FORMULE DE PLANCHEREL

Pour $W \in \mathcal{C}^{w}(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{1}$$

Lemme 0.1. *L'intégrale 1 est absolument convergente.*

Démonstration. □

Proposition 0.1. *La forme linéaire $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi) \mapsto \beta(W)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$.*

Démonstration. □

Proposition 0.2. *Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))$, on pose $\pi = T(\sigma)$ le transfert de σ dans $\mathrm{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1}),\theta)$. On identifie $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1})$ par l'isomorphisme $W \mapsto \widetilde{W}$. Il existe un signe $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{2}$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$.

Démonstration. En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$ est de dimension au plus 1 (preuve, référence). De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c(\widetilde{\pi})c(\pi) = 1$ donc $c(\pi)$ est un signe. □

Lemme 0.2. *Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))$ et $\pi = T(\sigma)$. Alors*

$$J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi}) = \phi(0)c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{3}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

(4)

$$\begin{aligned}
J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi}) &= \int_{N_n\backslash G_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg\\
&= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh.
\end{aligned}$$

On remarque que l'on a

(5)

$$\begin{aligned}
\int_{N_n\backslash P_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp &= \beta\left(R\left(\sigma\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\widetilde{W}\right)\\
&= \beta(\widetilde{W}),
\end{aligned}$$

puisque β est H_n-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}(6)\qquad \int_{P_n\backslash G_n}\widehat{\phi}(e_nh)|\det h|dh &= \int_{F^n}\widehat{\phi}(x)dx\\ &= \phi(0).\end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 0.2. $\square$

Soit $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi\in\mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi}=W_{f_\pi}$.

Lemme 0.3. *Pour* $W\in\mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$, *on a*

$$(7)\qquad \lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)=\phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n}W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi.$$

Démonstration. On a

(8)

$$\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)=\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n}\widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1&X\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak&0\\0&ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-Tr(X))dX\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s dzdk|\det a|^s\delta_{B_n}(a)^{-1}da$$

De plus,

$$(9)\qquad \gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s ds=\int_{F^*}\widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx,$$

où l'on a posé $\phi_k(x)=\phi(xe_nk)$ pour tous $x\in F$ et $k\in K_n$. Ce qui nous donne

$$(10)\qquad \lim_{s\to 0+}\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s dz=\int_F\widehat{\phi_k}(x)dx=\phi(0).$$

On en déduit que

(11)

$$\lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)=\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n}\widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1&X\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak&0\\0&ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-Tr(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da,$$

ce qui nous permet de conclure. $\square$

Corollaire 0.1 (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g\in G_{2n}$, *alors*

(12)

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n}W_f(g,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi=\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}\beta(W_{f,T(\sigma)}(g,.))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma.$$

Démonstration. On peut supposer que $g=1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g)=\int_{Z_n}f(zg)dz$, alors $\widetilde{f}\in PG_{2n}$. On a donc

$$(13)\qquad \int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n}W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi=\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n}W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi.$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\widetilde{f_\pi} = f_\pi$ pour tout $\pi \in \mathsf{Temp}(PG_{2n})$, d'après le lemme 0.3, on a

(14)
$$\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)J(s,W_{\widetilde{f}}(1,.),\phi)$$
$$= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathsf{Temp}(PG_{2n})} J(s,W_{f,\pi}(1,.),\phi)d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

(15)
$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =$$
$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathsf{Temp}(PG_{2n})} J(1-s,\widetilde{W_{f,\pi}(1,.)},\widehat{\phi})c(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

Cette dernière limite est égale à

(16) $$\int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1)/Stab} J(1,\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

On conclut grâce au lemme **??**. □

1. Formule de Plancherel

On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n,\theta)$ avec

(17) $$\varphi_f(x) = \int_{H_n} f(hx)\theta(h)^{-1}dh,$$

pour tous $x \in Y_n$. Pour $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$, on pose

(18) $$(f_1,f_2)_{Y_n,\pi} = \sum_{W\in\mathcal{B}(\pi,\psi)} \beta(R(f_1)W)\overline{\beta(R(f_2)W)},$$

où $\mathcal{B}(\pi,\psi)$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}(\pi,\psi)$.

Théorème 1.1. *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{Y}_\backslash$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\phi_i = \phi_{f_i}$ pour $i = 1,2$. On a*

(19) $$(\phi_1,\phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh,$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose alors

(20) $$(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p\cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta(W_{f,\pi}(\xi_p,.)\theta(\xi_p)^{-1}d\xi_p,$$

pour tous $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$. Alors on a

(21) $$(\phi_1,\phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

Démonstration. □