# FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathsf{GL}_n \times \mathsf{GL}_n \backslash \mathsf{GL}_{2n}$

Soit $F$ un corps local de caractéristique 0 et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. On note $G_n$ le groupe $GL_n(F)$.

On note $H_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in G_n$. Soit $\theta$ le caractère sur $H_n$ défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Soit $\pi$ une représentation automorphe cuspidale de $GL_{2n}$ et $\varphi \in \pi$. On introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\phi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh. \tag{1}$$

La factorisation de cette période globale comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash G_n, \theta)$. Plus précisément, pour $\Phi$ une fonction de Schwartz globale et $W_\varphi$ la fonction de Whittaker associée à $\varphi$, on introduit dans la suite des fonctions zêta globale $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathrm{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{2}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v), \tag{3}$$

où $S$ est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1,W_v,\Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$, que l'on désignera par $\beta$ dans la section 4, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 4.1.

0.1. **Notations.** On note $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $F$. On note $U_n$ le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique.

Soit $G$ un groupe réductif connexe (dans la suite $G$ sera $G_{2n}$, $SO_{2n+1}$ ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G$. On note $Z_G$ le centre de $G$ et $A_G$ le tore déployé maximal dans $Z_G$.

## 1. Facteurs $\gamma$ du carré extérieur

Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de $\pi$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque $F$ est non

*Date*: 30 avril 2019.

archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs $\gamma$, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque $F$ est archimédien et que les facteurs $\gamma$ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi), \tag{4}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

### 1.1. **Préliminaires.**

1.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n \backslash G_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n) \backslash M_n} W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg \tag{5}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. L'élément $\sigma$ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

**Proposition 1.1** (Jacquet-Shalika [3]). *Il existe* $\eta > 0$ *tel que les intégrales* $J(s, W, \phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > 1 - \eta$.

Kewat montre, lorsque $F$ est $p$-adique, que ce sont des fractions rationnelles en $q^s$ où $q$ est le cardinal du corps résiduel de $F$. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque $F$ est archimédien et d'un résultat de non annulation.

**Proposition 1.2** (Belt [1]). *Fixons* $s_0 \in \mathbb{C}$. *Il existe* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *tels que* $J(s, W, \phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en* $s_0$. *Si* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *le point* $s_0$ *peut éventuellement être un pôle. Si* $F$ *est* $p$*-adique, on peut choisir* $W$ *et* $\phi$ *tels que* $J(s, W, \phi)$ *soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [2]) par ces intégrales.

**Proposition 1.3** (Jacquet-Shalika [3]). *Supposons que* $F$ *est* $p$*-adique, le conducteur de* $\psi$ *est l'anneau des entiers* $\mathcal{O}$ *de* $F$. *Soit* $\pi$ *une représentation non ramifiée de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. *On note* $\phi_0$ *la fonction caractéristique de* $\mathcal{O}^n$ *et* $W_0$ *l'unique fonction de Whittaker invariante par* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$ *et qui vérifie* $W(1) = 1$. *Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{6}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque $F$ est un corps $p$-adique. Plus précisément, on a la

**Proposition 1.4** (Matringe [5]). *Supposons que* $F$ *est un corps* $p$*-adique et* $\pi$ *générique. Il existe un monôme* $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *en* $q^s$, *tel que pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$

*et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{J(s,W,\phi)}{L(s,\pi,\Lambda^2)} = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}, \tag{7}$$

*où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de $\phi$ par rapport au caractère $\psi$ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi},\bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec $w_n$ la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0\end{pmatrix}$. On définit alors le facteur $\gamma$ de Jacquet-Shalika par la relation*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = \epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}. \tag{8}$$

1.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s,W,\phi)$.

Soit $K$ un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit $\Pi$ une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{9}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s,W_\varphi,\Phi)$ l'intégrale

(10)

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W_\varphi\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(Tr(X))dX\Phi(e_n g)|\det g|^s dg$$

où l'on note $G_n$ le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

**Proposition 1.5** (Jacquet-Shalika [3])**.** *Les intégrales $J(s,W_\varphi,\Phi)$ convergent absolument pour $Re(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s,W_\varphi,\Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s,W_\varphi,\Phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi,\hat{\Phi}), \tag{11}$$

*où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de $\Phi$ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.*

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où $v$ décrit les places de $K$, on a

$$J(s,W_\varphi,\Phi) = \prod_v J(s,W_v,\Phi_v). \tag{12}$$

1.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont $F$ est une localisation. On dispose du

**Lemme 1.1** (Kable [4]). *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique. Il existe un corps de nombres $k$ et une place $v_0$ telle que $k_{v_0} = F$, où $v_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$.*

On note $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$. Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et $\sigma$ une représentation irréductible de carré intégrable de $M$, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

**Proposition 1.6** (Beuzart-Plessis [**?**]). *Soient $k$ un corps de nombres, $v_0, v_1$ deux places distinctes de $k$ avec $v_1$ non archimédienne. Soit $U$ un ouvert de $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et $\Pi_v$ est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

1.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n) f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

- Si $F$ est $p$-adique, $f$ est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$,
- Si $F$ est archimédien, $f$ est $C^\infty$ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $\|a\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

**Lemme 1.2.** *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$. Alors, pour tout $N \geqslant 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d, \tag{13}$$

*pour tous $b \in A_{2n}(F)$ et $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$.*

**Lemme 1.3.** *Il existe $N$ tel que pour tous $s$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $d > 0$, l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s \, da \tag{14}$$

*converge absolument.*

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées $W$, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

**Lemme 1.4.** *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

*Démonstration.* D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n\backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

(15)
$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk\, |\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\, \delta^{-1}(a) da.$$

On pose $u_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma, \tag{16}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

(17)
$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(b u_X \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da.$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de $u_x$ et on pose $k_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d. \tag{18}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les $t_j$. On dispose de la

**Proposition 1.7** (Jacquet-Shalika [3])**.** *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* $k$ *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* $k$ *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* $j$ *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* $j$ *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque $j$ est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque $j$ est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

(19)
$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d$$

$$\leqslant C2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{20}$$

où $m(X) = sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [3, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n ak)| \leqslant C'(1 + |a_n|)^{-N}. \tag{21}$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX \tag{22}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{Re(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da. \tag{23}$$

La première intégrale converge pour $N$ assez grand et la deuxième pour $N$ assez grand lorsque $Re(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n}|a_1|^{3-2n}|a_2|^{5-2n}|a_2|^{7-2n}...|a_n|^{2n-3}|a_n|^{2n-1}, \tag{24}$$

$$= |a_1|^{4-4n}|a_2|^{12-4n}...|a_n|^{4n-4}, \tag{25}$$

$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{26}$$

□

1.2. **Facteurs $\gamma$.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de $\pi$) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs $\gamma$ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur $\gamma^{JS}$ dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{J(s,W,\phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$, on dispose du

**Lemme 1.5.** *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi))$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in Temp(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et un voisinage $V \subset Temp(GL_{2n}(F))$ de $\pi$ tels que $W_0 = W_\pi$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ soit continue.*

*En particulier, si $F$ est un corps $p$-adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 1.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.*

*Démonstration.* On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage $V$ de $\pi$ tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de $\pi'$ sur $V$. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ par rapport au caractère additif $\psi$, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à $\psi$. Les caractères additifs de $F$ sont de la forme $\psi_\lambda$ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

**Lemme 1.6.** *Soient $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(s) < 1$. Supposons que $J(s, W, \phi) \neq 0$. Alors*

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})} \omega_\pi(\lambda) \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}. \tag{27}$$

*Démonstration.* En effet, la mesure de Haar auto-duale pour $\psi_\lambda$ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour $\psi$ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega(\lambda)J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{28}$$

On en déduit immédiatement le lemme. □

Les facteurs $\gamma$ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif $\psi$ (voir Henniart [2]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère $\psi$ que l'on a fixé.

**Proposition 1.8.** *Soit $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

*Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ telle que pour tous $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{29}$$

*De plus, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{30}$$

*Démonstration.* Soit $k$ un corps de nombres, on suppose que $k$ a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_K/K$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_\infty \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker $W_w$ et des fonctions de Schwartz $\phi_w$ dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour $w = \infty$ ou $v$, on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{31}$$

On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où $\Pi$ est non ramifiée et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w)L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w))L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{32}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [2]),

$$L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{33}$$

Les équations (32) et (33), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w \in \{v\}\cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour $\Pi_\infty$, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, $\Pi_w$ est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 1.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié $\psi_0$ de $F$ tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 1.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1, \tag{35}$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [2]).

L'équation (34) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{36}$$

On choisit maintenant pour $U$ une base de voisinage contenant $\pi$, en utilisant le lemme 1.5 et la continuité des facteurs $\gamma$ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de $W$ et de $\phi$, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{37}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, $R$ est une limite de fractions rationnelles en $q_v^s$ (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc $R$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place $v'$, on voit que $R$ est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (37) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{38}$$

La fonction $R$ est donc une fraction rationnelle en $q_v^s$ périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si $R$ est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{39}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{40}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = \frac{J(s,W,\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi})}. \tag{41}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi}) = 1. \tag{42}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 40, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s},\bar{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi}). \tag{43}$$

Comme $\pi$ est tempérée, $\pi$ est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2 = 1. \tag{44}$$

D'autre part, le facteur $\gamma$ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2 = 1$ ; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. $\square$

**Proposition 1.9.** *Supposons que* $F$ *est un corps* $p$*-adique. Soit* $\pi$ *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

*Le facteur* $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ *est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{45}$$

*Démonstration.* D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres $k$ et une place $v_0$ telle que $k_{v_0} = F$, où $v_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$. Soient $v, v'$ deux places distinctes non archimédiennes et différentes de $v_0$. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker $W_w$ et des fonctions de Schwartz $\phi_w$ telles que $J(s,W_w,\phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note $S_\infty$ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w\in S\cup T} J(s,W_w,\phi_w)L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_w,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w))L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2), \end{aligned} \tag{46}$$

où $L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient (voir Henniart [2])

$$L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T}\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{47}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 1.8, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty\in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty})\frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}\frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)} = 1. \tag{48}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 1.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en $s=\frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. □

## 2. Limite spectrale

Dans cette partie $F$ est un corps $p$-adique. On équipe $F$ avec la mesure de Haar $dx$ qui est autoduale par rapport à $\psi$. On équipe alors $A_M$ par la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur $F^\times$.

Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G,M)$ le groupe de Weyl associé au couple $(G,M)$ et $W(G,\sigma)$ le sous-groupe de $W(G,M)$ fixant $\sigma$. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de $A_M$. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0,1,\psi)^{-\dim(A_M)}d\tilde{\chi}, \tag{49}$$

où $\gamma^*(0,1,\psi) = \lim_{s\to 0^+}\frac{\gamma(s,1,\psi)}{s\log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère $\psi$. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1}(\mathrm{Ind}_M^G)_* d\sigma. \tag{50}$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 53.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit $f_\pi$ par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{51}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

**Proposition 2.1** (Harish-Chandra [6]). *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g)d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{52}$$

*pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :*

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|}d\pi, \tag{53}$$

*où* $\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q_F)^{-n_{\pi,\overline{Ad}}}\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$, *avec* $n_{\pi,\overline{Ad}}$ *l'ordre du zéro de* $\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$ *en* $s = 0$. *Pour* $\pi \in Temp(PG_{2n})$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, *le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de $G$ et $Temp(G)/Stab$ le quotient de $Temp(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où $\varphi_\pi$ est le paramètre de Langlands associé à $\pi$.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : Temp(SO(2m+1))/Stab \to Temp(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(Temp(SO(2n+1))/Stab) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{k} \tau_i \times \widetilde{\tau_i}\right) \times \bigtimes_{j=1}^{l} \mu_i \tag{54}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(Temp(SO(2m_j+1))/Stab) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

**Proposition 2.2.** *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(Temp(PG_{2n}))$, *on a*

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}} = \\ &\int_{Temp(SO_{2n+1})/Stab} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned} \tag{55}$$

*Pour* $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times ... \times \pi_l \times \sigma_0$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ *et* $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, *le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ *; où* $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ *tel que* $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ *avec* $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

*Démonstration.* D'après la relation 53, on a

$$\int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi. \tag{56}$$

Soit $\pi \in Temp(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que $\phi$ est à support dans un voisinage $U$ suffisamment petit de $\pi$. On écrit la représentation $\pi$ sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times p_j}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times q_k}\right), \tag{57}$$

où

— $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
— $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
— $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ ( et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$ ) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$M = \left( \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n} \tag{58}$$

le sous-groupe de Levi de $PG_{2n}$ qui apparait dans la définition de $\pi$. Alors $\pi = \mathrm{Ind}_M^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation $\tau$ de $M$.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$, alors $X^*(M) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^{t} (i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} (i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} (i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :
— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \ldots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \ldots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \ldots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \ldots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, où

$$\begin{aligned} \pi_\lambda = &\left( \bigtimes_{i=1}^{t} \left( \bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \right) \right) \\ &\times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left( \bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right). \end{aligned} \tag{59}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(PG_{2n}, \tau)$, où $V$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(PG_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(PG_{2n}, M)$ fixant la représentation $\tau$. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_\pi|\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi \tag{60}$$

d'après la relation 53. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(PG_{2n}, \tau)|} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda. \tag{61}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j} \prod_{k=1}^{v} f_k^{q_k}. \tag{62}$$

On notera ce produit $P$ dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}(63)\quad &\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \\ &\frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} d\lambda,\end{aligned}$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs $\gamma$, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

**Propriété 2.1.** *Les facteurs $\gamma$ vérifient les propriétés suivantes :*
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,Ad) = \gamma(s,\pi_1,Ad)\gamma(s,\pi_2,Ad)\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,Ad) = \gamma(s,\pi,Ad)$,
— $\gamma(s,\pi,Ad)$ *a un zéro simple en* $s=0$,
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,\Lambda^2) = \gamma(s+2x,\pi,\Lambda^2)$,
— $\gamma(s,\pi,\Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s=0$ *et* $\gamma(0,\pi,\Lambda^2)=0$ *si et seulement si* $\pi$ *est dans l'image de l'application de transfert* $T$,

*pour tous* $x\in\mathbb{C}$, $\pi\in\Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1,\pi_2\in\mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(64)
$$\begin{aligned}\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = &\left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}\left(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}\left(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)\right)\\ &\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}\left(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}\left(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)\right)F(\lambda),\end{aligned}$$

où $F$ est une fonction $C^\infty$ qui ne s'annule pas sur le voisinage $V$, il s'agit d'un produit de facteur $\gamma$ ne s'annulant pas. De même, on a

(65)
$$\begin{aligned}\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = &\left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\ 1\leqslant l'\leqslant n_i}}\left(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)^{-1}\right)\\ &\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l<l'\leqslant p_j}\left(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}\left(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)^{-1}\right)G(2\lambda+s),\end{aligned}$$

où la fonction $G$ est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$ ; ici $\mathcal{H} = \{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s,...,s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s,...,s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s,...,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire. En reprenant les notations de

[?], on écrit
(66)
$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} = \varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda + s)$ et les lettres $P, Q, R$ désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs $\gamma$ (voir [?, section 3]).

**Proposition 2.3** (Beuzart-Plessis [?]). *La limite*

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda \tag{67}$$

*est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain $i$ ou si l'un des $p_j$ est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à*
(68)
$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to 0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

*où*
- $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i}\prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v} f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,
- *c est le cardinal des $1 \leqslant k \leqslant t$ tel que $q_k \equiv 1 \mod 2$,*
- $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$,
- *$W$ et $W'$ sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, $W$ est isomorphe à $W(PG_{2n},\tau)$ et $W'$ est isomorphe à $W(SO(2n+1),\sigma)$ (defini après 72).*

*De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :*
- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
- $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lfloor\frac{p_j}{2}\rfloor$,
- $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant v$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$.

*On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme*

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{n_i}\prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v}(i\mathbb{R})^{\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}. \tag{69}$$

Supposons tout d'abord que $\pi$ n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$. D'après la caractérisation 54, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou $p_j$ est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 54). Alors en prenant $U$ suffisamment petit, on peut supposer que $U$ ne rencontre pas l'image de l'application de transfert $T$. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 2.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les $p_j$ sont pairs. De plus, on peut écrire

$$\sigma = \left(\bigtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\times n_i}\times\bigtimes_{j=1}^{u}\mu_j^{\times\frac{p_j}{2}}\times\bigtimes_{k=1}^{v}\nu_k^{\times\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}\right)\times\sigma_0, \tag{70}$$

où $\sigma_0$ est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain $m$ tel que

$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{\nu} \nu_k. \tag{71}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Levi

$$L = \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times SO(2m+1). \tag{72}$$

De plus, $\sigma = Ind_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe $W'$ de la proposition 2.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant $\sigma$.

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in Temp(SO(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = &\left( \bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ &\times \left( \bigtimes_{k=1}^{\nu} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned} \tag{73}$$

De plus, d'après 54, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/Stab)$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction $\varphi$ (équation 63), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ &= \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ &= \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'. \end{aligned} \tag{74}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} {d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D}, \tag{75}$$

d'après les notations de la proposition 2.3 et la relation 71. D'autre part, d'après la proposition 2.3 et l'équation 63, on a

(76)

$$\lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'| P}$$

$$\left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \to 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i, n_i, s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j, s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right) \prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k, s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \to 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'. \tag{77}$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre $N$ en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{\log(q_F)^N}d\lambda'; \tag{78}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi)\gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi) = \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, Ad, \psi)$ et

$$\frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), Ad, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi). \tag{79}$$

Dans l'expression 78, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$ ; on en déduit que 78 est égal au membre de droite 74, d'après l'égalité 75. $\square$

## 3. Une formule d'inversion de Fourier

On note $H_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $X$ est dans $M_n$ et $g$ dans $G_n$. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note $\theta$ le caractère sur $H_n$ défini par $\psi(Tr(X))$.

**Proposition 3.1.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P}\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{80}$$

*où* $W_f$ *est la fonction de* $G_{2n} \times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du \tag{81}$$

*pour tous* $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, $H_1^P$ est trivial, $\sigma$ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{82}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n - 1$.

L'ensemble $\Omega_n$ des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $Y$ est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille $n$ et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte $\Omega_{n-1}$ dans $\Omega_n$, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de $Y$ et voyant $h$ comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1}\widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_{n-1}$, où $\Omega_n^P$ est l'ensemble des matrices de $\Omega_n$ avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{\Omega}_n$ avec $\widetilde{h} \in P_n$. De plus, $\Omega_n^P$ s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{83}$$

où les mesures $d\xi'$, $d\widetilde{\xi}$, $d\xi_p'$ et $d\widetilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur $\Omega_{n-1}$, $\widetilde{\Omega}_n$, $\Omega_{n-1}^P$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices $Y$ et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère $\theta$ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p) R(\widetilde{\xi}) f$, on a alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p'. \end{aligned} \tag{84}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'({\xi'}_p^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du, \tag{85}$$

où $V$ est le sous-groupe des matrices de $N_{2n}$ avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2} V$. On effectue le changement de variable $v \mapsto {\xi'}_p v {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v {\xi'}_p^{-1} u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du. \tag{86}$$

On note $\widetilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left( v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$ ; alors $\widetilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p' \xi'| W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi'). \tag{87}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi') d\xi' d\xi_p' = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ &\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} v s \widetilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned} \tag{88}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$.

On obtient alors

(89)

$$\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left( \sigma \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} v s \widetilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de $\nu$ par $\sigma^{-1}$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où $n_1, n_2$ sont dans $U_n$, les coefficients de $y$ sont nuls sauf la dernière colonne et $t$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p}n_1\widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p}n_2\widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p}y\widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(90)

$$\int_{F^{n-2}\times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s \widetilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur $s$ ce qui donne que $\sigma^{-1}s\sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec $X$ une matrice de taille $n$ dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de $G_n$. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned} &\int_{F^{n-2}\times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \widetilde{p}^{-1} g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\ &f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{aligned} \tag{91}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned} &\int_{F^{n-2}\times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\ &f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{aligned} \tag{92}$$

**Lemme 3.1.** *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*} \int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| dt d\widetilde{p} = F(0). \tag{93}$$

*On rappelle que l'on identifie* $F^{n-2} \times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

*Démonstration.* La mesure $|\det \widetilde{p}| d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur $F^{n-1}$. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans $F^{n-1}$ correspondant à $\widetilde{p}$ et $t$, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. $\square$

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(94)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t=0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y}\in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}\in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de $G_n$ dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \tag{95}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(96)
$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},$$

puisque $n_1y=y$. On effectue le changement de variable $\widetilde{Y}\mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur $X$, $y$ et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur $M_n$ dont on note encore la variable $X$. On obtient alors

(97)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2\mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}. \tag{98}$$

Le changement de variables $X\mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(99)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et $n_2$ ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1 g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1 dXdgd\widetilde{h}. \tag{100}$$

Après combinaison des intégrations sur $n_1$, $g$, $\widetilde{h}$; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{101}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur $V$ avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, $H_{n-1}$, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $H^p_{n-1}$ qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents $H$ d'une part, d'échanger des intégrales sur les $n_1$, $n_2$, $t$, $y$ qui compose l'intégrale sur $V$ d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en $X$ sur $M_n$ (cf. intégrale 97) et lorsque l'on échange l'intégrale sur $U_n$ et $M_n$ (cf. intégrale 100). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 97, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(102)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(103)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}dadXda'dX'$$

pour $N$ suffisamment grand. On introduit les variables $u_X$ et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 1.4). On a alors

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{104}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 103 est alors majorée à une constante près par

(105)

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N|\det aa'|m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')\,da\,dX\,da'\,dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j}\,dX, \tag{106}$$

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X')^{-\alpha' N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'})\log(\|t_{X'}\|)^{d-j'}\,dX', \tag{107}$$

$$\int_{A_n}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}(1+|a_n|)^{-N}\log(\|b\|)^j|\det a|\,da, \tag{108}$$

et

$$\int_{A_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}(1+|a'_{n-1}|)^{-N}\log(\|b'\|)^{j'}|\det a'|\,da', \tag{109}$$

pour $j, j'$ compris entre 0 et $d$. Ces dernières intégrales convergent pour $N$ assez grand, voir [3, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 pour les deux dernières.

□

## 4. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1}\,d\xi_p. \tag{110}$$

**Lemme 4.1.** *L'intégrale 110 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue.*

*Pour* $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, *la restriction de* $\beta$ *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$. *De plus, la restriction de* $\beta$ *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est non nulle.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}}\left|W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\right|\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1}\,da\,dX, \tag{111}$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})(1 + |a_n|) m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{112}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour $N$ suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que $\beta$ restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est $(H_n, \theta)$-invariant lors de la preuve du lemme 4.3.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n}, \psi)$ (Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors $\beta$ est non nulle sur cette fonction. □

**Proposition 4.1.** *Soit* $\sigma \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))$, *on pose* $\pi = T(\sigma)$ *le transfert de* $\sigma$ *dans* $\mathsf{Temp}(G_{2n})$. *La forme linéaire* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. *On identifie* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $W \mapsto \widetilde{W}$. *Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{113}$$

*pour tout* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

*Démonstration.* En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après Jacquet-Rallis (ref). De plus, $\pi$ est le transfert de $\sigma$ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. □

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1} du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [beuzart-plessis], que l'on note

$$f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u)\psi(u)^{-1} du. \tag{114}$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir $W_f$ par la formule

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1} u g_2)\psi(u)^{-1} du, \tag{115}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

**Lemme 4.2.** *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on a*

$$\lim_{s \to 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi. \tag{116}$$

*Démonstration.* On a

(117)

$$\gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) = \int_{Z_n\backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n z k) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s ds = \int_{F^*}\widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx, \tag{118}$$

où l'on a posé $\phi_k(x)=\phi(xe_nk)$ pour tous $x\in F$ et $k\in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0+}\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x)dx = \phi(0). \tag{119}$$

On en déduit que $\lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)$ est égal a

$$\begin{aligned}\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} &W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\\ &\psi(-Tr(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da,\end{aligned} \tag{120}$$

ce qui nous permet de conclure. □

**Corollaire 4.1** (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g\in G_{2n}$*, alors*

$$\begin{aligned}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(g,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = &\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}\beta(W_{f,T(\sigma)}(g,.))\\ &\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma.\end{aligned} \tag{121}$$

*Démonstration.* On peut supposer que $g=1$ en remplaçant $f$ par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g)=\int_{Z_n}f(zg)dz$, alors $\widetilde{f}\in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{122}$$

On choisit $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0)=1$. Comme $\widetilde{f}_\pi=f_\pi$ pour tout $\pi\in Temp(PG_{2n})$, d'après le lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned}\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)J(s,W_{\widetilde{f}}(1,.),\phi)\\ &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})}J(s,W_{f,\pi}(1,.),\phi)d\mu_{PG_{2n}}(\pi).\end{aligned} \tag{123}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$\begin{aligned}&\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =\\ &\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})}J(1-s,\widetilde{W_{f,\pi}(1,.)},\widehat{\phi})c(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi).\end{aligned} \tag{124}$$

La proposition 2.2, nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned}&\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =\\ &\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab}J(1,\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned} \tag{125}$$

Le membre de gauche étant $(H_n, \theta)$-invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

(126)
$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma$.

Soit $z \in \mathcal{Z}(G)$ un élément du centre de Bernstein de $G$. En remplaçant $f$ par $zf$, on en déduit que

(127)
$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} z(T(\sigma))(J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}))d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$.

D'après le lemme de séparation spectrale (ref), on en déduit que $J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}))$ est $(H_n, \theta)$-invariant.

**Lemme 4.3.** *Soit* $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0)c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{128}$$

*pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

*Démonstration.* En effet, on a

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg. \tag{129}$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1,.) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n\backslash G_n$ est $(H_n, \theta)$-invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

$$\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dXdg \tag{130}$$

est $(H_n, \theta)$-invariant. Autrement dit, $\beta$ restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est $(H_n, \theta)$-invariant, ce qui termine la preuve du lemme 4.1.

**Remarque 4.1.** *Cette preuve que* $\beta$ *restreint à* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est* $(H_n, \theta)$*-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ *qui est de dimension au plus* 1. *En utilisant le fait que* $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ *donc* $\pi$ *est* $(H_n, \theta)$*-distinguée, on a* $Hom_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. *Ce dernier est un sous-espace de* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. *On en déduirait alors que la restriction de* $\beta$ *a* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, *qui est bien* $H_n \cap P_{2n}$*-invariant, est un élément de* $Hom_{H_n}(\pi, \theta)$. *Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension* 1.

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

(131)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg$$
$$= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dhdp.$$

De plus,

$$\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dXdp = \beta\left(R\left(\sigma\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\widetilde{W}\right) = \beta(\widetilde{W}), \tag{132}$$

puisque $\beta$ est $(H_n, \theta)$-invariant. De plus,

$$\int_{P_n\backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h)|\det h| dh = \int_{F^n}\widehat{\phi}(x)dx = \phi(0). \tag{133}$$

On conclut grâce à la proposition 4.1. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 4.3 dans la relation 125. □

4.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$\varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1}dh, \tag{134}$$

pour tout $y \in Y_n$.

**Théorème 4.1.** *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh, \tag{135}$$

*où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n}\backslash H_n^P} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{136}$$

*pour tout $\pi \in T(Temp(SO(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de $f_1, f_2$. Alors on a*

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma. \tag{137}$$

*Démonstration.* On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n}\int_{H_n\times H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(h_2y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1dh_2dy. \tag{138}$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(y, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1y)\overline{f_2(h_2y)} \tag{139}$$

est à support compact, ou $\mathcal{Y}_n$ est un système de représentant de $Y_n$. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1h_2$ et on combine les intégrales selon $y$ et $h_2$ en une intégrale sur $G_{2n}$. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}}\int_{H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1}dh_1dy, \tag{140}$$

qui est bien la relation 135.

D'après 3.1 et 4.1, on a

$$\begin{aligned}\int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh = \int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n^p}\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right) \\ \theta(\xi_p)\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma d\xi_p.\end{aligned} \tag{141}$$

**Lemme 4.4.** *La fonction* $(\xi_p,\sigma)\mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right)$ *est à support compact, l'intégrale 141 est donc absolument convergente.*

*Démonstration.* La fonction $\xi_p \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right)$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de $f_\pi$, $W_{f,\pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit $K_f$ un sous-groupe ouvert compact tel que $f$ est biinvariant par $K_f$. Alors $\pi(f)\neq 0$, seulement lorsque $\pi$ admet des vecteurs $K_f$-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M)\otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs $K_f$-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in Temp(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation $\tau$ pour un bon choix de sous-groupe de Levi $M$, on en déduit le lemme. □

On échange les intégrales pour obtenir

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma. \tag{142}$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de $f_1, f_2$. Commençons par le

**Lemme 4.5.** *Soit* $\pi \in Temp(G_{2n})$*. On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *:*

$$(W,W')^{Wh} = \int_{N_{2n}\backslash P_{2n}} W(p)\overline{W'(p)}dp, \tag{143}$$

*pour tous* $W, W' \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$.

*L'opérateur* $\pi(f^\vee):\mathcal{W}(\pi,\psi)\to\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi,\psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi} = \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}\overline{\pi(f_2)W'}\otimes\pi(f_1)W'. \tag{144}$$

*Démonstration.* Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est $P_{2n}$-invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi $G_{2n}$-invariant.

Pour $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee)W &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}(\pi(f^\vee)W,W')^{Wh}W' \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}(W,\pi(\overline{f^\vee})W')^{Wh}W'.\end{aligned} \tag{145}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee) &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}W'\otimes\pi(f^\vee)\overline{W'} \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}\pi(f_1)W'\otimes\overline{\pi(f_2)W'},\end{aligned} \tag{146}$$

d'après l'invariance par $G_{2n}$ du produit scalaire.

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
W_{f,\pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int^{*}_{N_{2n}} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1}\,du \\
&= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1),
\end{aligned}
\tag{147}
$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [**?**, Prop 2.14.2] (qui est une conséquence de [**?**, Lemme 4.4]). ☐

Le lemme 4.5 donne la relation

$$
(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')}\beta(T(\sigma)(f_1)W'),
\tag{148}
$$

qui est bien indépendant du choix de $f_1, f_2$ puisque la restriction de $\beta$ a $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est $H_n$-invariante.

Pour finir, [**?**, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$
\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)c(T(\sigma))c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|.
\tag{149}
$$

☐

### 4.2. **Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$.**

**Lemme 4.6.** *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$
L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n\backslash G_{2n}, \theta).
\tag{150}
$$

*Démonstration.* ☐

**Théorème 4.2.** *On a la décomposition de Plancherel abstraite suivante*

$$
L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) = \int^{\otimes}_{Temp(SO(2n+1))/Stab} T(\sigma)\frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|}\,d\sigma.
\tag{151}
$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme 4.6 et de la décomposition de Planchrel déduite du théorème 4.1. ☐

## Références


[1] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square l-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[2] G. Henniart, *Correspondance de langlands et fonctions l des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[3] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square l-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[4] A. C. Kable, *Asai l-functions and jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[5] N. Matringe, *Linear and shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[6] J.-L. Waldspurger, *La formule de plancherel pour les groupes p-adiques. d'apres harish-chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), p. 235–333.