

**Universidad del Cauca**

# **TEORÍA DE TELECOMUNICACIONES I**

**Sistemas Analógicos**

**Ing. Víctor Fabián Miramá Pérez**

**Departamento de Telecomunicaciones**



**Universidad  
del Cauca**

**FIET**

## TEORÍA DE TELECOMUNICACIONES I

<b>1 GENERALIDADES .....</b>	<b>1</b>
1.1 Comunicación, Mensajes y señales .....	1
1.2 El sistema de comunicaciones .....	1
1.3 Limitaciones en las Comunicaciones Eléctricas .....	2
1.4 La modulación y la codificación.....	3
1.4.1 Modulación .....	4
1.4.2 Razones para modular.....	4
1.4.3 Codificación .....	5
1.5 Cronología de la comunicación eléctrica.....	5
<b>2 SEÑALES ESPECTROS Y FILTROS .....</b>	<b>7</b>
2.1 Señales AC.....	7
2.1.1 Convenciones para el análisis espectral .....	8
2.2 Señales periódicas y series de Fourier .....	8
2.2.1 Señales periódicas .....	8
2.2.2 Series de fourier .....	9
2.2.3 Condiciones de convergencia y fenómeno de Gibbs.....	11
2.2.4 Teorema de Parseval.....	11
2.3 Señales no periódicas y Transformada de Fourier.....	12
2.3.1 Ejemplo: Pulso rectangular .....	13
2.3.2 Señales simétricas y causales .....	13
2.3.3 Ejemplo: Pulso causal exponencial.....	14
2.3.4 Teorema de Rayleigh de energía.....	14
2.4 Relación entre el dominio del tiempo y la frecuencia.....	15
2.4.1 Superposición .....	15
2.4.2 Desplazamiento en el tiempo .....	15
2.4.3 Cambio de escala .....	15
2.4.4 Dualidad .....	15
2.4.5 Traslación en frecuencia y modulación .....	16
2.4.6 Ejemplo: Pulso RF .....	16
2.4.7 Diferenciación e integración.....	16
2.4.8 Convolución .....	17
2.4.9 Impulso y transformada en el límite.....	18
2.4.10 Función Escalón y Signo .....	19
2.4.11 Impulso en el Tiempo.....	20
2.5 Respuesta de un sistema y filtros .....	20
2.5.1 Respuesta al Impulso e integral de superposición .....	21
2.5.2 Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden .....	22
2.5.3 Función de transferencia y análisis en el dominio de la frecuencia .....	22
2.5.4 Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden .....	23
2.5.5 Análisis de diagrama en bloques .....	25
2.5.6 Distorsión de señal en transmisión .....	25
2.5.7 Filtro y filtrado .....	28
2.5.8 Filtros de cuadratura y transformada Hilbert .....	32
<b>3 EL RUIDO Y SU FILTRAJE .....</b>	<b>34</b>
3.1 El Ruido .....	34
3.2 Ruido térmico y potencia disponible.....	34
3.3 Ruido Blanco .....	35
3.3.1 Ruido térmico en un circuito RC.....	37
3.3.2 Ancho de Banda Equivalente de Ruido.....	37

4	COMUNICACIÓN BANDA BASE .....	38
4.1	Señales y Ruido.....	38
4.1.1	Ruido aditivo y relación señal a ruido.....	38
4.1.2	Transmisión de señal analógica.....	39
4.1.3	Transmisión de un pulso en banda base con ruido .....	42
4.2	Distorsión de la señal transmitida .....	43
4.2.1	Ecualización .....	44
4.2.2	Distorsión multirayectoria.....	44
4.2.3	Compansión .....	44
4.2.4	Ejercicios de distorsión .....	45
4.3	Pérdidas de transmisión y decibeles en el sistema .....	45
4.3.1	Ganancia de potencia .....	45
4.3.2	Pérdidas de transmisión y repetidores .....	46
4.3.3	Transmisiones vía radio .....	47
4.3.4	Transmisión satelital .....	48
4.3.5	Ejercicios de Pérdidas .....	48
5	MODULACIÓN LINEAL .....	49
5.1	Señales y Sistemas Pasabanda.....	49
5.1.1	Convenciones para mensajes analógicos .....	49
5.1.2	Señales pasabanda .....	49
5.1.3	Transmisión pasabanda .....	51
5.1.4	Ejemplo: Retardo de Portadora y Envolvente.....	51
5.1.5	Ejemplo.....	52
5.2	Modulación de doble banda .....	52
5.2.1	Señal y espectro AM.....	53
5.2.2	Señales y espectro DSB .....	54
5.2.3	Ejemplo.....	55
5.2.4	Tono de modulación y análisis fasorial.....	55
5.2.5	Moduladores y transmisores .....	56
5.3	Moduladores de banda lateral suprimida .....	57
5.3.1	Señales y espectros SSB.....	58
5.3.2	Generación de SSB .....	59
5.3.3	Señales y espectros de VSB.....	60
5.4	Conversión de frecuencia, detección y receptores .....	61
5.4.1	Conversión de frecuencia .....	61
5.4.2	Ejemplo: Transpondedor.....	62
5.4.3	Detección síncrona .....	62
5.4.4	Detección de envolvente .....	62
6	MODULACIÓN EXPONENCIAL .....	63
6.1	Modulación de Fase y Frecuencia .....	63
6.1.1	Señales FM y PM .....	63
6.2	Ánalisis Espectral.....	65
6.2.1	FM y PM de banda estrecha .....	65
6.2.2	Tono de Modulación .....	65
6.2.3	Ejemplo.....	69
6.3	Ancho de Banda .....	69
6.3.1	Estimación del Ancho de banda .....	69
6.3.2	Ejemplo: Ancho de Banda de FM Comercial.....	71
6.3.3	Banda comercial de FM .....	71
6.4	Potencia Transmitida .....	71
6.4.1	Ejemplo:.....	72
6.5	Transmisores y Receptores .....	72
6.5.1	Generación Directa de FM .....	72
6.5.2	Generación indirecta de PM y FM .....	72

6.5.3	Detección de Frecuencia .....	73
6.6	Multiplexación por división de frecuencia .....	75
6.6.1	FM estereofónica .....	75
7	RUIDO DE MODULACIÓN .....	77
7.1	Interferencia.....	77
7.1.1	Interferencia de sinusoides .....	77
7.1.2	Filtro de de-énfasis y filtro de pre-énfasis.....	78
7.1.3	Ejemplos.....	79
7.2	Ruido de Modulación Lineal.....	79
7.2.1	Detección sincrona .....	80
7.2.2	Detección de envolvente.....	82
7.3	Ruido de Modulación Exponencial .....	83
7.3.1	Ruido de pos-detección .....	83
7.3.2	Relación señal a ruido en el destino .....	85
7.4	Comparación de los sistemas de modulación .....	85
7.4.1	Ventajas de la modulación exponencial sobre la modulación lineal .....	85
7.4.2	Desventajas de la modulación angular sobre la modulación lineal.....	86
7.4.3	Tabla comparativa .....	86
8	IDENTIDADES IMPORTANTES .....	87
9	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87

## 1 GENERALIDADES

Antes de entrar al estudio del sistema de comunicaciones y los procedimientos que en él se llevan a cabo, es necesario definir qué es el sistema de comunicaciones y cuáles son los elementos principales que lo conforman, además, concretar conceptos fundamentales que se manejan a lo largo del documento y que son la base de una mejor comprensión de los temas tratados.

### 1.1 Comunicación, Mensajes y señales

**Comunicación:** Acción que permite transmitir un mensaje, idea, pensamiento, orden u otro tipo de información dirigido de una entidad a otra.

**Mensaje:** representación física de la información producida por una fuente, los mensajes pueden tener varias formas y fuentes, pero pueden distinguirse dos tipos básicos, los mensajes analógicos y los digitales.

Los mensajes analógicos están representados por **señales** continuas que varían en el tiempo, un ejemplo claro de este tipo es las señales acústicas. Los mensajes digitales están representados por una secuencia ordenada de símbolos seleccionados de un número finito de elementos discretos.

### 1.2 El sistema de comunicaciones.

**Definición:** Entidad que manipula una o varias señales para cumplir una función, en consecuencia entrega una nueva señal.

El objetivo de un sistema de comunicación es reproducir en el destino una aceptable replica de la información proveniente de la fuente de información, en los sistemas de comunicación existen diversos elementos cada uno con una función específica, sin embargo se debe resaltar aquellos que por su función dentro del sistema son primordiales:

El transmisor, el canal de transmisión y el receptor, sin embargo hay otros elementos, llamados contaminaciones, que aunque no son deseables, están siempre presentes.

**Transmisor:** se encarga de adecuar la señal de la información a las características propias del canal de transmisión, además puede estar en capacidad de multiplexar diferentes señales para ser transmitidas y por último entregar la señal al canal de transmisión con la mayor inmunidad al ruido posible, su construcción y funcionamiento depende del tipo de sistema de comunicaciones, analógico o digital.

**Canal de transmisión:** es el encargado de llevar la información desde el transmisor hasta el receptor que puede presentarse de muchas formas: un par de hilos, cable coaxial, fibra óptica y el aire. Sea cual fuere el canal de transmisión este induce una cierta cantidad de atenuación que se incrementa con la distancia, pero que puede ser superado con la utilización de un repetidor o amplificador.

Otros problemas aun más serios son la distorsión, la interferencia y el ruido que causan una alteración de la forma de la señal de información.

**Distorsión:** es una perturbación en la forma de onda de la señal, causada por una respuesta imperfecta del sistema a la señal deseada, se diferencia del ruido porque esta desaparece cuando la señal se quita y se soluciona mediante ecualización.

**Interferencia:** Contaminación con características similares a las de la señal, producidas por fuentes humanas, otros transmisores, líneas de alta tensión o maquinaria, circuitos de conmutación. La solución es reducir al máximo la interferencia hecha por el hombre y respetar las normas de distribución de frecuencia.

**Desvanecimiento:** consiste en la disminución o variación de la intensidad de la señal en el receptor, como producto de los cambios atmosféricos o al tropiezo de la señal con obstáculos terrestres o acuáticos.

Para enfrentar los efectos del desvanecimiento se aplica en las estaciones una técnica de diversidad que puede ser de espacio o de frecuencia.

**Ruido:** se hace referencia a las señales aleatorias e impredecibles, producidas naturalmente al interior y exterior del sistema, esta señal se adiciona a la señal de la información causando una pérdida parcial o total de esta.

- El ruido interno del sistema se debe a la actividad molecular, explícitamente al movimiento de los electrones que está directamente relacionado con la temperatura del material conductor. Cuando la agitación de los electrones se eleva se produce un desbalance de cargas que se acumulan en un extremo del conductor generando variaciones en el voltaje presente. Este ruido se conoce como ruido térmico y relaciona tanto los parámetros del conductor como los del sistema.

Donde:  $K$  constante de Boltzmann=  $1.38 \times 10^{-23}$  Joules/ $^{\circ}\text{K}$

$$E_T = 2\sqrt{KTBR}$$

$T$  la temperatura en grados Kelvin

$B$  el ancho de banda

$R$  la resistencia equivalente a través de la cual se mide el ruido térmico.

Otro tipo de ruido interno se debe al paso de la corriente de electrones entre dos tipos de material diferentes, este ruido se conoce como ruido de partición y se define matemáticamente como:

$$I_S = \sqrt{2eIB} \quad \text{Donde: } e \text{ es la carga del electrón } 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulombs.}$$

$I_S$  la corriente que fluye a través de la juntura en amperios.

- El ruido exterior puede dividirse en tres grupos:

**Ruido Cósmico:** originado más allá de la atmósfera terrestre (banda de 10 a 300Mhz)

**Ruido atmosférico:** este tipo de ruido es generado por las tormentas y las descargas eléctricas, y su intensidad está influenciada por el estado del tiempo, la localización geográfica y la hora del día.

**Ruido hecho por el hombre:** en los mecanismos productores de chispas.

Es importante recordar las diferentes modalidades o modos de transmisión que se pueden llevar a cabo en un medio de transmisión:

**Simplex:** la transmisión de información se hace en un solo sentido.

**Semidúplex:** se puede transmitir en ambos sentidos pero no simultáneamente

**Dúplex total:** transmisión simultánea en ambas direcciones.

**Dúplex total/general:** similar al dúplex total, con la diferencia de enviar a una estación pero recibir información desde otra estación.

**Receptor:** realiza los procesos inversos a los realizados en el transmisor como la demodulación y la decodificación, pero además amplifica las señales para compensar la atenuación del canal y filtra la señal para reducir el nivel de ruido presente.

Existen otros elementos encargados de convertir los mensajes o la información en señales eléctricas bien sea de voltaje o corriente en la parte transmisora y de reconvertir esas señales eléctricas en mensajes e información coherente para el receptor, estos elementos se conocen como *transductores*.

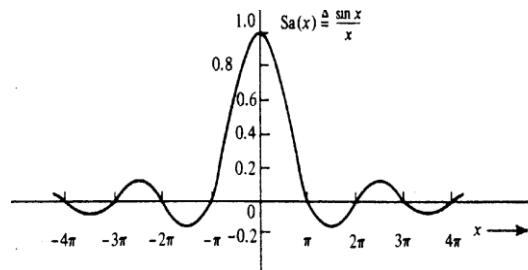
### 1.3 Limitaciones en las Comunicaciones Eléctricas

Durante el diseño de un sistema de comunicaciones o alguna parte del mismo, se debe enfrentar dos clases de impedimento, por una parte se tiene los problemas tecnológicos, refiriéndose al hardware, la regulación, el factor económico, etc. Y por el otro las limitaciones físicas fundamentales impuestas por el sistema, que son las

que finalmente indican lo que se puede o no alcanzar en el sistema. Estas limitaciones fundamentales para la transmisión de información son el ancho de banda y el ruido.

**Ancho de banda:** para la señal de información el ancho de banda hace referencia al barrido de frecuencias que ocupa una señal, en términos más simples es la diferencia entre las frecuencias máxima y mínima contenidas en la información.

Para el canal de comunicaciones es la diferencia entre las frecuencias máxima y mínima que pueden pasar por él. Este debe ser lo suficientemente grande para que la información pase sin problemas.



$$\text{Ancho de banda de la señal} \leq \text{Ancho de banda del canal}$$

Además el ancho de banda para señales y sistemas puede utilizarse como medida de la velocidad de la transmisión de la información. Por ejemplo cuando una señal cambia rápidamente en función del tiempo, sus componentes de frecuencia o espectro de frecuencia, se extiende sobre un amplio rango, entonces se dice que la señal tiene un ancho de banda grande.

De igual manera la habilidad de un sistema para seguir las variaciones de una señal se refleja en la respuesta a la frecuencia empleada o en otros términos en el ancho de banda de transmisión.

La relación entre tiempo y frecuencia es inversamente proporcional, si se necesita transmitir una gran cantidad de información en un tiempo muy corto es necesario tener a disposición señales con gran ancho de banda y un sistema con un ancho de banda lo suficientemente grande para acomodar toda las señales.

Los sistemas eléctricos tienen elementos que almacenan energía y este almacenamiento no puede cambiar instantáneamente en consecuencia los sistemas de comunicaciones tienen una ancho de banda finito que reduce la velocidad de señalización.

**El ruido:** el ruido impone la segunda limitación debido a que el ruido generado por el movimiento de los electrones es inevitable, como se mencionó, dicho movimiento genera corrientes aleatorias y voltajes llamados ruido térmico.

El ruido relativo a una señal de información se mide en términos de la relación señal a ruido (S/N), donde por lo general el ruido térmico tiene un valor pequeño comparado con el valor de la relación señal a ruido, lo que hace que ese ruido sea despreciable, sin embargo, un valor bajo de S/N degrada la fidelidad de la señal analógica y produce errores en las comunicaciones digitales. El ruido térmico crea problemas en comunicaciones de largas distancias debido a que la señal tiene perdidas de potencia y su nivel es comparable al del ruido.

Tomando las limitaciones de las comunicaciones, Hartley y Shannon establecieron que la tasa de transmisión del canal no puede exceder la capacidad del canal. Limitando el desempeño del sistema de comunicaciones a un ancho de banda y relación señal a ruido, dados.

$$C = B \log_2(1 + \frac{S}{N}) \quad \text{o} \quad C = 3.32B \log_{10}(1 + \frac{S}{N})$$

Definida como la velocidad máxima a la cual puede la transmitirse información, sin errores, a lo largo del canal.

#### 1.4 La modulación y la codificación

La modulación y la codificación son procedimientos realizados en el transmisor para lograr una transmisión de información, confiable y eficiente. Por este motivo es importante prestar especial atención a estos procedimientos.

### 1.4.1 Modulación

Las señales provenientes de las fuentes de información no son adecuadas para transmitirse directamente al medio, por ende, debe buscarse procedimientos que permitan adecuar la información al canal de transmisión.

Para el caso de la modulación se involucra dos tipos de señales: la señal moduladora, que no es más que la señal de información, y la señal portadora, encargada de llevar la información de forma adecuada. De esta manera se puede decir que la modulación es la alteración sistemática de una señal portadora de acuerdo a la señal de información y que además puede incluir codificación.

La modulación no es un procedimiento exclusivo de los sistemas de comunicación, en la naturaleza del ser humano está presente el proceso de modulación entre la voz producida por las cuerdas bucales y la cavidad bucal (movimientos de la boca 10Hz).

### Métodos de Modulación

Debido a que el éxito de un sistema de comunicaciones depende en gran parte de la modulación, existen diferentes métodos de modulación, que generan dos grupos básicos:

- Modulación de onda continua: portadora sinusoidal
- Modulación por pulsos: la portadora es un tren de pulsos periódico

#### Modulación de onda continua

Es un proceso adecuado para señales que varían continuamente en el tiempo, en los cuales la portadora es una onda sinusoidal con una frecuencia mucho mayor que la de la señal moduladora. Por consiguiente el proceso de modulación de onda continua se considera un método de translación de frecuencia en donde el espectro de la señal de información se lleva hacia una banda de frecuencias mucho más altas.

Un claro ejemplo es la transmisión de AM, donde el espectro de la señal de información está entre 100Hz y 5KHz y la portadora tiene una frecuencia de 600KHz, dando como resultado un espectro de la señal modulada entre 595 y 605KHz. Otros ejemplos son las modulaciones exponenciales o angulares.

$$X_c = A_p \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

AM  
↓  
PM  
↑  
FM

#### Modulación por pulsos

Es un proceso discontinuo o discreto, en el sentido en que los pulsos están presentes únicamente en ciertos intervalos de tiempo, por lo tanto la modulación por pulsos es adecuada para mensajes que por naturaleza son discretos, sin embargo con ayuda del proceso conocido como muestreo las ondas continuas pueden ser transmitidas con portadoras pulsantes. Pero la modulación por pulsos no realiza la translación de frecuencia necesaria para una transmisión eficiente, algunos transmisores combinan la modulación por pulsos y la modulación de onda continua.

$$X_c = A_p \sum_m \frac{P}{T} \cos\left(\omega_c t - mT_s\right)$$

PAM  
↓  
 $\sum_m$   
 $\frac{P}{T}$   
PPM o PWM  
↑

### 1.4.2 Razones para modular

La razón principal para el empleo de la modulación es adecuar la señal de información al medio de transmisión, no obstante, existen otros beneficios y aplicaciones de la modulación:

*Para una transmisión eficiente:* la transmisión de información sobre una gran distancia involucra la utilización de ondas electromagnéticas, sin o con medios guiados y la transmisión eficiente de esta depende en gran parte de la frecuencia de la señal, por esta razón es necesario aprovechar la traslación de frecuencia proporcionada por la modulación.

Para radiar eficazmente una señal electromagnética es necesario antenas cuyas dimensiones estén como mínimo en 1/10 de la longitud de onda, pero la señal de audio sin modular tiene componentes de frecuencia por debajo de 100Hz, que requerirían para su transmisión directa una antena de mínimo 300Km. Por este motivo la traslación en frecuencia permite la reducción sustancial del tamaño de las antenas, por ejemplo para la radiodifusión de FM comercial, cuyas portadoras están entre 88 y 108 MHz, necesitan antenas de más o menos 30cm.

*Para superar limitaciones de hardware:* El diseño de un sistema generalmente se limita por el equipo disponible, cuyo rendimiento frecuentemente depende de las frecuencias empleadas. La modulación suele utilizarse para poner una señal en aquella porción del espectro de frecuencia, donde las limitaciones son mínimas, o donde las condiciones de diseño son más fáciles de cumplir.

*Para reducir el ruido y la interferencia:* Para combatir el ruido y la interferencia se utilizan varios procedimientos costosos y que perjudican los equipos, incrementar la potencia de la señal puede ser peligroso, si el nivel sobrepasa los límites de los medios de transmisión. Sin embargo la modulación ayuda a combatir el ruido y la interferencia, pero incrementando la necesidad de ancho de banda, por ejemplo la modulación FM cuya modificación se hace en la frecuencia y no en la amplitud (Si  $BW \rightarrow E_T \wedge$ ).

*Para asignar frecuencia:* La traslación de frecuencias utilizada en la modulación, permite que la asignación de portadoras a ciertos proveedores para permitir que en un sector determinado exista más de un proveedor, por ejemplo de radio difusión o de televisión (AM – BW 10Khz y FM 200Khz).

*Para multiplexar:* Es el proceso de transmisión de múltiples señales por un mismo canal, simultáneamente, existen diferentes mecanismos de multiplexación:

FDM: utiliza modulación de onda continua para ubicar a cada señal en una frecuencia portadora diferente y en el receptor se filtra la señal para recuperar la información.

TDM: utiliza modulación por pulsos para transmitir diferentes señales en instantes de tiempo diferentes.

#### **1.4.3 Codificación**

Es una operación de procesamiento de símbolos para mejorar la comunicación cuando la información es digital o es la digitalización de una onda continua. La codificación transforma un mensaje digital en una nueva secuencia de símbolos.

*Codificación de canal:* es una técnica utilizada para introducir redundancia controlada para mejorar la fiabilidad del desempeño del canal ruidoso.

*Codificación para el control de errores:* técnica de detección y posible corrección de errores que incrementa la complejidad de los equipos y el ancho de banda necesario.

### **1.5 Cronología de la comunicación eléctrica.**

*1800-1837 Preliminary developments* Volta discovers the primary battery; the mathematical treatises by Fourier, Cauchy, and Laplace; experiments on electricity and magnetism by Oersted, Ampere, Faraday, and Henry; Ohm's law (1826); early telegraph systems by Gauss, Weber, and Wheatstone.

*1838-1866 Telegraphy* Morse perfects his system; Steinheil finds that the earth can be used for a current path; commercial service initiated (1844); multiplexing techniques devised; William Thomson (Lord Kelvin) calculates the pulse response of a telegraph line (1855); transatlantic cables installed by Cyrus Field and associates.

*1876-1879 Telephony* Acoustic transducer perfected by Alexander Graham Bell, after earlier attempts by Reis; first telephone exchange, in New Haven, with eight lines (1878); Edison's carbon-button transducer; cable circuits introduced; Strowger devises automatic step-by-step switching (1887); the theory of cable loading by Heaviside, Pupin, and Campbell.

*1887-1907 Wireless telegraphy* Heinrich Hertz verifies Maxell's theory; demonstrations by Marconi and Popov; Marconi patents a complete wireless telegraph system (1897); the theory of tuning circuits developed by Sir Oliver Lodge; commercial service begins, including ship-to-shore and transatlantic systems.

*1904-1920 Communication electronics* Lee De Forest invents the Audion (triode) based on Fleming's diode; basic filter types devised by G. A. Campbell and others; experiments with AM radio broadcasting; transcontinental telephone line with electronic repeaters completed by the Bell System (1915); multiplexed carrier telephony introduced; E. H. Armstrong perfects the superheterodyne radio receiver (1918); first commercial broadcasting station, KDKA, Pittsburgh.

*1920-1928 Transmission theory* Landmark papers on the theory of signal transmission and noise by J. R. Carson, H. Nyquist, J. B. Johnson, and R.V. L. Hartley.

*1923-1938 Television* Mechanical image-formation system demonstrated by Baird and Jenkins; theoretical analysis of bandwidth requirements; Farnsworth and Zworykin propose electronic systems; vacuum cathode-ray tubes perfected by DuMont and others; field tests and experimental broadcasting begin. Federal Communications Commission established.

*1944-1947 Statistical communication theory* Rice develops a mathematical representation of noise; Weiner, Kolmogoroff, and Kotelnikov apply statistical methods to signal detection.

*1948-1950 Information theory and coding* C. E. Shannon publishes the founding papers of information theory; Hamming and Golay devise error-correcting codes.

*1962 Satellite communication* begins with Telstar I.

*1962-1966 High-speed digital communication* Data transmission service offered commercially; Touch-Tone telephone service introduced; wideband channels designed for digital signaling; pulse-code modulation proves feasible for voice and TV transmission; major breakthroughs in theory and implementation of digital transmission, including error-control coding methods by Viterbi and others, and the development of adaptive equalization by Lucky and coworkers.

*1966-1975 Wideband communication systems* Cable TV systems; commercial satellite relay service becomes available; optical links using lasers and fiber optics.

*1969 ARPANET created* (precursor to Internet)

*1972 Motorola develops cellular telephone*; first live TV broadcast across Atlantic Ocean via satellite

*1990-2000 Digital communication systems* Digital signal processing and communication systems in household appliances; digitally tuned receivers; direct-sequence spread spectrum systems; integrated services digital networks (ISDNs); high-definition digital television (HDTV) standards developed; digital pagers; handheld computers; digital cellular.

## 2 SEÑALES ESPECTROS Y FILTROS

En las comunicaciones eléctricas, las señales varían en el tiempo, así como el voltaje y la corriente, sin embargo aunque la señal física existe en el dominio del tiempo, es más conveniente trabajar las señales en el dominio de la frecuencia, esto es posible debido a que la función en el dominio del tiempo está compuesta de un número de componentes de frecuencia, que tienen una amplitud y una fase.

La descripción de las señales en el dominio de la frecuencia es lo que se conoce como *Espectro de la señal*.

### 2.1 Señales AC

El análisis de señales implica el estudio matemático de frecuencia, longitud de onda y el valor de voltaje de una señal, y como estas deben ser variables en el tiempo, pueden ser representadas por una onda sinusoidal, y aunque no todas las señales son del tipo sinusoidal, pueden ser representadas por una combinación de senos y cosenos. En este orden de ideas, la representación de una onda AC con frecuencia única es:

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \text{Donde } A \text{ es la amplitud de la señal} \quad (2.1)$$

$\omega_0$  es la frecuencia en radianes

$\theta$  es la desplazamiento de fase.

La ecuación (2.1) representa una señal repetitiva con una única frecuencia, llamada onda periódica, debido a que se repite rápidamente con exactamente la misma amplitud y tiempo de duración. Estas señales se pueden analizar en el dominio del tiempo y/o de la frecuencia, comúnmente se emplea traslaciones entre un dominio y otro.

$$\text{El periodo de repetición es } T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Aunque estas señales no duran eternamente, para el análisis de señales en estado estacionario se asume que si, utilizando un exponencial complejo o fasor, el cual juega un papel muy importante en el análisispectral. Utilizando el teorema de Euler:

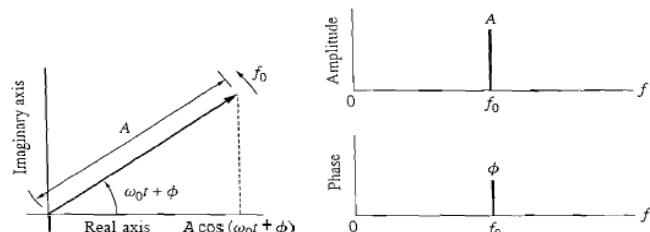
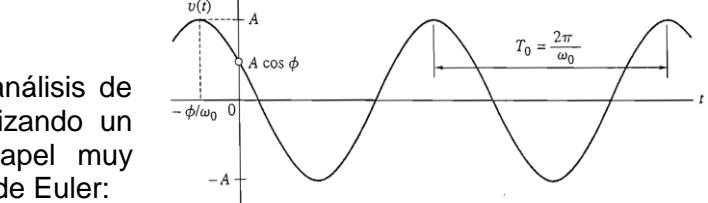
$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

Lo cual implica que cualquier señal sinusoidal puede ser representada por la parte real del fasor:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \operatorname{Re}[e^{\pm j\theta}] \\ A \cos(\omega_0 t + \theta) &= \operatorname{Re}[A e^{j(\omega_0 t + \theta)}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta representación fasorial facilita el análisis en el dominio de la frecuencia, ya que el término entre corchetes representa un vector que rota en el plano complejo, con amplitud  $A$ , a una velocidad  $f_0$  y que en el instante  $t=0$ , forma un ángulo  $\theta$  con el eje real, donde está la señal  $v(t)$ .

En este tipo de representación solo son necesarios tres elementos: amplitud, frecuencia y fase, de esta manera su representación en espectro de línea estará dado por la ecuación 2.2 y sería el mostrado en la figura.



### 2.1.1 Convenciones para el análisis espectral

- En todos los diagramas espectrales la variable independiente es la frecuencia  $f$
- Los ángulos de fase serán medidos con respecto a las ondas coseno, o lo que es equivalente, respecto al eje real positivo, por lo tanto las ondas seno necesitan convertirse a coseno utilizando la identidad.

$$\sin wt = \cos(\omega t - 90^\circ)$$

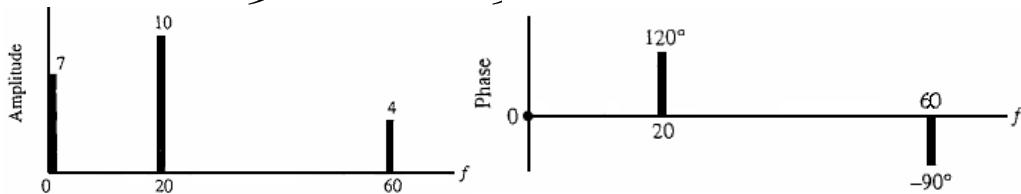
- La amplitud siempre se toma como una cantidad positiva, cuando aparece un valor negativo, este es absorbido por la fase.

$$-A \cos \omega t = A \cos(\omega t \pm 180^\circ)$$

- Los ángulos de fase se expresan en grados, aunque otras cantidades se expresen en radianes.

$$w(t) = 7 - 10 \cos(0\pi t - 60^\circ) + 4 \sin 120\pi t$$

$$w(t) = 7 \cos 0\pi t + 10 \cos(20t + 120^\circ) + 4 \cos(60t - 90^\circ)$$

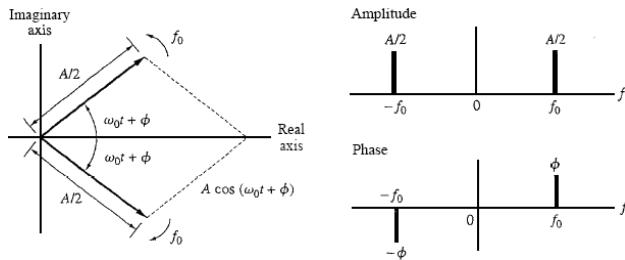


Este espectro se conoce como espectro de líneas unilaterales o de líneas positivas y pueden obtenerse para cualquier combinación lineal de señales sinusoidales.

Además existe otra representación espectral que involucra frecuencias negativas, que puede ser de mayor utilidad, partiendo de la identidad  $\operatorname{Re}[z] = \frac{1}{2}[z + z^*]$ , donde  $z$  representa cualquier cantidad compleja, se tiene que:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \operatorname{Re}[A e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 t + \phi)} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_0 t + \phi)}$$

doble línea.



## 2.2 Señales periódicas y series de Fourier

### 2.2.1 Señales periódicas

Se dice que una señal es periódica, con periodo de repetición  $T_0$ , si para todo entero  $m$ , se cumple que:

$$v(t) = v(t \pm mT_0) \quad -\infty < t < \infty \quad (2.5)$$

Esta ecuación implica que mover la señal hacia izquierda o derecha una cierta cantidad de periodos, no modifica la forma de la señal. En consecuencia una señal periódica puede describirse completamente, describiéndose únicamente un periodo.

Asumiendo que la condición de periodicidad se cumple, puede tomarse la expansión en series de Fourier para descomponer a  $v(t)$  en una combinación lineal de sinusoides o de fasores, lo cual permite la definición del espectro de líneas de la señal. La expansión en series requiere que la señal tenga una potencia promedio finita.

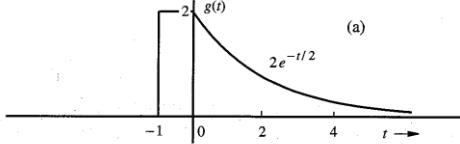
El promedio de una función en todo momento se denota como  $\langle v(t) \rangle$  y se define como:  $\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt$  (2.6)

Si la función es periódica basta con reducir el análisis a un intervalo cualesquiera con duración exacta a  $T_0$  segundos. De esta manera el promedio se redefine como:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t) dt \quad (2.7)$$

Si  $v(t)$  fuese un voltaje que atraviesa una resistencia, genera una corriente  $i(t) = v(t)/R$ , permitiendo el cálculo de la potencia promedio a partir de la potencia instantánea  $i(t)v(t) = [v^2(t)/R] = i^2(t)R$ , para el análisis es necesario normalizar el valor de la resistencia a la unidad, de tal manera que la potencia promedio de una señal periódica cualquiera es:

$$\langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt \quad (2.8)$$



Cuando la integral existe se dice que la señal tiene una potencia promedio bien definida. Además cabe anotar que la raíz cuadrada del valor medio de potencia, es el valor rms de la señal.

## 2.2.2 Series de fourier

En este procedimiento se busca descomponer una señal periódica en una suma de cosenos o lo que es equivalente en fasores, dada una señal de potencia  $v(t)$  periódica, con periodo  $T_0$  su expansión en series complejas de fourier es:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

$$\text{Donde } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (2.10)$$

Estos coeficientes son cantidades complejas que pueden ser expresados en forma polar de la siguiente manera:  $C_n = |C_n| e^{j\arg C_n}$

Donde  $\arg C_n$  es el argumento de  $C_n$ , de esta manera la ecuación (2.9) expande una señal periódica de potencia, en una suma de fasores, donde el n-esimo termino esta dado por:

$$C_n e^{j2\pi n f_0 t} = |C_n| e^{j\arg C_n} e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.11)$$

*Implicaciones espectrales:* dado esta representación se puede observar que los parámetros de definición de la serie son amplitud, ángulo de fase y las frecuencias  $n f_0$ , de esta manera el correspondiente gráfico en el dominio de la frecuencia seria un espectro de doble línea. Para hacer énfasis en la representaciónpectral se denota:  $C(n f_0) = C_n$  donde  $|C(n f_0)|$  representa el espectro de amplitud como función de  $f$  y  $\arg C(n f_0)$  representa el espectro de fase. Estos espectros tienen las siguientes propiedades:

1. Todas las líneas espectrales se encuentran igualmente espaciadas, deben ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $f_0$ , o lo que es mejor, deben ser armónicos de  $f_0$ .

2. La componente DC es igual al valor promedio de la señal, dado que si se evalúa con  $n=0$ , se obtiene:

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{j2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{j2\pi f_0 t} dt = \frac{A}{-j2\pi f_0 T_0} [e^{-jnf_0 \tau} - e^{jnf_0 \tau}] = \frac{A}{\pi f_0 T_0} \sin(\pi f_0 \tau)$$

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} v(t) dt = \langle v(t) \rangle$$

por lo tanto los valores de  $C(0)$  pueden chequearse inspeccionando  $v(t)$ , lo que resulta práctico porque frecuentemente la integración da una forma indeterminada.

3. Si  $v(t)$ , es una función real en el dominio del tiempo, entonces  $C_{-n} = C_n^* = |C_n| e^{-j\arg C_n}$  de donde se obtiene que  $|C(-nf_0)| = |C(nf_0)|$  y  $\arg C(-nf_0) = -\arg C(nf_0)$ , se dice entonces que el espectro de amplitud tiene simetría par y el espectro de fase simetría impar, a este fenómeno se le conoce como propiedad hermitiana.

Cuando se trabaja con señales reales, se puede realizar un reagrupamiento de pares complejos conjugados a excepción de  $C_0$ , entonces

$$\begin{aligned} v(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j2\pi f_0 t} + C_n^* e^{-j2\pi f_0 t} \\ v(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(\pi n f_0 t + \arg C_n) \end{aligned} \quad (2.12)$$

La ecuación representa la función trigonométrica de Fourier, la cual sugiere un espectro unilateral.

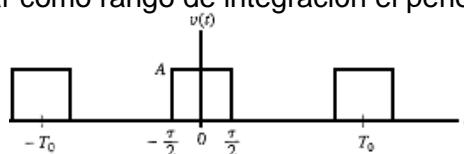
Muy a menudo en la integración de  $C_n$  suele aparecer una integral de la forma:

Esta expresión aparece frecuentemente en el análisis espectral, por ese motivo se define la función  $sincX = \frac{\sin \pi X}{\pi X}$  (2.13) otros autores definen la función sampling, tal que  $Sa(\pi y) = \text{sinc}(y)$

Ejemplo: Tren de pulsos

Considere la señal rectangular de la figura, en la cual cada pulso tiene una amplitud  $A$  y una duración  $\tau$ , para calcular los coeficientes de Fourier se puede tomar como rango de integración el periodo central.

$$v(t) = \begin{cases} A & \rightarrow |t| < \tau/2 \\ 0 & \rightarrow |t| > \tau/2 \end{cases}$$



$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi ft} dt = \frac{1}{j2\pi fT} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] = \frac{1}{\pi fT} \sin(\pi fT)$$

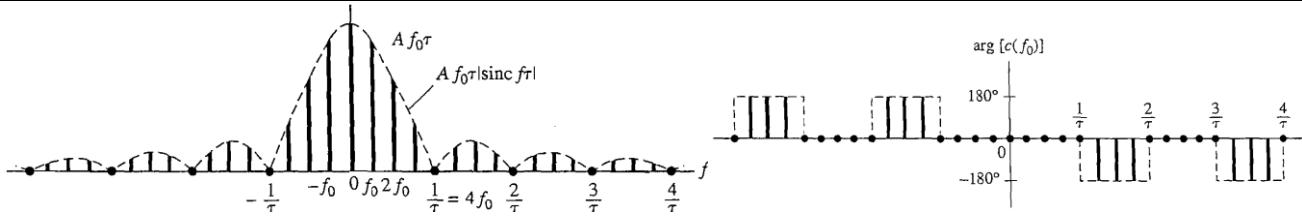
De esta manera se tiene que:

$$C_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc}(nf_0)$$

Del coeficiente puede determinarse el espectro de magnitud:  $|C_n(nf_0)| = |C_n| = Af_0\tau |\text{sinc}(nf_0)|$

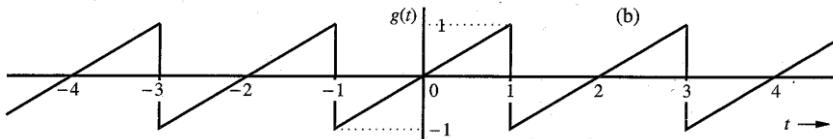
Con  $f_0\tau = 1/4$  se tiene:

$$|C_n(nf_0)|$$



$$\text{Y su serie de Fourier: } v(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2}A}{\pi} \cos w_0 t + \frac{A}{\pi} \cos 2w_0 t + \frac{\sqrt{2}A}{3\pi} \cos 3w_0 t +$$

Ejercicio:



### 2.2.3 Condiciones de convergencia y fenómeno de Gibbs

Se ha visto la representación de funciones en series de Fourier, pero se debe comprobar que esta representación en efecto converge hacia la función original, por este motivo se definen una serie de criterios de convergencia:

*Condiciones de Dirichlet:* para la expansión en series de Fourier

Si una función periódica  $v(t)$  posee un número finito de máximos, mínimos y discontinuidades por periodo, y además es absolutamente integrable, entonces la serie de Fourier existe y converge uniformemente donde quiera que  $v(t)$  sea continuo. Esta condición es suficiente pero no estrictamente necesaria.

Si  $v(t)$  es cuadrado integrable, entonces  $|v(t)|^2$  tiene un área finita por periodo, equivalente a la potencia de la señal.

Bajo estas condiciones la serie converge en la medida en que si:  $v_N(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{j2\pi n f_0 t}$  entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_0}^{\infty} |v(t) - v_N(t)|^2 dt = 0$$

En otras palabras la diferencia cuadrada entre  $v(t)$  y la suma parcial  $v_N(t)$ , desaparece conforme se incluyen mas términos en la sumatoria.

### 2.2.4 Teorema de Parseval

Este teorema relaciona la potencia promedio  $P$ , de una señal periódica con los coeficientes de la serie de Fourier:

$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} v(t)v(t)^* dt$  Se remplaza  $v(t)^*$  por su serie de Fourier e intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral se obtiene:

$$v^* \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \text{ Entonces } P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} v(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \right] dt \text{ y } P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] C_n^*$$

$$\text{El elemento de la sumatoria es } C_n \text{ obteniéndose que } P = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (13)$$

Este resultado es lo que se conoce como el teorema de Parseval, que implica que la potencia promedio de una señal puede ser encontrada con la suma del cuadrado de las magnitudes de las líneas del espectro de la señal.

### 2.3 Señales no periódicas y Transformada de Fourier

Ya se ha analizado la representación en series de Fourier de señales periódicas que duran infinitamente, pero que pasa con las señales no periódicas cuya duración es relativamente corta. Entonces si una señal no periódica tiene una energía finita, su representación en el dominio de la frecuencia es un espectro continuo obtenido desde la transformada de Fourier.

Como se trabaja con señales no periódicas, no se puede hablar de potencia promedio debido a que la magnitud tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito y por ende la potencia promedio también tiende a cero. En este orden de ideas la energía de una señal esta definida como:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt \quad (14)$$

Si la integral existe y converge a un valor diferente de cero o indeterminado, se puede decir que la señal tiene una energía bien definida y se le denomina señal no periódica de energía. Esta es la condición para que una señal pueda representarse en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Fourier.

Cuando una señal cumple las condiciones, puede calcularse su transformada de Fourier definida como:

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (15)$$

Y para recuperar la función en el dominio del tiempo se aplica la transformada inversa de Fourier:

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi ft} df \quad (16)$$

Las ecuaciones presentadas se definen como integrales de Fourier o par de transformadas de Fourier, y se utilizan para el análisis de una señal en un dominio específico. Por otro lado analizando las ecuaciones se puede observar que la función  $V(f)$  juega un rol similar al de  $C(nf_0)$ , por lo tanto  $V(f)$  es el espectro de la señal no periódica  $v(t)$ .

La diferencia entre  $C(nf_0)$  y  $V(f)$ , radica en que  $V(f)$  es una función continua definida para todos los valores de  $f$  y  $C(nf_0)$  esta definida solo para frecuencias discretas. Por lo tanto una señal no periódica tiene un espectro continuo en vez de un espectro de líneas.

Propiedades de las transformadas:

1. La transformada es una función compleja, entonces  $|V(f)|$  es el espectro de amplitud y  $\arg V(f)$  es el espectro de fase.
2. El valor de  $V(f)$  en  $f=0$  es igual al área neta de  $v(t)$ .  $V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt$   
Comparable con el valor de  $C(0)$ , que es el valor promedio de  $v(t)$ .
3. Si  $v(t)$  es real entonces  $V(-f) = V^*(f)$  y  $|V(-f)| = |V(f)|$   $\arg V(-f) = -\arg V(f)$ , entonces se puede afirmar que la función cumple con la simetría hermitiana.

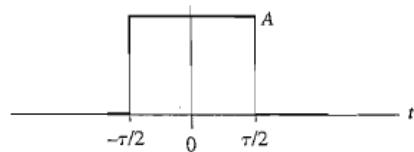
### 2.3.1 Ejemplo: Pulso rectangular

Se toma a consideración un pulso rectangular cuya definición esta dada por:

$$\pi(t/\tau) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

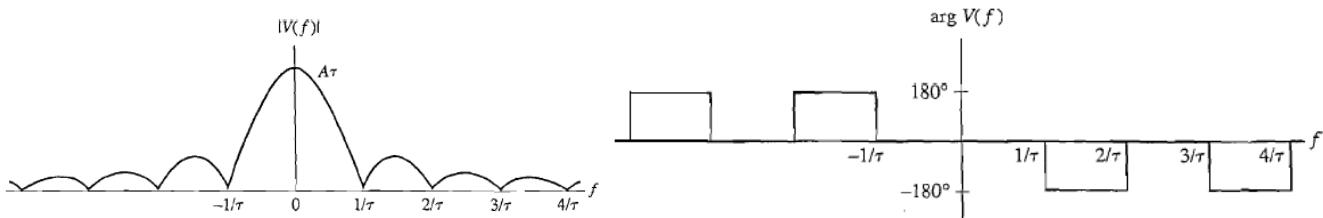
Esto es un pulso centrado en cero con un ancho o duración igual a  $\tau$ , entonces se

define  $v(t)$  como:  $v(t) = A\pi(t/\tau)$  y su transformada de fourier esta dada por:



$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{\pi f} \sin \pi f \tau = A \tau \operatorname{sinc} f\tau$$

Note que si  $f = 0$ ,  $V(f) = A\tau$  que es exactamente el área del pulso. El correspondiente diagrama de magnitud y fase es el siguiente:



Se puede observar que la mayor cantidad de información esta concentrada en  $|V(f)| < 1/\tau$ , debido a que  $|V(f)| \ll |V(0)|$  para  $|V(f)| > 1/\tau$ , por lo tanto se puede tomar a  $1/\tau$  como una medida del ancho espectral, por lo tanto si un pulso tiene una duración corta, entonces el ancho de sus espectro será amplio, en el caso contrario si la duración de un pulso es grande, su ancho espectral será menor. Este fenómeno se conoce como *ensanchamiento reciproco* y es válido tanto para pulsos como para señales diferentes.

### 2.3.2 Señales simétricas y causales

Cuando una señal tiene simetría en el dominio del tiempo, su integral de transformada puede simplificarse. Para el desarrollo de las propiedades de simetría en el tiempo se toma la variable  $w = 2\pi f$ .

Utilizando el teorema de Euler una señal en el dominio de la frecuencia puede ser expresada de la forma:

$V(f) = V_e(f) + jV_o(f)$  Donde  $V_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos wt dt$  y  $V_o(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \sin wt dt$  que representa la parte par e impar de  $V(f)$ , sin tener en cuenta a  $v(t)$ , si  $v(t)$  es real entonces:  $\operatorname{Re}[V(f)] = V_e(f)$  y  $\operatorname{Im}[V(f)] = V_o(f)$ , por consiguiente  $V^*(f) = V_e(f) - jV_o(f) = V(-f)$ .

Cuando  $v(t)$  es simétrica en el dominio del tiempo, se puede simplificar la integral:  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = \int_0^{\infty} w(t) dt + \int_{-\infty}^0 w(t) dt$

si  $w(t)$  es impar la integral es cero y si es par la integral tiene la forma:  $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 2 \int_0^{\infty} w(t) dt$

La función  $w(t)$  es válida tanto para  $v(t) \cos wt$  como para  $v(t) \sin wt$ . Si  $v(t)$  tiene simetría par entonces  $v(-t) = v(t)$ , por lo tanto  $V(f) = V_e(f) = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos wt dt$ , porque  $v(t) \cos wt$  es par y  $v(t) \sin wt$  es impar.

Ahora si  $v(t)$  tiene simetría impar,  $v(-t) = -v(t)$  obteniendo que  $V(f) = jV_o(f) = -j2 \int_0^\infty v(t) \sin wt dt$ .

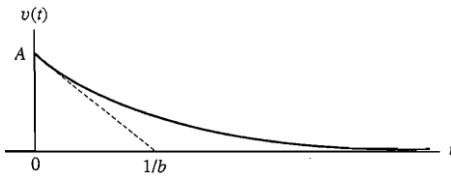
En el caso en que  $v(t) = 0$  para  $t < 0$ , una señal causal de energía, no está relacionada a ningún tipo de simetría, en este caso el espectro está conformado por una parte real y una imaginaria, entonces  $V(f) = \int_0^\infty v(t) e^{-j2\pi ft} dt$

Esta integral tiene la forma de la Transformada de Laplace unilateral  $\mathcal{L}[v(t)] = \int_0^\infty v(t) e^{-st} dt$ , lo cual implica que si  $v(t)$  es una señal causal de energía,  $V(f)$  puede obtenerse mediante la transformada unilateral de Laplace, cambiando  $s$  por  $jw$ .

### 2.3.3 Ejemplo: Pulso causal exponencial

Se define la función pulso causal como:

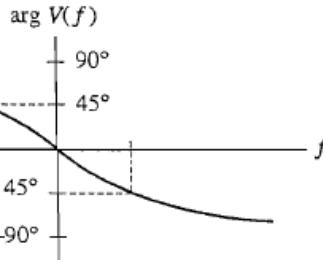
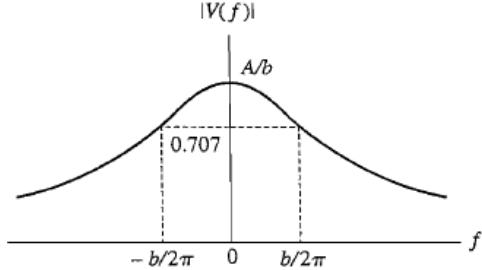
$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[v(t)] = \int_0^\infty Ae^{-(j2\pi ft+b)t} dt = \left[ \frac{Ae^{-(j2\pi ft+b)t}}{-(j2\pi f + b)} \right]_0^\infty = \frac{A}{b + j2\pi f} \quad \text{entonces se tiene que } V(f) = \frac{A}{b + j2\pi f}$$

obtiene que el espectro de magnitud y fase:

$$|V(f)| = \frac{A}{\sqrt{b^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad \arg V(f) = -\tan^{-1} \frac{2\pi f}{b}$$



El espectro de fase es una línea suave que recorre los ángulos desde  $90^\circ$  hasta  $-90^\circ$

### 2.3.4 Teorema de Rayleigh de energía

Análogo al teorema de Parseval, el teorema de Rayleigh relaciona la energía  $E$  de la señal  $v(t)$ , con su espectro  $V(f)$ .  $E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) V(f)^* df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$  Entonces: integrando el cuadrado del espectro de magnitud sobre todas las frecuencias, da como resultado la energía total.

Por lo general el valor de la energía se calcula en el dominio del tiempo de manera fácil, sin embargo lo que brinda  $|V(f)|^2$  es la distribución de energía en el dominio de la frecuencia, que se denomina como densidad espectral de energía.

Para el pulso rectangular se puede establecer que su densidad espectral es:

$$E = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V(f)|^2 df = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2 f\tau df = 0.92(A\tau)^2 \text{ donde la energía total del pulso es } E \approx (A\tau)^2$$

## 2.4 Relación entre el dominio del tiempo y la frecuencia

En las secciones anteriores se ha hecho un análisis de las señales en el dominio de la frecuencia, sin embargo es necesario analizar en los dos dominios a los que pertenece la señal (tiempo y frecuencia), por este motivo a continuación, se da a conocer los teoremas utilizados para visualizar la relación tiempo – frecuencia.

La nomenclatura para las transformadas suele ser  $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$  y  $v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)]$ , pero para los teoremas se utiliza una notación más compacta  $v(t) \leftrightarrow V(f)$  que se interpreta como un par de transformadas.

### 2.4.1 Superposición

Para la transformada de Fourier se aplica de la siguiente manera.

$$\text{Sea } v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t), \text{ entonces: } \mathcal{F}[v(t)] = a_1 \mathcal{F}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[v_2(t)]$$

$$\text{Generalizando se tiene que: } \sum_k a_k v_k(t) \leftrightarrow \sum_k a_k V_k(f)$$

Estableciendo que combinaciones lineales en el dominio del tiempo, son expresadas de igual manera en el dominio de la frecuencia. Este teorema es importante cuando no es posible analizar una señal, pero se conoce las señales independientes que la componen.

### 2.4.2 Desplazamiento en el tiempo

Si una señal es retardada cierto tiempo  $t_d$ , se produce una nueva señal, cuyo espectro en frecuencia es similar al de la señal original, con un desfase lineal de pendiente  $-2\pi f t_d$ .

$$\text{Si } v(t) \leftrightarrow V(f), \text{ entonces } v(t - t_d) \leftrightarrow V(f) e^{-j2\pi f t_d} \text{ además } |V(f) e^{-j2\pi f t_d}| = |V(f)| e^{-j2\pi f t_d} = |V(f)|$$

Entonces un desplazamiento en el tiempo de una señal modifica la fase de su espectro en frecuencia, pero no la magnitud.

### 2.4.3 Cambio de escala

El cambio de escala es un fenómeno de compresión o expansión e incluso puede invertir la señal en el dominio del tiempo, así que  $v(at)$  es una versión comprimida de  $v(t)$  si  $a$  es mayor que la unidad y expandida si  $a$  es menor a la unidad, y si  $a$  es negativa la señal resultante estará invertida en el tiempo de la expansión o compresión. Esta cambio de escala genera un cambio reciproco en el dominio de la frecuencia.

$$v(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} V\left(\frac{f}{a}\right) \quad a \neq 0$$

Demostrar que: si  $z(t) = a_1 v(t) + a_2 v(-t)$  entonces  $Z(f) = (a_1 + a_2)V_e(f) + j(a_1 - a_2)V_0(f)$

### 2.4.4 Dualidad

Si se revisa con detenimiento el par de integrales de la transformada de Fourier, se puede observar que difieren en la variable de integración y el signo del exponencial, el teorema dice que dadas el par de transformadas  $v(t) \leftrightarrow V(f)$ , existe una transformada  $z(t)$  relacionada con  $V(f)$ :

$$z(t) = V(f) \text{ Entonces } \mathcal{F}[z(t)] = v(-f) \text{ o lo que es equivalente } V(t) \leftrightarrow v(-f)$$

## 2.4.5 Traslación en frecuencia y modulación

El teorema de la dualidad puede emplearse para generar nuevos pares de transformadas, ese es el caso del teorema de la traslación en el tiempo:  $v(t)e^{jw_c t} \leftrightarrow V(f - f_c)$  con  $w_c = 2\pi f_c$

Este teorema es llamado teorema de la traslación de frecuencia o modulación compleja, puesto que al multiplicar una función en el dominio del tiempo por el exponencial, su espectro en frecuencia experimenta un desplazamiento de frecuencia hasta  $f_c$ .

La traslación en frecuencia revela varios aspectos de la modulación:

- Las componentes principales de la señal están concentradas al rededor de  $f_c$ .
- A pesar de que  $V(f)$  tiene banda limitada  $w$ ,  $V(f - f_c)$  tiene un ancho de banda  $2w$ . Entonces la traslación ha duplicado el ancho espectral.
- $V(f - f_c)$  no cumple con la propiedad hermitiana, pero tiene simetría respecto al eje trasladado a  $f_c$ .

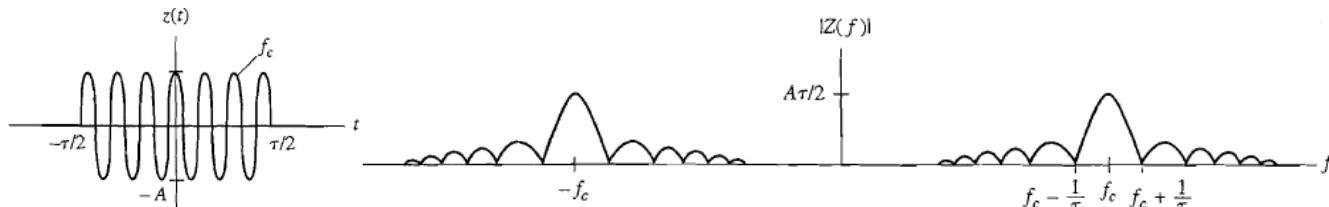
Para efectos reales, no es posible multiplicar una función con la función exponencial, sin embargo para la modulación se utiliza una función del tipo cosenoidal, que por el teorema de Euler puede ser expresada en términos de exponenciales, obteniendo el teorema de la modulación:

$$v(t)\cos(w_c t + \varphi) \leftrightarrow \frac{e^{j\varphi}}{2}V(f - f_c) + \frac{e^{-j\varphi}}{2}V(f + f_c)$$

## 2.4.6 Ejemplo: Pulso RF

Dada la función  $z(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau})\cos w_c t$ , su espectro aplicando el teorema de la modulación esta dado por:

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f + f_c)\tau \text{ obteniendo:}$$



## 2.4.7 Diferenciación e integración

Ciertas técnicas de procesamiento de señal, involucran diferenciación o integración, los efectos en el dominio de la frecuencia se aprecian en este teorema. Este teorema solo puede aplicarse cuando se está completamente seguro de que la señal tiene transformada de fourier o es Fourier transformable.

El teorema indica que la diferenciación de una función se refleja en el dominio de la frecuencia multiplicando la transformada por el complejo  $j2\pi f$ , que se puede comprobar invirtiendo el orden de la derivada y la integral de la transformada inversa de la función.

$$\frac{d}{dt}v(t) \leftrightarrow j2\pi fV(f)$$

Para el caso de la derivada n-esima se tiene que:  $\frac{d^n}{dt^n}v(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f)$

Para una función definida como integral el Teorema de la integral indica que si  $V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)d\lambda = 0$  entonces:

$$\int_{-\infty}^t v(\lambda) d\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} V(f)$$

La primera condición de integral asegura que la integral tienda a 0 cuando  $t$  tiende a 0. La inspección de este teorema indica que la diferenciación refuerza los componentes de alta frecuencia, mientras que la integración los atenúa.

Existe otro importante teorema, que se desprende de la diferenciación, el cual indica que dado un par de transformadas  $v(t) \Leftrightarrow V(f)$ , existe otro par de transformadas tal que:

$$t^n v(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n V(f)}{df^n}$$

#### 2.4.8 Convolución

La convolución es de gran importancia entre las herramientas analíticas en la ingeniería de comunicaciones, debido a que es un buen modelo del proceso físico que ocurre en los sistemas de comunicación lineales, además ayuda a comprender la relación existente entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.

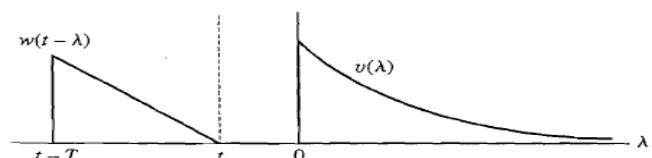
Integral de Convolución: La convolución entre dos funciones que dependen de la misma variable, que para este caso es el tiempo se define como:  $v(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) w(t - \lambda) d\lambda$

Cuando las señales son continuas en el tiempo la integral suele ser fácil de solucionar, los inconvenientes se presentan cuando una o las dos presentan discontinuidades, cuando esto ocurre es necesario utilizar el método gráfico para dar solución a este inconveniente.

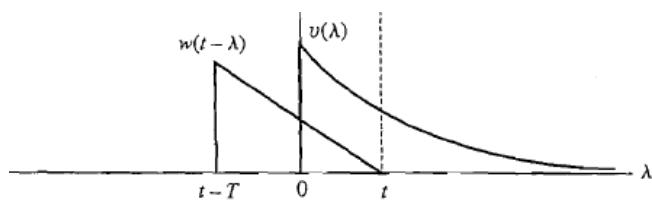
Para visualizar este fenómeno es necesario ver un ejemplo: Sean las funciones  $v(t) = Ae^{-t}$  para  $0 < t < \infty$  y  $w(t) = t/T$  para  $0 < t < T$ . La integral indica que la función  $v(t)$  no se altera, pero la función  $w(t)$ , tiene un desplazamiento igual a  $\lambda$ , entonces:  $w(t - \lambda) = (t - \lambda)/T$  para  $0 < t - \lambda < T$ .

Para graficar la función  $w(t - \lambda)$  en función de  $\lambda$ , es necesario cambiar la variable de referencia de  $w(t)$  y graficar  $w(-\lambda)$ , posteriormente desplazar la gráfica obtenida a derecha  $t$  unidades consiguiendo  $w[-(\lambda - t)] = w(t - \lambda)$ .

Se puede observar que para  $t < 0$ , las señales no se traslapan, por lo tanto la convolución es igual a 0, pero si se desplaza para un  $0 < t < T$ , las señales se traslanan, y los límites de la integral son  $0 < \lambda < t$ , entonces:



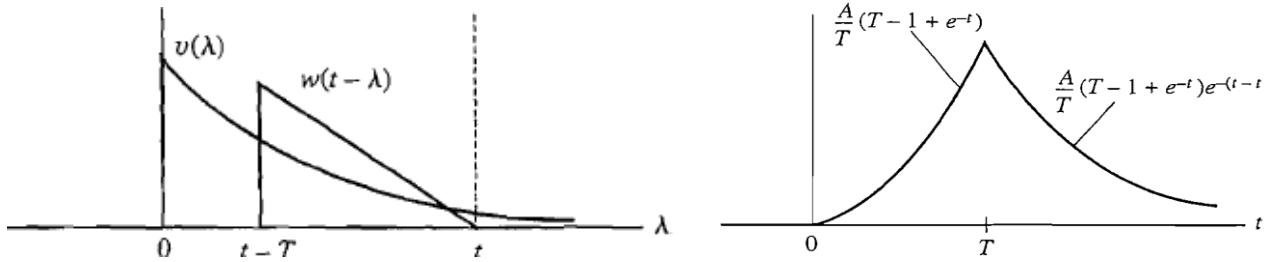
$$\int_0^t Ae^{-\lambda} \left( \frac{t-\lambda}{T} \right) d\lambda = \frac{A}{T} \left[ -1 + e^{-t} \right] \quad 0 < t < T$$



Para  $t > T$  las señales se traslanan entonces  $t-T < \lambda < t$

$$\int_{t-T}^t Ae^{-\lambda} \left( \frac{t-\lambda}{T} \right) d\lambda = \frac{A}{T} \left[ -1 + e^{-T} e^{-(t-T)} \right] \quad t > T$$

Y el resultado obtenido es:



Teoremas de la Convolución: La convolución involucra importantes y útiles propiedades, que se derivan de la definición de la integral y del análisis gráfico.

1. La convolución es commutativa:  $v(t) * w(t) = w(t) * v(t)$
2. Asociativa:  $v(t) * [w(t) * z(t)] = [v(t) * w(t)] * z(t)$
3. distributiva:  $v(t) * [w(t) + z(t)] = v(t) * w(t) + v(t) * z(t)$

Con las propiedades antes mencionadas, se definen los teoremas de la convolución:

- $v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f)W(f)$
- $v(t)w(t) \leftrightarrow V(f)*W(f)$
- $\frac{d[v(t) * w(t)]}{dt} = v(t) * \frac{dw(t)}{dt}$
- $\int [v(t) * w(t)]dt = \int v(t)dt * \int w(t)dt$

#### 2.4.9 Impulso y transformada en el límite

Hasta ahora se ha mantenido una distinción entre dos clasificaciones espectrales: espectro de líneas para representar señales de potencia continuas y espectro continuo para representar señales de energía no periódicas, sin embargo, la distinción no es muy clara cuando una señal tiene términos periódicos y no periódicos. Esto se resuelve introduciendo impulsos en el dominio de la frecuencia para representar componentes discretos de frecuencia. La noción fundamental de la transformada en el límite permite la representaciónpectral de impulsos en el dominio del tiempo y de otras señales cuya transformada no existe en el sentido usual.

Propiedades del Impulso Unitario: El impulso unitario o delta dirac, no es una función en el sentido estrictamente matemático, más bien puede considerarse como parte de una clase espacial conocida como *Funciones Generalizadas o Distribuciones* y debido a esto se define por una regla dada, las propiedades de  $\delta(t)$  se derivan de la siguiente expresión:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\delta(t)dt = \begin{cases} v(0) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{Fuera} \end{cases}$$

Donde  $v(t)$  es una función ordinaria y continua en  $t=0$ , asignando bien sea  $v(0)$  o 0, a la expresión de la izquierda. Esta expresión también puede aplicarse al dominio de la frecuencia cambiando  $t$  por  $f$ , si  $v(t)=1$

entonces:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$  que puede interpretarse que  $\delta(t)$  tiene un área unitaria concentrada en un punto

discreto  $t = 0$  y ninguna área en otra parte ( $\delta(t)=0$  si  $t \neq 0$ ).  $A\delta(t-t_d)$  Representa un impulso de área  $A$  en el punto  $t = t_d$

Por definición, el impulso no tiene significado físico o matemático a menos que aparezca dentro de una integral, por este motivo se presentan las dos propiedades más significativas:

- Modulación:  $v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d)$
- Muestreo:  $\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t - t_d) dt = v(t_d)$

La diferencia es que el muestreo toma un valor particular, mientras que en la modulación hay traslado de la función completa.

Conociendo que cualquier expresión que involucre al impulso deberá integrarse, se puede utilizar relaciones de simplificación antes de realizar la integral.

$$v(t)\delta(t - t_d) = v(t_d)\delta(t - t_d) \quad \text{y} \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad a \neq 0$$

Impulso en Frecuencia: Dadas el par de transformadas  $A \leftrightarrow A\delta(f)$ , el espectro en frecuencia de una función constante en el dominio del tiempo es un impulso en la frecuencia  $f = 0$ . Generalizando el enunciado anterior, la aplicación directa del teorema de traslación y modulación dan como resultado:

$$Ae^{jw_c t} \leftrightarrow A\delta(f - f_c) \quad \text{y} \quad A\cos(w_c t + \varphi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\varphi}}{2}\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\varphi}}{2}\delta(f + f_c)$$

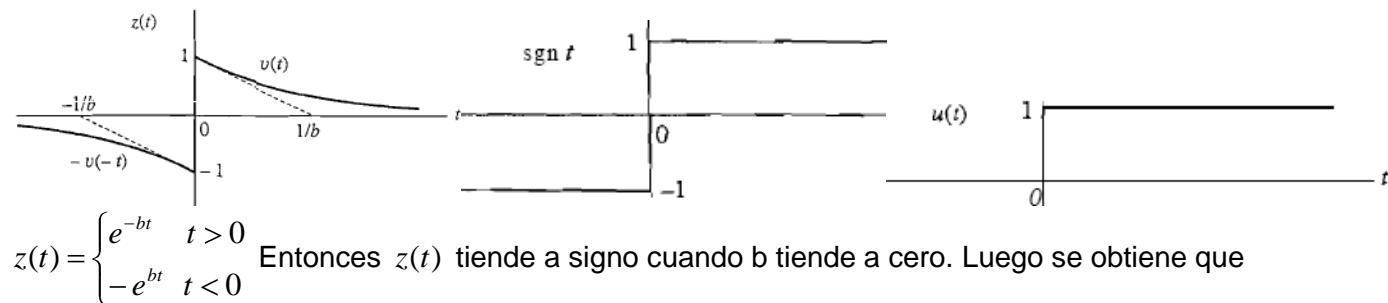
Si  $v(t)$  fuese una arbitraria función periódica, su serie de Fourier sería  $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t}$  y su correspondiente transformada  $V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(nf_0)\delta(f - nf_0)$ , lo cual indica que cualquier conjunto de espectro bilateral puede ser convertido a un espectro continuo, permitiendo representar espectros continuos de señales periódicas y no periódicas.

#### 2.4.10 Función Escalón y Signo

La función escalón se define como  $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  y la función signo  $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

La función escalón tiene varios usos en la teoría de Fourier, especialmente considerando señales causales, que multiplicadas por el  $u(t)$  tendrán valor 0 para  $t < 0$ . Sin embargo la falta de simetría crea problemas para encontrar la transformada en el límite, por ese motivo es mejor empezar con la función signo, La cual tiene simetría impar.

La función signo es una caso especial de la señal de energía  $z(t)$  donde  $v(t) = e^{-bt}u(t)$  y  $z(t) = v(t) - v(-t)$



$Z(f) = j2V_o(f) = \frac{-j4\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2}$  Para la función signo  $\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = b \lim_{t \rightarrow 0} Z(f) = \frac{-j}{\pi f}$  y el nuevo par de transformadas es:  $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$

La función escalón y signo están relacionadas por la siguiente expresión  $u(t) = \frac{1}{2} \text{sgn } t + \frac{1}{2}$  entonces el par de transformadas del escalón es:  $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$

Convolución del Escalón: La Convolución de una función cualquiera con el escalón tiene la forma:

$v(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^t v(\lambda)d\lambda$  Por el teorema de la convolución se tiene  
 $v(t) * u(t) = V(f) \left( \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right)$  entonces  $\int_{-\infty}^t v(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow V(f) \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}V(0)\delta(f)$  indica que el teorema de la integración es válido si  $V(0)=0$ .

#### 2.4.11 Impulso en el Tiempo

La transformada del impulso en el dominio del tiempo es una constante  $A\delta(t) \leftrightarrow A$ .

Aplicando el teorema de desplazamiento en el tiempo se tiene que  $A\delta(t-t_d) \leftrightarrow Ae^{-j2\pi ft_d}$

El impulso en el dominio del tiempo ayuda a demostrar que la transformada inversa de una función es en efecto la función en el dominio del tiempo. Sean  $v(t)$  y  $V(f)$  un par de transformadas, entonces:

$$\mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda \right] e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\lambda)} df \right] d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = v(t) * \delta(t)$$

Otra relación importante es la del impulso y el escalón:  $\int_{-\infty}^t \delta(\lambda-t_d)d\lambda = \begin{cases} 1 & t > t_d \\ 0 & t < t_d \end{cases} = u(t-t_d)$  por lo tanto

$\delta(t-t_d) = \frac{d}{dt}u(t-t_d)$ . Combinando al impulso con el escalón y el teorema de la diferenciación, se puede calcular ciertas transformadas, ayudando a predecir el espectro de alta frecuencia de una señal. El método dice que se debe derivar la función en múltiples ocasiones, hasta encontrar la primera discontinuidad. Entonces la siguiente derivada irá acompañada de impulsos  $A_k\delta(t-t_k)$ , debidos a las discontinuidades de la derivada anterior

$\frac{d^n}{dt^n}v(t) = w(t) + \sum_k A_k\delta(t-t_k)$  Transformando  $(j2\pi f)^n V(f) = W(f) + \sum_k A_k e^{-j2\pi ft_k}$  de la cual se puede encontrar  $V(f)$  si se conoce  $W(f)$

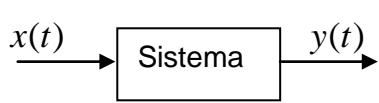
Ejercicio:  $v(t) = \frac{A}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{\tau} \right) \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$

#### 2.5 Respuesta de un sistema y filtros

En el contexto de comunicaciones eléctricas el sistema usualmente podría ser una red de dos puertos manejada por un voltaje de entrada  $x(t)$  que produce un voltaje a la salida  $y(t)$ . Los elementos de almacenaje

y otros efectos internos pueden causar que la forma de onda de salida sea diferente a la señal de entrada. Pero sin importar lo que hay internamente, el sistema se caracteriza por una relación excitación-respuesta entre la entrada y la salida. En este ítem se hablará de los sistemas que se conocen como sistemas LTI (Linear Time Invariant) o sistemas lineales invariantes en el tiempo, en los cuales no hay almacenamiento de energía. Para este tipo de sistemas la relación entrada-salida se encuentra utilizando la integral de superposición y la respuesta al impulso.

### 2.5.1 Respuesta al Impulso e integral de superposición



En este sistema la salida  $y(t)$  es obtenida a partir de la entrada  $x(t)$ , esta relación se representa como:  $y(t) = F[x(t)]$  esta linealidad indica que el sistema obedece al principio de superposición, tal que si:

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \quad \text{Donde } a_k \text{ es una constante, entonces: } y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)]$$

La propiedad de invariancia en el tiempo indica que las características del sistema permanecen fijas con el tiempo, por lo tanto, un desplazamiento en la entrada produce uno en la salida:  $F[x(t - t_d)] = y(t - t_d)$

La mayoría de sistemas LTI, están compuestos por elementos agrupados como resistencias, capacitores e inductores o como elementos espacialmente distribuidos así como las líneas de transmisión. El análisis directo de estos sistemas relaciona la entrada con la salida como una ecuación diferencial lineal de la forma:  $a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$  donde  $a$  y  $b$  son coeficientes constantes que involucran los valores de los elementos, el número de elementos independientes que almacenan energía determinan el valor de  $n$ , que se conoce como el orden del sistema. Desafortunadamente esta ecuación no determina una expresión directa para  $y(t)$ . Para determinar una ecuación explícita de entrada-salida se define la respuesta del sistema al impulso.  $h(t) = F[\delta(t)]$

Esta es la respuesta solicitada cuando  $x(t) = \delta(t)$ , pero una señal de entrada continua puede ser expresada como una convolución  $x(t) = x(t) * \delta(t)$ , entonces:

$$y(t) = F \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) F[\delta(t - \lambda)] d\lambda$$

El cambio es permitido en virtud de la linealidad del sistema, y por la propiedad de invarianza se tiene que

$$F[\delta(t - \lambda)] = h(t - \lambda), \text{ luego } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda = h(t) * x(t), \text{ que se conoce como}$$

la integral de superposición, la cual indica que la respuesta del sistema está dada por la convolución entre la señal de entrada  $x(t)$  y la respuesta al impulso  $h(t)$ , el análisis del sistema en el dominio del tiempo necesita conocer la respuesta al impulso del sistema y la habilidad para dar solución al problema de convolución.

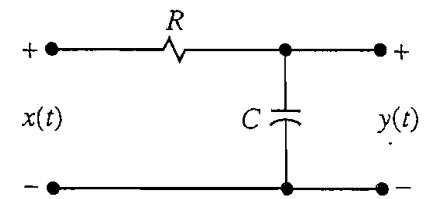
Varias técnicas son empleadas para determinar la respuesta impulsiva de un sistema, a partir de ecuaciones diferenciales o modelos matemáticos, pero la manera más eficiente es tomar a  $x(t) = u(t)$  y calcular la respuesta a la función escalón.

$g(t) = F[u(t)]$  De donde  $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$  Esto puede comprobarse haciendo uso de la relación de la derivada entre el impulso y la respuesta al escalón y de la propiedad de la derivada de la convolución.  $\frac{d}{dt}[v(t) * w(t)] = v(t) * \frac{dw(t)}{dt}$ , luego:

$$g(t) = h(t) * u(t) \text{ y } \frac{dg(t)}{dt} = h(t) * \frac{du(t)}{dt} \text{ obteniendo como resultado } \frac{dg(t)}{dt} = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

## 2.5.2 Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden

Considerando el siguiente circuito:

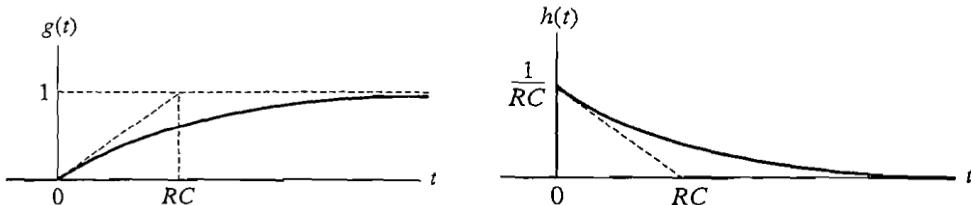


Este circuito es un sistema de primer orden cuyo comportamiento está dado por la ecuación diferencial:

$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$  El interés en este sistema es que el comportamiento de ciertas líneas de transmisión y cables, se describe por medio de expresiones similares. De la ecuación diferencial o desde el circuito, la respuesta al escalón está dada por:

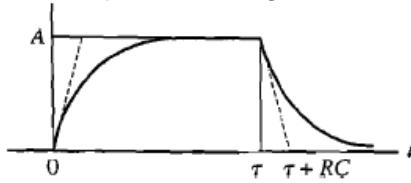
$g(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t)$  De donde puede obtenerse la respuesta al impulso por la relación de derivada.

$h(t) = \frac{e^{-t/RC}}{RC}u(t)$ , cabe anotar que tanto  $g(t)$  como  $h(t)$  son señales causales, debido a que la entrada es 0 para  $t < 0$ .



De esta manera para encontrar la respuesta para una función arbitraria de entrada, se puede remplazar  $h(t)$  en la integral de superposición. Por ejemplo para el caso del pulso rectangular se tiene que:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-t/RC}) & 0 < t < \tau \\ A(1 - e^{-t/RC})e^{-(t-\tau)/RC} & t > \tau \end{cases}$$



## 2.5.3 Función de transferencia y análisis en el dominio de la frecuencia

En el dominio del tiempo a medida que el orden del sistema se incrementa, se incrementa también la complejidad para encontrar una solución. En el dominio de la frecuencia se puede obtener una respuesta más clara del sistema utilizando lo que se denomina como la *Función de Transferencia* del sistema, obtenida a través de la transformada de Fourier de la respuesta al impulso:

$$\mathcal{F}\left[g(t)\right] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi f t} dt = H(f) \text{ esta definición requiere que la transformada exista, dado que si } h(t) \text{ es}$$

inestable (creciente con el tiempo)  $H(f)$  no existe. Cuando  $h(t)$  es real  $H(f)$  satisface la propiedad Hermitiana.

La interpretación de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia proviene de la integral de superposición ( $h(t) * x(t)$ ), con una entrada del tipo fasor:  $x(t) = A_x e^{j\varphi_x} e^{j2\pi f_0 t}$   $-\infty < t < \infty$

Donde la condición de  $x(t)$  para todo  $t$ , está asociada con las condiciones de estabilidad del sistema, por lo tanto la respuesta de estado estable del sistema, está dada por:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) A_x e^{j\varphi_x} e^{j2\pi f_0(t-\lambda)} d\lambda$$

$$y(t) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j2\pi f_0 \lambda} d\lambda \right] A_x e^{j\varphi_x} e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = H(f_0) A_x e^{j\varphi_x} e^{j2\pi f_0 t}$$

Llevando a la forma polar se tiene

$$y(t) = A_y e^{j\varphi_y} e^{j2\pi f_0 t} \quad -\infty < t < \infty$$

$$A_y = H(f_0) A_x \quad \varphi_y = \arg H(f_0) + \varphi_x$$

Utilizando fasores conjugados y la superposición, se tiene:  $x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$   $y(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_y)$

De lo anterior se tiene que:  $\frac{A_y}{A_x} = H(f_0)$   $\varphi_y - \varphi_x = \arg H(f_0)$  que representan la relación de amplitud del

sistema (suele llamarse respuesta en amplitud o ganancia) y el cambio de la fase.

Por consiguiente dada una señal de entrada con  $x(t)$  con espectro  $X(f)$ , mediante el teorema de la convolución se tiene que:

$$y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f) \text{ Sus espectros son los siguientes} \quad |Y(f)| = |H(f)| |X(f)|$$

$$\arg Y(f) = \arg H(f) + \arg X(f)$$

Si  $x(t)$  es una señal de energía,  $y(t)$  también lo será y del teorema de Rayleigh se tiene que:

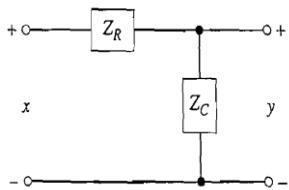
$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2 \text{ entonces } E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df$$

Finalmente se puede encontrar  $H(f)$  sin necesidad de conocer  $h(t)$ , la primera opción es posible si se conoce la ecuación diferencial del sistema, se puede escribir la función de transferencia como una relación polinomial:

$$H(f) = \frac{b_m(j2\pi f)^m + \dots + b_1(j2\pi f) + b_0}{a_n(j2\pi f)^n + \dots + a_1(j2\pi f) + a_0}$$

Alternativamente puede obtenerse la respuesta en estado estable, como:  $H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}$  donde  $x(t) = e^{j2\pi f t}$ .

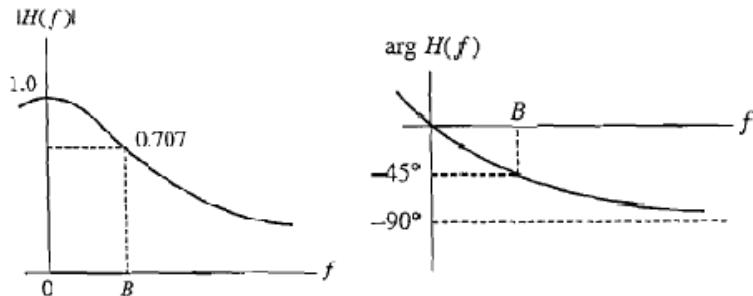
## 2.5.4 Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden



Retomando el circuito de primer orden considerando las impedancias, con  $x(t) = e^{j\omega t}$  se tiene que:

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Z_c}{Z_r + Z_c} \text{ de donde se tiene que } H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1/j2\pi f c}{R + 1/j2\pi f c} = \frac{1}{1 + j2\pi f R C}$$

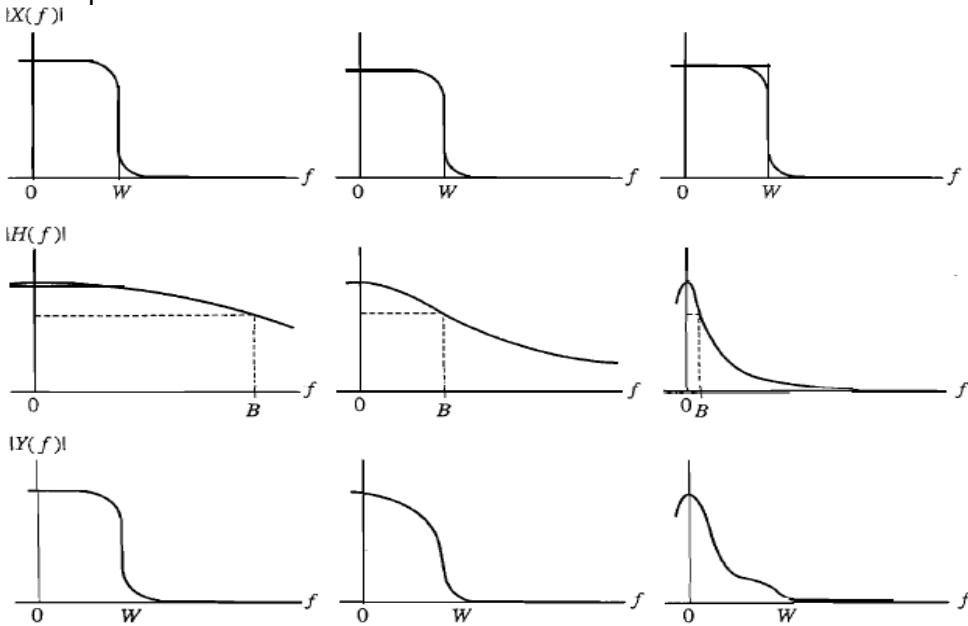
$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/B)}$  Donde se define un parámetro del sistema  $B = \frac{1}{2\pi RC}$ , Las relaciones de amplitud y fase serán:  $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/B)^2}}$

$$\arg|H(f)| = -\tan^{-1} \frac{f}{B}$$


La relación de amplitud, tiene un significado especial, relativo a la propiedad de selectividad en frecuencia del sistema, al cual se le puede denominar filtro pasa bajas debido a que no afecta los componentes de baja frecuencia ( $|f| << B$ ) y reduce drásticamente las componentes de alta frecuencia ( $|f| >> B$ ), entonces el parámetro B es la medida de las bandas que pasan o el ancho de banda.

Para visualizar mejor estos conceptos, se toma a continuación una función arbitraria, cuyo espectro tiene contenido despreciable en  $|f| >> W$ , se pueden considerar tres opciones que dependen del valor de  $B$  y  $W$

- Si  $W \ll B$ , en este caso el filtro deja pasar las componentes en frecuencia puesto que  $H(f) \approx 1$  y  $\arg H(f) \approx 0$ , de esta manera  $Y(f) = H(f)X(f) \approx X(f)$  y  $y(t) = x(t)$ .
- Si  $W \approx B$ ,  $Y(f)$  depende de  $X(f)$  y  $H(f)$  y se puede decir que la salida está distorsionada porque difiere de la entrada.
- Si  $W \gg B$ ,  $X(f)$  se aproxima a su valor en  $f=0$  entonces  $Y(f) \approx X(0) H(f)$  y la respuesta se approxima a la respuesta al impulso.



Ejercicio: Repita el ejemplo anterior cambiando la impedancia  $Z_c$ , por la impedancia  $Z_L = jwL$ , y exprese el resultado en términos de  $f_l = R / 2\pi L$  y justifique la denominación de filtro pasa altas.

## 2.5.5 Análisis de diagrama en bloques

Los sistemas de comunicación no pueden ser descritos por una sola función de transferencia, en la mayoría de los casos, estos sistemas están compuestos de múltiples subsistemas descritos cada uno por una función de transferencia diferente.

La función de transferencia general estará descrita por la combinación de las funciones de transferencia de los subsistemas. Existen tres combinaciones básicas a partir de las cuales se puede generar sistemas más complejos: Paralelo, Cascada y Retroalimentación.

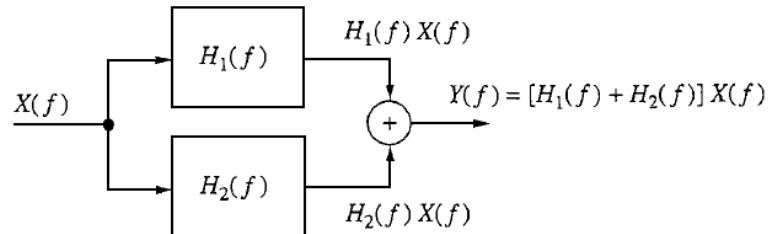
**Paralelo:** En esta configuración las funciones de transferencia tienen la misma entrada y sus respectivas salidas se suman para obtener por superposición la respuesta del sistema general:

$$Y(f) = [H_1(f) + H_2(f)]X(f)$$

$$Y(f) = X(f)H_1(f) + X(f)H_2(f)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

Función de transferencia de subsistemas en paralelo.

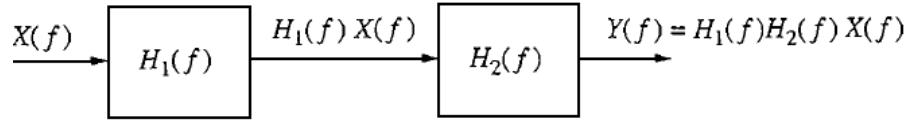


**Cascada:** En las conexiones en cascada la salida de un subsistema es la entrada del siguiente subsistema, por lo tanto:

$$Y(f) = H_2(f)[H_1(f)X(f)]$$

$$H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

Función de transferencia de subsistemas en cascada

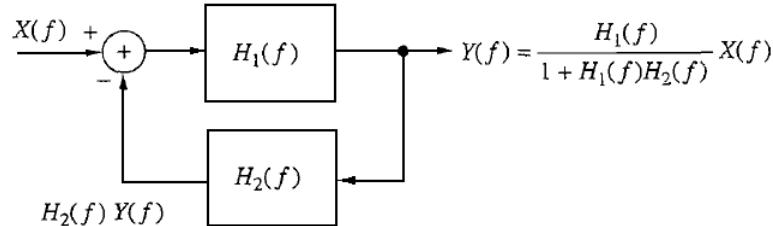


**Retroalimentación:** la característica de esta configuración es que la salida del sistema es retornada mediante la función de transferencia de otro subsistema, para ser restada de la entrada:

$$Y(f) = H_1(f)[X(f) - H_2(f)Y(f)]$$

$$Y(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} X(f)$$

Función de transferencia de subsistemas en retroalimentación



## 2.5.6 Distorsión de señal en transmisión

Un sistema de transmisión de señales es un canal eléctrico, que enlaza la fuente información con el destino, el cual puede ser simple en el caso de un par de conductores o bastante complejo como los sistemas ópticos. Sin embargo todos los sistemas de transmisión, poseen dos características físicas esenciales: La disipación interna de energía, que causa una disminución en los niveles de la señal, y el almacenamiento de energía que puede causar una deformación de la señal de salida.

### Transmisión sin distorsión

La transmisión sin distorsión implica que la señal de salida tiene la misma forma de la señal de entrada, de manera más precisa puede decirse que la señal de salida difiere de la señal de entrada en la multiplicación por una señal constante y un retardo en el tiempo finito.

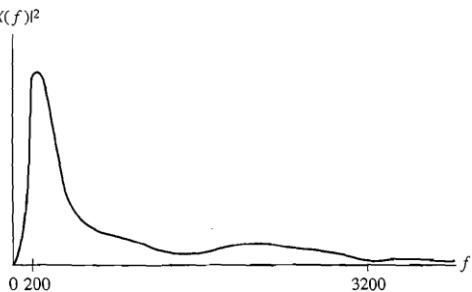
Matemáticamente, se dice que se tiene transmisión sin distorsión si:  $y(t) = Kx(t - t_d)$  con  $K$  y  $t_d$  constantes. La propiedad de los sistemas sin distorsión, se puede visualizar examinando el espectro de salida.

$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = Ke^{-j\omega_d t} X(f)$  De la definición de la función de transferencia  $Y(f) = H(f)X(f)$ , por lo tanto  $H(f) = Ke^{-j\omega_d t}$ . Que muestra que para que exista una transmisión sin distorsión la respuesta del sistema debe ser constante en magnitud y tener un desplazamiento negativo lineal de fase, entonces:

$$|H(f)| = K \quad \arg H(f) = -2\pi\omega_d f \pm m180^\circ$$

El término que acompaña a la fase se debe a que la constante K puede tomar valores positivos o negativos.

Cabe anotar que las condiciones requeridas para  $H(f)$  son necesarias en aquellas frecuencias donde la señal de entrada tiene un contenido espectral significativo. Como ejemplo, tomando la densidad espectral de energía de una señal promedio de voz obtenida desde laboratorio.



La energía de señal toma importancia cuando  $200 < |f| < 3200$ , por lo tanto un sistema que cumpla las condiciones dentro de este rango se considera que realiza una transmisión sin distorsión. Sin embargo la transmisión con cero distorsiones no puede conseguirse, se trabaja con aproximaciones.

Pueden distinguirse tres tipos de distorsión:

- Distorsión de Amplitud, que ocurre cuando  $|H(f)| \neq K$ .
- Distorsión de Fase, cuando  $\arg H(f) \neq 2\pi\omega_d f \pm m180^\circ$
- Distorsión no lineal, que ocurre cuando el sistema está compuesto de elementos no lineales.

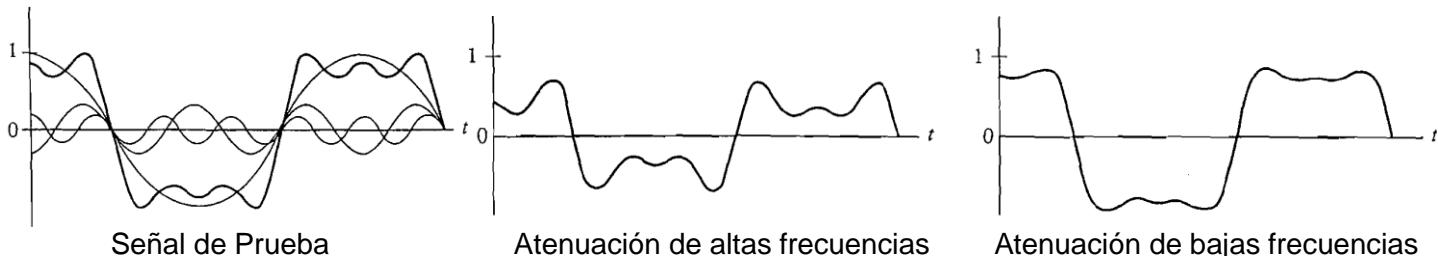
Los dos primeros se clasifican como distorsiones lineales, descritos por la función de transferencia de sistemas lineales. Para el tercer tipo, no existe función de transferencia.

### Distorsión lineal

Hacer referencia a una distorsión de amplitud o retardo asociado con un sistema de transmisión lineal. En el dominio de frecuencia la distorsión de amplitud, implica que los componentes de frecuencia no tienen una proporción correcta. Esto se debe a que la magnitud de la función de transferencia, no es constante con los cambios de frecuencia, por este motivo suele llamarse *Distorsión de Frecuencia*.

Las formas más comunes de distorsión son la atenuación excesiva de las componentes de alta o baja frecuencia o la mejora de las frecuencias altas o bajas del espectro de la señal. Otra distorsión menos común pero igualmente molesta es la desproporcionada respuesta a una banda de frecuencias dentro del espectro.

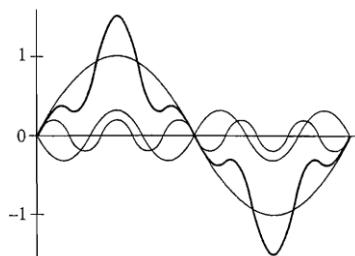
En el dominio de la frecuencia el análisis de la distorsión es fácil de visualizar, pero en el tiempo este fenómeno es poco apreciable, por ejemplo la función:  $x(t) = \cos w_0 t - 1/3 \cos 3w_0 t + 1/5 \cos 5w_0 t$  es una representación la señal cuadrada si se atenúan a la mitad los componentes de baja o alta frecuencia se obtiene una respuesta distorsionada. Como se puede ver la atenuación de las altas frecuencias reduce la agudeza de la forma de onda.



La distorsión de amplitud se debe a que  $|H(f)|$  no se mantiene constante cuando varía con la frecuencia, sin embargo en los sistemas reales se tolera un cierto grado de distorsión.

Ahora cuando la señal experimenta retardos o desplazamiento de fase no lineal, las diferentes frecuencias experimentan diferentes retardos en el tiempo, generando una distorsión de fase y distorsión de retardo. Para cualquier desplazamiento de fase, el retardo en el tiempo está en función de la frecuencia y puede escribirse como  $\arg H(f) = -2\pi f t_d(f)$  con todos los ángulos expresados en radianes, de esta manera se obtiene

que:  $t_d(f) = -\frac{\arg H(f)}{2\pi f}$  el cual es independiente de la frecuencia si  $H(f)$  es lineal con la frecuencia.



Para la señal  $x(t)$  citada en la distorsión de amplitud, una distorsión de fase de -90 grados, modifica la señal hasta el punto de convertirla en una función triangular.

Para visualizar el impacto del retardo de fase en una señal, se parte de una función de transferencia para un canal cualquiera, que puede ser expresada así:

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f t_g + \varphi_0)} = Ae^{j\varphi_0} e^{-j2\pi f t_g}$$

Donde  $\arg H(f) = -2\pi f t_g + \varphi_0$  obteniéndose  $t_d(f) = t_g - \varphi_0 / 2\pi f$

Si la señal de entrada al canal tiene la forma  $x(t) = x_1(t) \cos w_c t - x_2(t) \sin w_c t$ , entonces por la propiedad de retardo en el tiempo de la transformada de fourier, la salida será retardada en  $t_g$ , puesto que puede ser incorporada a las señales seno y coseno, la respuesta del canal esta dada por:

$y(t) = x_1(t - t_g) \cos[w_c(t - t_g) + \varphi_0] - x_2(t - t_g) \sin[w_c(t - t_g) + \varphi_0]$ , donde se observa que  $\arg H(f) = -w_c t_g + \varphi_0 = w_c t_d$  de esta manera la respuesta del sistema tendrá la forma:

$y(t) = x_1(t - t_g) \cos[w_c(t - t_d)] - x_2(t - t_g) \sin[w_c(t - t_d)]$ , entonces la señal portadora se retarda un  $t_d$  y la moduladora un  $t_g$ , el retardo en el tiempo  $t_d$  correspondiente al desplazamiento de fase de la portadora es llamado *Retardo de Fase* del canal, en ocasiones también se denomina retardo de portadora. El retardo entre la envolvente de la señal de entrada y la señal de salida  $t_g$ , es llamado retardo envolvente o de grupo del canal, en general  $t_d \neq t_g$ .

Los conceptos mencionados llevan a las condiciones bajo las cuales un canal pasabanda lineal es considerado sin distorsión, de esta manera, para poder recuperar la señal original de información el retardo de grupo debe ser constante, entonces:

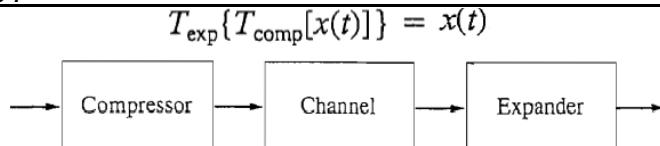
$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \text{ Donde } \theta(f) = \arg H(f)$$

### Distorsión no lineal

En un sistema no lineal el sistema no puede describirse con una función de transferencia, en lugar de ello los valores instantáneos de entrada y salida, son representados por una curva  $y(t) = T[x(t)]$  o función llamada característica de transferencia. Bajo condiciones de señales pequeñas, es posible linealizar la función de la forma:  $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots$  a pesar de que no existe una función de transferencia, es posible solucionar esta ecuación utilizando la convolución:

$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X * X(f) + a_3 X * X * X(f) + \dots$$

En los sistemas lineales la señal de entrada es limitada en banda ( $|f| < W$ ) y la respuesta del sistema no podría tener componentes más allá de la banda, pero en el caso de los sistemas no lineales la salida incluye términos en con bandas en  $2W$ ,  $3W$  etc., las cuales pueden eliminarse utilizando un filtro, pero queda el problema de las componentes que se traslanan en la banda de la señal original, lo cual produce la distorsión lineal. La solución es el circuito compresor-expandor, tal que:



### 2.5.7 Filtro y filtrado

En los sistemas de comunicación la presencia de filtros y circuitos de filtraje, es bastante común y necesario, debido a que son los dispositivos necesarios para separar la señal de información, de la interferencia, el ruido y distorsiones.

#### Filtro Ideal

Por definición un filtro tiene características de transmisión sin distorsión sobre una o algunas bandas de frecuencia específicas, y respuesta nula para el resto. Bajo este concepto la función de transferencia para filtros ideales está dada por:

$$H(f) = \begin{cases} ke^{-j\omega t_d} & f_l < f < f_u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los parámetros  $f_l$  y  $f_u$  son las frecuencias de corte inferior y superior, respectivamente, que definen el ancho de banda del filtro:  $B = f_u - f_l$

La expresión para un filtro pasa bajas es similar a la del filtro pasabanda, con la diferencia de  $f_l = 0$  entonces el ancho de banda va a ser iguala a la frecuencia de corte superior:  $B = f_u$

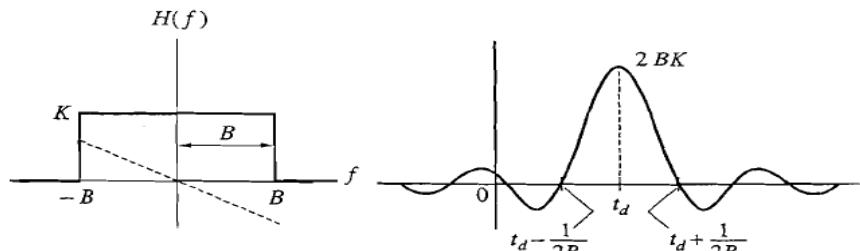
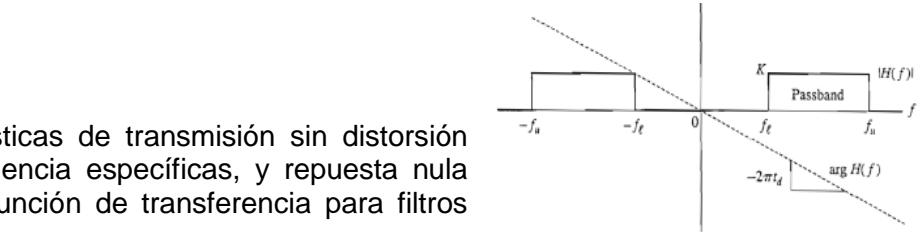
Para el caso del filtro pasa altas, las condiciones para la expresión son  $f_l > 0$  y  $f_u = \infty$ , además existe otro tipo de filtro, llamado filtro rechaza banda en cual existe transmisión sin distorsión para todas las frecuencias excepto para una banda indeseada.

Sin embargo este tipo de filtros son irrealizables, debido a que sus características de transferencia no pueden ser obtenidas a través de un número finito de elementos. Por ejemplo, considerando un filtro pasa bajas ideal, cuya función de transferencia está dada por:

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

La respuesta al impulso esta dada por:

$$h(t) = 2BK \operatorname{sinc} 2B(t - t_d)$$



Note que  $h(t)$  es la respuesta al impulso, sin embargo  $h(t)$  tiene valores diferentes a cero en tiempo menor a cero, lo cual indica que existe respuesta antes de haberse aplicado la señal, a estos filtros ideales se les conoce como anticipadores y la señal recibida se le llama anticipadora, como es obvio pensar, la realización de un filtro con tales características es imposible, lo mismo ocurre para filtros pasa altas o pasa banda. Sin embargo aunque el concepto de los filtros ideales es algo ficticio, proporciona un referente teórico que hacen a los filtros reales aproximados a los ideales.

#### Limitación en Banda y tiempo

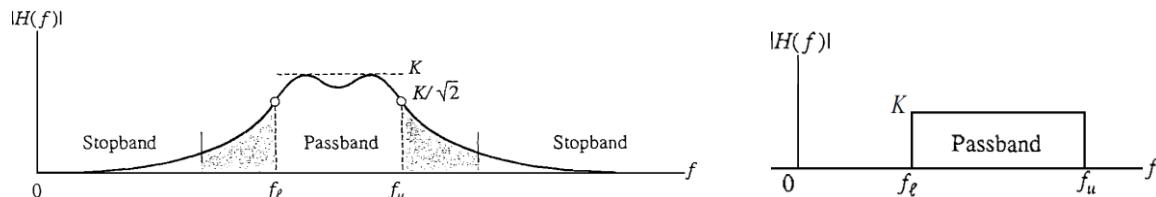
Se dice que una señal es limitada en banda si cumple que  $V(f) = 0$  para  $|f| > W$ , de igual manera se define la limitación en tiempo:  $v(t) = 0$  para  $t < t_1$  y  $t > t_2$  donde  $t_1 < t_2$ .

El concepto de filtrado ideal y limitación en banda van juntos, de tal manera que al aplicar una señal a un filtro pasa bajas, en la salida se obtendrá una señal de banda limitada. Para este filtro pasa bajo, la respuesta en tiempo es la función sinc que existe para todo tiempo, entonces de manera general, una señal de banda limitada proporciona una señal que existe para todo tiempo y viceversa.

A pesar que una señal no puede ser limitada en tiempo y en banda, se puede tomar las aproximaciones de los filtros ideales, debido al despreciable contenido de información que poseen las componentes superiores a  $W$ .

### Filtros Reales:

Para entender las aproximaciones utilizadas para el diseño de filtros reales, y sus diferencias con los filtros ideales, se debe tomar la relación de amplitudes de un filtro real pasabandas, y compararla con el resultado del filtro ideal:



Se puede ver que para el filtro real  $|H(f)|$  es bastante grande pero no constante, debido a que en los puntos de corte del filtro  $|H(f)|$  es pequeña pero no cero. Estos puntos de corte están definidos por la siguiente expresión:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f)|_{\max} = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad f = f_l, f_u, \text{ para que } |H(f)|^2 \text{ no caiga a un nivel muy bajo en } f_l < f < f_u.$$

El ancho de bañada de este filtro se conoce como potencia mitad o de 3dB.

En el filtro pasa banda mostrado, se puede definir tres regiones, de paso, de transición y de banda detenida. Entonces para que un filtro se aproxime a un filtro ideal, la región de transición debe ser lo más estrecha posible y en las regiones de banda detenida la señal debe caer a 1/10 o 1/100.

El filtro estándar más simple es el pasabajos de butterworth de orden  $n$ , un circuito que contiene  $n$  elementos (capacitivos e inductivos), cuya función de transferencia para  $K=1$  es:

$$H(f) = \frac{1}{P_n(jf/B)}$$

Donde  $B$  corresponde al ancho de banda de 3dB y  $P_n$  es un polinomio complejo, que pertenece a la familia de polinomios de butterworth, definidos por la propiedad:

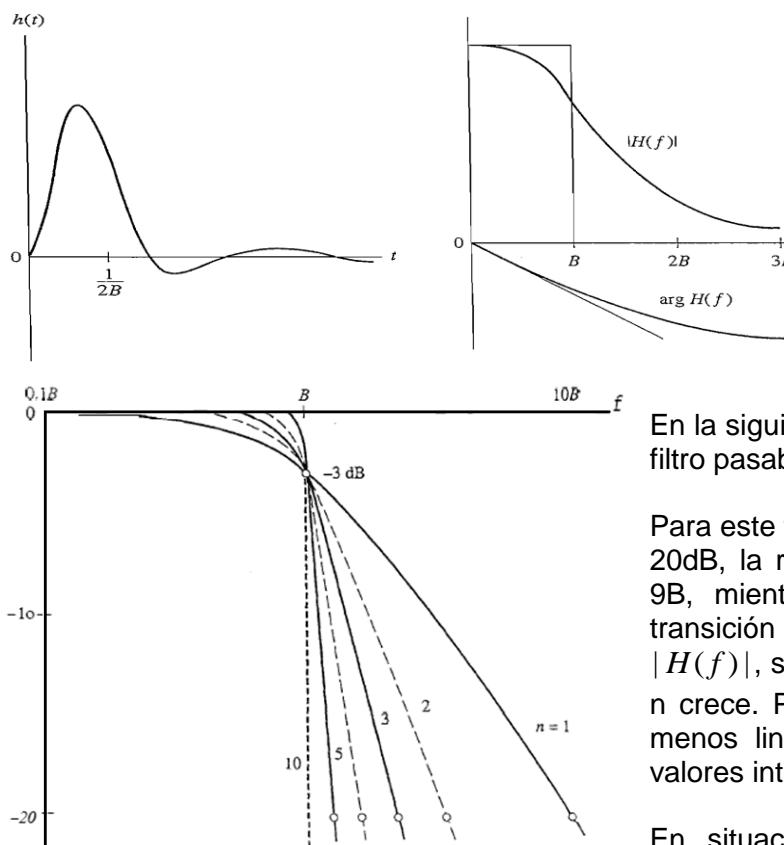
$$|P_n(jf/B)|^2 = 1 + (f/B)^{2n}, \text{ entonces: } |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/B)^{2n}}} \text{ y por consecuencia las primeras } n \text{ derivadas de}$$

$|H(f)|$  son cero para  $f = 0$  y se dice que  $|H(f)|$  es máximamente plana. La tabla siguiente muestra los filtros de primer a cuarto orden de butterworth, con  $p = jf/B$

$n$	$P_n(p)$
1	$1 + p$
2	$1 + \sqrt{2}p + p^2$
3	$(1 + p)(1 + p + p^2)$
4	$(1 + 0.765p + p^2)(1 + 1.848p + p^2)$

Filtros de  $n=1$  hasta  $n=4$

Un filtro de primer orden de butterworth, tiene las mismas características de un filtro RC pasabajas, que es una aproximación distante al filtro ideal, que mejora a medida que se aumentan elementos del circuito, aumentando el orden del filtro. Por ejemplo, la siguiente figura muestra la respuesta al impulso de un filtro de tercer orden y su correspondiente espectro.



Cabe anotar que el espectro de fase tiene una porción lineal en la región de paso del filtro, que implica un poco de retardo en el tiempo y una distorsión de retardo.

Una figura bastante clara de la relación de amplitud en la región de transición puede obtenerse de los diagramas de bode, construida graficando la magnitud de  $H(f)$  en dB contra  $f$ , sobre una escala logarítmica.

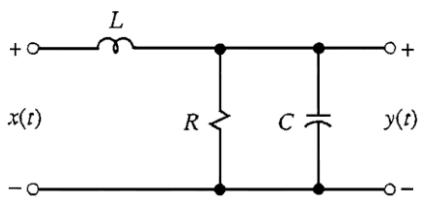
En la siguiente figura se muestra el diagrama de bode para un filtro pasabajas con diferentes valores de  $n$ .

Para este filtro se define el punto de rechazador de banda en -20dB, la región de transición para  $n=1$ , tendrá un ancho de  $9B$ , mientras que para  $n=10$ , el ancho de la región de transición es de  $0.25B$ . Entonces se puede apreciar que  $|H(f)|$ , se approxima a un filtro ideal a medida que el valor de  $n$  crece. Pero la respuesta en fase en la banda pasante es menos lineal, causando que la distorsión de retardo tome valores intolerables.

En situaciones en que la distorsión de retardo es una

potencial preocupación, los filtros de Bessel-Thomson son una mejor selección, debido a que ellos proporcionan un valor máximo de distorsión lineal de fase, para un número determinado de  $n$ , sin embargo tienen una región de transición ancha. Por otro lado los filtros igual rizado, como los de chebyishev y elípticos, proporcionan una mejor caída en la región de transición, pero un pequeño rizado en la región de transición y una distorsión no lineal significativa.

### Filtro de butterworth de Segundo Orden



La figura muestra la implementación de un filtro basabajos de segundo orden de Butterworth, cuyo ancho de banda es:

$$B = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

La función de transferencia puede obtenerse como  $H(f) = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + Z_L}$  con

$$Z_{rc} = \frac{R/jwC}{R+1/jwC} = \frac{R}{1+jwRC}$$

$$\text{Entonces } H(f) = \frac{1}{1+jwL/R - w^2LC} = \left[ 1 + j \frac{2\pi L}{R} f - (\pi \sqrt{LC})^2 \right]^{-1}$$

De acuerdo a los polinomios de Butterworth, se tiene que  $H(f) = \left[ 1 + j\sqrt{2} \frac{f}{B} - \left( \frac{f}{B} \right)^2 \right]^{-1}$ , entonces para

satisfacer la expresión se debe cumplir que:  $\frac{2\pi L}{R} = \frac{\sqrt{2}}{B} = \sqrt{2} 2\pi \sqrt{LC}$  lo cual implica que  $R = \sqrt{\frac{L}{2C}}$

### Respuesta al impulso y Rizado

Un pulso rectangular, o cualquier otra señal con transiciones abruptas, contienen componentes significativas de alta frecuencia, las cuales pueden ser atenuadas o eliminadas por un filtro pasabajas. El filtrado del pulso produce un efecto de aplanamiento que debe estudiarse en el dominio del tiempo, tomando como entrada del filtro un escalón, que representaría el borde del pulso. En términos de la respuesta al impulso, la respuesta al escalón esta dada por:

$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) u(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda$ , se conoce que la respuesta de un filtro pasabajas de primer orden es  $g(t) = (-e^{-2\pi B t}) u(t)$  donde B es el ancho de banda de 3dB.

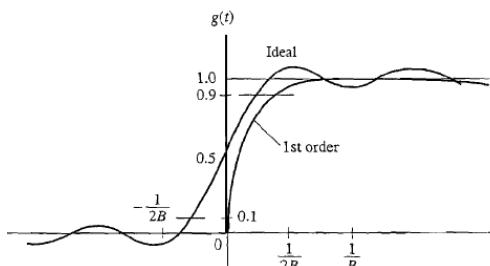
Debido a que el filtro pasabajas de primer orden no presenta restricciones severas para la transmisión de altas frecuencias, entonces se puede aproximar al extremo del filtro ideal con ganancia unitaria y retardo cero, de esta manera se tiene que:

$$g(t) = \int_{-\infty}^0 2B \operatorname{sinc}(2B\lambda) d\lambda$$

Donde  $\mu = 2B\lambda$ . La primera integral es igual a  $\frac{1}{2}$  pero la segunda necesita calcularse matemáticamente mediante la función integral del seno tabulada:

$$Si(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \int_0^{\theta/\pi} \operatorname{sinc} \mu d\mu$$

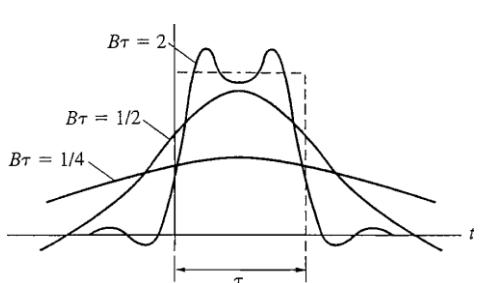
Entonces se obtiene que:  $g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(2\pi B t)$  con  $\frac{\theta}{\pi} = 2Bt$  obteniéndose la siguiente respuesta al impulso:



Es necesario concluir algo respecto al rizado, el cual es una medida de la velocidad de la respuesta al impulso de un filtro, usualmente definido como el tiempo  $t_r$ , entre  $g(t) = 0.1$  y  $g(t) = 0.9$ , para un filtro de primer orden el tiempo de rizado es de aproximadamente  $0.35/B$  y para un filtro ideal es de aproximadamente  $0.44/B$  por lo tanto se considera que:

$$t_r = \frac{1}{2B}$$

Para si se asume como señal de entrada al filtro un pulso de duración  $\tau$  con inicio en  $t=0$ , se tiene que:  $x(t) = u(t) - u(t - \tau)$  y su respuesta por superposición  $y(t) = g(t) - g(t - \tau)$ , Entonces:



En la respuesta se puede observar que la señal tiene forma rectangular cuando  $B\tau \geq 2$ , mientras que para valores inferiores la señal se ve completamente distorsionada.

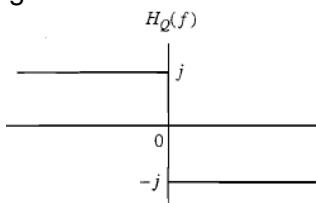
Entonces para poder transmitir de manera correcta un pulso, es necesario tener un buen ancho de banda, tal que:

$B \gg \frac{1}{\tau_{\min}}$  Donde  $\tau_{\min}$  representa la más pequeña duración de un pulso, sin embargo para detectar el envío de un pulso o medir su amplitud, es suficiente con  $B \gg \frac{1}{2\tau_{\min}}$ . Además la detección del pulso y de resolución, están relacionadas con un tiempo de referencia de posición de pulso.

### 2.5.8 Filtros de cuadratura y transformada Hilbert

En los sistemas de comunicaciones la transformada de Fourier es muy importante para descomponer una señal en su contenido de frecuencia, sin embargo, existen ocasiones en las que es más conveniente descomponer la señal en su contenido de fase, para este tipo de aplicaciones se utiliza la transformada de Hilbert, la cual se introduce en conjunción a un filtro en cuadratura.

El filtro en cuadratura es un circuito pasa todo, que desplaza las componentes positivas de frecuencia una fase de  $-90^\circ$  y las componentes negativas de frecuencia una fase de  $90^\circ$ , de esta manera un desfase de  $\pm 90^\circ$  equivale a multiplicar por  $e^{\pm j90^\circ} = \pm j$ , la función de transferencia puede ser expresada en términos de la función signo:



$$H_Q = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases}$$

Y utilizando el teorema de la dualidad la correspondiente respuesta al impulso:

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Ahora, aplicando una señal  $x(t)$  arbitraria a la entrada del filtro, la señal de salida estará dada por:  $y(t) = h_Q(t) * x(t)$  y se denomina la transformada de Hilbert, denotada con  $\hat{x}(t)$ , entonces:

$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$  Cabe anotar que la transformada no causa un cambio de dominio, se esta operando dos señales en el dominio del tiempo y el resultado es otra en el dominio del tiempo. Entonces el espectro de la transformada de Hilbert será:

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = (-j \operatorname{sgn} f) X(f)$$

El conjunto de los pares de transformadas de Hilbert, no es tan extenso como el de las transformadas de Fourier, solo existe par un conjunto limitado de modelos de señal.

Se puede observar que  $h_Q(t)$  es una función no causal y por lo tanto el filtro en cuadratura es físicamente irrealizable, aunque su comportamiento puede ser aproximado en una banda de frecuencias finita en una red real.

Aunque la transformada de Hilbert opera exclusivamente en el dominio del tiempo, tiene una serie de propiedades bastante útiles. Asumiendo una función real  $x(t)$ :

1. La función  $x(t)$  y su transformada de Hilbert tienen el mismo espectro de magnitud. Además la energía o potencia de la señal y su transformada son iguales. Esto debido a que  $|j \operatorname{sgn} f| = 1$  para todo  $f$ .
2. Si  $\hat{x}(t)$  es la transformada de Hilbert  $x(t)$ , entonces  $-x(t)$  es la transformada de Hilbert de  $\hat{x}(t)$ .
3. Una señal  $x(t)$  y su transformada  $\hat{x}(t)$ , son ortogonales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0 \text{ Para señales de energía y } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \hat{x}(t) dt = 0 \text{ para señales de potencia.}$$

#### Transformada Hilbert de una señal cosenoideal

Esta transformada se encuentra simplemente aplicando el concepto del desplazamiento de fase al filtro en cuadratura, entonces si  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ , entonces:

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= -j \operatorname{sgn} f X(f) = \frac{-jA}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \operatorname{sgn} f \\ &= \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \text{ Entonces}\end{aligned}$$

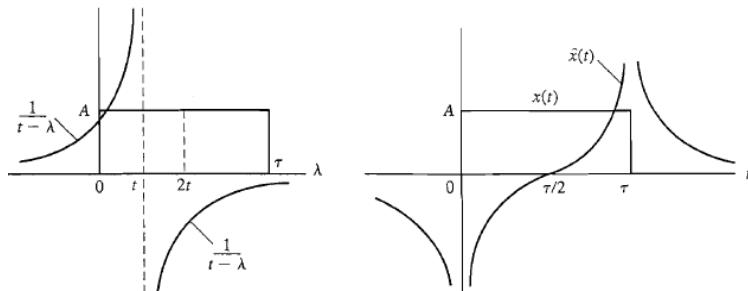
$$\hat{x}(t) = A \operatorname{sen}(W_0 t + \phi)$$

Este par de transformadas es bastante utilizada para encontrar la transformada de Hilbert de señales que consisten en una sumatoria de sinusoides.

### Transformada Hilbert de un pulso rectangular

Considerando un pulso rectangular retardado de la forma  $x(t) = A[u(t) - u(t - \tau)]$ , su respectiva transformada de Hilbert es:

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int \frac{1}{t - \lambda} d\lambda \text{ Gráficamente se tiene:}$$



La grafica de la derecha representa el caso para  $0 < t < \tau/2$ , en el cual las áreas se cancelan para  $\lambda = 2t$ , entonces:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{A}{\pi} \int_{2t}^{\tau} \frac{1}{t - \lambda} d\lambda = \frac{A}{\pi} [\ln(-t) - \ln(t - \tau)] \\ \hat{x}(t) &= \frac{A}{\pi} \ln\left(\frac{t}{\tau - t}\right)\end{aligned}$$

Este resultado también sirve para  $\tau/2 < t < \tau$ , y no hay cancelación de área para  $t < 0$  o  $t > \tau$  y  $\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{2t} \frac{1}{t - \lambda} d\lambda = \frac{A}{\pi} \ln\left(\frac{t}{t - \tau}\right)$

La combinación de los dos resultados da como resultado  $\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi} \ln\left|\frac{t}{t - \tau}\right|$

### 3 EL RUIDO Y SU FILTRAJE

#### 3.1 El Ruido

Las señales eléctricas no deseadas suelen ser generadas por diversas fuentes, generalmente clasificadas por las interferencias hechas por el hombre o por ruido generado naturalmente. Como se había mencionado con anterioridad, el ruido hecho por el hombre está relacionado a otros sistemas de comunicación, sistemas de ignición o chispa.

Los ruidos generados naturalmente son generados por los fenómenos atmosféricos, radiación externa a la tierra, el ruido producido al interior de los sistemas. En la práctica de la ingeniería, el efecto producido por estos fenómenos se ha minimizado y en algunos casos se ha eliminado, sin embargo existen algunas señales que no pueden preverse y representan un límite fundamental para el desempeño del sistema.

Un ruido inevitable en las comunicaciones eléctricas es el ruido térmico, generado por el movimiento de los electrones en un medio de conducción.

#### 3.2 Ruido térmico y potencia disponible

Para los propósitos de la transmisión el ruido térmico se considera que es producido por el movimiento aleatorio de cargas particulares (usualmente el electrón) en un medio de conducción.

Para la teoría cinética, la energía promedio de una partícula a la temperatura absoluta  $\mathcal{T}$  es proporcional a  $k\mathcal{T}$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann, entonces el valor del ruido térmico debe incluir este producto en su definición.

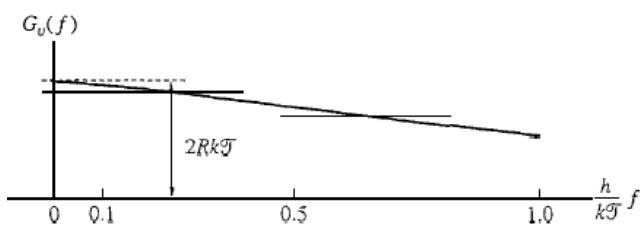
Inicialmente Johnson y Nyquist, estudiaron el ruido en los resistores metálicos, entonces cuando una resistencia de valor  $R$ , está sometida a una temperatura  $\mathcal{T}$ , el movimiento aleatorio de los electrones produce un voltaje de ruido  $v(t)$  entre una par de terminales abiertos. Consistentemente con el teorema del límite central  $v(t)$  tiene una distribución Gaussiana con término medio en cero y varianza:

$$\overline{v^2} = \sigma_v^2 = \frac{2(\pi k \mathcal{T})^2}{3h} R v^2 \quad \text{Donde } \mathcal{T} \text{ está dado en grados Kelvin, } k \text{ constante de}$$

$$\text{Boltzmann} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad h \text{ la constante de Planck} = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J}$$

La presencia de la constante de Planck es el resultado de la teoría cuántica, la teoría muestra que el promedio cuadrado de la densidad espectral de ruido térmico es:

$$G_v(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{h|f|/k\mathcal{T}} - 1} V^2 / Hz, \text{ el cual para } f \geq 0, \text{ tiene la forma:}$$



Esta expresión se reduce para las frecuencias bajas a:

$$G_v(f) \approx 2Rk\mathcal{T} \left( 1 - \frac{h|f|}{2k\mathcal{T}} \right) \quad |f| \ll \frac{k\mathcal{T}}{h}$$

Las dos expresiones omiten la energía correspondiente al punto cero, el cual es independiente de la temperatura no hace parte del ruido térmico transferido a una carga.

Afortunadamente en el ejercicio de la ingeniería no es

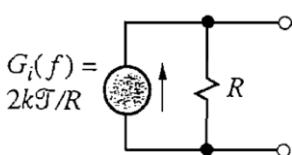
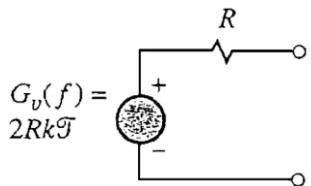
necesario utilizar estas expresiones, debido a que la temperatura ambiente o estándar es  $\mathcal{T}_0 = 290^\circ K (63^\circ F)$ .

Sin embargo para el infrarrojo esta conclusión no es tan acertada, por este motivo para todos los propósitos de análisis la media del cuadrado de la densidad espectral de potencia de ruido es:

$$G_v(f) = 2Rk\mathcal{T} V^2 / Hz$$

Esto se cumple siempre que  $\frac{h|f|}{2kT} \ll 1$ , un problema con esta expresión es que predice una varianza  $v^2 = \infty$  cuando  $G_v(f)$  es integrada sobre toda frecuencia. Sin embargo rara vez se trabaja con  $v^2$  porque  $v(t)$  es siempre objeto de filtración en los circuitos. Por ahora se utilizará esta expresión para determinar el equivalente Thevenin de resistencia:

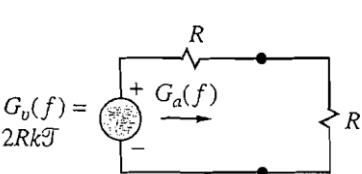
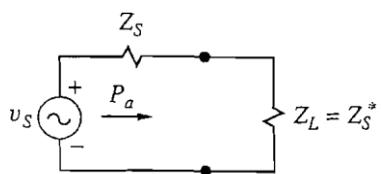
En esta representación la resistencia de ruido es remplazada por una resistencia sin ruido del mismo valor, y el ruido es representado por un generador de voltaje cuadrado medio.



El equivalente Norton está representado de igual manera, con un generador de corriente media cuadrada, dado por:

$$G_i(f) = G_v(f) / R^2 = 2kT / R$$

Por otro lado para no trabajar con los generadores de corriente o voltaje, es más claro y rápido, describir el ruido térmico mediante la potencia disponible, recordando que es la máxima potencia que puede ser entregada a una carga desde una fuente con una resistencia interna diferente de cero. Además se aplica el teorema de máxima transferencia de potencia en el cual la máxima potencia es entregada cuando la impedancia de la carga es el complejo conjugado de la impedancia de la fuente.



Para el circuito natural se tiene que:

$$P_a = \frac{\langle |v_s(t)|^2 \rangle}{R_s} = \frac{\langle v_s(t)^2 \rangle}{4R_s}$$

Utilizando el concepto de Thevenin, por comparación se tiene que la densidad espectral

$$\text{para la resistencia de carga es: } G_a(f) = \frac{G_v(f)}{4R} = \frac{1}{2} kT W / Hz$$

Entonces un resistor térmico entrega una máxima densidad de potencia de  $kT/2$  a una carga adaptada, sin tener en cuenta su valor.

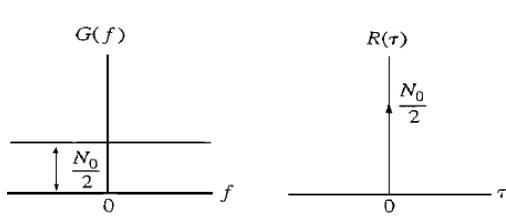
### 3.3 Ruido Blanco

Además de las resistencias térmicas, existen muchos otros tipos de fuentes de ruido que son gaussianas y tienen una densidad espectral plana sobre un amplio rango de frecuencias, similar a un espectro con todos los componentes de frecuencia en igual proporción, a este tipo de ruido se le conoce como *ruido blanco*, haciendo analogía a la luz blanca.

El ruido blanco es un modelo conveniente y bastante exacto en sistemas de comunicaciones y la suposición de un modelo Gaussiano permite que para las aplicaciones en comunicaciones, pueda invocarse las propiedades antes mencionadas. Entonces la densidad espectral del ruido blanco está dada por:

$$G(f) = N_0 / 2$$

Donde  $N_0$  representa una densidad constante en la notación estándar. La constante  $1/2$  se incluye para indicar que la mitad de la potencia está asociada con las frecuencias positivas y la otra mitad con las frecuencias negativas. Alternativamente  $N_0$  representa la densidad espectral unilateral. Ahora, puesto que la densidad espectral es conocida, la función de autocorrelación es obtenida directamente mediante Fourier:



$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (N_0 / 2) e^{j2\pi ft} df = (N_0 / 2) \delta(\tau)$$

De la expresión se puede observar que  $R(\tau \neq 0) = 0$ , de esta manera, cualquier par de muestras de una señal de ruido blanco gaussiano son no correlacionadas y estadísticamente independientes. Esta apreciación, acoplada con el espectro constante de potencia, permite concluir lo siguiente:

- Cuando el ruido blanco es mostrado en el osciloscopio, los barridos sucesivos son siempre diferentes uno de otro, aunque se observe que la forma de onda es la misma, sin importar la velocidad de barrido que se emplee, puesto que todas las tasas de variación de tiempo (componentes de frecuencia) están contenidas en igual proporción, similarmente si el ruido blanco se lleva a un parlante siempre suena lo mismo, algo como una caída de agua.

El valor de  $N_0$  depende de dos factores: El tipo de ruido y El tipo de densidad espectral, si la fuente es un resistor térmico, entonces la densidad del voltaje cuadrado medio y la corriente cuadrada media son:

$$N_{0v} = 4Rk\mathcal{T} \quad N_{0i} = 4k\mathcal{T}/R$$

Donde los índices indican el tipo de densidad. Además, por definición, cualquier fuente de ruido térmico tiene densidad espectral unilateral dada por  $2G_a(f) = k\mathcal{T}$ . Como se había mencionado, no todas las fuentes de ruido gaussiano son del tipo térmico, en el sentido en que la potencia generada no depende de una temperatura fija, no obstante se puede hablar de temperatura de ruido  $\mathcal{T}_N$  para cualquier fuente de ruido blanco (térmico o no) definiendo:

$$\mathcal{T}_N = \frac{2G_a(f)}{k} = \frac{N_0}{k}$$

Entonces, dada la temperatura de fuente de ruido, se tiene que:  $N_0 = k\mathcal{T}_N$ , se debe recordar que esta temperatura de ruido no es una temperatura física, por ejemplo algunos generadores de ruido tienen temperaturas de  $\mathcal{T}_N \approx 10\mathcal{T}_o \approx 3000^\circ K (5000^\circ F)$ , pero los dispositivos seguramente no sienten esta temperatura.

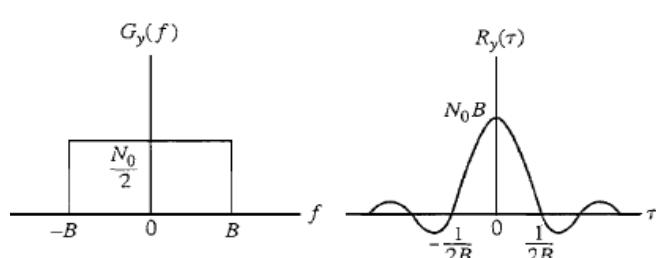
Ahora considere un ruido blanco gaussiano con densidad espectral  $G_x(f) = N_0/2$  aplicado a un filtro LTI que tiene función de transferencia  $H(f)$ , la respuesta de salida  $y(t)$  obtenida debido al ruido gaussiano aplicado sería:

$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 \quad y \quad R(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}_\tau^{-1} [ |H(f)|^2 ] \quad y \text{ se obtiene } \overline{y^2} = R_y(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Note que la densidad espectral de ruido filtrado toma la forma de  $|H(f)|^2$ , entonces se dice que la filtración de ruido blanco produce un ruido coloreado, con la frecuencia principal contenida en el rango de paso del filtro.

Para un filtro ideal pasabajas de ganancia unitaria y ancho de banda B se tiene que:

$$G_y(f) = \frac{N_0}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad y \quad R_y(\tau) = N_0 B \operatorname{sinc} 2B\tau$$



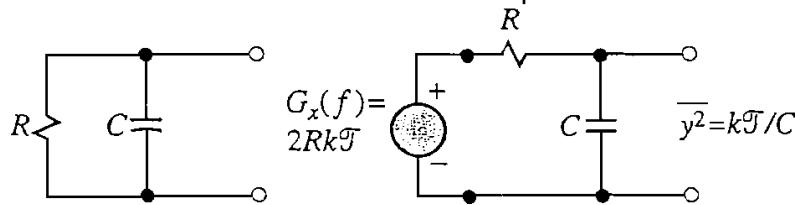
Se puede observar que el filtro pasabajas causa que la salida de ruido esté correlacionada sobre intervalos de tiempo de alrededor de  $1/2B$ , entonces:

$$\overline{y^2} = N_0 B$$

Finalmente se concluye que la potencia de salida es directamente proporcional al ancho de banda del filtro.

### 3.3.1 Ruido térmico en un circuito RC

Considérese el siguiente circuito RC con una resistencia a temperatura  $\mathcal{T}$ :



Remplazando la resistencia térmica con su equivalente Thevenin se obtiene un circuito en el cual, una fuente de voltaje promedio cuadrado  $G_x = 2Rk\mathcal{T} V^2 / Hz$  aplicada a un filtro pasabajas RC, no ruidoso. Además se conoce que la magnitud de la función de transferencia del filtro es  $|H(f)|^2 = [1 + (f/B)^2]^{-1}$ . Por lo tanto la densidad espectral de salida será:

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) = \frac{2Rk\mathcal{T}}{1 + (f/B)^2} \text{ Con } B = \frac{1}{2\pi RC}$$

Y la transformada inversa sería:

$$R(\tau) = 2Rk\mathcal{T}\pi B e^{-2\pi B|\tau|} = \frac{k\mathcal{T}}{C} e^{-|\tau|/RC}$$

Esto muestra que el voltaje de ruido filtrado, tiene apreciable correlación en intervalo aproximadamente igual a la constante RC del filtro. Entonces se puede decir que  $y(t)$  es una señal gaussiana aleatoria sin componente dc, dado que  $x(t)$  es gaussiana de media cero, y:

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{k\mathcal{T}}{C}$$

De manera sorpresiva, se puede observar que  $\overline{y^2}$  no depende de  $R$  aunque sea una fuente de ruido térmico, más adelante se explicará este caso.

Suponga una temperatura de ruido igual a la temperatura ambiente y una capacitancia de  $0.1\mu F$  entonces:  $\overline{y^2} = 4 * 10^{-21} / 10^{-7} = 4 * 10^{-14}$  y el valor rms sería de aproximadamente  $0.2\mu V$ , que es un valor típico de voltaje de ruido.

### 3.3.2 Ancho de Banda Equivalente de Ruido

El ruido blanco particularmente tiene una potencia finita, para enfatizar este hecho se designa la potencia de fuente promedio por  $N = \overline{y^2}$  y escribiendo la ecuación de la forma:

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Como la integral de la función depende solo de la función de transferencia, se puede simplificar la discusión de la potencia de ruido, definiendo el ancho de banda equivalente de ruido  $B_N$ .

$B_N = \frac{1}{|H(f)|_{\max}^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$  Donde  $|H(f)|_{\max}^2$  es la relación de amplitud en el punto central (asumiendo que el

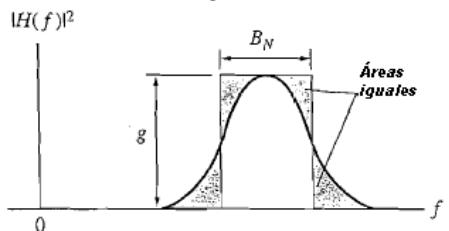
filtro tiene una componente de frecuencia central con amplitud significativa). Por tanto la frecuencia de ruido filtrado es:

$$N = |H(f)|_{\max}^2 N_o B_N$$

De la expresión obtenida se puede decir que el efecto del filtro se ha dividido en dos partes:

1. La selectividad relativa de frecuencia, descrita por  $B_N$ .
2. La ganancia o atenuación de potencia, representada por  $|H(f)|^2_{\max}$

De esta manera  $B_N$  iguala el ancho de banda de un filtro ideal, con la misma ganancia de potencia de ruido blanco como la ganancia del filtro en cuestión.



Entonces aplicando estas ecuaciones al filtro previamente analizado, la frecuencia central del filtro es  $f=0$ , entonces  $|H(0)|^2=1$  y

$$B_N = \int_0^\infty \frac{df}{1+(f/B)^2} = \frac{\pi}{2} B = \frac{1}{4RC}$$

Este resultado permite explicar porque  $\overline{y^2}$  no depende del valor de la resistencia, dado que si se escribe  $\overline{y^2} = N = N_0 B_N = (4RkT)(1/4RC)$ , de esta manera si se incrementa el valor de la resistencia, se incrementa la densidad de ruido  $N_0$ , pero se disminuye el ancho de banda de ruido. Estos dos efectos se cancelan entre si hacen que la densidad de potencia de ruido no dependa de la resistencia, en consecuencia  $\overline{y^2} = kT/C$ .

Por definición el ancho de banda ruido de un filtro ideal es el ancho de banda real, pero para los filtros reales el ancho de banda de ruido es mayor al ancho de banda de 3dB, sin embargo cuando el filtro se hace más selectivo (corte más definido), el ancho de banda de ruido puede aproximarse al ancho de banda de 3dB.

Resumiendo, si  $y(t)$  es el ruido blanco filtrado con media cero, entonces:

$$\overline{y^2} = \sigma_y^2 = N = |H(f)|^2 N_0 B_N \quad \sigma_y = \sqrt{N} = \sqrt{|H(f)|^2 N_0 B_N}$$

Esto significa que dada una fuente de ruido blanco, un valor promedio medido (o un voltaje cuadrado medio medido), puede leerse como  $\overline{y^2} = N = N_0 B_N$ , donde  $B_N$  es el ancho de banda equivalente de ruido

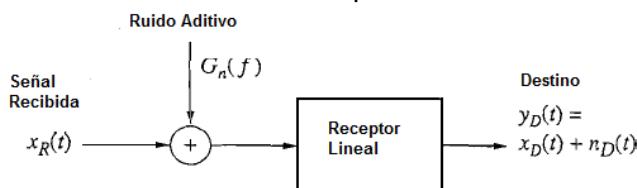
## 4 COMUNICACIÓN BANDA BASE

### 4.1 Señales y Ruido

En los sistemas de telecomunicaciones la presencia del ruido es inevitable, las señales al atravesar un medio de transmisión se ven afectadas por los efectos del ruido blanco aditivo, el efecto del ruido se estudia en un principio para señales de banda base, que son aquellas que se transmiten directamente al medio, sin ningún tipo de modificación o adecuación. El resultado obtenido en banda base se utiliza como referencia comparativa para los procesos de adecuación de señal y su respuesta frente a la presencia de ruido.

#### 4.1.1 Ruido aditivo y relación señal a ruido

La contaminación del ruido en la transmisión de señales, usualmente tiene un efecto aditivo en el sentido en que el ruido se suma a la señal de información en varios puntos entre el sitio de origen y el de destino. Para propósitos de análisis todo el ruido será concentrado o unificado en una fuente sumada a la señal que ingresa al receptor, de esta manera el sistema de comunicaciones correspondiente será:



Este diagrama enfatiza el hecho de que la parte más vulnerable al ruido es la entrada del receptor, donde la señal transmitida tiene el nivel más bajo. Además las fuentes de ruido, presentes en otros puntos, pueden ser referenciadas a la entrada del receptor utilizando diferentes técnicas.

Debido a que el receptor es lineal, la combinación a la entrada dará como resultado para el destino, la señal de información mas una señal de ruido. Entonces, la señal que llega al destino es:

$$y_D(t) = x_D(t) + n_D(t)$$

La potencia total de salida es encontrada promediando la expresión:  $y_D(t)^2 = x_D(t)^2 + 2x_D(t)n_D(t) + n_D(t)^2$

Para promediar esta expresión se trata la señal como una función de muestra de un proceso ergódico y se hace dos suposiciones razonables sobre el ruido aditivo:

1. El ruido proviene de una fuente ergódica con media cero y densidad espectral de potencia  $G_n(f)$ ;
2. El ruido es físicamente independiente de la señal de información y en consecuencia no correlacionado con ella.

Bajo estas condiciones el promedio estadístico del producto  $x_D(t)n_D(t)$  es igual a cero porque  $x_D(t)$  y  $n_D(t)$  son incoherentes. Así, el promedio de  $y_D(t)^2$  será:

$$\overline{y_D(t)^2} = \overline{x_D(t)^2} + \overline{n_D(t)^2}$$

Lo cual implica que existe una superposición de la potencia de la señal y del ruido en el destino, recalmando la diferencia entre la potencia de la señal deseada y la de ruido no deseado, introduciendo la siguiente notación:

$$S_D = \overline{x_D(t)^2} \quad N_D = \overline{n_D(t)^2} \text{ se tiene que } \overline{y_D(t)^2} = S_D + N_D$$

Luego la relación señal a ruido, relaciona la potencia de la señal deseada con la potencia de ruido en decibeles:

$$(S/N)_D = S_D / N_D = \overline{x_D(t)^2} / \overline{n_D(t)^2}$$

Esta relación provee una importante y útil indicación sobre el grado de contaminación que ejerce el ruido aditivo sobre una señal. Pero se debe notar que esta interpretación es válida siempre y cuando el ruido satisfaga las condiciones de ergodicidad e independencia física. De lo contrario  $\overline{y_D(t)^2}$  debe incluir el producto de la señal y el ruido.

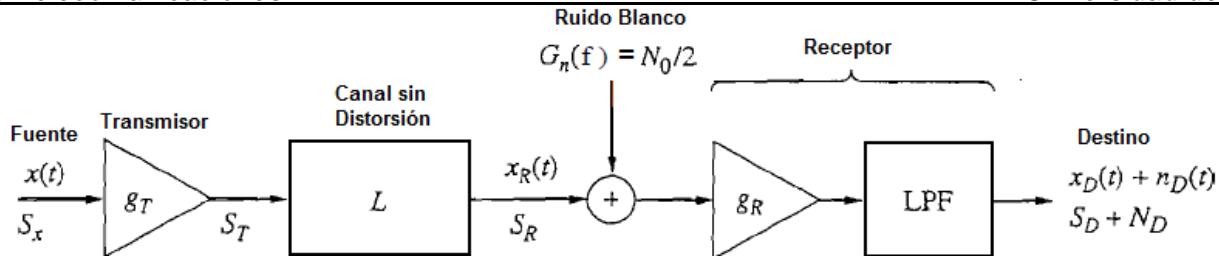
La superposición de la señal y el ruido es una situación útil para el trabajo experimental, porque no es posible apagar la fuente de ruido para determinar  $S_D$  sola. Para esto se debe medir  $N_D$  con la señal apagada y medir  $\overline{y_D(t)^2} = S_D + N_D$ , con la señal encendida. Una vez se tenga estos dos resultados se puede calcular  $(S/N)_D$

a partir de la relación  $\overline{y_D^2} / N_D = (S_D + N_D) / N_D = (S/N)_D + 1$

Como se había analizado previamente en sistemas de comunicaciones se trabaja con el ruido blanco con densidad espectral de potencia  $G_n(f) = N_0 / 2$ . Si un receptor tiene ganancia  $g_r$  y ancho de banda de ruido  $B_N$ , la potencia de ruido en el destino será  $N_D = g_r N_0 B_N$ , como  $N_0$  tiene distribución Gaussiana este caso de ruido se conoce como Ruido Blanco Gaussiano Aditivo (AWGN).

#### 4.1.2 Transmisión de señal analógica

La transmisión de una señal analógica en banda base se puede representar mediante un sistema con las siguientes características:



La información genera una señal  $x(t)$  que debe reproducirse en el destino, modelando la fuente como un proceso ergódico caracterizado por una señal de ancho de banda  $W$  tal que una muestra de la señal  $x(t)$  tiene contenido espectral significativo para  $f < W$ . El canal se asume sin distorsión sobre el ancho de banda del mensaje, entonces  $x_D(t) = Kx(t - t_d)$ , para concentrar el análisis en los efectos contaminantes del ruido blanco como una medida de la relación señal a ruido del sistema en el destino. La potencia promedio generada por la señal puede representarse como  $S_x = \overline{x^2}$ .

Debido a que el canal no necesita ecualización, el transmisor y el receptor simplemente actúan como amplificadores, con una cierta ganancia que compensa las pérdidas generadas en el canal de transmisión. De esta manera la potencia de la señal transmitida, la de la señal recibida y la del destino, están relacionados por:

$$S_T = g_T \overline{x^2} = g_T S_x \quad S_R = \overline{x_R^2} = S_T / L \quad S_D = \overline{x_D^2} = g_R S_R$$

En el sistema planteado se utiliza un filtro pasabajas como parte del receptor, el cual tiene como función, dejar pasar la señal con la menor cantidad de ruido posible, obviamente el filtro debe rechazar todas las componentes de frecuencia de ruido, que están fuera del ancho de banda del mensaje. La potencia resultante en el destino será  $N_D = g_R N_0 W$  donde  $W$  corresponde al ancho de banda equivalente de ruido. Cabe anotar que la ganancia del receptor amplifica tanto la señal como el ruido, por igual, por lo tanto esta ganancia se cancela cuando se divide  $S_D$  entre  $N_D$ , luego:  $(S/N)_D = S_R / N_0 W$

En decibeles la expresión tiene la forma:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{S_R}{k T_N W} \approx S_{R_{dBm}} + 174 - 10 \log_{10} \left( \frac{T_N}{T_0} W \right)$$

Donde 174 proviene de expresar la densidad estándar en mili vatios.

Este resultado arroja la relación señal a ruido del destino, en términos de tres parámetros fundamentales del sistema: la potencia de la señal recibida  $S_R$ , la densidad de ruido  $N_0$  a la entrada del receptor, y el ancho de banda del mensaje  $W$ .

Se puede interpretar el denominador como la potencia de ruido en el ancho de banda de la señal, antes de ingresar al amplificador, consecuentemente una señal con ancho de banda grande se verá más afectada por el ruido que una señal de banda angosta.

La siguiente tabla, lista algunos de los valores típicos de relación señal a ruido, junto con el rango de frecuencia necesario para varios tipos de sistemas de comunicaciones. El límite superior del rango de frecuencias es igual al ancho de banda nominal del mensaje  $W$ , el límite inferior también es trascendente para el diseño, porque muchos sistemas de transmisión incluyen transformadores o capacitores de acople, que degradan la respuesta a bajas frecuencias.

Tipo de señal	Rango de Frecuencia	Relación señal a Ruido (dB)
Voz escasamente inteligible	500Hz a 2kHz	5 - 10
Calidad telefónica de voz	200Hz a 3.2kHz	25 - 35
Calidad de voz tipo radiodifusión AM	100Hz a 5kHz	40 - 50
Audio de alta fidelidad	20Hz a 20kHz	55 - 65
Video	60Hz a 4.2kHz	45 - 55

La relación señal a ruido en el destino, no depende de la ganancia del receptor, debido a que esta solo sirve para producir el nivel deseado de señal a la salida. Sin embargo  $(S/N)_D$  será afectada por alguna ganancia o pérdida que entre en juego antes que el ruido sea agregado, específicamente, al sustituir  $S_R$  en la expresión de  $(S/N)_D$ , se obtiene:

$$(S/N)_D = S_T / LN_0 W$$

Entonces se puede apreciar que la relación señal a ruido es directamente proporcional a la potencia de salida del transmisor e inversamente proporcional a las pérdidas de transmisión.

Cuando los parámetros en la anterior expresión son fijos y la relación señal a ruido es pequeña, se debe considerar la utilización de repetidores para mejorar el desempeño del sistema. Particularmente se toma que el trayecto de transmisión se divide en secciones, cada una de las cuales presenta un nivel de pérdidas  $L_1$ , si un repetidor amplificador con densidad de ruido  $N_0$  se inserta al final de la primera sección, su correspondiente relación señal a ruido a la salida será:

$$(S/N)_1 = S_T / L_1 N_0 W$$

Por lo general los repetidores son diseñados para que compensen las pérdidas causadas durante el trayecto antes de llegar a él, este análisis conlleva a mostrar que si un sistema se conforma de  $m$  secciones de repetición idénticas (incluido el receptor), la relación señal a ruido general sería:

$$(S/N)_D = \frac{1}{m} (S/N)_1 = \frac{L}{m L_1} \left( \frac{S_T}{LN_0 W} \right)$$

Comparando con la transmisión directa, este resultado representa una mejoría debido al factor  $L/mL_1$ . Cabe recordar que los análisis se han realizado para sistemas ideales, por lo tanto las expresiones obtenidas, son el límite superior de la relación señal a ruido de un sistema de comunicaciones analógicas. Si el ancho de banda de ruido del filtro pasabajas es ligeramente superior al del mensaje la relación señal a ruido se verá afectada por factor  $W/B_N$

Ejercicio: considere una línea de transmisión con  $L=140\text{dB}=10^{14}$  y  $\mathcal{T}_N = 5\mathcal{T}_0$ , en la cual se requiere audio de alta fidelidad con un ancho de banda  $W=20\text{kHz}$  y  $S/N \geq 60\text{dB}$ . Determine la potencia de transmisión.

La potencia necesaria en transmisión se determina utilizando la expresión:  $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx S_{R_{dBm}} + 174 - 10\log_{10}\left(\frac{\mathcal{T}_N}{\mathcal{T}_0} W\right)$

$60 \leq S_{R_{dBm}} + 174 - 10\log_{10}(20 \times 10^3)$  Entonces  $S_{R_{dBm}} \geq -64\text{dBm} \approx 4 \times 10^{-7} \text{mW}$ , ahora la potencia del transmisor estará dada por:  $S_T = LS_R \geq 4 \times 10^{-7} \text{mW} = 40000 \text{W}$

Es impensable aplicar esa potencia a un cable de transmisión, sin embargo se podría agregar un repetidor en la mitad, tal que  $L_1 = 70\text{dB} = 10^7$  (recordando que las pérdidas en un cable son proporcionales al tamaño de este), la mejora proporcionada por este repetidor será:

$$\frac{L}{mL_1} = \frac{10^{14}}{2 \times 10^7} = 5 \times 10^6$$

Lo cual mejora el requerimiento de potencia de señal transmitida  $S_T = 4x10^7 / 5x10^6 = 8mW$ , un valor más alcanzable, se podría tomar una potencia transmitida dentro del rango de 10 a 20mW para asegurar los valores requeridos.

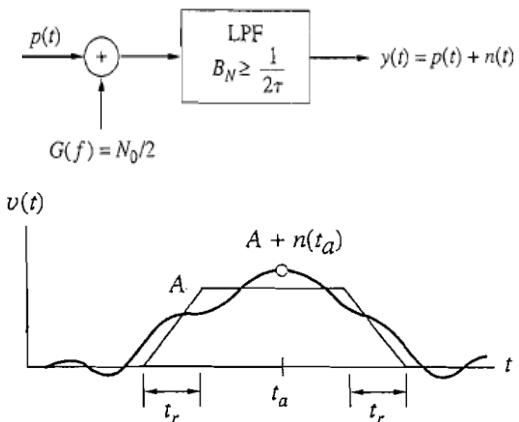
Repita el ejercicio anterior para el caso de transmisión de video con  $W=2.4MHz$  y  $S/N \geq 50dB$ .

#### 4.1.3 Transmisión de un pulso en banda base con ruido

La transmisión de pulsos se diferencia de la transmisión analógica debido a que no se trata de reproducir una forma de onda, sino de identificar el nivel de un pulso, el tiempo de llegada o discernir de la presencia o no de un pulso, de esta manera el concepto de relación señal a ruido en la transmisión de un pulso no tiene mucho significado.

##### Medida de un pulso con ruido

Se debe considerar en primer lugar la medida de alguno de los parámetros de una señal de pulsos recibida  $p(t)$  y que está contaminada por ruido aditivo:



Esta señal se supone más o menos rectangular con una amplitud  $A$ , una duración  $\tau$  y una energía de  $E_p$ , se ve afectada por un ruido blanco con densidad espectral de potencia  $G(f) = N_0 / 2$  y media cero. Este pulso se recibe y se remueve el exceso de ruido, mediante un filtro selectivo, de ganancia unitaria y ancho de banda  $B \approx B_N \geq 1/2\tau$ , de esta manera la salida estará dada por:

$$y(t) = p(t) + n(t)$$

Que representa una variación de ruido superpuesta a una señal trapezoidal con  $t_r \approx 1/2B_N$

Si se desea medir la amplitud del pulso, se debería tomar un tiempo  $t_a$  cerca al centro de la señal, obteniendo una señal aleatoria:

$$y(t_a) = A + n(t_a) = A + \varepsilon_A$$

Donde  $n(t_a) = \varepsilon_A$ , representa la magnitud del error, entonces la varianza del error estará dada por:  $\sigma_A^2 = \overline{n^2} = N_0 B_N$  un valor bastante pequeño si se compara con  $A^2$ . Por otro lado conociendo que  $A^2 = E_p / \tau$ , se puede escribir la varianza como:

$$\sigma_A^2 \geq \frac{N_0}{2\tau} = \frac{N_0 A^2}{2E_p}$$

Cualquier filtro con un ancho de banda menor a  $1/2\tau$ , reduce la amplitud de salida del pulso y la del ruido. La medida de la llegada de un pulso o su duración, usualmente se lleva a cabo por la detección del instante  $t_b$ , cuando  $y(t)$  cruza por un nivel fijo  $A/2$ . La perturbación del ruido  $n(t_b)$ , mostrada en la figura, causa un error de tiempo-posición  $\varepsilon_t$ . Por semejanza de triángulos se puede observar que:

$$\frac{\varepsilon_t}{n(t_b)} = \frac{t_r}{A} \quad \text{Entonces } \varepsilon_t = \frac{n(t_b)t_r}{A} \text{ y además}$$

$$\sigma_t^2 = \left( \frac{t_r}{A} \right)^2 \overline{n^2} = \left( \frac{t_r}{A} \right)^2 N_0 B_N$$

Substituyendo  $t_r$  y  $A^2$  se tiene que:  $\sigma_t^2 \approx \frac{N_0}{4B_N A^2} = \frac{N_0 \tau}{4B_N E_p}$  lo cual implica

que  $\sigma_t$  puede hacerse arbitrariamente pequeña al hacer  $B_N$  muy grande, causando que el tiempo de rizo se aproxime a cero. Pero el pulso transmitido tiene un tiempo de rizo diferente de cero, determinado por el ancho de banda de transmisión  $B_T$ . Por lo tanto

$$\sigma_t^2 \geq \frac{N_0}{4B_T A^2} = \frac{N_0 \tau}{4B_T E_p}$$

Y el salto más bajo será obtenido con el ancho de banda del filtro  $B_N \approx B_T$  – en contraste el salto más bajo sobre  $\sigma_A$  será obtenido con  $B_N = 1/2\tau$ .

Ejercicio: suponga un pulso de 10 microsegundos transmitido sobre un canal con  $B_T = 800 \text{ Hz}$  y  $N_0 = E_p / 50$ .

Calcule  $\sigma_A / A$  y  $\sigma_t / \tau$  cuando: (a)  $B_N = 1/2\tau$  (b)  $B_N = B_T$

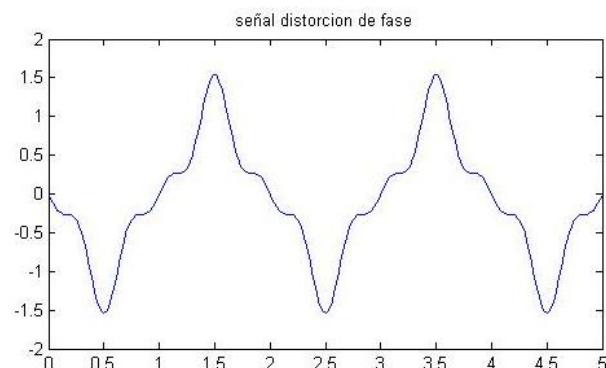
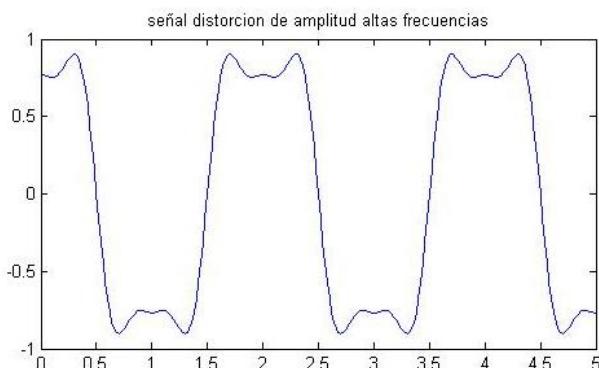
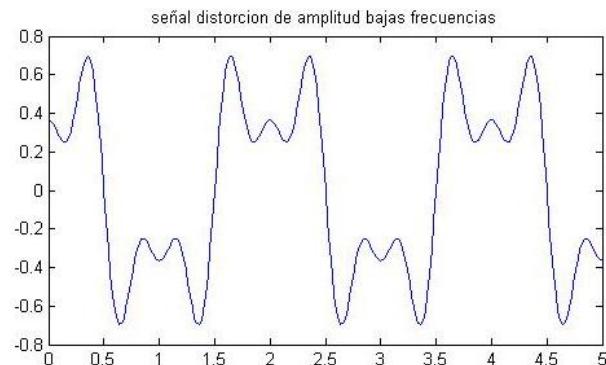
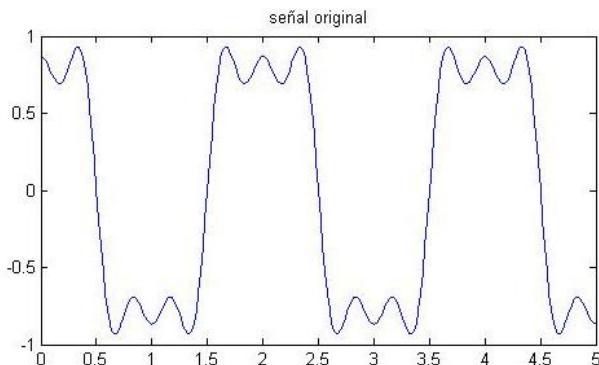
## 4.2 Distorsión de la señal transmitida

En la sección 2.5.6 del segundo capítulo, se estudió las características de la transmisión con distorsión definiéndose tres tipos de distorsión:

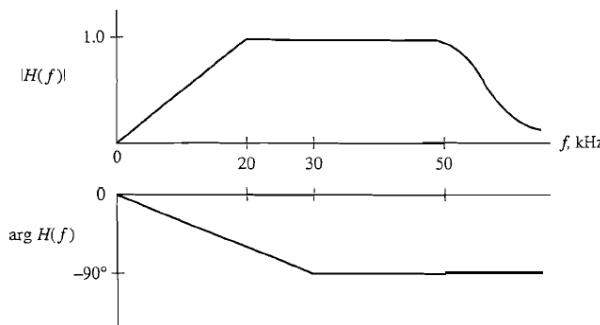
- Distorsión de Amplitud, que ocurre cuando  $|H(f)| \neq K$ .
- Distorsión de Fase, cuando  $\arg H(f) \neq j2\pi t_d f \pm m180^\circ$
- Distorsión no lineal, que ocurre cuando el sistema está compuesto de elementos no lineales.

En esta sección se analiza la distorsión aplicada a sistemas específicos:

Como primer ejemplo de la distorsión considere la función:  $x(t) = \cos w_0 t - 1/3 \cos 3w_0 t + 1/5 \cos 5w_0 t$



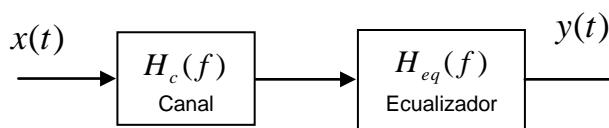
Ahora suponga un sistema de transmisión que tiene la siguiente respuesta en frecuencia:



Este sistema satisface la condición de transmisión sin distorsión para las frecuencias entre 20kHz y 30kHz, donde la respuesta en amplitud es constante y la fase tiene un retardo lineal.

Para las frecuencias inferiores a 20kHz y superiores a 50kHz se presenta distorsión de amplitud y para las frecuencias superiores a 30kHz se presenta una distorsión de fase.

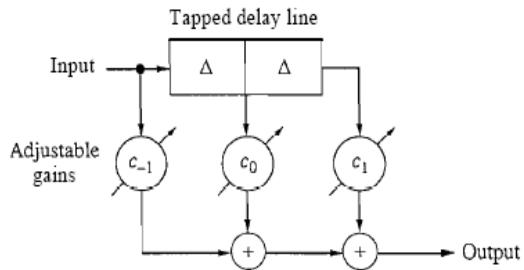
#### 4.2.1 Ecualización



La distorsión lineal (amplitud y retardo) es recuperable, a través de redes de ecualización, como la que muestra la figura en la cual se coloca un ecualizador en cascada con el canal distorsionado.

Entonces la función de transferencia del canal es  $H(f) = H_c(f)H_{eq}(f)$  y para que solucionar el problema de distorsión se debe cumplir que  $H_c(f)H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega t_d}$ , entonces la función de transferencia del ecualizador es:  $H_{eq}(f) = \frac{Ke^{-j\omega t_d}}{H_c(f)}$  cumplir con esta condición es bastante complicado y difícil de conseguir, sin embargo en el entorno real se tienen muy buenas aproximaciones.

Una de las técnicas más antiguas de ecualización para las líneas telefónicas es la utilización de bobinas de pupinización, un método más reciente consiste en la aplicación ecualizadores de líneas de retardo o filtros trasversales:



$$y(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \Delta) + c_1x(t - 2\Delta)$$

$$H_{eq}(f) = c_{-1} + c_0e^{-jw\Delta} + c_1e^{-j2w\Delta}$$

$$H_{eq}(f) = (c_{-1}e^{jw\Delta} + c_0 + c_1e^{-jw\Delta})e^{-jw\Delta}$$

$$\text{Generalizando } H_{eq}(f) = \left( \sum_{m=-M}^M c_m e^{-jwm\Delta} \right) e^{-jwM\Delta}$$

#### 4.2.2 Distorsión multirayectoria

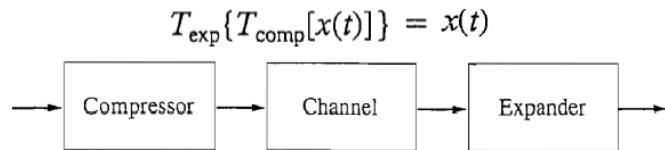
En los sistemas de comunicaciones, en ocasiones se recibe la señal directa, y múltiples versiones de ésta, a este fenómeno se le conoce como multirayectoria, se la respuesta del sistema:  $y(t) = K_1x(t - t_1) + K_2x(t - t_2)$  donde el segundo término corresponde al duplicado retrasado de la señal, ahora:  $H(f) = K_1e^{-j\omega t_1} + K_2e^{-j\omega t_2} = K_1e^{-j\omega t_1}(1 + ke^{-j\omega t_0})$  donde  $k = K_2/K_1$  y  $t_0 = t_2 - t_1$  por lo tanto las características del ecualizador son:  $H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + ke^{-j\omega t_0}} = 1 - ke^{-j\omega t_0} + k^2e^{-j2\omega t_0} + \dots$  si  $k^2 \ll 1$  se tiene que:

$$H_{eq}(f) \approx (e^{j\omega t_0} - k + k^2e^{-j\omega t_0})e^{-j\omega t_0}$$

#### 4.2.3 Compensación

Para el caso de la distorsión no lineal donde se generan componentes de 2W, 3W, etc, pueden eliminarse dichas componentes utilizando un filtro, sin embargo el problema de las componentes que se traslanan en la

banda de la señal original no pueden eliminarse tan fácilmente, para enfrentar este inconvenientes se emplea un circuito compresor - expansor, tal que:



#### 4.2.4 Ejercicios de distorsión

- La señal  $2\sin(40t)$  ha sido transmitida por un canal cuya función de transferencia produce una salida  $2\sin(40t - 200)$ , encuentre la función de transferencia del canal y grafique el espectro de magnitud y fase en el rango de  $|f| < 30$
- Considere el canal de transmisión con  $H_C(f) = (1 + 2\alpha \cos wT)e^{-jwT}$ , muestre que  $y(t) = \alpha x(t) + x(t-T) + \alpha x(t-2T)$ , es decir la salida incluye un eco principal y uno secundario.
- Diseñar un ecualizador de línea de retardo para el canal del ejercicio anterior, con  $\alpha=0.4$ .

### 4.3 Pérdidas de transmisión y decibeles en el sistema

Además de la distorsión del canal, el sistema de transmisión puede causar una pérdida de potencia o fuerza de la señal de salida, la cual puede expresarse en términos de perdidas de la potencia de transmisión. Aunque la amplificación puede solucionar este inconveniente, la presencia de ruido en el canal puede afectar gravemente la recepción de la señal.

#### 4.3.1 Ganancia de potencia

En un sistema LTI sin distorsión, con una señal de entrada de potencia promedio  $P_{in}$ , la potencia de la señal de salida debe ser proporcional a la de la señal de entrada, de esta manera, la ganancia de potencia de un sistema está dada por  $g = P_{out} / P_{in}$  ( $g$  no hace referencia a la respuesta al escalón, es un parámetro constante). Los sistemas que incluyen amplificación tienen valores grandes de  $g$ , por conveniencia estos valores de ganancia suelen darse en *decibeles*:  $g_{dB} = 10 \log g$

Existen diferentes tipos de decibel:

*Decibel relativo*: este valor es utilizado para relacionar pérdidas o ganancias de un sistema.

Por ejemplo un sistema que modifica el nivel de una señal que lo atraviesa

$$\text{Para este caso el valor de } x(t) \text{ depende de las potencias de entrada y salida mediante la siguiente relación:}$$

$$G = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} \quad o \quad L = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} \quad G = -L \text{ dB} \quad o \quad G = \frac{1}{L} \text{ veces}$$

*Decibel absoluto*: relacionado a un nivel determinado. En sistemas de transmisión los decibeles representan relaciones de potencia, por este motivo la potencia de las señales puede ser expresada en decibeles, de la siguiente manera:

$$P_{dBW} = 10 \log \frac{P[W]}{1W} \quad y \quad P_{dBm} = 10 \log \frac{P[mW]}{1mW}$$

$$dBW_{ratio} = dBW = 10 \log \frac{P(Wat)}{1Wat} \quad \text{Micro ondas}$$

$$dBm_{ratio} = dBm = 10 \log \frac{P(mW)}{1mW} \quad Z=600\Omega \text{ Telefonia FDM TDM}$$

$dBKWatio = dBK = 10 \log \frac{P(KW)}{1KW}$	FM
$dB\mu Watio / m = dB\mu = 20 \log \frac{E(\mu V / m)}{1\mu V / m}$	AM y Móviles
$dBmiliVolto = dBmV = 20 \log \frac{P(mV)}{1mV}$	TV (tierra, cable, satélite)
$dBIsotropia = dBi = 10 \log \frac{G_{antena}}{G_{isotropica}}$	Antenas

Las operaciones básicas de los decibeles son la resta y la suma, aclarando que no puede sumarse valores absolutos entre sí, pero si un valor relativo con un valor absoluto, entonces se tiene que:

$$10 \log AB = 10 \log A + 10 \log B \quad \text{y} \quad 10 \log \frac{A}{B} = 10 \log A - 10 \log B$$

Entonces la potencia a la salida del sistema será  $P_{out} = g_{dB} + P_{in_{dBm}}$ , las señales en decibeles se utilizan por la baja potencia de las señales utilizadas, además facilita las operaciones, cambiando los productos y divisiones por sumas y diferencias.

Considerando un sistema con función de transferencia  $H(f)$ , al cual se le aplica en la entrada una señal sinusoidal de amplitud  $A_x$ , produce una salida de amplitud  $A_y = H(f)A_x$ , con potencias normalizadas  $P_x = A_x^2 / 2$  y  $P_y = A_y^2 / 2 = |H(f)|^2 P_x$ , esta potencia normalizada no es necesariamente igual a  $P_{in}$  y  $P_{out}$ , sin embargo cuando hay adaptación de impedancias la relación  $P_y / P_x$  es igual a  $P_{out} / P_{in}$ , entonces si  $H(f) = Ke^{-j\omega t_d}$  se obtiene que:  $g = |H(f)|^2 = K^2$

En este caso la ganancia de potencia se aplica también a las señales de energía en el sentido en que  $E_y = gE_x$ , cuando el sistema no tiene adaptación de impedancias la ganancia de potencia es proporcional a  $K^2$ .

Además la ganancia relativa de potencia se define como:  $|H(f)|_{dB} = 10 \log |H(f)|^2$

#### 4.3.2 Pérdidas de transmisión y repetidores

Cualquier medio de transmisión presenta pérdidas de potencia, más que ganancia, tal que  $P_{out} < P_{in}$  y  $L = 1/g = P_{in} / P_{out}$ , entonces la atenuación en decibeles será  $L_{dB} = -g_{dB} = 10 \log P_{in} / P_{out}$  donde  $P_{out} = P_{in} / L$  y  $P_{out_{dBm}} = P_{in_{dBm}} - L_{dB}$

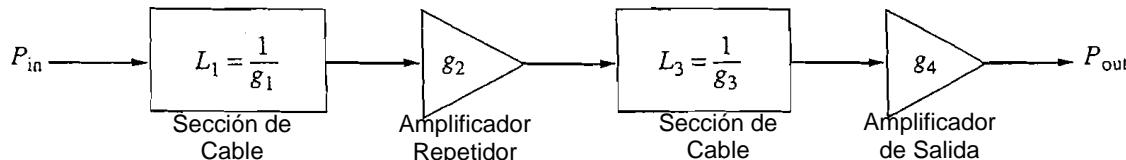
Para el caso de las líneas de transmisión como el cable coaxial, el par trenzado, las guías de onda, la fibra óptica, la atenuación es función de la distancia, es decir a mayor distancia hay un crecimiento exponencial de la atenuación, luego:  $P_{out} = 10^{-(\alpha\ell/10)} P_{in}$  donde  $\ell$  es la distancia alcanzada por el medio de transmisión y  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación en dB por unidad de longitud, entonces la atenuación será  $L = 10^{(\alpha\ell/10)}$  en veces y en decibeles  $L_{dB} = \alpha\ell$ .

Para generalizar, en la siguiente tabla se muestra el coeficiente de atenuación para algunos medios de transmisión y frecuencia de señal.

Medio de Transmisión	Frecuencia	$L \text{ dB/km}$
Par de líneas abiertas (diámetro 0.3 cm)	1Khz	0.05
Par trenzado (calibre 16)	10Khz	2
	100Khz	3
	300Khz	6
Cable coaxial (diámetro 1cm)	100Khz	1
	1Mhz	2
	3Mhz	4
Cable coaxial (diámetro 15cm)	100Mhz	1.5
Guía de onda rectangular 5x25cm	10Ghz	5
Guía helicoidal (diámetro 5cm)	100Ghz	1.5
Fibra Óptica	$3.6 \times 10^{14} \text{ Hz}$	2.5
	$2.4 \times 10^{14} \text{ Hz}$	0.5
	$1.8 \times 10^{14} \text{ Hz}$	0.2

Ejemplo: Suponga una señal transmitida por un canal de 30 kilómetros, con coeficiente de atenuación de 3dB/Km. Entonces  $L_{dB} = 30 \times 3 = 90 \text{ dB}$  y  $L = 10^9$  proporcionando una potencia  $P_{out} = 10^{-9} P_{in}$ .

Para solucionar grandes niveles de atenuación, se utiliza los circuitos amplificadores, por ejemplo la siguiente figura muestra un sistema de transmisión con una salida amplificada y un repetidor amplificador insertado cerca de la mitad del trayecto

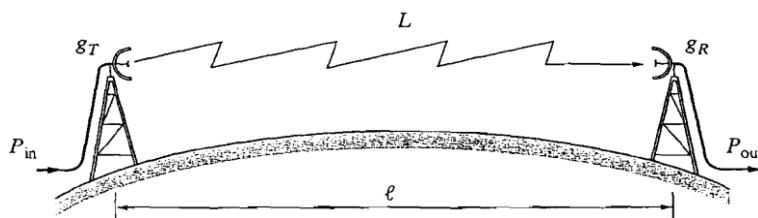


Entonces debido a su configuración en cascada la potencia de salida será:  $P_{out} = g_1 g_2 g_3 g_4 P_{in}$  o  $P_{out} = \frac{g_2 g_4}{L_1 L_3} P_{in}$

en dB la expresión es más sencilla de visualizar  $P_{out} = (g_2 + g_4) - (L_1 + L_3) + P_{in}$

#### 4.3.3 Transmisiones vía radio

La transmisión de señales por radio propagación puede reducir el número de repetidores necesarios y tiene la ventaja adicional de eliminar los cable largos, sin embargo es importante analizar las pérdidas que se tienen en una transmisión por línea de vista, que es el modo de propagación más común en comunicaciones de larga distancia en frecuencias alrededor de los 100Mhz.



Las pérdidas en el espacio libre se deben a la dispersión atmosférica y está dada por:  $L = \left( \frac{4\pi l}{\lambda} \right)^2 = \left( \frac{4\pi l f}{c} \right)^2$

pero usualmente se expresa en términos de dB, con la distancia expresada en Kilómetros y la frecuencia en Ghz, entonces:  $L_{dB} = 92.4 + 20 \log_{10} f_{Ghz} + 20 \log_{10} l_{km}$  la atenuación incrementa en forma exponencial según el logaritmo de  $l$ , de tal manera que incrementando el trayecto en el doble, aumenta la perdida en 6 dB. Además las antenas tienen un efecto focalizador que actúa como un amplificador en la medida que:

$$P_{out} = \frac{G_T G_R}{L} P_{in}$$

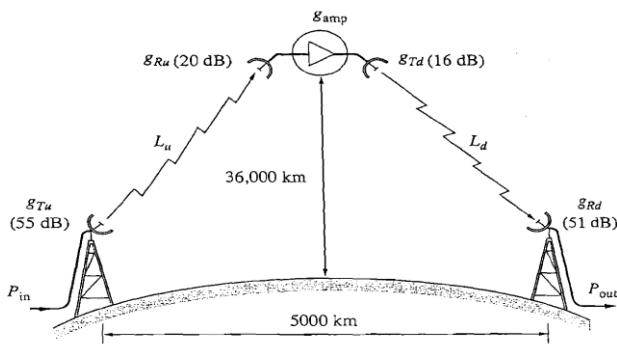
$G_T$  y  $G_R$  son las ganancias de las antenas receptor y receptora, respectivamente.

La máxima ganancia de una antena para un área de apertura  $A_e$  es:  $G = 4\pi A_e / \lambda^2 = 4\pi A_e f^2 / c^2$  el área efectiva para antenas tipo horn o tipo plato es aproximada al área física.

#### 4.3.4 Transmisión satelital

Para el análisis de las perdidas en un sistema satelital, se tomará como ejemplo un sistema de televisión transoceánico con un satélite en la órbita geoestacionaria sirviendo como repetidor (36000Km). El enlace de subida esta a 6Ghz y enlace de bajada esta a 4Ghz. Para el enlace de subida las perdidas de espacio libre serán  $L_u = 92.4 + 20 \log_{10} 6 + 20 \log 36000 = 199.1dB$  y para el enlace de bajada se tiene que

$$L_d = 92.4 + 20 \log_{10} 4 + 20 \log 36000 = 195.6dB$$



Para el análisis del sistema completo se debe tener en cuenta varios aspectos que se resaltan en la gráfica del sistema: En su configuración como amplificador repetidor, proporciona una potencia de salida de 18dBW, si la potencia de entrada al transmisor es de 35dBW, la potencia recibida en el satélite será:

$$35dBW + 55dB - 199.1dB + 20 = -99.1dBW$$

Ahora la potencia de la señal de salida del receptor será:

$$18dBW + 16dB - 195.6 + 51 = -110.6dBW$$

Y la potencia en Vatios  $P_{out} = 10^{-(110.6/10)} \times 1W = 8.7 \times 10^{-12} W$

#### 4.3.5 Ejercicios de Pérdidas

- Un trayecto de 400 kilómetros de una red cableada, tiene una atenuación de 0,4dB/km, se desea una potencia de salida de 50mW cuando la entrada es de 2W, se dispone de repetidores que dan máximo 30dB de ganancia. Determine la cantidad de repetidores necesarios para obtener este valor de potencia en salida.
- Suponga un radio enlace que trabaja a 3Ghz, con una cobertura de 40km y potencia de salida de 5W. Determine la relación señal a ruido del sistema, si  $T_N=6T_o$ , la ganancia de las antenas considérela de 10dB.
- En un sistema de comunicaciones la salida del receptor es de -123dBm, si se sabe que el sistema tiene una potencia de ruido de 2dBm. Determine la potencia de la señal de información recibida sin ruido, y la relación señal a ruido del sistema.

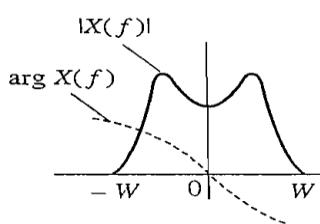
## 5 MODULACIÓN LINEAL

### 5.1 Señales y Sistemas Pasabanda

Para realizar comunicaciones efectivas y eficientes sobre distancias apreciables, usualmente es necesario utilizar una portadora de información de alta frecuencia. En consecuencia es necesario aplicar el concepto de la traslación de frecuencia de las propiedades de Fourier, para señales de banda limitada. En sistemas de transmisión a largas distancias, el comportamiento del medio es similar al de un filtro pasa banda y las señales que viajan por estos medios deben tener un espectro de banda de paso. Para analizar los métodos y características de las señales y sistemas pasa banda es necesario establecer algunas convenciones.

#### 5.1.1 Convenciones para mensajes analógicos

La señal  $x(t)$  es un mensaje o una muestra de los mensajes que puede generar una fuente, la restricción que sobre esta se impone es que debe tener un ancho de banda bien definido  $W$ , es decir su contenido espectral significativo debe estar en  $|f| < W$ .



Por conveniencia matemática las magnitudes de la señal mensaje serán normalizadas teniendo  $|x(t)| \leq 1$ , causando una limitación sobre la potencia promedio del mensaje:

$$S_x = \langle x^2(t) \rangle \leq 1$$

$x(t)$  representa señales de potencia o señales de energía, dependiendo de las circunstancias. En ocasiones el análisis de una  $x(t)$  arbitraria, suele tornarse

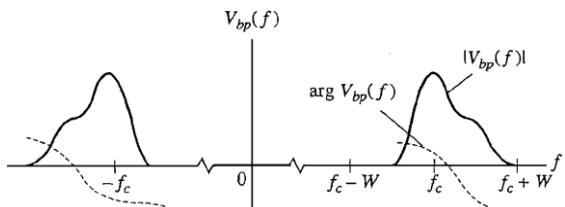
complejo y casi imposible, para solucionar este inconveniente se recurre a la utilización de un caso específico, el tono de modulación:

$$x(t) = A_m \cos \omega_m t \quad \text{Con } A_m \leq 1 \text{ y } f_m < W$$

Este tono de modulación permite trabajar con espectros de líneas unilaterales y simplifica el cálculo de potencias, además si se puede encontrar la respuesta del sistema de modulación para una frecuencia  $f_m$ , esta respuesta se puede generalizar para cualquier frecuencia, excepto en el caso de no linealidad del sistema. Para descubrir los efectos no lineales potenciales puede utilizarse un multiton de modulación, como:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + \dots \quad \text{con } A_1 + A_2 + \dots \leq 1 \text{ para satisfacer la normalización}$$

#### 5.1.2 Señales pasabanda



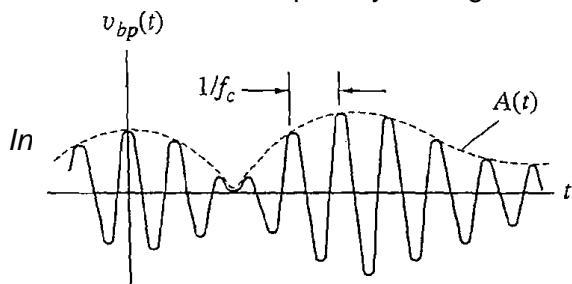
Tomando una señal  $v_{bp}(t)$  cuyo espectro  $V_{bp}(f)$  tiene características pasabanda como lo muestra la figura, este espectro tiene simetría hermitiana porque  $v_{bp}(t)$  es real, pero  $V_{bp}(f)$  no es necesariamente simétrica alrededor de  $\pm f_c$ , entonces se define la señal pasabanda por sus propiedades del dominio de la frecuencia:

$$V_{bp}(f) = 0 \quad |f| < f_c - W$$

$$|f| > f_c + W$$

Lo cual especifica que la señal no tiene contenido espectral fuera de la banda de ancho  $2W$  centrada en  $f_c$ . El valor de  $f_c$  y  $W$  es arbitrario, siempre y cuando satisfagan la expresión anterior, además que  $W < f_c$ .

La correspondiente forma de onda de la señal pasabanda muestra una sinusoida de frecuencia  $f_c$ , con cambios lentos de amplitud y de ángulo de fase, que puede escribirse como:



$$v_{bp}(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

Donde  $A(t)$  es la envolvente y  $\phi(t)$  es la fase, las dos en función del tiempo.

La línea punteada es la envolvente la cual es definida como no negativa  $A(t) > 0$ , cuando existan amplitudes negativas se absorben en la fase agregando  $\pm 180^\circ$ .

La señal  $v_{bp}(t)$  puede expresarse como un vector en el plano complejo, cuya amplitud es  $A(t)$  y su ángulo es  $w_c t + \phi(t)$ . Pero el término angular representa un estado de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj a  $f_c$  revoluciones por segundo y el cual puede ser suprimido obteniendo la representación estacionaria del vector o el punto de partida.

Además la representación fasorial natural sugiere un nuevo tipo de representación para  $v_{bp}(t)$ , como la suma de componentes en fase y cuadratura, entonces se tiene que:

$$v_i(t) = A(t) \cos \phi(t) \quad y \quad v_q(t) = A(t) \sin \phi(t)$$

Donde  $v_i$  corresponde a la componente en fase y  $v_q$  es la componente

$$v_{bp}(t) = v_i(t) \cos w_c t - v_q(t) \sin w_c t$$

en cuadratura. De esta manera se tiene que:

$$v_{bp}(t) = v_i(t) \cos w_c t + v_q(t) \cos(w_c t + 90^\circ)$$

Esta representación se conoce como la descripción de portadora en cuadratura de la señal pasabanda y tiene la ventaja de tener una representación en el dominio de la frecuencia relativamente fácil, dada por la transformada de Fourier y la aplicación del teorema de la modulación.

$$V_{bp}(f) = \frac{1}{2} [V_i(f - f_c) + V_i(f + f_c)] + \frac{j}{2} [V_q(f - f_c) + V_q(f + f_c)]$$

Donde  $V_i$  y  $V_q$  corresponden a las transformadas de Fourier de las componentes en fase y en cuadratura, respectivamente.

La descripción de la envolvente de la señal y su fase es:  $A(t) = \sqrt{v_i^2(t) + v_q^2(t)}$   $\phi(t) = \arctan \frac{v_q(t)}{v_i(t)}$

expresiones a las cuales no se puede calcular su transformada de Fourier.

La representación en frecuencia  $V_{bp}(f)$ , tiene una implicación inmediata para satisfacer la condición de señal de banda pasante, las funciones en fase y cuadratura deben ser tales que  $V_i(f) = V_q(f) = 0$  para  $|f| > W$ . En otras palabras  $V_{bp}(f)$  está constituido por dos espectros pasabajas que han sido trasladados y en el caso de  $V_q(f)$  desplazado en fase. Esta propiedad permite la definición en un espectro pasabajas equivalente:

$$V_{lp}(f) = \frac{1}{2} [V_i(f) + jV_q(f)]$$

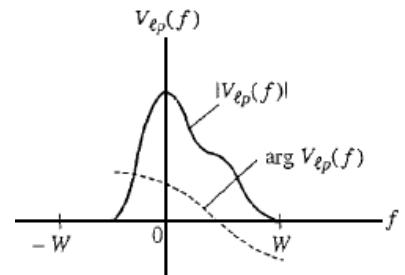
$$V_{lp}(f) = V_{bp}(f + f_c) u(f + f_c)$$

$V_{lp}$  es la porción de frecuencias positivas de  $V_{bp}$  trasladada al origen.

En el dominio del tiempo se obtiene que:

$$v_{lp}(t) = \frac{1}{2} [v_i(t) + jv_q(t)]$$

Entonces la representación fasorial de  $v_{lp}(t)$  será:  $v_{lp} = \frac{1}{2} A(t) e^{j\phi(t)}$ , sin embargo  $V_{lp}$  representa la parte real de una señal pasabanda, entonces su relación con  $v_{bp}(t)$  es:



$$\begin{aligned} v_{bp}(t) &= \operatorname{Re} [A(t)e^{j[w_c t + \phi(t)]}] \\ v_{bp}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} A(t) e^{jw_c t} e^{j\phi(t)} \right] \\ v_{bp}(t) &= 2 \operatorname{Re}[v_{lp}(t) e^{jw_c t}] \end{aligned}$$

Este resultado muestra la transformación pasabajas a pasabanda en el dominio del tiempo, mientras que en el dominio de la frecuencia se tiene:

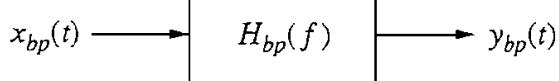
$$V_{bp}(f) = V_{lp}(f - f_c) + V_{lp}^*(-f - f_c)$$

El primer término corresponde a las frecuencias positivas y el segundo a las frecuencias negativas

### 5.1.3 Transmisión pasabanda

Con los conceptos vistos, ahora se pasa al análisis de un sistema pasabanda, al cual se le aplica una señal pasabanda, obteniendo una señal pasabanda de salida, como lo muestra la figura:

En el dominio de la frecuencia la respuesta del sistema sería:

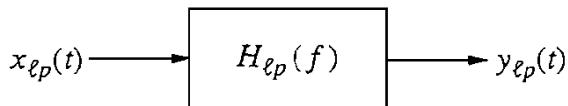


$$Y_{bp}(f) = H_{bp}(f)X_{bp}(f)$$

Pero en la mayoría de las ocasiones es más fácil trabajar con la representación equivalente de espectro pasabajo

$$Y_{lp}(f) = H_{lp}(f)X_{lp}(f) \text{ Donde } H_{lp}(f) = H_{bp}(f + f_c)u(f + f_c)$$

Entonces la representación sería:



El paso de pasabanda a pasabajos para este sistema se hace aplicando los conceptos vistos para señales pasabanda. Si se encuentra la solución para  $Y_{bp}(f)$  la respuesta en el tiempo puede encontrarse utilizando la transformada inversa de Fourier,

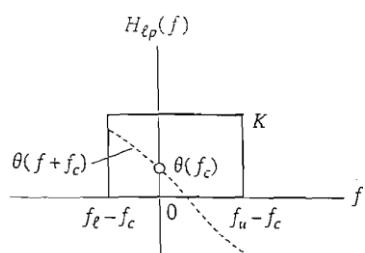
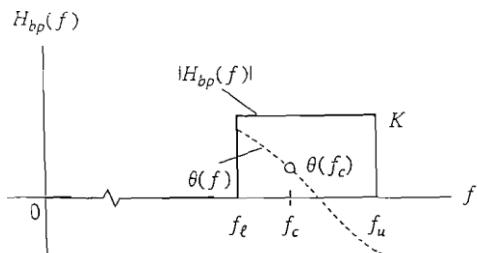
$y_{lp}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{lp}(f)] = \mathcal{F}^{-1}[H_{lp}(f)X_{lp}(f)]$  de donde se obtiene que:  $y_i(t) = 2 \operatorname{Re}[y_{lp}(t)]$  y  $y_q(t) = 2 \operatorname{Im}[y_{lp}(t)]$  obteniendo la envolvente y la fase:  $A_y(t) = 2|y_{lp}(t)|$  y  $\phi_y(t) = \arg[y_{lp}(t)]$ .

A continuación se muestra una importante aplicación de esta técnica.

### 5.1.4 Ejemplo: Retardo de Portadora y Envolvente

Considere un sistema pasabanda con relación de amplitud constante, pero desplazamiento de fase no lineal  $\theta(f)$  sobre esta banda de paso  $H_{bp}(f) = Ke^{j\theta(f)}$  para  $f_l < f < f_u$  y su representación pasabajos:

$$H_{lp}(f) = Ke^{j\theta(f+f_c)}u(f+f_c) \quad \text{para} \quad f_l - f_c < f < f_u - f_c$$



Asumiendo que las no linealidades de fase son relativamente suaves, puede escribirse la aproximación:

$$\theta(f + f_c) \approx -2\pi(t_0 f_c + t_1 f) \text{ donde}$$

$$t_0 = \frac{\theta(f_c)}{2\pi f_c} \quad t_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \Big|_{f=f_c}$$

Esta aproximación proviene de los primeros términos de la expansión en serie de Taylor de  $\theta(f + f_c)$ . Para la interpretación de los parámetros  $t_0$  y  $t_1$  se toma una señal de entrada con fase cero tal que  $x_{bp}(t) = A_x(t) \cos w_c t$  y  $x_{lp}(t) = \frac{1}{2} A_x(t)$ . Si el espectro  $X_{bp}(f)$  cae completo dentro de la banda de paso del sistema, entonces: 
$$\begin{aligned} Y_{lp}(f) &= Ke^{j\theta(f+f_c)} X_{lp}(f) \approx Ke^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)} X_{lp}(f) \\ &\approx Ke^{-jw_c t_0} [X_{lp}(f) e^{-j2\pi f t_1}] \end{aligned}$$

El segundo término corresponde a  $x_{lp}(t)$  desplazada un tiempo  $t_1$ , de esta manera

$$y_{lp}(t) \approx Ke^{-jw_c t_0} x_{lp}(t - t_1) \approx Ke^{-jw_c t_0} \frac{1}{2} A_x(t - t_1)$$

Entonces de la relación pasabanda-pasabajas, se obtiene  $y_{bp}(t) = KA_x(t - t_1) \cos w_c(t - t_0)$ .

De este resultado se puede concluir que  $t_0$  es el retardo de portadora y  $t_1$  es el retardo de envolvente del sistema. Si  $t_1$  es independiente de la frecuencia, la envolvente no sufrirá distorsión de retardo.

Otra característica importante, es la relación existente entre la frecuencia central del sistema y el ancho de banda necesario, entonces como regla se define el ancho de banda fraccional:

$0.01 < \frac{B}{f_c} < 0.1$  En general se toma  $B \approx 0.02 f_c$ , lo cual implica que anchos de banda grandes requieren portadoras de frecuencia grande.

### 5.1.5 Ejemplo

Utilizando el análisis en el dominio del tiempo de un filtro pasabajas, encuentre y grafique la respuesta de un sistema pasabanda cuya entrada es  $x_{bp} = A \cos w_c t u(t)$  y  $H_{bp} = 1/[1 + j2(f - f_c)/B]$  para  $f > 0$ .

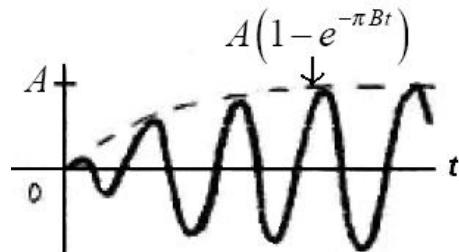
$$H_{lp} = \frac{1}{1 + j2f/B} \Rightarrow h_{lp} = \pi B e^{-\pi B t} u(t)$$

$$x_{bp}(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{A}{2} u(t) e^{jw_c t} \right] \Rightarrow x_{lp}(t) = \frac{A}{2} u(t)$$

$$y_{lp}(t) = h_{lp}(t) * x_{lp}(t) = \frac{\pi B A}{2} \int e^{-\pi B(t-\lambda)} d\lambda$$

$$y_{lp}(t) = \frac{A}{2} (1 - e^{-\pi B t}) u(t)$$

$$y_{bp}(t) = 2 \operatorname{Re} [y_{lp}(t) e^{jw_c t}] = A(1 - e^{-\pi B t}) \cos w_c t u(t)$$



### 5.2 Modulación de doble banda

La modulación de doble banda lateral tiene dos tipos: la modulación de doble banda lateral estándar, conocida como AM puro y la modulación de doble banda lateral con portadora suprimida o DSB (Double Side Band).

### 5.2.1 Señal y espectro AM

La propiedad más significativa de la modulación AM estándar es que la envolvente de la señal, tiene la misma forma de la señal de información. Dada una señal portadora de amplitud  $A_c$ , al modularla mediante una señal mensaje  $x(t)$ , se obtiene una envolvente de la forma:  $A(t) = A_c[1 + \mu x(t)]$ , donde la constante  $\mu$  es el índice de modulación, cuyo valor es siempre positivo, de esta manera la señal modulada resultante esta descrita por la siguiente expresión:

$$x_c(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \cos w_c t$$

Como se puede observar la señal  $x_c(t)$  no tiene variaciones de fase en el tiempo, por lo tanto su componente en cuadratura es cero y su componente en fase es  $x_{ci}(t) = A(t)$ . La figura de la derecha es un ejemplo de la modulación AM.

La señal (a) representa el mensaje que modula la portadora de alta frecuencia.

La figura (b) representa la señal modulada con un índice de modulación menor a la unidad, además cabe aclarar que esta señal tiene una frecuencia alta que satisface las convenciones iniciales:

$$f_c \gg W \quad y \quad \mu < 1$$

Cuando estas condiciones se satisfacen la información puede recuperarse en recepción con facilidad, utilizando un circuito detector de envolvente.

El índice de modulación puede calcularse al conocer el resultado de la modulación:

$$\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

El índice de modulación determina el porcentaje de modulación y determina si la modulación se hace correctamente:

$$\% \text{ mod} = \mu \times 100$$

Entonces para un porcentaje de modulación del 100% se tiene que la amplitud mínima es 0 y la máxima amplitud de la señal modulada es  $2A_c$ .

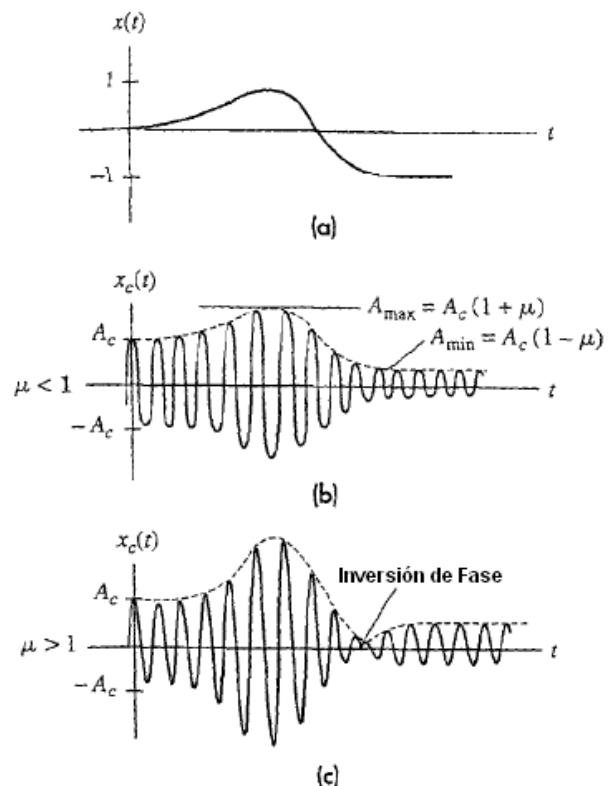
Cuando el índice es mayor a la unidad (figura c), se obtiene una inversión de fase y una distorsión de envolvente en la señal modulada, produciendo un fenómeno que se conoce como sobre modulación

En el dominio de la frecuencia, se tiene:

$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c \delta(f - f_c) + \frac{\mu}{2} A_c X(f - f_c) \quad f > 0$$

Como se puede observar el espectro de la señal AM está constituido por un impulso correspondiente a la portadora y bandas laterales simétricas alrededor de la frecuencia de la portadora. La definición de doble banda lateral se debe a la presencia de las denominadas banda lateral superior y banda lateral inferior, además establecen el ancho de banda de la señal modulada:

$$B_T = 2W$$



Note que para transmitir una señal banda base de ancho de banda definido, es necesario tener el doble de ancho de banda para transmitir esta señal modulada en amplitud.

Otro parámetro importante para el análisis y comparación de AM, es la potencia promedio transmitida  $S_T = \langle x_c^2(t) \rangle$  de donde se obtiene:

$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + 2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle [1 + \mu x(t)]^2 \cos 2w_c t \rangle$$

Cuyo segundo término tiene promedio cero sobre la condición  $f_c \gg W$ . Así si  $\langle x(t) \rangle = 0$  y  $\langle x^2(t) \rangle = S_x$ , entonces:  $S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x)$

$$S_T = P_c + 2P_{sb} \quad P_c = \frac{1}{2} A_c^2 \quad P_{sb} = \frac{1}{4} A_c^2 \mu^2 S_x = \frac{1}{2} \mu^2 S_x P_c$$

El término  $P_c$  corresponde a la potencia de la señal portadora sin modular y  $P_{sb}$  es la potencia de una banda lateral, entonces la potencia de la señal modulada está constituida por la potencia de la portadora más la potencia de sus bandas laterales. Por otro lado la restricción de  $|\mu x(t)| \leq 1$  implica que  $\mu^2 S_x \leq 1$ , luego

$$P_{sb} \leq \frac{1}{2} P_c \text{ y } P_c = S_T - 2P_{sb} \geq \frac{1}{2} S_T \quad P_{sb} \leq \frac{1}{4} S_T$$

Que indica que de la potencia total transmitida, tan solo la cuarta parte corresponde a la información.

### 5.2.2 Señales y espectro DSB

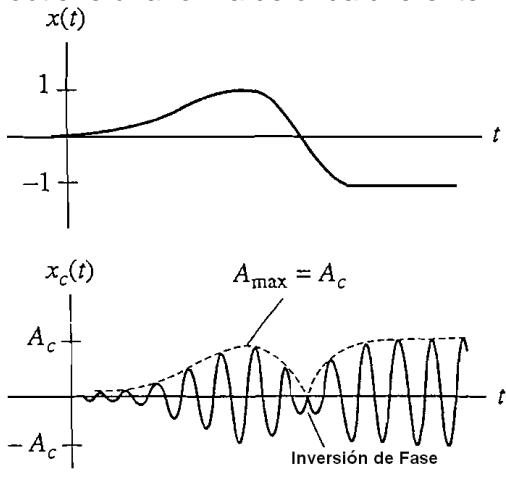
El desperdicio de potencia de la modulación AM pura, se reduce obteniendo una modulación del 100% y eliminando la componente de portadora no modulada. Entonces la expresión de la señal modulada sería:

$$x_c(t) = x(t)A_c \cos w_c t$$

Este resultado se conoce como Modulación de Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida (DSB-SC), en el dominio de la frecuencia se tiene que.

$$X_c(t) = \frac{1}{2} A_c X(f - f_c) \quad f > 0$$

El espectro tendría la forma de AM puro, sin presencia de la portadora, por consiguiente el ancho de banda sería  $B_T = 2W$ . Sin embargo, aunque en frecuencia los espectros son similares, en el dominio del tiempo se obtiene una forma de onda diferente:



Como se puede apreciar la máxima amplitud de la señal modulada es  $A_c$  y la mínima es cero, y además la señal sufre una inversión de fase, que dificulta su recuperación. Entonces la envolvente y fase de la señal están dadas por:

$$A(t) = A_c |x(t)| \quad \phi(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pm 180 & x(t) < 0 \end{cases}$$

Entonces la recuperación de la información, requiere el conocimiento del cambio de fase y no puede hacerse con un simple detector de envolvente. A pesar de la dificultad que involucra DSB, trae consigo un beneficio en cuanto al derroche de potencia puesto que la potencia total transmitida estará concentrada en la potencia de las bandas laterales.

$$S_T = 2P_{sb} = \frac{1}{2} A_c^2 S_x$$

En la práctica los transmisores imponen un límite a la potencia pico de la envolvente  $A_{máx}^2$ . Tomando en cuenta este valor máximo para examinar la relación  $P_{sb} / A_{máx}^2$ , sobre máxima condición de modulación se tiene que:

Para DSB con  $A_{\max} = A_c$  y para AM con  $A_{\max} = 2A_c$ , la relación arroja el siguiente resultado:

$$P_{sb}/A_{\max}^2 = \begin{cases} S_x/4 & DSB \\ S_x/16 & AM \text{ con } \mu=1 \end{cases}$$

Por lo tanto manteniendo fijo  $A_{\max}^2$  e iguales el resto de parámetros, se puede decir que un transmisor DSB produce 4 veces la potencia de banda lateral producida por uno AM.

### 5.2.3 Ejemplo

Considerando un radio transmisor en el cual  $S_T \leq 3kW$  y  $A_{\max}^2 \leq 8kW$ . Sea la señal mensaje un tono de amplitud 1, entonces  $S_x = A_m^2/2 = 1/2$ . Si la modulación utilizada por el transmisor es DSB, la máxima potencia de transmisión posible por banda lateral será la menor entre:

$$P_{sb} = \frac{1}{2}S_T \leq 1.5kW \quad P_{sb} = \frac{1}{8}A_{\max}^2 \leq 1kW$$

Lo cual define como límite  $P_{sb} = 1kW$

Si la modulación es AM puro, con  $\mu = 1$ , entonces se tiene  $P_{sb} = \frac{1}{32}A_{\max}^2 \leq 0.25kW$ .

De esta manera y debido a que el rango de transmisión depende directamente de la potencia del transmisor, la trayectoria de la señal modulada en AM sería el 25% de la trayectoria de la señal modulada con DSB.

### 5.2.4 Tono de modulación y análisis fasorial

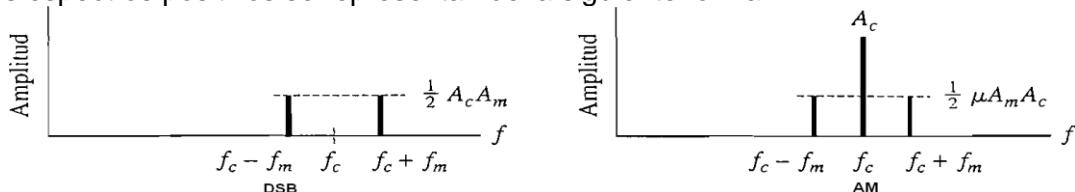
Dada una señal mensaje  $x(t) = A_m \cos \omega_m t$ , la señal DSB tiene la forma:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A_m A_c \cos(\omega_m t) \cos(\omega_c t) \\ x_c(t) &= \frac{A_m A_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_m A_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t \end{aligned}$$

Para la generación de AM se tiene que:

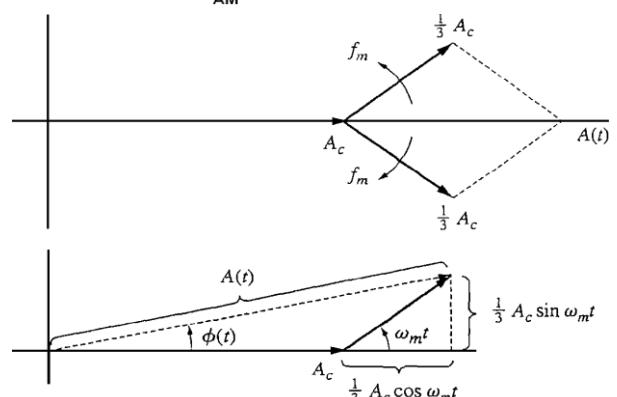
$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_m \mu A_c}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_m \mu A_c}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t$$

Sus respectivos espectros positivos se representan de la siguiente forma:



Como se puede observar en los espectros resultantes, estos pueden representarse en forma fasorial, lo cual permite encontrar la envolvente y la fase, o los términos de portadora en cuadratura, además posibilita el análisis de la distorsión, la interferencia y otros fenómenos.

Para realizar este análisis se toma una señal modulada AM, con  $\mu A_m = \frac{2}{3}$  por conveniencia de cálculos. El diagrama fasorial correspondiente se muestra en el gráfico superior de la figura.



Este diagrama se construye sumando los fasores de las

bandas laterales a la punta del fasor de la portadora, dado que la frecuencia de la portadora es  $f_c$ , los fasores de las bandas  $f_c \pm f_m$  rotan a una velocidad  $f_m$ , relativa al fasor de la portadora. El fasor resultante de la suma de las bandas laterales es colineal con la portadora, y este fasor suma es igual a la envolvente  $A_c \sqrt{1 + \frac{2}{3} \cos w_m t}$ .

Suponiendo que un canal de transmisión suprime la banda lateral inferior (gráfico inferior de la figura), ahora la envolvente estará dada por:

$$A(t) = \sqrt{A_c^2 + \frac{1}{3} A_c^2 \cos w_m t} + \sqrt{\frac{10}{9} A_c^2 \cos w_m t}$$

A partir de esta amplitud se puede encontrar la distorsión de amplitud y además se puede notar que ésta distorsión ha producido una variación de la fase en el tiempo  $\phi(t)$ .

## 5.2.5 Moduladores y transmisores

### Modulador Producto

Para realizar la modulación AM, por lo general se utiliza el diagrama de bloques de la siguiente figura, tomando como referencia la ecuación:  $x_c(t) = A_c [1 + \mu x(t)] \cos w_c t$  que no es más que la multiplicación de dos señales analógicas.

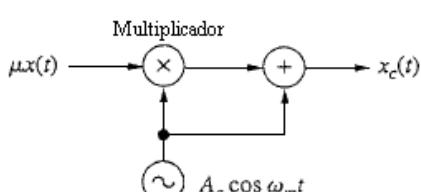
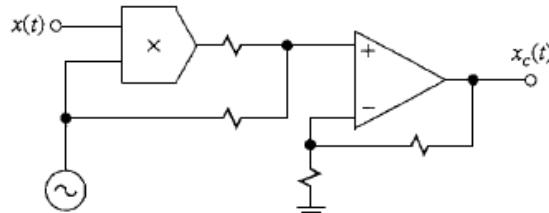


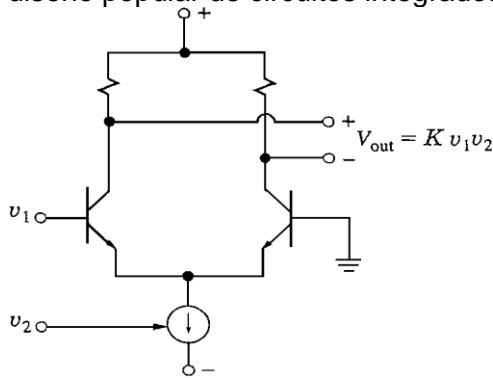
Diagrama Básico de AM



Implementación con Multiplicador Analógico

La implementación de este modulador se puede realizar con un multiplicador analógico y un amplificador operacional. Como se puede notar en la implementación, para generar la señal AM se multiplican las señales y al resultado se suma la portadora, como es obvio, para generar la señal DSB, solo se necesita realizar el producto.

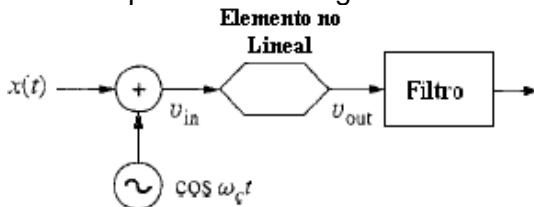
La multiplicación eléctrica necesaria para realizar la modulación, puede realizarse de diferentes maneras, un diseño popular de circuitos integrados es el multiplicador de transconductancia variable:



En este circuito,  $v_1$  es aplicado a un amplificador diferencial cuya ganancia depende de la transconductancia del transistor, la cual varía con la corriente total emitida. La entrada  $v_2$  controla la corriente emitida por medio de un convertidor de voltaje a corriente. De esta manera la salida diferencial es  $Kv_1v_2$ , consiguiendo la modulación más un efecto de ganancia. Sin embargo cabe aclarar que los multiplicadores analógicos están limitados a niveles bajos de potencia y frecuencias relativamente bajas.

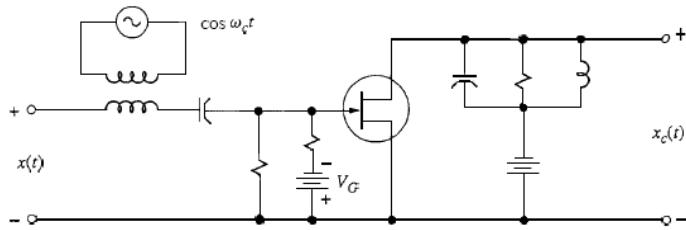
### Moduladores de Ley Cuadrada y Balanceado

La multiplicación de señales de alta frecuencia puede conseguirse utilizando un modulador de ley cuadrada como el que muestra la figura:



Este diagrama en bloques representa el circuito modulador de ley cuadrada, el cual puede ser implementado utilizando transistores de efecto de campo como elemento no lineal y un circuito paralelo RLC como filtro.

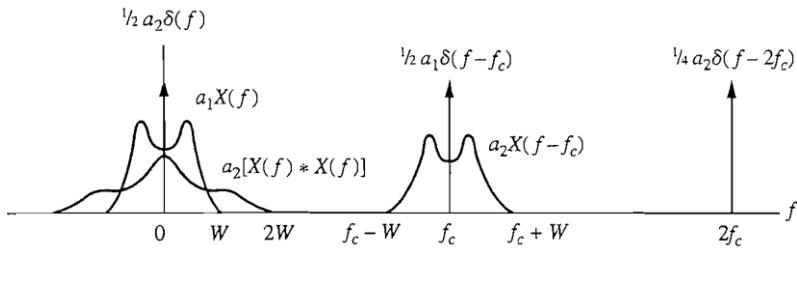
Para este circuito se asume que la curva del elemento no lineal se aproxima a la curva de transferencia de ley cuadrada, entonces:  $v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2$



así tomando  $v_{in} = x(t) + \cos \omega_c t$  se tiene:

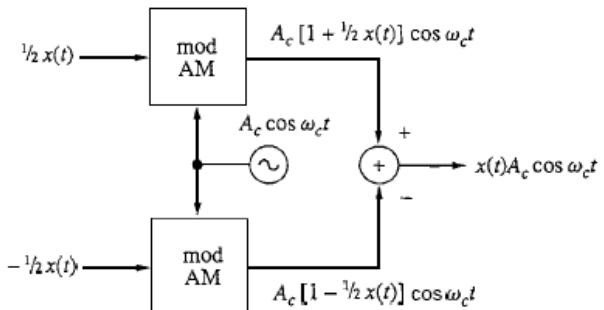
$$v_{out} = a_1 x(t) + a_1 x(t)^2 + a_2 \cos^2 \omega_c t + a_1 \left(1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t)\right) \cos \omega_c t$$

Donde se puede observar que el último término de la expresión de salida corresponde a la modulación deseada, con  $A_c = a_1$  y  $\mu = 2a_2/a_1$  por ese motivo se hace necesario filtrar la señal para eliminar las componentes indeseadas. La posibilidad de separación se hace evidente gracias a la representación espectral de la señal, dada por  $V_{out}(f) = \mathcal{F}[v_{out}(t)]$  :



Con un filtro centrado en  $f_c$  y ancho de banda  $2W$ , se puede obtener la señal deseada fácilmente, siempre y cuando  $f_c \gg W$ .

Note en la expresión inicial, que si  $a_1 = 0$ , se obtiene DSB, que corresponde a la curva perfecta de ley cuadrada:  $v_{out} = a_2 v_{in}^2$



Desafortunadamente, los dispositivos de ley cuadrada perfecta no son muy comunes, entonces, para obtener la señal DSB, es necesario utilizar dos moduladores AM arreglados en configuración balanceada, para cancelar la portadora en la salida, esta configuración se conoce como modulador balanceado.

Asumiendo que los moduladores son idénticos, al diferenciar las salidas se obtiene la señal DSB deseada.

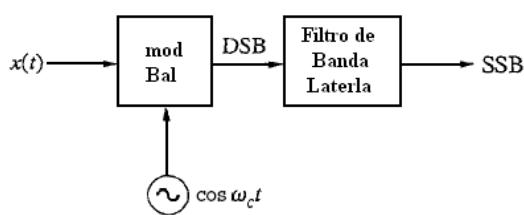
### 5.3 Moduladores de banda lateral suprimida

Los desperdicios de potencia y ancho de banda de las modulaciones AM y DSB son evidentes, se mostró como al suprimir la portadora en DSB se mejora la potencia de transmisión, pero aún queda el inconveniente de

duplicación del ancho de banda necesario en transmisión, este problema se soluciona con las técnicas de modulación SSB (Banda Lateral Suprimida) y VSB(Banda Lateral Vestigial)

### 5.3.1 Señales y espectros SSB

La modulación de banda lateral suprimida, también conocida como banda lateral única, se consigue gracias a la eliminación de una de las bandas laterales de DSB generado con el modulador balanceado. Esto es posible debido a que las bandas laterales superior e inferior se encuentran estrechamente relacionadas por la simetría alrededor de la frecuencia de la portadora, representando cada una el contenido total de la información del mensaje.



La figura representa una aproximación conceptual de modulación SSB, donde la señal DSB se aplica a un filtro de banda lateral que suprime una de las dos bandas laterales.

La supresión de una u otra banda lateral es indiferente, porque como se mencionó con anterioridad, cada banda contiene la información completa del mensaje.

La figura muestra los dos posibles casos de modulación SSB, el primero de ellos corresponde a la supresión de la banda lateral inferior y se denomina USSB, el segundo es la supresión de la banda lateral superior, que se conoce como modulación LSSB.

Por otro lado, se puede observar que el ancho de banda de transmisión necesario es el mismo de la señal en banda base, además la potencia transmitida se concentra en la banda lateral transmitida, obteniendo:

$$B_T = W \quad S_T = P_{sb} = \frac{1}{4} A_c^2 S_x$$

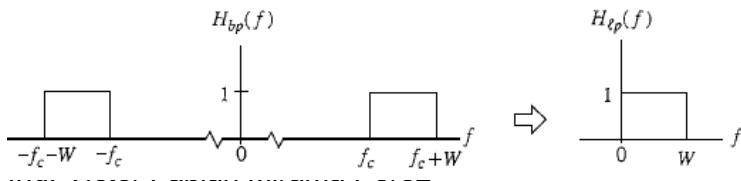
En el dominio de la frecuencia es sencillo visualizar el efecto de la modulación SSB, sin embargo en el dominio del tiempo no es tan evidente, por este motivo se toma la modulación de un tono simple para analizar este tipo de modulación. Entonces la señal modulada que representa la señal SSB será:  $x_c(t) = \frac{1}{2} A_c A_m \cos(\omega_c \pm \omega_m)t$  que representa tanto la señal USSB y LSSB.

Esta expresión muestra que la señal SSB se encuentra desplazada  $\pm f_m$  de  $f_c$  y la envolvente de la señal modulada es proporcional a  $A_m$ .

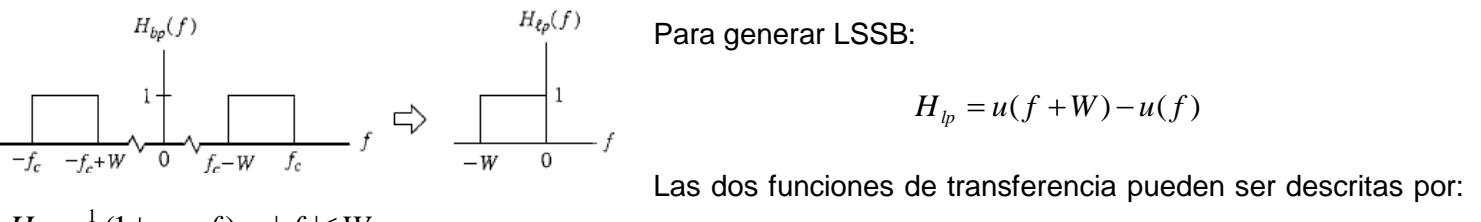
El análisis para una señal arbitraria  $x(t)$  se hace tomando el filtro de banda lateral, como un filtro pasabanda al cual se aplica una señal pasabanda DSB  $x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$  y se obtiene una señal de salida SSB  $x_c(t)$ , entonces como se vio previamente, para dar solución a este sistema se aplica el método de pasabajos equivalentes, como  $x_{bp}(t)$  no tiene componente en cuadratura se tiene que:

$$x_{lp}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) \rightarrow X_{lp}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f)$$

La función de transferencia del filtro pasabanda necesario para generar USSB debe ser:



$$H_{lp} = H_{bp}(f + f_c)u(f + f_c) = u(f) - u(f - W)$$



Ahora se puede realizar el producto entre  $H_{lp}$  y  $X_{lp}$ , produciendo el espectro equivalente en banda base USSB o LSSB:  $Y_{lp}(f) = \frac{1}{4} A_c (1 \pm \operatorname{sgn} f) X(f) = \frac{1}{4} A_c [X(f) \pm (\operatorname{sgn} f) X(f)]$

Recordando el concepto de la transformada de Hilbert:  $\hat{X}(f) = (-j \operatorname{sgn} f) X(f)$

Entonces la transformada inversa de  $Y_{lp}(f)$  es  $y_{lp}(t) = \frac{1}{4} A_c [x(t) \pm j\hat{x}(t)]$

Finalmente utilizando la transformación pasabanda-pasabajos se obtiene la respuesta para el sistema pasa banda:

$$x_c(t) = y_{bp}(t) = 2 \operatorname{Re}[y_{lp}(t) e^{jw_c t}]$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos w_c t \mp \hat{x}(t) \sin w_c t]$$

Esta expresión representa la forma de onda de una señal modulada SSB para una señal arbitraria  $x(t)$ . Se puede observar que la señal modulada tiene componentes en fase y cuadratura:

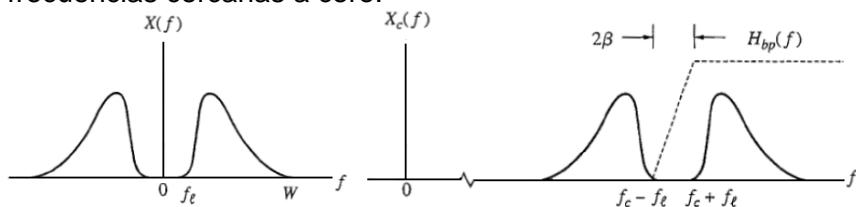
$$x_{ci}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) \quad x_{cq}(t) = \pm \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t)$$

Y la envolvente de la señal SSB esta expresada por:  $A(t) = \frac{1}{2} A_c \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$

La forma de onda de esta señal en el dominio del tiempo es compleja de realizar y mucho más analizar la potencia pico de la envolvente, por lo cual, estos análisis se extractan del análisis de la modulación de tono simple.

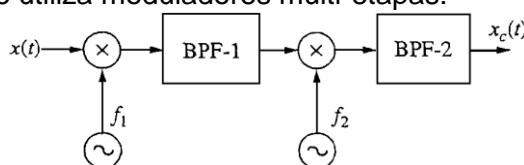
### 5.3.2 Generación de SSB

Para el análisis de modulación SSB se tomó filtros ideales, pero en la realidad se sabe que este tipo de filtros es irrealizable y podría haber presencia de componentes indeseadas o atenuación de componentes importantes, afortunadamente en la práctica la mayoría de señales tienen un nivel pequeño o casi nulo en las frecuencias cercanas a cero.

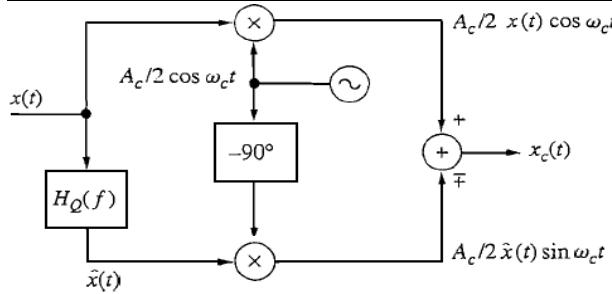


Una señal natural de audio o música no tiene componentes cercanas a cero, por lo tanto su espectro tendría un espacio vacío cerca a cero y al modular una portadora el vacío se traslada alrededor de la frecuencia de la portadora.

Como lo muestra la figura, generalmente la región de transición del filtro  $2\beta$  no debe ser mucho menor que el 1% del valor nominal de la frecuencia de corte del filtro y este valor está determinado por el ancho del vacío espectral, por lo tanto  $f_{co} < 200\beta$ , esta consideración puede causar la necesidad de una portadora de muy alta frecuencia. Para estos casos se utiliza moduladores multi-etapas:

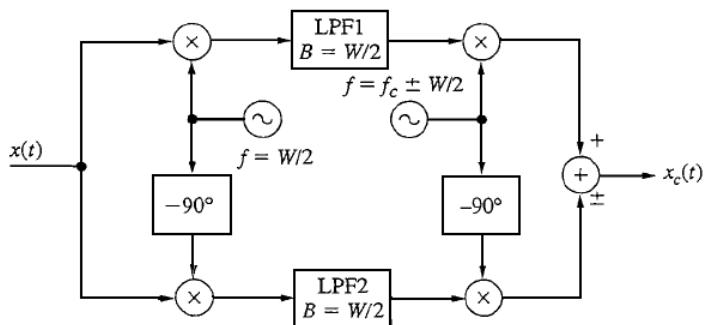


Otro método para la generación de SSB se basa en el análisis de la señal en términos cosenoidales:



$$x_c(t) = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \cos(\omega_c t - 90^\circ)]$$

Esta expresión sugiere que la señal SSB, está conformada por dos señales DSB con portadoras en cuadratura moduladas por las señales  $x(t)$  y  $\hat{x}(t)$ , este sistema se conoce como método de cambio de fase, el cual evita la necesidad de utilizar filtros de banda lateral, debido a que al ingresar la señal DSB las bandas laterales no deseadas se cancelan, generando la señal SSB requerida.



Sin embargo la realización del filtro en cuadratura no se puede llevar a cabo, solo se puede obtener muy buenas aproximaciones, por este motivo se utiliza múltiples secciones en cascada. La aproximación generalmente causa distorsión en las bajas frecuencias. Por este motivo se genera un nuevo tipo de generador de SSB, conocido como modulador de "tejido".

Tomando  $x(t) = \cos 2\pi f_m t$  con  $f_m < W$ , para el modulador de la figura, entonces se tiene:

$x_c(t) = v_1 \pm v_2$  donde  $v_1$  es la señal de la parte superior del circuito y  $v_2$  corresponde a la rama inferior.

Tomando las dos ramas por separado, la entrada al LPF superior es  $\cos 2\pi f_m t \cos 2\pi \frac{W}{2} t$ , la salida del filtro esta multiplicada por  $\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2})t$  obteniendo la señal de salida:

$$v_1 = \frac{1}{4} [\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t + \cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} + \frac{W}{2} - f_m)t]$$

La entrada al filtro inferior es  $\cos 2\pi f_m t \sin 2\pi \frac{W}{2} t$  y su respectiva salida se multiplica con  $\sin 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2})t$ , para obtener  $v_2 = \frac{1}{4} [\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t - \cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} + \frac{W}{2} - f_m)t]$

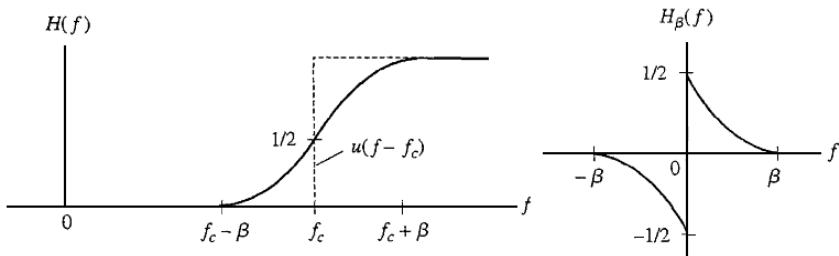
Ahora tomando los signos positivos se tiene  $x_c(t) = 2 \frac{1}{4} [\cos 2\pi(f_c + \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t] = \frac{1}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t$ , que corresponde a la señal USSB, similarmente la señal LSSB seria  $x_c(t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t$ .

La modulación SSB tiene beneficios a nivel de desempeño del sistema, que la muestran como la mejor opción en modulación de amplitud, sin embargo el costo asociado a la transmisión y recepción, es bastante elevado, limitando su implementación.

Ejercicio: utilice como entrada al modulador de cambio de fase la señal  $x(t) = \cos 2\pi f_m t$  y verifique que se genera la modulación.

### 5.3.3 Señales y espectros de VSB

Considerando señales de gran ancho de banda cuyo contenido espectral tiene componentes significativas de baja frecuencia, como es el caso de las señales de video, facsímil y señales de datos de alta velocidad. La conservación del ancho de banda es una característica importante de la señal SSB, sin embargo su respuesta para señales con bajas frecuencias es deficiente, mientras que la respuesta de una señal DSB es buena para las bajas frecuencias pero el ancho de banda necesario es grande, entonces se hace evidente la necesidad de encontrar un punto intermedio. Este punto intermedio es la modulación de banda lateral vestigial la cual se consigue a partir de DSB dejando pasar una banda lateral completa y una pequeña parte de la otra banda lateral. La clave de VSB es un filtro de banda lateral cuya respuesta exacta no es crucial, pero se debe tener simetría impar alrededor de la frecuencia de la portadora y una respuesta relativa de  $\frac{1}{2}$ :



Por lo tanto tomando la banda lateral superior se tiene:  
 $H(f) = u(f - f_c)H_\beta(f - f_c) \quad f > 0$   
 Donde  $H_\beta(-f) = -H_\beta(f)$  y  
 $H_\beta(f) = 0 \quad |f| > \beta$

El filtro VSB en la práctica es un filtro con región de transición de  $2\beta$ , por lo tanto el ancho de banda de la señal VSB será:  $B_T = W + \beta \approx W$

Cuando  $\beta \ll W$ , que es una relación común en los sistemas de comunicaciones, el espectro se aproxima al de SSB, y en el dominio del tiempo se puede también hacer esa aproximación, por consiguiente la expresión matemática de VSB, se presenta como una modificación de la expresión definida para SSB:

$x_c(t) = \frac{1}{2}[x(t)\cos w_c t - x_q(t)\sin w_c t]$  Donde  $x_q(t)$  es la componente en cuadratura del mensaje definida por  
 $x_q(t) = \hat{x}(t) + x_\beta(t)$ , con:  $x_\beta(t) = j2 \int_{-\beta}^{\beta} H_\beta(f)X(f)e^{j\omega t} df$

La variación de  $\beta$  cambia el espectro entre DSB y SSB, de tal manera que si  $\beta$  es muy pequeño en comparación con el ancho de banda, la señal modulada se aproxima a la señal SSB y  $x_\beta(t) \approx 0$ . Para un  $\beta$  grande las señales se aproxima a una modulación DSB y  $\hat{x}(t) + x_\beta(t) \approx 0$ .

La potencia transmitida no es fácil de determinar, porque como se pude ver la modulación VSB es un punto intermedio entre DSB y SSB, por lo tanto su potencia estará limitada por la potencia transmitida en estos tipos de modulación:

$$\frac{1}{4} A_c^2 S_x \leq S_T \leq \frac{1}{2} A_c^2 S_x$$

## 5.4 Conversión de frecuencia, detección y receptores

La modulación lineal, como se ha visto hasta ahora, genera una traslación en frecuencia del espectro de las señales modulantes, en este orden de ideas, la demodulación en el punto de recepción implica un traslado inverso de frecuencia, desplazando la señal de información desde la frecuencia de la portadora hasta la frecuencia original del mensaje. Los demoduladores encargados de este procedimiento pueden clasificarse en dos tipos: los sincronos y los detectores de envolvente.

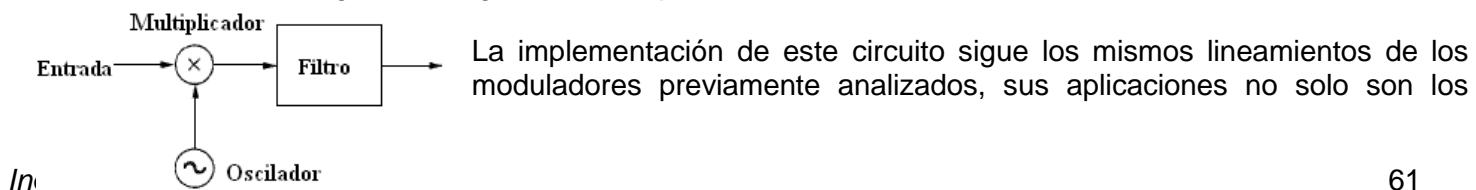
### 5.4.1 Conversión de frecuencia

Antes de analizar los receptores o detectores es preciso estudiar rápidamente el proceso de conversión de frecuencia, que inicia con la multiplicación de señales sinusoidales, tomando como ejemplo una señal DSB  $x(t)\cos w_1 t$  y multiplicándola con  $\cos w_2 t$ , se obtiene:

$$x(t)\cos w_1 t \cos w_2 t = \frac{1}{2} x(t) \cos(w_1 + w_2)t + \frac{1}{2} x(t) \cos(w_1 - w_2)t$$

La señal resultante consiste en la traslación de la señal DSB en dos nuevas frecuencias portadoras, debido a la suma y diferencia de las frecuencias de las señales involucradas en la multiplicación.

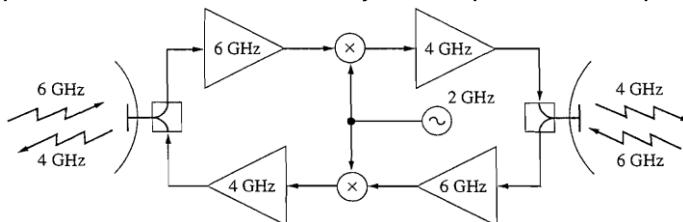
Con el filtraje adecuado, la señal puede ser desplazada hacia arriba o hacia abajo de la frecuencia inicial, estos procesos se conocen como up-converter o down-converter, respectivamente. El dispositivo encargado de realizar este proceso se conoce como convertidor de frecuencia o mezclador, el cual puede ser implementado tomando como base el siguiente diagrama de bloques:



receptores, además se utilizan en osciladores de frecuencia pulsante, divisores de frecuencia regenerativos y analizadores de espectro.

#### 5.4.2 Ejemplo: Transpondedor

Un transpondedor repetidor simple, que provee dos caminos de comunicación entre dos estaciones en tierra, puede representarse con el siguiente diagrama. Los enlaces de subida y bajada utilizados típicamente en la banda C, tiene frecuencia de portadora 6Ghz y 4Ghz, respectivamente, para evitar una retroalimentación positiva entre el transmisor y el receptor del transponder.



Un convertidor de frecuencia traslada el espectro de la señal amplificada del enlace de subida al amplificador pasabanda del enlace de bajada.

#### 5.4.3 Detección síncrona

Todos los tipos de modulación lineal pueden ser detectados con un demodulador producto, como el que se muestra en la figura. La señal de entrada es multiplicada con un generador local sinusoidal y posteriormente pasada a través de un filtro pasabajas, cuyo ancho de banda debe ser igual o ligeramente superior al ancho de banda de la señal mensaje. Para este detector se asume que el oscilador local (LO) se encuentra sincronizado con la portadora tanto en fase como en frecuencia, de aquí el nombre detección síncrona o coherente.

Para el análisis se expresa la señal de entrada como:  $x_c(t) = [K_c + K_\mu x(t)] \cos w_c t - K_\mu x_q(t) \sin w_c t$  que puede representar cualquier tipo de modulación lineal, con la correcta identificación de los parámetros fundamentales.

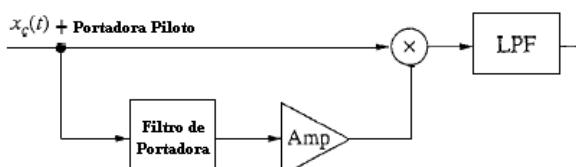
Al realizar el producto de la señal de entrada con la señal generada por el oscilador local se obtiene:

$$x_c(t) A_{LO} \cos w_c t = \frac{A_{LO}}{2} \{ [K_c + K_\mu x(t)] + [K_c + K_\mu x(t)] \cos 2w_c t - K_\mu x_q(t) \sin 2w_c t \}$$

Dado que  $f_c > W$  los términos de frecuencia doble son rechazados por el filtro pasabajas, entonces se obtiene una expresión fundamental:

$$y_D(t) = K_D [K_c + K_\mu x(t)]$$

Donde  $K_D$  corresponde a una constante de detección y la componente DC  $K_c$ .  $K_c$  es la componente de la portadora desplazada, siempre y cuando la portadora esté presente en la señal recibida. Esta componente puede ser removida mediante un capacitor o un transformador a la salida del detector.



El principal inconveniente de la detección síncrona es la sincronización, para esto se transmite una pequeña cantidad de la portadora, para poder ser recuperada y utilizada como Oscilador local en el receptor.

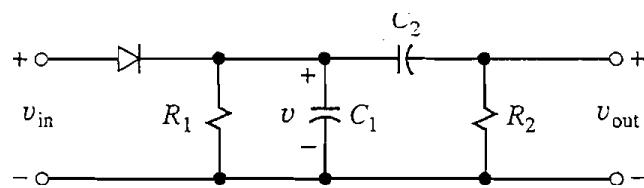
#### 5.4.4 Detección de envolvente

La implementación de los detectores coherentes, no suele utilizarse por la complejidad de su construcción, además como la modulación más empleada es AM estándar, la información viaja sobre la envolvente de la señal modulada, haciéndose necesaria solo la detección de esta, de este concepto surge el Detector de Envolvente.

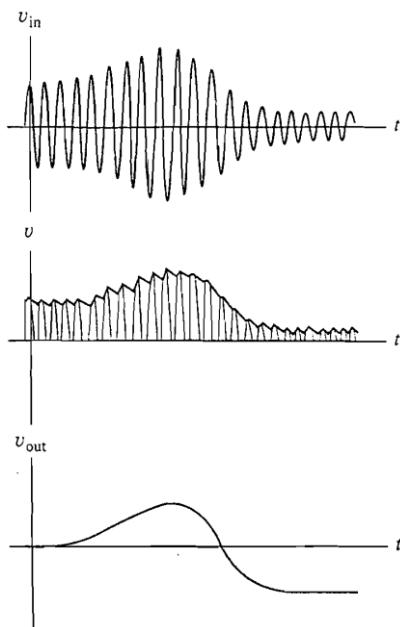
El esquema principal mostrado en la figura, permite que un

diodo tome la función como el elemento lineal principal. En

Ing. Víctor Fabián Miramá Pérez



ausencia de otros circuitos el voltaje  $v$  sería solo la versión rectificada de la señal de entrada, pero el circuito RC funciona como un filtro pasabajas, respondiendo solo a las variaciones pico de la señal de entrada bajo la condición:



$$W \ll \frac{1}{R_1 C_1} \ll f_c$$

Entonces se necesita que  $W \ll f_c$  para que la envolvente sea claramente definida. Bajo estas condiciones  $C_1$  se descarga ligeramente entre los picos de la señal de entrada y  $v$  se aproxima a la envolvente de  $v_{in}$ . Finalmente  $R_2 C_2$  actúan como un bloqueo de DC para eliminar la presencia de la portadora no modulada. Sin embargo este bloqueo puede causar una distorsión en las señales con componentes de baja frecuencia, por lo tanto el detector de envolvente es inadecuado para la detección de señales con componentes de baja frecuencia importantes.

En la figura se puede apreciar la rectificación a la señal de entrada y como el capacitor suaviza la señal, recuperando la envolvente, para finalmente eliminar la componente de la portadora y recuperar la señal de información transmitida.

### Ejercicios:

1. Con  $x(t) = \cos 2\pi f_m t u(t)$  con  $f_m \ll f_c$  grafique la señal modulada e indique cual es la envolvente cuando la modulación es: AM con  $\mu < 1$ , AM con  $\mu > 1$  y DSB.
2. La señal  $x(t) = \text{sinc}^2 40t$  es transmitido utilizando AM con  $\mu < 1$ , grafique el espectro de  $x_c(t)$  y encuentre  $B_T$ .

## 6 MODULACIÓN EXPONENCIAL

En la modulación lineal se hicieron evidentes dos propiedades: El espectro de la señal modulada, es básicamente el espectro de la señal mensaje trasladado alrededor de una frecuencia portadora, además, la segunda propiedad relaciona el valor máximo del ancho de banda, el cual no excede el doble del ancho de banda de la señal mensaje en banda base.

En contraste la modulación exponencial es un proceso no lineal, por consiguiente el espectro modulado no se encuentra fácilmente relacionado con el espectro de la señal modulante, asimismo, el ancho de banda de transmisión es más grande que el doble del ancho de banda de la señal mensaje. Esta variación del ancho de banda permite que la modulación exponencial, a diferencia de la modulación lineal, pueda mejorar en determinada circunstancia la relación señal a ruido del sistema.

### 6.1 Modulación de Fase y Frecuencia

En el estudio de la modulación exponencial, se definen dos tipos de modulación, la modulación de Fase (PM) y Modulación de Frecuencia (FM), modulaciones en las cuales como sus nombres lo indican, mantienen la amplitud de la portadora constante y varían su fase o su frecuencia.

#### 6.1.1 Señales FM y PM

Considere la señal continua con envolvente constante pero con fase variante en el tiempo, entonces se tiene que:  $x_c(t) = A_c \cos[w_c t + \phi(t)]$

Donde se puede definir el ángulo instantáneo total, como:  $\theta_c(t) = w_c t + \phi(t)$  y a partir de esta definición representar la señal como un fasor dado por:

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\theta_c(t)}]$$

En esta señal modulada la señal de información  $x(t)$  se encuentra contenida en  $\theta_c(t)$ , obteniendo una relación no lineal entre  $x_c(t)$  y  $x(t)$ , por este motivo se denominan modulaciones angulares o exponenciales.

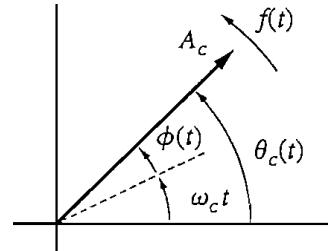
Para el caso de la modulación de Fase (PM), se tiene una fase instantánea igual a:  $\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$  con  $\phi_\Delta \leq 180^\circ$ , obteniendo la siguiente expresión para la señal modulada:

$$x_c(t) = A_c \cos[w_c t + \phi_\Delta x(t)] \quad \text{Señal PM}$$

Esta ecuación describe la variación instantánea de fase con relación a la señal mensaje, la constante  $\phi_\Delta$  representa el máximo desplazamiento de fase producido por  $x(t)$ , que mantiene la condición de normalización  $|x(t)| \leq 1$ . La restricción de  $\phi_\Delta \leq 180^\circ$ , que limita a  $\phi(t)$  al rango de  $\pm 180$ , es análogo a la restricción de  $\mu \leq 1$  de AM, por eso  $\phi_\Delta$  se define como el Coeficiente de Modulación de Fase o Desviación de Fase.

Para mejorar la interpretación de PM, se utiliza el diagrama fasorial, representado por un vector  $A_c$  que forma un ángulo  $\theta_c(t)$ , conformado por un componente rotacional  $w_c t$  y un desplazamiento angular relativo  $\phi(t)$ , en consecuencia, la tasa de rotación del fasor en ciclos por segundo está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t)$$



Notación en la cual el punto representa el componente derivativo en el tiempo, donde  $\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$ .

$f(t)$  se conoce como la frecuencia instantánea de  $x_c(t)$ , aunque esta se mide en hertzios, no debe confundirse con la frecuencia espectral  $f$ , que es la variable independiente del dominio de la frecuencia, porque  $f(t)$  es una propiedad variable en el tiempo de la forma de onda de una señal modulada exponencialmente.

Para el caso de la modulación en frecuencia (FM), la frecuencia instantánea de la señal modulada se define como:

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \quad f_\Delta < f_c$$

Donde  $f(t)$  varía en proporción con la señal moduladora, la constante de proporcionalidad se denomina desviación de frecuencia, la cual representa el máximo desplazamiento de  $f(t)$  relativo a  $f_c$ . El límite impuesto  $f_\Delta < f_c$ , garantiza que  $f(t) > 0$ , sin embargo siempre se desea que  $f_\Delta \ll f_c$  con el objetivo de conservar la naturaleza pasabanda de la señal  $x_c(t)$ . Las expresiones anteriores muestran que una onda FM tiene  $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$  y la integración produce la modulación de fase:

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda) d\lambda + \phi(t_0) \quad t \geq t_0$$

Tomando a  $t_0$  tal que  $\phi(t_0) = 0$ , se puede quitar el límite inferior y se tiene:  $\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int x(\lambda) d\lambda$

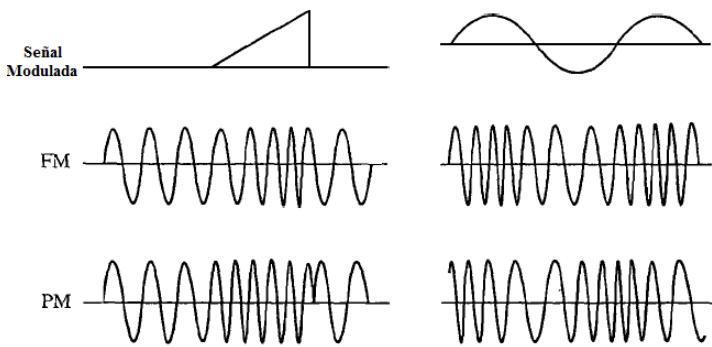
Entonces la expresión de la forma de onda de FM sería:  $x_c(t) = A_c \cos[w_c t + 2\pi f_\Delta \int x(\lambda) d\lambda]$

Al graficar la forma de onda la diferencia no es tan evidente, por este motivo es necesario exhibir las diferencias entre estos dos tipos de modulación:

Modulación	Fase Instantánea $\phi(t)$	Frecuencia Instantánea $f(t)$
------------	----------------------------	-------------------------------

<b>PM</b>	$\phi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_\Delta \dot{x}(t)$
<b>FM</b>	$2\pi f_\Delta \int x(\lambda) d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

Esta pequeña diferencia indica que con circuitos integradores o derivadores, puede pasarse de una modulación de fase a una modulación de frecuencia y viceversa. Además a comparación de la modulación lineal la amplitud de la señal modulada es constante, por lo tanto, la potencia promedio transmitida sin tener en cuenta la señal mensaje, sería:  $P_T = \frac{1}{2} A_c^2$



La figura muestra los resultados obtenidos al modular dos señales con estos tipos de modulación, se puede observar que FM presenta una variación de la frecuencia en proporción a la amplitud de la señal moduladora, por su parte la señal PM cambia la frecuencia, pero además un cambio brusco en la amplitud de las señales moduladoras, genera así mismo un cambio radical en la fase y frecuencia de la señal modulada, estos cambios no son tan evidentes al modular una señal sinusoidal.

## 6.2 Análisis Espectral

### 6.2.1 FM y PM de banda estrecha

El análisis espectral de la modulación exponencial se inicia con la definición de la portadora en cuadratura vista en la modulación lineal:  $x_c(t) = x_{ci}(t)\cos w_c t - x_{cq}(t)\sin w_c t$  donde  $x_{ci}(t) = A_c \cos \phi(t) = A_c [1 - \frac{1}{2!} \phi^2(t) + \dots]$  y  $x_{cq}(t) = A_c \sin \phi(t) = A_c [\phi(t) - \frac{1}{3!} \phi^3(t) + \dots]$ , ahora se impone la condición de simplificación  $|\phi(t)| \ll 1 \text{ rad}$ , entonces:

$$x_{ci}(t) \approx A_c \quad x_{cq}(t) \approx A_c \phi(t)$$

Expresiones que facilitan encontrar el espectro  $X_c(f)$  de la señal modulada en términos del espectro de un mensaje arbitrario  $X(f)$ . Entonces se obtiene:

$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c \delta(f - f_c) + \frac{j}{2} A_c \Phi(f - f_c) \quad f > 0$$

$$\text{Donde } \Phi(f) = \mathcal{F}[\phi(t)] = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & \text{PM} \\ -jf_\Delta X(f)/f & \text{FM} \end{cases}$$

Ecuaciones de las cuales se concluye que si  $x(t)$  tiene un ancho de banda de mensaje  $W \ll f_c$ , entonces  $x_c(t)$  será una señal pasabanda con ancho de banda  $2W$ . Pero esta conclusión solo es válida sobre la condición de  $|\phi(t)| \ll 1 \text{ rad}$ . Para valores grandes de  $|\phi(t)|$ , los términos  $\phi(t)^2, \phi(t)^3, \dots$  no pueden ser despreciados y pueden incrementar el ancho de banda de  $x_c(t)$ . Bajo estas condiciones se describe el caso especial de modulación de frecuencia o fase de banda estrecha (NBPM y NBFM).

### 6.2.2 Tono de Modulación

Como se vio para el caso de la modulación lineal, el análisis que proporciona la modulación mediante un tono, facilita la comprensión de los efectos de la modulación. De igual manera la utilización de un tono de modulación

permite la realización de un análisis paralelo de las modulaciones FM y PM, con el recurso de admitir una diferencia de  $90^\circ$  en el tono de modulación.

$$x(t) = \begin{cases} A_m \sin w_m t & PM \\ A_m \cos w_m t & FM \end{cases}$$

Por lo tanto de acuerdo a la forma de la señal modulada se tiene que  $\phi(t) = \beta \sin w_m t$  donde:

$\beta = \begin{cases} \phi_\Delta A_m & PM \\ (A_m / f_m) f_\Delta & FM \end{cases}$

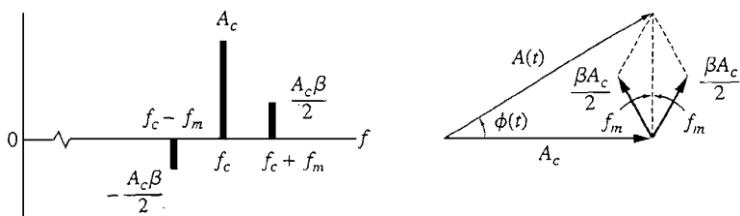
Este parámetro sirve como índice de modulación para PM y FM con un tono de modulación. Este parámetro es igual a la máxima desviación de fase o frecuencia, y es proporcional a la amplitud del tono de modulación. Cabe destacar que para FM,  $\beta$  es inversamente proporcional a la frecuencia del mensaje, de esta manera la integración del  $\cos w_m t$  da como resultado  $\sin w_m t / w_m$

La modulación de banda estrecha de un tono, requiere que  $\beta \ll 1$ , simplificando la expresión:

$$x_c(t) \approx A_c \cos w_c t - A_c \beta \sin w_m t \sin w_c t$$

$$x_c(t) \approx A_c \cos w_c t - \frac{A_c \beta}{2} \cos(w_c - w_m)t + \frac{A_c \beta}{2} \cos(w_c + w_m)t$$

De aquí se obtiene el espectro de línea y el diagrama fasorial para una modulación de banda estrecha:



Se puede observar que el fasor invertido de la banda lateral inferior genera una componente perpendicular o en cuadratura con relación al fasor de portadora. Esta componente en cuadratura es la necesaria para generar FM o PM, el cual era un caso indeseado para las modulaciones lineales.

Ahora para determinar el espectro de líneas para un valor arbitrario del índice de modulación, se hace una aproximación a banda estrecha y se tiene que:

$$x_c(t) = A_c [\cos \phi(t) \cos w_c t - \sin \phi(t) \sin w_c t]$$

$$x_c(t) = A_c [\cos(\beta \sin w_m t) \cos w_c t - \sin(\beta \sin w_m t) \sin w_c t]$$

Y aunque  $x_c(t)$  no es necesariamente periódica, los términos  $\cos(\beta \sin w_m t)$  y  $\sin(\beta \sin w_m t)$  si lo son y cada uno puede ser expandido en series de Fourier con  $f_0 = f_m$ . Obteniendo:

$$\cos(\beta \sin w_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n \text{ par}}^{\infty} 2J_n(\beta) \cos n w_m t$$

$$\sin(\beta \sin w_m t) = \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} 2J_n(\beta) \sin n w_m t \text{ donde } n \text{ toma valores positivos y } J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \lambda - n \lambda)} d\lambda$$

Los coeficientes  $J_n(\beta)$  corresponden a las funciones de Bessel de primera clase, de orden  $n$  y argumento  $\beta$ .

Substituyendo las expresiones anteriores en la expresión de la señal modulada, se obtiene:

$$x_c(t) = A_c J_0(\beta) \cos w_c t + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(w_c + n w_m) t - \cos(w_c - n w_m) t] + \sum_{n \text{ par}}^{\infty} A_c J_n(\beta) [\cos(w_c + n w_m) t + \cos(w_c - n w_m) t]$$

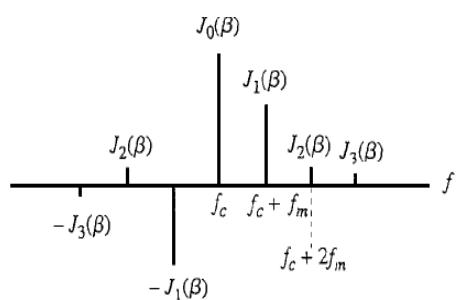
Alternativamente, se puede tomar la propiedad  $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$ , de las funciones de Bessel para generalizar este resultado:

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(w_c + n w_m) t$$

Esta expresión representa una onda con amplitud constante, cuya frecuencia instantánea varía sinusoidalmente (la interpretación fasorial puede ayudar a visualizar de mejor manera este concepto), observando  $x_c(t)$  se puede decir que:

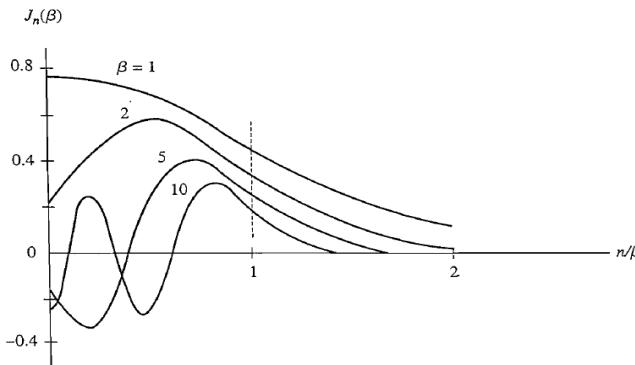
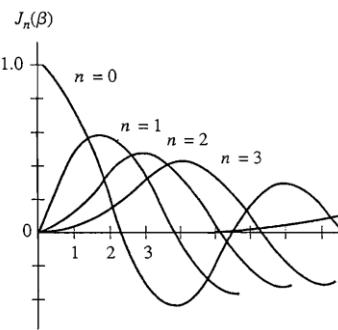
El espectro de FM consiste de una línea de la frecuencia portadora más un infinito número de líneas de banda lateral a frecuencias de  $f_c \pm n f_m$ , todas las líneas son equidistantes. Además las líneas impares de bajo orden

están invertidas en fase relativamente a la frecuencia de la señal portadora no modulada. El espectro resultante sería:



Se puede notar que la amplitud de las componentes se hace cada vez más pequeña, hasta ser casi irreconocibles cuando  $\beta f_m \ll f_c$ , de manera general se puede decir que la amplitud de una línea a una frecuencia  $f_c + nf_m$  está dada por  $J_n(\beta)$ , de tal manera que para obtener el espectro, es necesario estudiar el comportamiento de las funciones de Bessel.

En las siguientes gráficas se muestra los resultados obtenidos de la variación de los parámetros  $n$  y  $\beta$ , que definen las funciones de Bessel:



Funciones de Bessel:  $n$  fijo y  $\beta$  variable –  $n$  variable y  $\beta$  fijo.

De estas graficas emergen importantes propiedades, aplicadas a la modulación:

1. La amplitud relativa a la línea de la portadora  $J_0(\beta)$  varia con el índice de modulación, por lo tanto depende de la señal modulante. De aquí, en contraste con la modulación lineal, la componente en la frecuencia de la portadora de una señal FM contiene parte de la información del mensaje. Sin embargo esta componente puede ser nula ( $J_0(\beta)=0$ ) cuando  $\beta = 2.4, 5.5$ , como lo muestra la primer gráfica.
2. El número de líneas de bandas laterales que tienen amplitud relativamente apreciable, depende de  $\beta$ . Con  $\beta \ll 1$  solo  $J_0$  y  $J_1$  son significativas, entonces el espectro estará conformado por la portadora y dos bandas laterales, pero si  $\beta > 1$ , el espectro tendrá varias bandas laterales.
3. Un  $\beta$  grande, implica un gran ancho de banda, necesario para acomodar la extensa estructura del espectro, coincidiendo con la interpretación física de una gran desviación de frecuencia.

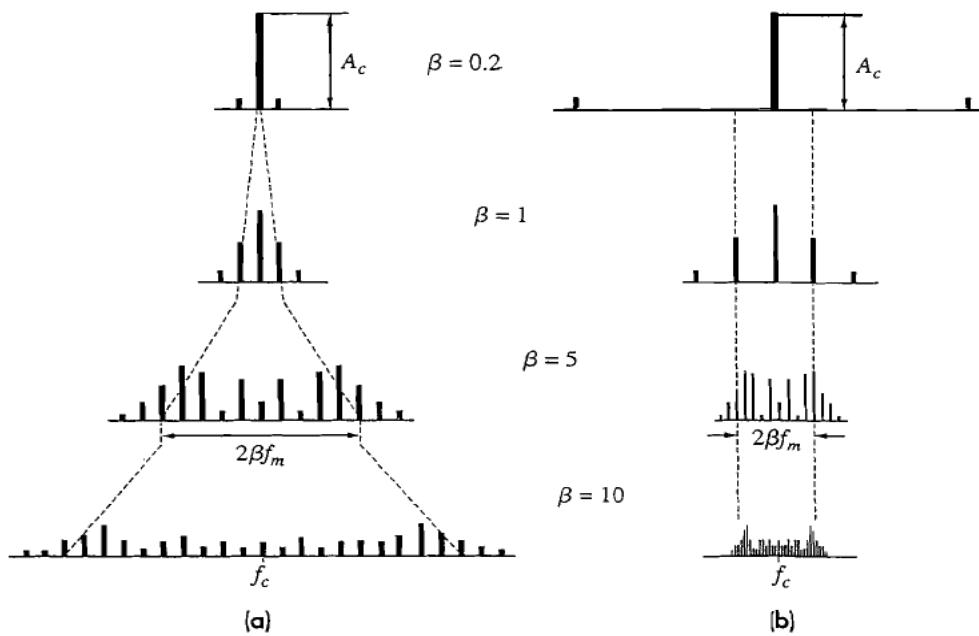
La siguiente tabla muestra algunos valores de  $J_n(\beta)$ , cuyo valor esta redondeado a dos cifras decimales, los espacios en blanco corresponden a valores inferiores a 0.01.

<i>n</i>	$J_n(0.1)$	$J_n(0.2)$	$J_n(0.5)$	$J_n(1.0)$	$J_n(2.0)$	$J_n(5.0)$	$J_n(10)$	<i>n</i>
0	1.00	0.99	0.94	0.77	0.22	-0.18	-0.25	0
1	0.05	0.10	0.24	0.44	0.58	-0.33	0.04	1
2			0.03	0.11	0.35	0.05	0.25	2
3				0.02	0.13	0.36	0.06	3
4					0.03	0.39	-0.22	4
5						0.26	-0.23	5
6						0.13	-0.01	6
7						0.05	0.22	7
8						0.02	0.32	8
9							0.29	9
10							0.21	10
11							0.12	11
12							0.06	12
13							0.03	13
14							0.01	14

A continuación se muestra el espectro obtenido a partir de la tabla de las funciones de Bessel, omitiendo la inversión de fase. La parte a corresponde a un valor de  $\beta$  incrementando mientras se mantiene fijo  $f_m$  y se aplica tanto para FM como para PM. La parte b, se aplica solo a FM e ilustra el efecto del incremento de  $\beta$  por el decremento de  $f_m$ , manteniendo  $A_m f_\Delta$  fijo. Las líneas punteadas permiten observar la concentración de líneas de banda lateral significativas en el rango  $f_c \pm \beta f_m$  a medida que  $\beta$  se hace grande.

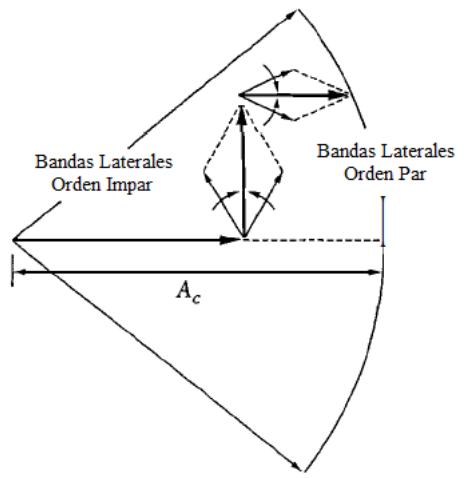
Para la representación fasorial de  $x_c(t)$  es necesario regresar a la aproximación de banda estrecha. La envolvente y la fase, construidas a partir de la portadora y el primer par de líneas de bandas laterales son:

$$A(t) \approx \sqrt{A_c^2 + (2\frac{\beta}{2} A_c \operatorname{sen} w_m t)^2} \approx A_c [1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} \cos 2w_m t] \quad \phi(t) \approx \arctan \left[ \frac{2\frac{\beta}{2} A_c \operatorname{sen} w_m t}{A_c} \right] \approx \beta \operatorname{sen} w_m t$$



Se puede observar que la variación de fase es aproximada a la deseada, pero hay una variación adicional de amplitud al doble de la frecuencia del tono de modulación. Esto se corrige introduciendo las líneas espectrales de segundo orden, que rotan a  $\pm 2f_m$  en relación a la portadora, pero se introduce una distorsión de fase. Esta a su vez se soluciona introduciendo las líneas espectrales de tercer orden, pero nuevamente se generaría una distorsión de amplitud y se seguiría un ciclo infinito. La figura representa un diagrama fasorial de FM para un  $\beta$  arbitrario.

Cuando todas las líneas del espectro son incluidas, las parejas de orden impar, tienen una resultante en cuadratura con la portadora lo cual provee la modulación de frecuencia deseada mas la modulación de amplitud no deseada, la resultante de las parejas de orden par será colineal con la portadora, corrigiendo las variaciones de amplitud. La punta se extiende por un arco circular que refleja una amplitud constante  $A_c$ .



### 6.2.3 Ejemplo

Considerando la transmisión de la señal de FM de banda estrecha  $x_c(t) = 100 \cos[2\pi 5000t + 0.05 \sin 2\pi 200t]$ , para encontrar la frecuencia instantánea  $f(t)$  se toma la derivada de  $\theta(t)$ .

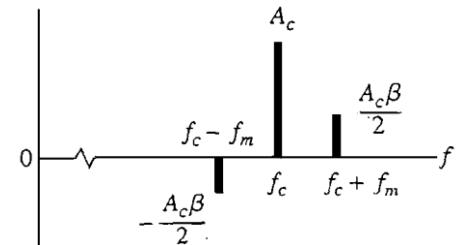
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \dot{\theta}(t) = \frac{1}{2\pi} [2\pi 5000 + 0.05(2\pi 200) \cos 2\pi 200t] \\ &= 5000 + 10 \cos 2\pi 200t \end{aligned}$$

Desde  $f(t)$  se puede determinar  $f_c = 5000 \text{ Hz}$ ,  $f_\Delta = 10$  y  $x(t) = \cos 2\pi 200t$ , a partir de esto existen dos maneras de encontrar  $\beta$ , por NBFM con tono de modulación se conoce que  $\phi(t) = \beta \sin w_m t$ . Así  $x_c(t) = A_c \cos[w_c t + \phi(t)]$  de donde se obtiene  $\beta = 0.05$ . Alternativamente puede calcularse mediante:

$$\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta \quad \text{De } f(t) \text{ se obtiene que } A_m f_\Delta = 10 \text{ y } f_m = 200, \text{ entonces:}$$

$$\beta = 10/200 = 0.05$$

Luego el correspondiente espectro será como el que muestra la figura, tomando  $A_c = 100$  y  $A_c \beta / 2 = 2.5$ :



## 6.3 Ancho de Banda

Como se pudo ver, el espectro de una señal modulada exponencialmente tiene una gran extensión, entonces la generación o la transmisión de FM puro, requiere un ancho de banda infinito, independientemente de si la señal mensaje es o no, limitada en banda. Sin embargo, en la práctica existen sistemas FM con ancho de banda finito que funcionan muy bien, esto se debe a que las componentes que se encuentran alejadas de la señal portadora no tienen niveles significativos y pueden despreciarse. La distorsión generada por la eliminación de las componentes lejanas se compensa debido al nivel de las líneas espectrales esenciales.

### 6.3.1 Estimación del Ancho de banda

La determinación del ancho de banda de FM proviene de la cantidad de componentes significativos del espectro de la señal modulada, sin embargo este parámetro no es el único, también se debe tener en cuenta la tolerancia o la cantidad de distorsión que puede soportar una determinada aplicación. De manera general se puede analizar los requerimientos de ancho de banda de FM utilizando las componentes significativas para un tono de modulación, debido a que este análisis proporciona una aproximación bastante útil.

Las gráficas del comportamiento de las funciones de Bessel indican que  $J_n(\beta)$  cae rápidamente para  $|n/\beta| > 1$  y particularmente si  $\beta \gg 1$ . Asumiendo que el índice de modulación  $\beta$  es grande, se puede decir que  $|J_n(\beta)|$  es significativa solo para  $|n| \leq \beta = A_m f_\Delta / f_m$ . Por lo tanto todas las componentes espectrales significativas están concentradas en el rango de frecuencias  $f_c \pm \beta f_m = f_c \pm A_m f_\Delta$ . Por otro lado si el índice de modulación es pequeño entonces todas las componentes laterales tendrán un valor pequeño en comparación con la portadora, entonces  $J_0(\beta) \gg J_{n \neq 0}(\beta)$  cuando  $\beta \ll 1$ , pero se debe conservar el par de bandas laterales de primer orden, porque de lo contrario no existiría modulación de frecuencia. De este modo, con un índice de modulación menor a la unidad las líneas laterales significativas estarán contenidas en el rango  $f_c \pm f_m$ .

Sintetizando cuantitativamente, todas las componentes que tengan una amplitud relativa  $|J_n(\beta)| > \varepsilon$  se consideran significativas, donde  $\varepsilon$  es un valor entre 0,01 y 0,1 de acuerdo a una aplicación específica. Entonces si  $|J_M(\beta)| > \varepsilon$  y  $|J_{M+1}(\beta)| < \varepsilon$ , existen  $M$  pares de componentes significativas y  $2M+1$  componentes importantes que llevan la señal de información. Ahora el ancho de banda puede escribirse como:

$$B = 2M(\beta)f_m \quad M(\beta) \geq 1$$

Siempre que las líneas estén espaciadas  $f_m$  y  $M$  depende del índice de modulación  $\beta$ .

Se debe aclarar que  $B$  no es el ancho de banda total de transmisión  $B_T$ , es el ancho de banda mínimo necesario para la modulación generada por un tono de amplitud y frecuencia específica. Para estimar el ancho de banda de transmisión se debe calcular el máximo ancho de banda requerido cuando los parámetros de un tono son limitados  $A_m \leq 1$  y  $f_m \leq W$ , para estos propósitos se requiere que:  $M(\beta) \approx \beta + 2$

Remplazando este parámetro en la ecuación de  $B$ , se tiene que:

$$B = 2(\beta + 2)f_m = 2\left(\frac{f_\Delta}{f_m} + 2\right)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m)$$

Para obtener el valor máximo de esta expresión se debe tomar  $A_m = 1$  y  $f_m = W$ , entonces en el peor de los casos el ancho de banda requerido será:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) \quad \text{si } \beta > 2$$

Note que el correspondiente índice de modulación es  $\beta = f_\Delta / W$ , pero este no es su valor máximo, es el que combina la máxima amplitud y la máxima frecuencia, produciendo el máximo ancho de banda requerido, cualquier otro tono con  $A_m \leq 1$  y  $f_m \leq W$  tendrán menor ancho de banda aunque el valor del índice de modulación sea más grande.

Extrapolando los resultados obtenidos para un tono de modulación hacia una señal modulante arbitraria se define la relación de desviación como:

$$D = \frac{f_\Delta}{W}$$

Que corresponde a la máxima desviación dividida entre la máxima frecuencia de la señal modulante, luego, el ancho de banda requerido para una señal  $x(t)$  estará dado por:

$$B_T = 2M(D)W$$

Con el valor extremo de la relación de desviación se puede encontrar  $B_T = \begin{cases} 2DW = 2f_\Delta & D \gg 1 \\ 2W & D \ll 1 \end{cases}$

Combinando convenientemente estas relaciones se obtiene:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + W) = 2(D + 1)W \quad \begin{array}{l} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{array} \quad \text{Conocida como la regla de Carson}$$

Sin embargo, la mayoría de los sistemas FM actuales tienen  $2 < D < 10$ , para los cuales la regla de Carson subestima el ancho de banda de transmisión, por ende una mejor aproximación para el diseño de equipos sería:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) = 2(D + 2)W \quad D > 2$$

Expresión que se utiliza, por ejemplo, para determinar el ancho de banda de 3dB de amplificadores de FM.

Físicamente, la relación de desviación representa la máxima desviación de fase de una señal FM en el peor de los casos. Esta expresión para el ancho de banda puede ser aplicada a la modulación de Fase remplazando D por la máxima desviación de fase  $\phi_\Delta$  de una señal PM. De acuerdo a esto, el ancho de banda de transmisión de una señal PM generada con una señal arbitraria  $x(t)$  será:

$$B_T = 2M(\phi_\Delta)W \quad M(\phi_\Delta) \geq 1 \quad o \quad B_T = 2(\phi_\Delta + 1)W$$

Que corresponde a la aproximación equivalente de la regla de Carson, con la diferencia que la desviación de fase  $\phi_\Delta$ , es independiente de  $W$ .

### 6.3.2 Ejemplo: Ancho de Banda de FM Comercial

Una estación radial de FM en estados unidos está limitada a una desviación de frecuencia de 75KHz y frecuencias modulantes de 30Hz a 15kHz. Dada  $W=15\text{kHz}$ , la relación de desviación es  $D=75\text{kHz}/15\text{kHz}=5$

$$B_T \approx 2(5 + 2)15\text{kHz} = 210\text{kHz}$$

Radios FM de alta calidad tienen anchos de banda menores a 200kHz, con la regla básica de Carson, el ancho de banda es subestimado a 180kHz.

Un tono modulante de amplitud 1 y frecuencia 15kHz, genera un  $\beta = 5$ ,  $M(\beta) \approx 7$  y  $B = 210\text{kHz}$

Una señal de frecuencia 3kHz genera un índice de modulación de 25, que determina un número significativo de componentes (27), pero un ancho de banda pequeño  $B = 2x27x3\text{kHz} = 162\text{kHz}$

### 6.3.3 Banda comercial de FM

La FCC asignó una banda de frecuencias de 20MHz al servicio de FM, comprende el rango entre 88 a 108MHz, Esta banda se divide en canales de 100 y 200kHz de ancho, los cuales comienzan en 88.1MHz, sigue 88.3MHz, 88.5MHz y así sucesivamente. Para obtener un sonido de alta calidad y confiable, la máxima desviación de frecuencia permitida es 75kHz con una frecuencia máxima de señal moduladora de 15kHz.

Con estos límites impuestos, el índice de modulación que proporciona el mayor ancho de banda es 5, obteniéndose, según las funciones de Bessel, 8 pares de componentes espectrales significativas, y el ancho de banda sería  $B = 2(8x15\text{kHz}) = 240\text{kHz}$  que está 40Hz por encima del estipulado por la FCC, lo cual implica que se tolera un cierto grado de interferencia de canal adyacente, lo cual no es un problema porque la banda de FM no se encuentra ocupada completamente, por lo general existe una banda de protección de 200kHz a cada lado del canal asignado.

## 6.4 Potencia Transmitida

Como se mencionó previamente, la potencia de la señal transmitida puede deberse específicamente a la amplitud de la señal portadora, sin embargo espectralmente la potencia transmitida se divide entre las componentes significativas del espectro.

Cuando no existe modulación entonces el índice de modulación se hace cero y la componente significativa es  $J_0 = 1.0$  entonces la potencia será:  $P_c = J_0^2 P_{Trans}$

Partiendo de este concepto, para determinar la potencia de cada componente espectral está dada por  $P_n = J_n^2(\beta)P_{Trans}$  entonces la potencia total transmitida será la sumatoria de la potencia de las componentes significativas:

$$P_{Total} = (J_0^2(\beta) + 2J_1^2(\beta) + 2J_2^2(\beta) + 2J_3^2(\beta) + \dots)P_{Trans}$$

### 6.4.1 Ejemplo:

Un transmisor FM tiene una potencia de salida de 10W, con un índice de modulación de 1.0, determine la potencia de sus componentes espectrales y la potencia total de la señal FM.

$$J_0 = 0.77, \quad J_1 = 0.44 \quad J_2 = 0.11 \quad J_3 = 0.02$$

Entonces la potencia de cada componente será:  $P_0 = (0.77)^2 \times 10 = 5.929 W$  análogamente  $P_1 = 1.936 W$   $P_2 = 0.121 W$  y  $P_3 = 0.004 W$ .

La potencia total de la señal FM será:  $P_{total} = 5.295 W + 2(1.936)W + 2(0.121)W + 2(0.004)W = 10.051 W$  con un error de 51mW

## 6.5 Transmisores y Receptores

### 6.5.1 Generación Directa de FM

Conceptualmente, la generación de FM solo necesita de un oscilador controlado por voltaje, cuya frecuencia de oscilación tiene una dependencia lineal al voltaje aplicado. Es posible modular un circuito oscilador sintonizado convencional introduciendo un elemento de reactancia variable como parte de un circuito resonante LC.

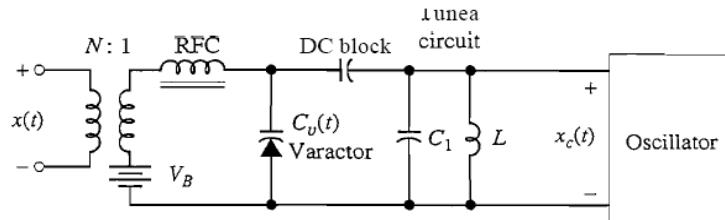
Si la capacitancia equivalente tiene una dependencia con el tiempo, de la forma:  $C(t) = C_0 - Cx(t)$  y si  $Cx(t)$  es lo suficientemente pequeña y lenta, entonces el oscilador produce una señal:

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) \quad \text{Donde} \quad \dot{\theta}_c(t) = \frac{1}{\sqrt{RC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{RC_0}} \left[ 1 - \frac{C}{C_0} x(t) \right]^{-1/2}$$

Tomando  $w_c = 1/\sqrt{RC_0}$  y asumiendo  $|C/C_0)x(t)| \ll 1$ , la expansión en serie binomial será:

$$\dot{\theta}_c(t) \approx w_c [1 + (C/2C_0)x(t)] \quad \text{o} \quad \theta_c(t) \approx 2\pi f_c t + 2\pi(C/2C_0)f_c \int x(\lambda)d\lambda$$

Expresión que da como resultado una modulación en frecuencia con  $f_\Delta = (C/2C_0)f_c$ , siempre que  $|x(t)| \leq 1$



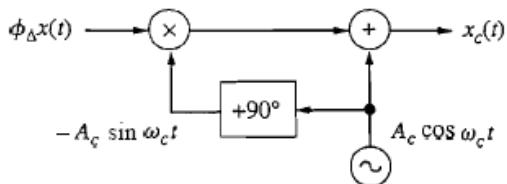
En la figura se muestra un circuito oscilador sintonizado, el cual utiliza un diodo varactor para conseguir  $Cx(t)$ , la entrada al transformador, RF Choke (RFC) y el bloqueo DC, sirven como aislador de las frecuencias bajas, las altas y los voltajes DC. La principal desventaja con este tipo de circuitos es que la frecuencia portadora tiende a desplazarse y para su estabilización es necesario realizar un control por retroalimentación de frecuencia, por este motivo la mayoría de moduladores utilizan el método de generación indirecta.

### 6.5.2 Generación indirecta de PM y FM

En pocas ocasiones se utiliza la modulación de fase para transmitir señales, sin embargo es importante verla por tres razones.

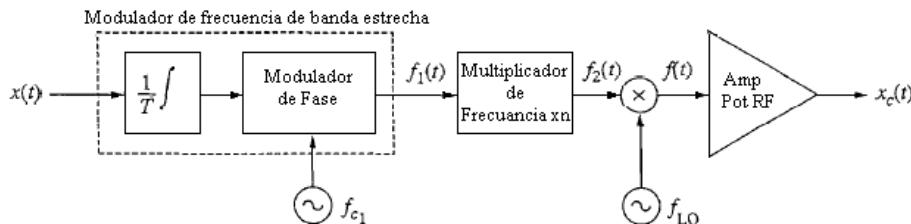
- Su implementación es relativamente fácil
- La portadora puede ser remplazada por una fuente de frecuencia estable, así como un oscilador controlado por cristal.
- Integrando la señal de entrada al modulador de fase, se genera una salida modulada en frecuencia.

La siguiente figura muestra el diagrama esquemático de un modulador de fase de banda estrecha, obtenido de la aproximación:  $x_c(t) \approx A_c \cos \omega_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \sin \omega_c t$



Esta aproximación y su facilidad, dependen de la condición de  $|\phi_\Delta x(t)| << 1$  radianes y que la desviación de fase no debe ser mayor a  $10^\circ$ , de lo contrario se genera una distorsión de la señal modulada.

La generación de FM, requiere desviaciones mayores, entonces se utiliza el siguiente modulador de frecuencia de banda estrecha:



El integrador y el modulador de fase constituyen el modulador FM de banda estrecha, que generan una señal NBFM con frecuencia instantánea:

$$f_1(t) = f_{c_1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi T} x(t)$$

Donde  $T$  es la constante de proporcionalidad del integrador. La desviación de frecuencia inicial es  $\phi_\Delta / 2\pi T$ , y debe incrementarse hasta el valor  $f_\Delta$  deseado, utilizando un multiplicador de frecuencia, el cual multiplica por  $n$  la frecuencia instantánea, entonces:

$$f_2(t) = n f_1(t) = n f_{c_1} + f_\Delta x(t) \text{ Donde } f_\Delta = n \left( \frac{\phi_\Delta}{2\pi T} \right)$$

El proceso de multiplicación afecta el rango de variación de frecuencia pero no la tasa, la multiplicación de un tono de modulación, incrementa la frecuencia de la portadora y el índice de modulación, pero no la frecuencia de modulación. En otras palabras la amplitud de las componentes espectrales se ve alterada, mientras la separación entre estas se mantiene constante.

Por lo general, el proceso de multiplicación genera una frecuencia de portadora muy superior a la deseada, debido a esto, se incluye un convertidor de frecuencia que traslada el espectro intacto, a la frecuencia  $f_c = |f_{c_1}| + |f_{LO}|$ , generando una frecuencia instantánea final:

$$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

Finalmente se utiliza un amplificador de potencia, debido a que los procesos generan niveles bajos.

### 6.5.3 Detección de Frecuencia

Un detector de frecuencia o discriminador, produce una salida de voltaje que puede variar linealmente con la frecuencia instantánea de entrada, existen diversos circuitos diseñados como detectores de frecuencia, sin embargo cada circuito puede clasificarse dentro una de estas cuatro categorías operacionales:

- Conversión AM – FM
- Discriminación de desplazamiento de fase
- Detección de cruce por cero
- Realimentación de frecuencia

No se analizará los detectores de fase, debido a que rara vez es necesario detectar la modulación de fase y de serlo necesario, basta con integrar la salida del detector de frecuencia.

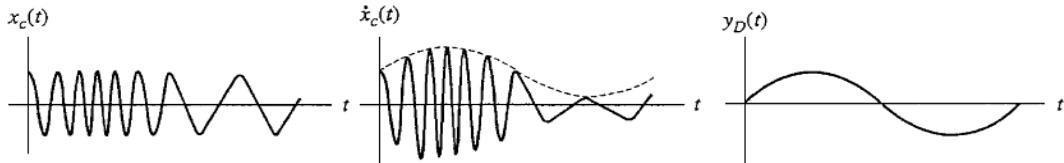
Partiendo del hecho de que cualquier dispositivo o circuito, cuya salida es la derivada en el tiempo de la señal de entrada, produce conversión FM a AM, específicamente dada:  $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$  con  $\dot{\theta}_c(t) = 2\pi(f_c + f_\Delta x(t))$ , entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= -A_c \dot{\theta}_c(t) \operatorname{sen} \theta_c(t) \\ \dot{x}_c(t) &= 2\pi A_c [f_c + f_\Delta x(t)] \operatorname{sen} [\theta_c(t) \pm 180^\circ]\end{aligned}$$

De esta manera, un detector de envolvente, cuya entrada sea  $\dot{x}_c(t)$  entrega una salida proporcional a  $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ , a continuación se presenta el diagrama extraído de la expresión obtenida previamente:



El circuito tiene en la entrada un limitador para remover alguna variación de amplitud indeseada en la señal de entrada, antes de que llegue al detector de envolvente. Finalmente se agrega un bloqueo de DC para eliminar la componente relacionada a la portadora. Para un tono de modulación, las correspondientes señales son:



#### Discriminador de Desplazamiento de Fase

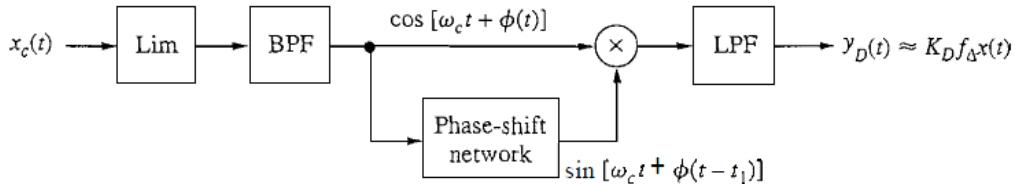
Este tipo de detectores involucra circuitos con respuesta lineal de fase, su principio básico proviene de la aproximación de la derivación:  $\dot{v}(t) \approx \frac{1}{t_1} [v(t) - v(t - t_1)]$

Asumiendo que  $t_1$  es pequeño comparado con la variación de  $v(t)$  y conociendo que para una señal FM se tiene que  $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ , entonces:

$$\phi(t) - \phi(t - t_1) \approx t_1 \dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t)$$

El término  $\phi(t - t_1)$  puede obtenerse con la ayuda de una línea de retardo o lo que es equivalente una red lineal de desplazamiento de fase.

En la siguiente figura se muestra el diagrama en bloques de un discriminador de desplazamiento de fase, construido con un circuito con retardo de grupo  $t_1$  y retardo de portadora  $t_0$  tal que  $w_c t_0 = 90^\circ$ , conocido como detector en cuadratura.



El desplazamiento de fase es proporcional a  $\cos[w_c t + 90^\circ + \phi(t - t_1)] = \operatorname{sen}[w_c t + \phi(t - t_1)]$ , la multiplicación con  $\cos[w_c t + \phi(t)]$  seguida del filtro pasa bajas, entrega una salida proporcional a:

$$\operatorname{sen}[\phi(t) + \phi(t - t_1)] \approx \phi(t) + \phi(t - t_1)$$

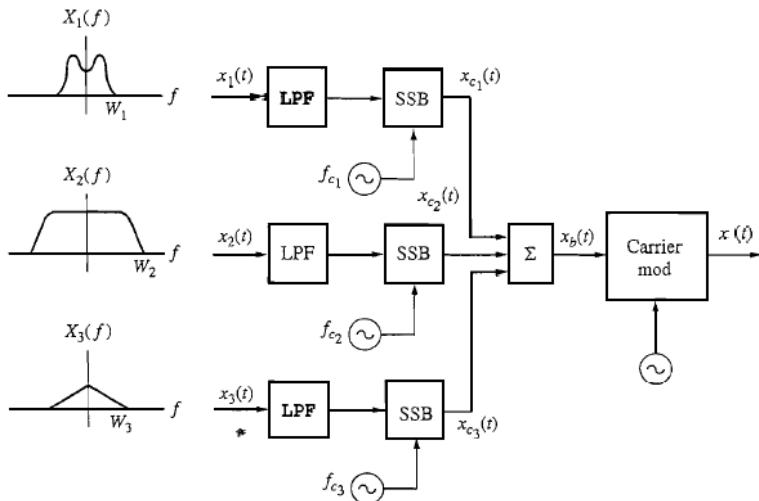
Asumiendo que  $t_1$  es lo suficientemente pequeño tal que  $|\phi(t) + \phi(t - t_1)| \ll \pi$ .

Finalmente:  $y_D(t) \approx K_D f_\Delta x(t)$

Donde la constante de detección  $K_D$  incluye a  $t_1$ . A pesar de esta aproximación un detector en cuadratura provee una muy buena linealidad y es considerado un detector de alta calidad, superior al conversor AM-FM.

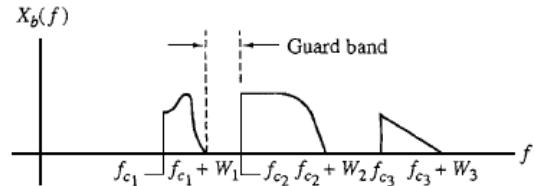
## 6.6 Multiplexación por división de frecuencia

El principio de la multiplexación se hace evidente en la siguiente figura:



En este sistema varias señales de entrada se pasan por un filtro pasabajas con el objetivo de limitarlas en banda y posteriormente modularlas individualmente con portadoras diferentes, particularmente se tiene SSB, pero cualquier tipo de modulación de onda continua puede ser empleada, incluso una combinación de estas.

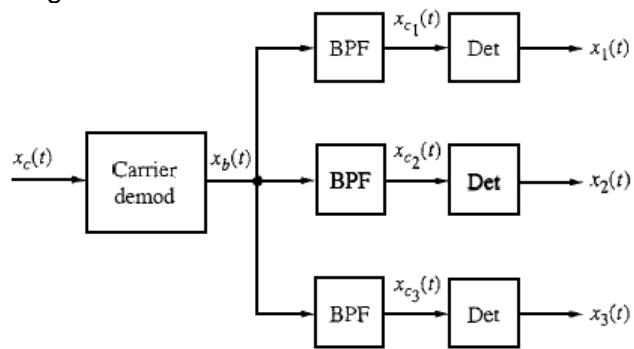
Entonces las señales son sumadas generando una señal en banda base  $x_b(t)$ , cuyo espectro se muestra a continuación:



La selección adecuada de las portadoras permite que a cada una de las señales transmitidas se le asigne un espacio en el dominio de la frecuencia, por este motivo a este proceso se le conoce como multiplexación por división de frecuencia o simplemente FDM.

La señal  $X_b(f)$  puede ser transmitida directamente al medio o utilizar una portadora de modulación.

Para la detección de la señal FDM y la recuperación de las señales se sigue los pasos indicados en el diagrama:



El demodulador recupera la señal en banda base  $x_b(t)$  y las señales individuales son separadas mediante un banco de filtros pasabanda sintonizados a las frecuencias de cada una de las señales.

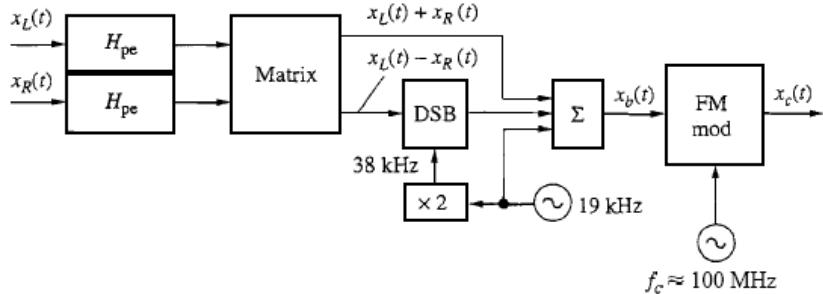
El principal problema de la multiplexación suele ser la multiplexación cruzada que puede causar un acople indeseado entre mensajes, para superar este inconveniente se utiliza una banda de resguardo que separa una señal modulada de la otra.

### 6.6.1 FM estereofónica

La transmisión radial de FM en un principio se hacía de manera monofónica, es decir que solo se disponía de un canal de 50Hz a 15kHz para señales de información de voz y audio, estas señales modulaban la portadora de tal manera que el conjunto de bocinas en recepción reproducen exactamente la misma información. El objetivo de la transmisión estereofónica es separar las frecuencias de información de tal manera que la señal puede dividirse especialmente en dos canales de audio de 50Hz a 15kHz: uno izquierdo y uno derecho,

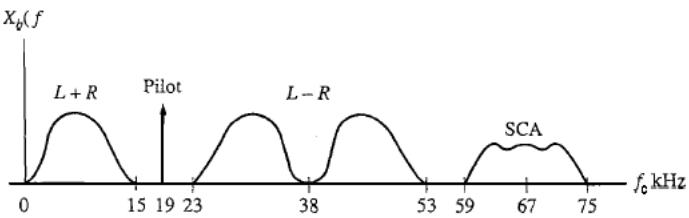
entonces la música que se generó en el lado izquierdo se reproduce en el lado izquierdo y la que se produjo en el lado derecho se reproduce en el lado derecho.

El siguiente diagrama representa la generación de una señal de banda base para transmisión de FM estereofónica, las señales de izquierda y derecha del audio son pre-enfatizados y mezclados en una red matricial que produce los canales de audio  $x_L(t) + x_R(t)$  y  $x_L(t) - x_R(t)$ , la señal suma puede ser recuperada con un receptor monofónico, el entrelazado es necesario para que el oyente monofónico no este expuesto a los saltos de audio generados en la transmisión estereofónica, entonces esta señal es introducida a la señal banda base.



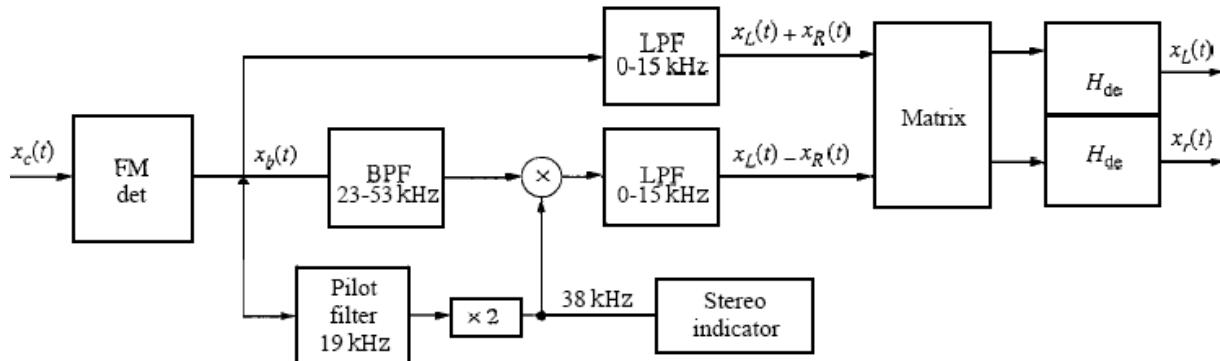
La señal  $x_L(t) - x_R(t)$  modula a una portadora de 35kHz, se emplea modulación DSB para preservar la fidelidad en las bajas frecuencias y un tono piloto de 19kHz es agregado para la sincronización del receptor.

Entonces el espectro resultante es:



En este espectro hay una componente extra etiquetada como SCA, que corresponde a una autorización para comunicación subsidiaria que es una modulación por subportadora utilizada para transmitir audio ininterrumpidamente a suscriptores privados.

Para la detección o demultiplexación de FM estereofónico se utiliza un receptor con las siguientes características:



Se puede notar como el tono piloto se utiliza para recuperar la portadora, la señal sumatoria se pasa directamente al mesclador para ser llevada a un receptor monofónico y además utilizada para generar el audio estereofónico.

## 7 RUIDO DE MODULACIÓN

### 7.1 Interferencia

De manera formal, la interferencia hace referencia a la contaminación de una señal que lleva información con una señal similar, usualmente generada por el hombre. En radiocomunicaciones esto ocurre cuando la antena receptora detecta o recoge dos o más señales en la misma banda de frecuencia. Estas señales pueden tener diferentes procedencias, y cuando alcanzan niveles elevados, pueden impedir la recuperación del mensaje.

#### 7.1.1 Interferencia de sinusoides

Considere un receptor sintonizado a una frecuencia  $f_c$ , la señal total recibida será:

$$v(t) = A_c \cos w_c t + A_i \cos[(w_c + w_i)t + \phi_i]$$

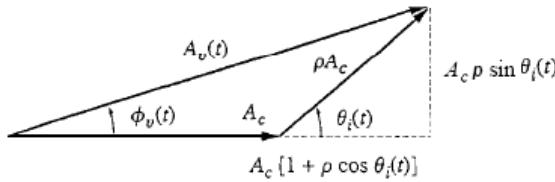
El primer término corresponde a la señal deseada como una portadora no modulada, mientras que el segundo término es una portadora interferente con amplitud  $A_i$ , frecuencia  $f_c + f_i$  y ángulo relativo de fase  $\phi_i$ .

Representando este resultado en la forma de envolvente y fase se tiene que:  $v(t) = A_v(t) \cos[w_c t + \phi_v(t)]$

Definido  $\rho = A_i / A_c$  y  $\theta_i(t) = w_i t + \phi_i$ , Con estas expresiones se genera el diagrama correspondiente, del cual se obtiene:

$$A_v(t) = A_c \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta_i(t)}$$

$$\phi_v(t) = \arctan \frac{\rho \sin \theta_i(t)}{1 + \rho \cos \theta_i(t)}$$



Se puede notar que la interferencia genera modulación de amplitud y modulación de fase. En efecto si  $\rho \ll 1$  se tiene:

$$A_v(t) \approx A_c [1 + \rho \cos(w_i t + \phi_i)]$$

$$\phi_v(t) \approx \rho \sin(w_i t + \phi_i)$$

El cual se muestra como un tono modulado a la frecuencia  $f_i$  con índice de modulación AM con  $\mu = \rho$  y modulación FM o PM con  $\beta = \rho$ .

Por otro lado con  $\rho \gg 1$  se tiene:  $A_v(t) \approx A_i [1 + \rho^{-1} \cos(w_i t + \phi_i)]$  y  $\phi_v(t) \approx w_i t + \phi_i$

De tal manera que la portadora todavía tiene la modulación del tono, pero la fase corresponde a una frecuencia de portadora desplazada  $f_c + f_i$ , más una constante  $\phi_i$ .

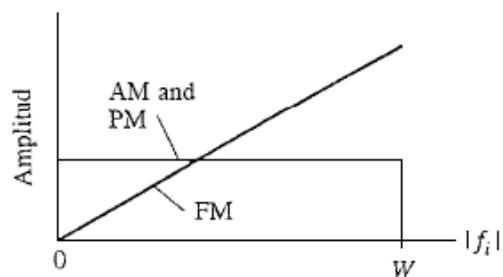
Ahora cuando se introduce la señal a un demodulador ideal de AM, PM o FM, para el primer caso  $\rho \ll 1$  y approximando  $\phi_i = 0$ , la salida del demodulador será:

$$y_D(t) \approx \begin{cases} K_D (1 + \rho \cos w_i t) & AM \\ K_D \rho \sin w_i t & PM \\ K_D \rho f_i \cos w_i t & FM \end{cases}$$

Bajo la condición de  $|f_i| \leq W$ , en otro caso el filtro pasa bajas de la salida del demodulador rechazaría las  $|f_i| > W$ . El término constante para AM puede removese con un bloqueo de DC. Para el caso de FM,  $f_i$  proviene de la desviación instantánea de frecuencia  $\dot{\phi}_v(t) / 2\pi$ .

Estos resultados indican que una pequeña interferencia en sistemas de modulación lineal o de modulación de fase genera un tono de salida espurio, con amplitud proporcional a  $\rho = A_i / A_c$  independiente de  $f_i$ .

Pero en un sistema FM la amplitud del tono es proporcional a  $\rho f_i$ . Consecuentemente, FM será menos vulnerable a la interferencia co-canal, en la cual las frecuencias de portadora son las mismas, entonces  $f_i \approx 0$  y más vulnerable a la interferencia de canal adyacente debido a que  $f_i \neq 0$ . La siguiente figura muestra la amplitud de la interferencia demodulada con relación a  $|f_i|$ .



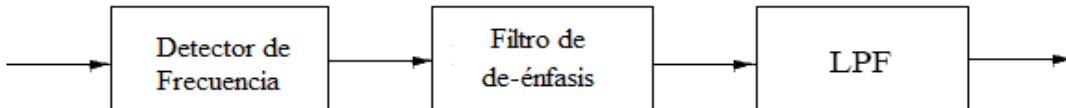
En la grafica se aprecia el nivel de interferencia que sufren las señales moduladas, se puede observar que las señales AM y PM experimentan el mismo nivel de interferencia independientemente de la frecuencia de la señal interferente.

Pero para la señal FM el nivel de interferencia depende de la frecuencia de la señal interferente.

### 7.1.2 Filtro de de-énfasis y filtro de pre-énfasis

El hecho de que la detección de FM con interferencia se hace más difícil con un valor de  $|f_i|$  muy grande, sugiere la necesidad de implementar un método para mejorar le desempeño del sistema con filtros de post detección selectivos, llamados filtros de de-énfasis.

Suponiendo que el demodulador se encuentra acompañado por un filtro pasabajas que tiene una relación de amplitud que decrece gradualmente por debajo de  $W$ . Esto enfatiza la porción de alta frecuencia en la banda del mensaje y reduce así los efectos graves de la interferencia. Además es necesario utilizar otro filtro que remueva las componentes residuales alrededor de  $W$ , de esta manera el receptor de FM estará compuesto por un detector de frecuencia, un filtro de de-énfasis y un filtro pasabajas.



Entonces debido a que el filtro de de-énfasis atenúa las componentes de alta frecuencia del mensaje, causando distorsión en la salida, para contrarrestar este efecto se debe tomar medidas correctivas.

Para contrarrestar la distorsión se debe agregar un pre-distorsionador o filtro de pre-énfasis en el transmisor, después de generar la señal modulada. Las funciones de transferencia de los filtros de pre-énfasis y de-énfasis deben estar relacionadas de la siguiente manera:

$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)} \quad |f| \leq W$$

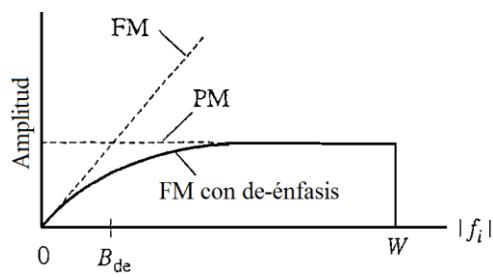
Para generar una red de transmisión sin distorsión se debe pre-enfatizar el mensaje después de la modulación (donde la interferencia está ausente) entonces se puede de-enfatizar la interferencia relacionada con el mensaje después de la modulación.

Este tipo de filtro proporciona una ventaja siempre que las contaminaciones tiendan a predominar en ciertas porciones de la banda del mensaje. Sin embargo el beneficio que proporciona a la modulación de fase o lineal es muy pequeño debido a que la amplitud de la interferencia demodulada no depende de la frecuencia.

El filtro de de-énfasis de FM, es usualmente una red de primer orden con función de transferencia:

$$H_{de}(f) = \left[ 1 + j \left( \frac{1}{B_{de}} \right) \right]^{-1} \approx \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{B_{de}}{jf} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

Donde el ancho de banda de 3dB  $B_{de}$  es considerablemente menor que el ancho de banda del mensaje. Puesto que la amplitud de la interferencia se incrementa linealmente con  $|f_i|$  en ausencia de filtraje, la respuesta del filtro de de-énfasis a la interferencia es  $|H_{de}(f)| \times |f_i|$ , gráficamente se obtiene:



Se puede notar que al igual que en PM la respuesta toma un valor constante para  $|f_i| \gg B_{de}$ . Entonces FM es superior a PM tanto en interferencia de canal adyacente como en interferencia co-canal.

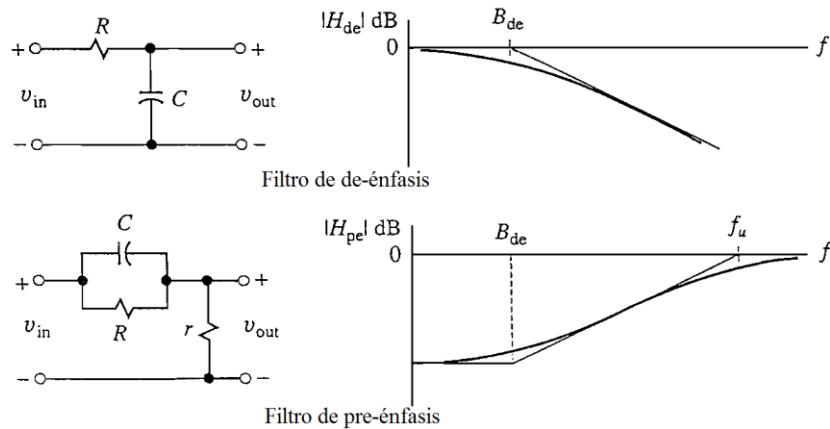
En el transmisor, se ubica el filtro de pre-énfasis, con función de transferencia:

$$H_{pe}(f) = \left[ 1 + j \left( \frac{1}{B_{de}} \right) \right] \approx \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \frac{jf}{B_{de}} & |f| \gg B_{de} \end{cases}$$

El cual tiene poco efecto sobre las componentes de baja frecuencia, sin embargo en las altas frecuencias el filtro actúa como un diferenciador y el espectro de salida será proporcional a  $fX(f)$  para  $|f| \gg B_{de}$ . Pero diferenciar una señal antes de modularla en frecuencia genera una modulación de fase, por consiguiente pre-enfatizar es una combinación de FM y PM, o en otras palabras combina las ventajas de cada una frente a la interferencia.

### 7.1.3 Ejemplos

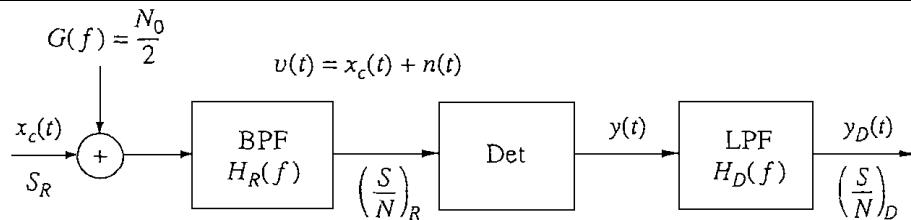
En la siguiente figura se muestra algunos de los circuitos comerciales de FM para redes de pre-énfasis y de-énfasis



La constante de tiempo  $RC$  en los dos circuitos es igual a  $75\mu s$ , entonces  $B_{de} = 1/(2\pi RC) \approx 2.1kHz$ . El filtro de pre-énfasis tiene una frecuencia superior de corte  $f_u = (R+r)/2\pi RrC$ , usualmente seleccionado para ubicarse de manera adecuada en el rango correcto del audio  $f_u \geq 30kHz$

## 7.2 Ruido de Modulación Lineal

Para analizar los efectos del ruido sobre la modulación lineal se debe tomar el sistema básico que se muestra a continuación.



En este sistema la señal modulada linealmente es contaminada por ruido AWGN en la entrada del receptor. Un filtro pasabanda de pre-detección produce una salida de la forma:  $v(t) = x_c(t) + n(t)$  con  $x_c^2 = S_R$  y  $n^2 = N_R$ , entonces.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{W}{B_T} \gamma$$

Donde se introduce el factor  $\gamma = \frac{S_R}{N_0 W}$ , para marcar la diferencia entre la relación señal a ruido de una señal transmitida, cuyo ancho de banda es menor al ancho de banda máximo de transmisión. De esta manera se define la máxima relación señal a ruido en el destino, de tal manera que  $\left(\frac{S}{N}\right)_R \leq \gamma$  siempre que  $B_T \geq W$ .

El ruido pasabanda puede expresarse en forma de cuadratura:  $n(t) = n_i(t) \cos w_c t - n_q(t) \sin w_c t$  donde  $\overline{n_i^2} = \overline{n_q^2} = N_R = N_0 B_T$ . La operación de demodulación puede ser representada por alguno de los siguientes modelos matemáticos ideales.

$$y(t) = \begin{cases} v_i(t) & \text{Detector síncrono} \\ A(t) - \overline{A_v} & \text{Detector de envolvente} \end{cases}$$

Estos modelos pre suponen una perfecta sincronización y una fuerza apropiada de la señal. El término  $\overline{A_v} = \langle A_v(t) \rangle$  refleja el bloqueo de DC que hace parte de un detector de envolvente. Entonces con estos modelos definidos, la pregunta que se busca resolver es que dada una señal  $x_c(t)$  y un tipo de detector, ¿cuál es la forma de la señal mas el ruido en el destino? y si la señal y el ruido son aditivos, ¿cuál es la relación señal a ruido a la salida del receptor?

### 7.2.1 Detección sincrona

Un detector síncrono ideal, extrae la componente en fase de la señal  $v(t)$ , si la modulación es DSB  $x_c(t) = A_c x(t) \cos w_c t$ , entonces:

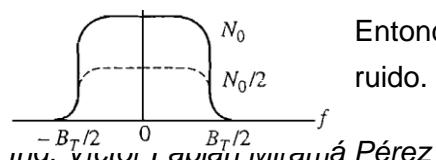
$$v(t) = [A_c x(t) + n_i(t)] \cos w_c t - n_q(t) \sin w_c t$$

Por lo tanto  $y(t) = v_i(t) = A_c x(t) + n_i(t)$ , de esta manera, si el filtro de pos-detección se aproxima a un filtro pasabajas ideal con ancho de banda  $W$  se tiene:

$$y_D(t) = A_c x(t) + n_i(t)$$

Se puede notar que efectivamente el ruido y la señal tienen una relación aditiva y que la componente en cuadratura del ruido ha sido rechazada por el detector.

Además si la respuesta del filtro de pre-detección tiene una respuesta rectangular con ancho de banda  $B_T = 2W$  centrada en  $f_c$ , la salida de ruido puede tomar la forma:



Entonces:  $G_{n_i}(f) = N_0 \Pi(f / 2W)$  el cual se muestra como un filtro pasabajas con ruido.

Ahora conocida la forma del ruido en el sistema de detección, se debe calcular la relación señal a ruido en pos-detección de la expresión de  $y_D(t)$  tomando el valor medio cuadrático de la señal y el ruido:

$$N_D = \overline{n_i^2} \quad S_D = A_c^2 x^2 = A_c^2 S_x \quad y \quad S_R = x_c^2 = A_c^2 S_x / 2$$

Entonces, tomando estas notaciones se obtiene:  $\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{2S_R}{N_0 B_T} = 2\left(\frac{S}{N}\right)_R$

Tomando  $B_T = 2W$ ,  $\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_R}{N_0 W} = \gamma$  esta es la relación señal a ruido DSB, nótese que esta relación señal a ruido corresponde a la relación señal a ruido de una comunicación analógica en banda base.

Este análisis se puede adaptar para el caso de una señal AM  $x_c(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \cos w_c t$  en el cual se puede tomar  $\mu = 1$  para simplificar la expresión. Si el detector síncrono incluye un bloqueador de DC, entonces  $y_D(t)$  está dada por  $y_D(t) = A_c x(t) + n_i(t)$ , tomando las siguientes consideraciones  $N_D = \overline{n_i^2}$  y  $S_D = A_c^2 S_x$ , pero considerando la potencia de la portadora no modulada se tiene  $S_R = A_c^2(1 + S_x)/2$ , de donde se obtiene  $S_D = 2S_x S_R / (1 + S_x)$ , y la relación señal a ruido será:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{2S_x}{1 + S_x} \left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_x}{1 + S_x} \gamma \text{ Relación señal a ruido AM}$$

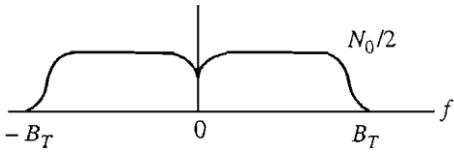
El límite de esta relación es  $\left(\frac{S}{N}\right)_D \leq \frac{\gamma}{2}$  dado que  $S_x \leq 1$

En la modulación de un tono,  $S_x = 1/2$  obteniendo una  $S/N = \gamma/3$ , que se encuentra alrededor de 5dB por debajo de la relación señal a ruido DSB con los mismos parámetros. Pero típicamente  $S_x \approx 0.1$  colocando a AM 10dB por debajo de DSB.

Para SSB se tiene  $x_c(t) = \frac{A_c}{2}[x(t) \cos w_c t \pm \hat{x}(t) \sin w_c t]$  con  $B_T = W$  y  $S_R = A_c^2 S_x / 4$ . El detector rechaza las componentes en cuadratura de la señal y el ruido, entonces:

$$y_D(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) + n_i(t)$$

Ahora  $S_D = A_c^2 S_x / 4 = S_R$ , debido a que  $f_c$  cae en el corte del filtro de pre detección  $G_{n_i}(f)$  tiene la forma:



De esta manera:  $G_{n_i}(f) = \frac{N_0}{2} \Pi(f/2W)$  y  $N_D = \overline{n_i^2} = N_0 W$

Consecuentemente:  $\left(\frac{S}{N}\right)_D = \left(\frac{S}{N}\right)_R = \gamma$  relación señal a ruido SSB

Análogamente a DSB, SSB tiene una relación similar a la de un sistema en banda base.

Finalmente para VSB, si se considera que la banda vestigial es muy pequeña en comparación con  $W$ , los filtros de pre y pos detección serían iguales a los de SSB. Sin embargo la señal es en esencia la misma de AM con toda la información concentrada en una banda lateral, entonces:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \approx \frac{S_x}{1 + S_x} \left(\frac{S}{N}\right)_R \approx \frac{S_x}{1 + S_x} \gamma \text{ Asumiendo } B_T \approx W \quad y \quad \mu \approx 1$$

Resumiendo los anteriores análisis se puede definir las siguientes propiedades de la detección síncrona de lineal:

1. El mensaje y el ruido son aditivos a la salida si ellos son aditivos a la entrada del receptor

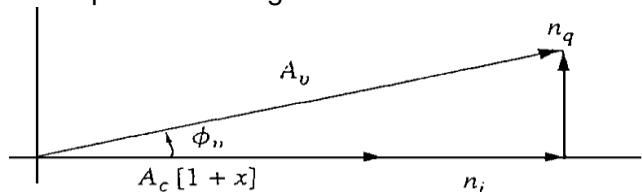
2. Si el espectro del ruido de pre detección es razonablemente plano sobre la banda de transmisión, entonces en el destino el espectro del ruido es esencialmente constante sobre la banda del mensaje
3. Relacionando la potencia consumida en sistemas con portadora, todos los tipos de modulación tienen el mismo desempeño de una transmisión en banda base, basándose en la potencia promedio transmitida y una densidad de ruido fija.

### 7.2.2 Detección de envolvente

Debido a que AM se demodula utilizando un detector de envolvente, es necesario analizar cual es la principal diferencia con la detección síncrona. A la entrada del detector se tiene:

$$v(t) = A_c [1 + x(t)] \cos w_c t + [n_i(t) \cos w_c t - n_q(t) \sin w_c t]$$

Donde se ha tomado por facilidad un índice de modulación de 1, con este resultado se puede construir el correspondiente diagrama fasorial.



Tomando este resultado la envolvente y fase serían:

$$A_v(t) = \sqrt{[A_c[1+x(t)] + n_i]^2 + n_q^2}$$

$$\phi_v(t) = \tan^{-1} \frac{n_q}{A_c[1+x(t)] + n_i(t)}$$

Para facilitar el estudio, es necesario considerar dos casos específicos, que la señal sea muy pequeña o muy grande en comparación con el ruido. Entonces, tomando a  $A_c^2 \gg n^2$ ,  $A_c[1+x(t)]$  va a ser muy grande comparado con  $n_i(t)$  y  $n_q(t)$ . Por consiguiente, la envolvente se puede aproximar a:

$$A_v(t) \approx A_c[1+x(t)] + n_i(t)$$

Lo cual muestra que la envolvente de modulación debido al ruido es similar a la modulación de interferencia, un detector de envolvente ideal reproduce la envolvente eliminando la componente DC, entonces se tiene que:

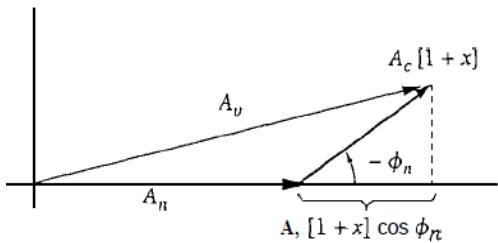
$$y_D(t) = A_v(t) - \overline{A_v} = A_c x(t) + n_i(t)$$

Que es exactamente lo que se obtuvo con el detector síncrono, en consecuencia la relación señal a ruido en pos-detección es igual a la obtenida para AM con detección síncrona.

$$\left( \frac{S}{N} \right)_D = \frac{S_x}{1 + S_x} \gamma$$

Este resultado se cumple bajo la condición de  $A_c^2 \gg n^2$ , dado que  $A_c^2 / \overline{n^2}$  es proporcional a  $S_R / N_0 B_T$ , es análogo a decir que la S/N >> 1. Entonces, cuando el sistema proporciona una S/N grande en pre-detección, la detección de envolvente tiene la misma calidad del desempeño de un detector síncrono.

En el otro extremo con S/N menor a la unidad, la situación es completamente diferente, porque si  $A_c^2 \ll \overline{n^2}$ , el ruido es dominante en forma similar a la interferencia fuerte y se puede pensar que  $x_c(t)$  esta modulando a  $n(t)$  en lugar de ser lo contrario. Para realizar el análisis de este caso,  $n(t)$  se representa en forma de envolvente y fase  $n(t) = A_n(t) \cos[w_c t + \phi_n(t)]$ , generando el siguiente diagrama fasorial:



En este diagrama el fasor de referencia es el ruido debido a que el ruido es predominante, de esta manera la envolvente es aproximada a la componente horizontal, entonces:

$$A_v(t) \approx A_n(t) + A_c[1+x(t)] \cos \phi_n(t)$$

Entonces la señal de salida será:

$$y_D(t) = A_n(t) + A_c x(t) \cos \phi_n(t) - \overline{A_n} \quad \text{Donde } \overline{A_n} = \sqrt{\pi N_R / 2}$$

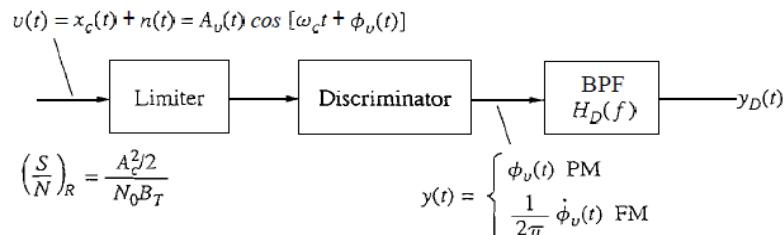
Obviamente la componente principal de salida es la envolvente de ruido  $A_n(t)$ , además no existe un término estrictamente proporcional a la señal mensaje  $x(t)$ . Aunque la señal y el ruido son aditivos en la entrada, el término correspondiente al mensaje detectado es multiplicado con el ruido en la forma de  $\cos\phi_n(t)$ , el cual es aleatorio y por lo tanto el mensaje es enmascarado y la información se ha perdido. En estas circunstancias la S/N no puede determinarse.

La pérdida del mensaje por el bajo nivel de relación señal a ruido en pre-detección, se conoce como *Efecto Umbral* y toma este nombre debido a que existe un valor de  $(S/N)_R$ , nivel umbral, por encima del cual el enmascaramiento es despreciable y por debajo del cual el desempeño del sistema se deteriora rápidamente.

Este nivel de umbral no es único, por lo general los efectos del umbral son mínimos si  $A_c \gg A_n$  la mayoría del tiempo. Entonces se puede definir el nivel de umbral como la  $(S/N)$  para la cual  $A_c \geq A_n$ , con una probabilidad de ocurrencia de 0.99.

### 7.3 Ruido de Modulación Exponencial

El modelo de análisis es el mostrado a continuación, con la estructura de pre-detección retomada del modelo de AM.



Debido a la naturaleza no lineal de la modulación exponencial, el análisis del ruido suele tornarse complicado por este motivo se iniciara el análisis para la condición de  $(S/N)_R \gg 1$  para determinar las características del ruido en pos detección y la relación  $(S/N)$  en PM y FM.

#### 7.3.1 Ruido de pos-detección

La pre-detección tiene la misma estructura utilizada en AM, de esta manera la señal recibida será:

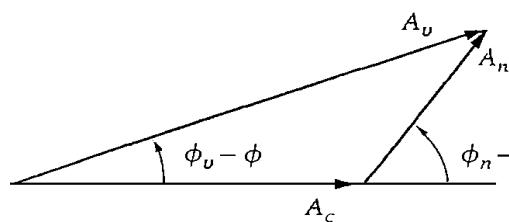
$$x_c(t) = A_c \cos[w_c t + \phi(t)]$$

Donde  $\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$  o  $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$  según el tipo de modulación, pero en los dos casos la amplitud es constante, por lo tanto:

$$S_R = \frac{1}{2} A_c^2 \quad \left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_c^2}{2N_0 B_T}$$

Esta relación señal a ruido suele llamarse *relación portadora a ruido* (CNR).  
El filtro pasabanda de pre-detección se considera que tiene una respuesta ideal con ancho de banda  $B_T$  centrado en  $f_c$

Después de la etapa de pre-detección, se pasa a la detección que realiza el limitador y el discriminador. Con



una entrada en el detector de la forma  $v(t) = x_c(t) + n(t) = A_v(t) \cos[w_c t + \phi_v(t)]$ , el limitador suprime alguna variación de amplitud representada por  $A_v(t)$ . Para encontrar el ruido y la señal contenidos en  $\phi_v(t)$ , se representa el ruido en su forma fasorial, entonces:

$$v(t) = A_c \cos[w_c t + \phi(t)] + A_n(t) \cos[w_c t + \phi_n(t)]$$

Cuyo diagrama fasorial muestra que:

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \tan^{-1} \frac{A_n(t) \sin[\phi_n(t) - \phi(t)]}{A_c + A_n(t) \cos[\phi_n(t) - \phi(t)]}$$

El primer término de  $\phi_v(t)$  es la señal de fase, pero el segundo término corresponde a la contaminación e involucra al ruido y la señal. Esta expresión es muy incierta y para continuar con el análisis es preciso realizar algunas simplificaciones.

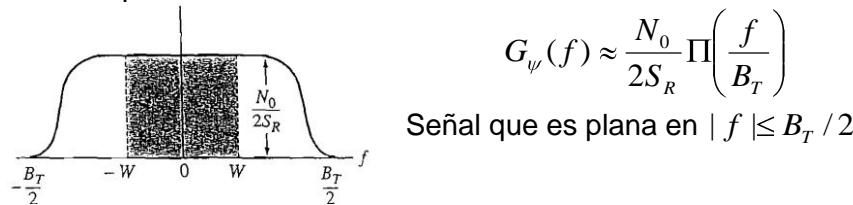
La primera simplificación proviene de la condición  $(S/N)_R \gg 1$ , entonces  $A_c \gg A_n(t)$  la mayoría del tiempo y se puede utilizar este argumento para la función tangente inversa. Una simplificación menos evidente ignora a  $\phi(t)$  en la expresión, remplazando  $\phi_n(t) - \phi(t)$  con  $\phi_n(t)$ , debido a que  $\phi_n(t)$  tiene una distribución uniforme sobre  $2\pi$ . Con estas simplificaciones se obtiene:

$$\phi_v(t) \approx \phi(t) - \psi(t) \text{ con } \psi(t) \approx \frac{A_n \sin \phi_n(t)}{A_c} = \frac{1}{\sqrt{2S_R}} n_q(t)$$

En esta expresión se ha sustituido  $A_n \sin \phi_n(t) = n_q(t)$  y  $S_R = A_c^2 / 2$

La expresión obtenida muestra que la señal de fase y la fase equivalente de ruido son aditivas bajo la condición de señal dominante, la expresión para el ruido, muestra que el ruido en este caso depende de la componente en cuadratura y además que el ruido decrece a medida que se incrementa la potencia de la señal recibida.

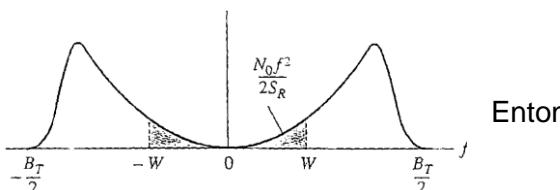
Ahora si se hace  $\phi(t) = 0$  y considerando el ruido resultante  $\psi(t)$  a la salida del detector de fase, el espectro de ruido en pos-detección de PM tiene la forma:



$B_T/2$  excede el ancho de banda  $W$  del mensaje, menos para el caso de NBPM, entonces el receptor debe incluir un filtro de pos-detección con una función de transferencia  $H_D(f)$  que remueva el ruido fuera de banda. Si se aproxima este filtro a un filtro pasabajas ideal con ancho de banda  $W$ , entonces la potencia de ruido en el destino será:

$$N_D = \int_W G_\psi(f) df = \frac{N_0 W}{S_R} \quad PM \text{ Corresponde a la parte oscura de la figura}$$

Considerando ahora el caso de un detector de frecuencia con entrada  $\phi_v(t) = \psi(t)$ , entonces la salida es la frecuencia instantánea de ruido:



Entonces en pos-detección se tiene:

$$G_\xi(f) = (2\pi f)^2 \frac{1}{8\pi^2 S_R} G_{n_q}(f) = \frac{N_0 f^2}{2S_R} \Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$$

Si nuevamente se toma un filtro con características ideales:  $N_D = \int_W G_\xi(f) df = \frac{N_0 W^3}{3S_R} \quad FM$

En resumen:

- La densidad espectral del ruido en pos-detección para PM y FM tiene componentes fuera de banda que se deben eliminar mediante un filtro de pos-detección.
- El espectro del ruido en PM es plano dentro del ancho de banda de la señal mensaje.
- El espectro del ruido en FM se incrementa parabólicamente, entonces señales banda base de alta frecuencia sufren mayor contaminación de ruido, la solución al igual que para la interferencia es la utilización de un filtro de de-énfasis
- La potencia de ruido en el destino en FM y PM decrece cuando  $S_R$  aumenta.

### 7.3.2 Relación señal a ruido en el destino

Para calcular la relación señal a ruido en el destino, tanto para FM como para PM, es necesario considerar el caso de  $(S/N)_R \gg 1$ , para que los anteriores resultados puedan conservarse. La presencia de la señal de fase  $\phi(t)$  no anula los resultados obtenidos previamente, donde se reemplazo  $\phi_n(t) - \phi(t)$  con  $\phi_n(t)$ .

La señal mas el ruido demodulados en un sistema PM con  $\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$ , es:  $y(t) = \phi_v(t) = \phi_\Delta x(t) + \psi(t)$  y el filtro pos-detección pasa el término correspondiente a la señal  $\phi_\Delta x(t)$ , entonces  $S_D = \phi_\Delta^2 \overline{x^2} = \phi_\Delta^2 S_x$  y el ruido esta dado por  $N_D = N_0 W / S_R$ , como se vio previamente. En consecuencia:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_D = \frac{\phi_\Delta^2 S_x}{N_0 W / S_R} = \phi_\Delta^2 S_x \frac{S_R}{N_0 W} = \phi_\Delta^2 S_x \gamma \quad PM$$

Se puede notar que provee una mejora con relación al sistema en pasa banda por el factor  $\phi_\Delta^2 S_x$ , pero en vista de que  $\phi_\Delta \leq \pi$ , la mejora generada por PM no supera  $\phi_\Delta^2 S_x \Big|_{\max} \leq \pi^2$ , obviamente si esta relación es menor a la unidad el desempeño del sistema decae.

Para la detección de la señal más el ruido en FM, se tiene  $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ , entonces  $y(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) = f_\Delta x(t) + \xi(t)$ , el filtro de pos-detección deja pasar el término que lleva la información de donde se obtiene  $S_D = f_\Delta^2 S_x$ , el ruido es igual al del apartado anterior, de esta manera:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_D = \frac{f_\Delta^2 S_x}{N_0 W^3 / 3S_R} = 3 \left( \frac{f_\Delta}{W} \right)^2 S_x \frac{S_R}{N_0 W}$$

Esta expresión incluye la relación de desviación, entonces se puede escribir:  $\left( \frac{S}{N} \right)_D = 3D^2 S_x \gamma \quad FM$

La expresión indica que la S/N puede hacerse arbitrariamente grande incrementando D, sin necesidad de incrementar la potencia de la señal.

## 7.4 Comparación de los sistemas de modulación

### 7.4.1 Ventajas de la modulación exponencial sobre la modulación lineal

**Inmunidad al ruido:** es quizá la característica más importante de las modulaciones angulares, debido a que la mayoría de señales aleatorias generadas en su mayoría por el hombre, producen una variación de amplitud no deseada en la señal transmitida. Por lo general en la recepción de FM o PM se introduce un limitador antes de la detección para evitar las variaciones de amplitud indeseadas, en AM no puede hacerse eso porque a limitar el ruido en la variación de la amplitud de la señal, también se estará distorsionando la señal.

**Mejora de la S/N:** debido a la inclusión del limitador en la modulación angular se puede limitar o reducir el nivel de ruido de la señal que entra al detector, por el otro lado, cuando la señal AM transmitida se contamina con ruido, este no puede ser removido.

**Efecto captura:** en las modulaciones angulares existe un fenómeno llamado *efecto captura*, que permite a los detectores diferenciar entre dos señales recibidas con la misma frecuencia, siempre que una tenga como mínimo el doble de amplitud de la otra, el receptor captura la más intensa y elimina la débil. En la modulación lineal si se recibe dos señales con la misma frecuencia las dos señales son recibidas y llevadas al destino.

**Eficiencia energética:** en la modulación AM la mayor parte de la potencia se lleva la portadora y la potencia de las bandas laterales, quienes llevan la información, se suma a la potencia de la portadora, mientras que en las modulaciones angulares, la potencia total o la potencia de la portadora siempre es la misma con o sin modulación, la mayor diferencia en FM o PM es que la potencia disponible se distribuye entre el número de componentes espectrales significativas.

#### 7.4.2 Desventajas de la modulación angular sobre la modulación lineal

**Ancho de banda:** la modulación angular de alta calidad produce una gran cantidad de componentes significativas, que generan a su vez la necesidad de un gran ancho de banda, superior al utilizado en AM. En comparación, en la banda comercial de AM a cada estación se le asigna un ancho de banda de 10kHz y a una estación de FM se asigna un ancho de banda de 200kHz.

**Complejidad:** la complejidad que conlleva el diseño y la construcción de moduladores FM o PM es superior a la de AM, el costo solía ser más elevado, pero la aparición de los circuitos integrados hace que los costos sean comparables.

#### 7.4.3 Tabla comparativa

Type	b = $B_I/W$	$(S/N)_D + \gamma$	DC	Complexity	Comments
Baseband	1	1	No'	Minor	No modulation
AM	2	$\frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x}$	No	Minor	Envelope detection $\mu \leq 1$
DSB	2	1	Yes	Major	Synchronous detection
SSB	1	1	No	Moderate	Synchronous detection
VSB	1+	1	Yes	Major	Synchronous detection
VSB + C	1+	$\frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x}$	Yes?	Moderate	Envelope detection $\mu < 1$
PM <sup>3</sup>	$2M(\phi_\Delta)$	$\phi_\Delta^2 S_x$	Yes	Moderate	Phase detection, constant amplitude $\phi_\Delta \leq \pi$
FM <sup>3,4</sup>	$2M(D)$	$3D^2 S_x$	Yes	Moderate	Frequency detection, constant amplitude

## 8 IDENTIDADES IMPORTANTES

Relaciones trigonométricas:

$$2\sin a * \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$$

$$2\cos a * \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

$$2\sin a * \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} * \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin \frac{a-b}{2} * \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a+b}{2} * \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin \frac{a+b}{2} * \sin \frac{a-b}{2}$$

## 9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Communication Systems – Bruce Carlson
- [2] Communication Systems – Simon Haykin
- [3] Sistemas De Comunicación Digitales Y Analógicos. León W. Couch II
- [4] Sistemas De Comunicación Electrónicas. Wayne Tomasi
- [5] Transmisión De Información. Modulación Y Ruido, Misha Schwartz
- [6] Fundamentals Of Signals And System Using Matlab Edward W. Kamen – Bonnie S. Heck