FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Soit F un corps local de caractéristique 0, ψ un caractère non trivial de F et π une représentation tempérée irréductible de $\mathsf{GL}_{2n}(\mathsf{F})$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(\mathsf{F}^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s,W,\phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi), \tag{1}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1. Préliminaires

1.1. Théorie locale.

1.1. Théorie locale. Les intégrales $J(s,W,\phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\phi(e_n g)|\det g|^s dg \tag{2}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathsf{F}^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. On a noté G_n le groupe $\mathsf{GL}_n(\mathsf{F})$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F. L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n\end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika)**.** *Il existe* $\eta > 0$ *tel que les intégrales* $J(s,W,\phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > 1-\eta$*.*

Kewat montre, lorsque F est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt)**.** *Fixons* $s_0 \in \mathbb{C}$*. Il existe* $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(\mathsf{F}^n)$ *tels que* $J(s,W,\phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en* s_0*. Si* $\mathsf{F} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, le point* s_0 *peut éventuellement être un pôle. Si* F *est* p*-adique, on peut choisir* W *et* ϕ *tels que* $J(s,W,\phi)$ *soit entière.*

Date: 29 octobre 2018.

Lorsque la représentation non ramifiée, ont peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s,\pi,\Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika). *Supposons que F est p-adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F. Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^n$ et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{3}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p-adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe). *Supposons que F est un corps p-adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en q^s, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{J(s,W,\phi)}{L(s,\pi,\Lambda^2)} = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}, \tag{4}$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi},\bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0\end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = \epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}. \tag{5}$$

1.2. **Théorie globale.** La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour se faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s,W,\phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_n(K)\backslash N_n(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{6}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_n(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Swchartz, on note $J(s,W_\varphi,\Phi)$ l'intégrale

(7)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W_\varphi\left(\sigma\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(Tr(X))dX\Phi(e_n g)|\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika)**.** *Les intégrales* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand. De plus,* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}), \tag{8}$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ *et* $\hat{\Phi}$ *est la transformée de Fourier de* ϕ *par rapport au caractère* $\psi_{\mathbb{A}}$*.*

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K, ont a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v). \tag{9}$$

1.3. **Globalisation.** Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1. *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Il existe un corps de nombres* k *et une place* v_0 *telle que* $k_{v_0} = F$*, où* v_0 *est l'unique place de* k *au dessus de* p*.*

On note $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$. On note $\mathrm{Temp}_{ind}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations de la forme $i_P^G(\sigma)$ où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, σ est une représentation irréductible de carré intégrable de M et i_P^G est l'induction normalisée. Chaque représentation de $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ est une composante d'une unique représentation de $\mathrm{Temp}_{ind}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$.

On définira alors la topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ comme l'image réciproque de la topologie sur $\mathrm{Temp}_{ind}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ que l'on définit dans la suite. Soit M un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \in X^*(M)/D \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi) \in \mathrm{Temp}_{ind}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ où D est le sous-groupe de $X^*(M)$ des éléments χ tels que $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}_{ind}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M)/D$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis)**.** *Soit* k *un corps de nombres,* v_0, v_1 *deux places distinctes de* k *avec* v_1 *non archimédienne. Soit* U *un ouvert de* $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(k_{v_0})$*. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible* Π *de* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_k)$ *telle que* $\Pi_{v_0} \in U$ *et* Π_v *est non ramifiée pour toute place non archimédienne* $v \notin \{v_0, v_1\}$*.*

1.4. **Fonctions tempérées.** On aura besoin dans la suite de connaitre la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π. Pour ce faire, on introduit la notion fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— Si F est p-adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(g)| \leqslant C\Xi(g)\log(\|a\|)^d$ pour tout $g \in GL_{2n}(F)$,
— Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(g)| \leqslant C\Xi(g)\log(\|a\|)^d$ pour tous $g \in GL_{2n}(F)$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$,

où a est défini par la décomposition d'Iwasawa $g = nak$ et Ξ est la fonction définie par $\Xi(g) = \delta_{B_n}(a)^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 1.2 (Beuzart-Plessis)**.**

$$|f(ak)| \leqslant C\prod(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta(a)^{\frac{1}{2}}\log(\|a\|)^d \tag{10}$$

Lemme 1.3. *Il existe N tel que pour tous s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $d > 0$, l'intégrale*

$$\int_{A_n}\prod(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\log(\|a\|)^d|\det a|^s da \tag{11}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 1.4. *Pour $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, l'intégrale $J(s, W, \phi)$ converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 1$.*

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n\backslash G_n = A_nK_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}|W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\right)|dXdk|\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\delta^{-1}(a)da. \tag{12}$$

On pose $u_X = \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} = bu_{a^{-1}Xa}\sigma, \tag{13}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}|W\left(bu_X\sigma\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}\right)|dXdk|\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\delta^{-2}(a)da. \tag{14}$$

On écrit $u_X = n_Xt_Xk_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_x et on pose $k_\sigma = \sigma\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$|W(bt_Xk_Xk_\sigma)| \leqslant C\prod(1+|\frac{t_jb_j}{t_{j+1}b_{j+1}}|)^{-N}\delta^{\frac{1}{2}}(bt_x)\log(\|bt_X\|)^d \tag{15}$$

$$\leqslant C\prod|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N}\prod(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta^{\frac{1}{2}}(bt_x)\log(\|bt_X\|)^d \tag{16}$$

$$\leqslant Cm(X)^{-\alpha N}\prod(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta^{\frac{1}{2}}(bt_x)\log(\|bt_X\|)^d \tag{17}$$

où $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de Jacquet-Shalika. L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N}\delta^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^d dX \tag{18}$$

et

$$\int_{A_n}\prod(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\log(\|b\|)^d|\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\delta^{\frac{1}{2}}(b)\delta^{-2}(a)da. \tag{19}$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$. $\square$

2. Facteurs γ

Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{J(s,W,\phi)}$ par rapport à π, on dispose du

Lemme 2.1. *Supposons que* $J(s,W,\phi) \neq 0$. *Alors il existe une section* $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ *et un voisinage* $V \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ *de* π *tel que la fonction* $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ *soit continue.*

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La fonction $W \mapsto J(s,W,\phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s,W_{\pi'},\phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V. $\square$

Proposition 2.1. *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on ait*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)J(s,W,\phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{20}$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{21}$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soit $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_K/K$ tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_\infty = \psi$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour

$w = \infty$ ou v, on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors
$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

D'après la proposition 1.5, on a

(22)
$$\begin{aligned}&J(s, W_\infty, \phi_\infty)J(s, W_v, \phi_v)L^S(s, \Pi, \Lambda^2)\\ &= J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_\psi(\phi_\infty))J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_v, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_v}(\phi_v))L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2),\end{aligned}$$

où $S = \{\infty, v\}$ et $L^S(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \neq \infty, v} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire,

$$L^S(s, \Pi, \Lambda^2) = \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi)\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{23}$$

Le quotient de (22) et (23), en utilisant la proposition 1.4 sur le facteur en Π_v, donne

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_\psi(\phi_\infty))}{J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} = 1. \tag{24}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi)$.

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant le lemme 2.1 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$, qui est limite de fractions rationnelles en q_v^s ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

On réutilisant notre raisonnement en la place v', on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$; donc est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{25}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{26}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\phi})}. \tag{27}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\phi}) = 1. \tag{28}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 26, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}). \tag{29}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1. \tag{30}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. $\square$

Proposition 2.2. *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$*.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{31}$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres k et une place ν_0 telle que $k_{\nu_0} = F$, où ν_0 est l'unique place de k au dessus de p. Soit ν, ν' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de ν_0. Soit $U \subset \mathsf{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$ tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_{\nu_0} = \psi$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{\nu_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq \nu$.

Pour $w = \nu_0, \nu$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in \{\nu, \nu_0, \nu_\infty\}} J(s, W_w, \phi_w) L^S(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in \{\nu, \nu_0, \nu_\infty\}} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{32}$$

où ν_∞ décrit les places archimédiennes, $S = \{\nu_\infty\} \cup \{\nu, \nu_0\}$ et $L^S(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient

$$L^S(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{33}$$

En utilisant les propositions 1.4 et 2.1, on obtient donc la relation

$$\prod_{\nu_\infty} c(\Pi_{\nu_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_\nu, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\nu)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_\nu, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\nu)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{\nu_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{\nu_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1. \tag{34}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.1. Par continuité, le quotient $|\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}|$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_\nu}$. En appliquant le même raisonnement en la place ν', on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est 1. $\square$