# FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathsf{GL}_n \times \mathsf{GL}_n \backslash \mathsf{GL}_{2n}$

## 1. Introduction

Soit $F$ un corps $p$-adique, $G$ un groupe réductif déployé sur $F$ et $X = H\backslash G$ une variété sphérique homogène admettant une mesure bi-invariante. Sakellaridis et Venkatesh [13] introduisent un système de racines $\Phi_X$ associé à $X$. Sous certaines conditions sur $\Phi_X$, on peut associer un groupe réductif complexe $\check{G}_X$ que l'on appelle le groupe dual de la variété sphérique $X$. On note alors $G_X$ le groupe réductif déployé sur $F$ dont le groupe dual est $\check{G}_X$. Sakellaridis et Venkatesh introduisent aussi une application $\iota_X : \check{G}_X \times SL_2(\mathbb{C}) \to \check{G}$. Supposons que $\iota_X$ est trivial sur $SL_2(\mathbb{C})$ et la correspondance de Langlands locale pour $G$.

**Conjecture 1.1** (Sakellaridis-Venkatesh [13])**.** *Il existe un isomorphisme $G$-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(X) \simeq \int_{\Phi_{temp}(G_X)}^{\oplus} \mathcal{H}_\phi \, d\phi, \tag{1}$$

*où $\Phi_{temp}(\check{G}_X)$ est l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de $G_X$ modulo $\check{G}_X$-conjugaison, $d\phi$ est dans la classe naturelle des mesures sur $\Phi_{temp}(\check{G}_X)$ et $\mathcal{H}_\phi$ est une somme directe sans multiplicité de représentations dans $\Pi^G(\iota_X \circ \phi)$.*

Supposons de plus la correspondance de Langlands locale sur $G_X$, alors on dispose d'un transfert fonctoriel $T_X : \mathrm{Temp}(G_X)/\sim \;\to \mathrm{Unit}(G)/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence des représentations. Ce transfert associe à une classe d'équivalence de représentations tempérés de $G_X$ un ensemble fini de classes d'équivalence de repésentations unitaires de $G$. On obtient alors la

**Conjecture 1.2** (Sakellaridis-Venkatesh [13])**.** *Il existe un isomorphisme $G$-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(X) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(G_X)/\sim}^{\oplus} \widetilde{T}_X(\sigma) d\mu_{G_X}(\sigma), \tag{2}$$

*où $d\mu_{G_X}$ est la mesure de Plancherel sur $G_X$ et $\widetilde{T}_X(\sigma)$ est une somme directe sans multiplicité de représentations dans $T_X(\sigma)$.*

Spécifions maintenant au cas où $G = GL_{2n}$ et $X = GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$. On a $\check{G}_X = Sp_{2n}$ et $G_X = SO(2n+1)$. L'essentiel de notre travail consiste alors à prouver la

**Conjecture 1.3.** *Il existe un isomorphisme $G$-équivariant de représentations unitaires*

$$L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\mu(\sigma), \tag{3}$$

*Date*: 16 septembre 2019.

*où* $d\mu(\sigma)$ *est la mesure de Plancherel sur* $SO(2n+1)$ *et* $T : \mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\sim \to \mathsf{Temp}(GL_{2n})/\sim$ *est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.*

Soit $F$ un corps de nombres et $\psi$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_F$. On note $H_n$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in GL_n$. L'élément $\sigma_n$ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\theta$ le caractère sur $H_n$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Soit $\pi$ une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et $\phi_1, \phi_2$ des fonctions de Schwartz sur $H_n(\mathbb{A}_F)\backslash GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ qui agissent par le caractère $\theta$ sur $H_n(\mathbb{A}_F)$. On note $\Sigma\phi_i \in C^\infty([GL_{2n}])$, pour $i = 1, 2$, la fonction définie par $\Sigma\phi_i(g) = \sum_{x \in H_n(F)\backslash GL_{2n}(F)} \phi_i(xg)$ pour tout $g \in GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$. D'autre part, pour $\varphi \in \pi$, on introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi) = \int_{[Z_n\backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh, \tag{4}$$

où $Z_n$ est le centre de $GL_n$ et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent une factorisation du produit scalaire $< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{\mathrm{Pet}} = \int_{[H_n]} (\Sigma\phi_1)_\pi(h)(\Sigma\phi_2)_\pi(h)dh$, où $(\Sigma\phi_1)_\pi$ est la projection sur $\pi$ de $\Sigma\phi_i$ et $dh$ est la mesure de Tamagawa de $[H_n]$ [13, section 17.1]. Cette factorisation prend la forme suivante

$$< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{\mathrm{Pet}} = q \prod_v{}' < \phi_{1,v}, \phi_{2,v} >_{\sigma_v}, \tag{5}$$

où $q$ est un rationnel (qui dépend de $\pi$), il est nul si $\pi$ n'est pas le transfert d'une représentation automorphe cuspidale $\sigma$ de $SO(2n+1)(\mathbb{A}_F)$. Les quantités $< \phi_{1,v}, \phi_{2,v} >_{\sigma_v}$ sont des formes linéaires $H_n(F_v)$-invariante. Sakellaridis et Venkatesh conjecturent que l'on devrait avoir l'égalité de ces formes linéaires avec les périodes locales canonique, autrement dit, on devrait avoir

$$< \phi_{1,v}, \phi_{2,v} >_{\sigma_v} = \int_{H_n(F_v)} < \pi_v(h)\phi_{1,v}, \phi_{2,v} > dh. \tag{6}$$

On renvoie à [13, section 17.5] pour la signification du produit $\prod_v'$. En effet, le produit n'est pas absolument convergent et on doit l'interpréter comme l'évaluation d'une fonction $L$.

La factorisation de la période globale $\mathcal{P}_{H_n,\theta}$ comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour $\Phi$ une fonction de Schwartz sur $\mathbb{A}_F^n$ et $W_\varphi$ la fonction de Whittaker associée à $\varphi$, on introduit dans la suite des fonctions zêta globales $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathrm{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{7}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales, pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v), \tag{8}$$

où $S$ est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1,W_v,\Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$, que l'on désignera par $\beta$ dans la section 5, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 5.1.

On commence dans la section 2 par prouver une relation sur les facteurs $\gamma$ du carré extérieur. Les sections 3 et 4 sont des préliminaires pour le théorème 5.1. On fini dans la section 5 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n},\theta)$ et une formule de Plancherel abstraite sur $L^2(GL_n \times GL_n\backslash GL_{2n})$.

1.1. **Notations.** Dans la suite on notera $F$ un corps $p$-adique (sauf dans la section 2 où $F$ peut désigner un corps archimédien) et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. On note $q_F$ le cardinal du corps résiduel de $F$ et $|.|_F$ (ou simplement $|.|$) la valeur absolue sur $F$ normalisé par $|\omega|_F = q_F^{-1}$ où $\omega$ est une uniformisante de $F$. On notera $G_m$ le groupe $GL_m(F)$ et $PG_m = Z_m(F)\backslash GL_m(F)$. De plus, dans la suite on posera $H_n = H_n(F)$ le groupe de ses $F$-points. On note $SO(2m+1)$ la forme déployé du groupe spécial orthogonal sur un espace de dimension $2m+1$. On note $A_n$ le groupe des matrices diagonales inversibles, $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles, $\overline{B}_n$ le sous groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1, $\overline{N}_n = {}^tN_n$ et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $F$. On note $V_n$ le sous-groupe de $M_n$ des matrices triangulaires inférieures strictes. On note $U_n$ le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique. On note $\delta_{B_n}$ le caractère modulaire de $B_n$. On notera par des lettres gothiques les algèbres de Lie correspondantes et pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ désignera l'algèbre enveloppante.

Lorsque $X$ est un espace totalement discontinu, on notera $C_c^\infty(X)$ ou $\mathcal{S}(X)$, l'espace des fonctions localement constante à support compact. Lorsque $G$ est un groupe algébrique réel ou complexe, on note $\mathcal{S}(G)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toute ses dérivées. De plus, lorsque $\mathbb{A}_K$ l'anneau des adèles d'un corps de nombres $K$ et $G$ est un groupe algébrique sur $K$, on note $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ le produit restreint des espaces $\mathcal{S}(G(K_v))$ lorsque $v$ parcours l'ensemble des places de $K$ i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $f = \otimes_v f_v$ avec $f_v \in \mathcal{S}(G(K_v))$ pour tout $v$ et $f_v = \mathbb{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$ sauf pour un nombre fini de $v$, où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de $K_v$.

Pour $G$ un groupe réductif connexe sur $F$ (dans la suite $G$ sera $GL_{2n}$, $SO_{2n+1}$ ou un quotient, d'un sous-groupe de Levi de ces groupes), on note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$ et $\Pi_2(G) \subset \mathrm{Temp}(G)$ le sous-ensemble des représentations de carré intégrable. On note $Z_G$ le centre de $G(F)$ et $A_G$ le tore déployé maximal dans $Z_G$. Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G,M)$ le groupe de Weyl associé au couple $(G,M)$ et $W(G,\sigma)$ le sous-groupe de $W(G,M)$ fixant la classe d'isomorphisme de $\sigma$. On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de $G$ et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où $\varphi_\pi$ est le paramètre de Langlands associé à $\pi$.

Pour $P = MN$ un sous-groupe parabolique de $G$, on note $i_P^G(\sigma)$ l'induction parabolique normalisée lorsque $\sigma$ est une représentation lisse de $M$ : c'est la représentation régulière à droite de $G$ sur l'espace des fonctions localement constantes $f : G \mapsto \sigma$ qui vérifient $f(mng) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}}\sigma(m)f(g)$ pour tous $m \in M$, $n \in N$ et $g \in G$. Lorsque $G = G_n$ et $M = G_{n_1} \times ... \times G_{n_k}$, on note $\pi_1 \times ... \times \pi_k = i_P^G(\pi_1 \boxtimes ... \boxtimes \pi_k)$

pour $\pi_i$ des représentations lisses de $G_{n_i}$. Lorsque $G = SO(2n+1)$ et $M = G_{n_1} \times ... \times G_{n_k} \times SO(2m+1)$, on note $\pi_1 \times ... \times \pi_k \rtimes \sigma_0 = i_P^G(\pi_1 \boxtimes ... \boxtimes \pi_k \boxtimes \sigma_0)$ pour $\pi_i$ des représentations lisses de $G_{n_i}$ et $\sigma_0$ une représentation lisse de $SO(2m+1)$.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \to {}^LSO(2m+1)$, où $W'_F$ est le groupe de Weil-Deligne de $F$. Or ${}^LSO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$ grâce à la correspondance de Langlands locale pour $GL_{2m}$. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ démontrée par Arthur [1], nous permet de définir une application de transfert $T : Temp(SO(2m+1))/Stab \to Temp(G_{2m})$.

Dans les mesures de Plancherel, on verra apparaître des termes $|S_\sigma|$ pour $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ ou $Temp(PG_{2n})$. On n'explicite pas les ensembles $S_\sigma$ et on se contente de donner leur cardinal. Pour $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_l \rtimes \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\sigma|$ est le produit $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ ; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$ et $|S_{\pi_i}| = n_i$.

Pour $\pi \in Temp(G)$ et $r$ une représentation admissible de ${}^LG$, on note $L(s, \pi, r)$ la fonction $L$ associée par la correspondance de Langlands locale et $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ le facteur $\gamma$ associée. Lorsque $r$ est la représentation standard, on l'omettra. De plus, on note $\gamma^*(0, \pi, r, \psi)$ la régularisation du facteur $\gamma$ en 0, défini par la relation

$$\gamma^*(0, \pi, r, \psi) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\gamma(s, \pi, r, \psi)}{(s\log(q_F))^{n_{\pi,r}}}, \tag{9}$$

où $n_{\pi,r}$ est l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ en $s = 0$.

1.2. **Mesures.** On équipe $F$ avec la mesure de Haar $dx$ qui est autoduale par rapport à $\psi$ et $F^\times$ de la mesure de Haar $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$. Pour $m \geqslant 1$, on équipe $F^m$ de la mesure produit $(dx)^m$ et $(F^\times)^m$ de la mesure $(d^\times x)^m$. On équipe les groupes $M_n$, $U_n$, $N_n$, $\overline{N}_N$ des mesures de Haar "produit des coordonnées". Par exemple, on équipe $M_n$ de la mesure $dX = \prod_{i,j=1}^n dX_{i,j}$ où $dX_{i,j}$ est la mesure de Haar sur $F$ que l'on a fixé précédemment. On équipe $G_n$ de la mesure $dg = |\det g|_F^{-n} \prod_{i,j=1}^n dg_{i,j}$ et $P_n$ du produit des mesures sur $U_n$ et $G_{n-1}$. On équipe les groupes compact des mesures de Haar de masse totale égale à 1. On équipe $N_n \backslash G_n$ et $P_n \backslash G_n$ des mesures que l'on obtient par l'identification d'ouvert dense à $\overline{B}_n$ et $F^{n-1} \times F^\times$ respectivement.

Pour $G$ un groupe réductif connexe sur $F$, on fixe un isomorphisme $A_G \simeq (F^\times)^{\dim(A_G)}$ et on équipe $A_G$ de la mesure $(d^\times x)^{\dim(A_G)}$ provenant de l'isomorphisme avec $(F^\times)^{\dim(A_G)}$. Décrivons le choix de la normalisation d'une mesure sur Temp(G). Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\widetilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de $A_M$. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\widetilde{\chi}. \tag{10}$$

La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère $\psi$. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. Soit $P$ un sous groupe parabolique de $G$ de Levi $M$. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $Temp(G)$ localement autour de $\pi \simeq i_P^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1}(i_P^G)_* d\sigma, \tag{11}$$

où $(i_P^G)_* d\sigma$ est la mesure $d\sigma$ tirée en arrière en une mesure sur $\mathsf{Temp}(G)$ par l'application $i_P^G$. Cette mesure ne dépend pas du choix du groupe parabolique. La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 66.

Les mesures de Plancherel sur $G$ sont uniques modulo multiplication par une fonction positive presque partout non nulle, on parlera alors de la classe d'une mesure de Plancherel sur $G$.

1.3. **Résultats.** Soit $F$ un corps $p$-adique. Rappelons que l'on note $H_n(F)$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément $\sigma_n$ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. De plus, $\theta$ est le caractère sur $H_n(F)$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\mathrm{Tr}(X))$. Le résultat principal est le

**Théorème 1.1.** *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(H_n(F)\backslash G_{2n}(F), \theta) \simeq \int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1)(F))/\mathsf{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0,\sigma,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{12}$$

Ce théorème est équivalent à la conjecture 1.3. En effet, il suffit de calculer explicitement la (classe de la) mesure de Plancherel sur $SO(2n+1)$. La mesure de Plancherel d'une groupe réductif $p$-adique $G$ a été calculé par Waldspurger [16] sous la forme

$$d\mu_G(\sigma) = d(\sigma) j(\sigma)^{-1} d\sigma, \tag{13}$$

où $d(\sigma)$ est le degré formel de $\sigma$ et $j(\sigma)$ est un scalaire produit d'opérateurs d'entrelacements (voir [16]). Le degré formel pour $SO(2n+1)$ a été calculé par Ichino-Lapid-Mao [7] et le facteur $j$ pour $SO(2n+1)$ découle de la normalisation des opérateurs d'entrelacements d'Arthur [1]. Finalement, on obtient que la (classe de la) mesure de Plancherel pour $SO(2n+1)$ est

$$d\mu_{SO(2n+1)}(\sigma) = \frac{|\gamma^*(0,\sigma,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{14}$$

De l'isomorphisme $L^2(GL_n(F) \times GL_n(F)\backslash GL_{2n}(F)) \simeq L^2(H_n(F)\backslash G_{2n}(F), \theta)$ $GL_{2n}$-invariant (lemme 5.7), on en déduit le

**Théorème 1.2.** *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(GL_n(F) \times GL_n(F)\backslash GL_{2n}(F)) \simeq \int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1)(F))/\mathsf{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0,\sigma,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{15}$$

## 2. Facteurs $\gamma$ du carré extérieur

Dans cette partie $F$ désigne un corps local de caractéristique 0 et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de $\pi$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$. Matringe a prouvé que, lorsque $F$ est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs $\gamma$, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque $F$ est archimédien et que les facteurs $\gamma$ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi), \tag{16}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

### 2.1. **Préliminaires.**

2.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg \tag{17}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. Le groupe $V_n$ est matrices triangulaires inférieures strictes, on l'équipe de la mesure de Haar $dX = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} dX_{i,j}$. L'élément $\sigma_n$ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

**Proposition 2.1** (Jacquet-Shalika [9])**.** *Il existe* $\eta > 0$ *tel que les intégrales* $J(s, W, \phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > 1 - \eta$.

Kewat [11] montre, lorsque $F$ est $p$-adique, que ce sont des fractions rationnelles en $q^s$ où $q$ est le cardinal du corps résiduel de $F$. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque $F$ est archimédien et d'un résultat de non annulation.

**Proposition 2.2** (Belt [2])**.** *Fixons* $s_0 \in \mathbb{C}$. *Il existe* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *tels que* $J(s, W, \phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en* $s_0$. *Si* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *le point* $s_0$ *peut éventuellement être un pôle. Si* $F$ *est* $p$*-adique, on peut choisir* $W$ *et* $\phi$ *tels que* $J(s, W, \phi)$ *soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [6]) par ces intégrales.

**Proposition 2.3** (Jacquet-Shalika [9])**.** *Supposons que* $F$ *est* $p$*-adique, le conducteur de* $\psi$ *est l'anneau des entiers* $\mathcal{O}_F$ *de* $F$. *Soit* $\pi$ *une représentation non ramifiée de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. *On note* $\phi_0$ *la fonction caractéristique de* $\mathcal{O}_F^n$ *et* $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *l'unique fonction de Whittaker invariante par* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$ *et qui vérifie* $W(1) = 1$. *Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{18}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque $F$ est un corps $p$-adique. Plus précisément, on a la

**Proposition 2.4** (Matringe [12]). *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique et $\pi$ générique. Il existe un monôme $\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en $q^s$ ou $q^{-s}$, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{J(s,W,\phi)}{L(s,\pi,\Lambda^2)} = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}, \tag{19}$$

*où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de $\phi$ par rapport au caractère $\psi$ définie par*

$$\mathcal{F}_\psi(\phi)(y) = \int_{F^n} \phi(x)\psi(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)dx \tag{20}$$

*pour tout $y \in F^n$ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi},\bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$ pour tout $g \in GL_{2n}(F)$, avec $w_n$ la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur $\gamma$ de Jacquet-Shalika par la relation*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = \epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}. \tag{21}$$

2.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s,W,\phi)$.

Soit $K$ un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit $\Pi$ une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{22}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s,W_\varphi,\Phi)$ l'intégrale

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n} W_\varphi\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(\mathrm{Tr}(X))dX\Phi(e_n g)|\det g|^s dg \tag{23}$$

où l'on note $G_n$ le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

**Proposition 2.5** (Jacquet-Shalika [9]). *Les intégrales $J(s,W_\varphi,\Phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s,W_\varphi,\Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s,W_\varphi,\Phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi,\hat{\Phi}), \tag{24}$$

*où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de $\Phi$ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.*

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W_\varphi = \prod_\nu W_\nu$ et $\Phi = \prod_\nu \Phi_\nu$, où $\nu$ décrit les places de $K$, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_\nu J(s, W_\nu, \Phi_\nu). \tag{25}$$

2.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont $F$ est une localisation. On dispose du

**Lemme 2.1** (Kable [10]). *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique. Il existe un corps de nombres $k$ et une place $\nu_0$ telle que $k_{\nu_0} = F$, où $\nu_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$.*

On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$. Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, $P$ un parabolique de Levi $M$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. La classe d'équivalence de l'induction parabolique normalisé $i_P^G(\sigma)$ est indépendante du parabolique $P$ et on la notera $i_M^G(\sigma)$. On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

**Proposition 2.6** (Beuzart-Plessis [4]). *Soient $k$ un corps de nombres, $\nu_0, \nu_1$ deux places distinctes de $k$ avec $\nu_1$ non archimédienne. Soit $U$ un ouvert de $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(k_{\nu_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{\nu_0} \in U$ et $\Pi_\nu$ est non ramifiée pour toute place non archimédienne $\nu \notin \{\nu_0, \nu_1\}$.*

2.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n) f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— Si $F$ est $p$-adique, $f$ est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$, où $\|a\| = max(|a_{i,i}|)$, pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$,

— Si $F$ est archimédien, $f$ est $C^\infty$ et il existe $d > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$, il existe $C > 0$ tel que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$.

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

**Lemme 2.2** (Lemme 2.4.3 [4]). *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$. Il existe $d > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d, \tag{26}$$

*pour tous $b \in A_{2n}(F)$ et $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$.*

**Lemme 2.3** (Lemme 2.4.4 [4]). *Pour tout* $C > 0$*, il existe* $N$ *tel que pour tous* $s$ *vérifiant* $0 < \mathrm{Re}(s) < C$ *et* $d > 0$*, l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da \tag{27}$$

*converge absolument.*

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées $W$, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

**Lemme 2.4.** *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$*.*

*Démonstration.* Soit $G_n = N_n A_n K_n$ la décomposition d'Iwasawa de $G_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

(28)
$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W\left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk \, |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta_{B_n}^{-1}(a) da.$$

On pose $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma_n, \tag{29}$$

où $b = \mathrm{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

(30)
$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W\left( b u_X \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da.$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de $u_X$ et on pose $k_\sigma = \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. Le lemme 2.2 donne alors

$$|W(b t_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b t_X) \log(\|b t_X\|)^d. \tag{31}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les $t_j$. On dispose de la

**Proposition 2.7** (Jacquet-Shalika [9]). *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* $k$ *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* $k$ *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* $j$ *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* $j$ *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque $j$ est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque $j$ est pair. Ce qui nous permet de majorer $(1+|\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N}$ par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-2N}$ lorsque $j$ est impair et par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N}(1+|\frac{a_{j/2}}{a_{j/2+1}}|)^{-N}$ lorsque $j$ est pair.

Ce qui donne

(32)
$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_j+1}|^{-N} \prod_{j=1,j\text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$\leqslant C \prod_{j=1,j\text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d,$$

puisque $\prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_j+1}|^{-N} = |\frac{t_1}{t_{2n}}|^{-N} \leqslant 1$ d'après la proposition 2.7.

De plus, encore d'après la proposition 2.7, on a

$$\prod_{j=1,j\text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \leqslant \prod_{j=1,j\text{ impair}}^{2n-1} \frac{1}{|t_j|^N}. \tag{33}$$

Pour finir, on aura besoin de la

**Proposition 2.8** (Jacquet-Shalika [9]). *Pour* $X \in \mathrm{Lie}(\overline{N}_n)$*, on pose* $\|X\| = \sup_{i,j}|X_{i,j}|$*. On pose* $m(X) = \sqrt{1+\|X\|}$ *lorsque* $F$ *est archimédien et* $m(X) = \sup(1,\|X\|)$ *lorsque* $F$ *est non-archimédien. Il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que pour tout* $X \in \mathrm{Lie}(\overline{N}_n)$*, on ait*

$$\prod_{j=1,j\ \textit{impair}}^{2n-1} |t_j| \geqslant m(X)^\alpha \tag{34}$$

Grâce à cette proposition, on obtient la majoration

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d. \tag{35}$$

D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n a k)| \leqslant C'(1+|a_n|)^{-N}. \tag{36}$$

L'intégrale $J(s, W, \phi)$ est alors majorée (à une constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j} dX \tag{37}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1+|a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a|^{Re(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b)\delta_{B_n}^{-2}(a) da, \tag{38}$$

pour $j$ compris entre 0 et $d$. La première intégrale converge pour $N$ assez grand et la deuxième pour $N$ assez grand lorsque $Re(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n}|a_1|^{3-2n}|a_2|^{5-2n}|a_2|^{7-2n}...|a_n|^{2n-3}|a_n|^{2n-1}, \tag{39}$$
$$= |a_1|^{4-4n}|a_2|^{12-4n}...|a_n|^{4n-4}, \tag{40}$$
$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{41}$$

□

2.2. **Facteurs $\gamma$.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de $\pi$) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs $\gamma$ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur $\gamma^{JS}$ dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{J(s,W,\phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$, on dispose du

**Lemme 2.5.** *Soient* $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi))$*,* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$*. Supposons que* $J(s, W_0, \phi) \neq 0$*. Alors il existe une application continue* $\pi' \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et un voisinage* $V \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ *de* $\pi$ *tels que* $W_0 = W_\pi$ *et l'application* $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ *soit continue.*

*En particulier, si* $F$ *est un corps* $p$*-adique, ce quotient est égal à* $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ *(proposition 2.4) ; donc* $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ *est continue.*

*Démonstration.* On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage $V$ de $\pi$ tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de $\pi'$ sur $V$. $\square$

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ par rapport au caractère additif $\psi$, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à $\psi$. Les caractères additifs de $F$ sont de la forme $\psi_\lambda$ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

**Lemme 2.6.** *Soient* $\lambda \in F^*$*,* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$*,* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$*. Supposons que* $J(s, W, \phi) \neq 0$*. Alors*

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}. \tag{42}$$

*Démonstration.* En effet, la mesure de Haar auto-duale pour $\psi_\lambda$ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour $\psi$ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega_\pi(\lambda)J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{43}$$

On en déduit immédiatement le lemme. $\square$

Les facteurs $\gamma$ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif $\psi$ (voir Henniart [6]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère $\psi$ que l'on a fixé.

**Proposition 2.9.** *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Soit* $\pi$ *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$*. Les intégrales* $J(s, W, \phi)$ *admettent un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*.*

*Il existe une fonction méromorphe* $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{44}$$

*De plus, il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{45}$$

*Démonstration.* Soit $k$ un corps de nombres, on suppose que $k$ a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_\infty \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit des fonctions $W_w \in \mathcal{W}(\pi_w, (\phi_{\mathbb{A}})_w)$ et $\phi_w \in \mathcal{S}(k_w)$ dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où $\Pi$ est ramifiée et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est ramifié. Pour $w \notin S \cup T$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 2.3. Pour $w = S \cup T$, on fait un choix, d'après la proposition 2.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{46}$$

D'après la proposition 2.5, on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S\cup T} J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S\cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{47}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S\cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [6]),

$$L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S\cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{48}$$

Les équations (47) et (48), en utilisant la proposition 2.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$\begin{aligned} &J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w \in \{v\}\cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{49}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour $\Pi_\infty$, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, $\Pi_w$ est non ramifiée, une combinaison de la proposition 2.3 et du lemme 2.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié $\psi_0$ de $F$ tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 2.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)} = 1, \tag{50}$$

d'après la proposition 2.3 et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [6]).

L'équation (49) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s,W_\infty,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{51}$$

On choisit maintenant pour $U$ une base de voisinage contenant $\pi$, en utilisant le lemme 2.5 et la continuité des facteurs $\gamma$ de Shahidi sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de $W$ et de $\phi$, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 2.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s,W,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{52}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, $R$ est une limite de fractions rationnelles en $q_v^s$ (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc $R$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en une place $v'$ de caractéristique résiduelle distincte de celle de $v$, on voit que $R$ est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (52) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{53}$$

La fonction $R$ est donc une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$ et $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$ avec $q_v$ et $qv'$ premier entre eux ; ce qui est impossible sauf si $R$ est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{54}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{55}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = \frac{J(s,W,\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi})}. \tag{56}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi}) = 1. \tag{57}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 55, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s},\bar{\pi},\Lambda^2,\bar{\psi}). \tag{58}$$

Comme $\pi$ est tempérée, $\pi$ est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2 = 1. \tag{59}$$

D'autre part, le facteur $\gamma$ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\psi)|^2 = 1$ ; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. □

**Proposition 2.10.** *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique. Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.*

*Le facteur $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ est défini par la proposition 2.4. Alors il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{60}$$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.1, il existe un corps de nombres $k$ et une place $v_0$ telle que $k_{v_0} = F$, où $v_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$. Soit $v$ une place non archimédiennes et de caractéristique résiduelle distincte de celle de $v_0$. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 2.2, des fonctions de Whittaker $W_w$ et des fonctions de Schwartz $\phi_w$ telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 2.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note $S_\infty$ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 2.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2), \end{aligned} \tag{61}$$

où $L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient (voir Henniart [6])

$$L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} \gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{62}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 2.4 et 2.9, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty \in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_{v_0},\Lambda^2,\psi)} = 1. \tag{63}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.9. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en $s=\frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. □

## 3. Limite spectrale

Dans cette partie $F$ est un corps $p$-adique. On renvoie à la section 1.2 pour la normalisation des mesures sur $\mathrm{Temp}(G)$, pour un groupe $G$ réductif connexe sur $F$.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit $f_\pi$ par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{64}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

**Proposition 3.1** (Harish-Chandra [16], Shahidi [14], Silberger-Zink [15])**.** *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g)d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{65}$$

*pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :*

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|}d\pi, \tag{66}$$

*où $\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q_F)^{-n_{\pi,\overline{Ad}}}\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$, avec $n_{\pi,\overline{Ad}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$ en $s=0$. Pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times \ldots \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.*

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de $G$ et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où $\varphi_\pi$ est le paramètre de Langlands associé à $\pi$.

Rappelons (section 1.1) que la correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \mathrm{Temp}(SO(2m+1))/\mathrm{Stab} \to \mathrm{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{k} \tau_i \times \widetilde{\tau_i}\right) \times \bigtimes_{j=1}^{l} \mu_i \tag{67}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\mathrm{Temp}(SO(2m_j+1))/\mathrm{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

**Proposition 3.2.** *Soit $\phi$ une fonction à support compact sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on a*

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}} = \\ &\int_{\mathrm{Temp}(SO_{2n+1})/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned} \tag{68}$$

*Pour $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \ldots \times \pi_l \rtimes \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}|\ldots|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ ; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \ldots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.*

*Démonstration.* D'après la relation 66, on a
(69)
$$\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que $\phi$ est à support dans un voisinage $U$ suffisamment petit de $\pi$. On écrit la représentation $\pi$ sous la forme

$$\pi = \left( \bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i} \right) \times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left( \bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times q_k} \right), \tag{70}$$

où
— $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
— $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
— $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ ( et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$ ) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

On note $M = \left( \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$. Alors $\pi = \mathrm{Ind}_M^{\mathsf{PG}_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation $\tau$ de $M$.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$. On note $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^{t} (i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} (i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} (i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient sur $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :
— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), ..., x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), ..., \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), ..., y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), ..., z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On a un isomorphisme $\mathcal{A} \simeq X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ donné par $\lambda \mapsto |\det|^\lambda$, où l'on note $|\det|^\lambda = \prod_{i=1}^{t} \prod_{l=1}^{m_i} |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \times \prod_{j=1}^{u} \prod_{l=1}^{p_j} |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \times \prod_{k=1}^{v} \prod_{l=1}^{q_k} |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}$.
On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$, où

$$\begin{aligned} \pi_\lambda = &\left( \bigtimes_{i=1}^{t} \left( \bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \right) \right) \\ &\times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left( \bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right). \end{aligned} \tag{71}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)$, où $V$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(\mathsf{PG}_{2n},\tau)$ est le sous-groupe de $W(\mathsf{PG}_{2n},M)$ fixant la représentation $\tau$. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} d\pi \tag{72}$$

d'après la relation 66. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_V \phi(\pi_\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda. \tag{73}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i}\prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j}\prod_{k=1}^{v} f_k^{q_k}. \tag{74}$$

On notera ce produit $P$ dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \\ &\qquad \frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}}\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda,\end{aligned} \tag{75}$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon. La fonction $\varphi$ est $W(PG_{2n},\tau)$-invariante à support compact.

Décrivons maintenant la forme des facteurs $\gamma$, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

**Propriété 3.1.** *Les facteurs $\gamma$ vérifient les propriétés suivantes :*
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,Ad) = \gamma(s,\pi_1,Ad)\gamma(s,\pi_2,Ad)\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,Ad) = \gamma(s,\pi,Ad)$,
— $\gamma(s,\pi,Ad)$ *a un zéro simple en* $s=0$,
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,\Lambda^2) = \gamma(s+2x,\pi,\Lambda^2)$,
— $\gamma(s,\pi,\Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s=0$ *et* $\gamma(0,\pi,\Lambda^2)=0$ *si et seulement si* $\pi$ *est dans l'image de l'application de transfert* $T$,

*pour tous* $x\in\mathbb{C}$, $\pi\in\Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1,\pi_2\in\mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = &\left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}\left(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}\left(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)\right)\\ &\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}\left(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}\left(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)\right)F(\lambda),\end{aligned} \tag{76}$$

où $F$ est une fonction $W(PG_{2n},\tau)$-invariante $C^\infty$ qui ne s'annule pas sur le voisinage $V$ (quitte à rétrécir $V$), il s'agit d'un produit de facteur $\gamma$ ne s'annulant pas sur $V$.

De même, on a

(77)

$$\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\ 1\leqslant l'\leqslant n_i}}(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})^{-1}\right)$$

$$\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l<l'\leqslant p_j}(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)+z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})^{-1}\right)G(2\lambda+s),$$

où la fonction $G$ est une fonction $W(PG_{2n},\tau)$-invariante méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $\frac{1}{2}V+\mathcal{H}$ (quitte à rétrécir $V$) ; ici $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s)=d_i(s,...,s)$, $y_j(\lambda_s)=e_j(s,...,s)$ et $z_k(\lambda_s)=f_k(s,...,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [4], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [4], on écrit

(78)

$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} = \varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda)=\varphi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda+s)$. De plus, $\varphi_s$ est $W(PG_{2n},\tau)$-invariante à support compact. Les lettres $P,Q,R$ désignent des fractions rationnelles qui apparaissent dans le quotient des facteurs $\gamma$ (voir [4, section 3]).

**Proposition 3.3** (Beuzart-Plessis [4])**.** *La limite*

$$(79)\quad \lim_{s\to0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda$$

*est nulle si $m_i\neq n_i$ pour un certain $i$ ou si l'un des $p_j$ est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à*

(80)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$

$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

*où*

- — $D=\prod_{i=1}^{t}d_i^{n_i}\prod_{j=1}^{u}e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v}f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,
- — *$c$ est le cardinal des $1\leqslant k\leqslant t$ tel que $q_k\equiv1 \mod 2$,*
- — $N=\sum_{i=1}^{t}n_i+\sum_{j=1}^{u}\frac{p_j}{2}+\sum_{k=1}^{v}\lceil\frac{q_k}{2}\rceil$,
- — *$W$ et $W'$ sont définis de manière intrinsèque dans 3.3, $W$ est isomorphe à $W(PG_{2n},\tau)$ et $W'$ est isomorphe à $W(SO(2n+1),\sigma)$ (defini plus loin).*

*De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :*

- — $x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant i\leqslant t$ *et* $1\leqslant l\leqslant n_i$,
- — $y_{j,l}(\lambda)+y_{j,p_j+1-l}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant j\leqslant u$ *et* $1\leqslant l\leqslant\frac{p_j}{2}$,
- — $z_{k,l}(\lambda)+z_{k,q_k+1-l}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant k\leqslant v$ *et* $1\leqslant l\leqslant\lceil\frac{q_k}{2}\rceil$.

*On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme*

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^{t} (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^{u} (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{v} (i\mathbb{R})^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \tag{81}$$

*qui envoie* $(x_i(\lambda), y_j(\lambda), z_k(\lambda))$ *sur* $((x_{i,1}, ..., x_{i,n_i}), (y_{j,1}, ..., y_{j,\frac{p_j}{2}}), (z_{k,1}, ..., z_{k,\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}))$.

Supposons tout d'abord que $\pi$ n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$. D'après la caractérisation 67, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou $p_j$ est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 67). Alors en prenant $U$ suffisamment petit, on peut supposer que $U$ ne rencontre pas l'image de l'application de transfert $T$. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 3.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les $p_j$ sont pairs. De plus, on peut écrire

$$\sigma = \left( \bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times n_i} \times \bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \right) \rtimes \sigma_0, \tag{82}$$

où $\sigma_0$ est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain $m$ tel que

$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{v} \nu_k. \tag{83}$$

On note $L = \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{v} G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times SO(2m+1)$. On a $\sigma = \mathrm{Ind}_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe $W'$ de la proposition 3.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant la classe d'isomorphisme de $\sigma$.

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes i\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = {} & \left( \bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left( \bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \rtimes \sigma_0. \end{aligned} \tag{84}$$

De plus, d'après 67, pour $\lambda \in V$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/\mathrm{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$ ; quitte à rétrécir $V$. Dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction $\varphi$ (équation 75), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ & = \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ & = \frac{1}{|W'|} \left( \frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'. \end{aligned} \tag{85}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} d_i{}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j{}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{v} f_k{}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D}, \tag{86}$$

d'après les notations de la proposition 3.3 et la relation 83. D'autre part, d'après la proposition 3.3 et l'équation 75, on a

(87)

$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi) \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0,1,\psi) \log(q_F)}{|W'|P}$$

$$\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s\to 0^+} \varphi_s(\lambda')s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right) \prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s\to 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)} d\lambda'. \tag{88}$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre $N$ en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\, 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda'; \tag{89}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0,1,\psi)\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{Ad},\psi) = \gamma^*(0,\pi_{\lambda'},Ad,\psi)$ et

$$\frac{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),Ad,\psi)}{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\Lambda^2,\psi)} = \gamma(s,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi). \tag{90}$$

Dans l'expression 89, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$ ; on en déduit que 89 est égal au membre de droite 85, d'après l'égalité 86. □

## 4. Une formule d'inversion de Fourier

On note $H_n$ le sous-groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $X$ est dans $M_n$ et $g$ dans $G_n$. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note $\theta$ le caractère sur $H_n$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(Tr(X))$.

On équipe $H_n$, $H_n \cap N_{2n}\backslash H_n$ et $H_n^P \cap N_{2n}\backslash H_n^P$ des mesures suivantes :

— $\int_{H_n} f(s)ds = \int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$,

— $\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} f(\xi)d\xi = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ invariante à gauche par $N_{2n}$,

— $\int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P} f(\xi)d\xi = \int_{N_n\backslash P_n}\int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dXdg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ invariante à gauche par $N_{2n}$.

**Proposition 4.1.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{91}$$

*où* $W_f$ *est la fonction de* $G_{2n} \times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du \tag{92}$$

*pour tous* $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, $\sigma_n$ est trivial, $H_1 = N_2 Z(G_2)$ et $H_1^P = N_2$ donc $H_1^P \cap N_2 \backslash H_1^P$ est trivial. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f\left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) \psi(u)^{-1} du dz. \tag{93}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

Le sous groupe $\Omega_n$ des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $Y$ est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille $n$ et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte $\Omega_{n-1}$ dans $\Omega_n$, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de $Y$ et voyant $h$ comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{y}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_n) \in F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n$ où $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1} \widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_n^P$, où $\Omega_n^P$ est l'ensemble des matrices de $\Omega_n$ avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_n^P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{z} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{p}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ et $\widetilde{l}_{n-1} \in F^*$. De plus, $\Omega_n^P$ s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n^P$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{z}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \widetilde{\Omega}_n^P$ où $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$.

On équipe $\Omega_n$, $\widetilde{\Omega}_n$, $\Omega_n^P$, $\widetilde{\Omega}_n^P$ des mesures suivantes :

— $\int_{\Omega_n} f(\xi) d\xi = \int_{\overline{B}_n} \int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) dY dh, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}),$

— $\int_{\widetilde{\Omega}_n} f(\widetilde{\xi}) d\widetilde{\xi} = \int_{F_{n-1} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) d\widetilde{Y} d\widetilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}),$

— $\int_{\Omega_n^P} f(\xi_p)d\xi_p = \int_{\overline{B}_n\cap P_n}\int_{V_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) dZdp, \quad f\in \mathcal{S}(G_{2n}),$

— $\int_{\widetilde{\Omega}_n^P} f(\widetilde{\xi}_p)d\widetilde{\xi}_p = \int_{F_{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) d\widetilde{Y}d\widetilde{h}, \quad f\in \mathcal{S}(G_{2n}).$

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n^P}\int_{\Omega_{n-1}^P}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p'\widetilde{\xi}_p, \xi'\widetilde{\xi})|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\widetilde{\xi}d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{94}$$

On a choisi les représentants des matrices $Y$ et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère $\theta$ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi}\in\widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p)R(\widetilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{n-1}^P}\int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p'\widetilde{\xi}_p, \xi'\widetilde{\xi})|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P}\int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi')|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\xi_p'.\end{aligned}\tag{95}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}}\int_V f'({\xi'}_p^{-1}\nu u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du,\tag{96}$$

où $V$ est le sous-groupe des matrices de $N_{2n}$ avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p\nu{\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'|^2\int_{N_{2n-2}}\int_V f'(\nu{\xi'}_p^{-1}u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du.\tag{97}$$

On note $\widetilde{f}'(g) = |\det g|^{-1}\int_V f'\left(\nu\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2\end{pmatrix}\right)\psi(\nu)^{-1}d\nu$ pour $g\in G_{2n-2}$ ; alors $\widetilde{f}'\in\mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'\xi'|W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi').\tag{98}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{n-1}^P}\int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi')|\det \xi_p'\xi'|^{-1}d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P}\int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f}'}(\xi_p', \xi')d\xi' d\xi_p' = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f}'(s)\theta(s)^{-1}ds = \\ &\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1}\nu s\widetilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds.\end{aligned}\tag{99}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}$. On rappelle que l'on identifie $F^{n-1}\times F^{n-2}\times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n^P$ à travers l'isomorphisme $(\widetilde{z}, \widetilde{l}, \widetilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1}\times F^{n-2}\times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\in\widetilde{\Omega}_n^P$ où $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{z} & 0\end{pmatrix}$

et $\widetilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$. On obtient alors

(100)
$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_V f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma_n^{-1} v s\widetilde{\xi}\right)\theta(s)^{-1}\psi(v)^{-1} dv ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de $v$ par $\sigma_n^{-1}$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où $n_1, n_2$ sont dans $U_n$, les coefficients de $y$ sont nuls sauf la dernière colonne et $t$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(v)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p}n_1\widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p}n_2\widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p}y\widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(101)
$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix}\sigma_n^{-1} s\widetilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur $s$ ce qui donne que $\sigma_n^{-1}s\sigma_n$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec $X$ une matrice de taille $n$ dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de $G_n$. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det \widetilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} \\
&f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.
\end{aligned}\tag{102}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} \\
&f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.
\end{aligned}\tag{103}$$

**Lemme 4.1.** *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| dt d\widetilde{p} = F(0).\tag{104}$$

*On rappelle que l'on identifie* $F^{n-2} \times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

*Démonstration.* La mesure $|\det \widetilde{p}| d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur $F^{n-1}$. En remarquant que $Ts(\widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans $F^{n-1}$ correspondant à $\widetilde{p}$ et $t$, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(105)
$$\int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1} V_0 \sigma_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \widetilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z},$$

où $\sigma_n^{-1} V_0 \sigma_n$ est le sous-groupe de $\sigma_n^{-1} V \sigma_n$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h} \in F^{n-1} \times F^*$ que l'on identifie avec un élément de $G_n$ dont seule la dernière ligne est non triviale. Ce qui nous permet d'identifier $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$ et $\widetilde{\Omega}_n$. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1} V_0 \sigma_n}$$
$$f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \tag{106}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dX dg d\widetilde{h} d\widetilde{Y} d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(107)
$$\begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_1^{-1} y + X + g\widetilde{Y} g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

On effectue les changement de variable $y \mapsto n_1 y$ et $\widetilde{Y} \mapsto g^{-1} \widetilde{Y} g$ et on combine les intégrales sur $X$, $y$ et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur $M_n$ dont on note encore la variable $X$. On obtient alors

(108)
$$\int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\widetilde{h} & 0 \\ 0 & g\widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) d(n_1, n_2) dX dg d\widetilde{h} d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 X n_1^{-1} - \widetilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Le changement de variables $X \mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(110)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et $n_2$ ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n} f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \tag{111}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\widetilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur $n_1$, $g$, $\widetilde{h}$ ; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{112}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur $V$ avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, $H_{n-1}$, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $H^P_{n-1}$ qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents $H$ d'une part, d'échanger des intégrales sur les $n_1$, $n_2$, $t$, $y$ qui compose l'intégrale sur $V$ d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en $X$ sur $M_n$ (cf. intégrale 108) et lorsque l'on échange l'intégrale sur $U_n$ et $M_n$ (cf. intégrale 111). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 108, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_{2n}g\|_\infty$. On a

(113)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det a(a')^{-1}|^{-1}W_f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $X, X' \in V_n$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(114)
$$\int_{V_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{n}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det a(a')^{-1}|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}dadXda'dX'$$

pour $N$ suffisamment grand. On note $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ et $u_{X'} = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$.
On a alors

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b\sigma_n k \sigma_n^{-1} u_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{115}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$ et

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b'\sigma_n k' \sigma_n^{-1} u_{(a'k')^{-1}X'(a'k')}, \tag{116}$$

où $b' = diag(a'_1, a'_1, a'_2, a'_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X'(a'k')^{-1}$. D'après les lemme 2.2 et la preuve du lemme 2.4, il existe $d > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 1$, l'intégrale 114 est alors majorée à une constante près par

(117)

$$\int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \int_{V_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det a(a')^{-1}| m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'}) \log(\|b't_{X'}\|)^d \delta_{B_n}^{-2}(a) \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Les quantités $m(X)$, $m(X')$, $\alpha$ et $\alpha'$ sont celles que l'on obtient par l'application de la proposition 2.8. On rappelle que $m(X) = sup(1, \|X\|)$, où $\|X\| = sup_{i,j}|X_{i,j}|$. On a $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b')\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') = |\det a'|^2$. On en déduit que cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX, \tag{118}$$

$$\int_{V_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX', \tag{119}$$

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da, \tag{120}$$

et

$$\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da', \tag{121}$$

pour $j, j'$ compris entre 0 et $d$. Ces dernières intégrales convergent pour $N$ assez grand, voir [9, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 2.3 pour les deux dernières.

□

## 5. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{122}$$

**Lemme 5.1.** *L'intégrale 122 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue. De plus, la restriction de* $\beta$ *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est non nulle.*

*Démonstration.* D'après la décomposition d'Iwasawa, $P_n = N_n A_{n-1} K_n^P$, où $K_n^P$ est un sous-groupe compact, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{V_n}\int_{A_{n-1}} \left| W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right)\right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{123}$$

pour tout $k \in K_n^P$. D'après la preuve du lemme 2.4, on obtient la majoration suivante :

$$\int_{V_n}\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})^{-N} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{124}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour $N$ suffisamment grand par le même argument que dans la preuve du lemme 2.4.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi,\psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n},\psi)$ [5]. En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}^P$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors $\beta$ est non nulle sur cette fonction. □

**Proposition 5.1.** *Pour* $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, *la restriction de* $\beta$ *à* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$.

La preuve de cette proposition se fera après quelques préliminaires. On commence par prouver un lemme et introduire des notations.

**Lemme 5.2.** *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on a*

$$\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) = \phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{125}$$

*Démonstration.* On a

$$\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) = \int_{A_{n-1}}\int_{K_n}\int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dzdk|\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1}da \tag{126}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_{F^*}\widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx, \tag{127}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0+}\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x)dx = \phi(0). \tag{128}$$

On en déduit, aussi par convergence dominée, que $\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)$ est égal a

$$\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{V_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da, \tag{129}$$

ce qui nous permet de conclure. □

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1}du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [4], que l'on note

$$f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^{*} f(u)\psi(u)^{-1}du. \tag{130}$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir $W_f$ par la formule

$$W_f(g_1,g_2) = \int_{N_{2n}}^{*} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du, \tag{131}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

**Proposition 5.2** (Beuzart-Plessis [4])**.** *L'application linéaire*

$$f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto (\pi \mapsto W_{f,\pi}) \in \mathcal{S}(\mathrm{Temp}(G_{2n}, C^w(N_{2n} \times N_{2n}\backslash G_{2n} \times G_{2n}, \psi \otimes \psi^{-1})$$

*est continue.*

**Proposition 5.3** (Beuzart-Plessis [4])**.** *Pour tout* $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$*. On pose* $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$*, alors* $\widetilde{f} \in PG_{2n}$*. On a* $\widetilde{f}_\pi = f_\pi$ *pour tout* $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$*. De plus,*

$$W_{\widetilde{f}} = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} W_{f,\pi}d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \tag{132}$$

**Lemme 5.3.** *Soit* $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$*, alors il existe* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *tel que* $W_{f,\pi}(1,.) = W$*.*

*Démonstration.* On a

$$W_{f,\pi}(1,.) = \int_{N_{2n}} f_\pi(u.)\psi(u)^{-1}du. \tag{133}$$

D'autre part, soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ alors $f$ est bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact $K$. On a une décomposition $V_\pi = V_\pi^K \oplus V_\pi(K)$, où $V_\pi(K)$ est l'espace des vecteurs $K$-invariants. Comme $\pi$ est admissible, $V_\pi^K$ est de dimension finie. On note $\mathcal{B}_\pi^K$ une base de cet espace. Alors pour tout $g \in G_{2n}$, on a $f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)) = \sum_{v\in\mathcal{B}_\pi^K} < \pi(g)\pi(f^\vee)v, v^\vee >$, où $(v^\vee)_{v\in\mathcal{B}_\pi^K}$ est la base duale de $\mathcal{B}_\pi^K$. On en déduit que $f_\pi$ est une somme (finie) de coefficient matriciel.

On note $\mathrm{Coeff}^K = \{g \mapsto < \pi(g)v, \widetilde{v} >, v \in V_\pi, \widetilde{v} \in V_{\widetilde{\pi}}\}$. Alors toute somme finie de $\mathrm{Coeff}^K$ est de la forme $f_\pi$ avec $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K)$. En effet, $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K) \mapsto \pi(f^\vee) \in \mathrm{End}(V_\pi^K)$ est surjective, où l'on a noté $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ le sous espace de $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ des fonctions bi-invariante par $K$. La surjectivité est une conséquence du lemme de Burnside et du fait que $V_\pi^K$ est un $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$-module irréductible de dimension finie. L'isomorphe de représentation nous donne $\mathrm{End}(V_\pi^K) \simeq \pi^K \boxtimes \widetilde{\pi}^K$ le résultat.

Pour montrer le lemme, il nous faut montrer qu'il existe un coefficient matriciel $c =< \pi(.)v, \widetilde{v} >$ tel que $W = \int_{N_{2n}} c(u.)\psi(u)^{-1}du$. Or

$$v \mapsto \int_{N_{2n}} c(u.)\psi(u)^{-1}du = \int_{N_{2n}} < \pi(u.)v, \widetilde{v} > \psi(u)^{-1}du \tag{134}$$

est une fonctionnelle de Whittaker. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir $\widetilde{\nu}$ pour que cette fonctionnelle soit non nulle. C'est le contenu de [13, Théorème 6.4.1]. $\square$

**Corollaire 5.1** (de la limite spectrale). *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g \in G_{2n}$, *alors*

$$\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta(W_{f,T(\sigma)}(g, .)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{135}$$

*Démonstration.* On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant $f$ par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi. \tag{136}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. D'après le lemme 5.2, la proposition 5.3 et la continuité de $\pi \mapsto J(s, W_{f,\pi}(1, .), \phi)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\widetilde{f}}(1, .), \phi) \\ &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{Temp(PG_{2n})} J(s, W_{f,\pi}(1, .), \phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned} \tag{137}$$

D'après l'équation fonctionnelle 2.4, on a

$$\begin{aligned} &\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ &\lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{Temp(PG_{2n})} J(1 - s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,\pi}(1, .)}, \widehat{\phi}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned} \tag{138}$$

La proposition 3.2, nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} &\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ &\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned} \tag{139}$$

En remplaçant $f$ par $R(h)f$, $h \in H_n$, dans le membre de droite ; cela revient à multiplier par $\theta(h)$. On en déduit la même relation pour le membre de droite. Ce qui signifie que

$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, R(\xi)\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi}) - \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0, \tag{140}$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [4, Lemme 5.7.2] et la continuité de $\sigma \mapsto J(1, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi})$, on en déduit que $J(1, R(\xi)\rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi}) = \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi})$ pour tout $\xi \in H_n$ et donc que $J(1, \rho(w_{n,n})\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1, .), \widehat{\phi})$

est $(H_n, \theta)$-invariant (dans le sens où le changement $f$ par $R(\xi)f$ revient à multiplier par $\theta(\xi)$).

**Lemme 5.4.** *Soit* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W), \tag{141}$$

*pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

*Démonstration.* En effet, soit $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, on a

$$\begin{aligned} J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg. \end{aligned} \tag{142}$$

D'après le lemme 5.3, on choisit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $W_{f,\pi}(1, .) = \rho(w_{n,n}^{-1})W$. D'après ce que l'on vient de dire précédemment, on en déduit que $J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$ vérifie la relation $J(1, R(\xi)\widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \theta(\xi) J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$, pour tout $\xi \in H_n$.

Comme $\widehat{\phi}(e_n g)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left( \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX dg \end{aligned} \tag{143}$$

est $(H_n, \theta)$-invariant en tant que fonction de $\widetilde{W}$. D'après l'isomorphisme $G_{2n}$-équivariant $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto \widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$, $\beta$ restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est $(H_n, \theta)$-invariant, ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

**Remarque 5.1.** *Cette preuve que* $\beta$ *restreint à* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est* $(H_n, \theta)$*-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que* $\mathrm{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ *qui est de dimension au plus* 1. *En utilisant le fait que* $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ *donc* $\pi$ *est* $(H_n, \theta)$*-distinguée, on a* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. *Ce dernier est un sous-espace de* $\mathrm{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. *On en déduirait alors que la restriction de* $\beta$ *à* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, *qui est bien* $H_n \cap P_{2n}$*-invariant, est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$. *Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension* 1.

**Proposition 5.4.** *Soit* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, *on pose* $\pi = T(\sigma)$ *le transfert de* $\sigma$ *dans* $\mathrm{Temp}(G_{2n})$. *La forme linéaire* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. *On identifie* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $G_{2n}$*-équivariant* $W \mapsto \widetilde{W}$. *Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma) \beta(W), \tag{144}$$

*pour tout* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

*Démonstration.* En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [8]. De plus, $\pi$ est le transfert de $\sigma$ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$. Pour finir, en appliquant l'équation 144, pour $\pi$ et $\widetilde{\pi}$, on obtient $\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\pi) c_\beta(\widetilde{\pi}) \beta(\widetilde{W})$. Comme $\beta$ est non nulle (lemme 5.1), on en déduit que $c_\beta(\widetilde{\pi}) c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. $\square$

Finissons la preuve du lemme 5.4, on remarque que l'on a

(145)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg$$
$$= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{V_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp \\ = \beta\left(R\left(\sigma_n \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\right)\widetilde{W}\right) \\ = \beta(\widetilde{W}),\end{aligned} \tag{146}$$

puisque $\beta$ est $(H_n, \theta)$-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{P_n\backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x)dx \\ = \phi(0).\end{aligned} \tag{147}$$

On conclut grâce à la proposition 5.4. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 5.4 dans la relation 139. □

5.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$ munie de la mesure quotient. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$\varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1}dh, \tag{148}$$

pour tout $y \in G_{2n}$.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh, \tag{149}$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$.

En effet,

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n}\int_{H_n\times H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(h_2y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1dh_2dy. \tag{150}$$

L'intégrale est absolument convergente. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1h_2$ et on combine les intégrales selon $y$ et $h_2$ en une intégrale sur $G_{2n}$. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}}\int_{H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1}dh_1dy. \tag{151}$$

On pose

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = (f_1, f_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p\cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{152}$$

pour tout $\pi \in \mathsf{T}(\mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1)))$.

On note $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$ le quotient de $\mathcal{S}(Y_n, \theta)$ par l'intersection des noyaux de toutes les applications $\mathcal{S}(Y_n, \theta) \to \pi$ linéaires $G_{2n}$-équivariante.

**Proposition 5.5.** *Supposons* $\pi = \mathsf{T}(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))$. *La forme bilinéaire* $(.,.)_{Y_n,\pi}$ *sur* $\mathcal{S}(G_{2n}))$ *est une forme hermitienne continue semi-definie positive qui se factorise par* $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$.

*Démonstration.* Commençons par le

**Lemme 5.5.** *Soit* $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$. *On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *:*

$$(W, W')^{Wh} = \int_{N_{2n}\backslash P_{2n}} W(p)\overline{W'(p)}dp, \tag{153}$$

*pour tous* $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

*L'opérateur* $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \to \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}. \tag{154}$$

*Démonstration.* Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est $P_{2n}$-invariant, d'après Bernstein [3], il est aussi $G_{2n}$-invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned} \pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{Wh} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (W, \pi(\bar{f})W')^{Wh} W'. \end{aligned} \tag{155}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} W' \otimes \overline{\pi}(f)\overline{W'}. \tag{156}$$

La $G_{2n}$-invariance de $(.,.)^{Wh}$ nous donne que $W' \otimes \overline{\pi}(f_1 * f_2^*)\overline{W'} = \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}$.

On obtient alors

$$\pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}. \tag{157}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} W_{f,\pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int^*_{N_{2n}} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1}du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1), \end{aligned} \tag{158}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [4, Prop 2.14.3]. □

Le lemme 5.5 donne la relation

$$(f_1, f_2)_{Y_n,\mathsf{T}(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\mathsf{T}(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(\mathsf{T}(\sigma)(f_2)W')}\beta(\mathsf{T}(\sigma)(f_1)W') \tag{159}$$

qui est indépendant du choix de $f_1, f_2$ puisque la restriction de $\beta$ à $\mathcal{W}(T(\sigma), \psi)$ est $(H_n, \theta)$-invariante, d'après la proposition 5.1. De plus, $(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)}$ dépend uniquement de $T(\sigma)(f_1)$ et $T(\sigma)(f_2)$. On en déduit que $(.,.)_{Y_n,\pi}$ se factorise par $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_{T(\sigma)}$.

On remarque que

$$(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = (\beta \otimes \beta)(W_{f_1 * f_2^*, \pi}), \tag{160}$$

ce qui nous permet de déduire, d'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, que $(.,.)_{Y_n, T(\sigma)}$ est continue. □

**Théorème 5.1.** *Soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$. *On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{161}$$

*Démonstration.* D'après 4.1 et 5.1, on a

$$\begin{aligned} \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \\ \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p. \end{aligned} \tag{162}$$

**Lemme 5.6.** *La fonction* $\sigma \mapsto \beta\left(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ *est à support compact.*

*Démonstration.* D'après la définition de $f_\pi$, $W_{f,\pi}$ est nul dès que $\pi(f^\vee)$ l'est.

Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact tel que $f^\vee$ est biinvariant par $K$. Alors $\pi(f\vee) \neq 0$, seulement lorsque $\pi$ admet des vecteurs $K$-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra [16, Théorème VIII.1.2], il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs $K_f$-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in Temp(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation $\tau$ pour un bon choix de sous-groupe de Levi $M$, on en déduit le lemme. □

D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, on sait que $\xi_p \mapsto \beta(W_{f,\pi}(\xi_p, .))$ est continue. On en déduit que

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma \tag{163}$$

est absoluement convergente.

De plus, l'intégration extérieure $\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \theta(\xi_p) d\xi_p$ n'est autre que la forme linéaire continue $\overline{\beta}(\bar{.})$, on en déduit que l'on peut échanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{164}$$

Pour finir, [4, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|. \tag{165}$$

□

**Corollaire 5.2.** *On a une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(H_n\backslash G_{2n})$ *:*

$$L^2(H_n\backslash G_{2n}) = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}^{\oplus} T(\sigma)\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma. \tag{166}$$

5.2. **Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$.**

**Lemme 5.7.** *On dispose d'un isomorphisme* $G_{2n}$*-équivariant d'espace de Hilbert*

$$L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n\backslash G_{2n}, \theta). \tag{167}$$

*Démonstration.* On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$, où $\widetilde{f}$ est définie par

$$\widetilde{f}(g) = \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \tag{168}$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $X \in M_n$, on a

$$\begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}. \tag{169}$$

On note $K$ un compact tel que $supp(f) \subset H_nK$. On en déduit que $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right)$ est nul sauf si il existe $g' \in G_n$ tel que $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix} \in K$. On en déduit alors que $\gamma$ est dans un compact. L'intégrale est donc absoluement convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&=_{\gamma\mapsto g_2\gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \widetilde{f}(g).
\end{aligned} \tag{170}$$

Pour finir, montrons que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons $g$ sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(g) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
&= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(Tr(\gamma x))d\gamma
\end{aligned} \tag{171}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact sur $M_n$, à savoir la fonction $\phi_k$ définie par $\phi_k(y) = f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) |\det y|^{-n}$

si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative $d\gamma$ en une mesure additive. On en déduit que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\widetilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) = 0$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est $(H_n, \theta)$-invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||f||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = c||\widetilde{f}||_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n\times G_n\backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert $L^2(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \simeq L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$.

En effet,

$$\begin{aligned} ||\widetilde{f}||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= \int_{M_n\times K} |\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)|^2 dxdk \\ &= \int_{M_n\times K} |\int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(\mathrm{Tr}(\gamma x) d\gamma|^2 dxdk \\ &= \int_{M_n\times K} |\widehat{\phi}_k(x)|^2 dxdk. \end{aligned} \tag{172}$$

La transformé de Fourier conserve la norme $L^2$ avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\begin{aligned} ||\widetilde{f}||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= c' \int_{M_n\times K} |\phi_k(x)|^2 dxdk \\ &= c' \int_K \int_{G_n} |f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right)|^2 \frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk. \end{aligned} \tag{173}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur $M_n$ restreinte à $G_n$ en une mesure multiplicative sur $G_n$. La mesure $\frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n} dk$ est une mesure de Haar sur $G_n K \simeq H_n\backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||f||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = c||\widetilde{f}||_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. □

Cet isomorphisme d'espace $L^2$ nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$ et sur $H_n\backslash G_n$. En effet, on dispose du

**Théorème 5.2.** *Une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ *est obtenue par la relation*

$$L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{174}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme 5.7 et du corollaire 5.2. □

## Références


[1] J. Arthur, *The Endoscopic Classification of Representations Orthogonal and Symplectic Groups*, vol. 61, American Mathematical Soc., 2013.

[2] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[3] J. N. Bernstein, *P-invariant distributions on gl(n) and the classification of unitary representations of gl(n) (non-archimedean case)*, in Lie Group Representations II, R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman, and J. Rosenberg, eds., Berlin, Heidelberg, 1983, Springer Berlin Heidelberg.

[4] R. Beuzart-Plessis, *Plancherel formula for* $\mathrm{GL_n(F)} \backslash \mathrm{GL_n(E)}$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).

[5] Gel'fand, I. M. and Kazhdan, D. A., *On the representation of the group GL(n, K) where K is a local field*, Functional Analysis and Its Applications, 6 (1972), pp. 315–317.

[6] G. Henniart, *Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[7] A. Ichino, E. Lapid, and Z. Mao, *On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J., 166 (2017), pp. 1301–1348.

[8] H. Jacquet and S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.

[9] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square L-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[10] A. C. Kable, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[11] P. K. Kewat, *The local exterior square l-function : Holomorphy, non-vanishing and shalika functionals*, Journal of Algebra, 347 (2011), pp. 153 – 172.

[12] N. Matringe, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[13] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, arXiv e-prints, (2012), p. arXiv :1203.0039.

[14] F. Shahidi, *Fourier transforms of intertwining operators and plancherel measures for gl(n)*, American Journal of Mathematics, 106 (1984).

[15] A. J. Silberger and E.-W. Zink, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p-adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, (1996).

[16] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adique. d'après Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.