

FORMULE DE PLANCHEREL SUR $GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$

1. FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Soit F un corps local de caractéristique 0, ψ un caractère non trivial de F et π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 près à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$(1) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1.1. Préliminaires.

1.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$(2) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. On a noté G_n le groupe $GL_n(F)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F . L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\text{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika [3]). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s, W, \phi)$ convergent absolument pour $\text{Re}(s) > 1 - \eta$.*

Kewat montre, lorsque F est p -adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F . On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt [1]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0 . Si $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p -adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [2]) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika [3]). *Supposons que F est p -adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers \mathcal{O} de F . Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de \mathcal{O}^n et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$(3) \quad J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2).$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p -adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe [5]). *Supposons que F est un corps p -adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s , tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$(4) \quad \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)},$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi)$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$(5) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}.$$

1.1.2. Théorie globale. La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_\mathbb{A}$ un caractère non trivial de \mathbb{A}_K/K . Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$(6) \quad W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K) \backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug) \psi_\mathbb{A}(u) du$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_\mathbb{A}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_\mathbb{A}(u) = \psi_\mathbb{A}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

$$(7) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W_\varphi \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi_\mathbb{A}(\text{Tr}(X)) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{A}_K .

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika [3]). *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $\operatorname{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$(8) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}),$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K , on a

$$(9) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v).$$

1.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1 (Kable [4]). *Supposons que F est un corps p -adique. Il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p .*

On note $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M , on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis [?]). *Soient k un corps de nombres, v_0, v_1 deux places distinctes de k avec v_1 non archimédienne. Soit \mathcal{U} un ouvert de $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π de $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in \mathcal{U}$ et Π_v est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

1.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π . Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(n\mathbf{g}) = \psi(n)f(\mathbf{g})$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$ et $\mathbf{g} \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

- Si F est p -adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{k})| \leq C\delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$, $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$ et $\mathbf{k} \in GL_{2n}(\mathcal{O})$,
- Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(\mathbf{u})f)(\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{k})| \leq C\delta_{B_{2n}}(\mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{a}\|)^d$ pour tous $\mathbf{n} \in N_{2n}(F)$, $\mathbf{a} \in A_{2n}(F)$, $\mathbf{k} \in GL_{2n}(\mathcal{O})$ et $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(gl_{2n}(F))$.

définir $\|\mathbf{a}\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 1.2. *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$. Alors, pour tout $N \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$(10) \quad |W(\mathbf{b}\mathbf{k})| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(\mathbf{b})^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{b}\|)^d,$$

pour tous $\mathbf{b} \in A_{2n}(F)$ et $\mathbf{k} \in GL_{2n}(O)$.

Lemme 1.3. *Il existe N tel que pour tous s vérifiant $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $d > 0$, l'intégrale*

$$(11) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|\mathbf{a}\|)^d |\det \mathbf{a}|^s d\mathbf{a}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W , on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 1.4. *Pour $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et $\phi \in S(F^n)$, l'intégrale $J(s, W, \phi)$ converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(s) > 0$.*

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n \backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(12) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\operatorname{Lie}(B_n) \backslash M_n} \left| W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}\mathbf{k} \end{pmatrix} \right) \phi(e_n \mathbf{a}\mathbf{k}) \right| dX d\mathbf{k} |\det \mathbf{a}|^{\operatorname{Re}(s)} \delta^{-1}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}.$$

On pose $\mathbf{u}_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$(13) \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \mathbf{a} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \mathbf{u}_{\mathbf{a}^{-1} X \mathbf{a}} \sigma,$$

où $\mathbf{b} = \operatorname{diag}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \dots)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto \mathbf{a} X \mathbf{a}^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$(14) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\operatorname{Lie}(B_n) \backslash M_n} \left| W \left(\mathbf{b} \mathbf{u}_X \sigma \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix} \right) \phi(e_n \mathbf{a}\mathbf{k}) \right| dX d\mathbf{k} |\det \mathbf{a}|^{\operatorname{Re}(s)} \delta^{-2}(\mathbf{a}) d\mathbf{a}.$$

On écrit $\mathbf{u}_X = \mathbf{n}_X \mathbf{t}_X \mathbf{k}_X$ la décomposition d'Iwasawa de \mathbf{u}_X et on pose $\mathbf{k}_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$(15) \quad |W(\mathbf{b} \mathbf{t}_X \mathbf{k}_X \mathbf{k}_\sigma)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b} \mathbf{t}_X) \log(\|\mathbf{b} \mathbf{t}_X\|)^d.$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j . On dispose de la

Proposition 1.7 (Jacquet-Shalika [3]). *On a $|t_k| \geq 1$ lorsque k est impair et $|t_k| \leq 1$ lorsque k est pair. En particulier, $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geq 1$ lorsque j est impair et $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leq 1$ lorsque j est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

(16)

$$|W(\mathbf{b}t_X k_X k_\sigma)| \leq C 2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \left| \frac{t_j}{t_{j+1}} \right|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} \left(1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}t_X) \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d$$

$$(17) \quad \leq C 2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(\mathbf{b}t_X) \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d,$$

où $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [3, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$(18) \quad |\phi(e_n a k)| \leq C' (1 + |a_n|)^{-N}.$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante près) par le produit des intégrales

$$(19) \quad \int_{\mathrm{Lie}(\mathbf{B}_n) \backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX$$

et

$$(20) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \right)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta_{\mathbf{B}_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{\mathbf{B}_n}^{-2}(a) da.$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{\mathbf{B}_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{\mathbf{B}_n}^2(a)$. En effet,

$$(21) \quad \delta_{\mathbf{B}_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n} |a_1|^{3-2n} |a_2|^{5-2n} |a_2|^{7-2n} \dots |a_n|^{2n-3} |a_n|^{2n-1},$$

$$(22) \quad = |a_1|^{4-4n} |a_2|^{12-4n} \dots |a_n|^{4n-4},$$

$$(23) \quad = \delta_{\mathbf{B}_n}^4(a).$$

□

1.2. Facteurs γ . Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{\mathrm{JS}}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{\mathrm{Sh}}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})W, \dot{\phi})}{J(s, W, \dot{\phi})}$ lorsque l'on fait varier la représentation π , on dispose du

Lemme 1.5. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F})) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(\mathbb{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}), \psi)$ et un voisinage $V \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}))$ de π tels que $W_0 = W_\pi$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})W_{\pi'}, \dot{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \dot{\phi})}$ soit continue.*

En particulier, si \mathbb{F} est un corps p -adique, ce quotient est égal à $\gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 1.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V . \square

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ par rapport au caractère additif ψ , où l'on note \mathcal{F}_ψ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ . Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

Lemme 1.6. *Soient $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \text{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W, \phi) \neq 0$. Alors*

$$(24) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})} \omega_\pi(\lambda) \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}.$$

Démonstration. En effet, la mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda \cdot))$ donne

$$(25) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda \cdot)) = |\lambda|^{n(s-1)} \omega(\lambda) J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On en déduit immédiatement le lemme. \square

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [2]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 1.8. *Soit $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ telle que pour tous $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait

$$(26) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(27) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$); par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial $\psi_\mathbb{A}$ de \mathbb{A}_K/K .

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour

$w = \infty$ ou v , on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$(28) \quad W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est non ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$(29) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [2]),

$$(30) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

Les équations (29) et (30), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$(31) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_{\infty}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty})) = \\ & J(s, W_{\infty}, \phi_{\infty}) \gamma^{Sh}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_{∞} , l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty})$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 1.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 1.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$(32) \quad \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1,$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [2]).

L'équation (31) devient alors

$$(33) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_{\infty}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty})) = \\ & J(s, W_{\infty}, \phi_{\infty}) \gamma^{Sh}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π , en utilisant le lemme 1.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de

voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$(34) \quad R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_A)_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_A)_\infty)},$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_A)_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_A)_v)}$); donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place v' , on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (34) s'écrit

$$(35) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

La fonction R est donc une fraction rationnelle en q_v^s périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$(36) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$(37) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$(38) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi})}.$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$(39) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1.$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 37, on obtient

$$(40) \quad \overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}).$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(41) \quad |\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1.$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. \square

Proposition 1.9. *Supposons que F est un corps p -adique. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(42) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p . Soient v, v' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de v_0 . Soit $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial ψ_A de \mathbb{A}_k/k .

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in \mathcal{U}$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_∞ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_\mathbb{A}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$(43) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [2])

$$(44) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{\text{Sh}}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{\text{Sh}}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}{\gamma^{\text{JS}}(s, \tilde{\Pi}_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 1.8, on obtient donc la relation

$$(45) \quad \prod_{v_\infty \in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{\text{JS}}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}{\gamma^{\text{Sh}}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)} \frac{\gamma^{\text{JS}}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{\text{Sh}}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1.$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 1.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{\text{JS}}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{\text{Sh}}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{\text{JS}}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. \square

2. LIMITE SPECTRALE

Dans cette partie F est un corps p -adique. Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera G_{2n} , SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $\text{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de G . On note Z_G le centre de G et A_G le tore déployé maximal dans Z_G . On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ . On équipe alors A_M par la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur F^\times .

Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant σ .

Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de A_M et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M . On équilibre alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$(46) \quad d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi},$$

où $\gamma^*(0, 1, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(s, 1, \psi)}{s \log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ . Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\text{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \text{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$(47) \quad d\pi = |W(G, M)|^{-1} (\text{Ind}_M^G)_* d\sigma.$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 50.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$(48) \quad f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)),$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 2.1 (Harish-Chandra [6]). *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\text{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$(49) \quad f(g) = \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi),$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$(50) \quad d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi,$$

où $\gamma^*(0, \pi, \overline{A_d}, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \log(q_F))^{-n_{\pi, \overline{A_d}}} \gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$, avec $n_{\pi, \overline{A_d}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, \overline{A_d}, \psi)$ en $s = 0$. Pour $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$ le quotient de $\text{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π .

On peut définir une application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(\text{SO}(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W_F' \rightarrow {}^L\text{SO}(2m+1)$. Or ${}^L\text{SO}(2m+1) = \text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(\text{SO}(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $\text{SO}(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \text{Temp}(\text{SO}(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$(51) \quad \pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}) \iff \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^k \tau_i \times \tilde{\tau}_i \right) \times \bigotimes_{j=1}^l \mu_j$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2m_j+1))/\text{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 2.2. *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\text{Temp}(PG_{2n}))$, on a*

$$(52) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}_{2n+1})/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Pour $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \times \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(\text{SO}(2m+1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 50, on a

$$(53) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π . On écrit la représentation π sous la forme

$$(54) \quad \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau}_i^{\times n_i} \right) \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right),$$

où

- $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$. De plus, pour tous $1 \leq i < i' \leq t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_{i'}$.
- $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu}_j$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq u$. De plus, pour tous $1 \leq j < j' \leq u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu}_k$) pour tout $1 \leq k \leq v$. De plus, pour tous $1 \leq k < k' \leq v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$(55) \quad M = \left(\prod_{i=1}^t G_{d_i}^{m_i + n_i} \times \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparaît dans la définition de π . Alors $\pi = \text{Ind}_M^{\text{PG}_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M .

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , alors $X^*(M) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i + n_i} \times \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k} = (\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{i}\mathbb{R}$ et \mathcal{A} de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M / \mathcal{A} \simeq \mathbb{i}\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R} / (\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)} \right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :

- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \dots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \dots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i} \times (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i}$,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \dots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j}$,
- $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \dots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, où

$$(56) \quad \begin{aligned} \pi_\lambda = & \left(\bigotimes_{i=1}^t \left(\bigotimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left(\bigotimes_{l=1}^{n_i} \tilde{\tau}_i \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)}}{d_i}} \right) \right) \\ & \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right). \end{aligned}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $\mathcal{U} \simeq V/W(\text{PG}_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans \mathcal{A} et $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\text{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation τ . Alors

$$(57) \quad \int_{\mathcal{U}} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\mathcal{U}} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\Lambda d}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi$$

d'après la relation 50. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\text{Temp}(\text{PG}_{2n})$ et $d\lambda$ sur \mathcal{A} , cette intégrale est égale à

$$(58) \quad \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\Lambda d}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}| \gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda.$$

De plus, on a

$$(59) \quad |S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i + n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{p_j} \prod_{k=1}^v f_k^{q_k}.$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$(60) \quad \begin{aligned} \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \\ \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)| P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \phi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\Lambda d}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda, \end{aligned}$$

où $\phi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ , on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 2.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \text{Ad}) = \gamma(s, \pi_1, \text{Ad}) \gamma(s, \pi_2, \text{Ad}) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, \text{Ad}) = \gamma(s, \pi, \text{Ad})$,
- $\gamma(s, \pi, \text{Ad})$ a un zéro simple en $s = 0$,
- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_2, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,
- $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ a au plus un zéro simple en $s = 0$ et $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ si et seulement si π est dans l'image de l'application de transfert T ,

pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ et $\pi_1, \pi_2 \in \text{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(61)

$$\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{A}\overline{d}, \psi) = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{1 \leq l \neq l' \leq m_i} \left(\frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{1 \leq l \neq l' \leq n_i} \left(\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)} - \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right) \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left(\frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right) \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left(\frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right) \right) F(\lambda),$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V , il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

(62)

$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1 \leq l \leq m_i \\ 1 \leq l' \leq n_i}} \left(s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right)^{-1} \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l < l' \leq p_j} \left(s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right)^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \leq l' \leq q_k} \left(s + \frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right)^{-1} \right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V + \mathcal{H}$; ici $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par l'application $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s, \dots, s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s, \dots, s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s, \dots, s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire. En reprenant les notations de [?], on écrit

(63)

$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{A}\overline{d}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda + s)$ et les lettres P, Q, R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [?, section 3]).

Proposition 2.3 (Beuzart-Plessis [?]). *La limite*

$$(64) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right) d\lambda$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(65)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c}}{|W'|} \\ \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda';$$

où

$$- D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil},$$

- c est le cardinal des $1 \leq k \leq t$ tel que $q_k \equiv 1 \pmod{2}$,
- $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
- W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(PG_{2n}, \tau)$ et W' est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$ (défini après 69).

De plus, \mathcal{A}' est le sous-espace de \mathcal{A} défini par les relations :

- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x}_{i,l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq l \leq n_i$,
- $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq u$ et $1 \leq l \leq \lfloor \frac{p_j}{2} \rfloor$,
- $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq v$ et $1 \leq l \leq \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe \mathcal{A}' de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$(66) \quad \mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v (i\mathbb{R})^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}.$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$. D'après la caractérisation 51, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 51). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T . Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul; d'après 2.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

$$(67) \quad \sigma = \left(\bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \right) \times \sigma_0,$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$(68) \quad T(\sigma_0) = \bigotimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \pmod{2}}}^v \nu_k.$$

On voit apparaître le sous-groupe de Levi

$$(69) \quad L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \times SO(2m+1).$$

De plus, $\sigma = \text{Ind}_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 2.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant σ .

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à \mathcal{A}' . On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \text{Temp}(SO(2n+1))$, avec

$$(70) \quad \begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\bigotimes_{i=1}^t \bigotimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes \left| \det \right|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes \left| \det \right|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \otimes \left| \det \right|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned}$$

De plus, d'après 51, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_{\lambda} \in T(SO(2n+1)/\text{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_{\lambda} = T(\sigma_{\lambda})$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 60), on obtient

$$\begin{aligned}
 (71) \quad & \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\
 &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$(72) \quad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 2.3 et la relation 68. D'autre part, d'après la proposition 2.3 et l'équation 60, on a

$$\begin{aligned}
 (73) \quad & \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P} \\
 & \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda'.
 \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(74) \quad \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \rightarrow 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'.$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$(75) \quad \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda';$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi) \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \overline{\text{Ad}}, \psi) = \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)$ et

$$(76) \quad \frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \text{Ad}, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi).$$

Dans l'expression 75, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 75 est égal au membre de droite 71, d'après l'égalité 72. \square

3. UNE FORMULE D'INVERSION DE FOURIER

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n . On pose $H_n^p = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n défini par $\psi(\text{Tr}(X))$.

Proposition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, alors on a*

$$(77) \quad \int_{H_n} f(s) \theta(s)^{-1} ds = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi) \theta(\xi)^{-1} \theta(\xi_p) d\xi d\xi_p.$$

où W_f est la fonction de $G_{2n} \times G_{2n}$ définie par

$$(78) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n . Pour $n = 1$, H_1^P est trivial, σ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$(79) \quad \int_{F^*} W_f \left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f \left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \psi(u)^{-1} du dz.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n - 1$.

L'ensemble Ω_n des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \bar{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n , en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de \bar{B}_n . On note $\tilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où \tilde{Y} est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et \tilde{h} de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-1}$ et $\tilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1} \tilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \tilde{\Omega}_{n-1}$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\tilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\tilde{\Omega}_n$ avec $\tilde{h} \in P_n$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$(80) \quad \int_{\tilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\tilde{\xi} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p,$$

où les mesures $d\xi'_p$, $d\tilde{\xi}$, $d\xi'_p$ et $d\tilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur Ω_{n-1} , $\tilde{\Omega}_n$, Ω_{n-1}^P et $\tilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices Y et \tilde{Y} de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{\Omega}_{n-1}$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p) R(\tilde{\xi}) f$, on a alors

$$(81) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p. \end{aligned}$$

De plus,

$$(82) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\xi'^{-1}_p v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du,$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2} V$. On

effectue le changement de variable $v \mapsto \xi'_p v \xi'^{-1}_p$, ce qui donne

$$(83) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v \xi'^{-1}_p u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du.$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left(v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$(84) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$(85) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ & \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1} v s \tilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$.

On obtient alors

$$(86) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left(\sigma \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} v s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de v par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n , les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(v)$ devient après conjugaison $\psi(\text{Tr}(y) + \text{Ts}(t))$, où $\text{Ts}(t) = t_{n-1, n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p} \tilde{Z} \tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p} n_1 \tilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \tilde{p} n_2 \tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p} t \tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p} y \tilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

$$(87) \quad \begin{aligned} & \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1} V \sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s \tilde{\xi} \right) \\ & \theta(s)^{-1} \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1} s \sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n . Le changement de

variable $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$ donne

$$(88) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1}g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \tilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$(89) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

Lemme 3.1. Soit $F \in \mathcal{S}(M_n)$, alors

$$(90) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{\text{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|dt d\tilde{p} = F(0).$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2} \times F^*$ à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-2}$ et $\tilde{l}_n \in F^*$.

Démonstration. La mesure $|\det \tilde{p}|d\tilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1} . En remarquant que $\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à \tilde{p} et t , le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. \square

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(91) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V_\sigma$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\tilde{\xi}$ de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où \tilde{Y} est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h} \in F^{n-1} \times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$(92) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} \\ f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dXdgd\tilde{h}d\tilde{Y}d\tilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

$$(93) \quad \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y + X + g\tilde{Y}g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

puisque $n_1 y = y$. On effectue le changement de variable $\tilde{Y} \mapsto g^{-1}\tilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et \tilde{Y} en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X . On obtient alors

$$(94) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-2} \int_{U_n^2} \\ f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\tilde{h} & 0 \\ 0 & g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X))d(n_1, n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ et on remarque que l'on a

$$(95) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables $X \mapsto n_1^{-1}(X + \tilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

$$(96) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(\tilde{Z}n_2))d(n_1, n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables \tilde{Z} et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(97) \quad \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))dn_1 dXdgd\tilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, \tilde{h} ; on trouve bien notre membre de gauche

$$(98) \quad \int_{G_n} \int_{M_n} f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X))dXdg.$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\tilde{H}, H_{n-1}, \tilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^P qui chacune est absolument convergente

mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 94) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 97). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 94, à part l'intégration sur \tilde{Z} , on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(99)

$$W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}} f} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) = \\ (1 + |a_n|)^N |\det aa'|^{-1} W_f \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(100)

$$\int_{\tilde{n}_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\tilde{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det aa'| \\ W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}} f} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma^{-1}, \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \delta_{B_n}(a)^{-1} \delta_{B_{n-1}}(a')^{-1} da dX da' dX'$$

pour N suffisamment grand. On introduit les variables u_X et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 1.4). On a alors

$$(101) \quad \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)},$$

où $b = \text{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 100 est alors majorée à une constante près par

(102)

$$\int_{\tilde{n}_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\tilde{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^N |\det aa'| m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ m(X')^{-\alpha' N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'}) \log(\|b't_{X'}\|)^d \delta_{B_n}^{-2}(a) \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(103) \quad \int_{\tilde{n}_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX,$$

$$(104) \quad \int_{\tilde{n}_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX',$$

$$(105) \quad \int_{\mathcal{A}_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{\mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_{i+1}}|)^{-N} (1 + |\mathbf{a}_n|)^{-N} \log(\|\mathbf{b}\|)^j |\det \mathbf{a}| d\mathbf{a},$$

et

$$(106) \quad \int_{\mathcal{A}_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{\mathbf{a}'_i}{\mathbf{a}'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |\mathbf{a}'_{n-1}|)^{-N} \log(\|\mathbf{b}'\|)^{j'} |\det \mathbf{a}'| d\mathbf{a}',$$

pour j, j' compris entre 0 et d . Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [3, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 pour les deux dernières. \square

4. FORMULES DE PLANCHEREL

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n})$, on note

$$(107) \quad \beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p.$$

Lemme 4.1. *L'intégrale 107 est absolument convergente. La forme linéaire $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ est continue.*

Pour $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$. De plus, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est non nulle.

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(108) \quad \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \int_{\mathcal{A}_{n-1}} \left| W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{k} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}\mathbf{k} \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \right| \delta_{B_{n-1}}(\mathbf{a})^{-1} d\mathbf{a} dX,$$

pour tout $\mathbf{k} \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$(109) \quad \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \int_{\mathcal{A}_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|\mathbf{a}_i|}{|\mathbf{a}_{i+1}|}) (1 + |\mathbf{a}_n|) m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(\mathbf{b}t_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|\mathbf{b}t_X\|)^d \delta_{B_n}(\mathbf{a}) \delta_{B_{n-1}}(\mathbf{a})^{-1} d\mathbf{a} dX,$$

pour tout $N \geq 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant lors de la preuve du lemme 4.3.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n} \backslash P_{2n}, \psi)$ (Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction à $A_{2n-1} K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(O_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. \square

Proposition 4.1. *Soit $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$, on pose $\pi = T(\sigma)$ le transfert de σ dans $\text{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. On identifie $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ par l'isomorphisme $W \mapsto \widetilde{W}$. Il existe un signe $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ tel que*

$$(110) \quad \beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Démonstration. En effet, $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après Jacquet-Rallis (ref). De plus, π est le transfert de σ donc $\tilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\tilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. \square

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1} du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [beuzart-plessis], que l'on note

$$(111) \quad f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u)\psi(u)^{-1} du.$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$(112) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1} du,$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f\pi}$.

Lemme 4.2. *Pour $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n} \backslash G_{2n})$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on a*

$$(113) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W(\xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

Démonstration. On a

$$(114) \quad \begin{aligned} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) &= \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ &\quad \psi(-\text{Tr}(X)) dX \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da \end{aligned}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$(115) \quad \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s ds = \int_{F^*} \widehat{\phi}_k(x) |x|^{1-ns} dx,$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$(116) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi}_k(x) dx = \phi(0).$$

On en déduit que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi)$ est égal à

$$(117) \quad \begin{aligned} \phi(0) \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Corollaire 4.1 (de la limite spectrale). *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $g \in G_{2n}$, alors*

$$(118) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f,T(\sigma)}(g, \cdot)) \\ &\quad \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg) dz$, alors $\tilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$(119) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n} (H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\tilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$, d'après le lemme 4.2, on a

$$(120) \quad \begin{aligned} \int_{Z_{2n} (H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\tilde{f}}(1, \cdot), \phi) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} J(s, W_{f, \pi}(1, \cdot), \phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$(121) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} J(1 - s, \widetilde{W_{f, \pi}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

La proposition 2.2, nous permet d'obtenir la relation

$$(122) \quad \begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \\ \int_{\text{Temp}(SO(2n+1)/\text{Stab})} J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned}$$

Le membre de gauche étant (H_n, θ) -invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

$$(123) \quad \int_{\text{Temp}(SO(2n+1)/\text{Stab})} J(1, R(\xi) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$.

Soit $z \in \mathcal{Z}(G)$ un élément du centre de Bernstein de G . En remplaçant f par zf , on en déduit que

$$(124) \quad \int_{\text{Temp}(SO(2n+1)/\text{Stab})} z(T(\sigma)) (J(1, R(\xi) \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi})) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$.

D'après le lemme de séparation spectrale (ref), on en déduit que $J(1, \widetilde{W_{f, T(\sigma)}(1, \cdot)}, \hat{\phi})$ est (H_n, θ) -invariant.

Lemme 4.3. Soit $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$ et $\pi = T(\sigma)$. Alors

$$(125) \quad J(1, \widetilde{W}, \hat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$(126) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg.$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1, \cdot) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n \backslash G_n$ est (H_n, θ) -invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1} U_{n-1}$, on en déduit que

$$(127) \quad \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg$$

est (H_n, θ) -invariant. Autrement dit, β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant, ce qui termine la preuve du lemme 4.1.

Remarque 4.1. Cette preuve que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant est quelque peu détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ qui est de dimension au plus 1. En utilisant le fait que $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ donc π est (H_n, θ) -distinguée, on a $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. Ce dernier est un sous-espace de $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. On en déduirait alors que la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien $H_n \cap P_{2n}$ -invariant, est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension 1.

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

$$(128) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg \\ &= \int_{P_n \backslash G_n} \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p h & 0 \\ 0 & p h \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh dp. \end{aligned}$$

De plus,

$$(129) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash P_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} \widetilde{W} \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p h & 0 \\ 0 & p h \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \\ &= \beta \left(R \left(\sigma \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1} \right) \widetilde{W} \right) \\ &= \beta(\widetilde{W}), \end{aligned}$$

puisque β est (H_n, θ) -invariant. De plus,

$$(130) \quad \begin{aligned} & \int_{P_n \backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x) dx \\ &= \phi(0). \end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 4.1. \square

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 4.3 dans la relation 122. \square

4.1. Formule de Plancherel explicite sur $H_n \backslash G_{2n}$. On note $Y_n = H_n \backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$(131) \quad \varphi_f(\mathbf{y}) = \int_{H_n} f(h\mathbf{y})\theta(h)^{-1}dh,$$

pour tout $\mathbf{y} \in Y_n$.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(132) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh,$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose

$$(133) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) d\xi_p,$$

pour tout $\pi \in \mathcal{T}(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2 . Alors on a

$$(134) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. On a

$$(135) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(h_2\mathbf{y})} \theta(h_1)^{-1} \theta(h_2) dh_1 dh_2 d\mathbf{y}.$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(136) \quad (\mathbf{y}, h_1, h_2) \in Y_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(h_2\mathbf{y})}$$

est à support compact, ou Y_n est un système de représentant de Y_n . On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon \mathbf{y} et h_2 en une intégrale sur G_{2n} . Ce qui donne

$$(137) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1\mathbf{y}) \overline{f_2(\mathbf{y})} \theta(h_1)^{-1} dh_1 d\mathbf{y},$$

qui est bien la relation 132.

D'après 3.1 et 4.1, on a

$$(138) \quad \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p.$$

Lemme 4.4. *La fonction $(\xi_p, \sigma) \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$ est à support compact, l'intégrale 138 est donc absolument convergente.*

Démonstration. La fonction $\xi_p \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de f_π , $W_{f, \pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit K_f un sous-groupe ouvert compact tel que f est biinvariant par K_f . Alors $\pi(f) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K_f -invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f -invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M , on en déduit le lemme. \square

On échange les intégrales pour obtenir

$$(139) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2 . Commençons par le

Lemme 4.5. *Soit $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$. On introduit un produit scalaire sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)$:*

$$(140) \quad (W, W')^{W_h} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p) \overline{W'(p)} dp,$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est de rang fini. Notons $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ une base finie orthonormée de son image. Alors

$$(141) \quad W_{f, \pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \overline{\pi(f_2)W'} \otimes \pi(f_1)W'.$$

Démonstration. Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)^{W_h}$ est P_{2n} -invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi G_{2n} -invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$(142) \quad \begin{aligned} \pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{W_h} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (W, \pi(f^\vee)W')^{W_h} W'. \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(\cdot, \cdot)^{W_h}$ de faire l'identification

$$(143) \quad \begin{aligned} \pi(f^\vee) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} W' \otimes \pi(f^\vee) \overline{W'} \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1)W' \otimes \overline{\pi(f_2)W'}, \end{aligned}$$

d'après l'invariance par G_{2n} du produit scalaire.

On en déduit que

$$(144) \quad \begin{aligned} W_{f, \pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \int_{N_{2n}}^* (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W') \psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2) \overline{\pi(f_2)W'(g_1)}, \end{aligned}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [?, Prop 2.14.2] (qui est une conséquence de [?, Lemme 4.4]). \square

Le lemme 4.5 donne la relation

$$(145) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma), \psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')} \beta(T(\sigma)(f_1)W'),$$

qui est bien indépendante du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est H_n -invariante.

Pour finir, [?, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$(146) \quad \gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|.$$

□

4.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.

Lemme 4.6. *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$(147) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta).$$

Démonstration.

□

Théorème 4.2. *On a la décomposition de Plancherel abstraite suivante*

$$(148) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}}^{\otimes} T(\sigma) d\sigma.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.6 et de la décomposition de Plancherel déduite du théorème 4.1.

□

RÉFÉRENCES

- [1] D. BELT, *On the holomorphy of exterior-square l-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).
- [2] G. HENNIART, *Correspondance de langlands et fonctions l des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.
- [3] H. JACQUET AND J. SHALIKA, *Exterior square l-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.
- [4] A. C. KABLE, *Asai l-functions and jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.
- [5] N. MATRINGE, *Linear and shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.
- [6] J.-L. WALDSPURGER, *La formule de plancherel pour les groupes p-adiques. d'apres harish-chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), p. 235–333.