

LIMITE SPECTRALE

Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera G_{2n} , SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $\text{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de G . On note Z_G le centre de G et A_G le tore déployé maximal dans Z_G . On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ . On équipe alors A_M par la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur F^\times .

Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant σ . Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de A_M et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M . On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ défini par

$$(1) \quad d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi},$$

où $\gamma^*(0, 1, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(s, 1, \psi)}{s \log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ . Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\text{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \text{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$(2) \quad d\pi = |W(G, M)|^{-1} (\text{Ind}_M^G)_* d\sigma.$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 5.

On note $\text{PG}_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$, pour $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, on définit f_π par

$$(3) \quad f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)),$$

pour tout $g \in \text{PG}_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 0.1. *Il existe une unique mesure $\mu_{\text{PG}_{2n}}$ sur $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ telle que*

$$(4) \quad f(g) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi),$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$ et $g \in \text{PG}_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$(5) \quad d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi,$$

où $\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \log(q_F))^{-n_{\pi, \overline{A_d}}} \gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$, avec $n_{\pi, \overline{A_d}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$ en $s = 0$. Pour $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$ le quotient de $\text{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π .

On peut définir une application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(\text{SO}(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W_F' \rightarrow {}^L\text{SO}(2m+1)$. Or ${}^L\text{SO}(2m+1) = \text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ dans $\text{GL}_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour

$SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \text{Temp}(SO(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$(6) \quad \pi \in T(\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^k \tau_i \times \tilde{\tau}_i \right) \times \bigtimes_{j=1}^l \mu_j$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\text{Temp}(SO(2m_j+1))/\text{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 0.2. *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\text{Temp}(PG_{2n}))$, on a*

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}} = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Pour $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \times \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 5, on a

$$(8) \quad \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π . On écrit la représentation π sous la forme

$$(9) \quad \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \tilde{\tau}_i^{\times n_i} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right),$$

où

- $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \tilde{\tau}_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$. De plus, pour tous $1 \leq i < i' \leq t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \tilde{\tau}_{i'}$.
- $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \tilde{\mu}_j$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq u$. De plus, pour tous $1 \leq j < j' \leq u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \tilde{\nu}_k$) pour tout $1 \leq k \leq v$. De plus, pour tous $1 \leq k < k' \leq v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$(10) \quad M = \left(\prod_{i=1}^t G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparaît dans la définition de π . Alors $\pi = \text{Ind}_M^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M .

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , alors $X^*(M) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u (\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (\mathbb{R})^{q_k} = (\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur \mathbb{R} et \mathcal{A} de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(\mathbb{R})_M / \mathcal{A} \simeq \mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue.

L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :

- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \dots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \dots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \dots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
- $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \dots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, où

$$(11) \quad \pi_\lambda = \left(\prod_{i=1}^t \left(\prod_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left(\prod_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau}_i \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \right) \right) \\ \times \left(\prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left(\prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right).$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\text{PG}_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans \mathcal{A} et $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\text{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation τ . Alors

$$(12) \quad \int_U \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi$$

d'après la relation 5. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ et $d\lambda$ sur \mathcal{A} , cette intégrale est égale à

$$(13) \quad \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}| \gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda.$$

De plus, on a

$$(14) \quad |S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{p_j} \prod_{k=1}^v f_k^{q_k}.$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$(15) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \\ \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \phi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,$$

où $\phi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ , on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 0.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, Ad) = \gamma(s, \pi_1, Ad) \gamma(s, \pi_2, Ad) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2) \gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, Ad) = \gamma(s, \pi, Ad)$,
- $\gamma(s, \pi, Ad)$ a un zéro simple en $s = 0$,
- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_2, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,
- $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ a au plus un zéro simple en $s = 0$ et $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ si et seulement si π est dans l'image de l'application de transfert T ,

pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ et $\pi_1, \pi_2 \in \text{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(16)

$$\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi) = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{1 \leq l \neq l' \leq m_i} \left(\frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{1 \leq l \neq l' \leq n_i} \left(\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)} - \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right) \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left(\frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right) \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left(\frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right) \right) F(\lambda),$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V , il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

(17)

$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1 \leq l \leq m_i \\ 1 \leq l' \leq n_i}} \left(s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right)^{-1} \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l < l' \leq p_j} \left(s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right)^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \leq l' \leq q_k} \left(s + \frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right)^{-1} \right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V + \mathcal{H}$; ici $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par l'application $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s, \dots, s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s, \dots, s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s, \dots, s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire. En reprenant les notations de Beuzart-Plessis, on écrit

(18)

$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{i=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda) F(\lambda) G(2\lambda + s)$ et les lettres P, Q, R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir Beuzart-Plessis, Section 3).

Proposition 0.3 (Beuzart-Plessis, Proposition 3.3.1). *La limite*

$$(19) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{i=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right) d\lambda$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(20)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c}}{|W'|} \\ \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{i=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda';$$

où

- $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$,
- c est le cardinal des $1 \leq k \leq t$ tel que $q_k \equiv 1 \pmod{2}$,
- $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
- W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(\mathrm{PG}_{2n}, \tau)$ et W' est isomorphe à $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$ (défini après 24).

De plus, \mathcal{A}' est le sous-espace de \mathcal{A} défini par les relations :

- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq l \leq n_i$,
- $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq u$ et $1 \leq l \leq \lfloor \frac{p_j}{2} \rfloor$,
- $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq v$ et $1 \leq l \leq \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe \mathcal{A}' de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$(21) \quad \mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}.$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))/\mathrm{Stab}$. D'après la caractérisation 6, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparaît dans 6). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T . Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 0.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))/\mathrm{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$ et les p_j sont pairs. De plus, peut écrire

$$(22) \quad \sigma = \left(\bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \right) \times \sigma_0,$$

où σ_0 est une représentation de $\mathrm{SO}(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$(23) \quad T(\sigma_0) = \bigotimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \pmod{2}}}^v \nu_k.$$

On voit apparaître le sous-groupe de Levi

$$(24) \quad L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \times \mathrm{SO}(2m+1).$$

De plus, $\sigma = \mathrm{Ind}_L^{\mathrm{SO}(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 0.3 est isomorphe à $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$, où $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(\mathrm{SO}(2n+1), L)$ fixant σ .

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à \mathcal{A}' . On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))$, avec

$$(25) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\bigotimes_{i=1}^t \bigotimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes \left| \det \right|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes \left| \det \right|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \otimes \left| \det \right|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned}$$

De plus, d'après 6, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(\mathrm{SO}(2n+1)/\mathrm{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 15), on obtient

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$(27) \quad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 0.3 et la relation 23. D'autre part, d'après la proposition 0.3 et l'équation 15, on a

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P} \\
 & \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda'.
 \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(29) \quad \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \rightarrow 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'.$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$(30) \quad \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda';$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi) \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi) = \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)$ et

$$(31) \quad \frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \text{Ad}, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi).$$

Dans l'expression 30, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 30 est égal au membre de droite 26, d'après l'égalité 27. \square