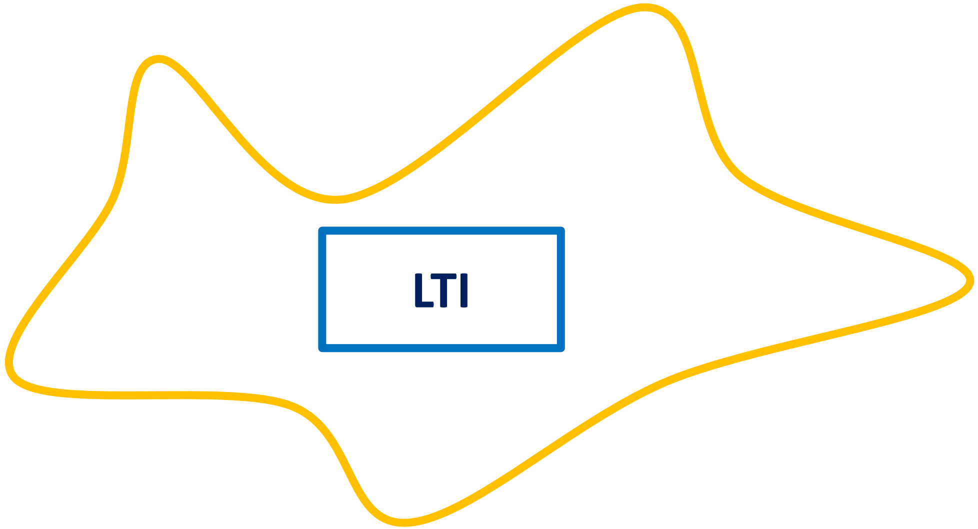
$$y(t) = x^2(t) + 1$$

$$y(t) = 3x(t)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t) + 8$$

$$y(t) = \int_{-t}^{t} x(u)du$$

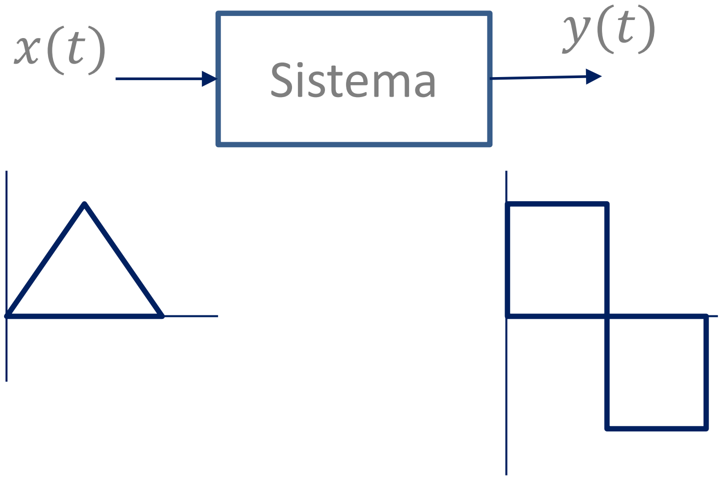
Sistemas LTI

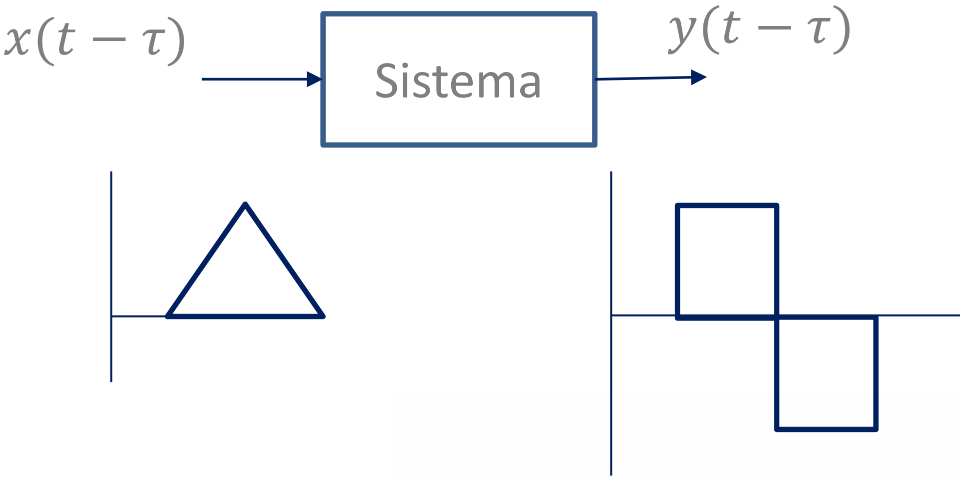


Los sistemas LTI son un subconjunto de los sistemas. Las propiedades de los sistemas LTI son deseables, ya que facilitan el análisis, por esto, en la medida de lo posible, se busca aproximar a sistemas LTI.

Propiedades de los Sistemas LTI

Temporalmente Invariante

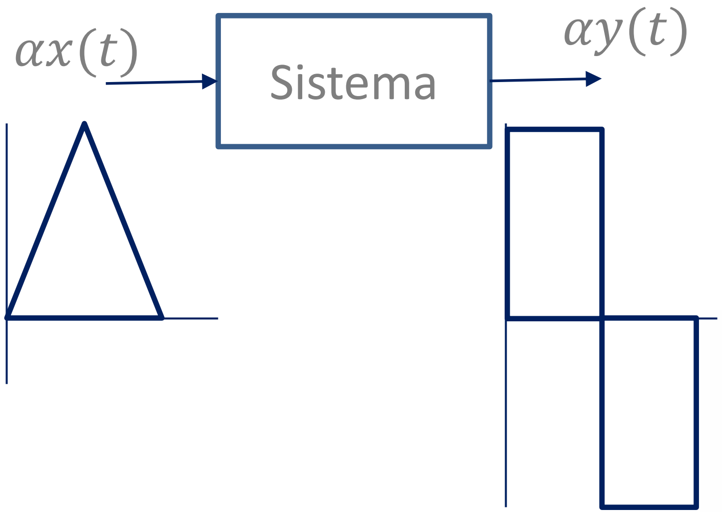




Propiedades de los Sistemas LTI

Linealidad: Para que un sistema sea lineal debe ser aditivo y escalable (homogéneo).

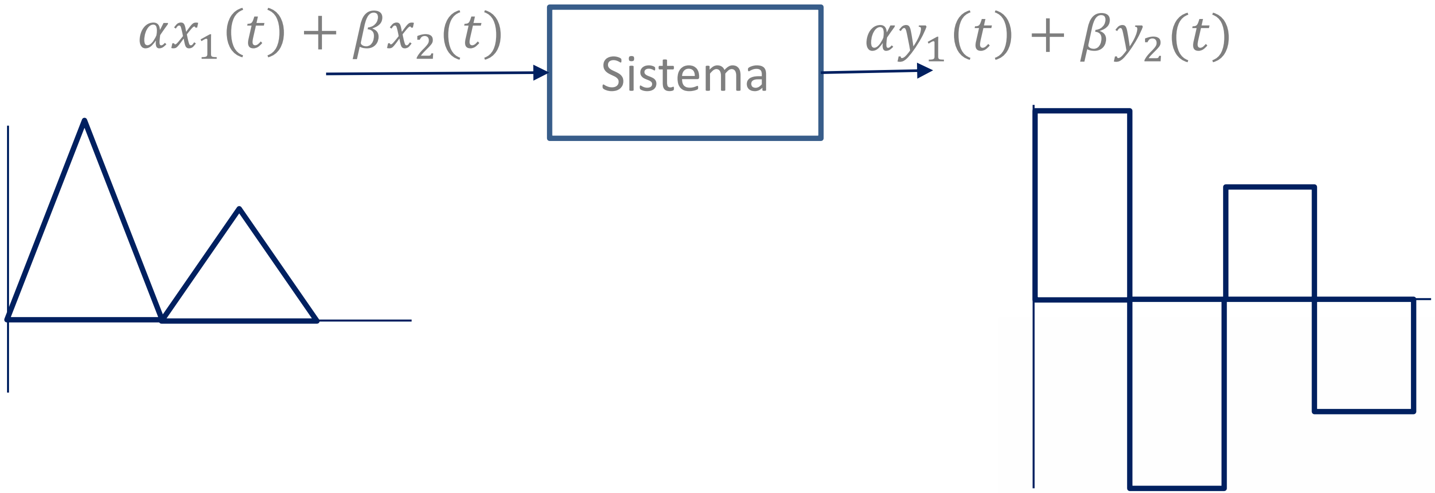
-Homogeneidad:



Propiedades de los Sistemas LTI

Linealidad: Para que un sistema sea lineal debe ser aditivo y escalable (homogéneo).

-Aditividad:



Sistemas LTI

Un sistema es un mapa para pasar de $x(t)$ a $y(t)$.

¿Cómo encontramos ese mapa?

$y(t) = x(t) * h(t)$: Respuesta al impulso.

$\tilde{y}(f) = \tilde{x}(f)\tilde{h}(f)$: Respuesta en frecuencia.

$\dddot{y}(s) = \dddot{x}(s)\dddot{h}(s)$: Función de transferencia.

Respuesta al impulso de un Sistemas LTI

La respuesta al impulso del sistema se denota $h(t)$ y se define como la salida del sistema cuando la entrada es un impulso.
¿Por qué es importante?
Porque nos permite predecir como será la salida del sistema en el dominio del tiempo.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow h(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t) = h(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Respuesta en Frecuencia de un Sistemas LTI

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI permite calcular el efecto que el sistema tendrá sobre la señal de entrada en el dominio de la frecuencia.

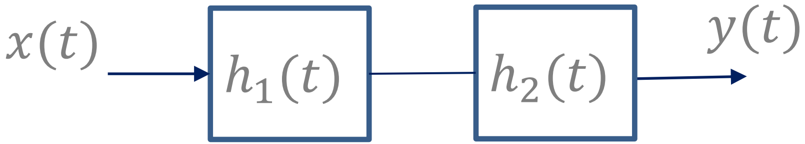
$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\tilde{y}(f) = \tilde{h}(f)\tilde{x}(f)$$

Si $h(t)$ no es de energía o potencia finita, entonces $\tilde{h}(f)$ no existe y se dice que el sistema es inestable.

Conexiones de Sistemas LTI

Conexión en cascada

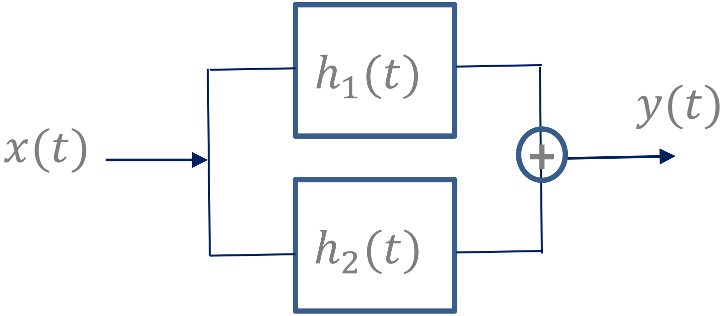


$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}_1(f)\tilde{h}_2(f)$$

Conexiones de Sistemas LTI

Conexión en paralelo

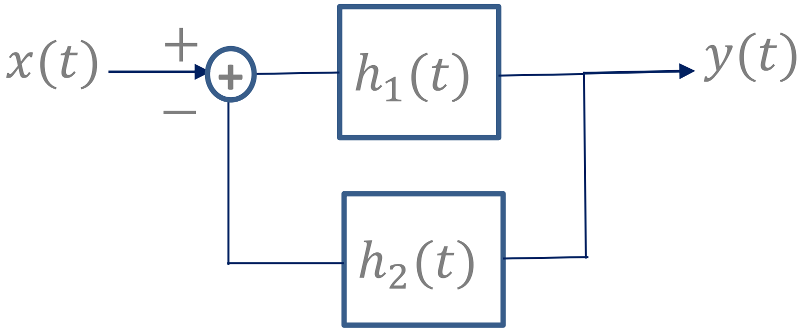


$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}_1(f) + \tilde{h}_2(f)$$

Conexiones de Sistemas LTI

Conexión realimentada



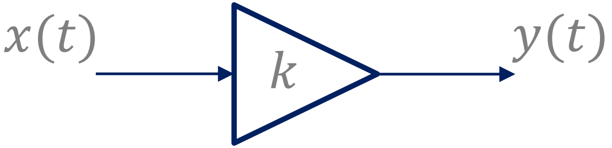
$$\tilde{h}(f) = \frac{\tilde{h}_1(f)}{1 + \tilde{h}_1(f)\tilde{h}_2(f)}$$

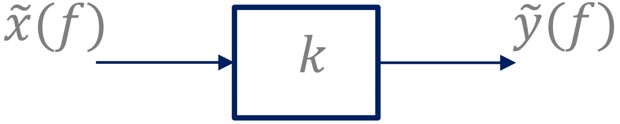
Bloques de Sistemas LTI

Sistema amplificador

$$y(t) = kx(t); \quad k \neq 0$$

$$\tilde{y}(f) = k\tilde{x}(f)$$





Bloques de Sistemas LTI

Sistema retardador

$$y(t) = x(t-a)$$

$$\bar{y}(f) = e^{-j2\pi af}\,\tilde{x}(f)$$

Bloques de Sistemas LTI

Sistema derivador

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\tilde{y}(f) = j2\pi f\,\tilde{x}(f)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t)$$

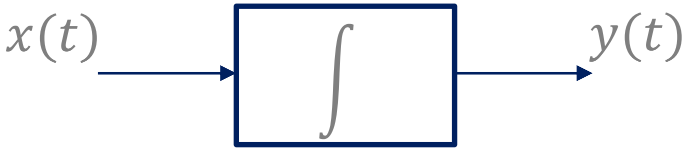
$$\tilde{x}(f) \longrightarrow \boxed{j2\pi f} \longrightarrow \tilde{y}(f)$$

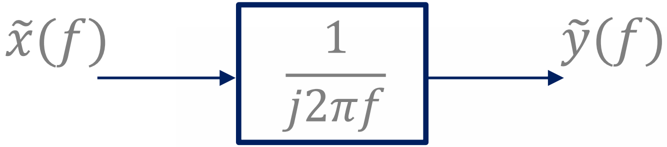
Bloques de Sistemas LTI

Sistema integrador

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$$

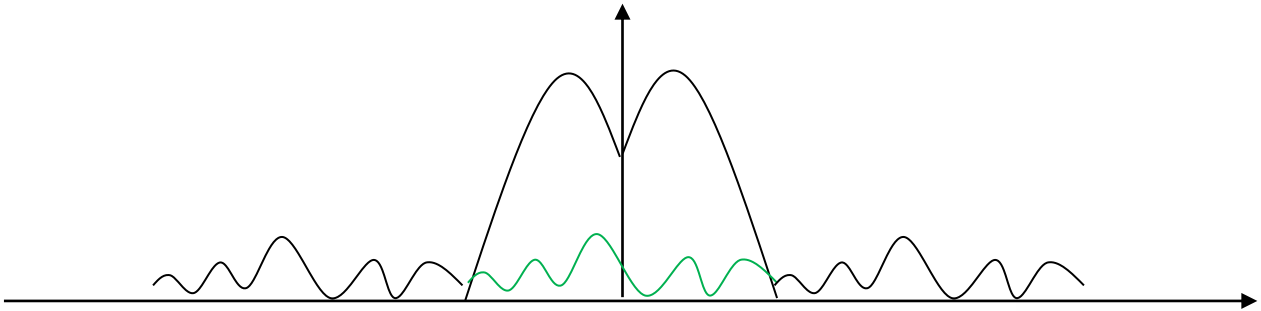
$$\tilde{y}(f) = \frac{\tilde{x}(f)}{j2\pi f}$$





Filtros

Sistema LTI cuyo objetivo es permitir el paso de cierto rango de frecuencias y bloquear el paso de las frecuencias restantes.



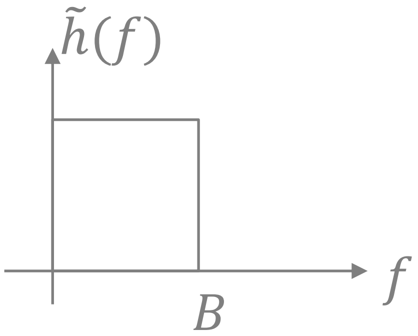
Aplicaciones de los filtros

Dentro de las aplicaciones de los filtros se tienen:

- Seleccionar una señal. Radio.
- Mejorar la calidad de una señal.
- Diferenciar el número marcado en un teléfono de tono.
- Limitar el ancho de banda de una señal, para garantizar el teorema de Nyquist A/D.
- Sonido estéreo.

Filtro Pasa Bajo Ideal

Un filtro pasa bajo permite el paso de las frecuencias bajas y atenúa las frecuencias altas.

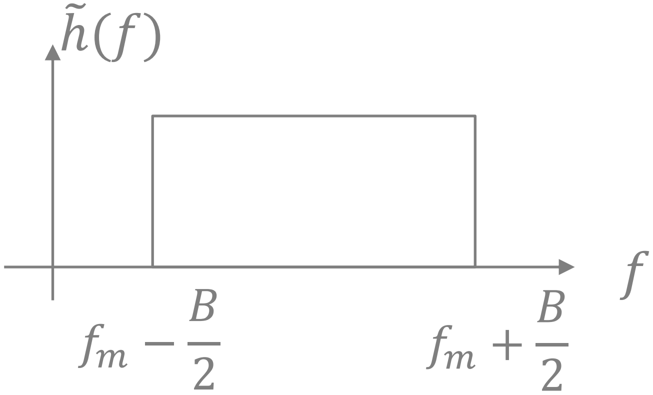


$$\tilde{h}(f) = A\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Una pared actúa como un LPF cuando oímos la música que viene desde otra habitación, dado que las frecuencias altas tienden a reflejarse sobre cualquier superficie rígida, en nuestra habitación estas frecuencias llegan atenuadas y sólo oímos las frecuencias bajas o graves de la música original.

Filtro Pasa Banda Ideal

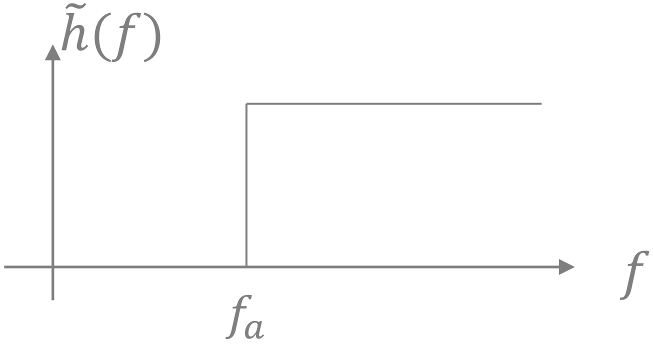
Un filtro pasa banda permite el paso de frecuencias de un determinado intervalo, eliminando las frecuencias por fuera de dicho intervalo (altas y bajas).



$$\tilde{h}(f) = A\left[rect\left(\frac{f - f_m}{B}\right) + rect\left(\frac{f + f_m}{B}\right)\right]$$

Filtro Pasa Alto Ideal

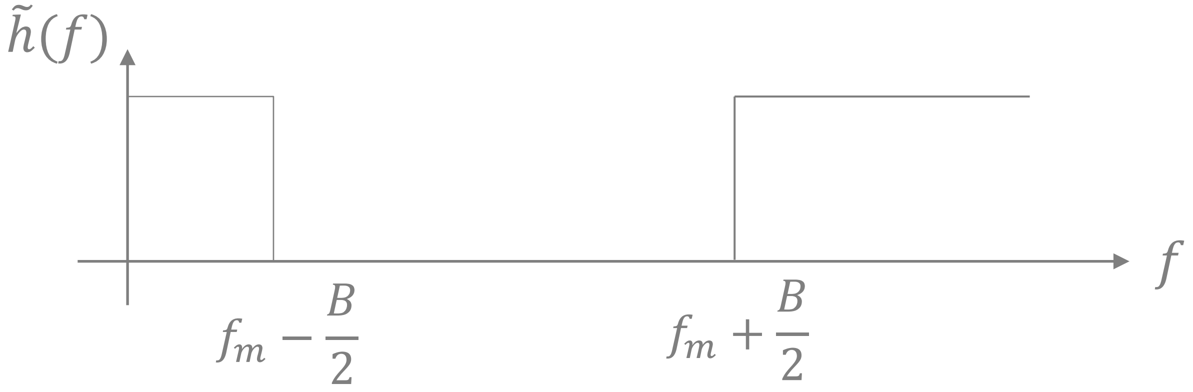
Un filtro pasa alto permite pasar altas frecuencias y elimina las frecuencias bajas.



$$\tilde{h}(f) = A\left[1 - rect\left(\frac{f}{2f_a}\right)\right]$$

Filtro Eliminador de Banda Ideal

Un filtro elimina banda es complementario al filtro pasa banda, porque elimina las frecuencias de un determinado intervalo y deja pasar las frecuencias por fuera de dicho intervalo.

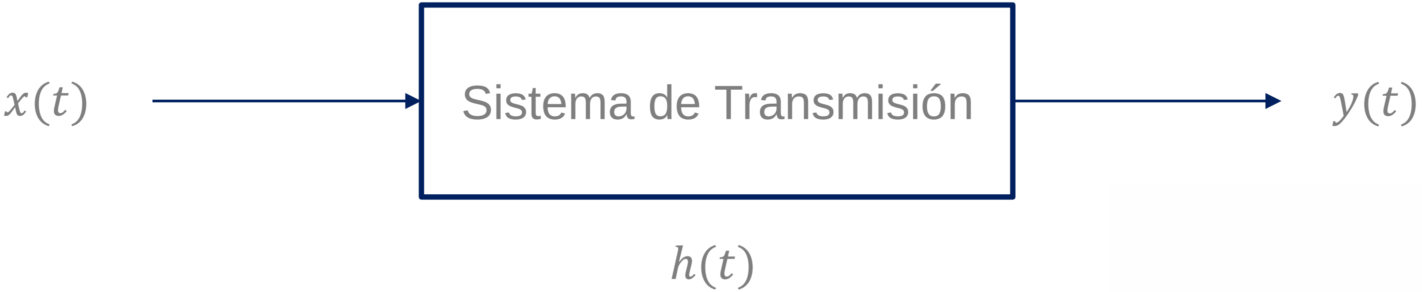


$$\tilde{h}(f) = A\left[1 - rect\left(\frac{f - f_m}{B}\right) - rect\left(\frac{f + f_m}{B}\right)\right]$$

Distorsión de señales

Distorsión: Alteración de la “forma” de una señal.

El sistema se puede ver como una conexión entre el origen, $x(t)$, y el destino, $y(t)$, por lo que los canales de comunicación se pueden caracterizar por medio de una respuesta en frecuencia $\tilde{h}(f)$.



Condiciones de NO distorsión

La señal de salida del sistema es una versión exacta de la entrada, salvo por un retardo constante τ y un factor de escala α.

$$y(t) = \alpha x(t - \tau) \quad \therefore \quad y(t) \text{ es una versión sin distorsión de } x(t)$$

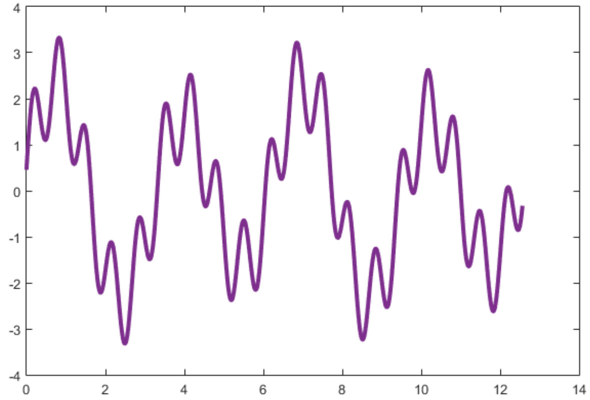
¿Cómo es la respuesta en frecuencia de un sistema no distorsivo?

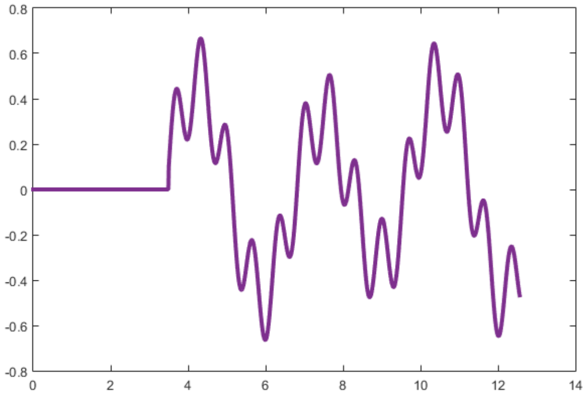
$$\alpha x(t - \tau) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \alpha \tilde{x}(f) e^{-j2\pi\tau f} \quad \therefore \quad \tilde{h}(f) = \alpha e^{-j2\pi\tau f}$$

Condiciones de NO distorsión

Para que un sistema LTI no introduzca distorsión sobre una señal que ocupa la banda de frecuencias w, se debe cumplir que la respuesta en frecuencia del sistema - $\tilde{h}(f)$ – sobre dicha banda w, tenga un espectro de magnitud constante y un espectro de fase igual a una función lineal de pendiente negativa.

$x(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{Sistema No Distorsivo}}$ $\longrightarrow y(t)$





Distorsión de señales

Tipos de Distorsión

- Lineal
  - Magnitud
  - Fase
- No Lineal

Distorsión lineal

Distorsión de Magnitud

Se presenta cuando $|\tilde{h}(f)|$ no es constante sobre la banda de frecuencias de la señal de entrada .

Esto hace que las componentes de frecuencia de la señal de salida no estén en la proporción correcta respecto a la señal de entrada.

También se conoce como distorsión de frecuencia.

Distorsión lineal

Distorsión de Fase

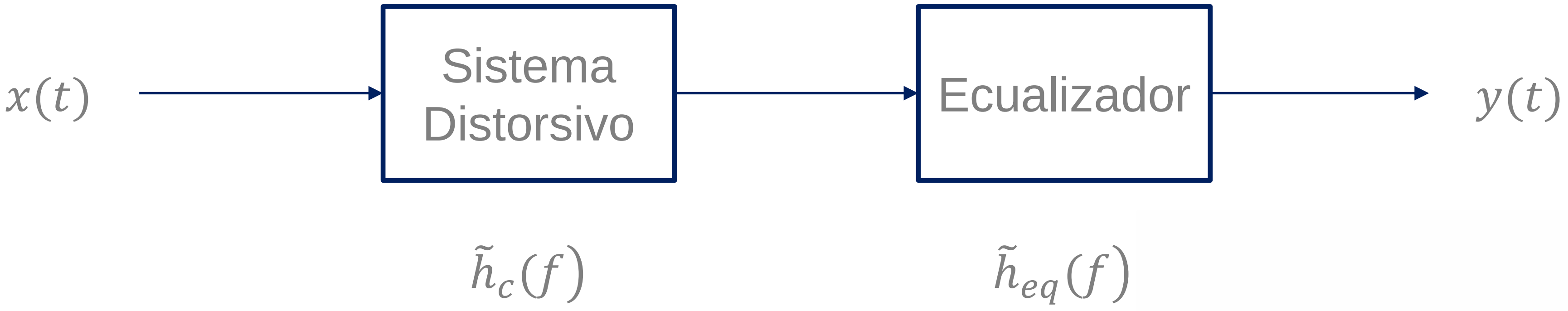
Se presenta cuando $\arg\left[\tilde{h}(f)\right]$ no es una función lineal negativa de f sobre la banda de frecuencias de la señal de entrada .

Esto hace que cada componente de la señal de entra sufra un retardo diferente.

También se conoce como distorsión de retardo.

Distorsión lineal

La distorsión lineal se compensa mediante la ecualización, conectando sistemas LTI en cascada para que la respuesta total del sistema tenga la forma de un sistema sin distorsión.



Distorsión lineal

Ecualizador:

El ecualizador se conecta en cascada con el sistema que produce la distorsión lineal. El sistema resultante debe cumplir:

$$\tilde{h}(f) = \tilde{h}_c(f)\tilde{h}_{eq}(f) = \propto e^{-j2\pi Tf}$$

Por lo tanto la función de transferencia del ecualizador debe ser:

$$\tilde{h}_{eq}(f) = \frac{\propto e^{-j2\pi Tf}}{\tilde{h}_c(f)};\ \tilde{h}_c(f) \neq 0$$

Distorsión no lineal

Es producida por dispositivos no lineales o dispositivos que no estén trabajando dentro de su región lineal de operación.

Un dispositivo no lineal no tiene respuesta en frecuencia $\tilde{h}(f)$.

Un dispositivo no lineal se describe mediante una característica de transferencia, esto es:

$$y(t) = \mathrm{T}[x(t)]$$

Distorsión no lineal

Generalmente la característica de transferencia tiene una estructura polinomial, esto es:

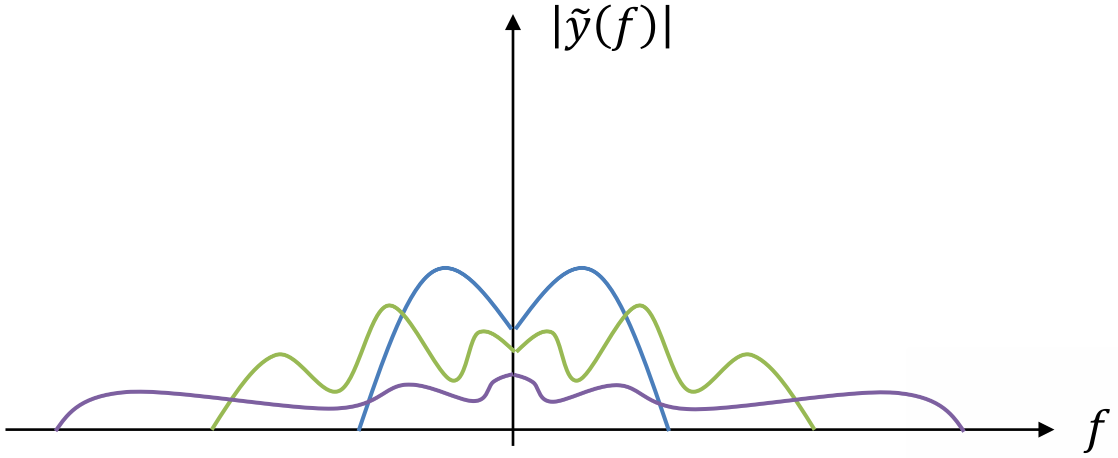
$$y(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + \alpha_3 x^3(t) + \cdots$$

Aplicando Fourier:

$$\tilde{y}(f) = \alpha_1 \tilde{x}(f) + \alpha_2 \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) + \alpha_3 \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) + \cdots$$

Distorsión no lineal

$$\tilde{y}(f) = \alpha_1 \tilde{x}(f) + \alpha_2 \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) + \alpha_3 \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) * \tilde{x}(f) + \cdots$$



Distorsión no lineal

Todo tipo de distorsión no lineal genera componentes de frecuencia adicionales a las de la señal de entrada. En el caso de que la entrada sea un tono puro, a la salida del sistema no lineal se tendrán nuevas componentes de frecuencia en múltiplos enteros de la señal de entrada. Este tipo de distorsión se conoce como **Distorsión de armónico.**

Distorsión no lineal

Distorsión del n-ésimo armónico:

Traslape entre la señal y sus propias réplicas generadas por la no linealidad.

Mide la intensidad del n-ésimo armónico generado por una no linealidad respecto al primer armónico.

Distorsión no lineal

Distorsión de intermodulación:

La intermodulación ocurre cuando 2 o más tonos puros entran a un sistema no lineal. A la salida no sólo aparecen las componentes fundamentales y los armónicos de éstas, además aparecen unas componentes “mezcla” resultantes de la suma y resta de las diferentes frecuencias de entrada.

Distorsión no lineal

Compansión:

La forma de evitar o reducir la distorsión no lineal es asegurar que la señal de entrada no exceda los límites de la región aproximadamente lineal del dispositivo no lineal.

Para evitar que la señal de entrada $x(t)$ no exceda los límites de la región aproximadamente lineal se debe reducir el rango dinámico de $x(t)$.

La compansión consiste en la comprensión de la señal antes de la no linealidad y la expansión de la señal después de la no linealidad.

¡Gracias por su Ateción!

Universidad del Cauca

www.unicauca.edu.co