FONCTIONS ZÊTA SUR GL_n

1. Fonctions zêta sur $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

Dans la suite, on notera $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$, dg une mesure de Haar sur G et (π, V) une représentation admissible irréductible de G. On pose $K = GL_n(\mathbb{Z}_p)$, c'est un sous-groupe compact maximal de G.

Définition 1. *Une représentation $\pi : G \to GL(V)$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est dite admissible si elle vérifie :*
- *Pour tout $v \in V$, le stabilisateur de v dans G, $\{g \in G, \pi(g)v = v\}$, est un sous-groupe ouvert de G,*
- *Pour tout sous-groupe ouvert H de G, le sous-espace*

$$V^H = \{v \in V, \pi(h)v = v, \forall h \in H\}$$

des vecteurs stable par H est de dimension fini.

Les coefficients de π sont les fonctions de la forme $g \in G \mapsto < \pi(g)v, \tilde{v} >$, où $v \in V$ et $\tilde{v} \in \tilde{V}$. Alors $\check{f}(g) = f(g^{-1}) = < v, \tilde{\pi}(g)\tilde{v} >$ est un coefficient de $\tilde{\pi}$.

On note M_n l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\phi : M_n \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Si f est un coefficient de π, $\phi \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s \, dg. \tag{1}$$

On fixe un caractère non trivial ψ de $\mathbb{Q}_p$ et on pose

$$\hat{\phi}(y) = \int_{M_n} \phi(x) \psi(\mathrm{Tr}(xy)) dx, \tag{2}$$

où dx est une mesure de Haar sur M_n, normalisée telle que $\hat{\hat{\phi}}(x) = \phi(-x)$.

L'objectif de cette section est de montrer le

Théorème 1. *(1) Il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > s_0$, $\phi \in \mathcal{S}$ et f un coefficient de π, les intégrales*

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s \, dg \tag{3}$$

$$\zeta(\check{f}, \phi, s) = \int_G \phi(g) \check{f}(g) |\det g|_p^s \, dg \tag{4}$$

convergent absolument.

(2) Ces intégrales sont des fonctions rationnelles en p^{-s}. Plus précisément, il existe des polynômes Q et $\tilde{Q}$ indépendant de f et ϕ avec $Q(0) \neq 0$ (respectivement $\tilde{Q}(0) \neq 0$) et des polynômes $\Xi(f, \phi, s)$, $\tilde{\Xi}(\check{f}, \phi, s)$ en p^s et p^{-s} tel

que

$$\zeta(f,\phi,s+\frac{1}{2}(n-1))=\frac{\Xi(f,\phi,s)}{Q(p^{-s})}, \tag{5}$$

$$\zeta(\check{f},\phi,s+\frac{1}{2}(n-1))=\frac{\tilde{\Xi}(\check{f},\phi,s)}{\tilde{Q}(p^{-s})}, \tag{6}$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$, $\phi\in\mathcal{S}$ *et* f *coefficient de* π.

(3) On peut choisir un nombre fini, de coefficients f_i *de* π *(respectivement* $\tilde{\pi}$*) et de fonctions* $\phi_i\in\mathcal{S}$*, telles que* $\sum_i \Xi(f_i,\phi_i,s)$ *(respectivement* $\sum_i \tilde{\Xi}(f_i,\phi_i,s)$*) soit une constante non nulle.*

(4) Il existe une fonction $\epsilon(s,\pi,\psi)$*, qui est à une constante prés une puissance de* p^{-s}*, telle que*

$$\tilde{\Xi}(\check{f},\hat{\phi},1-s)=\epsilon(s,\pi,\psi)\Xi(f,\phi,s), \tag{7}$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$, $\phi\in\mathcal{S}$ *et* f *coefficient de* π.

On normalise Q et $\tilde{Q}$ tel que $Q(0)=\tilde{Q}(0)=1$, on pose alors

$$L(s,\pi)=\frac{1}{Q(p^{-s})},\quad L(s,\tilde{\pi})=\frac{1}{\tilde{Q}(p^{-s})}. \tag{8}$$

L'existence de la fonction $\epsilon(s,\pi,\psi)$ est équivalente à l'existence d'une fonction méromorphe $\gamma(s,\pi,\psi)$ telle que

$$\zeta(\check{f},\hat{\phi},1-s+\frac{1}{2}(n-1))=\gamma(s,\pi,\psi)\zeta(f,\phi,s), \tag{9}$$

pour tout $\phi\in\mathcal{S}$ et f coefficient de π. Ces deux fonctions étant reliées par la relation

$$\epsilon(s,\pi,\psi)=\gamma(s,\pi,\psi)\frac{L(s,\pi)}{L(1-s,\tilde{\pi})}. \tag{10}$$

En effet, supposons l'existence de $\gamma(s,\pi,\psi)$ alors $\epsilon(s,\pi,\psi)$ vérifie

$$\tilde{\Xi}(\check{f},\hat{\phi},1-s)=\epsilon(s,\pi,\psi)\Xi(f,\phi,s). \tag{11}$$

On a de plus une égalité similaire avec $\epsilon(s,\tilde{\pi},\psi)$,

$$\Xi(f,s,\hat{\hat{\phi}},s)=\epsilon(1-s,\tilde{\pi},\psi)\tilde{\Xi}(\check{f},\hat{\phi},1-s). \tag{12}$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser la formule $\hat{\hat{\phi}}(x)=\phi(-x)$ pour obtenir la relation

$$\epsilon(s,\pi,\psi)\epsilon(1-s,\tilde{\pi},\psi)=\omega(-1), \tag{13}$$

où ω est le caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\pi(z)=\omega(z)1$ pour $z\in\mathbb{Q}_p^\times$. D'après (2) et (3) du théorème, $\epsilon(s,\pi,\psi)$ est alors un polynôme en p^s et p^{-s}, on en déduit que $\epsilon(s,\pi,\psi)$ est une puissance de p^{-s} à constante prés.

1.1. **Réduction au cas supercuspidal.**

Si π est une représentation admissible (non nécessairement irréductible) de G, les assertions du théorème font sens pour π et $\tilde{\pi}$, mais peuvent être fausse si π n'est pas irréductible.

Supposons le théorème vrai pour π et $\tilde{\pi}$. Soit σ une sous-représentation irréductible de π. Alors les coefficients de σ sont de la forme $<\pi(g)v,\tilde{v}>$ avec $v\in V$ et $\tilde{v}\in\tilde{V}$. Cependant, toutes ces fonctions ne sont pas des coefficients de σ. On en déduit la

Proposition 1. *Il existe des polynômes* R *et* $\tilde{R}$ *en* p^{-s} *tel que*

$$L(s,\sigma) = R(p^{-s})L(s,\pi), \tag{14}$$

$$L(s,\tilde{\sigma}) = p^{\tilde{-}s}L(s,\tilde{\pi}). \tag{15}$$

De plus,

$$\gamma(s,\sigma,\psi) = \gamma(s,\pi,\psi). \tag{16}$$

Soit P un sous-groupe parabolique propre maximal de G et U son radical unipotent alors $P/U \simeq G' \times G''$, où l'on note $G' = \mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{Q}_p)$ et $G'' = \mathrm{GL}_{n''}(\mathbb{Q}_p)$.

Soit σ' (respectivement σ'') une représentation admissible de G' (respectivement G''). On ne les suppose pas irréductible, on suppose cependant qu'ils admettent des caractères centraux ω' et ω''. Alors $\sigma' \boxtimes \sigma''$ est naturellement une représentation de P/U, donc une représentation de P triviale sur U.

Proposition 2. *Notons* $\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma' \boxtimes \sigma'')$. *Supposons le théorème vrai pour* σ' *et* σ''. *Alors le théorème est vrai pour* π. *De plus, on a*

$$L(s,\pi) = L(s,\sigma')L(s,\sigma''), \tag{17}$$

$$L(s,\tilde{\pi}) = L(s,\tilde{\sigma}')L(s,\tilde{\sigma}''), \tag{18}$$

$$\epsilon(s,\pi,\psi) = \epsilon(s,\sigma',\psi)\epsilon(s,\sigma'',\psi). \tag{19}$$

1.2. **Équation fonctionnelle par dévissage.** On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$\zeta(f,\phi,s) = \gamma(s)\zeta(\check{f},\hat{\phi},n-s), \tag{20}$$

où γ est une fonction rationnelle en p^s et $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

Propriété 1. *Les opérateurs* $\zeta(.,.,s)$ *et* $\zeta(\check{.},\hat{.},n-s)$ *sont des opérateurs d'entrelacements, éléments de* $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$.

On précise que l'action de $G\times G$ sur $\mathcal{S}$ est $(g_1,g_2).\phi(x) = \phi(g_1^{-1}xg_2)$. De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de π avec l'espace $\tilde{V}\otimes V$; l'action de $G\times G$ sur $\tilde{\pi}\boxtimes\pi$ est $(g_1,g_2).f(g) = f(g_1^{-1}gg_2)$.

Démonstration. L'action de $G\times G$ sur $\zeta(f,\phi,s)$ donne

$$\int_G \phi(g_1^{-1}gg_2)f(g_1^{-1}gg_2)|\det g|_p^s\,dg. \tag{21}$$

On effectue le changement de variable $g \mapsto g_1gg_2^{-1}$, le groupe G étant unimodulaire l'intégrale devient

$$|\det g_1g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g)f(g)|\det g|_p^s\,dg. \tag{22}$$

D'autre part, l'action de $G\times G$ sur $\zeta(\check{f},\hat{\phi},n-s)$ donne

$$\int_G \hat{\phi}_{g_1,g_2}(g)\check{f}_{g_1,g_2}(g)|\det g|_p^{n-s}\,dg, \tag{23}$$

où l'on a noté $\phi_{g_1,g_2}(x) = \phi(g_1^{-1}xg_2)$ et $f_{g_1,g_2}(g) = f(g_1^{-1}gg_2)$.

Un calcul immédiat, montre que $\check{f}_{g_1,g_2}(g) = \check{f}(g_2^{-1}gg_1)$. De plus,

$$\hat{\phi}_{g_1,g_2}(g) = \int_{M_n} \phi(g_1^{-1}xg_2)\psi(\mathrm{Tr}(xg))\,dx. \tag{24}$$

Après le changement de variable $x \mapsto g_1 x g_2^{-1}$ l'intégrale devient

$$|\det g_1^{-1} g_2|_p^n \int_{M_n} \phi(x)\psi(\mathrm{Tr}(x g_2^{-1} g g_1))dx, \tag{25}$$

qui n'est autre que $|\det g_1 g_2^{-1}|_p^n \hat{\phi}(g_2^{-1} g g_1)$. L'intégrale (17) devient donc, après le changement de variable $g \mapsto g_2 g g_1^{-1}$,

$$|\det g_1^{-1} g_2|_p^n |\det g_2 g_1^{-1}|_p^{n-s} \int_G \hat{\phi}(g)\check{f}(g)|\det g|_p^{n-s} dg. \tag{26}$$

□

Dans le but de comprendre l'espace $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$, on va décomposer $\mathcal{S}$ selon le rang des matrices. Soit r un entier compris entier 1 et n, on note S_r l'espace des matrices $n \times n$ de rang r et $S^{(r)}$ l'espace des matrices $n \times n$ de rang $< r$.

Si X est un espace localement compact totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact. L'espace $\mathcal{S}$ est donc égal à $C_c^\infty(M_n)$.

Le groupe G est un ouvert de M_n et $M_n \setminus G = S^{(n)}$. Cette décomposition donne la suite exacte

$$0 \to C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)}) \to 0, \tag{27}$$

où l'inclusion de $C_c^\infty(G)$ dans $C_c^\infty(M_n)$ se fait par extension par 0 et l'application $C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)})$ est l'application de restriction.

Cette suite exacte commute avec l'action de $G \times G$, on la voit donc comme une suite exacte de représentations de $G \times G$. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{G\times G}(., (\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes (|\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}))$, qui est exact à gauche, on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant{}& \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \\ &+ \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S^{(n)}), |.|_p^s), \end{aligned} \tag{28}$$

où l'on a abrégé $|.|_p^s = |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}$.

On décompose ensuite $S^{(n)}$ selon le rang r, ce qui donne, en utilisant le même raisonnement, que

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant \sum_{r=0}^{n} \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s). \tag{29}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dimension de ces différents espaces, pour cela on dispose de la

Proposition 3. *Pour* $r = n$ $(S_r = G)$, *on a*

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) = 1; \tag{30}$$

et pour $r < n$, *on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) = 0 \tag{31}$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de s *modulo* $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Commençons par le cas $r = n$,

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi \boxtimes \pi)\otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi \boxtimes \pi)\otimes |.|_p^{-s}, C^\infty(G)) \tag{32}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_H((\tilde\pi \boxtimes \pi)\otimes |.|_p^{-s}, \mathbb{C}) \tag{33}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_G(\tilde\pi, \tilde\pi); \tag{34}$$

où le groupe H désigne la diagonale de $G\times G$. Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

Le premier isomorphisme provient de la dualité entre $C_c^\infty(G)$ et $C^\infty(G)$. Le deuxième isomorphisme est une application de la réciprocité de Frobenius avec l'identification $C^\infty(G) = \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$. Pour finir, le dernier isomorphisme provient du fait que l'action diagonale de H sur $\tilde\pi \boxtimes \pi$ correspond à l'action de G sur $\tilde\pi \otimes \pi$ et que $|.|_p^{-s}$ est trivial sur H.

Passons au cas $r < n$, S_r est l'orbite de $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sous l'action de $G \times G$ par translation à gauche du premier facteur et translation à droite de l'inverse sur le second facteur. On calcule le stabilisateur,

$$H = \mathrm{Stab}_{G\times G}\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & e \end{pmatrix} \right) \right\} \subset G \times G, \tag{35}$$

où a décrit $GL_r(\mathbb{Q}_p)$; c, e décrivent $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$; b décrit $M_{r,n-r}(\mathbb{Q}_p)$ et d décrit $M_{n-r,r}(\mathbb{Q}_p)$.

On note $P = MN$ le sous-groupe parabolique de G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $\bar P = M\bar N$ le groupe parabolique opposé, alors $H \subset P \times \bar P$.

(36)
$$\mathrm{Hom}((\tilde\pi \boxtimes \pi)\otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi \boxtimes \pi)\otimes |.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{M\times M}((\tilde\pi \boxtimes \pi)_{N\times\bar N}\otimes |.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_{(M\times M)\cap H}^{M\times M}(\delta_H)) \tag{37}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\tilde\pi \boxtimes \pi)_{N\times\bar N}, \delta_H \otimes |.|_p^s), \tag{38}$$

où δ_H est le caractère modulaire de H.

Le premier isomorphisme provient de l'identification de $C_c^\infty(S_r) = c-\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et de la dualité entre $c - \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et $\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H)$. Pour le deuxième isomorphisme, on utilise la transitivité de l'induction, $H \subset P \times \bar P \subset G \times G$, et l'adjonction entre $\mathrm{Ind}_{P\times\bar P}^{G\times G}$ et le foncteur de Jacquet ; en remarquant, que $N\times\bar N$ agit trivialement sur $|.|_p^{-s}$. Le dernier isomorphisme n'est autre que la réciprocité de Frobenius.

On utilise le fait que $(\tilde\pi \boxtimes \pi)_{N\times\bar N}$ est de longueur finie ; en effet le foncteur de Jacquet préserve la longueur finie. Il existe donc des représentations admissibles V_i de $M \times M$ telles que

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = (\tilde\pi \boxtimes \pi)_{N\times\bar N}, \tag{39}$$

avec V_i/V_{i-1} irréductibles.

En reprenant un raisonnement que l'on a déjà fait, la suite exacte de représentations de $M \times M$

$$0 \to V_{i-1} \to V_i \to V_i/V_{i-1} \to 0 \tag{40}$$

permet d'obtenir l'inégalité suivante :
(41)
$$\dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)_{N\times\bar{N}}, |.|_p^s\delta_H) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H).$$

Il nous suffit donc de montrer que ces derniers espaces sont nuls sauf pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

En tant que représentation irréductible de $M \times M \simeq \mathsf{GL}_r^2(\mathbb{Q}_p) \times \mathsf{GL}_{n-r}^2(\mathbb{Q}_p)$, on peut décomposer $V_i/V_{i-1} \otimes \delta_H^{-1}$ sous la forme $\sigma^{(i)} \boxtimes (\tau_1^{(i)} \boxtimes \tau_2^{(i)})$, où $\sigma^{(i)}$ est une représentation irréductible de $\mathsf{GL}_r^2(\mathbb{Q}_p)$ et $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}$ sont des représentations irréductibles de $\mathsf{GL}_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$.

D'après le lemme de Schur, la représentation $\tau_2^{(i)}$ admet un caractère central $\omega^{(i)}$. On en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H) = 0, \tag{42}$$

sauf si $\omega^{(i)} = |.|_p^{-(n-r)s}$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Cette dernière équation ne peut être vérifiée que pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$. □

Terminons la preuve de l'équation fonctionnelle. Rappelons que les opérateurs $\zeta(.,.,s)$ et $\zeta(\check{.},\hat{.},n-s)$ sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$, qui est de dimension 1 sauf pour un nombre fini de valeurs de s modulo $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

Autrement dit, pour s en dehors de cet ensemble de valeurs exceptionnelles, il existe $\gamma(s) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\zeta(.,.,s) = \gamma(s)\zeta(\check{.},\hat{.},n-s). \tag{43}$$

Les fonctions zêta étant des fonctions rationnelles en p^s et l'ensemble des valeurs de s pour lesquelles γ est ainsi défini est dense pour la topologie de Zariski, on en déduit que l'on peut étendre γ en une fonction rationnelle en p^s pour laquelle l'équation (37) est vérifiée en tant qu'égalité de fonctions rationnelles en p^s.

2. Fonctions zêta sur $\mathsf{GL}_n(\mathbb{A})$

Dans cette partie, on note $G = \mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$, $G_{\mathbb{A}} = \mathsf{GL}_n(\mathbb{A})$. On pose $K = O_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathsf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, c'est un sous-groupe compact maximal de $G_{\mathbb{A}}$.

2.1. Formes cuspidales.

On commence par donner la définition des formes automorphes (et cuspidales), on renvoie à [1] et [2] pour plus de détails.

On fixe un caractère unitaire $\omega : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{S}^1$.

Définition 2. *Une forme automorphe de caractère central ω est une fonction $\varphi : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ lisse et G-invariante qui vérifie de plus :*
— *φ est K-finie à droite,*
— *φ est $Z(U(\mathfrak{g}))$-finie,*
—
$$\varphi(zg) = \omega(z)\varphi(g) \quad \forall g \in G_{\mathbb{A}}, z \in \mathbb{A}^\times, \tag{44}$$
— *φ est à croissance modérée.*

On note $\mathcal{A}(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ l'espace des formes automorphes de caractère central ω.

On rajoute aussi une condition d'annulation dont on aura besoin pour la preuve de l'équation fonctionnelle. Ce qui donne la

Définition 3. *Une forme cuspidale φ de caractère central ω est une forme automorphe de caractère central ω qui vérifie de plus les conditions :*

$$\int_{U\backslash U_{\mathbb{A}}} \varphi(ug)du = 0 \tag{45}$$

pour tout radical unipotent U d'un sous-groupe parabolique propre de $G_{\mathbb{A}}$ et tout $g \in G_{\mathbb{A}}$.

On note $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ l'espace des formes cuspidales de caractère central ω.

L'espace de Schwartz de $M_n(\mathbb{A})$ est, par définition, $\mathcal{S}(M_n(\mathbb{A})) = \otimes'_\nu \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_\nu) = \{\phi = \otimes\phi_\nu, \phi_\nu \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_\nu)), \phi_\nu = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_\nu}$ sauf pour un nombre fini de v$\}$.

Pour $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$, $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(\varphi, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g)\varphi(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg, \tag{46}$$

où $dg = \otimes_\nu dg_\nu$ est une mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{A})$ et $|.|_{\mathbb{A}} = \prod_\nu |.|_\nu$ est la valeur absolue adélique.

Notons $G_{\mathbb{A}}^0 = \{g \in G_{\mathbb{A}}, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1\}$. Comme $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{A}^\times = Z(G_{\mathbb{A}})$, l'application $|\det|_{\mathbb{A}} : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}_{>0}$ est surjective de noyau $G_{\mathbb{A}}^0$.

La factorisation $G_{\mathbb{A}} = \mathbb{R}_{>0} G_{\mathbb{A}}^0$ permet d'obtenir que

$$\zeta(\varphi, \phi, s) = \int_0^\infty \int_{G_{\mathbb{A}}^0} \phi(tg)\omega(t)\varphi(g)t^{ns} dg \frac{dt}{t} \tag{47}$$

$$= \int_0^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x\in G} \phi(txg)\varphi(g)\omega(t)t^{ns} dg \frac{dt}{t}. \tag{48}$$

Comme dans la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, on scinde l'intégrale en 1 dans le but de faire apparaître une symétrie. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi, \phi, s) = & \int_0^1 \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x\in G} \phi(txg)\varphi(g)\omega(t)t^{ns} dg \frac{dt}{t} \\ & + \int_1^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x\in G} \phi(txg)\varphi(g)\omega(t)t^{ns} dg \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{49}$$

La seconde intégrale converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$, c'est une fonction entière. Pour la première intégrale, on fait le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$, ce qui donne

$$\int_1^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x\in G} \phi(t^{-1}xg)\varphi(g)\omega^{-1}(t)t^{-ns} dg \frac{dt}{t}. \tag{50}$$

On va maintenant utiliser la formule de Poisson sur $M_n(\mathbb{A})$, ce qui donne pour la fonction $x \mapsto \phi(t^{-1}xg)$:

$$\sum_{x\in M_n(\mathbb{Q})} \phi(t^{-1}xg) = t^{n^2} \sum_{x\in M_n(\mathbb{Q})} \hat{\phi}(txg^{-1}), \tag{51}$$

on se rappelle que $g \in G^0_{\mathbb{A}}$, donc $|\det g|_{\mathbb{A}} = 1$. On scinde la somme selon le rang de la matrice et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in G} \phi(t^{-1}xg) &= t^{n^2} \sum_{x\in G} \hat{\phi}(txg^{-1}) \\ &+ \sum_{r<n, rg(x)=r} \left(t^{n^2}\hat{\phi}(txg^{-1}) - \phi(t^{-1}xg)\right).\end{aligned} \tag{52}$$

La contribution de la dernière somme s'avèrera nulle. Ce qui nous permet d'en déduire la

Proposition 4. *Si* $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{A}))$*, la fonction* $\zeta(\varphi, \phi, .)$ *peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(\varphi, \phi, s) = \zeta(\check{\varphi}, \hat{\phi}, n - s), \tag{53}$$

où $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$.

Démonstration. Il suffit de prouver que la contribution dans la formule de Poisson des matrices de rang $r < n$ est effectivement nulle. On considère l'action de G par translation à droite sur l'ensemble des matrices de rang r. Chaque orbite contient un représentant de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, on note X l'ensemble des matrices de cette forme. On pose P le sous-groupe parabolique de G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et U son radical unipotent.

On réécrit la somme sur les matrices de rang r grâce au système de représentant X,

$$\sum_{rg(x)=r} \phi(xg) = \sum_{\gamma\in P\backslash G} \sum_{x\in X} \phi(x\gamma g). \tag{54}$$

On en déduit que la contribution des matrices de rang r dans la seconde intégrale est

$$\int_{P\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x\in X} \phi(t^{-1}xg)\varphi(g)dg. \tag{55}$$

De plus, on remarque que, $xu = x$, pour tout $x \in X$ et $u \in U_{\mathbb{A}}$. Ce qui nous permet de réécrire cette intégrale sous la forme

$$\int_{PU_{\mathbb{A}}\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x\in X} \phi(t^{-1}xg) \int_{U\backslash U_{\mathbb{A}}} \varphi(ug)du dg. \tag{56}$$

Cette dernière intégrale s'annule, car f est cuspidale. On montre de même de l'intégrale correspondant au terme en $\hat{\phi}$ sur les matrices de rang $r < n$ s'annule aussi. Ce qui nous donne, grâce à la formule de Poisson et le raisonnement précédent, la formule

$$\begin{aligned}\zeta(\varphi, \phi, s) &= \int_1^\infty \int_{G\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x\in G} \hat{\phi}(txg^{-1})\varphi(g)\omega^{-1}(t)t^{n(n-s)}dg\frac{dt}{t} \\ &+ \int_1^\infty \int_{G\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x\in G} \phi(txg)\varphi(g)\omega(t)t^{ns}dg\frac{dt}{t},\end{aligned} \tag{57}$$

ce qui démontre l'équation fonctionnelle en effectuant le changement de variable $g \mapsto g^{-1}$ dans la première intégrale. $\square$

2.2. **Représentations automorphes.** L'espace des formes cuspidales $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ est stable par l'action de $U(\mathfrak{g})$ par opérateurs différentiels et par translation à droite de $O_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{A}_f)$, c'est un $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$-module.

Un coefficient f de $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ est de la forme

$$f(g) = <\pi(g)\varphi, \tilde{\varphi}> = \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg)\tilde{\varphi}(h)dh, \tag{58}$$

où $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ et $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega^{-1})$.

Pour un coefficient f de $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$, $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g)f(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg. \tag{59}$$

On peut déduire les propriétés de cette fonction zêta grâce à ce que l'on vient de faire pour les formes cuspidales. Plus précisément, on a

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg)\tilde{\varphi}(h)dh|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg \tag{60}$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(h^{-1}g)\varphi(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg|\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh \tag{61}$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h)\zeta(\varphi, \phi(h^{-1}.), s)|\det h|_{\mathbb{A}}^{-s} dh, \tag{62}$$

où la deuxième égalité s'obtient grâce au changement de variable $g \mapsto h^{-1}g$. Ceci nous permet de démontrer la

Proposition 5. *Si* f *est un coefficient de* $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$*, la fonction* $\zeta(f, \phi, .)$ *peut être prolongée en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(f, \phi, s) = \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s), \tag{63}$$

où $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Démonstration. On utilise l'équation fonctionnelle (47) et le fait que la transformée de Fourier de $\phi(h^{-1}.)$ est $|\det h|_{\mathbb{A}}^n \hat{\phi}(.h)$,

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h)\zeta(\check{\varphi}, \hat{\phi}(.h), n - s)|\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh \tag{64}$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(gh)\varphi(g^{-1})|\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg|\det h|_{\mathbb{A}}^{n-s} dh. \tag{65}$$

On effectue maintenant le changement de variable $g \mapsto gh^{-1}$, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \hat{\phi}(g)\varphi(hg^{-1})|\det g|_{\mathbb{A}}^{n-s} dg dh, \tag{66}$$

qui est bien $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s)$. □

Si l'on combine cette proposition avec les résultats locaux, on peut construire la fonction L attachée à une représentation cuspidale irréductible.

Définition 4. *Une représentation cuspidale est un* $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$*-module qui est isomorphe à un sous-quotient de* $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$.

Plus précisément, on montre le

Théorème 2. *Soit π une représentation cuspidale irréductible.*

Le produit $L(s,\pi)=\prod_v L(s,\pi_v)$, qui est défini pour $\mathrm{Re}(s)>n$, se prolonge en une fonction entière. De plus, $L(s,\pi)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(s,\pi)=\epsilon(s,\pi)L(1-s,\tilde{\pi}), \tag{67}$$

où $\epsilon(s,\pi)=\prod_v \epsilon(s,\pi_v)$.

Démonstration. La représentation π se décompose en facteurs locaux, $\pi\simeq\otimes_v'\pi_v$, où π_v est une représentation admissible irréductible de $GL_n(\mathbb{Q}_v)$ (un $(\mathfrak{g},O_n(\mathbb{R}))$-module irréductible pour la place archimédienne) et pour presque toutes les places π_v est sphérique (contient la représentation unité de $GL_n(\mathbb{Z}_v)$).

D'après les résultats locaux, pour chaque place v, il existe un nombre fini $(\phi_{\alpha_v})_{\alpha_v\in I_v}$ d'éléments de $\mathcal{S}(M_v)$ et de coefficient $(f_{\alpha_v})_{\alpha_v\in I_v}$ de π_v tel que

$$\sum_{\alpha_v\in I_v}\zeta(f_{\alpha_v},\phi_{\alpha_v},s+\frac{1}{2}(n-1))=L(s,\pi_v). \tag{68}$$

De plus, d'après l'équation fonctionnelle locale

$$\sum_{\alpha_v\in I_v}\zeta(\check{f}_{\alpha_v},\hat{\phi}_{\alpha_v},1-s+\frac{1}{2}(n-1))=\epsilon(s,\pi_v)L(1-s,\tilde{\pi}_v). \tag{69}$$

Notons $I=\prod_v I_v$. Pour presque toutes les places v, π_v est sphérique, I_v est un singleton ; donc I est fini.

Pour $\alpha=(\alpha_v)\in I$, on pose

$$\phi_\alpha=\prod_v\phi_{\alpha_v},\quad f_\alpha=\prod_v f_{\alpha_v}. \tag{70}$$

Alors $\phi_\alpha\in\mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ et f_α est un coefficient de π qui est un sous-quotient de $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}},\omega)$. De plus,

$$\zeta(f_\alpha,\phi_\alpha,s)=\prod_v\zeta(f_{\alpha_v},\phi_{\alpha_v},s). \tag{71}$$

On en déduit que

$$L(s,\pi)=\prod_v L(s,\pi_v)=\prod_v\sum_{\alpha_v\in I_v}\zeta(f_{\alpha_v},\phi_{\alpha_v},s+\frac{1}{2}(n-1)) \tag{72}$$

$$=\sum_{\alpha\in I}\zeta(f_\alpha,\phi_\alpha,s+\frac{1}{2}(n-1)) \tag{73}$$

est une somme finie de fonction zêta, qui chacune se prolonge en une fonction entière. De plus,

$$L(s,\pi) = \sum_{\alpha\in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{74}$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \zeta(\check{f}_\alpha, \hat{\phi}_\alpha, 1-s+\frac{1}{2}(n-1)) \tag{75}$$

$$= \prod_{\nu} \sum_{\alpha_\nu \in I_\nu} \zeta(\check{f}_{\alpha_\nu}, \hat{\phi}_{\alpha_\nu}, 1-s+\frac{1}{2}(n-1)) \tag{76}$$

$$= \prod_{\nu} \epsilon(s,\pi_\nu) L(1-s, \tilde{\pi}_\nu) \tag{77}$$

$$= \epsilon(s,\pi) L(1-s,\tilde{\pi}). \tag{78}$$

□

Références

[1] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[2] D. Goldfeld and J. Hundley, *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group :*, no. vol. 1 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2011.