FONCTIONS ZÊTA SUR GL_n

1. Fonctions zêta sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

Dans la suite, on notera $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, dg une mesure de Haar sur G et (π, V) une représentation admissible irréductible de G.

Les coefficients de π sont les fonctions de la forme $g \in G \mapsto < \pi(g)v, \tilde{v} >$, où $v \in V$ et $\tilde{v} \in \tilde{V}$.

On note M_n l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\phi : M_n \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Si f est un coefficient de π, $\phi \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s dg. \tag{1}$$

On fixe un caractère non trivial ψ de $\mathbb{Q}_p$ et on pose

$$\hat{\phi}(y) = \int_{M_n} \phi(x) \psi(\mathrm{Tr}(xy)) dx, \tag{2}$$

où dx est une mesure de Haar sur M_n.

On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$\zeta(f, \phi, s) = \gamma(s) \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1 - s), \tag{3}$$

où γ est une fonction rationnelle en p^s et $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

Propriété 1. *Les opérateurs* $\zeta(.,.,s)$ *et* $\zeta(\check{.}, \hat{.}, 1-s)$ *sont des opérateurs d'entrelacements, éléments de* $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi} \boxtimes \pi) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$.

On précise que l'action de $G \times G$ sur $\mathcal{S}$ est $(g_1, g_2).\phi(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$. De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de π avec l'espace $\tilde{V} \otimes V$; l'action de $G \times G$ sur $\tilde{\pi} \boxtimes \pi$ est $(g_1, g_2).f(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Démonstration. L'action de $G \times G$ sur $\zeta(f, \phi, s)$ donne

$$\int_G \phi(g_1^{-1} g g_2) f(g_1^{-1} g g_2) |\det g|_p^s dg. \tag{4}$$

On effectue le changement de variable $g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$, le groupe G étant unimodulaire l'intégrale devient

$$|\det g_1 g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s dg. \tag{5}$$

D'autre part, l'action de $G \times G$ sur $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1-s)$ donne

$$\int_G \hat{\phi_{g_1,g_2}}(g) \check{f_{g_1,g_2}}(g) |\det g|_p^{1-s} dg, \tag{6}$$

où l'on a noté $\phi_{g_1,g_2}(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$ et $f_{g_1,g_2}(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Un calcul immédiat, montre que $\check{f_{g_1,g_2}}(g) = \check{f}(g_2^{-1}gg_1)$. De plus,

$$\hat{\phi_{g_1,g_2}}(g) = \int_{M_n} \phi(g_1^{-1}xg_2)\psi(\mathrm{Tr}(xg))dx. \tag{7}$$

Après le changement de variable $x \mapsto g_1xg_2^{-1}$ l'intégrale devient

$$|\det g_1^{-1}g_2|_p \int_{M_n} \phi(x)\psi(\mathrm{Tr}(xg_2^{-1}gg_1))dx, \tag{8}$$

qui n'est autre que $|\det g_1g_2^{-1}|\hat{\phi}(g_2^{-1}gg_1)$. L'intégrale (6) devient donc, après le changement de variable $g \mapsto g_2gg_1^{-1}$,

$$|\det g_1^{-1}g_2|_p|\det g_2g_1^{-1}|_p^{1-s} \int_G \hat{\phi}(g)\check{f}(g)|\det g|_p^{1-s}dg. \tag{9}$$

$\square$

Dans le but de comprendre l'espace $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$, on va décomposer $\mathcal{S}$ selon le rang des matrices. Soit r un entier compris entier 1 et n, on note S_r l'espace des matrices $n\times n$ de rang r et $S^{(r)}$ l'espace des matrices $n \times n$ de rang $< r$.

Si X est un espace localement compact totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact. L'espace $\mathcal{S}$ est donc égal à $C_c^\infty(M_n)$.

Le groupe G est un ouvert de M_n et $M_n \setminus G = S^{(n)}$. Cette décomposition donne la suite exacte

$$0 \to C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)}) \to 0, \tag{10}$$

où l'inclusion de $C_c^\infty(G)$ dans $C_c^\infty(M_n)$ se fait par extension par 0 et l'application $C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)})$ est l'application de restriction.

Cette suite exacte commute avec l'action de $G \times G$, on la voit donc comme une suite exacte de représentations de $G\times G$. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{G\times G}(., (\pi\boxtimes\tilde{\pi}) \otimes (|\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}))$, qui est exact à gauche, on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant{}& \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \\ &+ \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(S^{(n)}), |.|_p^s),\end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a abrégé $|.|_p^s = |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}$.

On décompose ensuite $S^{(n)}$ selon le rang r, ce qui donne, en utilisant le même raisonnement, que

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant \sum_{r=0}^{n} \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s). \tag{12}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dimension de ces différents espaces, pour cela on dispose de la

Proposition 1. *Pour* $r = n$ ($S_r = G$), *on a*

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) = 1; \tag{13}$$

et pour $r < n$, *on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) = 0 \tag{14}$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de s *modulo* $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

Démonstration. Commençons par le cas $r = n$,

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi\boxtimes\pi)\otimes |.|_p^{-s}, C^\infty(G)) \tag{15}$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_H((\tilde\pi\boxtimes\pi)\otimes|.|_p^{-s},\mathbb{C}) \tag{16}$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_G(\tilde\pi,\tilde\pi); \tag{17}$$

où le groupe H désigne la diagonale de $G\times G$. Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

Le premier isomorphisme provient de la dualité entre $C_c^\infty(G)$ et $C^\infty(G)$. Le deuxième isomorphisme est une application de la réciprocité de Frobenius avec l'identification $C^\infty(G) = \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$. Pour finir, le dernier isomorphisme provient du fait que l'action diagonale de H sur $\tilde\pi\boxtimes\pi$ correspond à l'action de G sur $\tilde\pi\otimes\pi$ et que $|.|_p^{-s}$ est trivial sur H.

Passons au cas $r < n$, S_r est l'orbite de $\begin{pmatrix}1_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sous l'action de $G\times G$ par translation à gauche du premier facteur et translation à droite de l'inverse sur le second facteur. On calcule le stabilisateur,

$$H = \mathrm{Stab}_{G\times G}\begin{pmatrix}1_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\{\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & 0\\ d & e\end{pmatrix}\right)\right\} \subset G\times G, \tag{18}$$

où a décrit $GL_r(\mathbb{Q}_p)$; c, e décrivent $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$; b décrit $M_{r,n-r}(\mathbb{Q}_p)$ et d décrit $M_{n-r,r}(\mathbb{Q}_p)$.

On note $P = MN$ le sous-groupe parabolique de G des matrices de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ et $\bar P = M\bar N$ le groupe parabolique opposé, alors $H\subset P\times\bar P$.

(19)

$$\mathrm{Hom}((\tilde\pi\boxtimes\pi)\otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde\pi\boxtimes\pi)\otimes|.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{M\times M}((\tilde\pi\boxtimes\pi)_{N\times\bar N}\otimes|.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_{(M\times M)\cap H}^{M\times M}(\delta_H)) \tag{20}$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\tilde\pi\boxtimes\pi)_{N\times\bar N}, \delta_H\otimes|.|_p^s), \tag{21}$$

où δ_H est le caractère modulaire de H.

Le premier isomorphisme provient de l'identification de $C_c^\infty(S_r) = c-\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et de la dualité entre $c-\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et $\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H)$. Pour le deuxième isomorphisme, on utilise la transitivité de l'induction, $H\subset P\times\bar P\subset G\times G$, et l'adjonction entre $\mathrm{Ind}_{P\times\bar P}^{G\times G}$ et le foncteur de Jacquet ; en remarquant, que $N\times\bar N$ agit trivialement sur $|.|_p^{-s}$. Le dernier isomorphisme n'est autre que la réciprocité de Frobenius.

On utilise le fait que $(\tilde\pi\boxtimes\pi)_{N\times\bar N}$ est de longueur finie ; en effet le foncteur de Jacquet préserve la longueur finie. Il existe donc des représentations admissibles V_i de $M\times M$ telles que

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = (\tilde\pi\boxtimes\pi)_{N\times\bar N}, \tag{22}$$

avec V_i/V_{i-1} irréductibles.

En reprenant un raisonnement que l'on a déjà fait, la suite exacte de représentations de $M\times M$

$$0\to V_{i-1}\to V_i\to V_i/V_{i-1}\to 0 \tag{23}$$

permet d'obtenir l'inégalité suivante :
(24)

$$\dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)_{N\times\bar{N}}, |.|_p^s\delta_H) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H).$$

Il nous suffit donc de montrer que ces derniers espaces sont nuls sauf pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

En tant que représentation irréductible de $M \times M \simeq \mathrm{GL}_r^2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_{n-r}^2(\mathbb{Q}_p)$, on peut décomposer $V_i/V_{i-1} \otimes \delta_H^{-1}$ sous la forme $\sigma^{(i)} \boxtimes (\tau_1^{(i)} \boxtimes \tau_2^{(i)})$, où $\sigma^{(i)}$ est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_r^2(\mathbb{Q}_p)$ et $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}$ sont des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$.

D'après le lemme de Schur, la représentation $\tau_2^{(i)}$ admet un caractère central $\omega^{(i)}$. On en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H) = 0, \tag{25}$$

sauf si $\omega^{(i)} = |.|_p^{-(n-r)s}$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Cette dernière équation ne peut être vérifiée que pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$. □

Terminons la preuve de l'équation fonctionnelle. Rappelons que les opérateurs $\zeta(.,.,s)$ et $\zeta(\check{.},\hat{.},1-s)$ sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\tilde{\pi}\boxtimes\pi)\otimes\mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$, qui est de dimension 1 sauf pour un nombre fini de valeurs de s modulo $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

Autrement dit, pour s en dehors de cet ensemble de valeurs exceptionnelles, il existe $\gamma(s) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\zeta(.,.,s) = \gamma(s)\zeta(\check{.},\hat{.},1-s). \tag{26}$$

Les fonctions zêta étant des fonctions rationnelles en p^s et l'ensemble des valeurs de s pour lesquelles γ est ainsi défini est dense pour la topologie de Zariski, on en déduit que l'on peut étendre γ en une fonction rationnelle en p^s pour laquelle l'équation (26) est vérifiée en tant qu'égalité de fonctions rationnelles en p^s.

2. Fonctions zêta sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$

Dans cette partie, on note $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$, $G_{\mathbb{A}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. On pose $K = O_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, c'est un sous-groupe compact maximal de $G_{\mathbb{A}}$.

2.1. Formes cuspidales.

On commence par donner la définition des formes automorphes (et cuspidales), on renvoie à [1] et [2] pour plus de détails.

On fixe un caractère unitaire $\omega : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{S}^1$.

Définition 1. *Une forme automorphe de caractère central* ω *est une fonction* $f : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ *lisse et* G*-invariante qui vérifie de plus :*
— f *est* K*-finie à droite,*
— f *est* $Z(U(\mathfrak{g}))$*-finie,*
—

$$f(zg) = \omega(z)f(g) \quad \forall g \in G_{\mathbb{A}}, z \in \mathbb{A}^\times, \tag{27}$$

— f *est à croissance modérée.*
On note $\mathcal{A}(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ *l'espace des formes automorphes de caractère central* ω*.*

On rajoute aussi une condition d'annulation dont on aura besoin pour la preuve de l'équation fonctionnelle.

Définition 2. *Une forme cuspidale* f *de caractère central* ω *est une forme automorphe de caractère central* ω *qui vérifie de plus les conditions :*

$$\int_{U\backslash U_{\mathbb{A}}} f(ug)du = 0 \tag{28}$$

pour tout radical unipotent U *d'un sous-groupe parabolique propre de* $G_{\mathbb{A}}$ *et tout* $g \in G_{\mathbb{A}}$.

On note $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ *l'espace des formes cuspidales de caractère central* ω.

L'espace de Schwartz de $M_n(\mathbb{A})$ est, par définition, $\mathcal{S}(M_n(\mathbb{A})) = \otimes'_v \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v) = \{\phi = \otimes\phi_v, \phi_v \in \mathcal{S}(M_n(\mathbb{Q}_v)), \phi_v = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_v}$ sauf pour un nombre fini de v$\}$.

Pour $f \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$, $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) f(g) |\det g|_{\mathbb{A}}^s dg, \tag{29}$$

où $dg = \otimes_v dg_v$ est une mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ et $|.|_{\mathbb{A}} = \prod_v |.|_v$ est la valeur absolue adélique.

Notons $G_{\mathbb{A}}^0 = \{g \in G_{\mathbb{A}}, \det g = 1\}$. Comme $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{A}^\times = Z(G_{\mathbb{A}})$, l'application $\det : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}_{>0}$ est surjective de noyau $G_{\mathbb{A}}^0$.

La factorisation $G_{\mathbb{A}} = \mathbb{R}_{>0} G_{\mathbb{A}}^0$ permet d'obtenir que

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_0^\infty \int_{G_{\mathbb{A}}^0} \phi(tg) \omega(t) f(g) t^{ns} dg dt \tag{30}$$

$$= \int_0^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) f(g) \omega(t) t^{ns} dg dt \tag{31}$$

Comme dans la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann, on scinde l'intégrale en 1 pour faire apparaître une symétrie. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \zeta(f, \phi, s) = &\int_0^1 \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) f(g) \omega(t) t^{ns} dg dt \\ &+ \int_1^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(txg) f(g) \omega(t) t^{ns} dg dt. \end{aligned} \tag{32}$$

La seconde intégrale converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$, c'est une fonction entière. Pour la première intégrale, on fait le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$, ce qui donne

$$\int_1^\infty \int_{G\backslash G_{\mathbb{A}}^0} \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) f(g) \omega^{-1}(t) t^{-ns} dg dt. \tag{33}$$

On va maintenant utiliser la formule de Poisson sur $M_n(\mathbb{A})$, ce qui donne pour la fonction $x \mapsto \phi(t^{-1}xg)$:

$$\sum_{x \in M} \phi(t^{-1}xg) = t^{n^2} |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1} \sum_{x \in M} \hat{\phi}(txg^{-1}). \tag{34}$$

On scinde la somme selon le rang de la matrice et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} \phi(t^{-1}xg) = &\, t^{n^2} |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1} \sum_{x \in G} \hat{\phi}(txg^{-1}) \\ &+ \sum_{r < n, rg(x) = r} \left(t^{n^2} |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1} \hat{\phi}(txg^{-1}) - \phi(t^{-1}xg) \right). \end{aligned} \tag{35}$$

La contribution de la dernière somme est nulle dans l'intégrale définissant la fonction zêta. Ce qui nous permet d'en déduire la

Proposition 2. *La fonction $\zeta(f, \phi, .)$ peut être prolonger en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(f, \phi, s) = \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, n - s), \tag{36}$$

où $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Démonstration. Il ne nous reste qu'à pouver que la contribution dans la formule de Poisson des matrices de rang $r < n$ est effectivement nulle. On considère l'action de G par translation à droite sur l'ensemble des matrices de rang r. Chaque orbite contient un représentant de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, on note X l'ensemble des matrices de cette forme. On pose P le sous-groupe parabolique de G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et U sont radical unipotent.

Alors

$$\sum_{rg(x)=r} \phi(xg) = \sum_{\gamma \in P\backslash G} \sum_{x \in X} \phi(x\gamma g) \tag{37}$$

On en déduit que la contribution des matrices de rang r dans la seconde intégrale est

$$\int_{P\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1} x\gamma g) f(g) dg. \tag{38}$$

De plus, on remarque que, $xu = x$, pour tout $x \in X$ et $u \in U_{\mathbb{A}}$. Ce qui nous permet de réécrire cette intégrale sous la forme

$$\int_{PU_{\mathbb{A}}\backslash G^0_{\mathbb{A}}} \sum_{x \in X} \phi(t^{-1} xg) \int_{U\backslash U_{\mathbb{A}}} f(ug) du dg. \tag{39}$$

Cette dernière intégrale s'annule car f est cuspidale. On montre de même de l'intégrale correspondant à $\hat{\phi}$ s'annule aussi. Ce qui termine la preuve de la proposition. □

2.2. **Représentations automorphes.** L'espace des formes cuspidales $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ est stable par l'action de $U(\mathfrak{g})$ par opérateurs différentiels et par translation à droite de $O_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{A}_f)$, c'est un $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$-module.

Un coefficient f de $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ est de la forme

$$f(g) =< \pi(g)\varphi, \tilde{\varphi} >= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg)\tilde{\varphi}(h) dh, \tag{40}$$

où $\varphi \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$ et $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega^{-1})$.

Pour un coefficient f de $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}}, \omega)$, $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) f(g) |\det g|^s_{\mathbb{A}} dg. \tag{41}$$

On peut déduire les propriétés de cette fonction zêta grâce à ce qui l'on a fait précédemment sur les formes cuspidales. Plus précisément, on a

$$\zeta(f,\phi,s) = \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(g) \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(hg)\tilde{\varphi}(h)dh|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg \tag{42}$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h) \int_{G_{\mathbb{A}}} \phi(h^{-1}g)\varphi(g)|\det g|_{\mathbb{A}}^s dg|\det h|^{-s} dh \tag{43}$$

$$= \int_{\mathbb{A}^\times G\backslash G_{\mathbb{A}}} \tilde{\varphi}(h)\zeta(\varphi,\phi(h^{-1}.),s)|\det h|^{-s} dh, \tag{44}$$

où la deuxième égalité s'obtient grâce au changement de variable $g \mapsto h^{-1}g$. Ceci nous permet de démontrer la

Proposition 3. *Si* f *est un coefficient de* $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}},\omega)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(M_{\mathbb{A}})$*, la fonction* $\zeta(f,\phi,.)$ *peut se prolonger en une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(f,\phi,s) = \zeta(\check{f},\hat{\phi},.), \tag{45}$$

où $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Si l'on combine ce résultat avec les résultats locaux, on peut construire la fonction L attachée à une représentation cuspidale irréductible.

Définition 3. *Une représentation cuspidale est un* $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{A}_f)$*-module qui est isomorphe à un sous-quotient de* $\mathcal{A}_0(G_{\mathbb{A}},\omega)$.

Plus précisément, on a le

Théorème 1. *Soit* π *une représentation cuspidale irréductible.*

Le produit $L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v)$*, qui est défini pour* $\mathrm{Re}(s) > n$*, se prolonge en une fonction entière. De plus,* $L(s,\pi)$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$L(s,\pi) = \epsilon(s,\pi)L(1-s,\tilde{\pi}), \tag{46}$$

où $\epsilon(s,\pi) = \prod_v \epsilon(s,\pi_v)$.

Démonstration. La représentation π se décompose en facteurs locaux, $\pi \simeq \otimes_v' \pi_v$, où π_v est une représentation admissible irréductible de $GL_n(\mathbb{Q}_v)$ (un $(\mathfrak{g}, O_n(\mathbb{R}))$-module irréductible pour la place archimédienne) et pour presque toutes les places π_v est sphérique (contient la représentation unité de $GL_n(\mathbb{Z}_v)$).

D'après les résultats locaux, pour chaque place v, il existe un nombre fini $(\phi_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$ d'éléments de $\mathcal{S}(M_v)$ et de coefficient $(f_{\alpha_v})_{\alpha_v \in I_v}$ de π_v tel que

$$\sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n-1)) = L(s,\pi_v). \tag{47}$$

De plus, d'après l'équation fonctionnelle locale

$$\sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1)) = \epsilon(s,\pi_v)L(1-s,\tilde{\pi}_v). \tag{48}$$

Notons $I = \prod_v I_v$. Pour presque toutes les places v, I_v est un singleton, puisque π_v est sphérique ; donc I est fini.

Pour $\alpha = (\alpha_v) \in I$, on pose

$$\phi_\alpha = \prod_v \phi_{\alpha_v}, \quad f_\alpha = \prod_v f_{\alpha_v}. \tag{49}$$

Alors $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(M_\mathbb{A})$ et f_α est un coefficient (admissible) de π. De plus,

$$\zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s) = \prod_v \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s). \tag{50}$$

On en déduit que

$$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v) = \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(f_{\alpha_v}, \phi_{\alpha_v}, s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{51}$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{52}$$

est une somme finie de fonction zêta, qui chacune se prolonge en une fonction entière. De plus,

$$L(s,\pi) = \sum_{\alpha \in I} \zeta(f_\alpha, \phi_\alpha, s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{53}$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \zeta(\check{f}_\alpha, \hat{\phi}_\alpha, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{54}$$

$$= \prod_v \sum_{\alpha_v \in I_v} \zeta(\check{f}_{\alpha_v}, \hat{\phi}_{\alpha_v}, 1 - s + \frac{1}{2}(n-1)) \tag{55}$$

$$= \prod_v \epsilon(s,\pi_v) L(1-s, \tilde{\pi}_v) \tag{56}$$

$$= \epsilon(s,\pi) L(1-s,\tilde{\pi}). \tag{57}$$

□

Références

[1] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1997.

[2] D. Goldfeld and J. Hundley, *Automorphic Representations and L-Functions for the General Linear Group :*, no. vol. 1 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2011.