

FORMULE DE PLANCHEREL SUR $GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$

Soit F un corps de nombres et ψ un caractère non trivial de \mathbb{A}_F . On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in GL_n$. L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$. Soit θ le caractère sur H_n défini par $\psi(\text{Tr}(X))$.

Soit π une représentation automorphe cuspidale de GL_{2n} et $\varphi \in \pi$. On introduit la période globale

$$(1) \quad \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h) \theta(h) dh,$$

où Z_n est le centre de GL_n et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

La factorisation de cette période globale comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour Φ une fonction de Schwartz globale et W_φ la fonction de Whittaker associée à φ , on introduit dans la suite des fonctions zêta globale $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$(2) \quad \text{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) \widehat{\Phi}(0).$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales

$$(3) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v),$$

où S est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1, W_v, \Phi_v)}{\Phi_v(0)}$, que l'on désignera par β dans la section 4, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 4.1.

On commence dans la section 1 par prouver une relation sur les facteurs γ du carré extérieur qui nous sera utile. Les sections 2 et 3 sont des préliminaires pour le théorème 4.1. On fini dans la section 4 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)$ et une formule de Plancherel abstraite sur $L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$.

Théorème 0.1. *Soit F est un corps p -adique. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(H_n(F) \backslash GL_{2n}(F), \theta)$. On a l'égalité*

$$(4) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(H_n(F) \backslash G_{2n}(F))} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{H_n(F) \backslash GL_{2n}(F), T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma,$$

où $T : \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2n})$ est l'application de transfert, $(\varphi_1, \varphi_2)_{H_n(F) \backslash G_{2n}(F), T(\sigma)}$ est défini dans le théorème 4.1 à partir de la forme linéaire β .

Théorème 0.2. *F est un corps p-adique. Une décomposition de Plancherel abstraite sur $L^2(GL_N(F) \times GL_N(F) \backslash GL_{2N}(F))$ est obtenue par la relation*

(5)

$$L^2(GL_N(F) \times GL_N(F) \backslash GL_{2N}(F)) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

0.1. Notations. Dans la suite on notera F un corps p -adique (sauf dans la section 1 où F peut désigner un corps archimédien) et ψ un caractère non trivial de F . On note G_{2n} le groupe $GL_{2n}(F)$. On notera dans la suite $H_n = H_n(F)$ le groupe des F -points. On note B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F . On note U_n le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1} U_n$ le sous-groupe mirabolique.

Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera GL_{2n} , SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $\text{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$. On note Z_G le centre de $G(F)$ et A_G le tore déployé maximal dans Z_G .

1. FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Dans cette partie F un corps local de caractéristique 0 et ψ un caractère non trivial de F . Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_J(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 près à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$(6) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1.1. Préliminaires.

1.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

(7)

$$\int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\text{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika [?]). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s, W, \phi)$ convergent absolument pour $\text{Re}(s) > 1 - \eta$.*

Kewat montre, lorsque F est p -adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F . On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt [?]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0 . Si $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p -adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [?]) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika [?]). *Supposons que F est p -adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers \mathcal{O} de F . Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de \mathcal{O}^n et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$(8) \quad J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2).$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p -adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe [?]). *Supposons que F est un corps p -adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s , tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$(9) \quad \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)},$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi)$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & 2n \\ & \ddots & & \\ 2n & & & 1 \end{pmatrix}$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$(10) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}.$$

1.1.2. Théorie globale. La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de \mathbb{A}_K/K . Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$(11) \quad W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K) \backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug) \psi_{\mathbb{A}}(u) du$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz,

on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

$$(12) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{Lie(B_n) \backslash M_n} W_\varphi \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi_A(\text{Tr}(X)) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{A}_K .

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika [?]). *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $\text{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$(13) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}),$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport au caractère ψ_A .

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K , on a

$$(14) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v).$$

1.1.3. Globalisation. Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1 (Kable [?]). *Supposons que F est un corps p -adique. Il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p .*

On note $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M , on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis [?]). *Soient k un corps de nombres, v_0, v_1 deux places distinctes de k avec v_1 non archimédienne. Soit \mathcal{U} un ouvert de $\text{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π de $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in \mathcal{U}$ et Π_v est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

1.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π . Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(\mathbf{n}g) = \psi(\mathbf{n})f(g)$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

- Si F est p -adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(\mathbf{n}ak)| \leq C \delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$, $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$,
- Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(\mathbf{n}ak)| \leq C \delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$, $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$, $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $\|\mathbf{a}\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 1.2. *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$. Alors, pour tout $N \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$(15) \quad |W(\mathbf{b}k)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(\mathbf{b})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{b}\|)^d,$$

pour tous $\mathbf{b} \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$.

Lemme 1.3. *Il existe N tel que pour tous s vérifiant $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $d > 0$, l'intégrale*

$$(16) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|\mathbf{a}\|)^d |\det \mathbf{a}|^s d\mathbf{a}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W , on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 1.4. *Pour $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, l'intégrale $J(s, W, \phi)$ converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(s) > 0$.*

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n \backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(17) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\operatorname{Lie}(B_n) \backslash M_n} \left| W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \phi(e_n a k) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta^{-1}(a) da.$$

On pose $u_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$(18) \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1} X a} \sigma,$$

où $b = \operatorname{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto a X a^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$(19) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\operatorname{Lie}(B_n) \backslash M_n} \left| W \left(b u_X \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right) \phi(e_n a k) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da.$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_X et on pose $k_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$(20) \quad |W(bt_X k_X k_\sigma)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d.$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j . On dispose de la

Proposition 1.7 (Jacquet-Shalika [?]). *On a $|t_k| \geq 1$ lorsque k est impair et $|t_k| \leq 1$ lorsque k est pair. En particulier, $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geq 1$ lorsque j est impair et $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leq 1$ lorsque j est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

$$(21)$$

$$(22) \quad |W(bt_X k_X k_\sigma)| \leq C 2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ \leq C 2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d,$$

où $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [?, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$(23) \quad |\phi(e_n a k)| \leq C' (1 + |a_n|)^{-N}.$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante près) par le produit des intégrales

$$(24) \quad \int_{Lie(B_n) \backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX$$

et

$$(25) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da.$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\operatorname{Re}(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$(26) \quad \delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n} |a_1|^{3-2n} |a_2|^{5-2n} |a_2|^{7-2n} \dots |a_n|^{2n-3} |a_n|^{2n-1},$$

$$(27) \quad = |a_1|^{4-4n} |a_2|^{12-4n} \dots |a_n|^{4n-4},$$

$$(28) \quad = \delta_{B_n}^4(a).$$

□

1.2. Facteurs γ . Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π , on dispose du

Lemme 1.5. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \text{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in \text{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et un voisinage $V \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ de π tels que $W_0 = W_\pi$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ soit continue.*

En particulier, si F est un corps p -adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 1.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V . \square

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ par rapport au caractère additif ψ , où l'on note \mathcal{F}_ψ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ . Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

Lemme 1.6. *Soient $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \text{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W, \phi) \neq 0$. Alors*

$$(29) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})} \omega_\pi(\lambda) \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}.$$

Démonstration. En effet, la mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda \cdot))$ donne

$$(30) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda \cdot)) = |\lambda|^{n(s-1)} \omega(\lambda) J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On en déduit immédiatement le lemme. \square

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [?]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 1.8. *Soit $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ telle que pour tous $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait

$$(31) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(32) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$); par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de \mathbb{A}_K/K .

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{\infty} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour $w = \infty$ ou v , on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$(33) \quad W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est non ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$(34) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [?]),

$$(35) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

Les équations (34) et (35), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$(36) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_{\infty}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty})) = \\ & J(s, W_{\infty}, \phi_{\infty}) \gamma^{Sh}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_{∞} , l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty})$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 1.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 1.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$(37) \quad \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1,$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [?]).

L'équation (36) devient alors

$$(38) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ & J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}. \end{aligned}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π , en utilisant le lemme 1.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$(39) \quad R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty)},$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}$); donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place v' , on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (39) s'écrit

$$(40) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

La fonction R est donc une fraction rationnelle en q_v^s périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$(41) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$(42) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$(43) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \tilde{\psi})}.$$

Puisque $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$(44) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \tilde{\psi}) = 1.$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 42, on obtient

$$(45) \quad \overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}).$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(46) \quad |\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1.$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. \square

Proposition 1.9. *Supposons que F est un corps p -adique. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(47) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p . Soient v, v' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de v_0 . Soit $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de \mathbb{A}_k/k .

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_{∞} l'ensemble des places archimédienne, $S = S_{\infty} \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$(48) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [?])

$$(49) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 1.8, on obtient donc la relation

$$(50) \quad \prod_{v_{\infty} \in S_{\infty}} c(\Pi_{v_{\infty}}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1.$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 1.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. \square

2. LIMITE SPECTRALE

Dans cette partie F est un corps p -adique. On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ . On équipe alors A_M par la mesure $(d^\times \chi)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times \chi = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur F^\times .

Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant σ . Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de A_M et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M . On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$(51) \quad d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi},$$

où $\gamma^*(0, 1, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(s, 1, \psi)}{s \log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ . Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\text{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \text{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$(52) \quad d\pi = |W(G, M)|^{-1} (\text{Ind}_M^G)_* d\sigma.$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 55.

On note $\text{PG}_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$, pour $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, on définit f_π par

$$(53) \quad f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)),$$

pour tout $g \in \text{PG}_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 2.1 (Harish-Chandra [?]). *Il existe une unique mesure $\mu_{\text{PG}_{2n}}$ sur $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ telle que*

$$(54) \quad f(g) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi),$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(\text{PG}_{2n})$ et $g \in \text{PG}_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$(55) \quad d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi,$$

où $\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \log(q_F))^{-n_{\pi, \overline{A_d}}} \gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$, avec $n_{\pi, \overline{A_d}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$ en $s = 0$. Pour $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$ le quotient de $\text{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π .

On peut définir une application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(\text{SO}(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \rightarrow {}^L\text{SO}(2m+1)$. Or ${}^L\text{SO}(2m+1) = \text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $\text{SO}(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \text{Temp}(\text{SO}(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$(56) \quad \pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}) \iff \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^k \tau_i \times \tilde{\tau}_i \right) \times \bigotimes_{j=1}^l \mu_j$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2m_j + 1))/\text{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 2.2. *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\text{Temp}(\text{PG}_{2n}))$, on a*

$$(57) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}_{2n+1})/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Pour $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n + 1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \times \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(\text{SO}(2m + 1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 55, on a

$$(58) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π . On écrit la représentation π sous la forme

$$(59) \quad \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau}_i^{\times n_i} \right) \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right),$$

où

- $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$. De plus, pour tous $1 \leq i < i' \leq t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_{i'}$.
- $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu}_j$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq u$. De plus, pour tous $1 \leq j < j' \leq u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu}_k$) pour tout $1 \leq k \leq v$. De plus, pour tous $1 \leq k < k' \leq v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$(60) \quad M = \left(\prod_{i=1}^t G_{d_i}^{m_i + n_i} \times \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparait dans la définition de π . Alors $\pi = \text{Ind}_M^{\text{PG}_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M .

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , alors $X^*(M) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i + n_i} \times \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k} = (\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{i}\mathbb{R}$ et \mathcal{A} de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M / \mathcal{A} \simeq \mathbb{i}\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R} / (\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)} \right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :

- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \dots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \dots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i} \times (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i}$,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \dots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j}$,

— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \dots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, où

$$(61) \quad \pi_\lambda = \left(\bigotimes_{i=1}^t \left(\bigotimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left(\bigotimes_{l=1}^{n_i} \tilde{\tau}_i \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)}}{d_i}} \right) \right) \\ \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right).$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\text{PG}_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans \mathcal{A} et $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\text{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation τ . Alors

$$(62) \quad \int_U \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi$$

d'après la relation 55. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ et $d\lambda$ sur \mathcal{A} , cette intégrale est égale à

$$(63) \quad \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}| \gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda.$$

De plus, on a

$$(64) \quad |S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i + n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{p_j} \prod_{k=1}^v f_k^{q_k}.$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$(65) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \\ \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)| P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \phi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,$$

où $\phi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ , on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 2.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, Ad) = \gamma(s, \pi_1, Ad) \gamma(s, \pi_2, Ad) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2) \gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, Ad) = \gamma(s, \pi, Ad)$,
- $\gamma(s, \pi, Ad)$ a un zéro simple en $s = 0$,
- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_2, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,
- $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ a au plus un zéro simple en $s = 0$ et $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ si et seulement si π est dans l'image de l'application de transfert T ,

pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ et $\pi_1, \pi_2 \in \text{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(66)

$$\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{A\bar{d}}, \psi) = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{1 \leq l \neq l' \leq m_i} \left(\frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{1 \leq l \neq l' \leq n_i} \left(\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)} - \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right) \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left(\frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right) \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left(\frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right) \right) F(\lambda),$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V , il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

(67)

$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1 \leq l \leq m_i \\ 1 \leq l' \leq n_i}} \left(s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right)^{-1} \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l < l' \leq p_j} \left(s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right)^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \leq l' \leq q_k} \left(s + \frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right)^{-1} \right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V + \mathcal{H}$; ici $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par l'application $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s, \dots, s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s, \dots, s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s, \dots, s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [?], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [?], on écrit

$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{A\bar{d}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda + s)$ et les lettres P, Q, R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [?, section 3]).

Proposition 2.3 (Beuzart-Plessis [?]). *La limite*

$$(69) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right) d\lambda$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(70)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c}}{|W'|}$$

$$\int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda';$$

où

- $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$,
- c est le cardinal des $1 \leq k \leq t$ tel que $q_k \equiv 1 \pmod{2}$,

- $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
- W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(PG_{2n}, \tau)$ et W' est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$ (défini après 74).

De plus, \mathcal{A}' est le sous-espace de \mathcal{A} défini par les relations :

- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x}_{i,l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq l \leq n_i$,
- $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq u$ et $1 \leq l \leq \lfloor \frac{p_j}{2} \rfloor$,
- $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq v$ et $1 \leq l \leq \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe \mathcal{A}' de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$(71) \quad \mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v (i\mathbb{R})^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}.$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$. D'après la caractérisation 56, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparaît dans 56). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T . Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 2.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

$$(72) \quad \sigma = \left(\times_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \times_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \times_{k=1}^v \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \right) \times \sigma_0,$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$(73) \quad T(\sigma_0) = \times_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \pmod{2}}}^v \nu_k.$$

On voit apparaître le sous-groupe de Levi

$$(74) \quad L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \times SO(2m+1).$$

De plus, $\sigma = \text{Ind}_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 2.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant σ .

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à \mathcal{A}' . On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \text{Temp}(SO(2n+1))$, avec

$$(75) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\times_{i=1}^t \times_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\times_{j=1}^u \times_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\times_{k=1}^v \times_{l=1}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned}$$

De plus, d'après 56, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/\text{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 65), on obtient

$$\begin{aligned}
 (76) \quad & \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$(77) \quad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 2.3 et la relation 73. D'autre part, d'après la proposition 2.3 et l'équation 65, on a

$$\begin{aligned}
 (78) \quad & \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P} \\
 & \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda'.
 \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(79) \quad \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \rightarrow 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'.$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$(80) \quad \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda';$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi) \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi) = \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)$ et

$$(81) \quad \frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \text{Ad}, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi).$$

Dans l'expression 80, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 80 est égal au membre de droite 76, d'après l'égalité 77. \square

3. UNE FORMULE D'INVERSION DE FOURIER

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n . On pose $H_n^p = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n défini par $\psi(\text{Tr}(X))$.

Proposition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, alors on a*

$$(82) \quad \int_{H_n} f(s) \theta(s)^{-1} ds = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi) \theta(\xi)^{-1} \theta(\xi_p) d\xi d\xi_p.$$

où W_f est la fonction de $G_{2n} \times G_{2n}$ définie par

$$(83) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n . Pour $n = 1$, H_1^P est trivial, σ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$(84) \quad \int_{F^*} W_f \left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f \left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \psi(u)^{-1} du dz.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n - 1$.

L'ensemble Ω_n des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \bar{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n , en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de \bar{B}_n . On note $\tilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où \tilde{Y} est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et \tilde{h} de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-1}$ et $\tilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1} \tilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \tilde{\Omega}_{n-1}$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\tilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\tilde{\Omega}_n$ avec $\tilde{h} \in P_n$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$(85) \quad \int_{\tilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\tilde{\xi} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p,$$

où les mesures $d\xi'_p$, $d\tilde{\xi}$, $d\xi'_p$ et $d\tilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur Ω_{n-1} , $\tilde{\Omega}_n$, Ω_{n-1}^P et $\tilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices Y et \tilde{Y} de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{\Omega}_{n-1}$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p) R(\tilde{\xi}) f$, on a alors

$$(86) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p. \end{aligned}$$

De plus,

$$(87) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\xi'^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du,$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2} V$. On

effectue le changement de variable $v \mapsto \xi'_p v \xi'^{-1}_p$, ce qui donne

$$(88) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v \xi'^{-1}_p u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du.$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left(v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$(89) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$(90) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ & \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1} v s \tilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$.

On obtient alors

$$(91) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left(\sigma \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} v s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de v par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n , les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(v)$ devient après conjugaison $\psi(\text{Tr}(y) + \text{Ts}(t))$, où $\text{Ts}(t) = t_{n-1, n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p} \tilde{Z} \tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p} n_1 \tilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \tilde{p} n_2 \tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p} t \tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p} y \tilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

$$(92) \quad \begin{aligned} & \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1} V \sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s \tilde{\xi} \right) \\ & \theta(s)^{-1} \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1} s \sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n . Le changement de

variable $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$ donne

$$(93) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1}g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \tilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$(94) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

Lemme 3.1. *Soit $F \in \mathcal{S}(M_n)$, alors*

$$(95) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{\text{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|dt d\tilde{p} = F(0).$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2} \times F^$ à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-2}$ et $\tilde{l}_n \in F^*$.*

Démonstration. La mesure $|\det \tilde{p}|d\tilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1} . En remarquant que $\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à \tilde{p} et t , le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. \square

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(96) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\tilde{\xi}$ de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où \tilde{Y} est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h} \in F^{n-1} \times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$(97) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} \\ f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dXdgd\tilde{h}d\tilde{Y}d\tilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

$$(98) \quad \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y + X + g\tilde{Y}g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

puisque $n_1 y = y$. On effectue le changement de variable $\tilde{Y} \mapsto g^{-1}\tilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et \tilde{Y} en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X . On obtient alors

$$(99) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-2} \int_{U_n^2} \\ f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\tilde{h} & 0 \\ 0 & g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X))d(n_1, n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ et on remarque que l'on a

$$(100) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables $X \mapsto n_1^{-1}(X + \tilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

$$(101) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(\tilde{Z}n_2))d(n_1, n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables \tilde{Z} et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(102) \quad \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))dn_1 dXdgd\tilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, \tilde{h} ; on trouve bien notre membre de gauche

$$(103) \quad \int_{G_n} \int_{M_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X))dXdg.$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\tilde{H}, H_{n-1}, \tilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^P qui chacune est absolument convergente

mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 99) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 102). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 99, à part l'intégration sur \tilde{Z} , on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(104)

$$W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}f}} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) = \\ (1 + |a_n|)^N |\det aa'|^{-1} W_f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(105)

$$\int_{\tilde{n}_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\tilde{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det aa'| \\ W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}f}} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \delta_{B_n}(a)^{-1} \delta_{B_{n-1}}(a')^{-1} da dX da' dX'$$

pour N suffisamment grand. On introduit les variables u_X et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 1.4). On a alors

$$(106) \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)},$$

où $b = \text{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 105 est alors majorée à une constante près par

(107)

$$\int_{\tilde{n}_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\tilde{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^N |\det aa'| m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ m(X')^{-\alpha' N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'}) \log(\|b't_{X'}\|)^d \delta_{B_n}^{-2}(a) \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(108) \quad \int_{\tilde{n}_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX,$$

$$(109) \quad \int_{\tilde{n}_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX',$$

$$(110) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da,$$

et

$$(111) \quad \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da',$$

pour j, j' compris entre 0 et d . Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [?, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 pour les deux dernières. \square

4. FORMULES DE PLANCHEREL

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n})$, on note

$$(112) \quad \beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p.$$

Lemme 4.1. *L'intégrale 112 est absolument convergente. La forme linéaire $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ est continue.*

Pour $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$. De plus, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est non nulle.

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(113) \quad \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \left| W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$(114) \quad \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|}) (1 + |a_n|) m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a) \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout $N \geq 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant lors de la preuve du lemme 4.3. En reprenant les indications de l'introduction, cela vient du fait que les fonctions $J(1, W, \phi)$ sont (H_n, θ) -invariant.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n} \backslash P_{2n}, \psi)$ (ref)(Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction à $A_{2n-1} K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. \square

Proposition 4.1. *Soit $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$, on pose $\pi = T(\sigma)$ le transfert de σ dans $\text{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément*

de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. On identifie $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi^{-1})$ par l'isomorphisme $W \mapsto \tilde{W}$. Il existe un signe $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ tel que

$$(115) \quad \beta(\tilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W),$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Démonstration. En effet, $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [?]. De plus, π est le transfert de σ donc $\tilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\tilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. \square

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1}du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [?], que l'on note

$$(116) \quad f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u)\psi(u)^{-1}du.$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$(117) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du,$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Lemme 4.2. *Pour $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n} \backslash G_{2n})$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on a*

$$(118) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi.$$

Démonstration. On a

$$(119) \quad \begin{aligned} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) &= \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \\ &\quad \psi(-\text{Tr}(X))dX \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da \end{aligned}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$(120) \quad \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s ds = \int_{F^*} \widehat{\phi}_k(x) |x|^{1-ns} dx,$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$(121) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi}_k(x) dx = \phi(0).$$

On en déduit que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi)$ est égal à

$$(122) \quad \begin{aligned} \phi(0) \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Corollaire 4.1 (de la limite spectrale). *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $g \in G_{2n}$, alors*

$$(123) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(g, \cdot)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg) dz$, alors $\tilde{f} \in \text{PG}_{2n}$. On a donc

$$(124) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\tilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, d'après le lemme 4.2, on a

$$(125) \quad \begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\tilde{f}}(1, \cdot), \phi) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} J(s, W_{f, \pi}(1, \cdot), \phi) d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$(126) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} J(1 - s, \widetilde{W_{f, \pi}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

La proposition 2.2, nous permet d'obtenir la relation

$$(127) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned}$$

Le membre de gauche étant (H_n, θ) -invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

$$(128) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} J(1, R(\xi) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [?, Lemme 5.7.2], on en déduit que $J(1, R(\xi) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) = J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi})$ pour tout $\xi \in H_n$ et donc que $J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi})$ est (H_n, θ) -invariant.

Lemme 4.3. *Soit $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ et $\pi = T(\sigma)$. Alors*

$$(129) \quad J(1, \widetilde{W}, \hat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$(130) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg.$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1, \cdot) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n \backslash G_n$ est (H_n, θ) -invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1} U_{n-1}$, on en déduit que

$$(131) \quad \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg$$

est (H_n, θ) -invariant. Autrement dit, β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant, ce qui termine la preuve du lemme 4.1.

Remarque 4.1. Cette preuve que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant est quelque peu détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ qui est de dimension au plus 1. En utilisant le fait que $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ donc π est (H_n, θ) -distinguée, on a $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. Ce dernier est un sous-espace de $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. On en déduirait alors que la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien $H_n \cap P_{2n}$ -invariant, est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension 1.

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

$$(132) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg \\ &= \int_{P_n \backslash G_n} \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh dp. \end{aligned}$$

De plus,

$$(133) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \\ &= \beta \left(R \left(\sigma \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \widetilde{W} \right) \\ &= \beta(\widetilde{W}), \end{aligned}$$

puisque β est (H_n, θ) -invariant. De plus,

$$(134) \quad \begin{aligned} & \int_{P_n \backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x) dx \\ &= \phi(0). \end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 4.1. \square

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 4.3 dans la relation 127. \square

4.1. Formule de Plancherel explicite sur $H_n \backslash G_{2n}$. On note $Y_n = H_n \backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$(135) \quad \varphi_f(\mathbf{y}) = \int_{H_n} f(h\mathbf{y})\theta(h)^{-1}dh,$$

pour tout $\mathbf{y} \in Y_n$.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(136) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh,$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose

$$(137) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) d\xi_p,$$

pour tout $\pi \in \mathcal{T}(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2 . Alors on a

$$(138) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. On a

$$(139) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(h_2\mathbf{y})} \theta(h_1)^{-1} \theta(h_2) dh_1 dh_2 d\mathbf{y}.$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(140) \quad (\mathbf{y}, h_1, h_2) \in Y_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(h_2\mathbf{y})}$$

est à support compact, ou Y_n est un système de représentant de Y_n . On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon \mathbf{y} et h_2 en une intégrale sur G_{2n} . Ce qui donne

$$(141) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(\mathbf{y})} \theta(h_1)^{-1} dh_1 d\mathbf{y},$$

qui est bien la relation 136.

D'après 3.1 et 4.1, on a

$$(142) \quad \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p.$$

Lemme 4.4. *La fonction $(\xi_p, \sigma) \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$ est à support compact, l'intégrale 142 est donc absolument convergente.*

Démonstration. La fonction $\xi_p \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de f_π , $W_{f, \pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit K_f un sous-groupe ouvert compact tel que f est biinvariant par K_f . Alors $\pi(f) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K_f -invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f -invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M , on en déduit le lemme. \square

On échange les intégrales pour obtenir

$$(143) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2 . Commençons par le

Lemme 4.5. *Soit $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$. On introduit un produit scalaire sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)$:*

$$(144) \quad (W, W')^{W_h} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p) \overline{W'(p)} dp,$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est de rang fini. Notons $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ une base finie orthonormée de son image. Alors

$$(145) \quad W_{f, \pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \overline{\pi(f_2)W'} \otimes \pi(f_1)W'.$$

Démonstration. Le produit scalaire $(., .)^{W_h}$ est P_{2n} -invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi G_{2n} -invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$(146) \quad \begin{aligned} \pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{W_h} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (W, \pi(\overline{f^\vee})W')^{W_h} W'. \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(., .)^{W_h}$ de faire l'identification

$$(147) \quad \begin{aligned} \pi(f^\vee) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} W' \otimes \pi(f^\vee) \overline{W'} \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1)W' \otimes \overline{\pi(f_2)W'}, \end{aligned}$$

d'après l'invariance par G_{2n} du produit scalaire.

On en déduit que

$$(148) \quad \begin{aligned} W_{f, \pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \int_{N_{2n}}^* (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W') \psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2) \overline{\pi(f_2)W'(g_1)}, \end{aligned}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [?, Prop 2.14.2]. \square

Le lemme 4.5 donne la relation

$$(149) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma), \psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')} \beta(T(\sigma)(f_1)W'),$$

qui est bien indépendante du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est H_n -invariante.

Pour finir, [?, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$(150) \quad \gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|.$$

□

4.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.

Lemme 4.6. *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$(151) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta).$$

Démonstration. On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$, où \tilde{f} est définie par

$$(152) \quad \tilde{f}(g) = \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma^{-1} \right) d\gamma$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $x \in M_n$, on a $\begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$, on en déduit que $f \left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma^{-1} \right)$ est nul sauf si $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$ est dans un compact pour un certain g' , autrement dit, si γ est dans un compact. L'intégrale est donc absolument convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$(153) \quad \begin{aligned} \tilde{f} \left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g \right) &= \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g \sigma^{-1} \right) d\gamma \\ &=_{\gamma \mapsto g_2 \gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma^{-1} \right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma^{-1} \right) d\gamma \\ &= \tilde{f}(g). \end{aligned}$$

Pour finir, montrons que \tilde{f} est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons g sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\tilde{f}(g) = \tilde{f} \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \right)$, on a alors

$$(154) \quad \begin{aligned} \tilde{f}(g) &= \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1} \right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1} \right) \psi(\text{Tr}(\gamma x)) d\gamma \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, à savoir la fonction ϕ_k définie par $\phi_k(y) = f \left(\sigma \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1} \right) |\det y|^{-n}$ si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative dy en une mesure additive. On en déduit que \tilde{f} est à support

compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\tilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1}\right) \psi(\text{Tr}(\gamma x) d\gamma)^2 dx dk$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est (H_n, θ) -invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = \|\tilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= \int_{M_n \times K} \left| \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) \right|^2 dx dk \\
 (155) \quad &= \int_{M_n \times K} \left| \int_{G_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1}\right) \psi(\text{Tr}(\gamma x) d\gamma)^2 dx dk \right|^2 dx dk \\
 &= \int_{M_n \times K} |\hat{\phi}_k(x)|^2 dx dk.
 \end{aligned}$$

La transformé de Fourier conserve la norme L^2 avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= c' \int_{M_n \times K} |\phi_k(x)|^2 dx dk \\
 (156) \quad &= c' \int_K \int_{G_n} \left| f\left(\sigma\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma^{-1}\right) \right|^2 \frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk.
 \end{aligned}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur M_n restreinte à G_n en une mesure multiplicative sur G_n . La mesure $\frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk$ est une mesure de Haar sur $G_n K \simeq H_n \backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = \|\tilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$. \square

Cet isomorphisme d'espace L^2 nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$ et sur $H_n \backslash G_n$. En effet, on dispose du

Théorème 4.2. *Une décomposition de Plancherel abstraite sur $L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ est obtenue par la relation*

$$(157) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.6 et de la décomposition de Plancherel abstraite déduite du théorème 4.1. \square