FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Soit F un corps local de caractéristique 0, ψ un caractère non trivial de F et π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s,W,\phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi), \tag{1}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1. Préliminaires

1.1. Théorie locale. Les intégrales $J(s,W,\phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\phi(e_n g)|\det g|^s dg \tag{2}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. On a noté G_n le groupe $GL_n(F)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F. L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n\end{smallmatrix}\right)$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika)**.** *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s,W,\phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1-\eta$.*

Kewat montre, lorsque F est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt)**.** *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s,W,\phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0. Si $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p-adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s,W,\phi)$ soit entière.*

Date: 21 novembre 2018.

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s,\pi,\Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [1]) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika). *Supposons que F est p-adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F. Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^n$ et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1)=1$. Alors*

$$J(s,W_0,\phi_0)=L(s,\pi,\Lambda^2). \tag{3}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p-adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe). *Supposons que F est un corps p-adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en q^s, tel que pour tous $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{J(s,W,\phi)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}=\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}, \tag{4}$$

où $\hat{\phi}=\mathcal{F}_{\psi}(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W}\in\mathcal{W}(\tilde{\pi},\bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g)=W(w_n({}^tg)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & 2n\\ 2n & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n}=\begin{pmatrix}0 & 1_n\\ 1_n & 0\end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)=\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}. \tag{5}$$

1.2. **Théorie globale.** La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s,W,\phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi\in\Pi$, on considère

$$W_{\varphi}(g)=\int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)}\varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{6}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u)=\psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1}u_{i,i+1})$. Pour $\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s,W_{\varphi},\Phi)$ l'intégrale

(7)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n}W_{\varphi}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(Tr(X))dX\Phi(e_ng)|\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika [2].

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika). *Les intégrales* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *convergent absolument pour* $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand. De plus,* $J(s, W_\varphi, \Phi)$ *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}), \tag{8}$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ *et* $\hat{\Phi}$ *est la transformée de Fourier de* Φ *par rapport au caractère* $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v). \tag{9}$$

1.3. **Globalisation.** Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1 (Kable [3]). *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Il existe un corps de nombres* k *et une place* v_0 *telle que* $k_{v_0} = F$*, où* v_0 *est l'unique place de* k *au dessus de* p.

On note $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis). *Soient* k *un corps de nombres,* v_0, v_1 *deux places distinctes de* k *avec* v_1 *non archimédienne. Soit* U *un ouvert de* $\mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(k_{v_0}))$. *Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible* Π *de* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_k)$ *telle que* $\Pi_{v_0} \in U$ *et* Π_v *est non ramifiée pour toute place non archimédienne* $v \notin \{v_0, v_1\}$.

1.4. **Fonctions tempérées.** On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : \mathrm{GL}_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

- Si F est p-adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$,
- Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $||a||$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 1.2. *Soit* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$. *Alors, pour tout* $N \geqslant 1$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(||b||)^d, \tag{10}$$

pour tous $b \in A_{2n}(F)$ *et* $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$.

Lemme 1.3. *Il existe* N *tel que pour tous* s *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et* $d > 0$, *l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(||a||)^d |\det a|^s da \tag{11}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 1.4. *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n\backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk \, |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \, \delta^{-1}(a) da. \tag{12}$$

On pose $u_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma, \tag{13}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$\int_{A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(b u_X \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da. \tag{14}$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_x et on pose $k_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(||bt_X||)^d. \tag{15}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika [2] concernant les t_j. On dispose de la

Proposition 1.7 (Jacquet-Shalika)**.** *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* k *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* k *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* j *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* j *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

(16)
$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d$$

$$\leqslant C2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{17}$$

où $m(X) = sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de la section 5.5 de Jacquet-Shalika [2]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n ak)| \leqslant C'(1+|a_n|)^{-N}. \tag{18}$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX \tag{19}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1+|a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{Re(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da. \tag{20}$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $Re(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n}|a_1|^{3-2n}|a_2|^{5-2n}|a_2|^{7-2n}...|a_n|^{2n-3}|a_n|^{2n-1}, \tag{21}$$

$$= |a_1|^{4-4n}|a_2|^{12-4n}...|a_n|^{4n-4}, \tag{22}$$

$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{23}$$

□

2. Facteurs γ

Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{J(s,W,\phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π, on dispose du

Lemme 2.1. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi,\psi))$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(s) < 1$. Supposons que $J(s,W_0,\phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in Temp(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ et un voisinage $V \subset Temp(GL_{2n}(F))$ de π tels que $W_0 = W_\pi$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ soit continue.*

En particulier, si F est un corps p-adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s,\pi',\Lambda^2,\psi)$ (proposition 1.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s,\pi',\Lambda^2,\psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ par rapport au caractère additif ψ, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ. Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

Lemme 2.2. *Soient* $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. *Supposons que* $J(s, W, \phi) \neq 0$. *Alors*

$$(24) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}.$$

Démonstration. En effet, la mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$(25) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega(\lambda)J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On en déduit immédiatement le lemme. □

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [1]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 2.1. *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on ait*

$$(26) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$,

$$(27) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_K/K$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour

$w = \infty$ ou v, on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{28}$$

On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est non ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{29}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [1]),

$$L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{30}$$

Les équations (29) et (30), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donne

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w\in\{v\}\cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{31}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 2.2 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 2.2 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1, \tag{32}$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [1]).

L'équation (31) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{33}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant le lemme 2.1 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{34}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place v', on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (34) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{35}$$

La fonction R est donc une fraction rationnelle en q_v^s périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{36}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{37}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi})}. \tag{38}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1. \tag{39}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 37, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}). \tag{40}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1. \tag{41}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. □

Proposition 2.2. *Supposons que* F *est un corps* p*-adique. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{42}$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p. Soient v, v' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de v_0. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_∞ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{43}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [1])

$$L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{44}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 2.1, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty \in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1. \tag{45}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.1. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. $\square$

Références

[1] G. Henniart, *Correspondance de langlands et fonctions l des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[2] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square l-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[3] A. C. Kable, *Asai l-functions and jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.