UNFOLDING

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Proposition 0.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{1}$$

où W_f *est la fonction de* $G_{2n} \times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2)\psi(u)^{-1}du \tag{2}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 1$, H_1^P est trivial, σ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{3}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

L'ensemble Ω_n des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaire inférieure inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1}\widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_{n-1}$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{\Omega}_n$ avec $\widetilde{h} \in P_n$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{4}$$

où les mesures $d\xi'$, $d\widetilde{\xi}$, $d\xi_p'$ et $d\widetilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur Ω_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_n$, Ω_{n-1}^P et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices Y et $\widetilde{Y}$ de sorte à ce que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p)R(\widetilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^p_{n-1}}\int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p\widetilde{\xi}_p, \xi'\widetilde{\xi})|\det \xi'_p\xi'|^{-1}d\xi' d\xi'_p = \\ \int_{\Omega^p_{n-1}}\int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1}d\xi' d\xi'_p.\end{aligned}\tag{5}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}}\int_V f'({\xi'}_p^{-1}\nu u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du,\tag{6}$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p\nu{\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2\int_{N_{2n-2}}\int_V f'(\nu{\xi'}_p^{-1}u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du.\tag{7}$$

On note $\widetilde{f'}(g) = |\det g|^{-1}\int_V f'\left(\nu\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\right)\psi(\nu)^{-1}d\nu$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\widetilde{f'} \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p\xi'|W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi').\tag{8}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^p_{n-1}}\int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1}d\xi' d\xi'_p = \\ &\int_{\Omega^p_{n-1}}\int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi')d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}}\widetilde{f'}(s)\theta(s)^{-1}ds = \\ &\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1}\nu s\widetilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds.\end{aligned}\tag{9}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0\\ 0 & \widetilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$.
On obtient alors
(10)

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_V f\left(\sigma\begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \widetilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1}\nu s\widetilde{\xi}\right)\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de ν par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(Tr(y) + Ts(t))$, où $Ts(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p}n_1\widetilde{p}^{-1}$,

$n_2 \mapsto \widetilde{p} n_2 \widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p} y \widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(11)
$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \widetilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\sigma^{-1}s\widetilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1}s\sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det\widetilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{p}^{-1}g & 0\\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.\end{aligned} \tag{12}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned}&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.\end{aligned} \tag{13}$$

Lemme 0.1. *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$*, alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| dt d\widetilde{p} = F(0). \tag{14}$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2}\times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix}1_{n-2} & 0\\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1}\end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

Démonstration. La mesure $|\det\widetilde{p}|d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1}. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\widetilde{p}$ et t, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(15)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t=0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y}\in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}\in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}\\
&f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.
\end{aligned}\tag{16}$$

On remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},\tag{17}$$

puisque $n_1y=y$. On effectue le changement de variable $\widetilde{Y}\mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X. On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}\\
&f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.
\end{aligned}\tag{18}$$

On effectue le changement de variable $n_2\mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}.\tag{19}$$

Le changement de variables $X\mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2}f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\\
&\qquad\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.
\end{aligned}\tag{20}$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n}f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\\
&\qquad\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\widetilde{h}.
\end{aligned}\tag{21}$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, $\widetilde{h}$; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{22}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, H_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^{p} qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 18) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 21). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 18, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(23)

$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(24)

$$\int_{\bar{n}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{n}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}dadXda'dX'$$

pour N suffisamment grand. On introduit les variables u_X et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa [1]. On a alors

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{25}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 24 est alors majorée à une constante près par

(26)

$$\int_{\bar{n}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{n}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N|\det aa'|m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')dadXda'dX'.$$

1. https ://github.com/nicolasduhamel/carre-exterieur/blob/master/carre-exterieur.pdf

Cette dernière intégrale est majorée (à une constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX, \tag{27}$$

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX', \tag{28}$$

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da, \tag{29}$$

et

$$\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da', \tag{30}$$

pour j, j' compris entre 0 et d. Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir la proposition 5.5 de Jacquet-Shalika pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 [2] pour les deux dernières.

□

2. https ://github.com/nicolasduhamel/carre-exterieur/blob/master/carre-exterieur.pdf