

## FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n$

### 1. FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n(\mathbb{Q}_p)$

Dans la suite, on notera  $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$ ,  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$  et  $(\pi, V)$  une représentation admissible irréductible de  $G$ . On pose  $K = GL_n(\mathbb{Z}_p)$ , c'est un sous-groupe compact maximal de  $G$ .

**Définition 1.** Une représentation  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  est dite admissible si elle vérifie :

- Pour tout  $v \in V$ , le stabilisateur de  $v$  dans  $G$ ,  $\{g \in G, \pi(g)v = v\}$ , est un sous-groupe ouvert de  $G$ ,
- Pour tout sous-groupe ouvert  $H$  de  $G$ , le sous-espace

$$V^H = \{v \in V, \pi(h)v = v, \forall h \in H\}$$

des vecteurs stable par  $H$  est de dimension finie.

Les coefficients de  $\pi$  sont les fonctions de la forme  $g \in G \mapsto \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle$ , où  $v \in V$  et  $\tilde{v} \in \tilde{V}$ . Alors  $\check{f}(g) = f(g^{-1}) = \langle v, \tilde{\pi}(g)\tilde{v} \rangle$  est un coefficient de  $\tilde{\pi}$ .

On note  $M_n$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $\phi : M_n \rightarrow \mathbb{C}$  localement constantes à support compact.

Si  $f$  est un coefficient de  $\pi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(1) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g)f(g)|\det g|_p^s dg.$$

On fixe un caractère non trivial  $\psi$  de  $\mathbb{Q}_p$  et on pose

$$(2) \quad \hat{\phi}(y) = \int_{M_n} \phi(x)\psi(\text{Tr}(xy))dx,$$

où  $dx$  est une mesure de Haar sur  $M_n$ , normalisée telle que  $\hat{\phi}(x) = \phi(-x)$ .

L'objectif de cette section est de montrer le

**Théorème 1.** (1) Il existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\text{Re}(s) > s_0$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $f$  un coefficient de  $\pi$ , les intégrales

$$(3) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g)f(g)|\det g|_p^s dg$$

$$(4) \quad \zeta(\check{f}, \phi, s) = \int_G \phi(g)\check{f}(g)|\det g|_p^s dg$$

convergent absolument.

- (2) Ces intégrales sont des fonctions rationnelles en  $p^{-s}$ . Plus précisément, il existe des polynômes  $Q$  et  $\tilde{Q}$  indépendant de  $f$  et  $\phi$  avec  $Q(0) \neq 0$  (respectivement  $\tilde{Q}(0) \neq 0$ ) et des polynômes  $\Xi(f, \phi, s)$ ,  $\tilde{\Xi}(\check{f}, \phi, s)$  en  $p^s$  et  $p^{-s}$  tel

que

$$(5) \quad \zeta(f, \phi, s + \frac{1}{2}(n-1)) = \frac{\Xi(f, \phi, s)}{Q(p^{-s})},$$

$$(6) \quad \zeta(\check{f}, \phi, s + \frac{1}{2}(n-1)) = \frac{\check{\Xi}(\check{f}, \phi, s)}{\check{Q}(p^{-s})},$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $f$  coefficient de  $\pi$ .

(3) On peut choisir un nombre fini, de coefficients  $f_i$  de  $\pi$  (respectivement  $\tilde{\pi}$ ) et de fonctions  $\phi_i \in \mathcal{S}$ , telles que  $\sum_i \Xi(f_i, \phi_i, s)$  (respectivement  $\sum_i \check{\Xi}(f_i, \phi_i, s)$ ) soit une constante non nulle.

(4) Il existe une fonction  $\epsilon(s, \pi, \psi)$ , qui est à une constante près une puissance de  $p^{-s}$ , telle que

$$(7) \quad \check{\Xi}(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s) = \epsilon(s, \pi, \psi) \Xi(f, \phi, s),$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $f$  coefficient de  $\pi$ .

On normalise  $Q$  et  $\check{Q}$  tel que  $Q(0) = \check{Q}(0) = 1$ , on pose alors

$$(8) \quad L(s, \pi) = \frac{1}{Q(p^{-s})}, \quad L(s, \tilde{\pi}) = \frac{1}{\check{Q}(p^{-s})}.$$

L'existence de la fonction  $\epsilon(s, \pi, \psi)$  est équivalente à l'existence d'une fonction méromorphe  $\gamma(s, \pi, \psi)$  telle que

$$(9) \quad \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s + \frac{1}{2}(n-1)) = \gamma(s, \pi, \psi) \zeta(f, \phi, s),$$

pour tout  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $f$  coefficient de  $\pi$ . Ces deux fonctions étant reliées par la relation

$$(10) \quad \epsilon(s, \pi, \psi) = \gamma(s, \pi, \psi) \frac{L(s, \pi)}{L(1-s, \tilde{\pi})}.$$

En effet, supposons l'existence de  $\gamma(s, \pi, \psi)$  alors  $\epsilon(s, \pi, \psi)$  vérifie

$$(11) \quad \check{\Xi}(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s) = \epsilon(s, \pi, \psi) \Xi(f, \phi, s).$$

On a de plus une égalité similaire avec  $\epsilon(s, \tilde{\pi}, \psi)$ ,

$$(12) \quad \Xi(f, s, \hat{\phi}, s) = \epsilon(1-s, \tilde{\pi}, \psi) \check{\Xi}(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s).$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser la formule  $\hat{\phi}(x) = \phi(-x)$  pour obtenir la relation

$$(13) \quad \epsilon(s, \pi, \psi) \epsilon(1-s, \tilde{\pi}, \psi) = \omega(-1),$$

où  $\omega$  est le caractère de  $\mathbb{Q}_p^\times$  tel que  $\pi(z) = \omega(z)1$  pour  $z \in \mathbb{Q}_p^\times$ . D'après (2) et (3) du théorème,  $\epsilon(s, \pi, \psi)$  est alors un polynôme en  $p^s$  et  $p^{-s}$ , on en déduit que  $\epsilon(s, \pi, \psi)$  est une puissance de  $p^{-s}$  à constante près.

**1.1. Réduction au cas supercuspidal.** Si  $\pi$  est une représentation admissible (non nécessairement irréductible) de  $G$ , les assertions du théorème font sens pour  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$ , mais peuvent être fausses si  $\pi$  n'est pas irréductible.

Supposons le théorème vrai pour  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$ . Soit  $\sigma$  une sous-représentation irréductible de  $\pi$ . Alors les coefficients de  $\sigma$  sont de la forme  $\langle \pi(g)v, \check{v} \rangle$  avec  $v \in V$  et  $\check{v} \in \check{V}$ . Cependant, toutes ces fonctions ne sont pas des coefficients de  $\sigma$ . On en déduit la

**Proposition 1.** *Il existe des polynômes  $R$  et  $\tilde{R}$  en  $p^{-s}$  tel que*

$$(14) \quad L(s, \sigma) = R(p^{-s})L(s, \pi),$$

$$(15) \quad L(s, \tilde{\sigma}) = p^{-s}L(s, \tilde{\pi}).$$

*De plus,*

$$(16) \quad \gamma(s, \sigma, \psi) = \gamma(s, \pi, \psi).$$

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique propre maximal de  $G$  et  $U$  son radical unipotent alors  $P/U \simeq G' \times G''$ , où l'on note  $G' = GL_{n'}(\mathbb{Q}_p)$  et  $G'' = GL_{n''}(\mathbb{Q}_p)$ .

Soit  $\sigma'$  (respectivement  $\sigma''$ ) une représentation admissible de  $G'$  (respectivement  $G''$ ). On ne les suppose pas irréductible, on suppose cependant qu'ils admettent des caractères centraux  $\omega'$  et  $\omega''$ . Alors  $\sigma' \boxtimes \sigma''$  est naturellement une représentation de  $P/U$ , donc une représentation de  $P$  triviale sur  $U$ .

**Proposition 2.** *Notons  $\pi = \text{Ind}_P^G(\sigma' \boxtimes \sigma'')$ . Supposons le théorème vrai pour  $\sigma'$  et  $\sigma''$ . Alors le théorème est vrai pour  $\pi$ . De plus, on a*

$$(17) \quad L(s, \pi) = L(s, \sigma')L(s, \sigma''),$$

$$(18) \quad L(s, \tilde{\pi}) = L(s, \tilde{\sigma}')L(s, \tilde{\sigma}''),$$

$$(19) \quad \epsilon(s, \pi, \psi) = \epsilon(s, \sigma', \psi)\epsilon(s, \sigma'', \psi).$$

*Démonstration.* On notera  $M' = M_{n'}(\mathbb{Q}_p)$  et  $M'' = M_{n''}(\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $f$  un coefficient de  $\pi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $s \in \mathbb{C}$ .

L'espace vectoriel  $V$  sur lequel  $\pi$  agit est l'espace des fonctions  $v : G \rightarrow W$  localement constante qui vérifient

$$(20) \quad v(pg) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(p)(\sigma' \boxtimes \sigma'')(p)v(g),$$

où  $\delta_P$  est le caractère modulaire de  $P$  et  $W$  est l'espace vectoriel sur lequel  $\sigma' \boxtimes \sigma''$  agit.

Le coefficient  $f$  est alors de la forme

$$(21) \quad f(g) = \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle$$

$$(22) \quad = \int_K \langle v(kg), \tilde{v}(k) \rangle_W dk.$$

Posons  $t = s + \frac{1}{2}(n-1)$ ,  $t' = s + \frac{1}{2}(n'-1)$  et  $t'' = s + \frac{1}{2}(n''-1)$ . L'intégrale zêta est donc

$$(23) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) |\det g|_p^t \int_K \langle v(kg), \tilde{v}(k) \rangle dk dg.$$

On échange l'ordre d'intégration et on fait le changement de variables  $g \mapsto k^{-1}g$ , on obtient

$$(24) \quad \int_K \int_G \phi(k^{-1}g) |\det g|_p^t \langle v(g), \tilde{v}(k) \rangle dg dk.$$

On utilise la décomposition de Cartan pour écrire  $g \in G$  sous la forme  $g = \begin{pmatrix} g' & u \\ 0 & g'' \end{pmatrix} k'$ , où  $g' \in G'$ ,  $g'' \in G''$ ,  $u \in U$  et  $k' \in K$ . On peut alors décomposer la mesure de Haar de  $G$  en fonction des mesures de Haar de  $G'$ ,  $G''$ ,  $U$  et  $K$ . En effet,

$$(25) \quad dg = |\det g'|^{-n''} dg' dg'' du dk'.$$

L'expression (24) devient

$$(26) \quad \int_K \int_{G' \times G'' \times U \times K} \phi(k^{-1} \begin{pmatrix} g' & u \\ 0 & g'' \end{pmatrix} k') |\det g'|^{t'} |\det g''|^{t''} \\ < (\sigma'(g') \boxtimes \sigma''(g'')) v(k'), \tilde{v}(k) > dg' dg'' du dk' dk.$$

Le facteur  $< (\sigma'(g') \boxtimes \sigma''(g'')) v(k'), \tilde{v}(k) >$  est un coefficient de  $\sigma' \boxtimes \sigma''$ , donc est une combinaison linéaire de produits de coefficients de  $\sigma'$  et de coefficients de  $\sigma''$  :

$$(27) \quad < (\sigma'(g') \boxtimes \sigma''(g'')) v(k'), \tilde{v}(k) > = \sum_{i=1}^l \lambda_i(k, k') f'_i(g') f''_i(g''),$$

où les fonctions  $\lambda_i : K \times K \rightarrow \mathbb{C}$  sont localement constante et les  $f'_i$  (respectivement  $f''_i$ ) sont des coefficients de  $\sigma'$  (respectivement  $\sigma''$ ).

D'autre part, la fonction

$$(28) \quad (x' \in M', x'' \in M'') \mapsto \int_U \phi(k^{-1} \begin{pmatrix} x' & u \\ 0 & x'' \end{pmatrix} k') du$$

est un élément de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(M' \times M'')$ . On peut donc l'écrire sous la forme

$$(29) \quad \int_U \phi(k^{-1} \begin{pmatrix} x' & u \\ 0 & x'' \end{pmatrix} k') du = \sum_{j=1}^{l'} \mu_j(k, k') \phi'_j(x') \phi''_j(x''),$$

où les  $\mu_j$  sont localement constantes et  $\phi'_j \in \mathcal{S}(M')$  (respectivement  $\phi''_j \in \mathcal{S}(M'')$ ).

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale (26), on trouve

$$(30) \quad \zeta(f, \phi, t) = \sum_{i,j=1}^{l,l'} \int_{K \times K} \lambda_i(k, k') \mu_j(k, k') dk dk' \zeta(f'_i, \phi'_j, t') \zeta(f''_i, \phi''_j, t'').$$

D'après les hypothèses faites sur  $\sigma'$  et  $\sigma''$ , les intégrales définissant les  $\zeta(f'_i, \phi'_j, t')$  (respectivement  $\zeta(f''_i, \phi''_j, t'')$ ) sont absolument convergentes pour  $\operatorname{Re}(s)$  assez grande. Ce qui justifie à posteriori les calculs que l'on vient de faire et prouve la partie (1) du théorème pour  $\pi$ .

D'après (30) et les hypothèses faites sur  $\sigma'$  et  $\sigma''$ , on obtient la relation

$$(31) \quad \zeta(f, \phi, s) = \sum_{i,j=1}^{l,l'} c_{i,j} \Xi(f'_i, \phi'_j, s) L(s, \sigma') \Xi(f''_i, \phi''_j, s) L(s, \sigma'').$$

Ce qui prouve la partie (2) du théorème pour  $\pi$ .

Passons à la partie (4) du théorème. La valeur  $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, t)$  s'obtient en remplaçant  $f$  par  $\check{f}$ , ce qui remplace les  $f'_i$  et  $f''_i$  en  $\check{f}'_i$  et  $\check{f}''_i$ , et  $\phi$  en  $\hat{\phi}$ . Voyons maintenant comment ce dernier changement affecte l'intégrale. Montrons que l'équation (29) se transforme en

$$(32) \quad \int_U \hat{\phi}(k'^{-1} \begin{pmatrix} x' & u \\ 0 & x'' \end{pmatrix} k) du = \sum_{j=1}^{l'} \mu_j(k, k') \hat{\phi}'_j(x') \hat{\phi}''_j(x'').$$

En effet,

(33)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{u}} \hat{\phi}(\mathbf{k}'^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{x}'' \end{pmatrix} \mathbf{k}) d\mathbf{u} &= \int_{\mathbf{u}} \int_{M_n} \phi(\mathbf{k}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{k}') \psi(\text{Tr} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{x}'' \end{pmatrix}) d\mathbf{x} d\mathbf{u} \\ (34) \quad &= \int \phi(\mathbf{k}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ 0 & \mathbf{x}_4 \end{pmatrix} \mathbf{k}') \psi(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}' + \mathbf{x}_4 \mathbf{x}'') d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_4 \end{aligned}$$

$$(35) \quad = \sum_{j=1}^{l'} \mu_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \hat{\phi}'_j(\mathbf{x}') \hat{\phi}''_j(\mathbf{x}'').$$

La première égalité s'obtient en considérant la transformée de Fourier en les variables  $(\mathbf{x}_3, \mathbf{u})$ . La dernière s'obtient en appliquant la transformée de Fourier sur  $M' \times M''$  à l'équation (29).

Ces considérations nous donnent une égalité similaire à (30),

(36)

$$\zeta(\check{\mathbf{f}}, \phi, 1-s+\frac{1}{2}(n-1)) = \sum_{i,j=1}^{l,l'} c_{i,j} \Xi(\check{\mathbf{f}}'_i, \hat{\phi}'_j, 1-s) L(1-s, \tilde{\sigma}') \Xi(\check{\mathbf{f}}''_i, \hat{\phi}''_j, 1-s) L(1-s, \tilde{\sigma}'').$$

On obtient ainsi l'équation fonctionnelle

$$(37) \quad \tilde{\Xi}(\check{\mathbf{f}}, \hat{\phi}, 1-s) = \epsilon(s, \sigma', \psi) \epsilon(s, \sigma'', \psi) \Xi(\mathbf{f}, \phi, s),$$

on en déduit que  $\epsilon(s, \pi, \psi) = \epsilon(s, \sigma', \psi) \epsilon(s, \sigma'', \psi)$  et la partie (4) du théorème pour  $\pi$ .

Il ne reste plus qu'à prouver la partie (3). Il suffit de montrer que si l'on fixe  $\phi' \in \mathcal{S}(M')$ ,  $\phi'' \in \mathcal{S}(M'')$  et  $\mathbf{f}$  (respectivement  $\mathbf{f}'$ ) coefficient de  $\sigma'$  (respectivement  $\sigma''$ ) alors il existe  $\phi \in \mathcal{S}(M)$  et  $\mathbf{f}$  coefficient de  $\pi$  tel que

$$(38) \quad \zeta(\mathbf{f}, \phi, \mathbf{t}) = \zeta(\mathbf{f}', \phi', \mathbf{t}') \zeta(\mathbf{f}'', \phi'', \mathbf{t}'').$$

En effet, le calcul du produit des fonctions zêta  $\zeta(\mathbf{f}', \phi', \mathbf{t}') \zeta(\mathbf{f}'', \phi'', \mathbf{t}'')$  donne

$$(39) \quad \int_{G' \times G''} \phi'(g') \phi''(g'') f'(g') f''(g'') |\det g'|_p^{t'} |\det g''|_p^{t''} dg' dg''.$$

On choisit alors  $\phi \in \mathcal{S}(M)$  de la forme  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{u} \\ \mathbf{v} & \mathbf{x}'' \end{pmatrix} \mapsto \phi'(\mathbf{x}') \phi''(\mathbf{x}'') \phi_0(\mathbf{u}) \phi_1(\mathbf{v})$ , où  $\phi_1 \in \mathcal{S}(M_{n'', n'})$  vérifie  $\phi_1(0) = 1$  et  $\phi_0 \in \mathcal{S}(M_{n', n''})$  est d'intégrale 1. Avec ce choix, on a

$$(40) \quad \int_{\mathbf{u}} \phi \left( \begin{pmatrix} g' & \mathbf{u} \\ 0 & g'' \end{pmatrix} \right) = \phi'(g') \phi''(g'').$$

De plus, il existe une fonction localement constante  $\eta : K \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$(41) \quad \int_{\mathbf{u} \times K} \phi \left( \begin{pmatrix} g' & \mathbf{u} \\ 0 & g'' \end{pmatrix} \right) \mathbf{k} \eta(\mathbf{k}) d\mathbf{u} d\mathbf{k} = \phi(g') \phi(g'').$$

On pose aussi  $\mathbf{f}(g) = \delta_p^{\frac{1}{2}} \left( \begin{pmatrix} g' & \mathbf{u} \\ 0 & g'' \end{pmatrix} \right) \eta(\mathbf{k}) \mathbf{f}(g') \mathbf{f}(g'')$ , alors  $\mathbf{f}$  est bien un coefficient de  $\pi$ . De plus, en intégrant sur  $\mathbf{u} \times K$  l'expression (39) devient

$$(42) \quad \int_G \phi \left( \begin{pmatrix} g' & \mathbf{u} \\ 0 & g'' \end{pmatrix} \right) \mathbf{k} \mathbf{f}(g) |\deg g|_p^{t'} \delta_p \left( \begin{pmatrix} g' & \mathbf{u} \\ 0 & g'' \end{pmatrix} \right) dg' dg'' d\mathbf{u} d\mathbf{k},$$

qui est bien  $\zeta(f, \phi, t)$ . Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

**1.2. Équation fonctionnelle par dévissage.** On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$(43) \quad \zeta(f, \phi, s) = \gamma(s) \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s),$$

où  $\gamma$  est une fonction rationnelle en  $p^s$  et  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ .

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

**Propriété 1.** *Les opérateurs  $\zeta(\cdot, \cdot, s)$  et  $\zeta(\cdot, \cdot, n - s)$  sont des opérateurs d'entrelacements, éléments de  $\text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ .*

On précise que l'action de  $G \times G$  sur  $S$  est  $(g_1, g_2) \cdot \phi(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$ . De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de  $\pi$  avec l'espace  $\hat{V} \otimes V$ ; l'action de  $G \times G$  sur  $\tilde{\pi} \boxtimes \pi$  est  $(g_1, g_2) \cdot f(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$ .

*Démonstration.* L'action de  $G \times G$  sur  $\zeta(f, \phi, s)$  donne

$$(44) \quad \int_G \phi(g_1^{-1} g g_2) f(g_1^{-1} g g_2) |\det g|_p^s dg.$$

On effectue le changement de variable  $g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$ , le groupe  $G$  étant unimodulaire l'intégrale devient

$$(45) \quad |\det g_1 g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s dg.$$

D'autre part, l'action de  $G \times G$  sur  $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s)$  donne

$$(46) \quad \int_G \hat{\phi}_{g_1, g_2}(g) \check{f}_{g_1, g_2}(g) |\det g|_p^{n-s} dg,$$

où l'on a noté  $\phi_{g_1, g_2}(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$  et  $f_{g_1, g_2}(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$ .

Un calcul immédiat, montre que  $\check{f}_{g_1, g_2}(g) = \check{f}(g_2^{-1} g g_1)$ . De plus,

$$(47) \quad \hat{\phi}_{g_1, g_2}(g) = \int_{M_n} \phi(g_1^{-1} x g_2) \psi(\text{Tr}(xg)) dx.$$

Après le changement de variable  $x \mapsto g_1 x g_2^{-1}$  l'intégrale devient

$$(48) \quad |\det g_1^{-1} g_2|_p^n \int_{M_n} \phi(x) \psi(\text{Tr}(x g_2^{-1} g g_1)) dx,$$

qui n'est autre que  $|\det g_1 g_2^{-1}|_p^n \hat{\phi}(g_2^{-1} g g_1)$ . L'intégrale (46) devient donc, après le changement de variable  $g \mapsto g_2 g g_1^{-1}$ ,

$$(49) \quad |\det g_1^{-1} g_2|_p^n |\det g_2 g_1^{-1}|_p^{n-s} \int_G \hat{\phi}(g) \check{f}(g) |\det g|_p^{n-s} dg.$$

$\square$

Dans le but de comprendre l'espace  $\text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ , on va décomposer  $S$  selon le rang des matrices. Soit  $r$  un entier compris entre 1 et  $n$ , on note  $S_r$  l'espace des matrices  $n \times n$  de rang  $r$  et  $S^{(r)}$  l'espace des matrices  $n \times n$  de rang  $< r$ .

Si  $X$  est un espace localement compact totalement discontinu, on note  $C_c^\infty(X)$  l'espace des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  localement constantes à support compact. L'espace  $S$  est donc égal à  $C_c^\infty(M_n)$ .

Le groupe  $G$  est un ouvert de  $M_n$  et  $M_n \setminus G = S^{(n)}$ . Cette décomposition donne la suite exacte

$$(50) \quad 0 \rightarrow C_c^\infty(G) \rightarrow C_c^\infty(M_n) \rightarrow C_c^\infty(S^{(n)}) \rightarrow 0,$$

où l'inclusion de  $C_c^\infty(G)$  dans  $C_c^\infty(M_n)$  se fait par extension par 0 et l'application  $C_c^\infty(M_n) \rightarrow C_c^\infty(S^{(n)})$  est l'application de restriction.

Cette suite exacte commute avec l'action de  $G \times G$ , on la voit donc comme une suite exacte de représentations de  $G \times G$ . On applique le foncteur  $\text{Hom}_{G \times G}(\cdot, (\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes (|\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}))$ , qui est exact à gauche, on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$(51) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\cdot|_p^s) \leq \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) \\ + \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S^{(n)}), |\cdot|_p^s),$$

où l'on a abrégé  $|\cdot|_p^s = |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}$ .

On décompose ensuite  $S^{(n)}$  selon le rang  $r$ , ce qui donne, en utilisant le même raisonnement, que

$$(52) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\cdot|_p^s) \leq \sum_{r=0}^n \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s).$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dimension de ces différents espaces, pour cela on dispose de la

**Proposition 3.** *Pour  $r = n$  ( $S_r = G$ ), on a*

$$(53) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) = 1;$$

*et pour  $r < n$ , on a*

$$(54) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s) = 0$$

*sauf pour un nombre fini de valeurs de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Commençons par le cas  $r = n$ ,

$$(55) \quad \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) \simeq \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, C^\infty(G))$$

$$(56) \quad \simeq \text{Hom}_H((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, \mathbb{C})$$

$$(57) \quad \simeq \text{Hom}_G(\tilde{\pi}, \tilde{\pi});$$

où le groupe  $H$  désigne la diagonale de  $G \times G$ . Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

Le premier isomorphisme provient de la dualité entre  $C_c^\infty(G)$  et  $C^\infty(G)$ . Le deuxième isomorphisme est une application de la réciprocity de Frobenius avec l'identification  $C^\infty(G) = \text{Ind}_H^{G \times G}(1)$ . Pour finir, le dernier isomorphisme provient du fait que l'action diagonale de  $H$  sur  $\tilde{\pi} \boxtimes \pi$  correspond à l'action de  $G$  sur  $\tilde{\pi} \otimes \pi$  et que  $|\cdot|_p^{-s}$  est trivial sur  $H$ .

Passons au cas  $r < n$ ,  $S_r$  est l'orbite de  $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sous l'action de  $G \times G$  par translation à gauche du premier facteur et translation à droite de l'inverse sur le second facteur. On calcule le stabilisateur,

$$(58) \quad H = \text{Stab}_{G \times G} \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & e \end{pmatrix} \right) \right\} \subset G \times G,$$

où  $\mathbf{a}$  décrit  $GL_r(\mathbb{Q}_p)$ ;  $\mathbf{c}, \mathbf{e}$  décrivent  $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$ ;  $\mathbf{b}$  décrit  $M_{r,n-r}(\mathbb{Q}_p)$  et  $\mathbf{d}$  décrit  $M_{n-r,r}(\mathbb{Q}_p)$ .

On note  $P = MN$  le sous-groupe parabolique de  $G$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c} \end{pmatrix}$  et  $\bar{P} = M\bar{N}$  le groupe parabolique opposé, alors  $H \subset P \times \bar{P}$ .

(59)

$$\mathrm{Hom}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_H^{G \times G}(\delta_H))$$

$$(60) \quad \simeq \mathrm{Hom}_{M \times M}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}} \otimes |\cdot|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_{(M \times M) \cap H}^{M \times M}(\delta_H))$$

$$(61) \quad \simeq \mathrm{Hom}_{(M \times M) \cap H}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}}, \delta_H \otimes |\cdot|_p^s),$$

où  $\delta_H$  est le caractère modulaire de  $H$ .

Le premier isomorphisme provient de l'identification de  $C_c^\infty(S_r) = \mathbf{c} - \mathrm{Ind}_H^{G \times G}(1)$  et de la dualité entre  $\mathbf{c} - \mathrm{Ind}_H^{G \times G}(1)$  et  $\mathrm{Ind}_H^{G \times G}(\delta_H)$ . Pour le deuxième isomorphisme, on utilise la transitivité de l'induction,  $H \subset P \times \bar{P} \subset G \times G$ , et l'adjonction entre  $\mathrm{Ind}_{P \times \bar{P}}^{G \times G}$  et le foncteur de Jacquet; en remarquant, que  $N \times \bar{N}$  agit trivialement sur  $|\cdot|_p^{-s}$ . Le dernier isomorphisme n'est autre que la réciprocity de Frobenius.

On utilise le fait que  $(\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}}$  est de longueur finie; en effet le foncteur de Jacquet préserve la longueur finie. Il existe donc des représentations admissibles  $V_i$  de  $M \times M$  telles que

$$(62) \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l = (\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}},$$

avec  $V_i/V_{i-1}$  irréductibles.

En reprenant un raisonnement que l'on a déjà fait, la suite exacte de représentations de  $M \times M$

$$(63) \quad 0 \rightarrow V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_i/V_{i-1} \rightarrow 0$$

permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$(64) \quad \dim \mathrm{Hom}_{(M \times M) \cap H}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}}, |\cdot|_p^s \delta_H) \leq \sum_{i=1}^l \dim \mathrm{Hom}_{(M \times M) \cap H}(V_i/V_{i-1}, |\cdot|_p^s \delta_H).$$

Il nous suffit donc de montrer que ces derniers espaces sont nuls sauf pour au plus une valeur de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .

En tant que représentation irréductible de  $M \times M \simeq GL_r^2(\mathbb{Q}_p) \times GL_{n-r}^2(\mathbb{Q}_p)$ , on peut décomposer  $V_i/V_{i-1} \otimes \delta_H^{-1}$  sous la forme  $\sigma^{(i)} \boxtimes (\tau_1^{(i)} \boxtimes \tau_2^{(i)})$ , où  $\sigma^{(i)}$  est une représentation irréductible de  $GL_r^2(\mathbb{Q}_p)$  et  $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}$  sont des représentations irréductibles de  $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$ .

D'après le lemme de Schur, la représentation  $\tau_2^{(i)}$  admet un caractère central  $\omega^{(i)}$ . On en déduit que

$$(65) \quad \mathrm{Hom}_{(M \times M) \cap H}(V_i/V_{i-1}, |\cdot|_p^s \delta_H) = 0,$$

sauf si  $\omega^{(i)} = |\cdot|_p^{-(n-r)s}$  sur  $\mathbb{Q}_p^\times$ . Cette dernière équation ne peut être vérifiée que pour au plus une valeur de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .  $\square$

Terminons la preuve de l'équation fonctionnelle. Rappelons que les opérateurs  $\zeta(\cdot, \cdot, s)$  et  $\zeta(\cdot, \cdot, n-s)$  sont des éléments de  $\mathrm{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ , qui est de dimension 1 sauf pour un nombre fini de valeurs de  $s$  modulo  $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .



Autrement dit, pour  $s$  en dehors de cet ensemble de valeurs exceptionnelles, il existe  $\gamma(s) \in \mathbb{C}$  tel que

$$(66) \quad \zeta(., ., s) = \gamma(s) \zeta(\hat{\cdot}, \hat{\cdot}, n - s).$$

Les fonctions zêta étant des fonctions rationnelles en  $p^s$  et l'ensemble des valeurs de  $s$  pour lesquelles  $\gamma$  est ainsi défini est dense pour la topologie de Zariski, on en déduit que l'on peut étendre  $\gamma$  en une fonction rationnelle en  $p^s$  pour laquelle l'équation (66) est vérifiée en tant qu'égalité de fonctions rationnelles en  $p^s$ .

## 2. FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n(\mathbb{A})$

Dans cette partie, on note  $G = GL_n(\mathbb{Q})$ ,  $G_{\mathbb{A}} = GL_n(\mathbb{A})$ . On pose  $K = O_n(\mathbb{R}) \times \prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p)$ , c'est un sous-groupe compact maximal de  $G_{\mathbb{A}}$ .

**2.1. Formes cuspidales.** On commence par donner la définition des formes automorphes (et cuspidales), on renvoie à [1] et [2] pour plus de détails.

On fixe un caractère unitaire  $\omega : \mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

**Définition 2.** Une forme automorphe de caractère central  $\omega$  est une fonction  $\varphi : G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$  lisse et  $G$ -invariante qui vérifie de plus :

- $\varphi$  est  $K$ -finie à droite,
- $\varphi$  est  $Z(\mathfrak{u}(\mathfrak{g}))$ -finie,
- 

$$(67) \quad \varphi(zg) = \omega(z)\varphi(g) \quad \forall g \in G_{\mathbb{A}}, z \in \mathbb{A}^\times,$$

- $\varphi$  est à croissance modérée.

On note  $\mathcal{A}(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  l'espace des formes automorphes de caractère central  $\omega$ .

On rajoute aussi une condition d'annulation dont on aura besoin pour la preuve de l'équation fonctionnelle. Ce qui donne la

**Définition 3.** Une forme cuspidale  $\varphi$  de caractère central  $\omega$  est une forme automorphe de caractère central  $\omega$  qui vérifie de plus les conditions :

$$(68) \quad \int_{U \backslash U_{\mathbb{A}}} \varphi(ug) du = 0$$

pour tout radical unipotent  $U$  d'un sous-groupe parabolique propre de  $G_{\mathbb{A}}$  et tout  $g \in G_{\mathbb{A}}$ .

On note  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  l'espace des formes cuspidales de caractère central  $\omega$ .

L'espace de Schwartz de  $M_n(\mathbb{A})$  est, par définition,  $\mathcal{S}(M_n(\mathbb{A})) = \otimes'_v \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v)) = \{\phi = \otimes \phi_v, \phi_v \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v)), \phi_v = 1_{\mathbb{Z}_v} \text{ sauf pour un nombre fini de } v\}$ .

Pour  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(69) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \varphi(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg,$$

où  $dg = \otimes_v dg_v$  est une mesure de Haar sur  $GL_n(\mathbb{A})$  et  $|\cdot|_{\mathbb{A}} = \prod_v |\cdot|_v$  est la valeur absolue adélique.

Notons  $G_{\mathbb{A}}^0 = \{g \in G_{\mathbb{A}}, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1\}$ . Comme  $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{A}^\times = Z(G_{\mathbb{A}})$ , l'application  $|\det|_{\mathbb{A}} : G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  est surjective de noyau  $G_{\mathbb{A}}^0$ .

La factorisation  $G_{\mathbb{A}} = \mathbb{R}_{>0} G_{\mathbb{A}}^0$  permet d'obtenir que

$$(70) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \int_0^\infty \int_{G_{\mathbb{A}}^0} \phi(tg) \omega(t) \varphi(g) t^{ns} dg \frac{dt}{t}$$

$$(71) \quad = \int_0^\infty \int_{G \setminus G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}.$$

Comme dans la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, on scinde l'intégrale en 1 dans le but de faire apparaître une symétrie. Autrement dit,

$$(72) \quad \begin{aligned} \zeta(\varphi, \phi, s) &= \int_0^1 \int_{G \setminus G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^\infty \int_{G \setminus G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

La seconde intégrale converge absolument pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , c'est une fonction entière. Pour la première intégrale, on fait le changement de variable  $t \mapsto t^{-1}$ , ce qui donne

$$(73) \quad \int_1^\infty \int_{G \setminus G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) \varphi(g) \omega^{-1}(t) t^{-ns} dg \frac{dt}{t}.$$

On va maintenant utiliser la formule de Poisson sur  $M_n(\mathbb{A})$ , ce qui donne pour la fonction  $x \mapsto \phi(t^{-1}xg)$  :

$$(74) \quad \sum_{x \in M_n(\mathbb{Q})} \phi(t^{-1}xg) = t^{n^2} \sum_{x \in M_n(\mathbb{Q})} \hat{\phi}(txg^{-1}),$$

on se rappelle que  $g \in G_{\mathbb{A}}^0$ , donc  $|\det g|_{\mathbb{A}} = 1$ . On scinde la somme selon le rang de la matrice et on obtient :

$$(75) \quad \begin{aligned} \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) &= t^{n^2} \sum_{x \in G} \hat{\phi}(txg^{-1}) \\ &+ \sum_{r < n, \text{rg}(x)=r} \left( t^{n^2} \hat{\phi}(txg^{-1}) - \phi(t^{-1}xg) \right). \end{aligned}$$

La contribution de la dernière somme s'avèrera nulle. Ce qui nous permet d'en déduire la

**Proposition 4.** *Si  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{A}))$ , la fonction  $\zeta(\varphi, \phi, \cdot)$  peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(76) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \zeta(\check{\varphi}, \hat{\phi}, n - s),$$

où  $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver que la contribution dans la formule de Poisson des matrices de rang  $r < n$  est effectivement nulle. On considère l'action de  $G$  par translation à droite sur l'ensemble des matrices de rang  $r$ . Chaque orbite contient un représentant de la forme  $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ , on note  $X$  l'ensemble des matrices de cette

forme. On pose  $P$  le sous-groupe parabolique de  $G$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$  et  $U$  son radical unipotent.

On réécrit la somme sur les matrices de rang  $r$  grâce au système de représentant  $X$ ,

$$(77) \quad \sum_{\text{rg}(x)=r} \phi(xg) = \sum_{\gamma \in P \backslash G} \sum_{x \in X} \phi(x\gamma g).$$

On en déduit que la contribution des matrices de rang  $r$  dans la seconde intégrale est

$$(78) \quad \int_{P \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1}xg) \varphi(g) dg.$$

De plus, on remarque que,  $xu = x$ , pour tout  $x \in X$  et  $u \in U_{\mathbb{A}}$ . Ce qui nous permet de réécrire cette intégrale sous la forme

$$(79) \quad \int_{PU_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1}xg) \int_{U \backslash U_{\mathbb{A}}} \varphi(ug) du dg.$$

Cette dernière intégrale s'annule, car  $f$  est cuspidale. On montre de même de l'intégrale correspondant au terme en  $\hat{f}$  sur les matrices de rang  $r < n$  s'annule aussi. Ce qui nous donne, grâce à la formule de Poisson et le raisonnement précédent, la formule

$$(80) \quad \begin{aligned} \zeta(\varphi, \phi, s) &= \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \hat{f}(txg^{-1}) \varphi(g) \omega^{-1}(t) t^{n(n-s)} dg \frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'équation fonctionnelle en effectuant le changement de variable  $g \mapsto g^{-1}$  dans la première intégrale.  $\square$

**2.2. Représentations automorphes.** L'espace des formes cuspidales  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  est stable par l'action de  $U(\mathfrak{g})$  par opérateurs différentiels et par translation à droite de  $O_n(\mathbb{R})$  et  $GL_n(\mathbb{A}_f)$ , c'est un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$ -module.

Un coefficient  $f$  de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  est de la forme

$$(81) \quad f(g) = \langle \pi(g)\varphi, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg) \tilde{\varphi}(h) dh,$$

où  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega^{-1})$ .

Pour un coefficient  $f$  de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(82) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) f(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg.$$

On peut déduire les propriétés de cette fonction zêta grâce à ce que l'on vient de faire pour les formes cuspidales. Plus précisément, on a

$$(83) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg) \tilde{\varphi}(h) dh |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg$$

$$(84) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(h^{-1}g) \varphi(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg |\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh$$

$$(85) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \zeta(\varphi, \phi(h^{-1} \cdot), s) |\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh,$$

où la deuxième égalité s'obtient grâce au changement de variable  $g \mapsto h^{-1}g$ . Ceci nous permet de démontrer la

**Proposition 5.** *Si  $f$  est un coefficient de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ , la fonction  $\zeta(f, \phi, \cdot)$  peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(86) \quad \zeta(f, \phi, s) = \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s),$$

où  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ .

*Démonstration.* On utilise l'équation fonctionnelle (76) et le fait que la transformée de Fourier de  $\phi(h^{-1} \cdot)$  est  $|\det h|_{\mathbb{A}}^n \hat{\phi}(\cdot h)$ ,

$$(87) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \zeta(\tilde{\varphi}, \hat{\phi}(\cdot h), n - s) |\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh$$

$$(88) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(gh) \varphi(g^{-1}) |\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg |\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh.$$

On effectue maintenant le changement de variable  $g \mapsto gh^{-1}$ , ce qui donne

$$(89) \quad \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(g) \varphi(hg^{-1}) |\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg dh,$$

qui est bien  $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s)$ .  $\square$

Si l'on combine cette proposition avec les résultats locaux, on peut construire la fonction  $L$  attachée à une représentation cuspidale irréductible.

**Définition 4.** *Une représentation cuspidale est un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$ -module qui est isomorphe à un sous-quotient de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ .*

Plus précisément, on montre le

**Théorème 2.** *Soit  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible.*

*Le produit  $L(s, \pi) = \prod_v L(s, \pi_v)$ , qui est défini pour  $\operatorname{Re}(s) > n$ , se prolonge en une fonction entière. De plus,  $L(s, \pi)$  vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(90) \quad L(s, \pi) = \epsilon(s, \pi) L(1 - s, \tilde{\pi}),$$

où  $\epsilon(s, \pi) = \prod_v \epsilon(s, \pi_v)$ .

*Démonstration.* La représentation  $\pi$  se décompose en facteurs locaux,  $\pi \simeq \otimes'_v \pi_v$ , où  $\pi_v$  est une représentation admissible irréductible de  $GL_n(\mathbb{Q}_v)$  (un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R}))$ -module irréductible pour la place archimédienne) et pour presque toutes les places  $\pi_v$  est sphérique (contient la représentation unité de  $GL_n(\mathbb{Z}_v)$ ).

D'après les résultats locaux, pour chaque place  $v$ , il existe un nombre fini  $(\phi_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$  d'éléments de  $\mathcal{S}(M_v)$  et de coefficient  $(f_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$  de  $\pi_v$  tel que

$$(91) \quad \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n - 1)) = L(s, \pi_v).$$

De plus, d'après l'équation fonctionnelle locale

$$(92) \quad \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1 - s + \frac{1}{2}(n - 1)) = \epsilon(s, \pi_v) L(1 - s, \tilde{\pi}_v).$$

Notons  $I = \prod_v I_v$ . Pour presque toutes les places  $v$ ,  $\pi_v$  est sphérique,  $I_v$  est un singleton ; donc  $I$  est fini.

Pour  $\alpha = (\alpha_v) \in I$ , on pose

$$(93) \quad \phi_\alpha = \prod_v \phi_{\alpha_v}, \quad f_\alpha = \prod_v f_{\alpha_v}.$$

Alors  $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$  et  $f_\alpha$  est un coefficient de  $\pi$  qui est un sous-quotient de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ . De plus,

$$(94) \quad \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s) = \prod_v \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s).$$

On en déduit que

$$(95) \quad L(s, \pi) = \prod_v L(s, \pi_v) = \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(96) \quad = \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1))$$

est une somme finie de fonction zêta, qui chacune se prolonge en une fonction entière. De plus,

$$(97) \quad L(s, \pi) = \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(98) \quad = \sum_{\alpha \in I} \zeta(\check{f}_\alpha, \hat{\phi}_\alpha, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(99) \quad = \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(100) \quad = \prod_v \epsilon(s, \pi_v) L(1 - s, \tilde{\pi}_v)$$

$$(101) \quad = \epsilon(s, \pi) L(1 - s, \tilde{\pi}).$$

□

## RÉFÉRENCES

- [1] D. BUMP, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.
- [2] D. GOLDFELD AND J. HUNDLEY, *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group* ; no. vol. 1 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2011.