UNFOLDING

On note H l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n et $H_P = H \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Proposition 0.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, *alors on a*

$$\int_H f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_P\cap N_{2n}\backslash H_P}\int_{H\cap N_{2n}\backslash H} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)^{-1}d\xi d\xi_p. \tag{1}$$

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 1$, H_P est trivial, σ est trivial et $H \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}du dz. \tag{2}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vrai au rang $n-1$.

Le groupe $H\cap N_{2n}\backslash H$ est isomorphe à l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & Y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et h dans $N_n\backslash G_n$. On note H' le groupe $H\cap N_{2n}\backslash H$ au rang $n-1$, c'est l'ensemble des matrices de la forme de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & Y'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h' & 0\\ 0 & h'\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où Y' est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille $n-1$ et h' dans $N_{n-1}\backslash G_{n-1}$. On note $\tilde{H}$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h} & 0\\ 0 & \tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\tilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \tilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n\backslash G_n$. On voit le groupe H' comme sous-groupe de $H\cap N_{2n}\backslash H$, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y' et voyant h' comme un élément de $N_n\backslash G_n$. On en déduit que $H\cap N_{2n}\backslash H = \tilde{H}H'$.

De même, on dispose d'une décomposition, $H_P\cap N_{2n}\backslash H_P = \tilde{H}_P H'_{P'}$, où $H'_{P'}$ est le groupe $H_P\cap N_{2n}\backslash H_P$ au rang $n-1$ et $\tilde{H}_P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p} & 0\\ 0 & \tilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\tilde{Z}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \tilde{z} & 0\end{pmatrix}$ avec $\tilde{z} \in F^{n-1}$ et $\tilde{p}$ est dans $P_{n-1}U_n\backslash P_n$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\tilde{H}_P}\int_{H'_{P'}}\int_{\tilde{H}}\int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p\xi'_p, \tilde{\xi}\xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1/2}d\xi' d\tilde{\xi} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p, \tag{3}$$

on a choisi les représentants des matrices Y, $\tilde{Y}$, Z et $\tilde{Z}$ de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{H}_P$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{H}$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p)R(\tilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\int_{H_p'}\int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p\xi_p', \tilde{\xi}\xi')|\det \xi_p'\xi'|^{-1/2}d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{H_p'}\int_{H'} W_{f'}(\xi_p', \xi')|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\xi_p'.\end{aligned}$$

De plus,

$$(5)\qquad W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}}\int_V f'({\xi'}_p^{-1}\nu u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du,$$

où V est l'ensemble des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p\nu{\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$(6)\qquad W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'|^2\int_{N_{2n-2}}\int_V f'(\nu{\xi'}_p^{-1}u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du.$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1}\int_V f'(\nu g)\psi(\nu)^{-1}d\nu$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$(7)\qquad W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'\xi'|W_{\tilde{f}'}(\xi_p', \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\int_{H_p'}\int_{H'} W_{f'}(\xi_p', \xi')|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{H_p'}\int_{H'} W_{\tilde{f}'}(\xi_p', \xi')d\xi' d\xi_p' = \int_{H_{n-1}}\tilde{f}'(s)\theta(s)^{-1}ds = \\ &\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1}\nu s\tilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds,\end{aligned}$$

où l'on note H_{n-1} le groupe H au rang $n-1$.

Il nous faut maintenant intégrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p} & 0\\ 0 & \tilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$. On obtient alors

(9)

$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_V f\left(\sigma\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1}\nu s\tilde{\xi}\right)\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de ν par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p}\tilde{Z}\tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p}n_1\tilde{p}^{-1}$,

$n_2 \mapsto \tilde{p} n_2 \tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p} t \tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p} y \tilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(10)
$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\sigma^{-1}s\tilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))^{-1}|\det \tilde{p}|^3 d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix} ds\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{Z}\,d\tilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1}s\sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}&\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1}g & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))^{-1}|\det \tilde{p}| d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix} dg\,dX\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{Z}\,d\tilde{p}.\end{aligned} \tag{11}$$

On effectue le changement de variables $g \mapsto \tilde{p}g$. En considérant uniquement l'intégration sur t et sur $\tilde{p}$ et en remarquant que $\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\tilde{p}$ et t, on voit apparaitre une formule d'inversion de Fourier, ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\begin{aligned}&\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix} dg\,dX\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{Z},\end{aligned} \tag{12}$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t = 0$. Le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ donne

(13)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix} dg\,dX\,d\tilde{\xi}\,d\tilde{Z}.$$

De plus, on a

(14)
$$\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & yn_1^{-1} + n_1Xn_1^{-1} - \tilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}.$$

On effectue les changements de variables $y \mapsto yn_1$ et $X \mapsto n_1^{-1}Xn_1$. Ce qui nous permet de combiner les intégrales selon y et X en une intégration sur $M_{n-1} \times F^n$

dont on note encore la variable X. On effectue ensuite le changement de variables $X \mapsto X + \tilde{Z}n_2$ ce qui donne

$$\int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}\times F^n} |\det g|^{-2} \int_{U_n^2} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g & 0 \\ 0 & n_1 g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\tilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\tilde{\xi}d\tilde{Z}. \tag{15}$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\tilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{\tilde{H}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}\times F^n} |\det g|^{-2} \int_{U_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g & 0 \\ 0 & n_1 g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\tilde{\xi}. \tag{16}$$

On explicite l'intégration sur $\tilde{xi}$ de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $\tilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n\backslash G_n$ et on effectue le changement de variable $\tilde{Y} \mapsto (n_1 g)^{-1}\tilde{Y}n_1 g$, on obtient alors

$$\int_{P_n\backslash G_n} \int_{F^{n-1}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}\times F^n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X+\tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 gh & 0 \\ 0 & n_1 gh \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\tilde{Y}d\tilde{h}. \tag{17}$$

Après combinaison des intégrations en X, $\tilde{Y}$ et des intégrations sur n_1, g, h ; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n} \int_{M_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{18}$$

$\square$