FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \backslash \mathrm{GL}_{2n}$

1. Introduction

Sakellaridis et Venkatesh [9] ont étudié des formules de Plancherel sur $L^2(X)$ où X est une variété sphérique d'un groupe p-adique G. On prouve un cas particulier de la

Conjecture 1.1 (Sakellaridis-Venkatesh [9])**.** *Soit X une variété sphérique d'un groupe p-adique G. Il existe un groupe G_X et une application $\iota_* : \mathrm{Temp}(G_X) \to \mathrm{Temp}(G)$ tels que l'on ait une décomposition spectrale*

$$L^2(X) = \int_{\mathrm{Temp}(G_X)/\sim}^{\oplus} \iota_*(\sigma) d\mu_{G_X}(\sigma), \tag{1}$$

où $d\mu_{G_X}$ est la mesure de Plancherel sur G_X et $\sim$ est la relation d'équivalence "égalité des paramètres de Langlands".

Soit F un corps de nombres et ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_F$. On note H_n le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in \mathrm{GL}_n$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. Soit θ le caractère sur H_n qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

L'essentiel de notre travail consiste alors à prouver la

Conjecture 1.2 (Sakellaridis-Venkatesh)**.** *Soit k un corps p-adique. On pose $X = H_n(k) \backslash G_{2n}(k)$. On a une décomposition spectrale*

$$L^2(X) = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\mu_{SO(2n+1)}(\sigma), \tag{2}$$

où $d\mu_{SO(2n+1)}$ est la mesure de Plancherel sur $SO(2n+1)(k)$, $\sim$ est la relation d'équivalence "égalité des paramètres de Langlands" et $T : \mathrm{Temp}(SO(2n+1)) \to \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n})$ est l'application de transfert de $SO(2n+1)$ à GL_{2n}.

Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et ϕ_1, ϕ_2 des fonctions de Schwartz sur $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$ qui sont $(H_n(\mathbb{A}_F), \theta)$-invariante. On note $\Sigma\phi_i \in C^\infty([\mathrm{GL}_{2n}])$, pour $i = 1, 2$, la fonction définie par $\Sigma\phi_i(g) = \sum_{x \in H_n(F)\backslash GL2n(F)} \phi_i(xg)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_F)$. D'autre part, pour $\varphi \in \pi$, on introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h) dh, \tag{3}$$

où Z_n est le centre de GL_n et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent une factorisation du produit scalaire $< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{\mathrm{Pet}} = \int_{[H_n]} (\Sigma\phi_1)_\pi(h)(\Sigma\phi_2)_\pi(h) dh$, où $(\Sigma\phi_1)_\pi$ est la projection

Date: 27 mai 2019.

sur π de $\Sigma\phi_i$ et dh est la mesure de Tamagawa de $[H_n]$ [9, section 17.1]. Cette factorisation prend la forme suivante

$$< (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi >_{\mathrm{Pet}} = q \prod_{\nu}' < \phi_{1,\nu}, \phi_{2,\nu} >_{\sigma_\nu}, \tag{4}$$

où q est un rationnel (qui dépend de π), il est nul si π n'est pas le transfert d'une représentation automorphe cuspidale σ de $SO(2n+1)(\mathbb{A}_F)$. Les quantités $< \phi_{1,\nu}, \phi_{2,\nu} >_{\sigma_\nu}$ sont des formes linéaires $H_n(F_\nu)$-invariante, elles sont conjecturalement reliées à la factorisation de la période globale $\mathcal{P}_{H_n,\theta}$ en produit de période locale. On renvoie à [9, section 17.5] pour la signification du produit $\prod_\nu'$. En effet, le produit n'est pas absoluement convergent et on doit l'interpréter comme l'évaluation d'une fonction L.

La factorisation de la période globale $\mathcal{P}_{H_n,\theta}$ comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour Φ une fonction de Schwartz sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ qui est $(H_n(\mathbb{A}_F), \theta)$-invariante et W_φ la fonction de Whittaker associée à φ, on introduit dans la suite des fonctions zêta globales $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathrm{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{5}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales, pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{\nu \in S} J(s, W_\nu, \Phi_\nu), \tag{6}$$

où S est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1, W_\nu, \Phi_\nu)}{\widehat{\Phi}_\nu(0)}$, que l'on désignera par β dans la section 5, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 5.1.

On commence dans la section 2 par prouver une relation sur les facteurs γ du carré extérieur. Les sections 3 et 4 sont des préliminaires pour le théorème 5.1. On fini dans la section 5 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n\backslash GL_{2n}, \theta)$ et une formule de Plancherel abstraite sur $L^2(GL_n \times GL_n\backslash GL_{2n})$.

1.1. **Notations.** Dans la suite on notera F un corps p-adique (sauf dans la section 2 où F peut désigner un corps archimédien) et ψ un caractère non trivial de F. On note q_F le cardinal du corps résiduel de F. On notera G_{2n} le groupe $GL_{2n}(F)$ et $PG_{2n} = Z_n(F)\backslash GL_{2n}$. De plus, dans la suite on posera $H_n = H_n(F)$ le groupe de ses F-points. On note B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F. On note U_n le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique.

Pour G un groupe réductif connexe sur F (dans la suite G sera GL_{2n}, SO_{2n+1} ou un quotient, d'un sous-groupe de Levi de ces groupes), on note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$. On note Z_G le centre de $G(F)$ et A_G le tore déployé maximal dans Z_G. On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathsf{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \to {}^L SO(2m+1)$, où W'_F est le groupe de Weil-Deligne de F. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ démontrée par Arthur [1], nous permet de définir une application de transfert $T : \mathsf{Temp}(SO(2m+1))/\mathsf{Stab} \to \mathsf{Temp}(G_{2m})$.

Dans les mesures de Plancherel, on verra apparaître des termes $|S_\sigma|$ pour $\sigma \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))$ ou $\mathsf{Temp}(PG_{2n})$. On n'explicite pas les ensembles S_σ et on se contente de donner leur cardinal. Pour $\sigma \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_l \times \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\sigma|$ est le produit $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$ et $|S_{\pi_i}| = n_i$.

Pour $\pi \in \mathsf{Temp}(G)$ et r une représentation admissible de ${}^L G$, on note $L(s, \pi, r)$ la fonction L associée par la correspondance de Langlands locale et $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ le facteur γ associée. Lorsque r est la représentation standard, on l'omettra. De plus, on note $\gamma^*(0, \pi, r, \psi)$ la régularisation du facteur γ en 0, défini par la relation

$$\gamma^*(0, \pi, r, \psi) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\gamma(s, \pi, r, \psi)}{(s\log(q_F))^{n_{\pi,r}}}, \tag{7}$$

où $n_{\pi,r}$ est l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ en $s = 0$.

1.2. **Mesures.** On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ. Pour G un groupe réductif connexe sur F, on équipe A_G de la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A_G)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur $F^\times$.

Décrivons comment on normalise la mesure sur Temp(G). Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant σ. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\widetilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\widetilde{\chi}. \tag{8}$$

La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\mathsf{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G, M)|^{-1} (\mathrm{Ind}_M^G)_* d\sigma. \tag{9}$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 59.

1.3. **Résultats.** Le résultat principal est le

Théorème 1.1. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(H_n(F) \backslash G_{2n}(F), \theta) \simeq \int^{\oplus}_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\mathsf{Stab}} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{10}$$

De l'isomorphisme $L^2(GL_n(F) \times GL_n(F) \backslash GL_{2n}(F)) \simeq L^2(H_n(F) \backslash G_{2n}(F), \theta)$ GL_{2n}-invariant, on en déduit le

Théorème 1.2. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$L^2(GL_n(F)\times GL_n(F)\backslash GL_{2n}(F)) \simeq \int^{\oplus}_{Temp(SO(2n+1)(F))/Stab} T(\sigma)\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma. \tag{11}$$

2. Facteurs γ du carré extérieur

Dans cette partie F désigne un corps local de caractéristique 0 et ψ un caractère non trivial de F. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s,W,\phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi), \tag{12}$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

2.1. Préliminaires.

2.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s,W,\phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi(-Tr(X))dX\phi(e_n g)|\det g|^s dg \tag{13}$$

pour tous $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$ et $s\in\mathbb{C}$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n\end{smallmatrix}\right)$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $Re(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 2.1 (Jacquet-Shalika [6])**.** *Il existe* $\eta>0$ *tel que les intégrales* $J(s,W,\phi)$ *convergent absolument pour* $Re(s)>1-\eta$.

Kewat montre, lorsque F est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 2.2 (Belt [2])**.** *Fixons* $s_0\in\mathbb{C}$. *Il existe* $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$ *tels que* $J(s,W,\phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en* s_0. *Si* $F=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *le point* s_0 *peut éventuellement être un pôle. Si* F *est* p*-adique, on peut choisir* W *et* ϕ *tels que* $J(s,W,\phi)$ *soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s,\pi,\Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [4]) par ces intégrales.

Proposition 2.3 (Jacquet-Shalika [6])**.** *Supposons que F est p-adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F. Soit π une représentation non ramifiée de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^n$ et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{14}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p-adique. Plus précisément, on a la

Proposition 2.4 (Matringe [8])**.** *Supposons que F est un corps p-adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1 - s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}, \tag{15}$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n (g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1 - s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}. \tag{16}$$

2.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{17}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

(18)
$$\int_{N_n\backslash G_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W_\varphi \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi_{\mathbb{A}}(\mathrm{Tr}(X)) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 2.5 (Jacquet-Shalika [6])**.** *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}), \tag{19}$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ *et* $\hat{\Phi}$ *est la transformée de Fourier de* Φ *par rapport au caractère* $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v). \tag{20}$$

2.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 2.1 (Kable [7])**.** *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Il existe un corps de nombres* k *et une place* v_0 *telle que* $k_{v_0} = F$*, où* v_0 *est l'unique place de* k *au dessus de* p.

On note $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 2.6 (Beuzart-Plessis [3])**.** *Soient* k *un corps de nombres,* v_0, v_1 *deux places distinctes de* k *avec* v_1 *non archimédienne. Soit* U *un ouvert de* $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$*. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible* Π *de* $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ *telle que* $\Pi_{v_0} \in U$ *et* Π_v *est non ramifiée pour toute place non archimédienne* $v \notin \{v_0, v_1\}$.

2.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n) f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— Si F est p-adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$,

— Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $\|a\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 2.2. *Soit* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$. *Alors, pour tout* $N \geqslant 1$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d, \tag{21}$$

pour tous $b \in A_{2n}(F)$ *et* $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$.

Lemme 2.3. *Il existe* N *tel que pour tous* s *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et* $d > 0$, *l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da \tag{22}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 2.4. *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n \backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

(23)

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak)\right| dX dk \, |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-1}(a) da.$$

On pose $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma_n, \tag{24}$$

où $b = \mathrm{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

(25)

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(b u_X \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak)\right| dX dk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da.$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_x et on pose $k_\sigma = \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 2.2 donne alors

$$|W(b t_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(b t_x) \log(\|b t_X\|)^d. \tag{26}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j. On dispose de la

Proposition 2.7 (Jacquet-Shalika [6])**.** *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* k *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* k *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* j *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* j *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

(27)

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d$$

$$\leqslant C2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{28}$$

où $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [6, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n ak)| \leqslant C'(1 + |a_n|)^{-N}. \tag{29}$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX \tag{30}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da. \tag{31}$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n}|a_1|^{3-2n}|a_2|^{5-2n}|a_2|^{7-2n}...|a_n|^{2n-3}|a_n|^{2n-1}, \tag{32}$$

$$= |a_1|^{4-4n}|a_2|^{12-4n}...|a_n|^{4n-4}, \tag{33}$$

$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{34}$$

□

2.2. **Facteurs γ.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π, on dispose du

Lemme 2.5. *Soient* $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi))$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. *Supposons que* $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. *Alors il existe une application continue* $\pi' \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et un voisinage* $V \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ *de* π *tels que* $W_0 = W_\pi$ *et l'application* $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ *soit continue.*

En particulier, si F *est un corps* p*-adique, ce quotient est égal à* $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ *(proposition 2.4) ; donc* $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ *est continue.*

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ par rapport au caractère additif ψ, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ. Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

Lemme 2.6. *Soient* $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. *Supposons que* $J(s, W, \phi) \neq 0$. *Alors*

$$\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s,W,\phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}. \tag{35}$$

Démonstration. En effet, la mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega(\lambda)J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{36}$$

On en déduit immédiatement le lemme. □

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [4]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 2.8. *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on ait*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{37}$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{38}$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_K/K$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 2.3. Pour

$w = \infty$ ou v, on fait un choix, d'après la proposition 2.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{39}$$

On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est non ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 2.5, on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1 - s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{40}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [4]),

$$L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{41}$$

Les équations (40) et (41), en utilisant la proposition 2.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$\begin{aligned} &J(1 - s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 2.3 et du lemme 2.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 2.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1, \tag{43}$$

d'après la proposition 2.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [4]).

L'équation (42) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1 - s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{44}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant le lemme 2.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n}) \tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 2.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{45}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place v', on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (45) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{46}$$

La fonction R est donc une fraction rationnelle en q_v^s périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{47}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{48}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi})}. \tag{49}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1. \tag{50}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 48, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}). \tag{51}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1. \tag{52}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. □

Proposition 2.9. *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *est défini par la proposition 2.4. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{53}$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p. Soient v, v' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de v_0. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 2.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 2.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_∞ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 2.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{54}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [4])

$$L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S\cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{55}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 2.4 et 2.8, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty \in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1. \tag{56}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. $\square$

3. Limite spectrale

Dans cette partie F est un corps p-adique. On renvoie à la section 1.1 pour la normalisation des mesures sur $\mathrm{Temp}(G)$, pour un groupe G réductif connexe sur F.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{57}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 3.1 (Harish-Chandra [10])**.** *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{58}$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ *et* $g \in PG_{2n}$. *De plus, on a l'égalité de mesure suivante :*

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|} d\pi, \tag{59}$$

où $\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q_F)^{-n_{\pi,\overline{Ad}}}\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$, *avec* $n_{\pi,\overline{Ad}}$ *l'ordre du zéro de* $\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$ *en* $s=0$. *Pour* $\pi \in Temp(PG_{2n})$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, *le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $Temp(G)/Stab$ le quotient de $Temp(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

Rappelons (section 1.1) que la correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : Temp(SO(2m+1))/Stab \to Temp(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(Temp(SO(2n+1))/Stab) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^k \tau_i \times \widetilde{\tau_i}\right) \times \bigtimes_{j=1}^l \mu_i \tag{60}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(Temp(SO(2m_j+1))/Stab) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 3.2. *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(Temp(PG_{2n}))$, *on a*

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}} = \\ &\int_{Temp(SO_{2n+1})/Stab} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned} \tag{61}$$

Pour $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times ... \times \pi_l \times \sigma_0$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ *et* $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, *le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ *; où* $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ *tel que* $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ *avec* $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 59, on a

$$\int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} d\pi. \tag{62}$$

Soit $\pi \in Temp(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π. On écrit la représentation π sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k}\right), \tag{63}$$

où

— $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.

— $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.

— $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$M = \left(\prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{\nu} G_{f_k}^{q_k}\right)/Z_{2n} \tag{64}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparait dans la définition de π. Alors $\pi = \mathrm{Ind}_M^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, alors $X^*(M)\otimes\mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^{\nu}(i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^{\alpha} \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :
— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), ..., x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), ..., \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), ..., y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), ..., z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, où

$$\begin{aligned}\pi_\lambda = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t}\left(\bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}}\right) \times \left(\bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}}\right)\right)\\ &\times \left(\bigtimes_{j=1}^{u}\bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{\nu}\bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}\right).\end{aligned} \tag{65}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(PG_{2n},\tau)$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(PG_{2n},\tau)$ est le sous-groupe de $W(PG_{2n}, M)$ fixant la représentation τ. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} d\pi \tag{66}$$

d'après la relation 59. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} d\lambda. \tag{67}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j} \prod_{k=1}^{\nu} f_k^{q_k}. \tag{68}$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \tag{69}$$
$$\frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda,$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 3.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*
- $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,Ad) = \gamma(s,\pi_1,Ad)\gamma(s,\pi_2,Ad)\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,
- $\gamma(s,\pi|\det|^x,Ad) = \gamma(s,\pi,Ad)$,
- $\gamma(s,\pi,Ad)$ *a un zéro simple en* $s=0$,
- $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,
- $\gamma(s,\pi|\det|^x,\Lambda^2) = \gamma(s+2x,\pi,\Lambda^2)$,
- $\gamma(s,\pi,\Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s=0$ *et* $\gamma(0,\pi,\Lambda^2)=0$ *si et seulement si* π *est dans l'image de l'application de transfert* T,

pour tous $x\in\mathbb{C}$, $\pi\in\Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1,\pi_2\in\mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(70)
$$\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}\left(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}\left(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^u \prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}\left(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^v \prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}\left(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)\right)F(\lambda),$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V, il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

(71)
$$\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\ 1\leqslant l'\leqslant n_i}}\left(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)^{-1}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^u \prod_{1\leqslant l< l'\leqslant p_j}\left(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^v \prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}\left(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)^{-1}\right)G(2\lambda+s),$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$; ici $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s)=d_i(s,...,s)$, $y_j(\lambda_s)=e_j(s,...,s)$ et $z_k(\lambda_s)=f_k(s,...,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [3], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [3], on

écrit
(72)
$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} = \varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda+s)$ et les lettres P, Q, R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [3, section 3]).

Proposition 3.3 (Beuzart-Plessis [3])**.** *La limite*

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda \tag{73}$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(74)
$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to 0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

où
— $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i}\prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^\nu f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,
— *c est le cardinal des* $1 \leqslant k \leqslant t$ *tel que* $q_k \equiv 1 \mod 2$,
— $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^\nu \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$,
— *W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(PG_{2n},\tau)$ et W' est isomorphe à $W(SO(2n+1),\sigma)$ (defini après 78).*

De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :
— $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lfloor\frac{p_j}{2}\rfloor$,
— $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant \nu$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$.

On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{n_i}\prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^\nu (i\mathbb{R})^{\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}. \tag{75}$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$. D'après la caractérisation 60, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 60). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 3.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

$$\sigma = \left(\bigtimes_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \bigtimes_{j=1}^u \mu_j^{\times\frac{p_j}{2}} \times \bigtimes_{k=1}^\nu \nu_k^{\times\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}\right) \times \sigma_0, \tag{76}$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{\nu} \nu_k. \tag{77}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Levi

$$L = \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times SO(2m+1). \tag{78}$$

De plus, $\sigma = Ind_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 3.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant σ.

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in Temp(SO(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\bigtimes_{k=1}^{\nu} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned} \tag{79}$$

De plus, d'après 60, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/Stab)$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 69), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ & = \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ & = \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'. \end{aligned} \tag{80}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} d_i{}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j{}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} f_k{}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D}, \tag{81}$$

d'après les notations de la proposition 3.3 et la relation 77. D'autre part, d'après la proposition 3.3 et l'équation 69, on a

(82)

$$\lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'| P}$$
$$\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \to 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i, n_i, s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j, s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right) \prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k, s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \to 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'. \tag{83}$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi)}{\log(q_F)^N}d\lambda'; \tag{84}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0,1,\psi)\gamma^*(s,\pi_{\lambda'},\overline{Ad},\psi) = \gamma^*(s,\pi_{\lambda'},Ad,\psi)$ et

$$\frac{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),Ad,\psi)}{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\Lambda^2,\psi)} = \gamma(s,\sigma_{\lambda'},Ad,\psi). \tag{85}$$

Dans l'expression 84, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 84 est égal au membre de droite 80, d'après l'égalité 81. □

4. Une formule d'inversion de Fourier

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n défini par $\psi(Tr(X))$.

Proposition 4.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{86}$$

où W_f *est la fonction de* $G_{2n}\times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1,g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du \tag{87}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 1$, H_1^P est trivial, σ_n est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{88}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

L'ensemble Ω_n des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n}\backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1}\widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_{n-1}$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{\Omega}_n$ avec $\widetilde{h} \in P_n$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi'_p d\widetilde{\xi}_p, \tag{89}$$

où les mesures $d\xi'$, $d\widetilde{\xi}$, $d\xi'_p$ et $d\widetilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur Ω_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_n$, Ω_{n-1}^P et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices Y et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p) R(\widetilde{\xi}) f$, on a alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p. \end{aligned} \tag{90}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'({\xi'}_p^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du, \tag{91}$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2} V$. On effectue le changement de variable $v \mapsto {\xi'}_p v {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v {\xi'}_p^{-1} u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du. \tag{92}$$

On note $\widetilde{f'}(g) = |\det g|^{-1} \int_V f'\left(v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\widetilde{f'} \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi'). \tag{93}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f'}(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ &\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} v s \widetilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned} \tag{94}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$.

On obtient alors

(95)

$$\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} v s \widetilde{\xi}\right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de ν par σ_n^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p}n_1\widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p}n_2\widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p}y\widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(96)
$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}s\widetilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma_n^{-1}s\sigma_n$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det\widetilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right) \tag{97}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right) \tag{98}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.$$

Lemme 4.1. *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|dtd\widetilde{p} = F(0). \tag{99}$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2}\times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

Démonstration. La mesure $|\det\widetilde{p}|d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1}. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\widetilde{p}$ et t, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(100)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n} f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\widetilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z},$$

où $\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n$ est le sous-groupe de $\sigma_n^{-1}V\sigma_n$ où $t=0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma_n\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y}\in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}\in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \tag{101}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(102)
$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},$$

puisque $n_1y=y$. On effectue le changement de variable $\widetilde{Y}\mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X. On obtient alors

(103)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2\mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}. \tag{104}$$

Le changement de variables $X\mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(105)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n} |\det g|^{-1}\int_{U_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 g\widetilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1 dXdgd\widetilde{h}. \tag{106}$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, $\widetilde{h}$; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{107}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, H_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^p qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 103) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 106). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 103, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(108)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(109)
$$\int_{\bar{n}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{n}_n}\int_{A_n} (1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}dadXda'dX'$$

pour N suffisamment grand. On introduit les variables u_X et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 2.4). On a alors

$$\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{110}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 109 est alors majorée à une constante près par

(111)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N|\det aa'|m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')dadXda'dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j}dX, \tag{112}$$

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X')^{-\alpha' N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'})\log(\|t_{X'}\|)^{d-j'}dX', \tag{113}$$

$$\int_{A_n}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}(1+|a_n|)^{-N}\log(\|b\|)^j|\det a|da, \tag{114}$$

et

$$\int_{A_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}(1+|a'_{n-1}|)^{-N}\log(\|b'\|)^{j'}|\det a'|da', \tag{115}$$

pour j, j' compris entre 0 et d. Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [6, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 2.3 pour les deux dernières.

□

5. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1}d\xi_p. \tag{116}$$

Lemme 5.1. *L'intégrale 116 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue.*

Pour $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$*. De plus, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est non nulle.*

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}}\left|W\left(\sigma_n\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\right|\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1}dadX, \tag{117}$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})(1+|a_n|) m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{118}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ)-invariant lors de la preuve du lemme 5.3. En reprenant les indications de l'introduction, cela vient du fait que les fonctions $J(1, W, \phi)$ sont (H_n, θ)-invariant.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n}, \psi)$ (ref)(Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. □

Proposition 5.1. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, on pose* $\pi = T(\sigma)$ *le transfert de* σ *dans* $\mathrm{Temp}(G_{2n})$*. La forme linéaire* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$*. On identifie* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $W \mapsto \widetilde{W}$*. Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{119}$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$*.*

Démonstration. En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [5]. De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. □

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1}du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [3], que l'on note

$$f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u)\psi(u)^{-1}du. \tag{120}$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du, \tag{121}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Lemme 5.2. *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on a*

$$\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{122}$$

Démonstration. On a

(123)

$$\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) = \int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1}da$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s ds = \int_{F^*}\widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx, \tag{124}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_nk)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0+}\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x)dx = \phi(0). \tag{125}$$

On en déduit que $\lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)$ est égal a

$$\begin{aligned}\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} & W\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\\ & \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da,\end{aligned} \tag{126}$$

ce qui nous permet de conclure. □

Corollaire 5.1 (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g \in G_{2n}$*, alors*

$$\begin{aligned}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(g,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} & \beta(W_{f,T(\sigma)}(g,.))\\ & \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma.\end{aligned} \tag{127}$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{128}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\widetilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, d'après le lemme 5.2, on a

(129)

$$\begin{aligned}\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)J(s,W_{\widetilde{f}}(1,.),\phi)\\ &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})} J(s,W_{f,\pi}(1,.),\phi)d\mu_{PG_{2n}}(\pi).\end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

(130)

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =$$
$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})} J(1-s,\widetilde{W_{f,\pi}(1,.)},\widehat{\phi})c(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

La proposition 3.2, nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned}(131)\qquad &\int_{H_n \cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \\ &\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi})c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned}$$

Le membre de gauche étant (H_n,θ)-invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

(132)

$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi})d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [3, Lemme 5.7.2], on en déduit que $J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) = J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi})$ pour tout $\xi \in H_n$ et donc que $J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}))$ est (H_n,θ)-invariant.

Lemme 5.3. *Soit* $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$(133)\qquad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0)c_\beta(\sigma)\beta(W),$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$(134)\qquad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg.$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1,.) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n\backslash G_n$ est (H_n,θ)-invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

$$(135)\qquad \int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dXdg$$

est (H_n,θ)-invariant. Autrement dit, β restreint à $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est (H_n,θ)-invariant, ce qui termine la preuve du lemme 5.1.

Remarque 5.1. *Cette preuve que* β *restreint à* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est* (H_n,θ)*-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi,\theta)$ *qui est de dimension au plus* 1*. En utilisant le fait que* $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ *donc* π *est* (H_n,θ)*-distinguée, on a* $Hom_{H_n}(\pi,\theta) \neq 0$*. Ce dernier est un sous-espace de* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi,\theta)$*. On en déduirait alors que la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$*, qui est bien* $H_n \cap P_{2n}$*-invariant, est un élément de* $Hom_{H_n}(\pi,\theta)$*. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension* 1*.*

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

(136)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dX\widehat{\varphi}(e_n g)|\det g|dg$$
$$= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dX\widehat{\varphi}(e_n h)|\det h|dhdp.$$

De plus,

$$\begin{aligned}(137)\quad &\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma_n \begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dXdp\\ &= \beta\left(R\left(\sigma_n\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma_n^{-1}\right)\widetilde{W}\right)\\ &= \beta(\widetilde{W}),\end{aligned}$$

puisque β est (H_n, θ)-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}(138)\quad \int_{P_n\backslash G_n}\widehat{\varphi}(e_n h)|\det h|dh &= \int_{F^n}\widehat{\varphi}(x)dx\\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 5.1. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 5.3 dans la relation 131. □

5.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$(139)\qquad \varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1}dh,$$

pour tout $y \in Y_n$.

Théorème 5.1. *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(140)\qquad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh,$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose

$$(141)\qquad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p\cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p,$$

pour tout $\pi \in T(Temp(SO(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2. Alors on a

$$(142)\quad (\phi_1, \phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

Démonstration. On a

$$(143)\qquad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n}\int_{H_n\times H_n} f_1(h_1y)\overline{f_2(h_2y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1dh_2dy.$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(y, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)} \tag{144}$$

est à support compact, ou $\mathcal{Y}_n$ est un système de représentant de Y_n. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon y et h_2 en une intégrale sur G_{2n}. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1} dh_1 dy, \tag{145}$$

qui est bien la relation 140.

D'après 4.1 et 5.1, on a

$$\begin{aligned} \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \\ \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p. \end{aligned} \tag{146}$$

Lemme 5.4. *La fonction* $(\xi_p, \sigma) \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ *est à support compact, l'intégrale 146 est donc absolument convergente.*

Démonstration. La fonction $\xi_p \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de f_π, $W_{f,\pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit K_f un sous-groupe ouvert compact tel que f est biinvariant par K_f. Alors $\pi(f) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K_f-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in Temp(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M, on en déduit le lemme. □

On échange les intégrales pour obtenir

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{147}$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2. Commençons par le

Lemme 5.5. *Soit* $\pi \in Temp(G_{2n})$. *On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *:*

$$(W, W')^{Wh} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p)\overline{W'(p)} dp, \tag{148}$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \to \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \overline{\pi(f_2)W'} \otimes \pi(f_1)W'. \tag{149}$$

Démonstration. Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est P_{2n}-invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi G_{2n}-invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{Wh} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (W, \pi(\overline{f^\vee})W')^{Wh} W'.\end{aligned} \tag{150}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} W' \otimes \pi(f^\vee)\overline{W'} \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W' \otimes \overline{\pi(f_2)W'},\end{aligned} \tag{151}$$

d'après l'invariance par G_{2n} du produit scalaire.

On en déduit que

$$\begin{aligned}W_{f,\pi}(g_1,g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int_{N_{2n}}^{*} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1),\end{aligned} \tag{152}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [3, Prop 2.14.2]. □

Le lemme 5.5 donne la relation

$$(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')}\beta(T(\sigma)(f_1)W'), \tag{153}$$

qui est bien indépendant du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β a $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est H_n-invariante.

Pour finir, [3, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1,\varphi_2) \mapsto (\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)c(T(\sigma))c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|. \tag{154}$$

□

5.2. **Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.**

Lemme 5.6. *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta). \tag{155}$$

Démonstration. On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$, où $\widetilde{f}$ est définie par

$$\widetilde{f}(g) = \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \tag{156}$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $x \in M_n$, on a $\begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$, on en déduit que $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right)$

est nul sauf si $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$ est dans un compact pour un certain g', autrement dit, si γ est dans un compact. L'intégrale est donc absoluement convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\ &=_{\gamma\mapsto g_2\gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\ &= \widetilde{f}(g).\end{aligned} \tag{157}$$

Pour finir, montrons que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons g sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(g) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(\mathrm{Tr}(\gamma x)) d\gamma\end{aligned} \tag{158}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, à savoir la fonction ϕ_k définie par $\phi_k(y) = f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) |\det y|^{-n}$ si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative $d\gamma$ en une mesure additive. On en déduit que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\widetilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right)$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est (H_n, θ)-invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = \|\widetilde{f}\|_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert.

En effet,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}\|_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= \int_{M_n\times K} |\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)|^2 dxdk \\ &= \int_{M_n\times K} |\int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right) \psi(\mathrm{Tr}(\gamma x) d\gamma|^2 dxdk \\ &= \int_{M_n\times K} |\widehat{\phi}_k(x)|^2 dxdk.\end{aligned} \tag{159}$$

La transformé de Fourier conserve la norme L^2 avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= c' \int_{M_n\times K} |\phi_k(x)|^2 dx dk \\ &= c' \int_K \int_{G_n} \left| f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma_n^{-1}\right)\right|^2 \frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n} dk. \end{aligned} \tag{160}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur M_n restreinte à G_n en une mesure multiplicative sur G_n. La mesure $\frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n} dk$ est une mesure de Haar sur $G_nK \simeq H_n\backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = \|\widetilde{f}\|_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. □

Cet isomorphisme d'espace L^2 nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$ et sur $H_n\backslash G_n$. En effet, on dispose du

Théorème 5.2. *Une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ *est obtenue par la relation*

$$L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) = \int^{\oplus}_{Temp(SO(2n+1))/Stab} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{161}$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 5.6 et de la décomposition de Planchrel abstraite déduite du théorème 5.1. □

Références

[1] J. Arthur, *The Endoscopic Classification of Representations Orthogonal and Symplectic Groups*, vol. 61, American Mathematical Soc., 2013.

[2] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[3] R. Beuzart-Plessis, *Plancherel formula for* $GL_n(F)\backslash GL_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).

[4] G. Henniart, *Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[5] H. Jacquet and S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.

[6] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square L-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[7] A. C. Kable, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[8] N. Matringe, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[9] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, arXiv e-prints, (2012), p. arXiv :1203.0039.

[10] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adique. d'aprés Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.