

## UNFOLDING

On note  $H$  l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $X$  est dans  $M_n$  et  $g$  dans  $G_n$ . On pose  $H_P = H \cap P_{2n}$ . On note  $\theta$  le caractère sur  $H$  défini par  $\psi(\text{Tr}(X))$ .

**Proposition 0.1.** *Soit  $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ , alors on a*

$$(1) \quad \int_H f(s) \theta(s)^{-1} ds = \int_{H_P \cap N_{2n} \setminus H_P} \int_{H \cap N_{2n} \setminus H} W_f(\xi_P, \xi) \theta(\xi)^{-1} \theta(\xi_P)^{-1} d\xi d\xi_P.$$

où  $W_f$  est la fonction de  $G_{2n} \times G_{2n}$  définie par

$$(2) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du$$

pour tous  $g_1, g_2 \in G_{2n}$ .

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ ,  $H_P$  est trivial,  $\sigma$  est trivial et  $H \simeq N_2 Z(G_2)$ . Le membre de droite est alors

$$(3) \quad \int_{F^*} W_f \left( 1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f \left( u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \psi(u)^{-1} du dz.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que  $n > 1$  et que la proposition soit vraie au rang  $n - 1$ .

Le groupe  $H \cap N_{2n} \setminus H$  est isomorphe à l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $Y$  est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille  $n$  et  $h$  dans  $N_n \setminus G_n$ . On note  $H'$  le groupe  $H \cap N_{2n} \setminus H$  au rang  $n - 1$ , c'est l'ensemble des matrices de la forme de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $Y'$  est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille  $n - 1$  et  $h'$  dans  $N_{n-1} \setminus G_{n-1}$ . On note  $\tilde{H}$  l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $\tilde{Y}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{y} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{h}$  est dans  $P_n \setminus G_n$ . On voit le groupe  $H'$  comme sous-groupe de  $H \cap N_{2n} \setminus H$ , en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de  $Y'$  et voyant  $h'$  comme un élément de  $N_n \setminus G_n$ . On en déduit que  $H \cap N_{2n} \setminus H = \tilde{H} H'$ .

De même, on dispose d'une décomposition,  $H_P \cap N_{2n} \setminus H_P = \tilde{H}_P H'_{P'}$ , où  $H'_{P'}$  est le groupe  $H_P \cap N_{2n} \setminus H_P$  au rang  $n - 1$  et  $\tilde{H}_P$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $\tilde{Z}$  est une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{z} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{p}$  est dans  $P_{n-1} U_n \setminus P_n$ .

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$(4) \quad \int_{\tilde{H}_P} \int_{H'_{P'}} \int_{\tilde{H}} \int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_P \xi'_P, \tilde{\xi} \xi') |\det \xi'_P \xi'|^{-1/2} d\xi'_P d\tilde{\xi} d\xi'_P d\tilde{\xi}_P.$$

On a choisit les représentants des matrices  $Y$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $Z$  et  $\tilde{Z}$  de sorte à ce que le caractère  $\theta$  soit trivial.

On fixe  $\tilde{\xi}_p \in \tilde{H}_p$  et  $\tilde{\xi} \in \tilde{H}$ . On pose  $f' = L(\tilde{\xi}_p)R(\tilde{\xi})f$ , on a alors

$$(5) \quad \int_{H'_p} \int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p \xi'_p, \tilde{\xi} \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1/2} d\xi' d\xi'_p = \\ \int_{H'_p} \int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p.$$

De plus,

$$(6) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\xi'^{-1}_p v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du,$$

où  $V$  est l'ensemble des matrices de  $N_{2n}$  avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition  $N_{2n} = N_{2n-2}V$ . On effectue le changement de variable  $v \mapsto \xi'_p v \xi'^{-1}_p$ , ce qui donne

$$(7) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v \xi'^{-1}_p u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du.$$

On note  $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left( v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$  pour  $g \in G_{2n-2}$ ; alors  $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$ . On obtient ainsi l'égalité

$$(8) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$(9) \quad \int_{H'_p} \int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ \int_{H'_p} \int_{H'} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1} v s \tilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds,$$

où l'on a noté  $H_{n-1}$  le groupe  $H$  au rang  $n-1$ .

Il nous faut maintenant intégrer sur  $\tilde{\xi}_p$  et  $\tilde{\xi}$  pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur  $\tilde{\xi}_p$  en le décomposant sous la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ .

On obtient alors

$$(10) \quad \int_{P_{n-1}U_n \setminus P_n} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left( \sigma \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} v s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de  $v$  par  $\sigma^{-1}$  s'écrit sous la forme  $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$  où  $n_1, n_2$  sont dans  $U_n$ , les coefficients de  $y$  sont nuls sauf la dernière colonne et  $t$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Le caractère  $\psi(v)$  devient après conjugaison  $\psi(\text{Tr}(y) + \text{Ts}(t))$ , où  $\text{Ts}(t) = t_{n-1,n}$ . Les changements de variables  $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p} \tilde{Z} \tilde{p}^{-1}$ ,  $n_1 \mapsto \tilde{p} n_1 \tilde{p}^{-1}$ ,

$n_2 \mapsto \tilde{p}n_2\tilde{p}^{-1}$ ,  $t \mapsto \tilde{p}t\tilde{p}^{-1}$  et  $y \mapsto \tilde{p}y\tilde{p}^{-1}$  transforme l'intégrale précédente en

$$(11) \quad \int_{P_{n-1}U_n \setminus P_n} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1}V_\sigma} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1}s\tilde{\xi} \right) \\ \theta(s)^{-1} \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur  $s$  ce qui donne que  $\sigma^{-1}s\sigma$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$  avec  $X$  une matrice de taille  $n$  dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et  $g \in G_{n-1}$  vu comme élément de  $G_n$ . Le changement de variable  $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$  donne

$$(12) \quad \int_{P_{n-1}U_n \setminus P_n} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1}g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_\sigma} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On effectue le changement de variables  $g \mapsto \tilde{p}g$ , notre intégrale devient alors

$$(13) \quad \int_{P_{n-1}U_n \setminus P_n} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_\sigma} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

**Lemme 0.1.** *Soit  $F \in \mathcal{S}(G_n)$ , alors*

$$(14) \quad \int_{P_{n-1}U_n \setminus P_n} \int_{\text{Lie}(U_n)} F(t) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}| dt d\tilde{p} = F(0).$$

*Démonstration.* On a  $P_{n-1}U_n \setminus P_n \simeq F^{n-1} \setminus \{0\}$ . De plus,  $|\det \tilde{p}| d\tilde{p}$  correspond à la mesure additive sur  $F^{n-1}$ . En remarquant que  $\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$  n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans  $F^{n-1}$  correspondant à  $\tilde{p}$  et  $t$ , le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier.  $\square$

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(15) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_{0\sigma}} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z},$$

où  $\sigma^{-1}V_0\sigma$  est le sous-groupe de  $\sigma^{-1}V\sigma$  où  $t = 0$ . Le changement de variable  $n_2 \mapsto n_2 n_1$  donne

$$(16) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z}.$$

De plus, on a

$$(17) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y n_1^{-1} + n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

On effectue les changements de variables  $y \mapsto y n_1$  et  $X \mapsto n_1^{-1} X n_1$ . Ce qui nous permet de combiner les intégrales selon  $y$  et  $X$  en une intégration sur  $M_{n-1} \times F^n$  dont on note encore la variable  $X$ . On explicite l'intégration sur  $\tilde{\xi}$  de la forme  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$  où  $\tilde{Y}$  est une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\tilde{y} \in F^{n-1}$  et  $\tilde{h}$  est dans  $P_n \setminus G_n$ . L'intégrale devient

$$(18) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{P_n \setminus G_n} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1} \times F^n} |\det g|^{-2} \int_{U_n^2} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & X - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g & 0 \\ 0 & n_1 g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Y} d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable  $\tilde{Y} \mapsto (n_1 g)^{-1} \tilde{Y} n_1 g$  et on combine les intégrales sur  $X$  et  $\tilde{Y}$  en une intégration sur  $M_n$  dont on note encore la variable  $X$ . On obtient alors

$$(19) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{P_n \setminus G_n} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & X - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g \tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On effectue ensuite le changement de variables  $X \mapsto X + \tilde{Z} n_2$  ce qui donne

$$(20) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{P_n \setminus G_n} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g \tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(\tilde{Z} n_2)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables  $\tilde{Z}$  et  $n_2$  ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(21) \quad \int_{P_n \setminus G_n} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g \tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dn_1 dX dg d\tilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur  $\mathbf{n}_1, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ ; on trouve bien notre membre de gauche

$$(22) \quad \int_{\mathbf{G}_n} \int_{\mathbf{M}_n} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & \mathbf{g} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(\mathbf{X})) d\mathbf{X} d\mathbf{g}.$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur  $\mathbf{V}$  qui n'est pas absolument convergente avec les intégrales sur  $\tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}', \tilde{\mathbf{H}}_p$  et  $\mathbf{H}'_p$ , qui sont absolument convergente. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents  $\mathbf{H}$  d'une part, d'échanger des intégrales sur les  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}, \mathbf{y}$  qui compose l'intégrale sur  $\mathbf{V}$  d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en  $\mathbf{X}$  sur  $\mathbf{M}_n$  (cf. intégrale 19) et lorsque l'on échange l'intégrale sur  $\mathbf{U}_n$  et  $\mathbf{M}_n$  (cf. intégrale 21). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe et  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{G}_{2n})$  donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 19, à part l'intégration sur  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , on intègre sur un sous-groupe donc l'intégration est aussi absolument convergente.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons  $r(\mathbf{g}) = 1 + \|\mathbf{e}_n \mathbf{g}\|_\infty$ . On a

$$(23) \quad W_{r^N |\det|^{-1} f} \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}' \mathbf{k}' & 0 \\ 0 & \mathbf{a}' \mathbf{k}' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \mathbf{k} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) = \\ (1 + |\mathbf{a}_n|)^N |\det \mathbf{a} \mathbf{a}'|^{-1} W_f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}' \mathbf{k}' & 0 \\ 0 & \mathbf{a}' \mathbf{k}' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \mathbf{k} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right),$$

pour tous  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n, \mathbf{a}' \in \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{k} \in \mathbf{K}_n$  et  $\mathbf{k}' \in \mathbf{K}_{n-1}$ .

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

$$(24) \quad \int_{\tilde{\mathbf{t}}_{n-1}} \int_{\mathbf{A}_{n-1}} \int_{\tilde{\mathbf{t}}_n} \int_{\mathbf{A}_n} (1 + |\mathbf{a}_n|)^N |\det \mathbf{a} \mathbf{a}'| \\ W_{r^N |\det|^{-1} f} \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}' \mathbf{k}' & 0 \\ 0 & \mathbf{a}' \mathbf{k}' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \mathbf{k} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) d\mathbf{a} d\mathbf{X} d\mathbf{a}' d\mathbf{X}'.$$

pour  $N$  suffisamment grand. Or cette dernière intégrale est majorée<sup>1</sup> à une constante près par

$$(25) \quad \int_{\tilde{\mathbf{t}}_{n-1}} \int_{\mathbf{A}_{n-1}} \int_{\tilde{\mathbf{t}}_n} \int_{\mathbf{A}_n} (1 + |\mathbf{a}_n|)^N m(\mathbf{X})^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{\mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{\mathbf{B}_{2n}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b} \mathbf{t}_X) \log(\|\mathbf{b} \mathbf{t}_X\|)^d \\ m(\mathbf{X}')^{-\alpha' N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{\mathbf{a}'_i}{\mathbf{a}'_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{\mathbf{B}_{2n-2}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}' \mathbf{t}_{X'}) \log(\|\mathbf{b}' \mathbf{t}_{X'}\|)^d \delta_{\mathbf{B}_n}^{-2}(\mathbf{a}) \delta_{\mathbf{B}_{n-1}}^{-2}(\mathbf{a}') d\mathbf{a} d\mathbf{X} d\mathbf{a}' d\mathbf{X}',$$

où  $\mathbf{b} = \text{diag}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \dots)$  et  $\mathbf{b}' = \text{diag}(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2, \dots)$ . Cette dernière intégrale est majorée (à une constante près) par le produit des intégrales

$$(26) \quad \int_{\tilde{\mathbf{t}}_n} m(\mathbf{X})^{-\alpha N} \delta_{\mathbf{B}_{2n}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_X) \log(\|\mathbf{t}_X\|)^d d\mathbf{X},$$

$$(27) \quad \int_{\tilde{\mathbf{t}}_{n-1}} m(\mathbf{X}')^{-\alpha' N} \delta_{\mathbf{B}_{2n-2}}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{t}_{X'}) \log(\|\mathbf{t}_{X'}\|)^d d\mathbf{X}',$$

1. <https://github.com/nicolasduhamel/carre-exterieur/blob/master/carre-exterieur.pdf>

$$(28) \quad \int_{\mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{\mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_{i+1}}|)^{-N} (1 + |\mathbf{a}_n|)^{-N} \log(\|\mathbf{b}\|)^d |\det \mathbf{a}| d\mathbf{a},$$

et

$$(29) \quad \int_{\mathcal{A}_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{\mathbf{a}'_i}{\mathbf{a}'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |\mathbf{a}'_{n-1}|)^{-N} \log(\|\mathbf{b}'\|)^d |\det \mathbf{a}'| d\mathbf{a}'.$$

Ces dernières intégrales convergent pour  $N$  assez grand.

□