ÉQUATION FONCTIONNELLE

Soit $n \geqslant 1$ un entier et p un nombre premier. Dans la suite, on notera $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$, dg une mesure de Haar sur G et (π, V) une représentation admissible irréductible de G.

Les coefficients de π sont les fonctions de la forme $g \in G \mapsto < \pi(g)v, \tilde{v} >$, où $v \in V$ et $\tilde{v} \in \tilde{V}$.

On note M_n l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\phi : M_n \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact.

Si f est un coefficient de π, $\phi \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta(f, \phi, s) = \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s dg. \tag{1}$$

On fixe un caractère ψ de $\mathbb{Q}_p^\times$ et on pose

$$\hat{\phi}(y) = \int_{M_n} \phi(x) \psi(\mathrm{Tr}(xy)) dx, \tag{2}$$

où dx est une mesure de Haar sur M_n.

On veut montrer l'équation fonctionnelle suivante

$$\zeta(f, \phi, s) = \gamma(s) \zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1 - s), \tag{3}$$

où γ est une fonction rationnelle en p^s et $\check{f}(g) = f(g^{-1})$.

Pour montrer cette équation fonctionnelle, on va utiliser la

Propriété 1. *Les opérateurs* $\zeta(.,.,s)$ *et* $\zeta(\check{.},\hat{.},1-s)$ *sont des opérateurs d'entrelacements, éléments de* $\mathrm{Hom}_{G \times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$.

On précise que l'action de $G \times G$ sur $\mathcal{S}$ est $(g_1, g_2).\phi(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$. De plus, on identifie l'ensemble des coefficients de π avec l'espace $V \otimes \tilde{V}$; l'action de $G \times G$ sur $\pi \boxtimes \tilde{\pi}$ est $(g_1, g_2).f(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Démonstration. L'action de $G \times G$ sur $\zeta(f, \phi, s)$ donne

$$\int_G \phi(g_1^{-1} g g_2) f(g_1^{-1} g g_2) |\det g|_p^s dg. \tag{4}$$

On effectue le changement de variable $g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$, le groupe G étant unimodulaire l'intégrale devient

$$|\det g_1 g_2^{-1}|^s \int_G \phi(g) f(g) |\det g|_p^s dg. \tag{5}$$

D'autre part, l'action de $G \times G$ sur $\zeta(\check{f}, \hat{\phi}, 1 - s)$ donne

$$\int_G \hat{\phi_{g_1, g_2}}(g) \check{f_{g_1, g_2}}(g) |\det g|_p^{1-s} dg, \tag{6}$$

où l'on a noté $\phi_{g_1, g_2}(x) = \phi(g_1^{-1} x g_2)$ et $f_{g_1, g_2}(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$.

Un calcul immédiat, montre que $\check{f_{g_1, g_2}}(g) = \check{f}(g_2^{-1} g g_1)$. De plus,

$$\hat{\phi_{g_1, g_2}}(g) = \int_{M_n} \phi(g_1^{-1} x g_2) \psi(\mathrm{Tr}(xg)) dx. \tag{7}$$

Après le changement de variable $x \mapsto g_1 x g_2^{-1}$ l'intégrale devient

$$|\det g_1^{-1} g_2|_p \int_{M_n} \phi(x)\psi(\mathrm{Tr}(x g_2^{-1} g g_1))dx, \tag{8}$$

qui n'est autre que $|\det g_1 g_2^{-1}|\hat{\phi}(g_2^{-1} g g_1)$. L'intégrale (6) devient donc, après le changement de variable $g \mapsto g_2 g g_1^{-1}$,

$$|\det g_1^{-1} g_2|_p |\det g_2 g_1^{-1}|_p^{1-s} \int_G \hat{\phi}(g)\check{f}(g)|\det g|_p^{1-s} dg. \tag{9}$$

□

Dans le but de comprendre l'espace $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes \mathcal{S}, |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s})$, on va décomposer $\mathcal{S}$ selon le rang des matrices. Soit r un entier compris entier 1 et n, on note S_r l'espace des matrices $n \times n$ de rang r et $S^{(r)}$ l'espace des matrices $n \times n$ de rang $< r$.

Si X est un espace localement compact totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact. L'espace $\mathcal{S}$ est donc égal à $C_c^\infty(M_n)$.

Le groupe G est un ouvert de M_n et $M_n \setminus G = S^{(n)}$. Cette décomposition donne la suite exacte

$$0 \to C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)}) \to 0, \tag{10}$$

où l'inclusion de $C_c^\infty(G)$ dans $C_c^\infty(M_n)$ se fait par extension par 0 et l'application $C_c^\infty(M_n) \to C_c^\infty(S^{(n)})$ est l'application de restriction.

Cette suite exacte commute avec l'action de $G \times G$, on la voit donc comme une suite exacte de représentations de $G \times G$. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{G\times G}(., (\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes (|\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}))$, qui est exact à gauche, on en déduit alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes \mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant{} & \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \\ & + \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(S^{(n)}), |.|_p^s), \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a abrégé $|.|_p^s = |\det|_p^s \boxtimes |\det|_p^{-s}$.

On décompose ensuite $S^{(n)}$ selon le rang r, ce qui donne, en utilisant le même raisonnement, que

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes \mathcal{S}, |.|_p^s) \leqslant \sum_{r=0}^{n} \dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s). \tag{12}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dimension de ces différents espaces, pour cela on dispose de la

Proposition 1. *Pour* $r = n$ $(S_r = G)$*, on a*

$$\dim \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) = 1; \tag{13}$$

et pour $r < n$*, on a*

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi \boxtimes \tilde{\pi}) \otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) = 0 \tag{14}$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de s *modulo* $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$*.*

Démonstration. Commençons par le cas $r = n$,

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes C_c^\infty(G), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes |.|_p^{-s}, C^\infty(G)) \tag{15}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_H((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes |.|_p^{-s}, \mathbb{C}) \tag{16}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_G(\pi,\pi); \tag{17}$$

où le groupe H désigne la diagonale de $G\times G$. Ce dernier espace est bien de dimension 1 d'après le lemme de Schur.

Le premier isomorphisme provient de la dualité entre $C_c^\infty(G)$ et $C^\infty(G)$. Le deuxième isomorphisme est une application de la réciprocité de Frobenius avec l'identification $C^\infty(G) = \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$. Pour finir, le dernier isomorphisme provient du fait que l'action diagonale de H sur $\pi\boxtimes\tilde{\pi}$ correspond à l'action de G sur $\pi\otimes\tilde{\pi}$ et que $|.|_p^{-s}$ est trivial sur H.

Passons au cas $r < n$, S_r est l'orbite de $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sous l'action de $G\times G$ par translation à gauche du premier facteur et translation à droite de l'inverse sur le second facteur. On calcule le stabilisateur,

$$H = \mathrm{Stab}_{G\times G}\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & e \end{pmatrix} \right) \right\} \subset G\times G, \tag{18}$$

où a décrit $GL_r(\mathbb{Q}_p)$; c, e décrivent $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$; b décrit $M_{r,n-r}(\mathbb{Q}_p)$ et d décrit $M_{n-r,r}(\mathbb{Q}_p)$.

On note $P = MN$ le sous-groupe parabolique de G des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $\bar{P} = M\bar{N}$ le groupe parabolique opposé, alors $H \subset P\times\bar{P}$.

(19)
$$\mathrm{Hom}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes C_c^\infty(S_r), |.|_p^s) \simeq \mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes |.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{M\times M}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})_{N\times\bar{N}}\otimes |.|_p^{-s}, \mathrm{Ind}_{(M\times M)\cap H}^{M\times M}(\delta_H)) \tag{20}$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})_{N\times\bar{N}}, \delta_H\otimes |.|_p^s), \tag{21}$$

où δ_H est le caractère modulaire de H.

Le premier isomorphisme provient de l'identification de $C_c^\infty(S_r) = c{-}\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et de la dualité entre $c-\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(1)$ et $\mathrm{Ind}_H^{G\times G}(\delta_H)$. Pour le deuxième isomorphisme, on utilise la transitivité de l'induction, $H\subset P\times\bar{P}\subset G\times G$, et l'adjonction entre $\mathrm{Ind}_{P\times\bar{P}}^{G\times G}$ et le foncteur de Jacquet ; en remarquant, que $N\times\bar{N}$ agit trivialement sur $|.|_p^{-s}$. Le dernier isomorphisme n'est autre que la réciprocité de Frobenius.

On utilise le fait que $(\pi\boxtimes\tilde{\pi})_{N\times\bar{N}}$ est de longueur finie ; en effet le foncteur de Jacquet préserve la longueur finie. Il existe donc des représentations admissibles V_i de $M\times M$ telles que

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = (\pi\boxtimes\tilde{\pi})_{N\times\bar{N}}, \tag{22}$$

avec V_i/V_{i-1} irréductibles.

En reprenant un raisonnement que l'on a déjà fait, la suite exacte de représentations de $M\times M$

$$0 \to V_{i-1} \to V_i \to V_i/V_{i-1} \to 0 \tag{23}$$

permet d'obtenir l'inégalité suivante :
(24)

$$\dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})_{N\times\bar{N}}, |.|_p^s\delta_H) \leqslant \sum_{i=1}^{l} \dim \mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H).$$

Il nous suffit donc de montrer que ces derniers espaces sont nuls sauf pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

En tant que représentation irréductible de $M \times M \simeq GL_r^2(\mathbb{Q}_p) \times GL_{n-r}^2(\mathbb{Q}_p)$, on peut décomposer $V_i/V_{i-1} \otimes \delta_H^{-1}$ sous la forme $\sigma^{(i)} \boxtimes (\tau_1^{(i)} \boxtimes \tau_2^{(i)})$, où $\sigma^{(i)}$ est une représentation irréductible de $GL_r^2(\mathbb{Q}_p)$ et $\tau_1^{(i)}, \tau_2^{(i)}$ sont des représentations irréductibles de $GL_{n-r}(\mathbb{Q}_p)$.

D'après le lemme de Schur, la représentation $\tau_2^{(i)}$ admet un caractère central $\omega^{(i)}$. On en déduit que

$$\mathrm{Hom}_{(M\times M)\cap H}(V_i/V_{i-1}, |.|_p^s\delta_H) = 0, \tag{25}$$

sauf si $\omega^{(i)} = |.|_p^{-(n-r)s}$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Cette dernière équation ne peut être vérifiée que pour au plus une valeur de s modulo $\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$. □

Terminons la preuve de l'équation fonctionnelle. Rappelons que les opérateurs $\zeta(.,.,s)$ et $\zeta(\check{.},\hat{.},1-s)$ sont des éléments de $\mathrm{Hom}_{G\times G}((\pi\boxtimes\tilde{\pi})\otimes\mathcal{S}, |\det|_p^s\boxtimes|\det|_p^{-s})$, qui est de dimension 1 sauf pour un nombre fini de valeurs de s modulo $\sum_{r=0}^{n-1}\frac{2i\pi}{(n-r)\log p}\mathbb{Z}$.

Autrement dit, pour s en dehors de cet ensemble de valeurs exceptionnelles, il existe $\gamma(s) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\zeta(.,.,s) = \gamma(s)\zeta(\check{.},\hat{.},1-s). \tag{26}$$

Les fonctions zêta étant des fonctions rationnelles en p^s et l'ensemble des valeurs de s pour lesquelles γ est ainsi défini est dense pour la topologie de Zariski, on en déduit que l'on peut étendre γ en une fonction rationnelle en p^s pour laquelle l'équation (26) est vérifiée comme égalité de fonctions rationnelles en p^s.