

## FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n$

### 1. FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n(\mathbb{Q}_p)$

Dans la suite, on notera  $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$ ,  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$  et  $(\pi, V)$  une représentation admissible irréductible de  $G$ .

Les coefficients de  $\pi$  sont les fonctions de la forme  $g \in G \mapsto \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle$ , où  $v \in V$  et  $\tilde{v} \in \tilde{V}$ .

On note  $M_n$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions  $\phi : M_n \rightarrow \mathbb{C}$  localement constantes à support compact.

Si  $f$  est un coefficient de  $\pi$ ,  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(1) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g)f(g)|\det g|_p^s dg.$$

On fixe un caractère non trivial  $\psi$  de  $\mathbb{Q}_p$  et on pose

$$(2) \quad \hat{\phi}(y) = \int_{M_n} \phi(x)\psi(\text{Tr}(xy))dx,$$

où  $dx$  est une mesure de Haar sur  $M_n$ .

On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$(3) \quad \zeta(f, \phi, s) = \gamma(s)\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s),$$

où  $\gamma$  est une fonction rationnelle en  $p^s$  et  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ .

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

**Propriété 1.** *Les opérateurs  $\zeta(., ., s)$  et  $\zeta(\check{.}, \hat{.}, 1-s)$  sont des opérateurs d'entrelacements, éléments de  $\text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ .*

On précise que l'action de  $G \times G$  sur  $\mathcal{S}$  est  $(g_1, g_2) \cdot \phi(x) = \phi(g_1^{-1}xg_2)$ . De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de  $\pi$  avec l'espace  $\tilde{V} \otimes V$ ; l'action de  $G \times G$  sur  $\tilde{\pi} \boxtimes \pi$  est  $(g_1, g_2) \cdot f(g) = f(g_1^{-1}gg_2)$ .

*Démonstration.* L'action de  $G \times G$  sur  $\zeta(f, \phi, s)$  donne

$$(4) \quad \int_G \phi(g_1^{-1}gg_2)f(g_1^{-1}gg_2)|\det g|_p^s dg.$$

On effectue le changement de variable  $g \mapsto g_1gg_2^{-1}$ , le groupe  $G$  étant unimodulaire l'intégrale devient

$$(5) \quad |\det g_1g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g)f(g)|\det g|_p^s dg.$$

D'autre part, l'action de  $G \times G$  sur  $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s)$  donne

$$(6) \quad \int_G \phi_{g_1, g_2}(\hat{g})f_{g_1, g_2}(\check{g})|\det g|_p^{1-s} dg,$$

où l'on a noté  $\phi_{g_1, g_2}(x) = \phi(g_1^{-1}xg_2)$  et  $f_{g_1, g_2}(g) = f(g_1^{-1}gg_2)$ .

Un calcul immédiat, montre que  $f_{g_1, g_2}(g) = \check{f}(g_2^{-1}gg_1)$ . De plus,

$$(7) \quad \phi_{g_1, g_2}(g) = \int_{M_n} \phi(g_1^{-1}xg_2)\psi(\text{Tr}(xg))dx.$$

Après le changement de variable  $x \mapsto g_1xg_2^{-1}$  l'intégrale devient

$$(8) \quad |\det g_1^{-1}g_2|_p \int_{M_n} \phi(x)\psi(\text{Tr}(xg_2^{-1}gg_1))dx,$$

qui n'est autre que  $|\det g_1g_2^{-1}|_p \hat{\phi}(g_2^{-1}gg_1)$ . L'intégrale (6) devient donc, après le changement de variable  $g \mapsto g_2gg_1^{-1}$ ,

$$(9) \quad |\det g_1^{-1}g_2|_p |\det g_2g_1^{-1}|_p^{1-s} \int_G \hat{\phi}(g)\check{f}(g)|\det g|_p^{1-s} dg.$$

□

Dans le but de comprendre l'espace  $\text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ , on va décomposer  $S$  selon le rang des matrices. Soit  $r$  un entier compris entre 1 et  $n$ , on note  $S_r$  l'espace des matrices  $n \times n$  de rang  $r$  et  $S^{(r)}$  l'espace des matrices  $n \times n$  de rang  $< r$ .

Si  $X$  est un espace localement compact totalement discontinu, on note  $C_c^\infty(X)$  l'espace des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  localement constantes à support compact. L'espace  $S$  est donc égal à  $C_c^\infty(M_n)$ .

Le groupe  $G$  est un ouvert de  $M_n$  et  $M_n \setminus G = S^{(n)}$ . Cette décomposition donne la suite exacte

$$(10) \quad 0 \rightarrow C_c^\infty(G) \rightarrow C_c^\infty(M_n) \rightarrow C_c^\infty(S^{(n)}) \rightarrow 0,$$

où l'inclusion de  $C_c^\infty(G)$  dans  $C_c^\infty(M_n)$  se fait par extension par 0 et l'application  $C_c^\infty(M_n) \rightarrow C_c^\infty(S^{(n)})$  est l'application de restriction.

Cette suite exacte commute avec l'action de  $G \times G$ , on la voit donc comme une suite exacte de représentations de  $G \times G$ . On applique le foncteur  $\text{Hom}_{G \times G}(\cdot, (\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes (|\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}))$ , qui est exact à gauche, on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$(11) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\cdot|_p^s) \leq \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) \\ + \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S^{(n)}), |\cdot|_p^s),$$

où l'on a abrégé  $|\cdot|_p^s = |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}$ .

On décompose ensuite  $S^{(n)}$  selon le rang  $r$ , ce qui donne, en utilisant le même raisonnement, que

$$(12) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes S, |\cdot|_p^s) \leq \sum_{r=0}^n \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s).$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dimension de ces différents espaces, pour cela on dispose de la

**Proposition 1.** *Pour  $r = n$  ( $S_r = G$ ), on a*

$$(13) \quad \dim \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) = 1;$$

*et pour  $r < n$ , on a*

$$(14) \quad \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s) = 0$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Commençons par le cas  $r = n$ ,

$$(15) \quad \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |\cdot|_p^s) \simeq \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, C^\infty(G))$$

$$(16) \quad \simeq \text{Hom}_H((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, \mathbb{C})$$

$$(17) \quad \simeq \text{Hom}_G(\tilde{\pi}, \tilde{\pi});$$

où le groupe  $H$  désigne la diagonale de  $G \times G$ . Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

Le premier isomorphisme provient de la dualité entre  $C_c^\infty(G)$  et  $C^\infty(G)$ . Le deuxième isomorphisme est une application de la réciprocité de Frobenius avec l'identification  $C^\infty(G) = \text{Ind}_H^{G \times G}(1)$ . Pour finir, le dernier isomorphisme provient du fait que l'action diagonale de  $H$  sur  $\tilde{\pi} \boxtimes \pi$  correspond à l'action de  $G$  sur  $\tilde{\pi} \otimes \pi$  et que  $|\cdot|_p^{-s}$  est trivial sur  $H$ .

Passons au cas  $r < n$ ,  $S_r$  est l'orbite de  $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sous l'action de  $G \times G$  par translation à gauche du premier facteur et translation à droite de l'inverse sur le second facteur. On calcule le stabilisateur,

$$(18) \quad H = \text{Stab}_{G \times G} \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & e \end{pmatrix} \right) \right\} \subset G \times G,$$

où  $a$  décrit  $GL_r(\mathbb{Q}_p)$ ;  $c, e$  décrivent  $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$ ;  $b$  décrit  $M_{r, n-r}(\mathbb{Q}_p)$  et  $d$  décrit  $M_{n-r, r}(\mathbb{Q}_p)$ .

On note  $P = MN$  le sous-groupe parabolique de  $G$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  et  $\bar{P} = M\bar{N}$  le groupe parabolique opposé, alors  $H \subset P \times \bar{P}$ .

$$(19)$$

$$\text{Hom}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |\cdot|_p^s) \simeq \text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes |\cdot|_p^{-s}, \text{Ind}_H^{G \times G}(\delta_H))$$

$$(20) \quad \simeq \text{Hom}_{M \times M}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}} \otimes |\cdot|_p^{-s}, \text{Ind}_{(M \times M) \cap H}^{M \times M}(\delta_H))$$

$$(21) \quad \simeq \text{Hom}_{(M \times M) \cap H}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}}, \delta_H \otimes |\cdot|_p^s),$$

où  $\delta_H$  est le caractère modulaire de  $H$ .

Le premier isomorphisme provient de l'identification de  $C_c^\infty(S_r) = \mathbf{c} - \text{Ind}_H^{G \times G}(1)$  et de la dualité entre  $\mathbf{c} - \text{Ind}_H^{G \times G}(1)$  et  $\text{Ind}_H^{G \times G}(\delta_H)$ . Pour le deuxième isomorphisme, on utilise la transitivité de l'induction,  $H \subset P \times \bar{P} \subset G \times G$ , et l'adjonction entre  $\text{Ind}_{P \times \bar{P}}^{G \times G}$  et le foncteur de Jacquet; en remarquant, que  $N \times \bar{N}$  agit trivialement sur  $|\cdot|_p^s$ . Le dernier isomorphisme n'est autre que la réciprocité de Frobenius.

On utilise le fait que  $(\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}}$  est de longueur finie; en effet le foncteur de Jacquet préserve la longueur finie. Il existe donc des représentations admissibles  $V_i$  de  $M \times M$  telles que

$$(22) \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l = (\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \bar{N}},$$

avec  $V_i/V_{i-1}$  irréductibles.

En reprenant un raisonnement que l'on a déjà fait, la suite exacte de représentations de  $M \times M$

$$(23) \quad 0 \rightarrow V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_i/V_{i-1} \rightarrow 0$$

permet d'obtenir l'inégalité suivante :

(24)

$$\dim \text{Hom}_{(M \times M) \cap H}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi)_{N \times \tilde{N}}, |\cdot|_p^s \delta_H) \leq \sum_{i=1}^l \dim \text{Hom}_{(M \times M) \cap H}(V_i/V_{i-1}, |\cdot|_p^s \delta_H).$$

Il nous suffit donc de montrer que ces derniers espaces sont nuls sauf pour au plus une valeur de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .

En tant que représentation irréductible de  $M \times M \simeq GL_r^2(\mathbb{Q}_p) \times GL_{n-r}^2(\mathbb{Q}_p)$ , on peut décomposer  $V_i/V_{i-1} \otimes \delta_H^{-1}$  sous la forme  $\sigma^{(i)} \boxtimes (\tau_1^{(i)} \boxtimes \tau_2^{(i)})$ , où  $\sigma^{(i)}$  est une représentation irréductible de  $GL_r^2(\mathbb{Q}_p)$  et  $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}$  sont des représentations irréductibles de  $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$ .

D'après le lemme de Schur, la représentation  $\tau_2^{(i)}$  admet un caractère central  $\omega^{(i)}$ . On en déduit que

$$(25) \quad \text{Hom}_{(M \times M) \cap H}(V_i/V_{i-1}, |\cdot|_p^s \delta_H) = 0,$$

sauf si  $\omega^{(i)} = |\cdot|_p^{-(n-r)s}$  sur  $\mathbb{Q}_p^\times$ . Cette dernière équation ne peut être vérifiée que pour au plus une valeur de  $s$  modulo  $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .  $\square$

Terminons la preuve de l'équation fonctionnelle. Rappelons que les opérateurs  $\zeta(\cdot, \cdot, s)$  et  $\zeta(\cdot, \cdot, 1-s)$  sont des éléments de  $\text{Hom}_{G \times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$ , qui est de dimension 1 sauf pour un nombre fini de valeurs de  $s$  modulo  $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{2i\pi}{(n-r)\log p} \mathbb{Z}$ .

Autrement dit, pour  $s$  en dehors de cet ensemble de valeurs exceptionnelles, il existe  $\gamma(s) \in \mathbb{C}$  tel que

$$(26) \quad \zeta(\cdot, \cdot, s) = \gamma(s) \zeta(\cdot, \cdot, 1-s).$$

Les fonctions zêta étant des fonctions rationnelles en  $p^s$  et l'ensemble des valeurs de  $s$  pour lesquelles  $\gamma$  est ainsi défini est dense pour la topologie de Zariski, on en déduit que l'on peut étendre  $\gamma$  en une fonction rationnelle en  $p^s$  pour laquelle l'équation (26) est vérifiée en tant qu'égalité de fonctions rationnelles en  $p^s$ .

## 2. FONCTIONS ZÊTA SUR $GL_n(\mathbb{A})$

Dans cette partie, on note  $G = GL_n(\mathbb{Q})$ ,  $G_{\mathbb{A}} = GL_n(\mathbb{A})$ . On pose  $K = O_n(\mathbb{R}) \times \prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p)$ , c'est un sous-groupe compact maximal de  $G_{\mathbb{A}}$ .

**2.1. Formes cuspidales.** On commence par donner la définition des formes automorphes (et cuspidales), on renvoie à [1] et [2] pour plus de détails.

On fixe un caractère unitaire  $\omega : \mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

**Définition 1.** Une forme automorphe de caractère central  $\omega$  est une fonction  $\varphi : G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$  lisse et  $G$ -invariante qui vérifie de plus :

- $\varphi$  est  $K$ -finie à droite,
- $\varphi$  est  $Z(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$ -finie,
- 

$$(27) \quad \varphi(zg) = \omega(z) \varphi(g) \quad \forall g \in G_{\mathbb{A}}, z \in \mathbb{A}^\times,$$

- $\varphi$  est à croissance modérée.

On note  $\mathcal{A}(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  l'espace des formes automorphes de caractère central  $\omega$ .

On rajoute aussi une condition d'annulation dont on aura besoin pour la preuve de l'équation fonctionnelle. Ce qui donne la

**Définition 2.** Une forme cuspidale  $\varphi$  de caractère central  $\omega$  est une forme automorphe de caractère central  $\omega$  qui vérifie de plus les conditions :

$$(28) \quad \int_{\mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_{\mathbb{A}}} \varphi(ug) du = 0$$

pour tout radical unipotent  $\mathcal{U}$  d'un sous-groupe parabolique propre de  $G_{\mathbb{A}}$  et tout  $g \in G_{\mathbb{A}}$ .

On note  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  l'espace des formes cuspidales de caractère central  $\omega$ .

L'espace de Schwartz de  $M_n(\mathbb{A})$  est, par définition,  $\mathcal{S}(M_n(\mathbb{A})) = \otimes'_v \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v)) = \{\phi = \otimes \phi_v, \phi_v \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v)), \phi_v = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_v} \text{ sauf pour un nombre fini de } v\}$ .

Pour  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{A}))$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(29) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \varphi(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg,$$

où  $dg = \otimes_v dg_v$  est une mesure de Haar sur  $GL_n(\mathbb{A})$  et  $|\cdot|_{\mathbb{A}} = \prod_v |\cdot|_v$  est la valeur absolue adélique.

Notons  $G_{\mathbb{A}}^0 = \{g \in G_{\mathbb{A}}, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1\}$ . Comme  $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{A}^\times = Z(G_{\mathbb{A}})$ , l'application  $|\det|_{\mathbb{A}} : G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  est surjective de noyau  $G_{\mathbb{A}}^0$ .

La factorisation  $G_{\mathbb{A}} = \mathbb{R}_{>0} G_{\mathbb{A}}^0$  permet d'obtenir que

$$(30) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \int_0^\infty \int_{G_{\mathbb{A}}^0} \phi(tg) \omega(t) \varphi(g) t^{ns} dg \frac{dt}{t}$$

$$(31) \quad = \int_0^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}.$$

Comme dans la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, on scinde l'intégrale en 1 dans le but de faire apparaître une symétrie. Autrement dit,

$$(32) \quad \begin{aligned} \zeta(\varphi, \phi, s) &= \int_0^1 \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

La seconde intégrale converge absolument pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , c'est une fonction entière. Pour la première intégrale, on fait le changement de variable  $t \mapsto t^{-1}$ , ce qui donne

$$(33) \quad \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) \varphi(g) \omega^{-1}(t) t^{-ns} dg \frac{dt}{t}.$$

On va maintenant utiliser la formule de Poisson sur  $M_n(\mathbb{A})$ , ce qui donne pour la fonction  $x \mapsto \phi(t^{-1}xg)$  :

$$(34) \quad \sum_{x \in M_n(\mathbb{Q})} \phi(t^{-1}xg) = t^{n^2} \sum_{x \in M_n(\mathbb{Q})} \hat{\phi}(txg^{-1}),$$

on se rappelle que  $g \in G_{\mathbb{A}}^0$ , donc  $|\det g|_{\mathbb{A}} = 1$ . On scinde la somme selon le rang de la matrice et on obtient :

$$(35) \quad \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) = t^{n^2} \sum_{x \in G} \hat{\phi}(txg^{-1}) + \sum_{r < n, rg(x)=r} \left( t^{n^2} \hat{\phi}(txg^{-1}) - \phi(t^{-1}xg) \right).$$

La contribution de la dernière somme s'avèrera nulle. Ce qui nous permet d'en déduire la

**Proposition 2.** *Si  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\phi \in S(M_n(\mathbb{A}))$ , la fonction  $\zeta(\varphi, \phi, \cdot)$  peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(36) \quad \zeta(\varphi, \phi, s) = \zeta(\check{\varphi}, \hat{\phi}, n - s),$$

où  $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver que la contribution dans la formule de Poisson des matrices de rang  $r < n$  est effectivement nulle. On considère l'action de  $G$  par translation à droite sur l'ensemble des matrices de rang  $r$ . Chaque orbite contient un représentant de la forme  $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ , on note  $X$  l'ensemble des matrices de cette

forme. On pose  $P$  le sous-groupe parabolique de  $G$  des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$  et  $U$  son radical unipotent.

On réécrit la somme sur les matrices de rang  $r$  grâce au système de représentant  $X$ ,

$$(37) \quad \sum_{rg(x)=r} \phi(xg) = \sum_{\gamma \in P \backslash G} \sum_{x \in X} \phi(x\gamma g).$$

On en déduit que la contribution des matrices de rang  $r$  dans la seconde intégrale est

$$(38) \quad \int_{P \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1}xg) \varphi(g) dg.$$

De plus, on remarque que,  $xu = x$ , pour tout  $x \in X$  et  $u \in U_{\mathbb{A}}$ . Ce qui nous permet de réécrire cette intégrale sous la forme

$$(39) \quad \int_{PU_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1}xg) \int_{U \backslash U_{\mathbb{A}}} \varphi(ug) du dg.$$

Cette dernière intégrale s'annule, car  $f$  est cuspidale. On montre de même de l'intégrale correspondant au terme en  $\hat{\phi}$  sur les matrices de rang  $r < n$  s'annule aussi. Ce qui nous donne, grâce à la formule de Poisson et le raisonnement précédent, la formule

$$(40) \quad \begin{aligned} \zeta(\varphi, \phi, s) &= \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \hat{\phi}(txg^{-1}) \varphi(g) \omega^{-1}(t) t^{n(n-s)} dg \frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^\infty \int_{G \backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) \varphi(g) \omega(t) t^{ns} dg \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'équation fonctionnelle en effectuant le changement de variable  $g \mapsto g^{-1}$  dans la première intégrale.  $\square$

**2.2. Représentations automorphes.** L'espace des formes cuspidales  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  est stable par l'action de  $U(\mathfrak{g})$  par opérateurs différentiels et par translation à droite de  $O_n(\mathbb{R})$  et  $GL_n(\mathbb{A}_f)$ , c'est un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$ -module.

Un coefficient  $f$  de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  est de la forme

$$(41) \quad f(g) = \langle \pi(g)\varphi, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg) \tilde{\varphi}(h) dh,$$

où  $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega^{-1})$ .

Pour un coefficient  $f$  de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$  et  $s \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(42) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) f(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg.$$

On peut déduire les propriétés de cette fonction zêta grâce à ce que l'on vient de faire pour les formes cuspidales. Plus précisément, on a

$$(43) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg) \tilde{\varphi}(h) dh |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg$$

$$(44) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(h^{-1}g) \varphi(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg |\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh$$

$$(45) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \zeta(\varphi, \phi(h^{-1} \cdot), s) |\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh,$$

où la deuxième égalité s'obtient grâce au changement de variable  $g \mapsto h^{-1}g$ . Ceci nous permet de démontrer la

**Proposition 3.** *Si  $f$  est un coefficient de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ , la fonction  $\zeta(f, \phi, \cdot)$  peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(46) \quad \zeta(f, \phi, s) = \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s),$$

où  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ .

*Démonstration.* On utilise l'équation fonctionnelle (36) et le fait que la transformée de Fourier de  $\phi(h^{-1} \cdot)$  est  $|\det h|_{\mathbb{A}}^n \hat{\phi}(\cdot, h)$ ,

$$(47) \quad \zeta(f, \phi, s) = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \zeta(\check{\varphi}, \hat{\phi}(\cdot, h), n - s) |\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh$$

$$(48) \quad = \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(gh) \varphi(g^{-1}) |\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg |\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh.$$

On effectue maintenant le changement de variable  $g \mapsto gh^{-1}$ , ce qui donne

$$(49) \quad \int_{\mathbb{A} \times G \backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(g) \varphi(hg^{-1}) |\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg dh,$$

qui est bien  $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s)$ .  $\square$

Si l'on combine cette proposition avec les résultats locaux, on peut construire la fonction  $L$  attachée à une représentation cuspidale irréductible.

**Définition 3.** *Une représentation cuspidale est un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$ -module qui est isomorphe à un sous-quotient de  $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ .*

Plus précisément, on montre le

**Théorème 1.** *Soit  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible.*

*Le produit  $L(s, \pi) = \prod_v L(s, \pi_v)$ , qui est défini pour  $\operatorname{Re}(s) > n$ , se prolonge en une fonction entière. De plus,  $L(s, \pi)$  vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(50) \quad L(s, \pi) = \epsilon(s, \pi) L(1 - s, \tilde{\pi}),$$

où  $\epsilon(s, \pi) = \prod_v \epsilon(s, \pi_v)$ .

*Démonstration.* La représentation  $\pi$  se décompose en facteurs locaux,  $\pi \simeq \otimes'_v \pi_v$ , où  $\pi_v$  est une représentation admissible irréductible de  $GL_n(\mathbb{Q}_v)$  (un  $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R}))$ -module irréductible pour la place archimédienne) et pour presque toutes les places  $\pi_v$  est sphérique (contient la représentation unité de  $GL_n(\mathbb{Z}_v)$ ).

D'après les résultats locaux, pour chaque place  $v$ , il existe un nombre fini  $(\phi_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$  d'éléments de  $\mathcal{S}(M_v)$  et de coefficient  $(f_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$  de  $\pi_v$  tel que

$$(51) \quad \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n-1)) = L(s, \pi_v).$$

De plus, d'après l'équation fonctionnelle locale

$$(52) \quad \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1)) = \epsilon(s, \pi_v) L(1 - s, \tilde{\pi}_v).$$

Notons  $I = \prod_v I_v$ . Pour presque toutes les places  $v$ ,  $\pi_v$  est sphérique,  $I_v$  est un singleton ; donc  $I$  est fini.

Pour  $\alpha = (\alpha_v) \in I$ , on pose

$$(53) \quad \phi_\alpha = \prod_v \phi_{\alpha_v}, \quad f_\alpha = \prod_v f_{\alpha_v}.$$

Alors  $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(M_\mathbb{A})$  et  $f_\alpha$  est un coefficient de  $\pi$  qui est un sous-quotient de  $\mathcal{A}_0(G_\mathbb{A}, \omega)$ . De plus,

$$(54) \quad \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s) = \prod_v \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s).$$

On en déduit que

$$(55) \quad L(s, \pi) = \prod_v L(s, \pi_v) = \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(56) \quad = \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1))$$



est une somme finie de fonction zêta, qui chacune se prolonge en une fonction entière. De plus,

$$(57) \quad L(s, \pi) = \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(58) \quad = \sum_{\alpha \in I} \zeta(\check{f}_\alpha, \hat{\phi}_\alpha, 1-s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(59) \quad = \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1-s + \frac{1}{2}(n-1))$$

$$(60) \quad = \prod_v \epsilon(s, \pi_v) L(1-s, \tilde{\pi}_v)$$

$$(61) \quad = \epsilon(s, \pi) L(1-s, \tilde{\pi}).$$

□

#### RÉFÉRENCES

- [1] D. BUMP, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.
- [2] D. GOLDFELD AND J. HUNDLEY, *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group* ; no. vol. 1 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2011.