

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

Jefry Nicolás Chicaiza¹ y Jose Nicolás Zambrano²

¹jefryn@unicauca.edu.co

²jnzambranob@unicauca.edu.co

1. Introducción El desarrollo del informe del Trabajo 3 de la asignatura Teoría de las Telecomunicaciones 1, se realiza para aplicar los conceptos de los Sistemas LTI a una señal de tipo “diente de sierra” trasladada en el tiempo y no periódica. Los conceptos aplicados para el desarrollo de este proyecto son adquiridos en las sesiones académicas y material guía de la asignatura.

En primer lugar la actividad consiste en utilizar un filtro ideal sobre la señal de interés de este proyecto para después observar que efectos ocurren y que necesidades cumplen estos sistemas. La solución que se propone para este punto es desarrollar un script que genere la función correspondiente a un filtro ideal pasa bajas y realizar una convolución con la función que representa matemáticamente la señal asignada.

Como segundo paso para continuar con la solución de la actividad se requiere construir un filtro con respuesta en frecuencia de forma trapezoidal, esta respuesta debe cumplir con el requerimiento de ser capaz de variar su rango en frecuencia en el cual la respuesta del filtro es constante. En este caso es importante conocer muy bien las aplicaciones de la Transformada de Fourier para construir el filtro deseado, además de realizar consultas en la web para conocer los parámetros necesarios que permita generar el filtro con más facilidad y cumpla el requerimiento propuesto.

Finalmente, los resultados obtenidos de las simulaciones anteriormente dichas se debe realizar un análisis a partir del teorema de la energía de Rayleigh que permitirá probar que los resultados en el dominio temporal y en el dominio frecuencial son correctos por medio de la energía invariante de estos sistemas. También se analizará los resultados con el teorema de la distorsión lineal que se rige a partir de unas condiciones en la respuesta del sistema.

2. Metodología El proceso que se llevó a cabo para obtener los resultados se realizó en el lenguaje MATLAB a través de su IDE Oficial, además se identificó una relación en los procesos de los dos primeros ítems llevando a considerar crear un único script para todas las actividades del proyecto, así tener la posibilidad de reutilizar código.

En primer lugar, se identificó los segmentos del trabajo 2 donde se hacen los respectivos cálculos y se realiza la Transformada de Fourier para la señal planteada con el fin de adaptarlos para el objetivo de este proyecto. Una vez obtenida la función de la señal planteada se generó el diagrama de bloques para tener claridad de los cálculos que se deben aplicar.

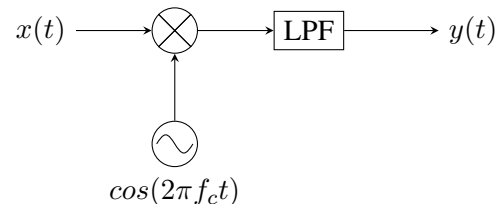


Figura 1: Diagrama de bloques de filtro ideal basa bajas a la señal planteada.

El diagrama que se consideró para el ítem número 1 es el mostrado en la figura 1, que corresponde a la secuencia de tener una operación de desplazamiento en el caso de tener una señal en la región de pasa banda y la operación de aplicar un filtro en banda base [1]. Pasando a la parte de desarrollo del funcionamiento se construyó la función del filtro pasa bajas directamente en el dominio de la frecuencia para luego proceder hacer la multiplicación con la Transformada de Fourier de la función de la señal asignada.

Para la segunda parte del proyecto se realizó una investigación y revisión a los documentos guía de la asignatura para planificar la construcción del filtro trapezoidal, en ellos se menciona el uso de la convolución para modificar una señal a partir de otra señal y realizan una demostración con la convolución de dos pulsos rectangulares de dimensiones diferentes que obtiene como resultado una función en forma de trapezoide [2]. Sin embargo, en la teoría de la convolución la modificación que sufra una de las señales involucradas automáticamente va a generar una modificación en la respuesta de la convolución, por ello es importante identificar sus parámetros para determinar que cambios va a sufrir la respuesta al modificar uno de sus parámetros [3].

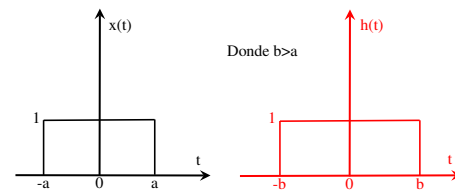


Figura 2: Señales involucradas para generar una función trapezoidal.

Como se observa en la figura 2 se tienen dos pulsos rectangulares cuyo ancho son diferentes con el fin de cumplir una condición necesaria para generar la función en forma de trapezoide, para ello el proceso de la convolución se puede ver como un traslape entre las dos funciones involucradas, este proceso se puede observar en la siguiente secuencia de figuras.

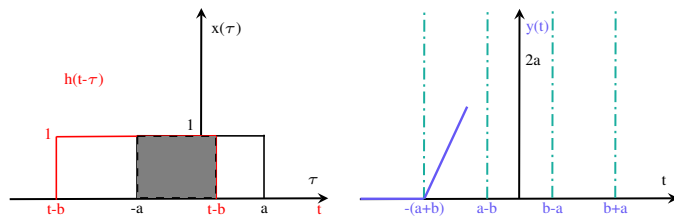


Figura 3: Traslape de banda de transición izquierda.

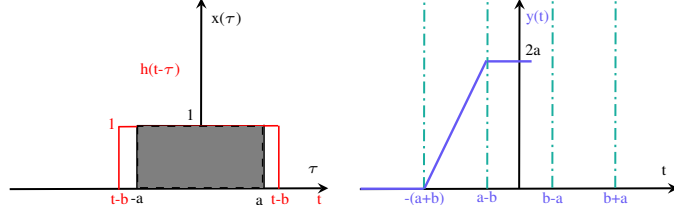


Figura 4: Traslape segmento constante.

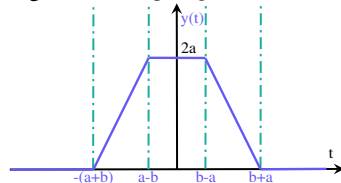


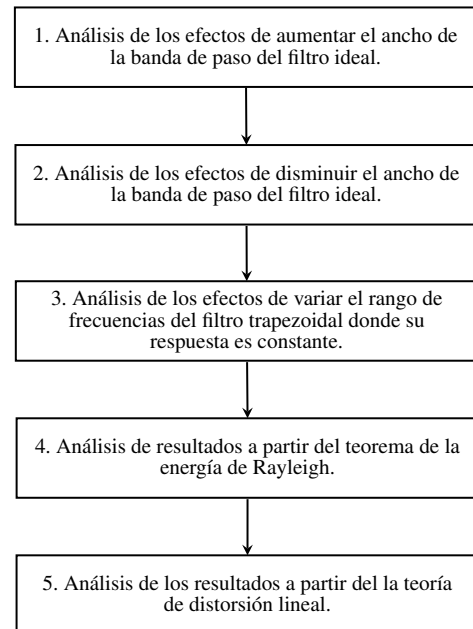
Figura 5: Señal resultante de la convolución.

El siguiente paso fue generar este proceso en el desarrollo computacional con el uso de dos funciones tipo seno cardinal en el dominio del tiempo y realizar el proceso de convolución para obtener la respuesta en la frecuencia trapezoidal. Para el proceso de filtrar la señal se aplicó la Transformada de Fourier a la señal obtenida de la convolución de estas dos funciones sinc y filtrar la respuesta en frecuencia de la señal asignada, para observar los efectos del filtro en la señal se realizó la Transformada Inversa de Fourier al resultado obtenido. Después de obtener los resultados necesarios se continuó calculando la densidad espectral de energía en la señal original y también a las señales resultantes después de haberles aplicado los filtros en cada uno de los puntos, para realizar análisis de estos resultados se tuvo en cuenta la comparación porcentual entre la energía de la señal original y las resultantes [4], además se analizó la presencia de distorsión en los resultados a partir de las condiciones que plantea la teoría de distorsión lineal [5].

2.1. Plan de pruebas Después de haber realizado el planteamiento de cómo se desarrolló y se obtuvieron los resultados en el script, se procedió a realizar la planificación de las pruebas de funcionamiento del código con el objetivo de verificar y analizar los resultados a través de algunos escenarios que se definen a continuación:

- Aumentar y disminuir el rango de frecuencias del filtro ideal.
- Variar el rango de frecuencias del filtro de trapezoidal donde su respuesta es constante.

Con los escenarios proyectados anteriormente se espera obtener resultados que permitan evidenciar los fenómenos estudiados. Además se plantean unos objetivos claves para verificar y analizar en los resultados la presencia de los teoremas relacionados con la temática de Sistemas LTI, los cuales se describen a continuación:



3. Análisis de resultados El script que se desarrolló se dividió en secciones para albergar la solución de cada uno de los requerimientos del proyecto y cada uno de los resultados gráficos se presentan en una última sección para facilitar la comparación, si es necesaria. Cada sección contiene los parámetros necesarios para las funciones usadas y cada una explicada con comentarios de lo que realiza.

Inicialmente se construyeron los filtros pensando en la posibilidad de poder modificar cualquiera de sus parámetros con el fin de simular un comportamiento similar al diagrama de bloques descrito en la sección 2 (metodología). Luego de ese proceso el siguiente paso en la secuencia del script se filtra la función con los filtros diseñados y se retorna al dominio del tiempo para observar los resultados.

3.1. Desarrollo del objetivo clave 1–Aumento del ancho de la banda de paso Para el análisis de este objetivo se llevó a cabo uno de los escenarios planteados anteriormente, el cual consiste en aumentar el ancho de la banda de paso del pulso rectangular. Como se consideró tener los parámetros con la posibilidad de ser variados se aumentó dicho parámetro encargado de aumentar el ancho del pulso, significativamente más grande que el ancho de la respuesta en

frecuencia de la señal planteada. Se obtuvieron los siguientes resultados.

(a) Respuesta en frecuencia del filtrado. (b) En el dominio del tiempo.

Figura 6: Resultados de filtrar la señal original con un filtro ideal pasa-bajas.

La gráfica 6a muestra como el filtro ideal realiza atenuación a las componentes que quedan por fuera de este y como el ancho de la banda pasante es lo suficientemente grande, las componentes de la señal original pasan por el filtro en su gran mayoría obteniendo en el tiempo una señal bien definida como se muestra en la figura 6b, además permite percibir de que señal se trata.

3.2. Desarrollo del objetivo clave 2–Disminución del ancho de la banda de paso

Así como en el anterior objetivo clave se realizó un escenario para apreciar el comportamiento de la señal al filtrarla con un filtro ideal, pero esta vez con banda de paso bastante reducida (1/5 veces el ancho de banda original). La reducción que se aplicó en este caso se consideró que fuera bastante más pequeña para apreciar sus efectos:

(a) Respuesta en frecuencia del filtrado. (b) En el dominio del tiempo.

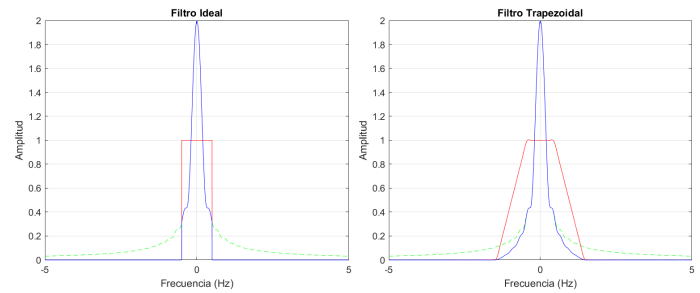
Figura 7: Resultados de filtrar la señal original con un filtro ideal.

Se observa que en la figura 7a la respuesta del filtrado está muy atenuada por lo que es evidente que sus componentes armónicas se disminuyeron considerablemente, esto se denota en la figura 7b donde la definición de la señal es muy pobre. Sin embargo, con estos dos anteriores resultados se evidencia que la cantidad de armónicos que no son atenuados por el filtro van a depender del ancho de la banda de paso de este.

3.3. Desarrollo del objetivo clave 3–Análisis de la respuesta del filtro trapezoidal comparado con el filtro ideal

En los anteriores objetivos se evidenció la respuesta del filtro ideal en diferentes escenarios de ancho de banda. El filtro trapezoidal, se diferencia del filtro ideal en que sus bandas de transición no se presentan como un escalón entre la banda pasante y la banda de rechazo, sino que por el contrario, la atenuación entre estas bandas se presenta de forma gradual siguiendo la forma de una pendiente lineal.

La construcción de este filtro se realizó partiendo de dos funciones “sinc” con parámetros variables multiplicadas en el tiempo. Estos parámetros permiten variar los anchos de banda pasante y de transición en el dominio de la frecuencia, como es requerido por el proyecto.



(a) Respuesta en frecuencia del filtro ideal. (b) Respuesta en frecuencia del filtro trapezoidal.

Figura 8: Comparación de espectros de magnitud donde se evidencian las diferencias en la banda de transición.

En las imágenes anteriores se puede apreciar que las bandas de transición del filtro trapezoidal atenúan menos que en el caso de el filtro ideal, sin embargo al filtrar una señal con un filtro que contiene bandas de transición de cualquier forma, sus componentes armónicas no van a tener el mismo comportamiento que al operar con las componentes de la banda de paso. Ese efecto que se observa en la señal se denomina distorsión lineal.

3.4. Desarrollo del objetivo clave 4–Análisis del teorema de Rayleigh

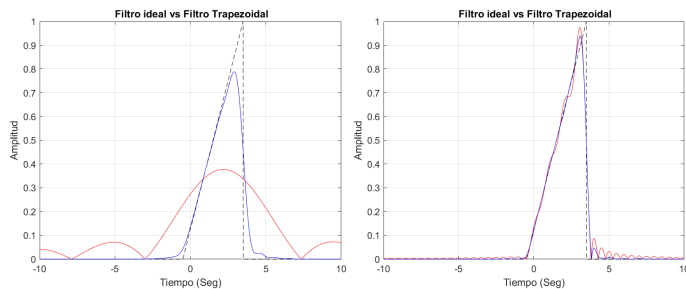
Para el desarrollo de este objetivo, se aplicó el teorema de Rayleigh tanto a la señales filtradas y no filtradas tanto en el dominio del tiempo, como en el dominio de la frecuencia. Se tomaron 6 ventanas diferentes de filtrado tanto para el filtro ideal como para el filtro trapezoidal, tomando en cuenta también un escenario donde no se modifica la ventana constante del filtro trapezoidal (a 1 Hz) y se cambia el ancho de sus rampas, todo esto con el objetivo de observar los efectos sobre la energía de la señal al filtrarla. A continuación se presenta una tabla con los resultados:

	0.1 Hz	1 Hz	2 Hz	5 Hz	10 Hz	100 Hz
Señal Original (F)	1,331	1,331	1,331	1,331	1,331	1,331
Señal Original (T)	1,330	1,330	1,330	1,330	1,330	1,330
Ideal (F)	0,713	1,280	1,306	1,321	1,326	1,331
Ideal (T)	0,713	1,280	1,305	1,320	1,325	1,330
Trapezoidal Ventana (F)	1,091	1,265	1,292	1,313	1,321	1,330
Trapezoidal Ventana (T)	1,091	1,265	1,291	1,312	1,321	1,329
Trapezoidal Rampa (F)	1,237	1,265	1,280	1,298	1,309	1,327
Trapezoidal Rampa (T)	1,236	1,265	1,279	1,297	1,308	1,326

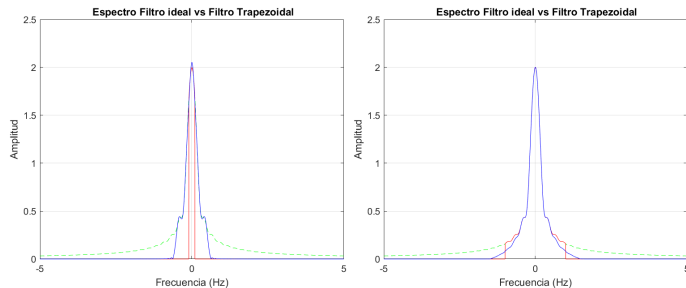
Figura 9: Tabla de resultados del teorema de Rayleigh.

De los resultados obtenidos se puede apreciar que en todos los casos se evidenció el cumplimiento de la igualdad de Rayleigh, por que las magnitud de la densidad espectral de energía en tiempo (T) y frecuencia (F) para cada caso son iguales. Se evidencia un margen de error en la tercera cifra decimal debido a que los cálculos numéricos de las integrales se realizaron con la función “trapz”, esto debido a la conveniencia de la misma en la estructura del código desarrollado. Se observa que a menor ancho de banda pasante del filtro, se tiene menor densidad espectral de energía en cada caso, tal como es esperado debido a que un filtro es un sistema que

modifica la señal, eliminando componentes espectrales de la misma. Estas componentes eliminadas explican la disminución en magnitud de la densidad espectral de energía con respecto a la señal original. Al tener una señal de entrada de muy baja frecuencia, se hace evidente que el mayor efecto de filtrado se presenta al introducir la señal a los filtros con ancho de banda pasante menor a 1 Hz. A partir de 1 Hz el efecto del filtrado con respecto a la D.E.E. es menor al 5 por ciento con respecto a la D.E.E. de la señal original.



(a) Respuesta en tiempo del filtrado con 0.1 Hz. (b) Respuesta en tiempo del filtrado con 1 Hz.



(c) Respuesta en frecuencia del filtrado con 0.1 Hz. (d) Respuesta en frecuencia del filtrado con 1 Hz.

Figura 10: Comparación de Respuestas en tiempo y frecuencia de los filtros vs. Señal original.

3.5. Desarrollo del objetivo clave 5–Análisis de la teoría de distorsión lineal

De acuerdo a la teoría de la distorsión lineal, se evidencian escenarios distintos de acuerdo al tipo de filtro que modifica la señal. Para el caso del filtro ideal, a nivel del espectro de magnitud, se puede apreciar que existe un cambio en el mismo, pero sin la presencia de banda de transición; por este motivo, se puede concluir que aunque se aprecia un cambio en la señal reconstruida debido a la eliminación de armónicos por parte del filtro, este cambio no se puede considerar como distorsión de magnitud en la región del filtro de banda pasante. Cabe resaltar que para obtener una replica exacta de la señal original a la salida del filtro, el ancho de banda del mismo debería ser infinito, es decir un filtro “pasa todo”.

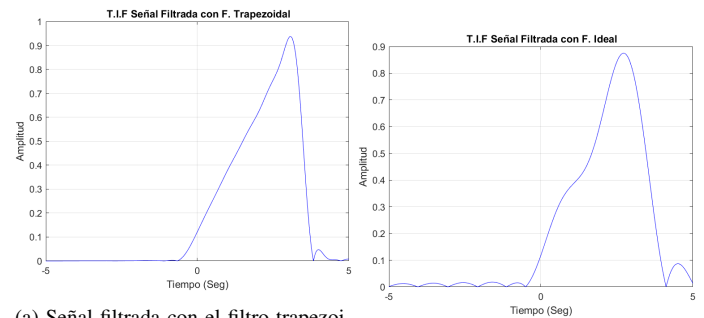
Por el contrario, para el caso del filtro trapezoidal, se evidencia que en las regiones de banda de transición, los componentes en frecuencia son atenuados de manera no constante,

ya que las componentes en frecuencia ubicadas en las partes mas alejadas a la banda de paso son mas atenuadas que las componentes que se encuentran mas cercanas a la banda de paso. Este fenómeno hace que no se cumpla con la condición no-distorsiva:

$$y(x) = K \cdot x(t - \tau)$$

Debido a que la señal de salida no se puede expresar como una versión escalar y desfasada de la señal de entrada.

En el caso de considerar el sentido estricto del concepto de distorsión, sin tener en cuenta que el sistema evaluado en esta simulación es un filtro; se puede considerar que al presentar la señal un espectro de magnitud con componentes infinitos, cualquier sistema con una respuesta en frecuencia diferente a ser constante para todas las componentes de frecuencia, introduce distorsión.



(a) Señal filtrada con el filtro trapezoidal.

(b) Señal filtrada con el filtro ideal.

Figura 11: Resultados de filtrar la señal original con un filtro trapezoidal y con un filtro ideal.

las figuras 11a y 11b evidencian la presencia de distorsión al aplicar un filtro que posee bandas en la que su respuesta no es constante. En comparación con la respuesta de aplicar el filtro ideal se ve mejor definido porque este atenúa menos componentes, sin embargo estas componentes que el filtro trapezoidal no atenúa son componentes distorsionadas.

4. Conclusiones

- Cuando a una señal cualquiera se le aplica un filtro cuya respuesta en frecuencia tiene una banda de paso. La cantidad de armónicos de la señal que no van ser atenuados dependerán del ancho de banda pasante que este tenga.
- Al aplicar un filtro con banda de paso variable (no constante) es importante conocer que a menor ancho de la banda de paso la densidad espectral de energía va a disminuir.
- La convolución es una operación capaz de modificar una señal a partir de otra y tiene la característica de ser unívoca, ya que al operar en un dominio va a tener una repercusión en el otro dominio.
- La presencia de la distorsión en señales que al filtrar-

las con filtros cuyo ancho de banda es reducido va a presentar una mejor definición al permitir más componentes armónicas con y sin distorsión en comparación a un filtro ideal.

- El teorema de Rayleigh es una herramienta útil para realizar comparaciones a la respuesta de sistemas L.T.I., sin embargo, este teorema no permite analizar el comportamiento distorsión de un sistema.
- La transformada de Fourier facilita el trabajo de diseñar y operar con filtros, ya que es posible trabajar en el dominio en el cual las operaciones matemáticas sean mas simples de desarrollar.
- Una señal con ancho de banda infinito sufrirá de distorsión en algún punto de su espectro de magnitud si atraviesa un sistema con respuesta finita en frecuencia.
- Para realizar un análisis de distorsión de un filtro, es más fácil de visualizar en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo.
- La cantidad de escenarios de prueba que una simulación permite realizar es muy grande, sin embargo, los resultados mas relevantes se observan cuando se llevan los parámetros de simulación a valores limite (pequeños o grandes).

Bibliografía

- [1] M. S. Zambrano, “Filtros”, *Explicación de funcionamiento de filtros ideales*, 2021.
- [2] —, *ejercicios convolucion.pdf*, 2021.
- [3] L. Chaparro, *Convolucion de dos ventanas en el tiempo*, 2013. dirección: <https://www.youtube.com/watch?v=OmMocxJ7MnQ>.
- [4] M. S. Zambrano, *Densidad Espectral de Energia*, 2021.
- [5] —, “Quiz Sistemas LTI”, *Usado para recordar las propiedades del teorema de distorsión lineal*, 2021.