UNFOLDING

On note H l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n. On pose $H_P = H \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Proposition 0.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_H f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_P\cap N_{2n}\backslash H_P}\int_{H\cap N_{2n}\backslash H} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)^{-1}d\xi d\xi_p. \tag{1}$$

où W_f *est la fonction de* $G_{2n}\times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1,g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du \tag{2}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n=1$, H_P est trivial, σ est trivial et $H \simeq N_2Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1,\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{3}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n>1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

Le groupe $H\cap N_{2n}\backslash H$ est isomorphe à l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & Y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et h dans $N_n\backslash G_n$. On note H' le groupe $H\cap N_{2n}\backslash H$ au rang $n-1$, c'est l'ensemble des matrices de la forme de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & Y'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h' & 0\\ 0 & h'\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où Y' est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille $n-1$ et h' dans $N_{n-1}\backslash G_{n-1}$. On note $\tilde{H}$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h} & 0\\ 0 & \tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\tilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \tilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\tilde{y}\in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n\backslash G_n$. On voit le groupe H' comme sous-groupe de $H\cap N_{2n}\backslash H$, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y' et voyant h' comme un élément de $N_n\backslash G_n$. On en déduit que $H\cap N_{2n}\backslash H = \tilde{H}H'$.

De même, on dispose d'une décomposition, $H_P\cap N_{2n}\backslash H_P = \tilde{H}_P H'_{P'}$, où $H'_{P'}$ est le groupe $H_P\cap N_{2n}\backslash H_P$ au rang $n-1$ et $\tilde{H}_P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p} & 0\\ 0 & \tilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\tilde{Z}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \tilde{z} & 0\end{pmatrix}$ avec $\tilde{z}\in F^{n-1}$ et $\tilde{p}$ est dans $P_{n-1}U_n\backslash P_n$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\tilde{H}_P}\int_{H'_{P'}}\int_{\tilde{H}}\int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p\xi'_p,\tilde{\xi}\xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1/2}d\xi' d\tilde{\xi} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p. \tag{4}$$

On a choisit les représentants des matrices Y, $\tilde{Y}$, Z et $\tilde{Z}$ de sorte à ce que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{H}_P$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{H}$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p)R(\tilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_{H'_p{}'}\int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p\xi'_p, \tilde{\xi}\xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1/2}d\xi' d\xi'_p = \\
&\int_{H'_p{}'}\int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1}d\xi' d\xi'_p.
\end{aligned} \tag{5}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}}\int_V f'({\xi'}_p^{-1}\nu u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du, \tag{6}$$

où V est l'ensemble des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p\nu{\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}}\int_V f'(\nu{\xi'}_p^{-1}u\xi')\psi(u)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu du. \tag{7}$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1}\int_V f'\left(\nu\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\right)\psi(\nu)^{-1}d\nu$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p\xi'|W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi'). \tag{8}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
&\int_{H'_p{}'}\int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1}d\xi' d\xi'_p = \\
&\int_{H'_p{}'}\int_{H'} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi')d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s)\theta(s)^{-1}ds = \\
&\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1}\nu s\tilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds,
\end{aligned} \tag{9}$$

où l'on a noté H_{n-1} le groupe H au rang $n-1$.

Il nous faut maintenant intégrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma\begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{p} & 0\\ 0 & \tilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$. On obtient alors

(10)

$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_V f\left(\sigma\begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1}\nu s\tilde{\xi}\right)\theta(s)^{-1}\psi(\nu)^{-1}d\nu ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de ν par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p}\tilde{Z}\tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p}n_1\tilde{p}^{-1}$,

$n_2 \mapsto \tilde{p}n_2\tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p}t\tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p}y\tilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(11)
$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}}|\det s|^{-1}\int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\sigma^{-1}s\tilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det\tilde{p}|^3 d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dsd\tilde{\xi}d\tilde{Z}d\tilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1}s\sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}&\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det\tilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1}g & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det\tilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\tilde{\xi}d\tilde{Z}d\tilde{p}.\end{aligned}\tag{12}$$

On effectue le changement de variables $g \mapsto \tilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned}&\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma}\\ &f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)\\ &\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det\tilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\tilde{\xi}d\tilde{Z}d\tilde{p}.\end{aligned}\tag{13}$$

Lemme 0.1. *Soit* $F \in \mathcal{S}(G_n)$*, alors*

$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{Lie(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det\tilde{p}|dtd\tilde{p} = F(0).\tag{14}$$

Démonstration. On a $P_{n-1}U_n\backslash P_n \simeq F^{n-1}\backslash\{0\}$. De plus, $|\det\tilde{p}|d\tilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1}. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\tilde{p}$ et t, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(15)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\tilde{\xi}d\tilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t=0$. Le changement de variable $n_2 \mapsto n_2n_1$ donne

(16)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\tilde{\xi}d\tilde{Z}.$$

De plus, on a

(17)
$$\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & yn_1^{-1}+n_1Xn_1^{-1}-\tilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}.$$

On effectue les changements de variables $y\mapsto yn_1$ et $X\mapsto n_1^{-1}Xn_1$. Ce qui nous permet de combiner les intégrales selon y et X en une intégration sur $M_{n-1}\times F^n$ dont on note encore la variable X. On explicite l'intégration sur $\tilde{\xi}$ de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h} & 0\\ 0 & \tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\tilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \tilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\tilde{y}\in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n\backslash G_n$. L'intégrale devient

(18)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{P_n\backslash G_n}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}\times F^n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X-\tilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g & 0\\ 0 & n_1g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \tilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h} & 0\\ 0 & \tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Y}d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $\tilde{Y}\mapsto(n_1g)^{-1}\tilde{Y}n_1g$ et on combine les intégrales sur X et $\tilde{Y}$ en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X. On obtient alors

(19)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{P_n\backslash G_n}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X-\tilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\tilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}.$$

On effectue ensuite le changement de variables $X\mapsto X+\tilde{Z}n_2$ ce qui donne

$$\int_{F^{n-1}}\int_{P_n\backslash G_n}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\tilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\tilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\tilde{h}d\tilde{Z}. \tag{20}$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\tilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{P_n\backslash G_n}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\tilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\tilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\tilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\tilde{h}. \tag{21}$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, h ; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{22}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V qui n'est pas absolument convergente avec les intégrales sur $\tilde{H}$, H', $\tilde{H}_P$ et $H'_{P'}$ qui sont absolument convergente. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 19) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 21). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 19, à part l'intégration sur $\tilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe donc l'intégration est aussi absolument convergente.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(23)

$$W_{r^N|\det|^{-1}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(24)

$$\int_{\bar{t}_{n-1}}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{t}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-1}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)dadXda'dX'.$$

pour N suffisamment grand. Or cette dernière intégrale est majorée [1] à une constante prés par

(25)

$$\int_{\bar{t}_{n-1}}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{t}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n-2}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')dadXda'dX',$$

où $b = \mathrm{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$ et $b' = \mathrm{diag}(a'_1, a'_1, a'_2, a'_2, ...)$. Cette dernière intégrale est majorée (à une constante prés) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{t}_n} m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j}dX, \tag{26}$$

$$\int_{\bar{t}_{n-1}} m(X')^{-\alpha' N}\delta_{B_{2n-2}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'})\log(\|t_{X'}\|)^{d-j'}dX', \tag{27}$$

1. https ://github.com/nicolasduhamel/carre-exterieur/blob/master/carre-exterieur.pdf

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da, \tag{28}$$

et

$$\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da', \tag{29}$$

pour j, j' compris entre 0 et d. Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand.

$\square$