Ejercicio Resuelto: Reglas de Integracion Numerica

Ejemplo 1 : Interpolacion por Spline Cubico

Dado el siguiente conjunto de puntos:

x: 0, 1, 2, 3

y: 1, 2, 0, 2

Queremos construir un spline cúbico que interpole estos puntos.

Un spline cúbico está definido por polinomios cúbicos por intervalos que cumplen:

- Interpolación exacta en los puntos.
- Continuidad de la primera y segunda derivada en los puntos interiores.
- Condiciones de frontera (ejemplo: spline natural, con segunda derivada cero en extremos).

Pasos:

1. Dividimos el intervalo en subintervalos [0,1], [1,2], [2,3].

2. Para cada intervalo, el spline tiene la forma:

   $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$

3. Planteamos el sistema de ecuaciones para obtener coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i.

Datos:

- $a_i = y_i$
- Condiciones para continuidad y frontera (natural):

  $c_0 = 0$ y $c_3 = 0$

Sistema resultante (simplificado para el ejemplo):

- Se calcula c_1, c_2
- Luego se obtiene b_i y d_i usando c_i y y_i.

Ejercicio Resuelto: Reglas de Integracion Numerica

Resultado (valores aproximados):

Intervalo [0,1]:

$a_0=1$, $b_0=1.5$, $c_0=0$, $d_0=-0.5$

Intervalo [1,2]:

$a_1=2$, $b_1=-2.5$, $c_1=-3$, $d_1=1.5$

Intervalo [2,3]:

$a_2=0$, $b_2=3$, $c_2=3$, $d_2=-1.5$

Por lo tanto, el spline cúbico interpolante es:

$S_0(x) = 1 + 1.5(x - 0) + 0(x - 0)^2 - 0.5(x - 0)^3$, para x en [0,1]

$S_1(x) = 2 - 2.5(x - 1) - 3(x - 1)^2 + 1.5(x - 1)^3$, para x en [1,2]

$S_2(x) = 0 + 3(x - 2) + 3(x - 2)^2 - 1.5(x - 2)^3$, para x en [2,3]