FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \backslash \mathrm{GL}_{2n}$

1. Introduction

Soit F un corps p-adique, G un groupe réductif déployé sur F et $\mathsf{X} = \mathsf{H}\backslash\mathsf{G}$ une variété sphérique homogène admettant une mesure invariante. Sakellaridis et Venkatesh [18] introduisent une donnée radicielle associé à X, qui n'existe que sous certaines conditions sur X. On peut associer à la donnée radicielle duale un groupe réductif complexe $\check{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$ qu'ils appellent le groupe dual de la variété sphérique X. On note G_{X} le groupe réductif déployé sur F dont le groupe dual est $\check{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$, le groupe G_{X} est associé à la donnée radicielle de X. Sakellaridis et Venkatesh introduisent aussi un morphisme de groupes algébriques $\iota_{\mathsf{X}} : \check{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}} \times \mathsf{SL}_2(\mathbb{C}) \to \check{\mathsf{G}}$ sous certaines hypothèses. L'existence de l'application ι_{X} a ensuite été vérifiée par Knop et Schalke [16] sans ces hypothèses. Supposons que ι_{X} est trivial sur $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$.

La correspondance de Langlands locale pour G donne une application surjective $\mathrm{Irr}(\mathsf{G}) \to \Phi(\mathsf{G})$ à fibres finies entre l'ensemble $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G et l'ensemble $\Phi(\mathsf{G}) = \{\phi : W'_{\mathsf{F}} \to {}^{\mathsf{L}}\mathsf{G} \text{ admissible}\}$ des paramètres de Langlands, où W'_{F} est le groupe de Weil-Deligne de F. La correspondance de Langlands locale donne une partition de $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ en L-paquets

$$\mathrm{Irr}(\mathsf{G}) = \bigcup_{\phi \in \Phi(\mathsf{G})} \Pi^{\mathsf{G}}(\phi), \tag{1}$$

où $\Pi^{\mathsf{G}}(\phi)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations qui ont pour paramètre de Langlands ϕ. La correspondance de Langlands locale est prouvée pour $\mathrm{GL}_n(\mathsf{F})$ par Harris-Taylor [8], Henniart [9], Scholze [19] et pour les groupes orthogonaux impairs par Arthur [2]. Rappellons la

Conjecture 1.1 (Sakellaridis-Venkatesh [18, Conjecture 16.2.2])**.** *Il existe un isomorphisme G-équivariant de représentations unitaires*

$$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}) \simeq \int^{\oplus}_{\Phi_{\mathrm{temp}}(\mathsf{G}_{\mathsf{X}})} \mathcal{H}_\phi \, d\phi, \tag{2}$$

où $\Phi_{\mathrm{temp}}(\mathsf{G}_{\mathsf{X}})$ est l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G_{X} modulo $\check{\mathsf{G}}_{\mathsf{X}}$-conjugaison, $d\phi$ est dans la classe naturelle des mesures sur $\Phi_{\mathrm{temp}}(\mathsf{G}_{\mathsf{X}})$ et $\mathcal{H}_\phi$ est une somme directe sans multiplicité de représentations dans $\Pi^{\mathsf{G}}(\iota_{\mathsf{X}} \circ \phi)$.

Supposons de plus la correspondance de Langlands locale pour G_{X}, on dispose alors d'une correspondance fonctorielle $\mathsf{T}_{\mathsf{X}} : \mathrm{Temp}(\mathsf{G}_{\mathsf{X}}) \to \mathrm{Temp}(\mathsf{G})$. Cette correspondance associe à une classe d'isomorphisme de représentations tempérées de G_{X} un ensemble fini de classes d'isomorphisme de représentations tempérées de G. On obtient alors la

Date: 3 octobre 2019.

Conjecture 1.2 (Sakellaridis-Venkatesh)**.** *Supposons que la mesure spectrale* $d\sigma$ *sur* G_X *se descend en une mesure sur* $\mathrm{Temp}(G_X)/\sim$*, où* $\sim$ *est la relation d'équivalence "égalité des paramètres de Langlands". Alors il existe un isomorphisme* G*-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(X) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(G_X)/\sim}^{\oplus} \widetilde{T}_X(\sigma) d\sigma, \tag{3}$$

où $d\sigma$ *est la mesure spectrale sur* G_X *(voir section 1.2) et* $\widetilde{T}_X(\sigma)$ *est une somme directe sans multiplicité de représentations dans* $T_X(\sigma)$*.*

Spécifions maintenant au cas où $G = GL_{2n}$ et $X = GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$. On a $\check{G}_X = Sp_{2n}$ et $G_X = SO(2n+1)$. La correspondance de Langlands locale est prouvé pour G et G_X par Harris-Taylor [8], Henniart [9] et Arthur [2]. De plus, la mesure $d\sigma$ se descend à $\mathrm{Temp}(G_X)/\sim$ d'après Ichino-Lapid-Mao [11]. L'essentiel de notre travail consiste alors à prouver le

Théorème 1.1. *Il existe un isomorphisme* GL_{2n}*-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma, \tag{4}$$

où $d\sigma$ *est la mesure spectrale sur* $SO(2n+1)$ *et* $T : \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim \to \mathrm{Temp}(GL_{2n})$ *est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.*

On note H_n le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. Soit θ le caractère sur $H_n(F)$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\mathrm{Tr}(X))$. On déduit le théorème précédent d'un résultat analogue sur le modèle de Shalika. Plus précisément, on prouve le

Théorème 1.2. *Il existe un isomorphisme* GL_{2n}*-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma, \tag{5}$$

où $T : \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim \to \mathrm{Temp}(GL_{2n})$ *est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.*

Ce dernier est une conséquence de la formule de Plancherel explicte que l'on prouve dans la section 5. Soit ψ un caractère additif non trivial de F. On pose $Y_n = H_n \backslash GL_{2n}$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(Y_n, \theta)$. Il existe $f_1, f_2 \in C_c^\infty(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On pose $f = f_1 * f_2^*$, où $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash GL_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{6}$$

où $H_n^P = H_n \bigcap P_n$, on définit la mesure $d\xi_p$ dans la section 4, voir la section 1.1 pour les notations N_{2n}, P_n et on renvoie à la section 2.1.4 pour la définition de l'espace $\mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash GL_{2n})$. On pose

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{7}$$

pour tout $\pi \in T(Temp(SO(2n+1)))$, où $W_{f,\pi}(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f_\pi(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du$ et on renvoie à la section 3 pour la notation f_π.

On prouve alors la formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash GL_{2n}$ sous la forme du

Théorème 1.3. *On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n,\theta)} = \int_{Temp(SO(2n+1))/\sim} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma, \tag{8}$$

Le facteur $\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}$ *est défini dans la section 1.1.*

La preuve de ce théorème est purement locale, elle se base sur la théorie des fonctions zêta introduite par Jacquet-Shalika [13]. Une fois que l'on aura introduit les préliminaires, il s'agit essentiellement de montrer que l'on peut échanger deux intégrales (voir la preuve du théorème 5.1). L'utilisation des résultats de Jacquet-Shalika nous amène à prouver un résultat sur les facteurs gamma.

Théorème 1.4. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$. *On note* $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *le facteur gamma de Jacquet-Shalika, voir section 2. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que tout* $s \in \mathbb{C}$, *on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{9}$$

Dans la suite de cette introduction, F désigne un corps de nombres et ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_F$. On définit $H_n(\mathbb{A}_F)$ et θ de la même manière que précédemment de façon globale.

Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(H_n(\mathbb{A}_F)\backslash GL_{2n}(\mathbb{A}_F), \theta) = \bigotimes_v' C_c^\infty(H_n(F_v)\backslash GL_{2n}(F_v), \theta_v)$. On note $\Sigma\phi_i \in C^\infty([GL_{2n}])$, pour $i = 1, 2$, la fonction définie par $\Sigma\phi_i(g) = \sum_{x \in H_n(F)\backslash GL_{2n}(F)} \phi_i(xg)$ pour tout $g \in GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$. D'autre part, pour $\varphi \in \pi$, on introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi) = \int_{[Z_{2n}\backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh, \tag{10}$$

où Z_{2n} est le centre de GL_{2n} et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent une factorisation du produit scalaire

$$< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{Pet} = \int_{[Z_{2n}\backslash GL_{2n}]} (\Sigma\phi_1)_\pi(g)\overline{(\Sigma\phi_2)_\pi(g)}dg, \tag{11}$$

où $(\Sigma\phi_1)_\pi$ est la projection sur π de $\Sigma\phi_i$ et dg est la mesure de Tamagawa de $[Z_{2n}\backslash GL_{2n}]$ [18, section 17.1].

Si π est le transfert d'une représentation automorphe cuspidale σ de $SO(2n+1)(\mathbb{A}_F)$ alors cette factorisation prend la forme suivante

$$< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{Pet} = q {\prod_v}' < \phi_{1,v}, \phi_{2,v} >_{\sigma_v}, \tag{12}$$

où q est un rationnel. Cette factorisation est une conséquence de la factorisation de la période globale en produit de périodes locales, produite par Jacquet-Shalika dans le cas qui nous intéresse (voir plus loin). Les quantités $<\phi_{1,\nu},\phi_{2,\nu}>_{\sigma_\nu}$ sont des formes hermitiennes $(H_n(F_\nu),\theta_\nu)$-invariante. On renvoie à [18, section 17.5] pour la signification du produit $\prod'_\nu$. En effet, le produit n'est pas absolument convergent et on doit l'interpréter comme l'évaluation d'une fonction L. Si π n'est pas le transfert d'une représentation automorphe cuspidale de $SO(2n+1)(\mathbb{A}_F)$ alors

$$<(\Sigma\phi_1)_\pi,(\Sigma\phi_2)_\pi>_{\mathsf{Pet}}=0. \tag{13}$$

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent que les formes hermitiennes $<\phi_{1,\nu},\phi_{2,\nu}>_{\sigma_\nu}$ (pour σ_ν tempérée) sont reliées aux formes $(\phi_{1,\nu},\phi_{2,\nu})_{Y_{n,\nu},\pi_\nu}$ qui l'on a définit précédemment. Plus précisement,

Conjecture 1.3 (Sakellaridis-Venkatesh [18, section 17])**.** *On a l'égalité*

$$<\phi_{1,\nu},\phi_{2,\nu}>_{\sigma_\nu}=(\phi_{1,\nu},\phi_{2,\nu})_{Y_{n,\nu},T(\sigma_\nu)}. \tag{14}$$

De manière duale, la relation 12 est équivalente à une factorisation de la période globale $\mathcal{P}_{H_n,\theta}$ en produit de périodes locales $\mathcal{P}_{H_n,\theta,\nu}$. Cette factorisation est obtenue par Jacquet-Shalika [13] à travers leur théorie des fonctions zêta que l'on explicite dans la section 2.

La relation 18 entre la période locale et la forme β va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n},\theta)$ prouvant ainsi la conjecture 1.3. Plus précisément, pour Φ une fonction de Schwartz sur $\mathbb{A}_F^n$ et W_φ la fonction de Whittaker associée à φ, on introduit dans la suite des fonctions zêta globales $J(s,W_\varphi,\Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathsf{Res}_{s=1}J(s,W_\varphi,\Phi)=\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{15}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales, pour $\mathsf{Re}(s)$ assez grand, on a

$$J(s,W_\varphi,\Phi)=L^S(s,\pi,\Lambda^2)\prod_{\nu\in S}J(s,W_\nu,\Phi_\nu), \tag{16}$$

où S est un ensemble de places suffisamment grand. On obtient alors une factorisation de la période globale sous la forme

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)=\frac{\mathsf{Res}_{s=1}L^S(s,\pi,\Lambda^2)}{\widehat{\Phi}^S(0)}\prod_{\nu\in S}\frac{J(1,W_\nu,\Phi_\nu)}{\widehat{\Phi}_\nu(0)}. \tag{17}$$

Supposons que $\mathsf{Res}_{s=1}L^S(s,\pi,\Lambda^2)\neq 0$. Le terme $\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)$ ne dépend pas de Φ, on en déduit que les facteurs $\frac{J(1,W_\nu,\Phi_\nu)}{\widehat{\Phi}_\nu(0)}$ ne dépendent pas de Φ. On montrera l'égalité

$$J(1,\widetilde{W_\nu},\widehat{\Phi_\nu})=\pm\Phi_\nu(0)\beta(W_\nu), \tag{18}$$

c'est le lemme 5.4. La forme linéaire β nous servira à prouver le théorème 1.3.

On commence dans la section 2 par prouver une relation sur les facteurs γ du carré extérieur. Les sections 3 et 4 sont des préliminaires pour le théorème 5.1. On fini dans la section 5 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n},\theta)$ et des décompositions de Plancherel abstraite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n})$ et $L^2(GL_n\times GL_n\backslash GL_{2n})$.

1.1. **Notations.** Dans la suite on notera F un corps p-adique (sauf dans la section 2 où F peut désigner un corps archimédien) et ψ un caractère non trivial de F. On note q_F le cardinal du corps résiduel de F et $|.|_F$ (ou simplement $|.|$) la valeur absolue sur F normalisé par $|\omega|_F = q_F^{-1}$ où ω est une uniformisante de F. On notera G_m le groupe $GL_m(F)$ et $PG_m = Z_m(F)\backslash GL_m(F)$. On note $H_n(F)$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$.. On note $SO(2m+1)$ la forme déployé du groupe spécial orthogonal sur un espace de dimension $2m+1$. On note A_n le sous-groupe de G_n des matrices diagonales inversibles, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles, $\overline{B}_n$ le sous groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1, $\overline{N}_n = {}^tN_n$ et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F. On note V_n le sous-espace de M_n des matrices triangulaires inférieures strictes. On note U_n le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique. On note δ_{B_n} le caractère modulaire de B_n. On notera par des lettres gothiques les algèbres de Lie correspondantes et pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ désignera l'algèbre enveloppante.

Lorsque X est un espace totalement discontinu, on notera $C_c^\infty(X)$ ou $\mathcal{S}(X)$, l'espace des fonctions localement constante à support compact. Lorsque G est un groupe algébrique réel ou complexe, on note $\mathcal{S}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées tel que défini par Aizenbud et Gourevitch [1]. De plus, lorsque $\mathbb{A}_K$ est l'anneau des adèles d'un corps de nombres K et G est un groupe algébrique sur K, on note $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ le produit restreint des espaces $\mathcal{S}(G(K_v))$ lorsque v parcours l'ensemble des places de K i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $f = \otimes_v f_v$ avec $f_v \in \mathcal{S}(G(K_v))$ pour tout v et $f_v = \mathbb{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$ sauf pour un nombre fini de v, où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de K_v.

Pour G un groupe réductif connexe sur F (dans la suite G sera GL_{2n}, SO_{2n+1} ou un quotient, d'un sous-groupe de Levi de ces groupes), on note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$ et $\Pi_2(G) \subset \mathrm{Temp}(G)$ le sous-ensemble des représentations de carré intégrable. On note Z_G le centre de $G(F)$ et A_G le tore déployé maximal dans Z_G. Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G,M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G,M) et $W(G,\sigma)$ le sous-groupe de $W(G,M)$ fixant la classe d'isomorphisme de σ. On note W_F' est le groupe de Weil-Deligne de F et $\Phi(G) = \{\phi : W_F' \to {}^LG$ admissible d'image bornée$\}$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

Pour $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G, on note $i_P^G(\sigma)$ l'induction parabolique normalisée lorsque σ est une représentation lisse de M : c'est la représentation régulière à droite de G sur l'espace des fonctions localement constantes $f : G \mapsto \sigma$ qui vérifient $f(mng) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\sigma(m)f(g)$ pour tous $m \in M$, $n \in N$ et $g \in G$. Lorsque $G = G_n$ et $M = G_{n_1} \times ... \times G_{n_k}$, on note $\pi_1 \times ... \times \pi_k = i_P^G(\pi_1 \boxtimes ... \boxtimes \pi_k)$ pour π_i des représentations lisses de G_{n_i}. Lorsque $G = SO(2n+1)$ et $M =$

$G_{n_1} \times ... \times G_{n_k} \times SO(2m+1)$, on note $\pi_1 \times ... \times \pi_k \rtimes \sigma_0 = i_P^G(\pi_1 \boxtimes ... \boxtimes \pi_k \boxtimes \sigma_0)$ pour π_i des représentations lisses de G_{n_i} et σ_0 une représentation lisse de $SO(2m+1)$.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W_F' \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$ grâce à la correspondance de Langlands locale pour GL_{2m}. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ et pour GL_{2m}, nous permettent de définir une application de transfert $T : Temp(SO(2m+1))/Stab \to Temp(G_{2m})$.

Dans les mesures de Plancherel, on verra apparaître des termes $|S_\sigma|$ pour $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ ou $Temp(PG_{2n})$. On n'explicite pas les ensembles S_σ et on se contente de donner leur cardinal. Pour $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_l \rtimes \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\sigma|$ est le produit $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$ et $|S_{\pi_i}| = n_i$.

Pour $\pi \in Temp(G)$ et r une représentation admissible de ${}^L G$, on note $L(s, \pi, r)$ la fonction L associée par la correspondance de Langlands locale et $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ le facteur γ associé. Lorsque r est la représentation standard, on l'omettra. De plus, on note $\gamma^*(0, \pi, r, \psi)$ la régularisation du facteur γ en 0, défini par la relation

$$\gamma^*(0, \pi, r, \psi) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\gamma(s, \pi, r, \psi)}{(s\log(q_F))^{n_{\pi,r}}}, \tag{19}$$

où $n_{\pi,r}$ est l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ en $s = 0$.

1.2. **Mesures.** On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ et $F^\times$ de la mesure de Haar $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$. Pour $m \geqslant 1$, on équipe F^m de la mesure produit $(dx)^m$ et $(F^\times)^m$ de la mesure $(d^\times x)^m$. On équipe les groupes M_n, U_n, N_n, $\overline{N}_n$ des mesures de Haar "produit des coordonnées". Par exemple, on équipe M_n de la mesure $dX = \prod_{i,j=1}^n dX_{i,j}$ où $dX_{i,j}$ est la mesure de Haar sur F que l'on a fixé précédemment. On équipe G_n de la mesure $dg = |\det g|_F^{-n} \prod_{i,j=1}^n dg_{i,j}$ et P_n la mesure de Haar à droite obtenu comme produit des mesures sur G_{n-1} et ssur U_n. On équipe $\overline{B}_n$ de la mesure $\prod_{i=1}^n d^\times b_{i,i} \prod_{\substack{i,j=1,...,n \\ j<i}} db_{i,j}$. On équipe les groupes compact des mesures de Haar de masse totale égale à 1.

On équipe $N_n \backslash G_n$ de la mesure

$$\int_{N_n \backslash G_n} f(g) dg = \int_{\overline{B}_n} f(b) db, \tag{20}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G_n)$ invariante par N_n.

On a l'isomorphisme $P_n \backslash G_n \simeq F^n \backslash \{0\}$, on équipe $P_n \backslash G_n$ de la semi-mesure (ou mesure tordue) dg telle que $|\det g| dg$ s'identifie à la mesure $(dx)^n$ sur F^n. À travers l'isomorphisme $P_n \backslash G_n \simeq F^n \backslash \{0\}$, on effectue l'identification d'un ouvert dense de $P_n \backslash G_n$ avec $F^{n-1} \times F^\times$, ce qui nous permet d'identifier la mesure tordue sur $P_n \backslash G_n$ à la mesure $(dx)^{n-1} \times d^\times y$ sur $F^{n-1} \times F^\times$. La mesure tordue sur $P_n \backslash G_n$ n'est pas invariante, ce n'est pas une mesure sur le quotient $P_n \backslash G_n$. Cependant on a la formule d'intégration suivante

$$\int_{G_n} f(g) dg = \int_{P_n \backslash G_n} \int_{P_n} f(pg) |\det p|^{-1} dp dg, \tag{21}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G_n)$.

Pour G un groupe réductif connexe sur F, on fixe un isomorphisme $A_G \simeq (F^\times)^{\dim(A_G)}$ et on équipe A_G de la mesure $(d^\times x)^{\dim(A_G)}$ provenant de l'isomorphisme avec $(F^\times)^{\dim(A_G)}$.

Décrivons le choix de la normalisation d'une mesure sur Temp(G). Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\widetilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0,1,\psi)^{-\dim(A_M)} d\widetilde{\chi}. \tag{22}$$

La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto \sigma \otimes \chi_\lambda \in \Pi_2(M)$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de σ dans $\Pi_2(M)$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ telle que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. Soit P un sous groupe parabolique de G de Levi M. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq i_P^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1} (i_P^G)_* d\sigma, \tag{23}$$

où $(i_P^G)_* d\sigma$ est la mesure $d\sigma$ poussée en avant en une mesure sur $\mathrm{Temp}(G)$ par l'application i_P^G. Cette mesure ne dépend pas du choix du groupe parabolique. La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 87.

1.3. **Résultats.** Soit F un corps p-adique et ψ un caractère non trivial de F. Rappelons que l'on note $H_n(F)$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. De plus, θ est le caractère sur $H_n(F)$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\mathrm{Tr}(X))$. Le résultat principal est le

Théorème 1.5. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(H_n(F) \backslash GL_{2n}(F), \theta) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1)(F))/Stab}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma, \tag{24}$$

où $T : \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim \to \mathrm{Temp}(GL_{2n})$ *est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.*

De l'isomorphisme $L^2(GL_n(F) \times GL_n(F) \backslash GL_{2n}(F)) \simeq L^2(H_n(F) \backslash G_{2n}(F), \theta)$ GL_{2n}-invariant (lemme 5.7), on en déduit le

Théorème 1.6. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(GL_n(F) \times GL_n(F) \backslash GL_{2n}(F)) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1)(F))/Stab}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma. \tag{25}$$

Rappelons que ces deux décompositions de Plancherel abstraite sont obtenu en prouvant une formule de Plancherel explicite sur $H_n \backslash G_n$.

Théorème 1.7. *On pose* $Y_n = H_n \backslash G_{2n}$*. Soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(Y_n, \theta)$*. On pose*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right) \theta(\xi_p) d\xi_p, \tag{26}$$

pour tout $\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1)))$*, où* $H_n^P = H_n \bigcap P_n$*. Les notations* β *et* $W_{f,\pi}$ *ont été introduite dans l'introduction. On a alors*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n, \theta)} = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma, \tag{27}$$

La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)}$ *est définie en fonction de* β *dans l'introduction. Le facteur* $\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}$ *est défini dans la section 1.1.*

La mesure $\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma$ n'est rien d'autre que la mesure de Plancherel pour SO(2n+1). En effet, la mesure de Plancherel d'un groupe réductif p-adique G a été calculée par Waldspurger et Harish-Chandra [22] sous la forme

$$d\mu_G(\sigma) = d(\sigma) j(\sigma)^{-1} d\sigma, \tag{28}$$

où $d(\sigma)$ est le degré formel de σ et $j(\sigma)$ est un scalaire produit d'opérateurs d'entrelacements (voir [22]). Le degré formel pour $SO(2n+1)$ a été calculé par Ichino-Lapid-Mao [11] et le facteur j pour $SO(2n+1)$ découle de la normalisation des opérateurs d'entrelacements d'Arthur [2]. Finalement, on obtient que la mesure de Plancherel pour $SO(2n+1)$ est

$$d\mu_{SO(2n+1)}(\sigma) = \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{29}$$

On renvoie à l'article de Beuzart-Plessis [6, Proposition 2.13.2] pour l'analogue de ce résultat pour les groupes unitaires.

Pour finir, au cours de la preuve de la formule de Plancherel explicite, on aura besoin d'une égalité sur des facteurs gamma définie de deux manière différentes. On prouve le

Théorème 1.8. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$*. On note* $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *le facteur gamma de Jacquet-Shalika, voir section 2. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que tout* $s \in \mathbb{C}$*, on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{30}$$

2. Facteurs γ du carré extérieur

Dans cette partie F désigne un corps local de caractéristique 0 et ψ un caractère non trivial de F. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe des constantes $c^{Sh}(\pi)$ et $c(\pi)$ de module 1, telles que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi), \tag{31}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La dernière égalité est une conséquence de l'égalité des facteurs gamma de Shahidi et d'Artin pour le carré extérieur à une racine de l'unité prés prouvée par Henniart [10]. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

2.1. **Préliminaires.**

2.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg \tag{32}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. Le groupe V_n est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes, on l'équipe de la mesure de Haar $dX = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} dX_{i,j}$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 2.1 (Jacquet-Shalika [13]). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s, W, \phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1 - \eta$.*

Kewat [15] montre, lorsque F est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 2.2 (Belt [3], Matringe [17]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0. Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p-adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi) par ces intégrales.

Proposition 2.3 (Jacquet-Shalika [13]). *Supposons que F est p-adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ de F. Soit π une représentation générique non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_F^n$ et $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{33}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p-adique. Plus précisément, on a la

Proposition 2.4 (Matringe [17]). *Supposons que F est un corps p-adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s ou q^{-s}, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait*

$$\epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \widehat{\phi})}{L(1-s, \widetilde{\pi}, \Lambda^2)}, \tag{34}$$

où $\widehat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ *est la transformée de Fourier de* ϕ *par rapport au caractère* ψ *définie par*

$$\mathcal{F}_\psi(\phi)(y) = \int_{F^n} \phi(x)\psi(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)dx \tag{35}$$

pour tout $y \in F^n$ *et* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \bar{\psi})$ *est la fonction de Whittaker définie par* $\widetilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$ *pour tout* $g \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$, *avec* w_n *la matrice associée à la permutation* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $w_{n,n} = \sigma_n \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. *On définit alors le facteur* γ *de Jacquet-Shalika par la relation*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \widetilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}. \tag{36}$$

2.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)^{-1} du \tag{37}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

$$\int_{N_n\backslash G_n} \int_{V_n} W_\varphi \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg \tag{38}$$

où l'on note G_n le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 2.5 (Jacquet-Shalika [13])**.** *Les intégrales* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand. De plus,* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_\varphi, \widehat{\Phi}), \tag{39}$$

où $\widetilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ *et* $\widehat{\Phi}$ *est la transformée de Fourier de* Φ *par rapport au caractère* $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W_\varphi = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v), \tag{40}$$

pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand.

2.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 2.1 (Kable [14])**.** *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Il existe un corps de nombres* k *et une place* v_0 *telle que* $k_{v_0} = F$*, où* v_0 *est l'unique place de* k *au dessus de* p*.*

Rappelons la topologie que l'on a défini sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$, P un parabolique de Levi M et $\sigma \in \Pi_2(M)$. La classe d'équivalence de l'induction parabolique normalisé $i_P^G(\sigma)$ est indépendante du parabolique P et on la notera $i_M^G(\sigma)$. On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 2.6 (Beuzart-Plessis [6])**.** *Soient* k *un corps de nombres,* v_0, v_1 *deux places distinctes de* k *avec* v_1 *non archimédienne. Soit* U *un ouvert de* $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$*. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible* Π *de* $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ *telle que* $\Pi_{v_0} \in U$ *et* Π_v *est non ramifiée pour toute place non archimédienne* $v \notin \{v_0, v_1\}$*.*

2.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

On note K_{2n} le sous-groupe compact maximal de $GL_{2n}(F)$ défini par $K_{2n} = GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ lorsque F est p-adique et $K_{2n} = \{g \in GL_{2n}(F), g\overline{g}^t = I_n\}$ lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où $\overline{g}$ est la conjuguée complexe.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— si F est p-adique, f est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert K et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d, \tag{41}$$

où $\|a\| = 1 + max(|a_{i,i}|, |a_{i,i}|^{-1})$, pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in K_{2n}$;

— si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$, il existe $C > 0$ tel que

$$|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d, \tag{42}$$

pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in K_{2n}$.

Lorsque F est p-adique, pour $d > 0$ et K un sous-groupe compact ouvert de GL_{2n}, on note $C_d^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)^K$ l'espace des fonctions tempérées invariante à droite par K et vérifiant la condition 41. On munit $C_d^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)^K$ de la topologie provenant de la norme $\sup_{a \in A_{2n}, k \in K_{2n}} \frac{|f(ak)|}{\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d}$ qui en fait un espace de Banach. On munit alors $C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi) = \bigcup_{d,K} C^w_d(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)^K$ de la topologie limite inductive.

Lorsque F est archimédien, pour $d > 0$, on note $C^w_d(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ l'espace des fonctions tempérées vérifiant la condition 42. On munit $C^w_d(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ de la topologie provenant des semi-normes $p_u(f) = \sup_{a\in A_{2n},k\in K_{2n}} \frac{|(R(u)f)(ak)|}{\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}}\log(||a||)^d}$ pour $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$. On munit alors $C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi) = \bigcup_d C^w_d(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ de la topologie limite inductive.

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 2.2 ([6, Lemme 2.4.3])**.** *Soit* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$*. Il existe* $d > 0$ *tel que pour tout* $N \geqslant 1$*, il existe* $C > 0$ *tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C\prod_{i=1}^{2n-1}(1+|\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}}\log(||b||)^d, \tag{43}$$

pour tous $b \in A_{2n}(F)$ *et* $k \in K_{2n}$*.*

Lemme 2.3 ([6, Lemme 2.4.4])**.** *Pour tout* $C > 0$*, il existe* N *tel que pour tous* s *vérifiant* $0 < \mathrm{Re}(s) < C$ *et* $d > 0$*, l'intégrale*

$$\int_{A_n}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}(1+|a_n|)^{-N}\log(||a||)^d|\det a|^s da \tag{44}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s,W,\phi)$ aux fonctions tempérées W, on montre maintenant la convergence de ces intégrales dans le

Lemme 2.4. *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, l'intégrale* $J(s,W,\phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$*. De plus, pour tous* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathrm{Re}(s) > 0$*, la forme linéaire* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi) \mapsto J(s,W,\phi)$ *est continue.*

Démonstration. Soit $G_n = N_nA_nK_n$ la décomposition d'Iwasawa de G_n. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{V_n}\left|W\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\phi(e_nak)\right|dXdk\,|\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\,\delta_{B_n}^{-1}(a)da. \tag{45}$$

On pose $u_X = \sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} = bu_{a^{-1}Xa}\sigma_n, \tag{46}$$

où $b = diag(a_1,a_1,a_2,a_2,\ldots)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{V_n}\left|W\left(bu_X\sigma_n\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\phi(e_nak)\right|dXdk|\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\delta_{B_n}^{-2}(a)da. \tag{47}$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_X et on pose $k_\sigma = \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. Le lemme 2.2 donne alors

$$|W(bt_Xk_Xk_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1+|\frac{t_jb_j}{t_{j+1}b_{j+1}}|)^{-2N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{48}$$

où $t_X = diag(t_1, ..., t_{2n})$.

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j. On dispose de la

Proposition 2.7 (Jacquet-Shalika [13]). *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* k *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* k *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* j *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* j *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet de majorer $(1+|\frac{t_jb_j}{t_{j+1}b_{j+1}}|)^{-2N}$ par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-2N}$ lorsque j est impair et par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N}(1+|\frac{a_{j/2}}{a_{j/2+1}}|)^{-N}$ lorsque j est pair. Ce qui donne

(49)

$$\begin{aligned} |W(bt_Xk_Xk_\sigma)| &\leqslant C \prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ &\leqslant C \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d, \end{aligned}$$

puisque $\prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_j+1}|^{-N} = |\frac{t_1}{t_{2n}}|^{-N} \leqslant 1$ d'après la proposition 2.7.

De plus, encore d'après la proposition 2.7, on a

$$\prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \leqslant \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \frac{1}{|t_j|^N}. \tag{50}$$

Pour finir, on aura besoin de la

Proposition 2.8 (Jacquet-Shalika [13]). *Pour* $X \in Lie(\overline{N}_n)$*, on pose* $\|X\| = sup_{i,j}|X_{i,j}|$. *On pose* $m(X) = \sqrt{1+\|X\|}$ *lorsque* F *est archimédien et* $m(X) = sup(1, \|X\|)$ *lorsque* F *est non-archimédien. Il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que pour tout* $X \in Lie(\overline{N}_n)$*, on ait*

$$\prod_{j=1, j \textit{ impair}}^{2n-1} |t_j| \geqslant m(X)^\alpha \tag{51}$$

Grâce à cette proposition, on obtient la majoration

$$|W(bt_Xk_Xk_\sigma)| \leqslant Cm(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d. \tag{52}$$

D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n ak)| \leqslant C'(1+|a_n|)^{-N}. \tag{53}$$

L'intégrale $J(s, W, \phi)$ est alors majorée (à une constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX \tag{54}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da, \tag{55}$$

pour j compris entre 0 et d. La première intégrande est majorée par $m(X)^{-\alpha N + c}$, où c est une constante, on en déduit que la première converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$ d'après le lemme 2.3 où l'on a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. □

2.2. **Facteurs γ.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π, on dispose du

Lemme 2.5. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et un voisinage $V \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ de π qui vérifient que $W_0 = W_\pi$ et $W_{\pi'} \in \mathcal{W}(\pi', \psi)$ pour tout $\pi' \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$. De plus, l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est bien définie et continue.*

En particulier, si F est un corps p-adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 2.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ [5, Corollaire 2.7.1]. La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue (lemme 2.4), il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est alors bien définie et continue sur V. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ par rapport au caractère additif ψ, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ. Les caractères additifs non-triviaux de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$. On dispose d'un isomorphisme $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto W_\lambda \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\lambda)$ donné par $W_\lambda(g) = W(a(\lambda) g)$ pour tout $g \in GL_{2n}(F)$, où $a(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda^{2n-1}, \lambda^{2n-2}, ..., \lambda, 1)$.

Lemme 2.6. *Soient $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tels que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_\lambda, \phi) \neq 0$. Alors*

(56)

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{(W_\lambda)}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W_\lambda, \phi)} = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1} |\lambda|^{n(2n-1)(s-\frac{1}{2})} \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_r, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W_r, \phi)},$$

où W_r est la translation à droite de W par $\mathrm{diag}(\lambda, 1, \lambda, 1, ...)$. En particulier, $W_r \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Lorsque F est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on en déduit que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi_\lambda) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1}|\lambda|^{n(2n-1)(s-\frac{1}{2})}\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{57}$$

Démonstration. La mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda .))$ donne

$$J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)) = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{58}$$

D'autre part,

$$J(s, W_\lambda, \phi) = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n} W\left(a(\lambda)\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|^s dg. \tag{59}$$

On décompose $a(\lambda)\sigma_n$ sous la forme $\sigma_n\mathrm{diag}(\lambda b(\lambda), b(\lambda))$ où l'on note $b(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda^{2n-2}, \lambda^{2n-4}, ..., 1)$. Après les changements de variables, $X \mapsto b(\lambda)^{-1}Xb(\lambda)$ et $g \mapsto b(\lambda)^{-1}g$, on obtient la relation

$$J(s, W_\lambda, \phi) = \delta_{B_n}(b(\lambda))|\det b(\lambda)|^{-s}|\lambda|^{x(n)}J(s, \rho(r(\lambda))W, \phi), \tag{60}$$

où $\rho(g)$ est la translation à droite par g, $r(\lambda) = \sigma_n\mathrm{diag}(\lambda, ..., \lambda, 1, ..., 1)\sigma_n^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \lambda, 1, ...)$ et le facteur $|\lambda|^{x(n)}$ (que l'on n'explicite pas) provient du changement de variable $X \mapsto b(\lambda)^{-1}Xb(\lambda)$.

De plus, pour tout $g \in GL_{2n}(F)$, on a

$$\widetilde{(W_\lambda)}(g) = W(a(\lambda)w_n(g^t)^{-1}) = \widetilde{W}(w_n a(\lambda)^{-1}w_n^{-1}g) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1}(\widetilde{W})_\lambda(g), \tag{61}$$

où l'on a utilisé la relation $w_n a(\lambda)^{-1}w_n^{-1} = \lambda^{-(2n-1)}a(\lambda)$. Ce qui donne, en utilisant la relation 60, l'égalité

$$\begin{aligned}J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{(W_\lambda)}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1}\delta_{B_n}(b(\lambda))|\det b(\lambda)|^{s-1}|\lambda|^{x(n)}\\ J(1-s, \rho(w_{n,n})\rho(r(\lambda))\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)).\end{aligned} \tag{62}$$

Pour finir, on remarque que l'on a pour tout $g \in GL_{2n}(F)$,

$$\begin{aligned}\rho(w_{n,n})\rho(r(\lambda))\widetilde{W}(g) &= W\left(w_n\left((gr(\lambda)w_{n,n})^t\right)^{-1}\right) = W\left(\lambda^{-1}w_n\left((gw_{n,n}r(\lambda)^{-1})^t\right)^{-1}\right)\\ &= \omega_\pi(\lambda)^{-1}W\left(w_n\left((gw_{n,n})^t\right)^{-1}r(\lambda)\right) = \omega_\pi(\lambda)^{-1}\rho(w_{n,n})\widetilde{W_r}(g),\end{aligned} \tag{63}$$

où W_r est la translation à droite de W par $r(\lambda)$, où l'on a utilisé la relation $r(\lambda)w_{n,n} = \lambda w_{n,n}r(\lambda)^{-1}$.

On déduit de 60 et 62 la relation suivante

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{(W_\lambda)}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W_\lambda, \phi)} = \omega_\pi(\lambda)^{2n-2}|\lambda|^{n(n-1)(2s-1)}\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_r}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W_r, \phi)}, \tag{64}$$

où l'on a utilisé l'égalité $\det b(\lambda) = \lambda^{n(n-1)}$. On déduit le lemme grâce à la relation 58. $\square$

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [10]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 2.9. *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$. *Les intégrales* $J(s, W, \phi)$ *admettent un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1 - s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{65}$$

De plus, il existe une constante $c^{Sh}(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{66}$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit des fonctions $W_w \in \mathcal{W}(\pi_w, (\phi_{\mathbb{A}})_w)$ et $\phi_w \in \mathcal{S}(k_w)$ dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est ramifié. Pour $w \notin S \cup T$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 2.3. Pour $w \in S \cup T$, on fait un choix, d'après la proposition 2.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{67}$$

D'après la proposition 2.5, on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1 - s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1 - s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{68}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \notin S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [10]),

$$L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1 - s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{69}$$

Les équations (68) et (69), en utilisant la proposition 2.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donnent

$$\begin{aligned} &J(1 - s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{70}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 2.3 et du lemme 2.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 2.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1, \tag{71}$$

d'après la proposition 2.3 et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [10]).

L'équation (70) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{72}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant le lemme 2.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$, on en déduit que

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} \tag{73}$$

qui est à priori bien définie pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 2.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{74}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en une place v' de caractéristique résiduelle distincte de celle de v, on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$.

La fonction R est donc une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$ et $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$ avec q_v et $q_{v'}$ premier entre eux ; ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c^{Sh}(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi), \tag{75}$$

où l'on a noté $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c^{Sh}(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{76}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\widetilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s,\rho(w_{n,n})\widetilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi)=\frac{J(s,W,\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s,\widetilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi})}. \tag{77}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi))=\phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\gamma^{JS}(1-s,\widetilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi})=1. \tag{78}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 76, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}=\gamma^{JS}(\bar{s},\bar{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi}). \tag{79}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\widetilde{\pi}\simeq\bar{\pi}$. On en déduit, pour $s=\frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2=1. \tag{80}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2=1$; on en déduit donc que $c^{Sh}(\pi)$ est bien de module 1. □

Proposition 2.10. *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$*.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ *est défini par la proposition 2.4. Alors il existe une constante* $c^{Sh}(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s\in\mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)=c^{Sh}(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{81}$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0}=F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p. Soit v une place non archimédiennes et de caractéristique résiduelle distincte de celle de v_0. Soit $U\subset\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0}\in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w\neq v,v_0$.

Pour $w=v_0,v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 2.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s,W_w,\phi_w)\neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 2.3. On pose alors

$$W=\prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi=\prod_w \phi_w.$$

On note S_∞ l'ensemble des places archimédienne, $S=S_\infty\cup\{v,v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 2.5), on a

$$\begin{aligned}&\prod_{w\in S\cup T}J(s,W_w,\phi_w)L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)\\ &=\prod_{w\in S\cup T}J(1-s,\rho(w_{n,n})\widetilde{W}_w,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w))L^{S\cup T}(1-s,\widetilde{\Pi},\Lambda^2),\end{aligned} \tag{82}$$

où $L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [10])

$$L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)=\prod_{w\in S\cup T}\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)L^{S\cup T}(1-s,\widetilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{83}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}=1$ pour $w\in T$. En utilisant les propositions 2.4 et 2.9, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty\in S_\infty}c^{Sh}(\Pi_{v_\infty})\frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}\frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)}=1. \tag{84}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.9. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en $s=\frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. $\square$

3. Limite spectrale

Dans cette partie F est un corps p-adique. On renvoie à la section 1.2 pour la normalisation des mesures sur $\mathrm{Temp}(G)$, pour un groupe G réductif connexe sur F.

On note $PG_{2n}=G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f\in\mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi\in\mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$f_\pi(g)=\mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{85}$$

pour tout $g\in PG_{2n}$, où $f^\vee(x)=f(x^{-1})$.

Proposition 3.1 (Harish-Chandra [22], Shahidi [20], Silberger-Zink [21])**.** *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g)=\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}f_\pi(g)d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{86}$$

pour tous $f\in\mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g\in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi)=\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|}d\pi, \tag{87}$$

où $\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)=\lim_{s\to0}(s\log(q_F))^{-n_{\pi,\overline{Ad}}}\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$, avec $n_{\pi,\overline{Ad}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$ en $s=0$. Pour $\pi\in\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ isomorphe à $\pi_1\times\ldots\times\pi_k$, avec $\pi_i\in\Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi\equiv\pi' \iff \varphi_\pi=\varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

Rappelons (section 1.1) que la correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T:\mathrm{Temp}(SO(2m+1))/\mathrm{Stab}\to\mathrm{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi\in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}) \iff \pi=\left(\bigtimes_{i=1}^k\tau_i\times\widetilde{\tau_i}\right)\times\bigtimes_{j=1}^l\mu_i \tag{88}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\mathrm{Temp}(SO(2m_j+1))/\mathrm{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$ (de manière équivalente $\mu_j \in \Pi_2(G_{2m_j})$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi)=0$).

Proposition 3.2. *Soit* ϕ *une fonction localement constante à support compact sur* $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$*, on a*

$$\begin{aligned}(89)\qquad &\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \\ &\int_{\mathrm{Temp}(SO_{2n+1})/\mathrm{Stab}}\phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,\mathrm{Ad},\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned}$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ *sous-représentation de* $\pi_1\times\ldots\times\pi_l \rtimes \sigma_0$*, avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ *et* $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$*, le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $|S_{\pi_1}|\ldots|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ *; où* $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ *tel que* $T(\sigma_0)\simeq \tau_1\times\ldots\times\tau_k$ *avec* $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 87, on a

$$(90)\quad \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi.$$

Soit $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π. On écrit la représentation π sous la forme

$$(91)\qquad \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\times m_i}\times\widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right)\times\left(\bigtimes_{j=1}^{u}\mu_j^{\times p_j}\right)\times\left(\bigtimes_{k=1}^{v}\nu_k^{\times q_k}\right),$$

où

— $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant t$. De plus, pour tous $1\leqslant i<i'\leqslant t$, $\tau_i\not\simeq\tau_{i'}$ et $\tau_i\not\simeq\widetilde{\tau_{i'}}$.
— $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j\simeq\widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi)\neq 0$ pour tout $1\leqslant j\leqslant u$. De plus, pour tous $1\leqslant j<j'\leqslant u$, $\mu_j\not\simeq\mu_{j'}$.
— $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi)=0$ (et donc $\nu_k\simeq\widetilde{\nu_k}$) pour tout $1\leqslant k\leqslant v$. De plus, pour tous $1\leqslant k<k'\leqslant v$, $\nu_k\not\simeq\nu_{k'}$.

On note $M = \left(\prod_{i=1}^t G_{d_i}^{m_i+n_i}\times\prod_{j=1}^u G_{e_j}^{p_j}\times\prod_{k=1}^v G_{f_k}^{q_k}\right)/Z_{2n}$ et P un parabolique de PG_{2n} de Levi M. Alors $\pi = i_P^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M. On note $\mathcal{A}\subset\prod_{i=1}^t(i\mathbb{R})^{m_i+n_i}\times\prod_{j=1}^u(i\mathbb{R})^{p_j}\times\prod_{k=1}^v(i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient sur $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A}\simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue.

Dans la suite, on notera les coordonnées de $\lambda\in\mathcal{A}$ de la manière suivante :

— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda),\ldots,x_{i,m_i}(\lambda),\widetilde{x_{i,1}}(\lambda),\ldots,\widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda))\in(i\mathbb{R})^{m_i}\times(i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda),\ldots,y_{j,p_j}(\lambda))\in(i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda),\ldots,z_{k,q_k}(\lambda))\in(i\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda\in\mathcal{A}$.

On équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)}d\chi$. Grâce à l'isomorphisme local $\lambda\in\mathcal{A}\mapsto|\det|^\lambda\in\widehat{A_M}$, où l'on note $|\det|^\lambda = \prod_{i=1}^t\prod_{l=1}^{m_i}|\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}}|\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}}\times$

$\prod_{j=1}^{u}\prod_{l=1}^{p_j}|\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \times \prod_{k=1}^{\nu}\prod_{l=1}^{q_k}|\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}$, on dispose d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$, où

$$\begin{aligned}\pi_\lambda = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t}\left(\bigtimes_{l=1}^{m_i}\tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}}\right)\times\left(\bigtimes_{l=1}^{n_i}\widetilde{\tau_i}\otimes|\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)}}{d_i}}\right)\right)\\ &\times\left(\bigtimes_{j=1}^{u}\bigtimes_{l=1}^{p_j}\mu_j\otimes|\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}}\right)\times\left(\bigtimes_{k=1}^{\nu}\bigtimes_{l=1}^{q_k}\nu_k\otimes|\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}\right).\end{aligned} \tag{92}$$

Quitte à restreindre U, cette dernière induit un homéomorphisme $\mathsf{U} \simeq \mathsf{V}/W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)$ est le sous-groupe de $W(\mathsf{PG}_{2n},\mathsf{M})$ fixant la représentation τ. Alors

$$\int_{\mathsf{U}}\Phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\mathsf{U}}\Phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathsf{Ad}},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi \tag{93}$$

d'après la relation 87.

Rappelons que la mesure $d\pi$ est choisie en fonction de la mesure sur $\widehat{A}_M$ que l'on a normalisé avec un facteur $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)}$. Les mesures $d\pi$ et $d\lambda$ vérifient alors la relation de compatibilité suivante

$$\int_{\mathsf{U}} f(\pi)d\pi = \frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)|}\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(A_M)}\int_{\mathsf{V}} f(\pi_\lambda)d\lambda, \tag{94}$$

pour toute fonction f continue à support compact sur U. L'intégrale 93 est donc égale à

$$\frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)|}\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathsf{V}}\Phi(\pi_\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{\mathsf{Ad}},\psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda, \tag{95}$$

où $\dim(\mathcal{A}) = \dim(A_M) = \left(\sum_{i=1}^{t} m_i + n_i + \sum_{j=1}^{u} p_j + \sum_{k=1}^{\nu} q_k\right) - 1$. De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i}\prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j}\prod_{k=1}^{\nu} f_k^{q_k}. \tag{96}$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})}\Phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) =\\ &\qquad\frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)|\mathsf{P}}\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}}\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{\mathsf{Ad}},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda,\end{aligned} \tag{97}$$

où $\varphi(\lambda) = \Phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in \mathsf{V}$ et 0 sinon. La fonction φ est $W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)$-invariante à support compact.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 3.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\mathsf{Ad}) = \gamma(s,\pi_1,\mathsf{Ad})\gamma(s,\pi_2,\mathsf{Ad})\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,

— $\gamma(s,\pi|\det|^x,\mathsf{Ad}) = \gamma(s,\pi,\mathsf{Ad})$,

— $\gamma(s,\pi,\mathsf{Ad})$ *a un zéro simple en* $s = 0$,

— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,

— $\gamma(s, \pi|\det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s+2x, \pi, \Lambda^2)$,
— $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s = 0$ *et* $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ *si et seulement si* π *est dans l'image de l'application de transfert* T,

pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(98)
$$\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi) = \left(\prod_{i=1}^{t} \prod_{1 \leqslant l \neq l' \leqslant m_i} (\frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}) \prod_{1 \leqslant l \neq l' \leqslant n_i} (\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda) - \widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})\right) \left(\prod_{j=1}^{u} \prod_{1 \leqslant l \neq l' \leqslant p_j} (\frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})\right) \left(\prod_{k=1}^{v} \prod_{1 \leqslant l \neq l' \leqslant q_k} (\frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})\right) F(\lambda),$$

où F est une fonction $W(PG_{2n}, \tau)$-invariante C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V (quitte à rétrécir V), il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas sur V. De même, on a

(99)
$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{t} \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant m_i \\ 1 \leqslant l' \leqslant n_i}} (s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})^{-1}\right) \left(\prod_{j=1}^{u} \prod_{1 \leqslant l < l' \leqslant p_j} (s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})^{-1}\right) \left(\prod_{k=1}^{v} \prod_{1 \leqslant l \leqslant l' \leqslant q_k} (s + \frac{z_{k,l}(\lambda) + z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})^{-1}\right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction G est une fonction $W(PG_{2n}, \tau)$-invariante méromorphe sur $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $\frac{1}{2}V + \mathcal{H}$ (quitte à rétrécir V) ; ici $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$ s'injecte dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par l'application $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s, ..., s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s, ..., s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s, ..., s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [6], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [6, Proposition 3.2.1], on écrit

(100)
$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^{t} P_{m_i, n_i, s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j, s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}) \prod_{i=1}^{v} R_{q_k, s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \varphi(\lambda) F(\lambda) G(2\lambda + s)$. De plus, φ_s est $W(PG_{2n}, \tau)$-invariante à support compact. Les lettres P, Q, R désignent des fractions rationnelles qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [6, section 3]).

Proposition 3.3 (Beuzart-Plessis [6])**.** *La limite*

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^{t} P_{m_i, n_i, s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j, s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}) \prod_{i=1}^{v} R_{q_k, s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}) d\lambda \tag{101}$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ *pour un certain* i *ou si l'un des* p_j *est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à*

(102)
$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'} \lim_{s\to 0^+} \varphi_s(\lambda')s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}) \prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}) d\lambda';$$

où

— $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$,
— *c est le cardinal des* $1 \leqslant k \leqslant t$ *tel que* $q_k \equiv 1 \mod 2$,
— $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
— W *et* W' *sont définis de manière intrinsèque dans* [6, section 3.3], W *est isomorphe à* $W(PG_{2n}, \tau)$ *et* W' *est isomorphe à* $W(SO(2n+1), \sigma)$ *(defini plus loin).*

De plus, $\mathcal{A}'$ *est le sous-espace de* $\mathcal{A}$ *défini par les relations :*

— $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \frac{p_j}{2}$,
— $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant k \leqslant \nu$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe $\mathcal{A}'$ *de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme*

(103)
$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^{t} (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^{u} (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} (i\mathbb{R})^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor}$$

qui envoie $(x_i(\lambda), y_j(\lambda), z_k(\lambda))$ *sur* $((x_{i,1}, ..., x_{i,n_i}), (y_{j,1}, ..., y_{j,\frac{p_j}{2}}), (z_{k,1}, ..., z_{k,\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}))$.

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\mathsf{Stab}$. D'après la caractérisation 88, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 88). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après la proposition 3.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\mathsf{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

(104)
$$\sigma = \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times n_i} \times \bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigtimes_{k=1}^{\nu} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \right) \rtimes \sigma_0,$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

(105)
$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{\nu} \nu_k.$$

On note $L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times SO(2m+1)$ et P un parabolique de Levi L. On a $\sigma = i_P^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 3.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant la classe d'isomorphisme de σ.

Comme précédemment, on normalise la mesure sur $\widehat{A_L}$ avec un facteur $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_L)}$ et on dispose d'un isomorphisme local $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto |\det|^{\lambda'} \in \widehat{A_L}$ où $|\det|^{\lambda'} = \prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{n_i} |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \times \prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \times \prod_{k=1}^{\nu} \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}}$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda'} = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ &\times \left(\bigtimes_{k=1}^{\nu} \bigtimes_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \rtimes \sigma_0.\end{aligned} \tag{106}$$

De plus, d'après 88, pour $\lambda \in V$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/Stab)$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$; quitte à rétrécir V. Dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 97), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1))/Stab} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.\end{aligned} \tag{107}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{\,n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D}, \tag{108}$$

d'après les notations de la proposition 3.3 et la relation 105. D'autre part, d'après la proposition 3.3 et l'équation 97, on a

(109)

$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi) \int_{\mathsf{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}\gamma^*(0,1,\psi)\log(q_F)}{|W'|P}$$
$$\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s\to 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right) \prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k,s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s\to 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)} d\lambda'. \tag{110}$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s=0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda'; \tag{111}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0,1,\psi)\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{Ad},\psi) = \gamma^*(0,\pi_{\lambda'},Ad,\psi)$ et

$$\frac{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),Ad,\psi)}{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\Lambda^2,\psi)} = \gamma(s,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi). \tag{112}$$

Dans l'expression 111, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 111 est égal au membre de droite 107, d'après l'égalité 108. $\square$

4. Une formule d'inversion de Fourier

On note H_n le sous-groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(Tr(X))$.

On équipe H_n, $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$ et $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$ des mesures suivantes :

— $\int_{H_n} f(s)ds = \int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$,

— $\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} f(\xi)d\xi = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ invariante à gauche par N_{2n},

— $\int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P} f(\xi)d\xi = \int_{N_n\backslash P_n}\int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ invariante à gauche par N_{2n}.

Proposition 4.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{113}$$

où W_f est la fonction de $G_{2n}\times G_{2n}$ définie par

$$W_f(g_1,g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du \tag{114}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n=1$, σ_n est trivial, $H_1 = N_2 Z(G_2)$ et $H_1^P = N_2$ donc $H_1^P \cap N_2\backslash H_1^P$ est trivial. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{115}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

Le sous groupe Ω_n des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n}\backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{y}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_n) \in F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n$ où $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1}\widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_n^P$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_n^P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{z} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{p}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ et $\widetilde{l}_{n-1} \in F^*$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n}\backslash H_n^P$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n^P$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{z}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n^P$ où $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$.

On équipe Ω_n, $\widetilde{\Omega}_n$, Ω_n^P, $\widetilde{\Omega}_n^P$ des mesures suivantes :

— $\int_{\Omega_n} f(\xi) d\xi = \int_{\overline{B}_n} \int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dY dh, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$,

— $\int_{\widetilde{\Omega}_n} f(\widetilde{\xi}) d\widetilde{\xi} = \int_{F_{n-1} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\widetilde{Y} d\widetilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$,

— $\int_{\Omega_n^P} f(\xi_p) d\xi_p = \int_{\overline{B}_n \cap P_n} \int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dZ dp, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$,

— $\int_{\widetilde{\Omega}_n^P} f(\widetilde{\xi}_p) d\widetilde{\xi}_p = \int_{F_{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\widetilde{Y} d\widetilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n^P} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{116}$$

On a choisi les représentants des matrices Y et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p) R(\widetilde{\xi}) f$, on a alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p'. \end{aligned} \tag{117}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'({\xi'}_p^{-1} \nu u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu du, \tag{118}$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $v \mapsto {\xi'}_p v {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v{\xi'}_p^{-1} u \xi')\psi(u)^{-1}\psi(v)^{-1} dv du. \tag{119}$$

On note $\widetilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f'\left(v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\widetilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\widetilde{f}'}(\xi'_p, \xi'). \tag{120}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f}'(s)\theta(s)^{-1} ds = \\ &\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} v s \widetilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned} \tag{121}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. On rappelle que l'on identifie $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n^p$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{z}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n^p$ où $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} v s \widetilde{\xi}\right) \theta(s)^{-1}\psi(v)^{-1} dv ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \tag{122}$$

La conjugaison de v par σ_n^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(v)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p} n_1 \widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p} n_2 \widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p} y \widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

$$\begin{aligned} &\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma_n^{-1} V \sigma_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} s \widetilde{\xi}\right) \\ &\qquad \theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{aligned} \tag{123}$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma_n^{-1} s \sigma_n$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}(124)\quad &\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det \widetilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n}\\ &f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{p}^{-1}g & 0\\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.\end{aligned}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned}(125)\quad &\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n}\\ &f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.\end{aligned}$$

Lemme 4.1. *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$(126)\qquad \int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)}F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|dtd\widetilde{p} = F(0).$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2}\times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix}1_{n-2} & 0\\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1}\end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

Démonstration. La mesure $|\det\widetilde{p}|d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1}. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\widetilde{p}$ et t, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\begin{aligned}(127)\quad &\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n}f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z},\end{aligned}$$

où $\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n$ est le sous-groupe de $\sigma_n^{-1}V\sigma_n$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma_n\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h} \in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. Ce qui nous permet d'identifier $F^{n-1}\times F^{n-1}\times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n$. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \tag{128}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(129)
$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n_1^{-1}y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},$$

On effectue les changement de variable $y\mapsto n_1y$ et $\widetilde{Y}\mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X. On obtient alors

(130)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2\mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}. \tag{131}$$

Le changement de variables $X\mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(132)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2}f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n}f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \tag{133}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\widetilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, $\widetilde{h}$; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n}f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{134}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, H_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^P qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 130) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 133). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 130, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_{2n}g\|_\infty$. On a

(135)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det a(a')^{-1}|^{-1} W_f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $X, X' \in V_n$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(136)
$$\int_{V_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{n}_n}\int_{A_n} (1+|a_n|)^{-N}|\det a(a')^{-1}|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right)$$
$$\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1} da dX da' dX'$$

pour N suffisamment grand. On note $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ et $u_{X'} = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$.

On a alors

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b\sigma_n k \sigma_n^{-1} u_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{137}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$ et

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b'\sigma_n k' \sigma_n^{-1} u_{(a'k')^{-1}X'(a'k')}, \tag{138}$$

où $b' = diag(a'_1, a'_1, a'_2, a'_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X'(a'k')^{-1}$. D'après les lemme 2.2 et la preuve du lemme 2.4, il existe $d > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 1$, l'intégrale 136 est alors majorée à une constante près par

(139)
$$\int_{V_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\mathcal{V}_n}\int_{A_n} (1+|a_n|)^{-N}|\det a(a')^{-1}| m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Les quantités $m(X)$, $m(X')$, α et α' sont celles que l'on obtient par l'application de la proposition 2.8. On rappelle que $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, où $\|X\| = \sup_{i,j} |X_{i,j}|$. On a $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b')\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') = |\det a'|^2$. On en déduit que cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX, \tag{140}$$

$$\int_{V_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX', \tag{141}$$

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da, \tag{142}$$

et

$$\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da', \tag{143}$$

pour j, j' compris entre 0 et d. Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [13, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 2.3 pour les deux dernières.

□

5. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{144}$$

Lemme 5.1. *L'intégrale 144 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue. De plus, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est non nulle.*

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, $P_n = N_n A_{n-1} K_n^P$, où K_n^P est un sous-groupe compact, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \left| W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{145}$$

pour tout $k \in K_n^P$. D'après la preuve du lemme 2.4, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})^{-N} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \\ \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \end{aligned} \tag{146}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que dans la preuve du lemme 2.4.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n}, \psi)$ [7]. En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}^P$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. □

Proposition 5.1. *Pour* $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, la restriction de* β *à* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$.

La preuve de cette proposition se fera après quelques préliminaires. On commence par prouver un lemme et introduire des notations.

Lemme 5.2. *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on a*

$$\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns,1,\psi) J(s,W,\phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi. \tag{147}$$

Démonstration. On a

(148)

$$\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) = \int_{A_{n-1}} \int_{K_n} \int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \gamma(ns,1,\psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns,1,\psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_{F^*} \widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns} dx, \tag{149}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0+} \gamma(ns,1,\psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x) dx = \phi(0). \tag{150}$$

On en déduit, aussi par convergence dominée, que $\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)$ est égal a

$$\phi(0) \int_{Z_n\backslash A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da, \tag{151}$$

ce qui nous permet de conclure. $\square$

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1} du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [6], que l'on note

$$f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int^*_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1} du. \tag{152}$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$W_f(g_1,g_2) = \int^*_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2)\psi(u)^{-1} du, \tag{153}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Proposition 5.2 (Beuzart-Plessis [6])**.** *L'application linéaire*

$$f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto (\pi \mapsto W_{f,\pi}) \in \mathcal{S}(\mathrm{Temp}(G_{2n}, C^w(N_{2n} \times N_{2n}\backslash G_{2n} \times G_{2n}, \psi \otimes \psi^{-1})$$

est continue.

Proposition 5.3 (Beuzart-Plessis [6]). *Pour tout* $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$. *On pose* $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, *alors* $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. *On a* $\widetilde{f}_\pi = f_\pi$ *pour tout* $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$. *De plus,*

$$W_{\widetilde{f}} = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} W_{f,\pi} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \tag{154}$$

Lemme 5.3. *Soit* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, *alors il existe* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *tel que* $W_{f,\pi}(1, .) = W$.

Démonstration. On a

$$W_{f,\pi}(1, .) = \int_{N_{2n}} f_\pi(u.)\psi(u)^{-1}du. \tag{155}$$

D'autre part, soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ alors f est bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact K. On a une décomposition $V_\pi = V_\pi^K \oplus V_\pi(K)$, où $V_\pi(K)$ est l'espace des vecteurs K-invariants. Comme π est admissible, V_π^K est de dimension finie. On note $\mathcal{B}_\pi^K$ une base de cet espace. Alors pour tout $g \in G_{2n}$, on a $f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)) = \sum_{v\in\mathcal{B}_\pi^K} < \pi(g)\pi(f^\vee)v, v^\vee >$, où $(v^\vee)_{v\in\mathcal{B}_\pi^K}$ est la base duale de $\mathcal{B}_\pi^K$. On en déduit que f_π est une somme (finie) de coefficient matriciel.

On note $\mathrm{Coeff}^K = \{g \mapsto < \pi(g)v, \widetilde{v} >, v \in V_\pi, \widetilde{v} \in V_{\widetilde{\pi}}\}$. Alors toute somme finie de Coeff^K est de la forme f_π avec $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K)$. En effet, $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K) \mapsto \pi(f^\vee) \in \mathrm{End}(V_\pi^K)$ est surjective, où l'on a noté $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ le sous espace de $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ des fonctions bi-invariante par K. La surjectivité est une conséquence du lemme de Burnside et du fait que V_π^K est un $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$-module irréductible de dimension finie. L'isomorphe de représentation nous donne $\mathrm{End}(V_\pi^K) \simeq \pi^K \boxtimes \widetilde{\pi}^K$ le résultat.

Pour montrer le lemme, il nous faut montrer qu'il existe un coefficient matriciel $c =< \pi(.)v, \widetilde{v} >$ tel que $W = \int_{N_{2n}} c(u.)\psi(u)^{-1}du$. Or

$$v \mapsto \int_{N_{2n}} c(u.)\psi(u)^{-1}du = \int_{N_{2n}} < \pi(u.)v, \widetilde{v} > \psi(u)^{-1}du \tag{156}$$

est une fonctionnelle de Whittaker. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir $\widetilde{v}$ pour que cette fonctionnelle soit non nulle. C'est le contenu de [18, Théorème 6.4.1]. □

Corollaire 5.1 (de la limite spectrale). *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g \in G_{2n}$, *alors*

$$\begin{aligned} \int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(g, \xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} &\beta(W_{f,T(\sigma)}(g, .)) \\ &\frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma. \end{aligned} \tag{157}$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1, \xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{158}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. D'après le lemme 5.2, la proposition 5.3 et la continuité de $\pi \mapsto J(s, W_{f,\pi}(1, .), \phi)$, on a

(159)

$$\begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi)J(s, W_{\widetilde{f}}(1, .), \phi) \\ &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} J(s, W_{f,\pi}(1, .), \phi)d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle 2.4, on a

(160)
$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =$$
$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} J(1-s,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,\pi}(1,.)},\widehat{\phi})c(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

La proposition 3.2, nous permet d'obtenir la relation

(161)
$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =$$
$$\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1)/Stab} J(1,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

En remplaçant f par $R(h)f$, $h\in H_n$, dans le membre de droite ; cela revient à multiplier par $\theta(h)$. On en déduit la même relation pour le membre de droite. Ce qui signifie que

(162)
$$\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1)/Stab} J(1,R(\xi)\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})-\theta(\xi)J(1,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})d\mu(\sigma)=0,$$

pour tout $\xi\in H_n$, où $d\mu(\sigma)=c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [6, Lemme 5.7.2] et la continuité de $\sigma\mapsto J(1,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})$, on en déduit que $J(1,R(\xi)\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi}) = \theta(\xi)J(1,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})$ pour tout $\xi\in H_n$ et donc que $J(1,\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})$ est (H_n,θ)-invariant (dans le sens où le changement f par $R(\xi)f$ revient à multiplier par $\theta(\xi)$).

Lemme 5.4. *Soit* $\sigma\in\mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ *et* $\pi=T(\sigma)$. *Alors*

(163)
$$J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi})=\phi(0)c_\beta(\sigma)\beta(W),$$

pour tous $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, soit $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$, on a

(164)
$$J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi})=\int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n}\widetilde{W}\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1&X\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g&0\\0&g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\widehat{\phi}(e_ng)|\det g|dg.$$

D'après le lemme 5.3, on choisit $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $W_{f,\pi}(1,.)=\rho(w_{n,n}^{-1})W$. D'après ce que l'on vient de dire précédemment, on en déduit que $J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi})$ vérifie la relation $J(1,R(\xi)\widetilde{W},\widehat{\phi})=\theta(\xi)J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi})$, pour tout $\xi\in H_n$.

Comme $\widehat{\phi}(e_ng)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

(165)
$$\int_{N_n\backslash P_n}\int_{V_n}\widetilde{W}\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1&X\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g&0\\0&g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg$$

est (H_n, θ)-invariant en tant que fonction de $\widetilde{W}$. D'après l'isomorphisme G_{2n}-équivariant $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto \widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$, β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ)-invariant, ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

Remarque 5.1. *Cette preuve que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ)-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que $\mathrm{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ qui est de dimension au plus 1. En utilisant le fait que $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ donc π est (H_n, θ)-distinguée, on a $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. Ce dernier est un sous-espace de $\mathrm{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. On en déduirait alors que la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien $H_n \cap P_{2n}$-invariant, est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension 1.*

Proposition 5.4. *Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))$, on pose $\pi = \mathrm{T}(\sigma)$ le transfert de σ dans $\mathrm{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. On identifie $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ par l'isomorphisme G_{2n}-équivariant $W \mapsto \widetilde{W}$. Il existe un signe $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{166}$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Démonstration. En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [12]. De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$. Pour finir, en appliquant l'équation 166, pour π et $\widetilde{\pi}$, on obtient $\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\pi) c_\beta(\widetilde{\pi}) \beta(\widetilde{W})$. Comme β est non nulle (lemme 5.1), on en déduit que $c_\beta(\widetilde{\pi}) c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. □

Finissons la preuve du lemme 5.4, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}
&\int_{N_n\backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg \\
&= \int_{P_n\backslash G_n} \int_{N_n\backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX dp \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh.
\end{aligned} \tag{167}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{N_n\backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX dp \\
&= \beta\left(R\left(\sigma_n \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \widetilde{W}\right) \\
&= \beta(\widetilde{W}),
\end{aligned} \tag{168}$$

puisque β est (H_n, θ)-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{P_n\backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh &= \int_{F^n} \widehat{\phi}(x) dx \\
&= \phi(0).
\end{aligned} \tag{169}$$

On conclut grâce à la proposition 5.4. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 5.4 dans la relation 161. □

5.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$ munie de la mesure quotient. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$\varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1}dh, \tag{170}$$

pour tout $y \in G_{2n}$.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh, \tag{171}$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$.

En effet,

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n}\int_{H_n\times H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(h_2y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1dh_2dy. \tag{172}$$

L'intégrale est absolument convergente. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1h_2$ et on combine les intégrales selon y et h_2 en une intégrale sur G_{2n}. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}}\int_{H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1}dh_1dy. \tag{173}$$

On pose

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = (f_1, f_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p\cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{174}$$

pour tout $\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1)))$.

On note $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$ le quotient de $\mathcal{S}(Y_n, \theta)$ par l'intersection des noyaux de toutes les applications $\mathcal{S}(Y_n, \theta) \to \pi$ linéaires G_{2n}-équivariante.

Proposition 5.5. *Supposons $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$. La forme bilinéaire $(.,.)_{Y_n,\pi}$ sur $\mathcal{S}(G_{2n}))$ est une forme hermitienne continue semi-definie positive qui se factorise par $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$.*

Démonstration. Commençons par le

Lemme 5.5. *Soit $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$. On introduit un produit scalaire sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)$:*

$$(W, W')^{Wh} = \int_{N_{2n}\backslash P_{2n}} W(p)\overline{W'(p)}dp, \tag{175}$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \to \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est de rang fini. Notons $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ une base finie orthonormée de son image. Alors

$$W_{f,\pi} = \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}. \tag{176}$$

Démonstration. Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est P_{2n}-invariant, d'après Bernstein [4], il est aussi G_{2n}-invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{Wh} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (W, \pi(\bar{f})W')^{Wh} W'.\end{aligned} \tag{177}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} W' \otimes \overline{\pi}(f)\overline{W'}. \tag{178}$$

La G_{2n}-invariance de $(.,.)^{Wh}$ nous donne que $W' \otimes \overline{\pi}(f_1 * f_2^*)\overline{W'} = \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}$.

On obtient alors

$$\pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}. \tag{179}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}W_{f,\pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int^*_{N_{2n}} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1),\end{aligned} \tag{180}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [6, Prop 2.14.3]. □

Le lemme 5.5 donne la relation

$$(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')}\beta(T(\sigma)(f_1)W') \tag{181}$$

qui est indépendant du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β à $\mathcal{W}(T(\sigma), \psi)$ est (H_n, θ)-invariante, d'après la proposition 5.1. De plus, $(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)}$ dépend uniquement de $T(\sigma)(f_1)$ et $T(\sigma)(f_2)$. On en déduit que $(.,.)_{Y_n,\pi}$ se factorise par $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_{T(\sigma)}$.

On remarque que

$$(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = (\beta \otimes \beta)(W_{f_1 * f_2^*, \pi}), \tag{182}$$

ce qui nous permet de déduire, d'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, que $(.,.)_{Y_n, T(\sigma)}$ est continue. □

Théorème 5.1. *Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$. On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{183}$$

Démonstration. D'après 4.1 et 5.1, on a

$$\begin{aligned}\int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \\ \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p.\end{aligned} \tag{184}$$

Lemme 5.6. *La fonction $\sigma \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ est à support compact.*

Démonstration. D'après la définition de f_π, $W_{f,\pi}$ est nul dès que $\pi(f^\vee)$ l'est.

Soit K un sous-groupe ouvert compact tel que $f^\vee$ est biinvariant par K. Alors $\pi(f\vee) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra [22, Théorème VIII.1.2], il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in Temp(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M, on en déduit le lemme. □

D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, on sait que $\xi_p \mapsto \beta(W_{f,\pi}(\xi_p, .))$ est continue. On en déduit que

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma \tag{185}$$

est absoluement convergente.

De plus, l'intégration extérieure $\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \theta(\xi_p)d\xi_p$ n'est autre que la forme linéaire continue $\overline{\beta}(\bar{.})$, on en déduit que l'on peut échanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma. \tag{186}$$

Pour finir, [6, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)c(T(\sigma))c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|. \tag{187}$$

□

Corollaire 5.2. *On a une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(H_n \backslash G_{2n})$ *:*

$$L^2(H_n \backslash G_{2n}) = \int^{\oplus}_{Temp(SO(2n+1))/Stab} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{188}$$

5.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.

Lemme 5.7. *On dispose d'un isomorphisme* G_{2n}*-équivariant d'espace de Hilbert*

$$L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta). \tag{189}$$

Démonstration. On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$, où $\widetilde{f}$ est définie par

$$\widetilde{f}(g) = \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \tag{190}$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $X \in M_n$, on a

$$\begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}. \tag{191}$$

On note K un compact tel que $\mathrm{supp}(f) \subset H_n K$. On en déduit que $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right)$ est nul sauf si il existe $g' \in G_n$ tel que $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix} \in K$. On en déduit alors que γ est dans un compact. L'intégrale est donc absolument convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&=_{\gamma \mapsto g_2\gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \widetilde{f}(g).
\end{aligned} \tag{192}$$

Pour finir, montrons que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons g sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(g) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(\mathrm{Tr}(\gamma x)) d\gamma
\end{aligned} \tag{193}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact sur M_n, à savoir la fonction ϕ_k définie par $\phi_k(y) = f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) |\det y|^{-n}$ si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative $d\gamma$ en une mesure additive. On en déduit que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\widetilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) = 0$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est (H_n, θ)-invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = c\|\widetilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \simeq L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= \int_{M_n \times K} |\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)|^2 dx dk \\
&= \int_{M_n \times K} |\int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(\mathrm{Tr}(\gamma x) d\gamma|^2 dx dk \\
&= \int_{M_n \times K} |\widehat{\phi}_k(x)|^2 dx dk.
\end{aligned} \tag{194}$$

La transformé de Fourier conserve la norme L^2 avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\begin{aligned} ||\widetilde{f}||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= c' \int_{M_n\times K} |\phi_k(x)|^2 dx dk \\ &= c' \int_K \int_{G_n} |f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right)|^2 \frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk. \end{aligned} \tag{195}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur M_n restreinte à G_n en une mesure multiplicative sur G_n. La mesure $\frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n} dk$ est une mesure de Haar sur $G_n K \simeq H_n \backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||f||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = c||\widetilde{f}||_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. □

Cet isomorphisme d'espace L^2 nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$ et sur $H_n\backslash G_n$. En effet, on dispose du

Théorème 5.2. *Une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ *est obtenue par la relation*

$$L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{196}$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 5.7 et du corollaire 5.2. □

Références

[1] A. Aizenbud and D. Gourevitch, *Schwartz functions on Nash manifolds*, International Mathematics Research Notices, 2008 (2008).

[2] J. Arthur, *The Endoscopic Classification of Representations Orthogonal and Symplectic Groups*, vol. 61, American Mathematical Soc., 2013.

[3] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[4] J. N. Bernstein, *P-invariant distributions on gl(n) and the classification of unitary representations of gl(n) (non-archimedean case)*, in Lie Group Representations II, R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman, and J. Rosenberg, eds., Berlin, Heidelberg, 1983, Springer Berlin Heidelberg.

[5] R. Beuzart-Plessis, *Archimedean theory and ϵ-factors for the Asai Rankin-Selberg integrals*, arXiv e-prints, (2018), p. arXiv :1812.00053.

[6] R. Beuzart-Plessis, *Plancherel formula for* $GL_n(F)\backslash GL_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).

[7] Gel'fand, I. M. and Kazhdan, D. A., *On the representation of the group GL(n, K) where K is a local field*, Functional Analysis and Its Applications, 6 (1972), pp. 315–317.

[8] M. Harris, R. Taylor, and V. G. Berkovich, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties. (AM-151)*, Princeton University Press, 2001.

[9] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL(n) sur un corps p-adique*, Inventiones mathematicae, 139 (2000), pp. 439–455.

[10] ———, *Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[11] A. Ichino, E. Lapid, and Z. Mao, *On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J., 166 (2017), pp. 1301–1348.

[12] H. Jacquet and S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.

[13] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square L-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[14] A. C. Kable, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[15] P. K. Kewat, *The local exterior square L-function : Holomorphy, non-vanishing and Shalika functionals*, Journal of Algebra, 347 (2011), pp. 153 – 172.

[16] F. Knop and B. Schalke, *The dual group of a spherical variety*, Transactions of the Moscow Mathematical Society, 78 (2017).

[17] N. Matringe, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[18] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, arXiv e-prints, (2012), p. arXiv :1203.0039.

[19] P. Scholze, *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Inventiones mathematicae, 192 (2013), pp. 663–715.

[20] F. Shahidi, *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* $\mathsf{GL}(n)$, American Journal of Mathematics, 106 (1984).

[21] A. J. Silberger and E.-W. Zink, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p-adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, (1996).

[22] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adique. d'après Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.