

# FORMULE DE PLANCHEREL SUR $GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$

## 1. INTRODUCTION

Soit  $F$  un corps  $p$ -adique,  $G$  un groupe réductif déployé sur  $F$  et  $X = H \backslash G$  une variété sphérique homogène admettant une mesure bi-invariante. Sakellaridis et Venkatesh [13] introduisent un système de racines  $\Phi_X$  associé à  $X$ . Sous certaines conditions sur  $\Phi_X$ , on peut associer au système de racines dual  $\check{\Phi}_X$  un groupe réductif complexe  $\check{G}_X$  qu'ils appellent le groupe dual de la variété sphérique  $X$ . On note  $G_X$  le groupe réductif déployé sur  $F$  dont le groupe dual est  $\check{G}_X$ , le groupe  $G_X$  est associé au système de racines  $\Phi_X$ . Sakellaridis et Venkatesh introduisent aussi une application  $\iota_X : \check{G}_X \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \check{G}$ . Supposons que  $\iota_X$  est trivial sur  $SL_2(\mathbb{C})$  et la correspondance de Langlands locale pour  $G$ . Rappelons la

**Conjecture 1.1** (Sakellaridis-Venkatesh [13]). *Il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant de représentations unitaires*

$$(1) \quad L^2(X) \simeq \int_{\Phi_{\text{temp}}(G_X)}^{\oplus} \mathcal{H}_{\phi} d\phi,$$

où  $\Phi_{\text{temp}}(G_X)$  est l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de  $G_X$  modulo  $\check{G}_X$ -conjugaison,  $d\phi$  est dans la classe naturelle des mesures sur  $\Phi_{\text{temp}}(G_X)$  et  $\mathcal{H}_{\phi}$  est une somme directe sans multiplicité de représentations dans  $\Pi^G(\iota_X \circ \phi)$ . La classe naturelle des mesures sur  $\Phi_{\text{temp}}(G_X)$  est la classe de la mesure de Haar sur le quotient  $\Phi_{\text{temp}}(G_X)/\check{G}_X - \text{conj}$  (??).

Supposons de plus la correspondance de Langlands locale sur  $G_X$ , on dispose alors d'une correspondance fonctorielle  $T_X : \text{Temp}(G_X)/\sim \rightarrow \text{Unit}(G)/\sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence des représentations. Cette correspondance associe à une classe d'équivalence de représentations tempérés de  $G_X$  un ensemble fini de classes d'équivalence de représentations unitaires de  $G$ . On obtient alors la

**Conjecture 1.2** (Sakellaridis-Venkatesh [13]). *Il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant de représentations unitaires*

$$(2) \quad L^2(X) \simeq \int_{\text{Temp}(G_X)/\sim}^{\oplus} \tilde{T}_X(\sigma) d\mu_{G_X}(\sigma),$$

où  $d\mu_{G_X}$  est la mesure de Plancherel sur  $G_X$  et  $\tilde{T}_X(\sigma)$  est une somme directe sans multiplicité de représentations dans  $T_X(\sigma)$ .

Spécifions maintenant au cas où  $G = GL_{2n}$  et  $X = GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$ . On a  $\check{G}_X = Sp_{2n}$  et  $G_X = SO(2n+1)$ . L'essentiel de notre travail consiste alors à prouver la

**Conjecture 1.3.** *Il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant de représentations unitaires*

$$(3) \quad L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}) \simeq \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\mu(\sigma),$$

où  $d\mu(\sigma)$  est la mesure de Plancherel sur  $SO(2n+1)$  et  $T : \text{Temp}(SO(2n+1))/\sim \rightarrow \text{Temp}(GL_{2n})/\sim$  est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.

Soit  $F$  un corps de nombres et  $\psi$  un caractère non trivial de  $\mathbb{A}_F$ . On note  $H_n(\mathbb{A}_F)$  le groupe des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  avec  $X \in M_n(\mathbb{A}_F)$  et  $g \in GL_n(\mathbb{A}_F)$ . L'élément  $\sigma_n$  est la matrice associée à la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ . Soit  $\theta$  le caractère sur  $H_n(\mathbb{A}_F)$  qui envoie  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  sur  $\psi(\text{Tr}(X))$ .

Soit  $\pi$  une représentation automorphe cuspidale irréductible de  $GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$  et  $\phi_1, \phi_2$  des fonctions de Schwartz sur  $H_n(\mathbb{A}_F) \backslash GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$  qui agissent par le caractère  $\theta$  sur  $H_n(\mathbb{A}_F)$ . On note  $\Sigma\phi_i \in C^\infty([GL_{2n}])$ , pour  $i = 1, 2$ , la fonction définie par  $\Sigma\phi_i(g) = \sum_{x \in H_n(F) \backslash GL_{2n}(F)} \phi_i(xg)$  pour tout  $g \in GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ . D'autre part, pour  $\varphi \in \pi$ , on introduit la période globale

$$(4) \quad \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h) \theta(h) dh,$$

où  $Z_n$  est le centre de  $GL_n$  et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent une factorisation du produit scalaire  $\langle (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi \rangle_{\text{Pet}} = \int_{[H_n]} (\Sigma\phi_1)_\pi(h) (\Sigma\phi_2)_\pi(h) dh$ , où  $(\Sigma\phi_1)_\pi$  est la projection sur  $\pi$  de  $\Sigma\phi_i$  et  $dh$  est la mesure de Tamagawa de  $[H_n]$  [13, section 17.1]. Cette factorisation prend la forme suivante

$$(5) \quad \langle (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi \rangle_{\text{Pet}} = q \prod_v' \langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v},$$

où  $q$  est un rationnel (qui dépend de  $\pi$ ), il est nul si  $\pi$  n'est pas le transfert d'une représentation automorphe cuspidale  $\sigma$  de  $SO(2n+1)(\mathbb{A}_F)$ . Les quantités  $\langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v}$  sont des formes linéaires  $H_n(F_v)$ -invariante. Sakellaridis et Venkatesh conjecturent que l'on devrait avoir l'égalité de ces formes linéaires avec les périodes locales canonique, autrement dit, on devrait avoir

$$(6) \quad \langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v} = \int_{H_n(F_v)} \langle \pi_v(h) \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle dh.$$

On renvoie à [13, section 17.5] pour la signification du produit  $\prod_v'$ . En effet, le produit n'est pas absolument convergent et on doit l'interpréter comme l'évaluation d'une fonction  $L$ .

La factorisation de la période globale  $\mathcal{P}_{H_n, \theta}$  comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur  $L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta)$ . Plus précisément, pour  $\Phi$  une fonction de Schwartz sur  $\mathbb{A}_F^n$  et  $W_\varphi$  la fonction de Whittaker associée à  $\varphi$ , on introduit dans la suite des fonctions zêta globales

$J(s, W_\varphi, \Phi)$ , qui sont reliées à la période globale par la relation

$$(7) \quad \text{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) \widehat{\Phi}(0).$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales, pour  $\text{Re}(s)$  assez grand, on a

$$(8) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v),$$

où  $S$  est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient  $\frac{J(1, W_v, \Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$ , que l'on désignera par  $\beta$  dans la section 5, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 5.1.

On commence dans la section 2 par prouver une relation sur les facteurs  $\gamma$  du carré extérieur. Les sections 3 et 4 sont des préliminaires pour le théorème 5.1. On fini dans la section 5 par prouver une formule de Plancherel explicite sur  $L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta)$  et une formule de Plancherel abstraite sur  $L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n})$ .

**1.1. Notations.** Dans la suite on notera  $F$  un corps  $p$ -adique (sauf dans la section 2 où  $F$  peut désigner un corps archimédien) et  $\psi$  un caractère non trivial de  $F$ . On note  $q_F$  le cardinal du corps résiduel de  $F$  et  $|\cdot|_F$  (ou simplement  $|\cdot|$ ) la valeur absolue sur  $F$  normalisé par  $|\omega|_F = q_F^{-1}$  où  $\omega$  est une uniformisante de  $F$ . On notera  $G_m$  le groupe  $GL_m(F)$  et  $PG_m = Z_m(F) \backslash GL_m(F)$ . De plus, dans la suite on posera  $H_n = H_n(F)$  le groupe de ses  $F$ -points. On note  $SO(2m+1)$  la forme déployé du groupe spécial orthogonal sur un espace de dimension  $2m+1$ . On note  $A_n$  le groupe des matrices diagonales inversibles,  $B_n$  le sous groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles,  $\bar{B}_n$  le sous groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles,  $N_n$  le sous-groupe de  $B_n$  des matrices dont les éléments diagonaux sont 1,  $\bar{N}_n = {}^t N_n$  et  $M_n$  l'ensemble des matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $F$ . On note  $V_n$  le sous-groupe de  $M_n$  des matrices triangulaires inférieures strictes. On note  $U_n$  le groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

pour  $x \in F^{n-1}$  et  $P_n = G_{n-1} U_n$  le sous-groupe mirabolique. On note  $\delta_{B_n}$  le caractère modulaire de  $B_n$ . On notera par des lettres gothiques les algèbres de Lie correspondantes et pour  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  désignera l'algèbre enveloppante.

Lorsque  $X$  est un espace totalement discontinu, on notera  $C_c^\infty(X)$  ou  $\mathcal{S}(X)$ , l'espace des fonctions localement constante à support compact. Lorsque  $G$  est un groupe algébrique réel ou complexe, on note  $\mathcal{S}(G)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide ainsi que toute ses dérivées. De plus, lorsque  $\mathbb{A}_K$  l'anneau des adèles d'un corps de nombres  $K$  et  $G$  est un groupe algébrique sur  $K$ , on note  $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$  le produit restreint des espaces  $\mathcal{S}(G(K_v))$  lorsque  $v$  parcourt l'ensemble des places de  $K$  i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions  $f = \otimes_v f_v$  avec  $f_v \in \mathcal{S}(G(K_v))$  pour tout  $v$  et  $f_v = \mathbb{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$  sauf pour un nombre fini de  $v$ , où  $\mathcal{O}_v$  est l'anneau des entiers de  $K_v$ .

Pour  $G$  un groupe réductif connexe sur  $F$  (dans la suite  $G$  sera  $GL_{2n}$ ,  $SO_{2n+1}$  ou un quotient, d'un sous-groupe de Levi de ces groupes), on note  $\text{Temp}(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de  $G(F)$  et  $\Pi_2(G) \subset \text{Temp}(G)$  le sous-ensemble des représentations de carré intégrable. On note  $Z_G$  le centre de  $G(F)$  et  $A_G$  le tore déployé maximal dans  $Z_G$ . Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$  et  $\sigma \in \Pi_2(M)$ . On note  $W(G, M)$  le groupe de Weyl associé au couple  $(G, M)$  et  $W(G, \sigma)$  le sous-groupe de  $W(G, M)$  fixant la classe

d'isomorphisme de  $\sigma$ . On note  $\Phi(G)$  l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de  $G$  et  $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$  le quotient de  $\text{Temp}(G)$  par la relation d'équivalence  $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$ , où  $\varphi_\pi$  est le paramètre de Langlands associé à  $\pi$ .

Pour  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$ , on note  $i_P^G(\sigma)$  l'induction parabolique normalisée lorsque  $\sigma$  est une représentation lisse de  $M$  : c'est la représentation régulière à droite de  $G$  sur l'espace des fonctions localement constantes  $f : G \mapsto \sigma$  qui vérifient  $f(mng) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \sigma(m) f(g)$  pour tous  $m \in M$ ,  $n \in N$  et  $g \in G$ . Lorsque  $G = G_n$  et  $M = G_{n_1} \times \dots \times G_{n_k}$ , on note  $\pi_1 \times \dots \times \pi_k = i_P^G(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k)$  pour  $\pi_i$  des représentations lisses de  $G_{n_i}$ . Lorsque  $G = SO(2n+1)$  et  $M = G_{n_1} \times \dots \times G_{n_k} \times SO(2m+1)$ , on note  $\pi_1 \times \dots \times \pi_k \rtimes \sigma_0 = i_P^G(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k \boxtimes \sigma_0)$  pour  $\pi_i$  des représentations lisses de  $G_{n_i}$  et  $\sigma_0$  une représentation lisse de  $SO(2m+1)$ .

On peut définir une application  $\Phi(SO(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$ , rappelons qu'un élément de  $\Phi(SO(2m+1))$  est un morphisme admissible  $\phi : W'_F \rightarrow {}^L SO(2m+1)$ , où  $W'_F$  est le groupe de Weil-Deligne de  $F$ . Or  ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$ , l'application  $\Phi(SO(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$  est définie par l'injection de  $Sp_{2m}(\mathbb{C})$  dans  $GL_{2m}(\mathbb{C})$  grâce à la correspondance de Langlands locale pour  $GL_{2m}$ . La correspondance de Langlands locale pour  $SO(2m+1)$  démontrée par Arthur [1], nous permet de définir une application de transfert  $T : \text{Temp}(SO(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$ .

Dans les mesures de Plancherel, on verra apparaître des termes  $|S_\sigma|$  pour  $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$  ou  $\text{Temp}(PG_{2n})$ . On n'explicite pas les ensembles  $S_\sigma$  et on se contente de donner leur cardinal. Pour  $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$  sous-représentation de  $\pi_1 \times \dots \times \pi_i \rtimes \sigma_0$ , avec  $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$  et  $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$ , le facteur  $|S_\sigma|$  est le produit  $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_i}| |S_{\sigma_0}|$ ; où  $|S_{\sigma_0}| = 2^k$  tel que  $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$  avec  $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$  et  $|S_{\pi_i}| = n_i$ .

Pour  $\pi \in \text{Temp}(G)$  et  $r$  une représentation admissible de  ${}^L G$ , on note  $L(s, \pi, r)$  la fonction  $L$  associée par la correspondance de Langlands locale et  $\gamma(s, \pi, r, \psi)$  le facteur  $\gamma$  associée. Lorsque  $r$  est la représentation standard, on l'omettra. De plus, on note  $\gamma^*(0, \pi, r, \psi)$  la régularisation du facteur  $\gamma$  en 0, défini par la relation

$$(9) \quad \gamma^*(0, \pi, r, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(s, \pi, r, \psi)}{(s \log(q_F))^{n_{\pi, r}}},$$

où  $n_{\pi, r}$  est l'ordre du zéro de  $\gamma(s, \pi, r, \psi)$  en  $s = 0$ .

**1.2. Mesures.** On équipe  $F$  avec la mesure de Haar  $dx$  qui est autoduale par rapport à  $\psi$  et  $F^\times$  de la mesure de Haar  $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ . Pour  $m \geq 1$ , on équipe  $F^m$  de la mesure produit  $(dx)^m$  et  $(F^\times)^m$  de la mesure  $(d^\times x)^m$ . On équipe les groupes  $M_n$ ,  $U_n$ ,  $N_n$ ,  $\overline{N}_n$  des mesures de Haar "produit des coordonnées". Par exemple, on équipe  $M_n$  de la mesure  $dX = \prod_{i,j=1}^n dX_{i,j}$  où  $dX_{i,j}$  est la mesure de Haar sur  $F$  que l'on a fixé précédemment. On équipe  $G_n$  de la mesure  $dg = |\det g|_F^{-n} \prod_{i,j=1}^n dg_{i,j}$  et  $P_n$  du produit des mesures sur  $U_n$  et  $G_{n-1}$ . On équipe les groupes compact des mesures de Haar de masse totale égale à 1. On équipe  $N_n \backslash G_n$  et  $P_n \backslash G_n$  des mesures que l'on obtient par l'identification d'ouvert dense à  $\overline{B}_n$  et  $F^{n-1} \times F^\times$  respectivement.

Pour  $G$  un groupe réductif connexe sur  $F$ , on fixe un isomorphisme  $A_G \simeq (F^\times)^{\dim(A_G)}$  et on équipe  $A_G$  de la mesure  $(d^\times x)^{\dim(A_G)}$  provenant de l'isomorphisme avec  $(F^\times)^{\dim(A_G)}$ . Décrivons le choix de la normalisation d'une mesure sur  $\text{Temp}(G)$ . Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$  et  $\sigma \in \Pi_2(M)$ . Soit  $\widehat{A_M}$  le dual unitaire de  $A_M$  et  $\widehat{d\tilde{X}}$  la mesure de Haar duale de celle de  $A_M$ . On équipe alors  $\widehat{A_M}$

de la mesure  $d\chi$  définie par

$$(10) \quad d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi}.$$

La mesure  $d\chi$  est indépendante du caractère  $\psi$ . Il existe une unique mesure  $d\sigma$  sur  $\Pi_2(M)$  tel que l'isomorphisme local  $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$  préserve localement les mesures. Soit  $P$  un sous groupe parabolique de  $G$  de Levi  $M$ . On définit alors la mesure  $d\pi$  sur  $\text{Temp}(G)$  localement autour de  $\pi \simeq i_P^G(\sigma)$  par la formule

$$(11) \quad d\pi = |W(G, M)|^{-1} (i_P^G)_* d\sigma,$$

où  $(i_P^G)_* d\sigma$  est la mesure  $d\sigma$  tirée en arrière en une mesure sur  $\text{Temp}(G)$  par l'application  $i_P^G$ . Cette mesure ne dépend pas du choix du groupe parabolique. La mesure  $d\pi$  est choisie pour vérifier la relation 66.

Les mesures de Plancherel sur  $G$  sont uniques modulo multiplication par une fonction positive presque partout non nulle, on parlera alors de la classe d'une mesure de Plancherel sur  $G$ .

**1.3. Résultats.** Soit  $F$  un corps  $p$ -adique. Rappelons que l'on note  $H_n(F)$  le groupe des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  avec  $X \in M_n(F)$  et  $g \in GL_n(F)$ . L'élément  $\sigma_n$  est la matrice associée à la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ . De plus,  $\theta$  est le caractère sur  $H_n(F)$  qui envoie  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  sur  $\psi(\text{Tr}(X))$ . Le résultat principal est le

**Théorème 1.1.** *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$(12) \quad L^2(H_n(F) \backslash GL_{2n}(F), \theta) \simeq \int_{\text{Temp}(SO(2n+1)(F))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Ce théorème est équivalent à la conjecture 1.3. En effet, il suffit de calculer explicitement la (classe de la) mesure de Plancherel sur  $SO(2n+1)$ . La mesure de Plancherel d'un groupe réductif  $p$ -adique  $G$  a été calculée par Waldspurger [16] sous la forme

$$(13) \quad d\mu_G(\sigma) = d(\sigma)j(\sigma)^{-1} d\sigma,$$

où  $d(\sigma)$  est le degré formel de  $\sigma$  et  $j(\sigma)$  est un scalaire produit d'opérateurs d'entrelacements (voir [16]). Le degré formel pour  $SO(2n+1)$  a été calculé par Ichino-Lapid-Mao [7] et le facteur  $j$  pour  $SO(2n+1)$  découle de la normalisation des opérateurs d'entrelacements d'Arthur [1]. Finalement, on obtient que la (classe de la) mesure de Plancherel pour  $SO(2n+1)$  est

$$(14) \quad d\mu_{SO(2n+1)}(\sigma) = \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

De l'isomorphisme  $L^2(GL_n(F) \times GL_n(F) \backslash GL_{2n}(F)) \simeq L^2(H_n(F) \backslash GL_{2n}(F), \theta)$   $GL_{2n}$ -invariant (lemme 5.7), on en déduit le

**Théorème 1.2.** *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$(15) \quad L^2(GL_n(F) \times GL_n(F) \backslash GL_{2n}(F)) \simeq \int_{\text{Temp}(SO(2n+1)(F))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

2. FACTEURS  $\gamma$  DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Dans cette partie  $F$  désigne un corps local de caractéristique 0 et  $\psi$  un caractère non trivial de  $F$ . Soit  $\pi$  une représentation tempérée irréductible de  $GL_{2n}(F)$ . Jacquet et Shalika ont défini une fonction  $L$  du carré extérieur  $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$  par des intégrales notées  $J(s, W, \phi)$ , où  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  est un élément du modèle de Whittaker de  $\pi$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ . Matringe a prouvé que, lorsque  $F$  est non archimédien, ces intégrales  $J(s, W, \phi)$  vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs  $\gamma$ , que l'on note  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ .

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque  $F$  est archimédien et que les facteurs  $\gamma$  sont égaux à une constante de module 1 près à ceux définis par Shahidi, que l'on note  $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ . Plus exactement, il existe une constante  $c(\pi)$  de module 1, telle que

$$(16) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

pour tout  $s \in \mathbb{C}$ . La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère  $\pi$  comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

## 2.1. Préliminaires.

2.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales  $J(s, W, \phi)$  sont définies par

$$(17) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

pour tous  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$  et  $s \in \mathbb{C}$ . Le groupe  $V_n$  est matrices triangulaires inférieures strictes, on l'équipe de la mesure de Haar  $dX = \prod_{1 \leq j < i \leq n} dX_{i,j}$ . L'élément  $\sigma_n$  est la matrice associée à la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ .

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour  $\text{Re}(s)$  suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

**Proposition 2.1** (Jacquet-Shalika [9]). *Il existe  $\eta > 0$  tel que les intégrales  $J(s, W, \phi)$  convergent absolument pour  $\text{Re}(s) > 1 - \eta$ .*

Kewat [11] montre, lorsque  $F$  est  $p$ -adique, que ce sont des fractions rationnelles en  $q^s$  où  $q$  est le cardinal du corps résiduel de  $F$ . On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque  $F$  est archimédien et d'un résultat de non annulation.

**Proposition 2.2** (Belt [2]). *Fixons  $s_0 \in \mathbb{C}$ . Il existe  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$  tels que  $J(s, W, \phi)$  admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en  $s_0$ . Si  $F = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , le point  $s_0$  peut éventuellement être un pôle. Si  $F$  est  $p$ -adique, on peut choisir  $W$  et  $\phi$  tels que  $J(s, W, \phi)$  soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction  $L$  du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note  $L(s, \pi, \Lambda^2)$ , (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [6]) par ces intégrales.

**Proposition 2.3** (Jacquet-Shalika [9]). *Supposons que  $F$  est  $p$ -adique, le conducteur de  $\psi$  est l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_F$  de  $F$ . Soit  $\pi$  une représentation non ramifiée de  $GL_{2n}(F)$ . On note  $\phi_0$  la fonction caractéristique de  $\mathcal{O}_F^n$  et  $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  l'unique fonction de Whittaker invariante par  $GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$  et qui vérifie  $W(1) = 1$ . Alors*

$$(18) \quad J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2).$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque  $F$  est un corps  $p$ -adique. Plus précisément, on a la

**Proposition 2.4** (Matringe [12]). *Supposons que  $F$  est un corps  $p$ -adique et  $\pi$  générique. Il existe un monôme  $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  en  $q^s$  ou  $q^{-s}$ , tel que pour tous  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ , on ait*

$$(19) \quad \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)},$$

où  $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$  est la transformée de Fourier de  $\phi$  par rapport au caractère  $\psi$  définie par

$$(20) \quad \mathcal{F}_\psi(\phi)(y) = \int_{F^n} \phi(x) \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) dx$$

pour tout  $y \in F^n$  et  $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \bar{\psi})$  est la fonction de Whittaker définie par  $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$  pour tout  $g \in GL_{2n}(F)$ , avec  $w_n$  la matrice associée à la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$  et  $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$ . On définit alors le facteur  $\gamma$  de Jacquet-Shalika par la relation

$$(21) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}.$$

**2.1.2. Théorie globale.** La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra  $\pi$  comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales  $J(s, W, \phi)$ .

Soit  $K$  un corps de nombres et  $\psi_\mathbb{A}$  un caractère non trivial de  $\mathbb{A}_K/K$ . Soit  $\Pi$  une représentation automorphe cuspidale irréductible de  $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$ . Pour  $\varphi \in \Pi$ , on considère

$$(22) \quad W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K) \backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug) \psi_\mathbb{A}(u) du$$

la fonction de Whittaker associée. On considère  $\psi_\mathbb{A}$  comme un caractère de  $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$  en posant  $\psi_\mathbb{A}(u) = \psi_\mathbb{A}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$ . Pour  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$  une fonction de Schwartz, on note  $J(s, W_\varphi, \Phi)$  l'intégrale

$$(23) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W_\varphi \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi_\mathbb{A}(\text{Tr}(X)) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note  $G_n$  le groupe  $GL_n(\mathbb{A}_K)$ ,  $B_n$  le sous groupe des matrices triangulaires supérieures,  $N_n$  le sous-groupe de  $B_n$  des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et  $M_n$  l'ensemble des matrices de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{A}_K$ .

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

**Proposition 2.5** (Jacquet-Shalika [9]). *Les intégrales  $J(s, W_\varphi, \Phi)$  convergent absolument pour  $\text{Re}(s)$  suffisamment grand. De plus,  $J(s, W_\varphi, \Phi)$  admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$(24) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}),$$

où  $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$  et  $\hat{\Phi}$  est la transformée de Fourier de  $\Phi$  par rapport au caractère  $\psi_\mathbb{A}$ .

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si  $W_\varphi = \prod_v W_v$  et  $\Phi = \prod_v \Phi_v$ , où  $v$  décrit les places de  $K$ , on a

$$(25) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v).$$

2.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont  $F$  est une localisation. On dispose du

**Lemme 2.1** (Kable [10]). *Supposons que  $F$  est un corps  $p$ -adique. Il existe un corps de nombres  $k$  et une place  $v_0$  telle que  $k_{v_0} = F$ , où  $v_0$  est l'unique place de  $k$  au dessus de  $p$ .*

On va définir une topologie sur  $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$ . Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $GL_{2n}(F)$ ,  $P$  un parabolique de Levi  $M$  et  $\sigma \in \Pi_2(M)$ . La classe d'équivalence de l'induction parabolique normalisé  $i_P^G(\sigma)$  est indépendante du parabolique  $P$  et on la notera  $i_M^G(\sigma)$ . On note  $X^*(M)$  le groupe des caractères algébriques de  $M$ , on dispose alors d'une application  $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \text{Temp}(GL_{2n}(F))$  où  $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$ . On définit alors une base de voisinage de  $i_M^G(\sigma)$  dans  $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$  comme l'image d'une base de voisinage de  $0$  dans  $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ .

Cette topologie sur  $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$  nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

**Proposition 2.6** (Beuzart-Plessis [4]). *Soient  $k$  un corps de nombres,  $v_0, v_1$  deux places distinctes de  $k$  avec  $v_1$  non archimédienne. Soit  $U$  un ouvert de  $\text{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$ . Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible  $\Pi$  de  $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$  telle que  $\Pi_{v_0} \in U$  et  $\Pi_v$  est non ramifiée pour toute place non archimédienne  $v \notin \{v_0, v_1\}$ .*

2.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que  $J(s, W, \phi)$  lorsque l'on fait varier la représentation  $\pi$ . Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de  $J(s, W, \phi)$  pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées  $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$  est l'espace des fonctions  $f : GL_{2n}(F) \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $f(n\mathbf{g}) = \psi(n)f(\mathbf{g})$  pour tous  $n \in N_{2n}(F)$  et  $\mathbf{g} \in GL_{2n}(F)$ , on impose les conditions suivantes :

- Si  $F$  est  $p$ -adique,  $f$  est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert et il existe  $d > 0$  et  $C > 0$  tels que  $|f(n\mathbf{a}k)| \leq C\delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$ , où  $\|\mathbf{a}\| = \max(|a_{i,i}|)$ , pour tous  $n \in N_{2n}(F)$ ,  $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$  et  $k \in GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ ,
- Si  $F$  est archimédien,  $f$  est  $C^\infty$  et il existe  $d > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(gl_{2n}(F))$ , il existe  $C > 0$  tel que  $|(R(\mathbf{u})f)(n\mathbf{a}k)| \leq C\delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$  pour tous  $n \in N_{2n}(F)$ ,  $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$ ,  $k \in GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ .

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

**Lemme 2.2** (Lemme 2.4.3 [4]). *Soit  $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ . Il existe  $d > 0$  tel que pour tout  $N \geq 1$ , il existe  $C > 0$  tel que*

$$(26) \quad |W(\mathbf{b}k)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(\mathbf{b})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{b}\|)^d,$$

pour tous  $\mathbf{b} \in A_{2n}(F)$  et  $k \in GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ .



**Lemme 2.3** (Lemme 2.4.4 [4]). *Pour tout  $C > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tous  $s$  vérifiant  $0 < \operatorname{Re}(s) < C$  et  $d > 0$ , l'intégrale*

$$(27) \quad \int_{\mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da$$

*converge absolument.*

On étend la définition des intégrales  $J(s, W, \phi)$  aux fonctions tempérées  $W$ , on montre maintenant la convergence de ces intégrales

**Lemme 2.4.** *Pour  $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ , l'intégrale  $J(s, W, \phi)$  converge absolument pour tout  $s \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $G_n = N_n A_n K_n$  la décomposition d'Iwasawa de  $G_n$ . Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(28) \quad \int_{\mathcal{A}_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta_{B_n}^{-1}(a) da.$$

On pose  $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ , ce qui nous permet d'écrire

$$(29) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1} X a} \sigma_n,$$

où  $b = \operatorname{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$ . On effectue le changement de variable  $X \mapsto aXa^{-1}$ , l'intégrale devient alors

$$(30) \quad \int_{\mathcal{A}_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W \left( b u_X \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da.$$

On écrit  $u_X = n_X t_X k_X$  la décomposition d'Iwasawa de  $u_X$  et on pose  $k_\sigma = \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ . Le lemme 2.2 donne alors

$$(31) \quad |W(bt_X k_X k_\sigma)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d.$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les  $t_j$ . On dispose de la

**Proposition 2.7** (Jacquet-Shalika [9]). *On a  $|t_k| \geq 1$  lorsque  $k$  est impair et  $|t_k| \leq 1$  lorsque  $k$  est pair. En particulier,  $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geq 1$  lorsque  $j$  est impair et  $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leq 1$  lorsque  $j$  est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que  $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$  lorsque  $j$  est impair et  $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$  lorsque  $j$  est pair. Ce qui nous permet de majorer  $(1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N}$  par  $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-2N}$  lorsque  $j$  est impair et par  $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} (1 + |\frac{a_{j/2}}{a_{j/2+1}}|)^{-N}$  lorsque  $j$  est pair.

Ce qui donne

(32)

$$\begin{aligned} |W(\mathbf{b}t_X k_X k_\sigma)| &\leq C \prod_{j=1}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}t_X) \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d \\ &\leq C \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}t_X) \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d, \end{aligned}$$

puisque  $\prod_{j=1}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} = \left| \frac{t_1}{t_{2n}} \right|^{-N} \leq 1$  d'après la proposition 2.7.

De plus, encore d'après la proposition 2.7, on a

$$(33) \quad \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} \leq \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \frac{1}{|t_j|^N}.$$

Pour finir, on aura besoin de la

**Proposition 2.8** (Jacquet-Shalika [9]). *Pour  $X \in \text{Lie}(\overline{N}_n)$ , on pose  $\|X\| = \sup_{i,j} |X_{i,j}|$ . On pose  $m(X) = \sqrt{1 + \|X\|}$  lorsque  $F$  est archimédien et  $m(X) = \sup(1, \|X\|)$  lorsque  $F$  est non-archimédien. Il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que pour tout  $X \in \text{Lie}(\overline{N}_n)$ , on ait*

$$(34) \quad \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |t_j| \geq m(X)^\alpha$$

Grâce à cette proposition, on obtient la majoration

$$(35) \quad |W(\mathbf{b}t_X k_X k_\sigma)| \leq C m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}t_X) \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d.$$

D'autre part, il existe  $C' > 0$  tel que

$$(36) \quad |\phi(e_n a k)| \leq C' (1 + |a_n|)^{-N}.$$

L'intégrale  $J(s, W, \phi)$  est alors majorée (à une constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(37) \quad \int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX$$

et

$$(38) \quad \int_{\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a|^{\text{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da,$$

pour  $j$  compris entre 0 et  $d$ . La première intégrale converge pour  $N$  assez grand et la deuxième pour  $N$  assez grand lorsque  $\text{Re}(s) > 0$ . On a utilisé la relation  $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$ . En effet,

$$(39) \quad \delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n} |a_1|^{3-2n} |a_2|^{5-2n} |a_2|^{7-2n} \dots |a_n|^{2n-3} |a_n|^{2n-1},$$

$$(40) \quad = |a_1|^{4-4n} |a_2|^{12-4n} \dots |a_n|^{4n-4},$$

$$(41) \quad = \delta_{B_n}^4(a).$$

□

**2.2. Facteurs  $\gamma$ .** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs  $\gamma^{\mathrm{JS}}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$  et  $\gamma^{\mathrm{Sh}}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$  à une constante (dépendant de  $\pi$ ) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs  $\gamma$  archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur  $\gamma^{\mathrm{JS}}$  dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit  $\pi$  une représentation tempérée irréductible de  $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})$ . On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient  $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$  lorsque l'on fait varier la représentation  $\pi$ , on dispose du

**Lemme 2.5.** *Soient  $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$  et  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ . Supposons que  $J(s, W_0, \phi) \neq 0$ . Alors il existe une application continue  $\pi' \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(\mathbb{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}), \psi)$  et un voisinage  $V \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}))$  de  $\pi$  tels que  $W_0 = W_{\pi}$  et l'application  $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$  soit continue.*

*En particulier, si  $\mathbb{F}$  est un corps  $\mathfrak{p}$ -adique, ce quotient est égal à  $\gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$  (proposition 2.4) ; donc  $\pi' \in V \mapsto \gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$  est continue.*

*Démonstration.* On utilise l'existence de bonnes sections  $\pi' \mapsto W_{\pi'}$  (Beuzart-Plessis). La forme linéaire  $W \in C^w(N_{2n}(\mathbb{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$  est continue, il existe donc un voisinage  $V$  de  $\pi$  tel que  $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$ . Le quotient  $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$  est alors bien une fonction continue de  $\pi'$  sur  $V$ .  $\square$

On étudie maintenant la dépendance du quotient  $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}$  par rapport au caractère additif  $\psi$ , où l'on note  $\mathcal{F}_{\psi}$  pour la transformée de Fourier par rapport à  $\psi$ . Les caractères additifs de  $\mathbb{F}$  sont de la forme  $\psi_{\lambda}$  avec  $\lambda \in \mathbb{F}^*$  où  $\psi_{\lambda}(x) = \psi(\lambda x)$ .

**Lemme 2.6.** *Soient  $\lambda \in \mathbb{F}^*$ ,  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ ,  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$  et  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ . Supposons que  $J(s, W, \phi) \neq 0$ . Alors*

$$(42) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_{\lambda}}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})} \omega_{\pi}(\lambda) \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}.$$

*Démonstration.* En effet, la mesure de Haar auto-duale pour  $\psi_{\lambda}$  est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour  $\psi$  par un facteur  $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$ . On en déduit que  $\mathcal{F}_{\psi_{\lambda}}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_{\psi}(\phi)(\lambda x)$ . Le changement de variable  $g \mapsto \lambda^{-1}g$  dans l'intégrale définissant  $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi)(\lambda \cdot))$  donne

$$(43) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi)(\lambda \cdot)) = |\lambda|^{n(s-1)} \omega_{\pi}(\lambda) J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi)).$$

On en déduit immédiatement le lemme.  $\square$

Les facteurs  $\gamma$  de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif  $\psi$  (voir Henniart [6]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère  $\psi$  que l'on a fixé.

**Proposition 2.9.** *Soit  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $\pi$  une représentation tempérée irréductible de  $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})$ . Les intégrales  $J(s, W, \phi)$  admettent un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$  pour tous  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ .*

Il existe une fonction méromorphe  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  telle que pour tous  $s \in \mathbb{C}$ ,  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ , on ait

$$(44) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante  $c(\pi)$  de module 1 telle que pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$(45) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

*Démonstration.* Soit  $k$  un corps de nombres, on suppose que  $k$  a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque  $F = \mathbb{R}$  (respectivement  $F = \mathbb{C}$ ); par exemple,  $k = \mathbb{Q}$  si  $F = \mathbb{R}$  et  $k = \mathbb{Q}(i)$  si  $F = \mathbb{C}$ . Soient  $v \neq v'$  deux places non archimédiennes distinctes, soit  $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$  un ouvert contenant  $\pi$ . On choisit un caractère non trivial  $\psi_\mathbb{A}$  de  $\mathbb{A}_k/k$ .

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible  $\Pi$  telle que  $\Pi_\infty \in U$  et  $\Pi_w$  soit non ramifiée pour toute place non archimédienne  $w \neq v$ .

On choisit des fonctions  $W_w \in \mathcal{W}(\pi_w, (\phi_\mathbb{A})_w)$  et  $\phi_w \in \mathcal{S}(k_w)$  dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. On note  $S = \{\infty, v\}$  l'ensemble des places où  $\Pi$  est ramifiée et  $T$  l'ensemble des places où  $\psi_\mathbb{A}$  est ramifié. Pour  $w \notin S \cup T$ , on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 2.3. Pour  $w = S \cup T$ , on fait un choix, d'après la proposition 2.2, tel que  $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$ . On pose alors

$$(46) \quad W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

D'après la proposition 2.5, on a

$$(47) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où  $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$  est la fonction  $L$  partielle. D'autre part, les facteurs  $\gamma$  de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [6]),

$$(48) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

Les équations (47) et (48), en utilisant la proposition 2.4 pour les places  $w \in \{v\} \cup T$ , donne

$$(49) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ & J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour  $\Pi_\infty$ , l'existence du facteur  $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty)$ .

On s'occupe tout de suite du quotient  $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}$  lorsque  $w \in T$ . En effet,  $\Pi_w$  est non ramifiée, une combinaison de la proposition 2.3 et du lemme 2.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe  $\lambda \in F^*$  et un caractère non ramifié  $\psi_0$  de  $F$  tel que  $(\psi_\mathbb{A})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$ . La remarque suivant le lemme 2.6 nous

dit que les facteurs  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  et  $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$(50) \quad \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1,$$

d'après la proposition 2.3 et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [6]).

L'équation (49) devient alors

$$(51) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\infty}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty})) = \\ & J(s, W_{\infty}, \phi_{\infty})\gamma^{Sh}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned}$$

On choisit maintenant pour  $\mathcal{U}$  une base de voisinage contenant  $\pi$ , en utilisant le lemme 2.5 et la continuité des facteurs  $\gamma$  de Shahidi sur  $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$ , on en déduit que  $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}$  est une fonction méromorphe indépendante de  $W$  et de  $\phi$ , que l'on note  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ , qui est le produit de  $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  et d'une fonction, que l'on note  $R(s)$ . La fonction  $R(s)$  ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 2.6. En effet, on a

$$(52) \quad R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty}))}{J(s, W, \phi_{\infty})\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty})},$$

où  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ , qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus,  $R$  est une limite de fractions rationnelles en  $q_v^s$  (les quotients  $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}$ ); donc  $R$  est une fonction périodique de période  $\frac{2i\pi}{\log q_v}$ .

En réutilisant le même raisonnement en une place  $v'$  de caractéristique résiduelle distincte de celle de  $v$ , on voit que  $R$  est aussi périodique de période  $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$ . L'équation (52) s'écrit

$$(53) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

La fonction  $R$  est donc une fonction périodique de période  $\frac{2i\pi}{\log q_v}$  et  $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$  avec  $q_v$  et  $q_{v'}$  premier entre eux; ce qui est impossible sauf si  $R$  est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante  $c(\pi) = R$  telle que

$$(54) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante  $c(\pi)$  est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$(55) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi)).$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation  $\tilde{\pi}$  pour transformer le facteur  $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))$ , ce qui nous donne

$$(56) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_{\psi}(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \tilde{\psi})}.$$

Puisque  $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_{\psi}(\phi)) = \phi$ , on obtient donc la relation

$$(57) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \tilde{\psi}) = 1.$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 55, on obtient

$$(58) \quad \overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}).$$

Comme  $\pi$  est tempérée,  $\pi$  est unitaire, donc  $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$ . On en déduit, pour  $s = \frac{1}{2}$ ,

$$(59) \quad |\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1.$$

D'autre part, le facteur  $\gamma$  de Shahidi vérifie aussi  $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$ ; on en déduit donc que  $c(\pi)$  est bien de module 1.  $\square$

**Proposition 2.10.** *Supposons que  $F$  est un corps  $p$ -adique. Soit  $\pi$  une représentation tempérée irréductible de  $GL_{2n}(F)$ .*

*Le facteur  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  est défini par la proposition 2.4. Alors il existe une constante  $c(\pi)$  de module 1 telle que pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,*

$$(60) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.1, il existe un corps de nombres  $k$  et une place  $v_0$  telle que  $k_{v_0} = F$ , où  $v_0$  est l'unique place de  $k$  au dessus de  $p$ . Soit  $v$  une place non archimédienne et de caractéristique résiduelle distincte de celle de  $v_0$ . Soit  $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$  un ouvert contenant  $\pi$ . On choisit un caractère non trivial  $\psi_{\mathbb{A}}$  de  $\mathbb{A}_k/k$ .

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible  $\Pi$  telle que  $\Pi_{v_0} \in U$  et  $\Pi_w$  soit non ramifiée pour toute place non archimédienne  $w \neq v$ .

Pour  $w = v_0, v$  ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 2.2, des fonctions de Whittaker  $W_w$  et des fonctions de Schwartz  $\phi_w$  telles que  $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$ . Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 2.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note  $S_{\infty}$  l'ensemble des places archimédienne,  $S = S_{\infty} \cup \{v, v_0\}$  et  $T$  l'ensemble des places où  $\psi_{\mathbb{A}}$  est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 2.5), on a

$$(61) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où  $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$  est la fonction  $L$  partielle. Les facteurs  $\gamma$  de Shahidi vérifient (voir Henniart [6])

$$(62) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que  $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$  pour  $w \in T$ . En utilisant les propositions 2.4 et 2.9, on obtient donc la relation

$$(63) \quad \prod_{v_{\infty} \in S_{\infty}} c(\Pi_{v_{\infty}}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1.$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.9. Par continuité, le quotient  $\frac{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sn}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$  est une fonction périodique de période  $\frac{2i\pi}{\log q_v}$ . Or c'est une fraction rationnelle en  $q_{v_0}^s$ , on obtient que c'est une constante. En évaluant  $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$  en  $s = \frac{1}{2}$ , on montre que cette constante est de module 1.  $\square$

### 3. LIMITE SPECTRALE

Dans cette partie  $F$  est un corps  $p$ -adique. On renvoie à la section 1.2 pour la normalisation des mesures sur  $\text{Temp}(G)$ , pour un groupe  $G$  réductif connexe sur  $F$ .

On note  $\text{PG}_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$ . Soit  $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$ , pour  $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ , on définit  $f_\pi$  par

$$(64) \quad f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)),$$

pour tout  $g \in \text{PG}_{2n}$ , où  $f^\vee(x) = f(x^{-1})$ .

**Proposition 3.1** (Harish-Chandra [16], Shahidi [14], Silberger-Zink [15]). *Il existe une unique mesure  $\mu_{\text{PG}_{2n}}$  sur  $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$  telle que*

$$(65) \quad f(g) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi),$$

pour tous  $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$  et  $g \in \text{PG}_{2n}$ . De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$(66) \quad d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi,$$

où  $\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \log(q_F))^{-n_{\pi, \overline{Ad}}} \gamma(s, \pi, \overline{Ad}, \psi)$ , avec  $n_{\pi, \overline{Ad}}$  l'ordre du zéro de  $\gamma(s, \pi, \overline{Ad}, \psi)$  en  $s = 0$ . Pour  $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$  sous-représentation de  $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$ , avec  $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ , le facteur  $|S_\pi|$  est le produit  $\prod_{i=1}^k n_i$ .

On note  $\Phi(G)$  l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de  $G$  et  $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$  le quotient de  $\text{Temp}(G)$  par la relation d'équivalence  $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$ , où  $\varphi_\pi$  est le paramètre de Langlands associé à  $\pi$ .

Rappelons (section 1.1) que la correspondance de Langlands locale pour  $\text{SO}(2m+1)$  nous permet de définir une application de transfert  $T : \text{Temp}(\text{SO}(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$ . On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$(67) \quad \pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}) \iff \pi = \left( \bigotimes_{i=1}^k \tau_i \times \tilde{\tau}_i \right) \times \bigotimes_{j=1}^l \mu_j$$

avec  $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$  et  $\mu_j \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2m_j+1))/\text{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$ .

**Proposition 3.2.** *Soit  $\phi$  une fonction à support compact sur  $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ , on a*

$$(68) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}_{2n+1})/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Pour  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$  sous-représentation de  $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \rtimes \sigma_0$ , avec  $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$  et  $\sigma_0 \in \Pi_2(\text{SO}(2m+1))$ , le facteur  $|S_\pi|$  est le produit  $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$ ; où  $|S_{\sigma_0}| = 2^k$  tel que  $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$  avec  $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$ .

*Démonstration.* D'après la relation 66, on a

$$(69) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi.$$

Soit  $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ . En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que  $\phi$  est à support dans un voisinage  $U$  suffisamment petit de  $\pi$ . On écrit la représentation  $\pi$  sous la forme

$$(70) \quad \pi = \left( \bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau}_i^{\times n_i} \right) \times \left( \bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left( \bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right),$$

où

- $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$  vérifie  $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq t$ . De plus, pour tous  $1 \leq i < i' \leq t$ ,  $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$  et  $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_{i'}$ .
- $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$  vérifie  $\mu_j \simeq \widetilde{\mu}_j$  et  $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$  pour tout  $1 \leq j \leq u$ . De plus, pour tous  $1 \leq j < j' \leq u$ ,  $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$ .
- $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$  vérifie  $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$  ( et donc  $\nu_k \simeq \widetilde{\nu}_k$  ) pour tout  $1 \leq k \leq v$ . De plus, pour tous  $1 \leq k < k' \leq v$ ,  $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$ .

On note  $M = \left( \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$ . Alors  $\pi = \text{Ind}_M^{\text{PG}_{2n}}(\tau)$  pour une certaine représentation  $\tau$  de  $M$ .

On note  $X^*(M)$  le groupe des caractères algébriques de  $M$ . On note  $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k} = (\mathbb{i}\mathbb{R})_M$  qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe  $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M$  du produit des mesures de Lebesgue sur  $\mathbb{i}\mathbb{R}$  et  $\mathcal{A}$  de la mesure de Haar telle que la mesure quotient sur  $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M / \mathcal{A} \simeq \mathbb{i}\mathbb{R}$  soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local  $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{i}\mathbb{R} / (\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$  préserve localement les mesures, où l'on équipe  $\widehat{A_M}$  de la mesure  $\left( \frac{2\pi}{\log(q_F)} \right)^{\dim(A_M)} d\chi$ .

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :

- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \dots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \dots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i} \times (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i}$ ,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \dots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j}$ ,
- $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \dots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k}$ ,

pour tout  $\lambda \in \mathcal{A}$ .

On a un isomorphisme  $\mathcal{A} \simeq X^*(M) \otimes \mathbb{i}\mathbb{R}$  donné par  $\lambda \mapsto |\det|^\lambda$ , où l'on note

$$|\det|^\lambda = \prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{m_i} |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \times \prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{p_j} |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \times \prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{q_k} |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}.$$

On dispose alors d'une application  $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ , où

$$(71) \quad \pi_\lambda = \left( \bigotimes_{i=1}^t \left( \bigotimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left( \bigotimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau}_i \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \right) \right) \\ \times \left( \bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left( \bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right).$$

Cette dernière induit un homéomorphisme  $U \simeq V/W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ , où  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{A}$  et  $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$  est le sous-groupe de  $W(\text{PG}_{2n}, M)$  fixant la représentation  $\tau$ . Alors

$$(72) \quad \int_U \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi$$



d'après la relation 66. Du choix des mesures  $d\pi$  sur  $\text{Temp}(PG_{2n})$  et  $d\lambda$  sur  $\mathcal{A}$ , cette intégrale est égale à

$$(73) \quad \frac{1}{|W(PG_{2n}, \tau)|} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}| \gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda.$$

De plus, on a

$$(74) \quad |S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i + n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{p_j} \prod_{k=1}^v f_k^{q_k}.$$

On notera ce produit  $P$  dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$(75) \quad \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{1}{|W(PG_{2n}, \tau)|P} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,$$

où  $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$  si  $\lambda \in V$  et 0 sinon. La fonction  $\varphi$  est  $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante à support compact.

Décrivons maintenant la forme des facteurs  $\gamma$ , on aura besoin des propriétés de ces derniers.

**Propriété 3.1.** *Les facteurs  $\gamma$  vérifient les propriétés suivantes :*

- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, Ad) = \gamma(s, \pi_1, Ad) \gamma(s, \pi_2, Ad) \gamma(s, \pi_1 \times \widetilde{\pi_2}) \gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$ ,
- $\gamma(s, \pi | \det |^x, Ad) = \gamma(s, \pi, Ad)$ ,
- $\gamma(s, \pi, Ad)$  a un zéro simple en  $s = 0$ ,
- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_2, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$ ,
- $\gamma(s, \pi | \det |^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$ ,
- $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$  a au plus un zéro simple en  $s = 0$  et  $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$  si et seulement si  $\pi$  est dans l'image de l'application de transfert  $T$ ,

pour tous  $x \in \mathbb{C}$ ,  $\pi \in \Pi_2(G_m)$  et  $\pi_1, \pi_2 \in \text{Temp}(G_m)$ .

On en déduit que

$$(76) \quad \gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi) = \left( \prod_{i=1}^t \prod_{1 \leq l \neq l' \leq m_i} \left( \frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{1 \leq l \neq l' \leq n_i} \left( \frac{\widetilde{x}_{i,l}(\lambda) - \widetilde{x}_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \right) \left( \prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left( \frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right) \right) \left( \prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left( \frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right) \right) F(\lambda),$$

où  $F$  est une fonction  $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante  $C^\infty$  qui ne s'annule pas sur le voisinage  $V$  (quitte à rétrécir  $V$ ), il s'agit d'un produit de facteur  $\gamma$  ne s'annulant pas sur  $V$ .

De même, on a

(77)

$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left( \prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1 \leq l \leq m_i \\ 1 \leq l' \leq n_i}} (s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})^{-1} \right) \\ \left( \prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l < l' \leq p_j} (s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})^{-1} \right) \left( \prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \leq l' \leq q_k} (s + \frac{z_{k,l}(\lambda) + z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})^{-1} \right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction  $G$  est une fonction  $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante méromorphe sur  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$  et n'a pas de pôle sur  $\frac{1}{2}V + \mathcal{H}$  (quitte à rétrécir  $V$ ) ; ici  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$  s'injecte dans  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$  par l'application  $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$  dont les coordonnées sont  $x_i(\lambda_s) = d_i(s, \dots, s)$ ,  $y_j(\lambda_s) = e_j(s, \dots, s)$  et  $z_k(\lambda_s) = f_k(s, \dots, s)$ .

On énonce maintenant le résultat fondamental de [4], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [4], on écrit

(78)

$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{A}d, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où  $\varphi_s(\lambda) = \varphi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda + s)$ . De plus,  $\varphi_s$  est  $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante à support compact. Les lettres  $P, Q, R$  désignent des fractions rationnelles qui apparaissent dans le quotient des facteurs  $\gamma$  (voir [4, section 3]).

**Proposition 3.3** (Beuzart-Plessis [4]). *La limite*

$$(79) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}) d\lambda$$

est nulle si  $m_i \neq n_i$  pour un certain  $i$  ou si l'un des  $p_j$  est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(80)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|} \\ \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}) d\lambda';$$

où

- $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$ ,
  - $c$  est le cardinal des  $1 \leq k \leq t$  tel que  $q_k \equiv 1 \pmod{2}$ ,
  - $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$ ,
  - $W$  et  $W'$  sont définis de manière intrinsèque dans 3.3,  $W$  est isomorphe à  $W(PG_{2n}, \tau)$  et  $W'$  est isomorphe à  $W(SO(2n+1), \sigma)$  (défini plus loin).
- De plus,  $\mathcal{A}'$  est le sous-espace de  $\mathcal{A}$  défini par les relations :
- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$  pour tous  $1 \leq i \leq t$  et  $1 \leq l \leq n_i$ ,
  - $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$  pour tous  $1 \leq j \leq u$  et  $1 \leq l \leq \frac{p_j}{2}$ ,
  - $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$  pour tous  $1 \leq k \leq v$  et  $1 \leq l \leq \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$ .

On équipe  $\mathcal{A}'$  de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$(81) \quad \mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor}$$

qui envoie  $(x_i(\lambda), y_j(\lambda), z_k(\lambda))$  sur  $((x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}), (y_{j,1}, \dots, y_{j,\frac{p_j}{2}}), (z_{k,1}, \dots, z_{k,\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor}))$ .

Supposons tout d'abord que  $\pi$  n'est pas de la forme  $T(\sigma)$  pour un certain  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}$ . D'après la caractérisation 67, il existe  $1 \leq i \leq r$  tel que  $m_i \neq n_i$  ou  $p_j$  est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparaît dans 67). Alors en prenant  $U$  suffisamment petit, on peut supposer que  $U$  ne rencontre pas l'image de l'application de transfert  $T$ . Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul; d'après 3.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}$  tel que  $\pi = T(\sigma)$ . Alors  $m_i = n_i$  pour tout  $1 \leq i \leq t$  et les  $p_j$  sont pairs. De plus, on peut écrire

$$(82) \quad \sigma = \left( \prod_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \prod_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \prod_{k=1}^v \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \right) \rtimes \sigma_0,$$

où  $\sigma_0$  est une représentation de  $\text{SO}(2m+1)$  pour un certain  $m$  tel que

$$(83) \quad T(\sigma_0) = \bigotimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \pmod{2}}}^v \nu_k.$$

On note  $L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times \text{SO}(2m+1)$ . On a  $\sigma = \text{Ind}_L^{\text{SO}(2n+1)}(\Sigma)$ , où  $\Sigma \in \Pi_2(L)$ . Le groupe  $W'$  de la proposition 3.3 est isomorphe à  $W(\text{SO}(2n+1), \sigma)$ , où  $W(\text{SO}(2n+1), \sigma)$  est le sous-groupe de  $W(\text{SO}(2n+1), L)$  fixant la classe d'isomorphisme de  $\sigma$ .

Comme précédemment,  $X^*(L) \otimes \mathbb{i}\mathbb{R}$  est isomorphe à  $\mathcal{A}'$ . On en déduit une application  $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ , avec

$$(84) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda'} &= \left( \prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{n_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left( \prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ &\times \left( \prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \rtimes \sigma_0. \end{aligned}$$

De plus, d'après 67, pour  $\lambda \in V$ ,  $\pi_\lambda \in T(\text{SO}(2n+1)/\text{Stab})$  si et seulement si  $\lambda \in \mathcal{A}'$ ; quitte à rétrécir  $V$ . Dans ce cas  $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$ .

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction  $\varphi$  (équation 75), on obtient

$$(85) \quad \begin{aligned} &\int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ &= \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ &= \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'. \end{aligned}$$

De plus,

$$(86) \quad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 3.3 et la relation 83. D'autre part, d'après la proposition 3.3 et l'équation 75, on a

$$(87) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P} \\ \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t p_{m_i, n_i, s} \left( \frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left( \frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left( \frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(88) \quad \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \rightarrow 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'.$$

De plus, on remarque que  $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$  a un pôle d'ordre  $N$  en  $s = 0$ . Notre membre de gauche est donc égal à

$$(89) \quad \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda';$$

On a utilisé les relations  $\gamma^*(0, 1, \psi) \gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi) = \gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, Ad, \psi)$  et

$$(90) \quad \frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), Ad, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi).$$

Dans l'expression 89, le facteur  $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$  apparait avec un exposant  $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$ ; on en déduit que 89 est égal au membre de droite 85, d'après l'égalité 86.  $\square$

#### 4. UNE FORMULE D'INVERSION DE FOURIER

On note  $H_n$  le sous-groupe des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  où  $X$  est dans  $M_n$  et  $g$  dans  $G_n$ . On pose  $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$ . On note  $\theta$  le caractère sur  $H_n$  qui envoie  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  sur  $\psi(\text{Tr}(X))$ .

On équipe  $H_n$ ,  $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$  et  $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$  des mesures suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{H_n} f(s) ds &= \int_{G_n} \int_{M_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} f(\xi) d\xi &= \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \text{ invariante à gauche par } N_{2n}, \\ - \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} f(\xi) d\xi &= \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \text{ invariante à gauche par } N_{2n}. \end{aligned}$$

**Proposition 4.1.** *Soit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ , alors on a*

$$(91) \quad \int_{H_n} f(s) \theta(s)^{-1} ds = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi) \theta(\xi)^{-1} \theta(\xi_p) d\xi d\xi_p.$$

où  $W_f$  est la fonction de  $G_{2n} \times G_{2n}$  définie par

$$(92) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du$$

pour tous  $g_1, g_2 \in G_{2n}$ .

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ ,  $\sigma_n$  est trivial,  $H_1 = N_2 Z(G_2)$  et  $H_1^P = N_2$  donc  $H_1^P \cap N_2 \backslash H_1^P$  est trivial. Le membre de droite est alors

$$(93) \quad \int_{F^*} W_f \left( 1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f \left( u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \psi(u)^{-1} du dz.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que  $n > 1$  et que la proposition soit vraie au rang  $n - 1$ .

Le sous groupe  $\Omega_n$  des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  où  $Y$  est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille  $n$  et  $h \in \bar{B}_n$  le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, s'identifie à un ouvert dense du quotient  $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$ . On injecte  $\Omega_{n-1}$  dans  $\Omega_n$ , en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de  $Y$  et voyant  $h$  comme un élément de  $\bar{B}_n$ . On note  $\tilde{\Omega}_n$  l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  où  $\tilde{Y}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{y} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{h}$  de la forme  $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{l} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{l}_n \in F^*$ . Dans la suite, on fera l'identification de  $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$  et  $\tilde{\Omega}_n$  à travers l'isomorphisme  $(\tilde{y}, \tilde{l}, \tilde{l}_n) \in F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \tilde{\Omega}_n$  où  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ . On en déduit que  $\Omega_n = \Omega_{n-1} \tilde{\Omega}_n$ .

De même, on dispose d'une décomposition,  $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \tilde{\Omega}_n^P$ , où  $\Omega_n^P$  est l'ensemble des matrices de  $\Omega_n$  avec  $h \in P_n$  et  $\tilde{\Omega}_n^P$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  où  $\tilde{Y}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{z} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{p}$  de la forme  $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{l} \in F^{n-2}$  et  $\tilde{l}_{n-1} \in F^*$ . De plus,  $\Omega_n^P$  s'identifie à un ouvert dense du quotient  $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$ . Dans la suite, on fera l'identification de  $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$  et  $\tilde{\Omega}_n^P$  à travers l'isomorphisme  $(\tilde{z}, \tilde{l}, \tilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \tilde{\Omega}_n^P$  où  $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ .

On équipe  $\Omega_n$ ,  $\tilde{\Omega}_n$ ,  $\Omega_n^P$ ,  $\tilde{\Omega}_n^P$  des mesures suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_n} f(\xi) d\xi &= \int_{\bar{B}_n} \int_{V_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dY dh, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{\tilde{\Omega}_n} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} &= \int_{F_{n-1} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\tilde{Y} d\tilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega_n^p} f(\xi_p) d\xi_p &= \int_{\overline{B}_n \cap P_n} \int_{V_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dZ dp, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\
- \int_{\widetilde{\Omega}_n^p} f(\widetilde{\xi}_p) d\widetilde{\xi}_p &= \int_{F_{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\widetilde{Y} d\widetilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}).
\end{aligned}$$

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$(94) \quad \int_{\widetilde{\Omega}_n^p} \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi_p' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p,$$

On a choisi les représentants des matrices  $Y$  et  $\widetilde{Y}$  de sorte que le caractère  $\theta$  soit trivial.

On fixe  $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$  et  $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$ . On pose  $f' = L(\widetilde{\xi}_p)R(\widetilde{\xi})f$ , on a alors

$$\begin{aligned}
(95) \quad & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi_p' d\xi' = \\
& \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi_p' d\xi'.
\end{aligned}$$

De plus,

$$(96) \quad W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\xi_p'^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du,$$

où  $V$  est le sous-groupe des matrices de  $N_{2n}$  avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition  $N_{2n} = N_{2n-2}V$ . On effectue le changement de variable  $v \mapsto \xi_p' v \xi_p'^{-1}$ , ce qui donne

$$(97) \quad W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v \xi_p'^{-1} u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du.$$

On note  $\widetilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left( v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$  pour  $g \in G_{2n-2}$ ; alors  $\widetilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$ . On obtient ainsi l'égalité

$$(98) \quad W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p' \xi'| W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
(99) \quad & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi_p' d\xi' = \\
& \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi') d\xi_p' d\xi' = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\
& \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} v s \widetilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds.
\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur  $\widetilde{\xi}_p$  et  $\widetilde{\xi}$  pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur  $\widetilde{\xi}_p$  en le décomposant sous la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ .

On rappelle que l'on identifie  $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$  et  $\widetilde{\Omega}_n^p$  à travers l'isomorphisme  $(\widetilde{z}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n^p$  où  $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$

et  $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ . On obtient alors

$$(100) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} v s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de  $v$  par  $\sigma_n^{-1}$  s'écrit sous la forme  $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$  où  $n_1, n_2$  sont dans  $U_n$ , les coefficients de  $y$  sont nuls sauf la dernière colonne et  $t$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Le caractère  $\psi(v)$  devient après conjugaison  $\psi(\text{Tr}(y) + \text{Ts}(t))$ , où  $\text{Ts}(t) = t_{n-1,n}$ . Les changements de variables  $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p}\tilde{Z}\tilde{p}^{-1}$ ,  $n_1 \mapsto \tilde{p}n_1\tilde{p}^{-1}$ ,  $n_2 \mapsto \tilde{p}n_2\tilde{p}^{-1}$ ,  $t \mapsto \tilde{p}t\tilde{p}^{-1}$  et  $y \mapsto \tilde{p}y\tilde{p}^{-1}$  transforme l'intégrale précédente en

$$(101) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma_n^{-1} V \sigma_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur  $s$  ce qui donne que  $\sigma_n^{-1} s \sigma_n$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$  avec  $X$  une matrice de taille  $n$  dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et  $g \in G_{n-1}$  vu comme élément de  $G_n$ . Le changement de variable  $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$  donne

$$(102) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1} g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1} V \sigma_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \tilde{\xi} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On effectue maintenant le changement de variables  $g \mapsto \tilde{p}g$ , notre intégrale devient alors

$$(103) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1} V \sigma_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \tilde{\xi} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

**Lemme 4.1.** *Soit  $F \in \mathcal{S}(M_n)$ , alors*

$$(104) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{\text{Lie}(U_n)} F(t) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| dt d\tilde{p} = F(0).$$

On rappelle que l'on identifie  $F^{n-2} \times F^*$  à l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{l} \in F^{n-2}$  et  $\tilde{l}_{n-1} \in F^*$ .

*Démonstration.* La mesure  $|\det \tilde{p}|d\tilde{p}$  correspond à la mesure additive sur  $F^{n-1}$ . En remarquant que  $\text{Tr}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$  n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans  $F^{n-1}$  correspondant à  $\tilde{p}$  et  $t$ , le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier.  $\square$

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(105) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y)) d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z},$$

où  $\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n$  est le sous-groupe de  $\sigma_n^{-1}V\sigma_n$  où  $t = 0$ .

On explicite l'intégration sur  $\tilde{\xi}$  de la forme  $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  où  $\tilde{Y}$  est une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{y} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{h} \in F^{n-1} \times F^*$  que l'on identifie avec un élément de  $G_n$  dont seule la dernière ligne est non triviale. Ce qui nous permet d'identifier  $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$  et  $\tilde{\Omega}_n$ . L'intégrale devient

$$(106) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y)) d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dX dg d\tilde{h} d\tilde{Y} d\tilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

$$(107) \quad \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_1^{-1}y + X + g\tilde{Y}g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

On effectue les changement de variable  $y \mapsto n_1 y$  et  $\tilde{Y} \mapsto g^{-1}\tilde{Y}g$  et on combine les intégrales sur  $X$ ,  $y$  et  $\tilde{Y}$  en une intégration sur  $M_n$  dont on note encore la variable  $X$ . On obtient alors

$$(108) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\tilde{h} & 0 \\ 0 & g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable  $n_2 \mapsto n_2 n_1$  et on remarque que l'on a

$$(109) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$



Le changement de variables  $X \mapsto n_1^{-1}(X + \tilde{Z}n_2)n_1$  nous donne alors

$$(110) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g \tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(\tilde{Z}n_2)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables  $\tilde{Z}$  et  $n_2$  ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(111) \quad \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g \tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) dn_1 dX dg d\tilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur  $n_1, g, \tilde{h}$ ; on trouve bien notre membre de gauche

$$(112) \quad \int_{G_n} \int_{M_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg.$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur  $V$  avec les intégrales sur  $\tilde{H}, H_{n-1}, \tilde{\Omega}_{n-1}$  et  $H_{n-1}^P$  qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents  $H$  d'une part, d'échanger des intégrales sur les  $n_1, n_2, t, y$  qui compose l'intégrale sur  $V$  d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en  $X$  sur  $M_n$  (cf. intégrale 108) et lorsque l'on échange l'intégrale sur  $U_n$  et  $M_n$  (cf. intégrale 111). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 108, à part l'intégration sur  $\tilde{Z}$ , on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons  $r(g) = 1 + \|e_{2n}g\|_\infty$ . On a

$$(113) \quad W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}} f} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) = \\ (1 + |a_n|)^N |\det a(a')^{-1}|^{-1} W_f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right),$$

pour tous  $a \in A_n, a' \in A_{n-1}, X, X' \in V_n, k \in K_n$  et  $k' \in K_{n-1}$ .

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

$$(114) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\tilde{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det a(a')^{-1}| \\ W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}} f} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \delta_{B_n}(a)^{-1} \delta_{B_{n-1}}(a')^{-1} da da' dX dX'$$

pour  $N$  suffisamment grand. On note  $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$  et  $u_{X'} = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ .

On a alors

$$(115) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b \sigma_n k \sigma_n^{-1} u_{(ak)^{-1}X(ak)},$$

où  $b = \text{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$  et

$$(116) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b' \sigma_n k' \sigma_n^{-1} u_{(a'k')^{-1}X'(a'k')},$$

où  $b' = \text{diag}(a'_1, a'_1, a'_2, a'_2, \dots)$ .

On effectue les changements de variables  $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$  et  $X' \mapsto (a'k')X'(a'k')^{-1}$ .

D'après les lemmes 2.2 et la preuve du lemme 2.4, il existe  $d > 0$  tel que pour tout  $N \geq 1$ , l'intégrale 114 est alors majorée à une constante près par

$$(117) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \int_{V_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det a(a')^{-1}| m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ m(X')^{-\alpha' N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'}) \log(\|b't_{X'}\|)^d \delta_{B_n}^{-2}(a) \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Les quantités  $m(X)$ ,  $m(X')$ ,  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont celles que l'on obtient par l'application de la proposition 2.8. On rappelle que  $m(X) = \sup(1, \|X\|)$ , où  $\|X\| = \sup_{i,j} |X_{i,j}|$ . On a  $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b') \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') = |\det a'|^2$ . On en déduit que cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(118) \quad \int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX,$$

$$(119) \quad \int_{V_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX',$$

$$(120) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da,$$

et

$$(121) \quad \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da',$$

pour  $j, j'$  compris entre 0 et  $d$ . Ces dernières intégrales convergent pour  $N$  assez grand, voir [9, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 2.3 pour les deux dernières.

□

## 5. FORMULES DE PLANCHEREL

Pour  $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n})$ , on note

$$(122) \quad \beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p.$$

**Lemme 5.1.** *L'intégrale 122 est absolument convergente. La forme linéaire  $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$  est continue. De plus, la restriction de  $\beta$  à  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  est non nulle.*

*Démonstration.* D'après la décomposition d'Iwasawa,  $P_n = N_n A_{n-1} K_n^P$ , où  $K_n^P$  est un sous-groupe compact, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(123) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \left| W \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout  $k \in K_n^P$ . D'après la preuve du lemme 2.4, on obtient la majoration suivante :

$$(124) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})^{-N} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a) \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout  $N \geq 1$ . Cette dernière intégrale est convergente pour  $N$  suffisamment grand par le même argument que dans la preuve du lemme 2.4.

Pour finir, le modèle de Kirillov  $\mathcal{K}(\pi, \psi)$  contient  $C_c^\infty(N_{2n} \backslash P_{2n}, \psi)$  [5]. En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction à  $A_{2n-1} K_{2n}^P$  est l'indicatrice de  $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$ , alors  $\beta$  est non nulle sur cette fonction.  $\square$

**Proposition 5.1.** *Pour  $\pi = T(\sigma)$  avec  $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$ , la restriction de  $\beta$  à  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  est un élément de  $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ .*

La preuve de cette proposition se fera après quelques préliminaires. On commence par prouver un lemme et introduire des notations.

**Lemme 5.2.** *Pour  $W \in \mathcal{S}(Z_{2n} N_{2n} \backslash G_{2n})$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ , on a*

$$(125) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W(\xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

*Démonstration.* On a

$$(126) \quad \begin{aligned} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) &= \int_{A_{n-1}} \int_{K_n} \int_{V_n} W \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ &\quad \psi(-\text{Tr}(X)) dX \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n z k) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da \end{aligned}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$(127) \quad \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n z k) |\det z|^s dz = \int_{F^*} \widehat{\phi}_k(x) |x|^{1-ns} dx,$$

où l'on a posé  $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$  pour tous  $x \in F$  et  $k \in K_n$ . Ce qui nous donne par convergence dominée

$$(128) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n z k) |\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi}_k(x) dx = \phi(0).$$

On en déduit, aussi par convergence dominée, que  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi)$  est égal à

$$(129) \quad \phi(0) \int_{Z_n \backslash \Lambda_n} \int_{K_n} \int_{V_n} W \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da,$$

ce qui nous permet de conclure.  $\square$

On étend la forme linéaire  $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u) \psi(u)^{-1} du$  par continuité en une forme linéaire sur  $C^w(G_{2n})$  [4], que l'on note

$$(130) \quad f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u) \psi(u)^{-1} du.$$

Pour  $f \in C^w(G_{2n})$ , on peut ainsi définir  $W_f$  par la formule

$$(131) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du,$$

pour tous  $g_1, g_2 \in G_{2n}$ .

Soit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  et  $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$ , on pose  $W_{f,\pi} = W_{f,\pi}$ .

**Proposition 5.2** (Beuzart-Plessis [4]). *L'application linéaire*

$$f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto (\pi \mapsto W_{f,\pi}) \in \mathcal{S}(\text{Temp}(G_{2n}), C^w(N_{2n} \times N_{2n} \backslash G_{2n} \times G_{2n}, \psi \otimes \psi^{-1}))$$

*est continue.*

**Proposition 5.3** (Beuzart-Plessis [4]). *Pour tout  $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ . On pose  $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg) dz$ , alors  $\tilde{f} \in PG_{2n}$ . On a  $f_\pi = \tilde{f}_\pi$  pour tout  $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$ . De plus,*

$$(132) \quad W_{\tilde{f}} = \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} W_{f,\pi} d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

**Lemme 5.3.** *Soit  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ , alors il existe  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  tel que  $W_{f,\pi}(1, \cdot) = W$ .*

*Démonstration.* On a

$$(133) \quad W_{f,\pi}(1, \cdot) = \int_{N_{2n}} f_\pi(u) \psi(u)^{-1} du.$$

D'autre part, soit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  alors  $f$  est bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact  $K$ . On a une décomposition  $V_\pi = V_\pi^K \oplus V_\pi(K)$ , où  $V_\pi(K)$  est l'espace des vecteurs  $K$ -invariants. Comme  $\pi$  est admissible,  $V_\pi^K$  est de dimension finie. On note  $\mathcal{B}_\pi^K$  une base de cet espace. Alors pour tout  $g \in G_{2n}$ , on a  $f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)) = \sum_{v \in \mathcal{B}_\pi^K} \langle \pi(g)\pi(f^\vee)v, v^\vee \rangle$ , où  $(v^\vee)_{v \in \mathcal{B}_\pi^K}$  est la base duale de  $\mathcal{B}_\pi^K$ . On en déduit que  $f_\pi$  est une somme (finie) de coefficient matriciel.

On note  $\text{Coeff}^K = \{g \mapsto \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle, v \in V_\pi, \tilde{v} \in V_{\tilde{\pi}}\}$ . Alors toute somme finie de  $\text{Coeff}^K$  est de la forme  $f_\pi$  avec  $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K)$ . En effet,  $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K) \mapsto \pi(f^\vee) \in \text{End}(V_\pi^K)$  est surjective, où l'on a noté  $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$  le sous espace de  $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$  des fonctions bi-invariante par  $K$ . La surjectivité est une conséquence du lemme de Burnside et du fait que  $V_\pi^K$  est un  $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ -module irréductible de dimension finie. L'isomorphe de représentation nous donne  $\text{End}(V_\pi^K) \simeq \pi^K \boxtimes \tilde{\pi}^K$  le résultat.

Pour montrer le lemme, il nous faut montrer qu'il existe un coefficient matriciel  $c = \langle \pi(\cdot)v, \tilde{v} \rangle$  tel que  $W = \int_{N_{2n}} c(u) \psi(u)^{-1} du$ . Or

$$(134) \quad v \mapsto \int_{N_{2n}} c(u) \psi(u)^{-1} du = \int_{N_{2n}} \langle \pi(u)v, \tilde{v} \rangle \psi(u)^{-1} du$$

est une fonctionnelle de Whittaker. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir  $\tilde{v}$  pour que cette fonctionnelle soit non nulle. C'est le contenu de [13, Théorème 6.4.1].  $\square$

**Corollaire 5.1** (de la limite spectrale). *Soit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  et  $g \in G_{2n}$ , alors*

$$(135) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(g, \cdot)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $g = 1$  en remplaçant  $f$  par  $L(g)f$ . On pose  $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg) dz$ , alors  $\tilde{f} \in PG_{2n}$ . On a donc

$$(136) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

On choisit  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$  tel que  $\phi(0) = 1$ . D'après le lemme 5.2, la proposition 5.3 et la continuité de  $\pi \mapsto J(s, W_{f, \pi}(1, \cdot), \phi)$ , on a

$$(137) \quad \begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n \gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\tilde{f}}(1, \cdot), \phi) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n \gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} J(s, W_{f, \pi}(1, \cdot), \phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle 2.4, on a

$$(138) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} n \gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, \pi}(1, \cdot, \hat{\phi})}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

La proposition 3.2, nous permet d'obtenir la relation

$$(139) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned}$$

En remplaçant  $f$  par  $R(h)f$ ,  $h \in H_n$ , dans le membre de droite; cela revient à multiplier par  $\theta(h)$ . On en déduit la même relation pour le membre de droite. Ce qui signifie que

$$(140) \quad \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} J(1, R(\xi) \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})}) - \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout  $\xi \in H_n$ , où  $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$ .

D'après le lemme de séparation spectrale [4, Lemme 5.7.2] et la continuité de  $\sigma \mapsto J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})})$ , on en déduit que  $J(1, R(\xi) \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})}) = \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})})$  pour tout  $\xi \in H_n$  et donc que  $J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot, \hat{\phi})}) = 0$ .

est  $(H_n, \theta)$ -invariant (dans le sens où le changement  $f$  par  $R(\xi)f$  revient à multiplier par  $\theta(\xi)$ ).

**Lemme 5.4.** *Soit  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$  et  $\pi = T(\sigma)$ . Alors*

$$(141) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tous  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ .

*Démonstration.* En effet, soit  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ , on a

$$(142) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg.$$

D'après le lemme 5.3, on choisit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$  tel que  $W_{f,\pi}(1, \cdot) = \rho(w_{n,n}^{-1})W$ . D'après ce que l'on vient de dire précédemment, on en déduit que  $J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$  vérifie la relation  $J(1, R(\xi)\widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \theta(\xi)J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$ , pour tout  $\xi \in H_n$ .

Comme  $\widehat{\phi}(e_n g)$  est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par  $G_{n-1}U_{n-1}$ , on en déduit que

$$(143) \quad \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg$$

est  $(H_n, \theta)$ -invariant en tant que fonction de  $\widetilde{W}$ . D'après l'isomorphisme  $G_{2n}$ -équivariant  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto \widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ ,  $\beta$  restreint à  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  est  $(H_n, \theta)$ -invariant, ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

**Remarque 5.1.** *Cette preuve que  $\beta$  restreint à  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  est  $(H_n, \theta)$ -invariant est quelque peu détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que  $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$  qui est de dimension au plus 1. En utilisant le fait que  $\pi \simeq \widetilde{\pi}$  donc  $\pi$  est  $(H_n, \theta)$ -distinguée, on a  $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$ . Ce dernier est un sous-espace de  $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ . On en déduirait alors que la restriction de  $\beta$  à  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ , qui est bien  $H_n \cap P_{2n}$ -invariant, est un élément de  $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$ . Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension 1.*

**Proposition 5.4.** *Soit  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ , on pose  $\pi = T(\sigma)$  le transfert de  $\sigma$  dans  $\text{Temp}(G_{2n})$ . La forme linéaire  $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$  est un élément de  $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$ . On identifie  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  et  $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$  par l'isomorphisme  $G_{2n}$ -équivariant  $W \mapsto \widetilde{W}$ . Il existe un signe  $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$  tel que*

$$(144) \quad \beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tout  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ .

*Démonstration.* En effet,  $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$  est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [8]. De plus,  $\pi$  est le transfert de  $\sigma$  donc  $\widetilde{\pi} \simeq \pi$ . On en déduit l'existence de  $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ . Pour finir, en appliquant l'équation 144, pour  $\pi$  et  $\widetilde{\pi}$ , on obtient  $\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\pi) c_\beta(\widetilde{\pi}) \beta(\widetilde{W})$ . Comme  $\beta$  est non nulle (lemme 5.1), on en déduit que  $c_\beta(\widetilde{\pi}) c_\beta(\pi) = 1$  donc  $c_\beta(\pi)$  est un signe.  $\square$

Finissons la preuve du lemme 5.4, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}
 (145) \quad & \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg \\
 &= \int_{P_n \backslash G_n} \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 (146) \quad & \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \\
 &= \beta \left( R \left( \sigma_n \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \widetilde{W} \right) \\
 &= \beta(\widetilde{W}),
 \end{aligned}$$

puisque  $\beta$  est  $(H_n, \theta)$ -invariant. De plus,

$$\begin{aligned}
 (147) \quad & \int_{P_n \backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x) dx \\
 &= \phi(0).
 \end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 5.4.  $\square$

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 5.4 dans la relation 139.  $\square$

**5.1. Formule de Plancherel explicite sur  $H_n \backslash G_{2n}$ .** On note  $Y_n = H_n \backslash G_{2n}$  munie de la mesure quotient. On dispose d'une surjection  $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$  avec

$$(148) \quad \varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy) \theta(h)^{-1} dh,$$

pour tout  $y \in G_{2n}$ .

Soit  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ , il existe  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$  tel que  $\varphi_i = \varphi_{f_i}$  pour  $i = 1, 2$ . On a

$$(149) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h) \theta(h)^{-1} dh,$$

où  $f = f_1 * f_2^*$ , on note  $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$ .

En effet,

$$(150) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1 y) \overline{f_2(h_2 y)} \theta(h_1)^{-1} \theta(h_2) dh_1 dh_2 dy.$$

L'intégrale est absolument convergente. On effectue le changement de variable  $h_1 \mapsto h_1 h_2$  et on combine les intégrales selon  $y$  et  $h_2$  en une intégrale sur  $G_{2n}$ . Ce qui donne

$$(151) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1 y) \overline{f_2(y)} \theta(h_1)^{-1} dh_1 dy.$$

On pose

$$(152) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = (f_1, f_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) d\xi_p,$$

pour tout  $\pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)))$ .

On note  $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$  le quotient de  $\mathcal{S}(Y_n, \theta)$  par l'intersection des noyaux de toutes les applications  $\mathcal{S}(Y_n, \theta) \rightarrow \pi$  linéaires  $G_{2n}$ -équivariante.

**Proposition 5.5.** *Supposons  $\pi = T(\sigma)$  avec  $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ . La forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_{Y_n, \pi}$  sur  $\mathcal{S}(G_{2n})$  est une forme hermitienne continue semi-définie positive qui se factorise par  $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$ .*

*Démonstration.* Commençons par le

**Lemme 5.5.** *Soit  $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$ . On introduit un produit scalaire sur  $\mathcal{W}(\pi, \psi)$  :*

$$(153) \quad (W, W')^{W^h} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p) \overline{W'(p)} dp,$$

pour tous  $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ .

L'opérateur  $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi)$  est de rang fini. Notons  $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$  une base finie orthonormée de son image. Alors

$$(154) \quad W_{f, \pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_2) W' \otimes \overline{\pi(f_1) W'}.$$

*Démonstration.* Le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)^{W^h}$  est  $P_{2n}$ -invariant, d'après Bernstein [3], il est aussi  $G_{2n}$ -invariant.

Pour  $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ , la décomposition de  $\pi(f^\vee)W$  selon ce produit scalaire est

$$(155) \quad \begin{aligned} \pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{W^h} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (W, \pi(\bar{f})W')^{W^h} W'. \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)^{W^h}$  de faire l'identification

$$(156) \quad \pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} W' \otimes \overline{\pi(f) W'}.$$

La  $G_{2n}$ -invariance de  $(\cdot, \cdot)^{W^h}$  nous donne que  $W' \otimes \overline{\pi(f_1 * f_2^*) W'} = \pi(f_2) W' \otimes \overline{\pi(f_1) W'}$ .

On obtient alors

$$(157) \quad \pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_2) W' \otimes \overline{\pi(f_1) W'}.$$

On en déduit que

$$(158) \quad \begin{aligned} W_{f, \pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \int_{N_{2n}}^* (\pi(ug_2) \pi(f_1) W', \pi(g_1) \pi(f_2) W') \psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1) W'(g_2) \overline{\pi(f_2) W'(g_1)}, \end{aligned}$$

pour tous  $g_1, g_2 \in G_{2n}$ . La dernière égalité provient de [4, Prop 2.14.3].  $\square$

Le lemme 5.5 donne la relation

$$(159) \quad (f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma), \psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2) W')} \beta(T(\sigma)(f_1) W')$$



qui est indépendant du choix de  $f_1, f_2$  puisque la restriction de  $\beta$  à  $\mathcal{W}(T(\sigma), \psi)$  est  $(H_n, \theta)$ -invariante, d'après la proposition 5.1. De plus,  $(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)}$  dépend uniquement de  $T(\sigma)(f_1)$  et  $T(\sigma)(f_2)$ . On en déduit que  $(\cdot, \cdot)_{Y_n, \pi}$  se factorise par  $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_{T(\sigma)}$ .

On remarque que

$$(160) \quad (f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = (\beta \otimes \beta)(W_{f_1 * f_2^*, \pi}),$$

ce qui nous permet de déduire, d'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, que  $(\cdot, \cdot)_{Y_n, T(\sigma)}$  est continue.  $\square$

**Théorème 5.1.** *Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ . On a*

$$(161) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

*Démonstration.* D'après 4.1 et 5.1, on a

$$(162) \quad \int_{H_n} f(h) \theta(h)^{-1} dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p.$$

**Lemme 5.6.** *La fonction  $\sigma \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$  est à support compact.*

*Démonstration.* D'après la définition de  $f_\pi$ ,  $W_{f, \pi}$  est nul dès que  $\pi(f^\vee)$  l'est.

Soit  $K$  un sous-groupe ouvert compact tel que  $f^\vee$  est biinvariant par  $K$ . Alors  $\pi(f^\vee) \neq 0$ , seulement lorsque  $\pi$  admet des vecteurs  $K$ -invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra [16, Théorème VIII.1.2], il n'y a qu'un nombre fini de représentations  $\tau \in \Pi_2(M)$  modulo  $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$  qui admettent des vecteurs  $K_f$ -invariant non nuls.

Comme toute représentation  $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$  est une induite d'une telle représentation  $\tau$  pour un bon choix de sous-groupe de Levi  $M$ , on en déduit le lemme.  $\square$

D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, on sait que  $\xi_p \mapsto \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot))$  est continue. On en déduit que

$$(163) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma$$

est absolument convergente.

De plus, l'intégration extérieure  $\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \theta(\xi_p) d\xi_p$  n'est autre que la forme linéaire continue  $\overline{\beta}(\cdot)$ , on en déduit que l'on peut échanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$(164) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Pour finir, [4, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires  $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$  sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$(165) \quad \gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|.$$

$\square$

**Corollaire 5.2.** *On a une décomposition de Plancherel abstraite sur  $L^2(H_n \backslash G_{2n})$  :*

$$(166) \quad L^2(H_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

## 5.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$ .

**Lemme 5.7.** *On dispose d'un isomorphisme  $G_{2n}$ -équivariant d'espace de Hilbert*

$$(167) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta).$$

*Démonstration.* On considère l'application  $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ , où  $\tilde{f}$  est définie par

$$(168) \quad \tilde{f}(g) = \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right) d\gamma$$

pour tout  $g \in G_{2n}$ .

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour  $g' \in G_n$  et  $X \in M_n$ , on a

$$(169) \quad \begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

On note  $K$  un compact tel que  $\text{supp}(f) \subset H_n K$ . On en déduit que  $f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right)$  est nul sauf si il existe  $g' \in G_n$  tel que  $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix} \in K$ . On en déduit alors que  $\gamma$  est dans un compact. L'intégrale est donc absolument convergente. De plus, pour tous  $g_1, g_2 \in G_n$  et  $g \in G_{2n}$ , on a

$$(170) \quad \begin{aligned} \tilde{f} \left( \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g \right) &= \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right) d\gamma \\ &=_{\gamma \mapsto g_2 \gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right) d\gamma \\ &= \tilde{f}(g). \end{aligned}$$

Pour finir, montrons que  $\tilde{f}$  est à support compact modulo  $G_n \times G_n$ . Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons  $g$  sous la forme  $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$  avec  $g_1, g_2 \in G_n$ ,  $x \in M_n$  et  $k \in K$ . Alors  $\tilde{f}(g) = \tilde{f} \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)$ , on a alors

$$(171) \quad \begin{aligned} \tilde{f}(g) &= \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1} \right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1} \right) \psi(\text{Tr}(\gamma x)) d\gamma \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact sur  $M_n$ , à savoir la fonction  $\phi_k$  définie par  $\phi_k(y) = f \left( \sigma_n \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1} \right) |\det y|^{-n}$

si  $y \in G_n$  et 0 sinon. Le facteur  $|\det y|^{-n}$  provient de la transformation de la mesure multiplicative  $dy$  en une mesure additive. On en déduit que  $\tilde{f}$  est à support compact modulo  $G_n \times G_n$ . Ce qui prouve que l'application  $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$  est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si  $\tilde{f} = 0$ , alors  $\phi_k = 0$  pour tout  $k \in K$ , donc  $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) = 0$  pour tout  $\gamma \in G_n$  et  $k \in K$ . On en déduit que  $f = 0$  car elle est  $(H_n, \theta)$ -invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = c \|\tilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$ . Ce qui prouve que l'application  $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$  s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert  $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \simeq L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ .

En effet,

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= \int_{M_n \times K} \left| \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) \right|^2 dx dk \\
 (172) \quad &= \int_{M_n \times K} \left| \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) \psi(\text{Tr}(\gamma x)) d\gamma \right|^2 dx dk \\
 &= \int_{M_n \times K} |\hat{\Phi}_k(x)|^2 dx dk.
 \end{aligned}$$

La transformé de Fourier conserve la norme  $L^2$  avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante  $c' > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= c' \int_{M_n \times K} |\phi_k(x)|^2 dx dk \\
 (173) \quad &= c' \int_K \int_{G_n} \left| f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) \right|^2 \frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk.
 \end{aligned}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur  $M_n$  restreinte à  $G_n$  en une mesure multiplicative sur  $G_n$ . La mesure  $\frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk$  est une mesure de Haar sur  $G_n K \simeq H_n \backslash G_{2n}$ . On en déduit bien qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = c \|\tilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$ .  $\square$

Cet isomorphisme d'espace  $L^2$  nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur  $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$  et sur  $H_n \backslash G_{2n}$ . En effet, on dispose du

**Théorème 5.2.** *Une décomposition de Plancherel abstraite sur  $L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$  est obtenue par la relation*

$$(174) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme 5.7 et du corollaire 5.2.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] J. ARTHUR, *The Endoscopic Classification of Representations Orthogonal and Symplectic Groups*, vol. 61, American Mathematical Soc., 2013.
- [2] D. BELT, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

- [3] J. N. BERNSTEIN, *P-invariant distributions on  $gl(n)$  and the classification of unitary representations of  $gl(n)$  (non-archimedean case)*, in Lie Group Representations II, R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman, and J. Rosenberg, eds., Berlin, Heidelberg, 1983, Springer Berlin Heidelberg.
- [4] R. BEUZART-PLESSIS, *Plancherel formula for  $GL_n(F) \backslash GL_n(E)$  and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).
- [5] GEL'FAND, I. M. AND KAZHDAN, D. A., *On the representation of the group  $GL(n, K)$  where  $K$  is a local field*, Functional Analysis and Its Applications, 6 (1972), pp. 315–317.
- [6] G. HENNIART, *Correspondance de Langlands et Fonctions  $L$  des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.
- [7] A. ICHINO, E. LAPID, AND Z. MAO, *On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J., 166 (2017), pp. 1301–1348.
- [8] H. JACQUET AND S. RALLIS, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.
- [9] H. JACQUET AND J. SHALIKA, *Exterior square  $L$ -functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and  $L$ -functions, 2 (1990), pp. 143–226.
- [10] A. C. KABLE, *Asai  $L$ -functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.
- [11] P. K. KEWAT, *The local exterior square  $l$ -function : Holomorphy, non-vanishing and shalika functionals*, Journal of Algebra, 347 (2011), pp. 153 – 172.
- [12] N. MATRINGE, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.
- [13] Y. SAKELLARIDIS AND A. VENKATESH, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, arXiv e-prints, (2012), p. arXiv :1203.0039.
- [14] F. SHAHIDI, *Fourier transforms of intertwining operators and plancherel measures for  $gl(n)$* , American Journal of Mathematics, 106 (1984).
- [15] A. J. SILBERGER AND E.-W. ZINK, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over  $p$ -adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, (1996).
- [16] J.-L. WALDSPURGER, *La formule de Plancherel pour les groupes  $p$ -adique. d'après Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.