ÉQUATION FONCTIONNELLE

Soit $n \geqslant 1$ un entier et p un nombre premier. Dans la suite, on notera $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$, dg une mesure de Haar sur G et (π, V) une représentation admissible irréductible de G.

Les coefficients de π sont les fonctions de la forme

$$g \in G \mapsto < \pi(g)v, \tilde{v} >,$$

où $v \in V$ et $\tilde{v} \in \tilde{V}$.

On note M l'ensemble des matrices $n \times n$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\phi : M \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Si f est un coefficient de π, $\phi \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) f(g) |\det g|^s dg.$$

On fixe un caractère ψ de $\mathbb{Q}_p^\times$ et on pose

$$\hat{\phi}(y) = \int_M \phi(x)\psi(\mathrm{Tr}(xy))dx,$$

où dx est une mesure de Haar sur M.

On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$\zeta(f, \phi, s) = \gamma(s)\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1 - s),$$

où γ est une fonction rationnelle et $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

Propriété 1. *Les opérateurs* $\zeta(., ., s)$ *et* $\zeta(\check{.}, \hat{.}, 1 - s)$ *sont des éléments de*

$$\mathrm{Hom}_{G \times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes \mathcal{S}, |\det|^s \boxtimes |\det|^{-s}).$$

On précise que l'action de $G \times G$ sur $\mathcal{S}$ est $(g_1, g_2).\phi(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$. De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de π avec l'espace $V \otimes \tilde{V}$; l'action de $G \times G$ sur $\pi \boxtimes \tilde{\pi}$ est $(g_1, g_2).f(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Démonstration. L'action de $G \times G$ sur $\zeta(f, \phi, s)$ donne

$$\int_G \phi(g_1^{-1} g g_2) f(g_1^{-1} g g_2) |\det g|^s dg.$$

On effectue le changement de variable $g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$, le groupe G étant unimodulaire l'intégrale devient

$$|\det g_1 g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g) f(g) |\det g|^s dg.$$

D'autre part, l'action de $G \times G$ sur $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1 - s)$ donne

$$\int_G \widehat{\phi_{g_1, g_2}}(g) \check{f}_{g_1, g_2}(g) |\det g|^{1-s} dg,$$

où l'on note $\phi_{g_1, g_2}(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$ et $f_{g_1, g_2}(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Un calcul immédiat, montre que $\check{f_{g_1,g_2}}(g) = f(g_2^{-1}g^{-1}g_1)$. De plus,

$$\hat{\phi_{g_1,g_2}}(g) = \int_M \phi(g_1^{-1}xg_2)\psi(\mathrm{Tr}(xg))dx.$$

Après le changement de variable $x \mapsto g_1xg_2^{-1}$ l'intégrale devient

$$|\det g_1^{-1}g_2| \int_M \phi(x)\psi(\mathrm{Tr}(xg_2^{-1}gg_1))dx,$$

qui n'est autre que $|\det g_1g_2^{-1}|\hat{\phi}(g_2^{-1}gg_1$. L'intégrale

$$\int_G \hat{\phi_{g_1,g_2}}(g)\check{f_{g_1,g_2}}(g)|\det g|^{1-s}dg$$

devient donc, après le changement de variable $g \mapsto g_2gg_1^{-1}$,

$$[\det g_1^{-1}g_2||\det g_2g_1^{-1}|^{1-s} \int_G \hat{\phi}(g)\check{f}(g)|\det g|^{1-s}dg.$$

□

Proposition 1. *Pour* $r = n$, $S_r = G$, *on a*

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(G), |.|^s) = 1;$$

et pour $r < n$, *on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(S_r), |.|^s) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(G), |.|^s) &= \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes |.|^{-s}, C^\infty(G)) \\
&= \mathrm{Hom}_H((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes |.|^{-s}, \mathbb{C}) \\
&= \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi);
\end{aligned}$$

où le groupe H désigne la diagonale de $G\times G$. Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

La première égalité provient de la dualité entre $C_c^\infty(G)$ et $C^\infty(G)$. Pour la deuxième égalité, on utilise la réciprocité de Frobenius et l'identification $C^\infty(G) = \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\mathbb{C})$.