

FORMULE DE PLANCHEREL SUR $GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$

1. INTRODUCTION

Soit F un corps p -adique, G un groupe réductif déployé sur F et $X = H \backslash G$ une variété sphérique homogène admettant une mesure invariante. Sakellaridis et Venkatesh [17] introduisent une donnée radicielle associée à X , qui n'existe que sous certaines conditions sur X . On peut associer à la donnée radicielle duale un groupe réductif complexe \check{G}_X qu'ils appellent le groupe dual de la variété sphérique X . On note G_X le groupe réductif déployé sur F dont le groupe dual est \check{G}_X , le groupe G_X est associé à la donnée radicielle de X . Sakellaridis et Venkatesh introduisent aussi un morphisme de groupes algébriques $\iota_X : \check{G}_X \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \check{G}$ sous certaines hypothèses. L'existence de l'application ι_X a ensuite été vérifiée par Knop et Schalke [15] sans ces hypothèses. Supposons que ι_X est trivial sur $SL_2(\mathbb{C})$.

La correspondance de Langlands locale pour G donne une application surjective $\text{Irr}(G) \rightarrow \Phi(G)$ à fibres finies entre l'ensemble $\text{Irr}(G)$ des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G et l'ensemble $\Phi(G)$ des paramètres de Langlands. Elle donne une partition de $\text{Irr}(G)$ en L -paquets

$$(1) \quad \text{Irr}(G) = \bigcup_{\phi \in \Phi(G)} \Pi^G(\phi),$$

où $\Pi^G(\phi)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations qui ont pour paramètre de Langlands ϕ . La correspondance de Langlands locale est prouvée pour $GL_n(F)$ par Harris-Taylor [7], Henniart [8], Scholze [18] et pour les groupes orthogonaux impairs par Arthur [1]. Rappelons la

Conjecture 1.1 (Sakellaridis-Venkatesh [17, Conjecture 16.2.2]). *Il existe un isomorphisme G -équivariant de représentations unitaires*

$$(2) \quad L^2(X) \simeq \int_{\Phi_{\text{temp}}(G_X)}^{\oplus} \mathcal{H}_{\phi} d\phi,$$

où $\Phi_{\text{temp}}(G_X)$ est l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G_X modulo \check{G}_X -conjugaison, $d\phi$ est dans la classe naturelle des mesures sur $\Phi_{\text{temp}}(G_X)$ et \mathcal{H}_{ϕ} est une somme directe sans multiplicité de représentations dans $\Pi^G(\iota_X \circ \phi)$.

Supposons de plus la correspondance de Langlands locale pour G_X , on dispose alors d'une correspondance fonctorielle $T_X : \text{Temp}(G_X) \rightarrow \text{Temp}(G)$. Cette correspondance associe à une classe d'isomorphisme de représentations tempérées de G_X un ensemble fini de classes d'isomorphisme de représentations tempérées de G . On obtient alors la

Conjecture 1.2 (Sakellaridis-Venkatesh). *Supposons que la mesure spectrale $d\sigma$ sur G_X se descend en une mesure sur $\text{Temp}(G_X)/\sim$, où \sim est la relation d'équivalence "égalité des paramètres de Langlands". Alors il existe un isomorphisme*

G-équivariant de représentations unitaires

$$(3) \quad L^2(X) \simeq \int_{\text{Temp}(G_X)/\sim}^{\oplus} \tilde{T}_X(\sigma) d\sigma,$$

où $d\sigma$ est la mesure spectrale sur G_X (voir section 1.2) et $\tilde{T}_X(\sigma)$ est une somme directe sans multiplicité de représentations dans $T_X(\sigma)$.

Spécifions maintenant au cas où $G = GL_{2n}$ et $X = GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}$. On a $\check{G}_X = Sp_{2n}$ et $G_X = SO(2n+1)$. La correspondance de Langlands locale est prouvée pour G et G_X par Harris-Taylor [7], Henniart [8] et Arthur [1]. De plus, la mesure $d\sigma$ se descend à $\text{Temp}(G_X)/\sim$ d'après Ichino-Lapid-Mao [10]. L'essentiel de notre travail consiste alors à prouver le

Théorème 1.1. *Il existe un isomorphisme GL_{2n} -équivariant de représentations unitaires*

$$(4) \quad L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n}) \simeq \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma,$$

où $d\sigma$ est la mesure spectrale sur $SO(2n+1)$ et $T : \text{Temp}(SO(2n+1))/\sim \rightarrow \text{Temp}(GL_{2n})/\sim$ est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.

On note H_n le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$. Soit θ le caractère sur $H_n(F)$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\text{Tr}(X))$. On déduit le théorème précédent d'un résultat analogue sur le modèle de Shalika. Plus précisément, on prouve le

Théorème 1.2. *Il existe un isomorphisme GL_{2n} -équivariant de représentations unitaires*

$$(5) \quad L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta) \simeq \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\sim}^{\oplus} T(\sigma) d\sigma,$$

où $T : \text{Temp}(SO(2n+1))/\sim \rightarrow \text{Temp}(GL_{2n})$ est l'application de transfert provenant de la correspondance de Langlands locale.

Ce dernier est une conséquence de la formule de Plancherel explicite que l'on prouve dans la section 5. Soit ψ un caractère additif non trivial de F . On pose $Y_n = H_n \backslash GL_{2n}$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(Y_n, \theta)$. Il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On pose $f = f_1 * f_2^*$, où $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash GL_{2n})$, on note

$$(6) \quad \beta(W) = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p.$$

où $H_n^P = H_n \cap P_n$, voir la section 1.1 pour les notations N_{2n} et P_n et on renvoie à la section 2.1.4 pour la définition de l'espace $\mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash GL_{2n})$. On pose

$$(7) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) d\xi_p,$$

pour tout $\pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)))$, où $W_{f,\pi}(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f_\pi(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du$ et on renvoie à la section 3 pour la notation f_π .

On prouve alors le

Théorème 1.3. *On a*

$$(8) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n, \theta)} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\sim} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma,$$

Le facteur $\frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|}$ est défini dans la section 1.1.

Dans la suite de cette introduction, F désigne un corps de nombres et ψ un caractère non trivial de \mathbb{A}_F . On définit $H_n(\mathbb{A}_F)$ et θ de la même manière que précédemment de manière globale.

Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$ et $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(H_n(\mathbb{A}_F) \backslash GL_{2n}(\mathbb{A}_F), \theta) = \bigotimes'_v C_c^\infty(H_n(F_v) \backslash GL_{2n}(F_v), \theta_v)$. On note $\Sigma\phi_i \in C^\infty([GL_{2n}])$, pour $i = 1, 2$, la fonction définie par $\Sigma\phi_i(g) = \sum_{x \in H_n(F) \backslash GL_{2n}(F)} \phi_i(xg)$ pour tout $g \in GL_{2n}(\mathbb{A}_F)$. D'autre part, pour $\varphi \in \pi$, on introduit la période globale

$$(9) \quad \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) = \int_{[Z_{2n} \backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh,$$

où Z_{2n} est le centre de GL_{2n} et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent une factorisation du produit scalaire

$$(10) \quad \langle (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi \rangle_{\text{Pet}} = \int_{[Z_{2n} \backslash GL_{2n}]} (\Sigma\phi_1)_\pi(g) \overline{(\Sigma\phi_2)_\pi(g)} dg,$$

où $(\Sigma\phi_1)_\pi$ est la projection sur π de $\Sigma\phi_i$ et dg est la mesure de Tamagawa de $[Z_{2n} \backslash GL_{2n}]$ [17, section 17.1].

Si π est le transfert d'une représentation automorphe cuspidale σ de $\text{SO}(2n+1)(\mathbb{A}_F)$ alors cette factorisation prend la forme suivante

$$(11) \quad \langle (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi \rangle_{\text{Pet}} = q \prod'_v \langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v},$$

où q est un rationnel. Les quantités $\langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v}$ sont des formes hermitiennes $(H_n(F_v), \theta_v)$ -invariante. On renvoie à [17, section 17.5] pour la signification du produit \prod'_v . En effet, le produit n'est pas absolument convergent et on doit l'interpréter comme l'évaluation d'une fonction L . Si π n'est pas le transfert d'une représentation automorphe cuspidale de $\text{SO}(2n+1)(\mathbb{A}_F)$ alors

$$(12) \quad \langle (\Sigma\phi_1)_\pi, (\Sigma\phi_2)_\pi \rangle_{\text{Pet}} = 0.$$

Sakellaridis et Venkatesh conjecturent que les formes hermitiennes $\langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v}$ (pour σ_v tempérée) sont reliées aux formes $(\phi_{1,v}, \phi_{2,v})_{Y_{n,v}, T(\sigma_v)}$ qui l'on a défini précédemment. Plus précisément,

Conjecture 1.3 (Sakellaridis-Venkatesh [17, section 17]). *On a l'égalité*

$$(13) \quad \langle \phi_{1,v}, \phi_{2,v} \rangle_{\sigma_v} = (\phi_{1,v}, \phi_{2,v})_{Y_{n,v}, T(\sigma_v)}.$$

De manière duale, on conjecture une factorisation de la période globale $\mathcal{P}_{H_n, \theta}$ en produit de périodes locales $\mathcal{P}_{H_n, \theta, v}$. C'est cette factorisation et le lien avec la formule de Plancherel qui va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour Φ une fonction de Schwartz

sur \mathbb{A}_F^n et W_φ la fonction de Whittaker associée à φ , on introduit dans la suite des fonctions zêta globales $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$(14) \quad \text{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) \widehat{\Phi}(0).$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales, pour $\text{Re}(s)$ assez grand, on a

$$(15) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v),$$

où S est un ensemble de places suffisamment grand. On obtient alors une factorisation de la période globale sous la forme

$$(16) \quad \mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi) = \frac{\text{Res}_{s=1} L^S(s, \pi, \Lambda^2)}{\widehat{\Phi}^S(0)} \prod_{v \in S} \frac{J(1, W_v, \Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}.$$

Supposons que $\text{Res}_{s=1} L^S(s, \pi, \Lambda^2) \neq 0$. Le terme $\mathcal{P}_{H_n, \theta}(\varphi)$ ne dépend pas de Φ , on en déduit que les facteurs $\frac{J(1, W_v, \Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$ ne dépend pas de Φ . On montrera l'égalité

$$(17) \quad J(1, \widetilde{W}_v, \widehat{\Phi}_v) = \pm \Phi_v(0) \beta(W_v),$$

c'est le lemme 5.4. La forme linéaire β nous servira à prouver le théorème 1.3.

On commence dans la section 2 par prouver une relation sur les facteurs γ du carré extérieur. Les sections 3 et 4 sont des préliminaires pour le théorème 5.1. On fini dans la section 5 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash GL_{2n}, \theta)$ et une décomposition de Plancherel abstraite sur $L^2(GL_n \times GL_n \backslash GL_{2n})$.

1.1. Notations. Dans la suite on notera F un corps p -adique (sauf dans la section 2 où F peut désigner un corps archimédien) et ψ un caractère non trivial de F . On note q_F le cardinal du corps résiduel de F et $|\cdot|_F$ (ou simplement $|\cdot|$) la valeur absolue sur F normalisé par $|\omega|_F = q_F^{-1}$ où ω est une uniformisante de F . On notera G_m le groupe $GL_m(F)$ et $PG_m = Z_m(F) \backslash GL_m(F)$. On note $H_n(F)$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$.

L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$. On note $SO(2m+1)$ la forme déployé du groupe spécial orthogonal sur un espace de dimension $2m+1$. On note A_n le sous groupe de G_n des matrices diagonales inversibles, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles, \overline{B}_n le sous groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1, $\overline{N}_n = {}^t N_n$ et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F . On note V_n le sous-groupe de M_n des matrices triangulaires inférieures strictes. On note U_n le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1} U_n$ le sous-groupe mirabolique.

On note δ_{B_n} le caractère modulaire de B_n . On notera par des lettres gothiques les algèbres de Lie correspondantes et pour \mathfrak{g} une algèbre de Lie $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ désignera l'algèbre enveloppante.

Lorsque X est un espace totalement discontinu, on notera $C_c^\infty(X)$ ou $\mathcal{S}(X)$, l'espace des fonctions localement constante à support compact. Lorsque G est un groupe algébrique réel ou complexe, on note $\mathcal{S}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance

rapide ainsi que toute ses dérivées. De plus, lorsque \mathbb{A}_K l'anneau des adèles d'un corps de nombres K et G est un groupe algébrique sur K , on note $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ le produit restreint des espaces $\mathcal{S}(G(K_v))$ lorsque v parcourt l'ensemble des places de K i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $f = \otimes_v f_v$ avec $f_v \in \mathcal{S}(G(K_v))$ pour tout v et $f_v = \mathbb{1}_{G(\mathcal{O}_v)}$ sauf pour un nombre fini de v , où \mathcal{O}_v est l'anneau des entiers de K_v .

Pour G un groupe réductif connexe sur F (dans la suite G sera GL_{2n} , SO_{2n+1} ou un quotient, d'un sous-groupe de Levi de ces groupes), on note $\text{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$ et $\Pi_2(G) \subset \text{Temp}(G)$ le sous-ensemble des représentations de carré intégrable. On note Z_G le centre de $G(F)$ et A_G le tore déployé maximal dans Z_G . Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant la classe d'isomorphisme de σ . On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$ le quotient de $\text{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π .

Pour $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G , on note $i_P^G(\sigma)$ l'induction parabolique normalisée lorsque σ est une représentation lisse de M : c'est la représentation régulière à droite de G sur l'espace des fonctions localement constantes $f : G \mapsto \sigma$ qui vérifient $f(mng) = \delta_P(m)^{\frac{1}{2}} \sigma(m) f(g)$ pour tous $m \in M$, $n \in N$ et $g \in G$. Lorsque $G = G_n$ et $M = G_{n_1} \times \dots \times G_{n_k}$, on note $\pi_1 \times \dots \times \pi_k = i_P^G(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k)$ pour π_i des représentations lisses de G_{n_i} . Lorsque $G = SO(2n+1)$ et $M = G_{n_1} \times \dots \times G_{n_k} \times SO(2m+1)$, on note $\pi_1 \times \dots \times \pi_k \rtimes \sigma_0 = i_P^G(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k \boxtimes \sigma_0)$ pour π_i des représentations lisses de G_{n_i} et σ_0 une représentation lisse de $SO(2m+1)$.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \rightarrow {}^L SO(2m+1)$, où W'_F est le groupe de Weil-Deligne de F . Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \rightarrow \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$ grâce à la correspondance de Langlands locale pour GL_{2m} . La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ et pour GL_{2m} , nous permettent de définir une application de transfert $T : \text{Temp}(SO(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$.

Dans les mesures de Plancherel, on verra apparaître des termes $|S_\sigma|$ pour $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$ ou $\text{Temp}(PG_{2n})$. On n'explicite pas les ensembles S_σ et on se contente de donner leur cardinal. Pour $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \rtimes \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\sigma|$ est le produit $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$ et $|S_{\pi_i}| = n_i$.

Pour $\pi \in \text{Temp}(G)$ et r une représentation admissible de ${}^L G$, on note $L(s, \pi, r)$ la fonction L associée par la correspondance de Langlands locale et $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ le facteur γ associée. Lorsque r est la représentation standard, on l'omettra. De plus, on note $\gamma^*(0, \pi, r, \psi)$ la régularisation du facteur γ en 0, défini par la relation

$$(18) \quad \gamma^*(0, \pi, r, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(s, \pi, r, \psi)}{(s \log(q_F))^{n_{\pi, r}}},$$

où $n_{\pi, r}$ est l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, r, \psi)$ en $s = 0$.

1.2. Mesures. On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ et F^\times de la mesure de Haar $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$. Pour $m \geq 1$, on équipe F^m de la mesure produit $(dx)^m$ et $(F^\times)^m$ de la mesure $(d^\times x)^m$. On équipe les groupes

$M_n, U_n, N_n, \overline{N}_n$ des mesures de Haar "produit des coordonnées". Par exemple, on équipe M_n de la mesure $dX = \prod_{i,j=1}^n dX_{i,j}$ où $dX_{i,j}$ est la mesure de Haar sur F que l'on a fixé précédemment. On équipe G_n de la mesure $dg = |\det g|_F^{-n} \prod_{i,j=1}^n dg_{i,j}$ et P_n la mesure de Haar à droite obtenu comme produit des mesures sur G_{n-1} sur U_n . On équipe les groupes compact des mesures de Haar de masse totale égale à 1. On équipe $N_n \backslash G_n$ de la mesure

$$(19) \quad \int_{N_n \backslash G_n} f(g) dg = \int_{\overline{B}_n} f(b) db$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G_n)$ invariante par N_n . On a l'isomorphisme $P_n \backslash G_n \simeq F^n/0$, on équipe $P_n \backslash G_n$ de la mesure dg telle que $|\det g| dg$ s'identifie à la mesure $(dx)^n$ sur F^n . Si l'on identifie $P_n \backslash G_n$ à l'ouvert dense $F^{n-1} \times F^\times$, cela revient à identifier la mesure sur $P_n \backslash G_n$ à la mesure $(dx)^{n-1} \times d^\times y$ sur $F^{n-1} \times F^\times$. La mesure sur $P_n \backslash G_n$ n'est pas invariante. Cependant on a la formule d'intégration suivante

$$(20) \quad \int_{G_n} f(g) dg = \int_{P_n \backslash G_n} \int_{P_n} f(pg) |\det p|^{-1} dp dg,$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G_n)$.

Pour G un groupe réductif connexe sur F , on fixe un isomorphisme $A_G \simeq (F^\times)^{\dim(A_G)}$ et on équipe A_G de la mesure $(d^\times x)^{\dim(A_G)}$ provenant de l'isomorphisme avec $(F^\times)^{\dim(A_G)}$. Décrivons le choix de la normalisation d'une mesure sur $\text{Temp}(G)$. Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. Soit \widehat{A}_M le dual unitaire de A_M et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M . On équipe alors \widehat{A}_M de la mesure $d\chi$ définie par

$$(21) \quad d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi}.$$

La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ .

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto \sigma \otimes \chi_\lambda \in \Pi_2(M)$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de σ dans $\Pi_2(M)$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A}_M$ préserve localement les mesures. Soit P un sous groupe parabolique de G de Levi M . On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\text{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq i_P^G(\sigma)$ par la formule

$$(22) \quad d\pi = |W(G, M)|^{-1} (i_P^G)_* d\sigma,$$

où $(i_P^G)_* d\sigma$ est la mesure $d\sigma$ poussée en avant en une mesure sur $\text{Temp}(G)$ par l'application i_P^G . Cette mesure ne dépend pas du choix du groupe parabolique. La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 83.

1.3. Résultats. Soit F un corps p -adique et ψ un caractère non trivial de F . Rappelons que l'on note $H_n(F)$ le groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ avec $X \in M_n(F)$ et $g \in GL_n(F)$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$. De plus, θ est le caractère sur $H_n(F)$ qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\text{Tr}(X))$. Le résultat principal est le

Théorème 1.4. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$(23) \quad \mathrm{L}^2(\mathrm{H}_n(\mathrm{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{F}), \theta) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1)(\mathrm{F}))/\mathrm{Stab}}^{\oplus} \mathrm{T}(\sigma) \mathrm{d}\sigma.$$

Ce théorème est équivalent au théorème 1.1. En effet, il suffit de calculer explicitement la (classe de la) mesure de Plancherel sur $\mathrm{SO}(2n+1)$. La mesure de Plancherel d'un groupe réductif \mathfrak{p} -adique G a été calculée par Waldspurger et Harish-Chandra [21] sous la forme

$$(24) \quad \mathrm{d}\mu_{\mathrm{G}}(\sigma) = \mathrm{d}(\sigma) \mathrm{j}(\sigma)^{-1} \mathrm{d}\sigma,$$

où $\mathrm{d}(\sigma)$ est le degré formel de σ et $\mathrm{j}(\sigma)$ est un scalaire produit d'opérateurs d'entrelacements (voir [21]). Le degré formel pour $\mathrm{SO}(2n+1)$ a été calculé par Ichino-Lapid-Mao [10] et le facteur j pour $\mathrm{SO}(2n+1)$ découle de la normalisation des opérateurs d'entrelacements d'Arthur [1]. Finalement, on obtient que la mesure de Plancherel pour $\mathrm{SO}(2n+1)$ est

$$(25) \quad \mathrm{d}\mu_{\mathrm{SO}(2n+1)}(\sigma) = \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|\mathrm{S}_{\sigma}|} \mathrm{d}\sigma.$$

On renvoie à l'article de Beuzart-Plessis [5, Proposition 2.13.2] pour l'analogie de ce résultat pour les groupes unitaires.

De l'isomorphisme $\mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}) \times \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{F})) \simeq \mathrm{L}^2(\mathrm{H}_n(\mathrm{F}) \backslash \mathrm{G}_{2n}(\mathrm{F}), \theta)$ GL_{2n} -invariant (lemme 5.7), on en déduit le

Théorème 1.5. *On a un isomorphisme de représentations unitaires*

$$(26) \quad \mathrm{L}^2(\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}) \times \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}) \backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{F})) \simeq \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1)(\mathrm{F}))/\mathrm{Stab}}^{\oplus} \mathrm{T}(\sigma) \mathrm{d}\sigma.$$

Rappelons que ces deux formules de Plancherel abstraite sont obtenu en prouvant une formule de Plancherel explicite sur $\mathrm{H}_n \backslash \mathrm{G}_n$.

Théorème 1.6. *On pose $\mathrm{Y}_n = \mathrm{H}_n \backslash \mathrm{G}_{2n}$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\mathrm{Y}_n, \theta)$. On a*

$$(27) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}_n, \theta)} = \int_{\mathrm{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))/\sim} (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathrm{Y}_n, \mathrm{T}(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|\mathrm{S}_{\sigma}|} \mathrm{d}\sigma,$$

La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathrm{Y}_n, \mathrm{T}(\sigma)}$ est définie de manière explicite dans la section 5.1. Le facteur $\frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|\mathrm{S}_{\sigma}|}$ est défini dans la section 1.1.

Pour finir, au cours de la preuve de la formule de Plancherel explicite, on a besoin d'une égalité sur des facteurs gamma définie de deux manière différentes. On prouve le

Théorème 1.7. *Soit π une représentation tempérée irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathrm{F})$. On note $\gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ le facteur gamma de Jacquet-Shalika, voir section 2. Alors il existe une constante $\mathrm{c}(\pi)$ de module 1 telle que tout $s \in \mathbb{C}$, on ait*

$$(28) \quad \gamma^{\mathrm{JS}}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \mathrm{c}(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

2. FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Dans cette partie F désigne un corps local de caractéristique 0 et ψ un caractère non trivial de F . Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 près à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, des constantes $c^{Sh}(\pi)$ et $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$(29) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La dernière égalité est une conséquence de l'égalité des facteurs gamma de Shahidi et d'Artin pour le carré extérieur à une racine de l'unité près prouvée par Henniart [9]. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

2.1. Préliminaires.

2.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$(30) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. Le groupe V_n est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes, on l'équipe de la mesure de Haar $dX = \prod_{1 \leq j < i \leq n} dX_{i,j}$. L'élément σ_n est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\text{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 2.1 (Jacquet-Shalika [12]). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s, W, \phi)$ convergent absolument pour $\text{Re}(s) > 1 - \eta$.*

Kewat [14] montre, lorsque F est p -adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F . On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 2.2 (Belt [2], Matringe [16]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0 . Si $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p -adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [9]) par ces intégrales.

Proposition 2.3 (Jacquet-Shalika [12]). *Supposons que F est p -adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers \mathcal{O}_F de F . Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de \mathcal{O}_F^n et $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$(31) \quad J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2).$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p -adique. Plus précisément, on a la

Proposition 2.4 (Matringe [16]). *Supposons que F est un corps p -adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s ou q^{-s} , tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait*

$$(32) \quad \epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \widetilde{\pi}, \Lambda^2)},$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ définie par

$$(33) \quad \mathcal{F}_\psi(\phi)(y) = \int_{F^n} \phi(x) \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) dx$$

pour tout $y \in F^n$ et $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\widetilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$ pour tout $g \in GL_{2n}(F)$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 2n \\ 2n & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $w_{n,n} = \sigma_n \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$(34) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \widetilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}.$$

2.1.2. Théorie globale. La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_\mathbb{A}$ un caractère non trivial de \mathbb{A}_K/K . Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$(35) \quad W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K) \backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug) \psi_\mathbb{A}(u)^{-1} du$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_\mathbb{A}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_\mathbb{A}(u) = \psi_\mathbb{A}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

$$(36) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W_\varphi \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{A}_K .

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 2.5 (Jacquet-Shalika [12]). *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $\operatorname{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$(37) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}),$$

où $\widetilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W_\varphi = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K , on a

$$(38) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v).$$

2.1.3. Globalisation. Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 2.1 (Kable [13]). *Supposons que F est un corps p -adique. Il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p .*

On va définir une topologie sur $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$, P un parabolique de Levi M et $\sigma \in \Pi_2(M)$. La classe d'équivalence de l'induction parabolique normalisé $i_P^S(\sigma)$ est indépendante du parabolique P et on la notera $i_M^S(\sigma)$. On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M , on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^S(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^S(\sigma)$ dans $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 2.6 (Beuzart-Plessis [5]). *Soient k un corps de nombres, v_0, v_1 deux places distinctes de k avec v_1 non archimédienne. Soit U un ouvert de $\operatorname{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π de $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_v est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

2.1.4. Fonctions tempérées. On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π . Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

On note K_{2n} le sous-groupe compact maximal de $GL_{2n}(F)$ défini par $K_{2n} = GL_{2n}(\mathcal{O}_F)$ lorsque F est p -adique et $K_{2n} = \{g \in GL_{2n}(F), g\bar{g}^t = I_n\}$ lorsque $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(n\mathfrak{g}) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

- Si F est p -adique, f est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(n\mathfrak{a}k)| \leq C\delta_{B_{2n}}(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$, où $\|a\| = 1 + \max(|a_{i,i}|)$, pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in K_{2n}$,

- Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$, il existe $C > 0$ tel que $|(R(u)f)(nak)| \leq C \delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in K_{2n}$.

On muni l'espace $C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ de la topologie provenant des semi-normes $\sup_{\|g\| < M} |f(g)|$, pour $M > 0$, où $\|g\| = \max(|g_{i,j}|, |\det g|^{-1})$ dans le cas p -adique et $\sup_{\|g\| < M} |R(u)f(g)|$ dans le cas archimédien, pour $M > 0$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 2.2 ([5, Lemme 2.4.3]). *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$. Il existe $d > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$(39) \quad |W(bk)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d,$$

pour tous $b \in A_{2n}(F)$ et $k \in K_{2n}$.

Lemme 2.3 ([5, Lemme 2.4.4]). *Pour tout $C > 0$, il existe N tel que pour tous s vérifiant $0 < \operatorname{Re}(s) < C$ et $d > 0$, l'intégrale*

$$(40) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W , on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 2.4. *Pour $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, l'intégrale $J(s, W, \phi)$ converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}(s) > 0$. De plus, pour tous $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$, la forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue.*

Démonstration. Soit $G_n = N_n A_n K_n$ la décomposition d'Iwasawa de G_n . Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(41) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta_{B_n}^{-1}(a) da.$$

On pose $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$(42) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = bu_{a^{-1}Xa} \sigma_n,$$

où $b = \operatorname{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$(43) \quad \int_{A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} \left| W \left(bu_X \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta_{B_n}^{-2}(a) da.$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_X et on pose $k_\sigma = \sigma_n \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$. Le lemme 2.2 donne alors

$$(44) \quad |W(bt_X k_X k_\sigma)| \leq C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d.$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j . On dispose de la

Proposition 2.7 (Jacquet-Shalika [12]). *On a $|t_k| \geq 1$ lorsque k est impair et $|t_k| \leq 1$ lorsque k est pair. En particulier, $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geq 1$ lorsque j est impair et $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leq 1$ lorsque j est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_j}{a_{j/2+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet de majorer $(1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-2N}$ par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-2N}$ lorsque j est impair et par $|\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} (1 + |\frac{a_{j/2}}{a_{j/2+1}}|)^{-N}$ lorsque j est pair. Ce qui donne

(45)

$$\begin{aligned} |W(bt_X k_X k_\sigma)| &\leq C \prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d \\ &\leq C \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d, \end{aligned}$$

puisque $\prod_{j=1}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} = |\frac{t_1}{t_{2n}}|^{-N} \leq 1$ d'après la proposition 2.7.

De plus, encore d'après la proposition 2.7, on a

$$(46) \quad \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \leq \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} \frac{1}{|t_j|^N}.$$

Pour finir, on aura besoin de la

Proposition 2.8 (Jacquet-Shalika [12]). *Pour $X \in \text{Lie}(\overline{N}_n)$, on pose $\|X\| = \sup_{i,j} |X_{i,j}|$. On pose $m(X) = \sqrt{1 + \|X\|}$ lorsque F est archimédien et $m(X) = \sup(1, \|X\|)$ lorsque F est non-archimédien. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $X \in \text{Lie}(\overline{N}_n)$, on ait*

$$(47) \quad \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |t_j| \geq m(X)^\alpha$$

Grâce à cette proposition, on obtient la majoration

$$(48) \quad |W(bt_X k_X k_\sigma)| \leq C m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d.$$

D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$(49) \quad |\phi(e_n a k)| \leq C' (1 + |a_n|)^{-N}.$$

L'intégrale $J(s, W, \phi)$ est alors majorée (à une constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(50) \quad \int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX$$

et

$$(51) \quad \int_{\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a|^{\operatorname{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da,$$

pour j compris entre 0 et d . La première intégrande est majorée par $m(X)^{-\alpha N + c}$, où c est une constante, on en déduit que la première converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\operatorname{Re}(s) > 0$ d'après le lemme 2.3 où l'on a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. \square

2.2. Facteurs γ . Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{\text{Sh}}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π , on dispose du

Lemme 2.5. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in \operatorname{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi)$ et un voisinage $V \subset \operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ de π qui vérifient que $W_0 = W_{\pi}$, $W_{\pi'} \in \mathcal{W}(\pi', \psi)$ pour tout $\pi' \in \operatorname{Temp}(GL_{2n}(F))$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est bien définie et continue.*

En particulier, si F est un corps p -adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 2.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ [4, Corollaire 2.7.1]. La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F) \backslash GL_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue (lemme 2.4), il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\pi'}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V . \square

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ par rapport au caractère additif ψ , où l'on note \mathcal{F}_{ψ} pour la transformée de Fourier par rapport à ψ . Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_{λ} avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_{\lambda}(x) = \psi(\lambda x)$. On dispose d'un isomorphisme $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto W_{\lambda} \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\lambda})$ donné par $W_{\lambda}(g) = W(a(\lambda)g)$ pour tout $g \in GL_{2n}(F)$ où $a(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda^{2n-1}, \lambda^{2n-2}, \dots, \lambda, 1)$.

Lemme 2.6. *Soient $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W, \phi) \neq 0$. Alors*

$$(52) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\lambda}, \mathcal{F}_{\psi_{\lambda}}(\phi))}{J(s, W_{\lambda}, \phi)} = \omega_{\pi}(\lambda)^{2n-1} |\lambda|^{n(2n-1)(s-\frac{1}{2})} \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_r, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W_r, \phi)},$$

où W_r est la translation à droite de W par $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda, 1, \dots, 1)$. En particulier, $W_r \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Lorsque F est un corps p -adique, on en déduit que

$$(53) \quad \gamma^S(s, \pi, \Lambda^2, \psi_\lambda) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1} |\lambda|^{n(2n-1)(s-\frac{1}{2})} \gamma^S(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. La mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda \cdot))$ donne

$$(54) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)) = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})} \omega_\pi(\lambda) J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

D'autre part,

$$(55) \quad J(s, W_\lambda, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} W \left(a(\lambda) \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g|^s dg.$$

On décompose $a(\lambda) \sigma_n$ sous la forme $\sigma_n \text{diag}(r(\lambda)b(\lambda), r(\lambda)b(\lambda))$ où l'on note $b(\lambda) = \text{diag}(\lambda^{2n-2}, \lambda^{2n-4}, \dots, 1)$ et $r(\lambda) = \text{diag}(\lambda, 1, \lambda, 1, \dots)$. Après les changements de variables, $X \mapsto (r(\lambda)b(\lambda))^{-1}Xr(\lambda)b(\lambda)$, $g \mapsto b(\lambda)^{-1}g$ et $g \mapsto r(\lambda)^{-1}gr(\lambda)$, on obtient la relation

$$(56) \quad J(s, W_\lambda, \widehat{\phi}) = \delta_{B_n}(b(\lambda)) |\det b(\lambda)|^{-s} |\lambda|^{x(n)} J(s, R(\text{diag}(\lambda, \dots, 1, \dots))W, \widehat{\phi}),$$

où $R(g)$ est la translation à droite par g et le facteur $|\lambda|^{x(n)}$ (que l'on n'explicite pas) provient du changement de variable $X \mapsto (r(\lambda)b(\lambda))^{-1}Xr(\lambda)b(\lambda)$.

De plus, pour tout $g \in GL_{2n}(F)$, on a

$$(57) \quad \widetilde{(W_\lambda)}(g) = W(a(\lambda)w_n(g^t)^{-1}) = \widetilde{W}(w_n a(\lambda)^{-1} w_n^{-1} g) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1} \widetilde{(W)}_\lambda(g),$$

où l'on a utilisé la relation $w_n a(\lambda)^{-1} w_n^{-1} = \lambda^{-(2n-1)} a(\lambda)$. Ce qui donne en utilisant 56 l'égalité

$$(58) \quad J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{(W_\lambda)}, \widehat{\phi}) = \omega_\pi(\lambda)^{2n-1} \delta_{B_n}(b(\lambda)) |\det b(\lambda)|^{s-1} |\lambda|^{x(n)} J(1-s, \rho(w_{n,n})R(\text{diag}(\lambda, \dots, 1, \dots))\widetilde{W}, \widehat{\phi}).$$

Pour finir, on remarque que l'on a pour tout $g \in GL_{2n}(F)$,

$$(59) \quad R(\text{diag}(\lambda, \dots, 1, \dots))\widetilde{W}(g) = W(w_n(g^t \text{diag}(\lambda, \dots, 1, \dots)^{-1})^{-1}) = \omega_\pi(\lambda)^{-1} \widetilde{W}_r(g),$$

où W_r est la translation à droite de W par $\text{diag}(\lambda, \dots, 1, \dots)$.

On déduit de 56 et 58 la relation suivante

$$(60) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{(W_\lambda)}, \widehat{\phi})}{J(s, W_\lambda, \phi)} = \omega_\pi(\lambda)^{2n-2} |\lambda|^{n(n-1)(2s-1)} \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_r, \widehat{\phi})}{J(s, W_r, \phi)},$$

où l'on a utilisé l'égalité $\det b(\lambda) = \lambda^{n(n-1)}$. On déduit le lemme grâce à la relation 54. \square

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [9]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 2.9. *Soit $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Les intégrales $J(s, W, \phi)$ admettent un prolongement méromorphe à \mathbb{C} pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ telle que pour tous $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait

$$(61) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante $c^{Sh}(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(62) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$); par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $\mathcal{U} \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial $\psi_\mathbb{A}$ de \mathbb{A}_k/k .

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in \mathcal{U}$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v, v_0$.

On choisit des fonctions $W_w \in \mathcal{W}(\pi_w, (\phi_\mathbb{A})_w)$ et $\phi_w \in \mathcal{S}(k_w)$ dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. On note $S = \{\infty, v\}$ l'ensemble des places où Π est ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_\mathbb{A}$ est ramifié. Pour $w \notin S \cup T$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 2.3. Pour $w \in S \cup T$, on fait un choix, d'après la proposition 2.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$(63) \quad W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

D'après la proposition 2.5, on a

$$(64) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \notin S \cup T} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [9]),

$$(65) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w) L^{S \cup T}(1-s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

Les équations (64) et (65), en utilisant la proposition 2.4 pour les places $w \in \{v\} \cup T$, donnent

$$(66) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ & J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty) \prod_{w \in \{v\} \cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞ , l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 2.3 et du lemme 2.6

va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 2.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$(67) \quad \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, \psi_0)} = 1,$$

d'après la proposition 2.3 et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [9]).

L'équation (66) devient alors

$$(68) \quad \begin{aligned} & J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}_{\infty}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty})) = \\ & J(s, W_{\infty}, \phi_{\infty}) \gamma^{Sh}(s, \Pi_{\infty}, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}) \frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π , en utilisant le lemme 2.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi sur $\text{Temp}(GL_{2n}(F))$, on en déduit que

$$(69) \quad R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$$

qui est à priori bien définie pour $0 < \text{Re}(s) < 1$, est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ . La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 2.6. En effet, on a

$$(70) \quad R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_{\infty}}(\phi_{\infty}))}{J(s, W, \phi_{\infty}) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_{\infty})},$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}$); donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en une place v' de caractéristique résiduelle distincte de celle de v , on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$.

La fonction R est donc une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$ et $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$ avec q_v et $q_{v'}$ premier entre eux; ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c^{Sh}(\pi) = R$ telle que

$$(71) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

où l'on a noté $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c^{Sh}(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$(72) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi)).$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\widetilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))$, ce qui nous donne

$$(73) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_{\psi}(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \tilde{\psi})}.$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_{\psi}(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$(74) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1.$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 72, on obtient

$$(75) \quad \overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}).$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(76) \quad |\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1.$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c^{Sh}(\pi)$ est bien de module 1. \square

Proposition 2.10. *Supposons que F est un corps p -adique. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ est défini par la proposition 2.4. Alors il existe une constante $c^{Sh}(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(77) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c^{Sh}(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p . Soit v une place non archimédiennes et de caractéristique résiduelle distincte de celle de v_0 . Soit $U \subset \text{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π . On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de \mathbb{A}_k/k .

D'après la proposition 2.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 2.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 2.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_{∞} l'ensemble des places archimédienne, $S = S_{\infty} \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 2.5), on a

$$(78) \quad \begin{aligned} & \prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1-s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [9])

$$(79) \quad L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1-s, \widetilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 2.4 et 2.9, on

obtient donc la relation

$$(80) \quad \prod_{v_\infty \in S_\infty} c^{Sh}(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_\mathbb{A})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1.$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 2.9. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en q_v^s , on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. \square

3. LIMITE SPECTRALE

Dans cette partie F est un corps p -adique. On renvoie à la section 1.2 pour la normalisation des mesures sur $\text{Temp}(G)$, pour un groupe G réductif connexe sur F .

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$(81) \quad f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)),$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 3.1 (Harish-Chandra [21], Shahidi [19], Silberger-Zink [20]). *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\text{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$(82) \quad f(g) = \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi),$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$(83) \quad d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi,$$

où $\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \log(q_F))^{-n_{\pi, \overline{Ad}}} \gamma(s, \pi, \overline{Ad}, \psi)$, avec $n_{\pi, \overline{Ad}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, \overline{Ad}, \psi)$ en $s = 0$. Pour $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$ isomorphe à $\pi_1 \times \dots \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\text{Temp}(G)/\text{Stab}$ le quotient de $\text{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π .

Rappelons (section 1.1) que la correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \text{Temp}(SO(2m+1))/\text{Stab} \rightarrow \text{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$(84) \quad \pi \in T(\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}) \iff \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^k \tau_i \times \tilde{\tau}_i \right) \times \bigotimes_{j=1}^l \mu_j$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\text{Temp}(SO(2m_j+1))/\text{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$ (de manière équivalente $\mu_j \in \Pi_2(G_{2m_j})$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) = 0$).

Proposition 3.2. *Soit ϕ une fonction localement constante à support compact sur $\text{Temp}(PG_{2n})$, on a*

$$(85) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(\text{SO}_{2n+1})/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Pour $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times \dots \times \pi_l \rtimes \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(\text{G}_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(\text{SO}(2m+1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}| \dots |S_{\pi_l}| |S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \dots \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(\text{G}_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 83, on a

$$(86) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\text{Ad}}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π . On écrit la représentation π sous la forme

$$(87) \quad \pi = \left(\bigotimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau}_i^{\times n_i} \right) \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right),$$

où

- $\tau_i \in \Pi_2(\text{G}_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$. De plus, pour tous $1 \leq i < i' \leq t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau}_{i'}$.
- $\mu_j \in \Pi_2(\text{G}_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu}_j$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq u$. De plus, pour tous $1 \leq j < j' \leq u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- $\nu_k \in \Pi_2(\text{G}_{f_k})$ vérifie $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu}_k$) pour tout $1 \leq k \leq v$. De plus, pour tous $1 \leq k < k' \leq v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

On note $M = \left(\prod_{i=1}^t \text{G}_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u \text{G}_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^v \text{G}_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n}$ et P un parabolique de PG_{2n} de Levi M . Alors $\pi = i_P^{\text{PG}_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M .

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M . On note $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k} = (\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{i}\mathbb{R}$ et \mathcal{A} de la mesure de Haar telle que la mesure quotient sur $(\mathbb{i}\mathbb{R})_M / \mathcal{A} \simeq \mathbb{i}\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue.

Dans la suite, on notera les coordonnées de $\lambda \in \mathcal{A}$ de la manière suivante :

- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \dots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x}_{i,1}(\lambda), \dots, \widetilde{x}_{i,n_i}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{m_i} \times (\mathbb{i}\mathbb{R})^{n_i}$,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \dots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{p_j}$,
- $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), \dots, z_{k,q_k}(\lambda)) \in (\mathbb{i}\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)} \right)^{\dim(A_M)} d\chi$. Grâce à l'isomorphisme local

$\lambda \in \mathcal{A} \mapsto |\det|^\lambda \in \widehat{A_M}$, où l'on note $|\det|^\lambda = \prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{m_i} |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} |\det|^{\frac{\widetilde{x}_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \times \prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{p_j} |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \times \prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{q_k} |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}$, on dispose d'une application $\lambda \in$

$\mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \text{Temp}(\text{PG}_{2n})$, où

$$(88) \quad \pi_\lambda = \left(\bigotimes_{i=1}^t \left(\bigotimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left(\bigotimes_{l=1}^{n_i} \tilde{\tau}_i \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)}}{d_i}} \right) \right) \\ \times \left(\bigotimes_{j=1}^u \bigotimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left(\bigotimes_{k=1}^v \bigotimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right).$$

Quitte à restreindre \mathcal{U} , cette dernière induit un homéomorphisme $\mathcal{U} \simeq V/W(\text{PG}_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans \mathcal{A} et $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\text{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation τ . Alors

$$(89) \quad \int_{\mathcal{U}} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\mathcal{U}} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi| \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi$$

d'après la relation 83.

Rappelons que la mesure $d\pi$ est choisie en fonction de la mesure sur \widehat{A}_M que l'on a normalisé avec un facteur $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)} \right)^{\dim(A_M)}$. Les mesures $d\pi$ et $d\lambda$ vérifient alors la relation de compatibilité suivante

$$(90) \quad \int_{\mathcal{U}} f(\pi) d\pi = \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(A_M)} \int_V f(\pi_\lambda) d\lambda,$$

pour toute fonction f continue à support compact sur \mathcal{U} . L'intégrale 89 est donc égale à

$$(91) \quad \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}| \gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,$$

où $\dim(\mathcal{A}) = \dim(A_M) = \left(\sum_{i=1}^t m_i + n_i + \sum_{j=1}^u p_j + \sum_{k=1}^v q_k \right) - 1$. De plus, on a

$$(92) \quad |S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i + n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{p_j} \prod_{k=1}^v f_k^{q_k}.$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$(93) \quad \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \\ \frac{1}{|W(\text{PG}_{2n}, \tau)|P} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \phi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,$$

où $\phi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon. La fonction ϕ est $W(\text{PG}_{2n}, \tau)$ -invariante à support compact.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ , on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 3.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, Ad) = \gamma(s, \pi_1, Ad) \gamma(s, \pi_2, Ad) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2) \gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, Ad) = \gamma(s, \pi, Ad)$,
- $\gamma(s, \pi, Ad)$ a un zéro simple en $s = 0$,
- $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_2, \Lambda^2) \gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
- $\gamma(s, \pi | \det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,

— $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ a au plus un zéro simple en $s = 0$ et $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ si et seulement si π est dans l'image de l'application de transfert T ,
pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ et $\pi_1, \pi_2 \in \text{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(94)

$$\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi) = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{1 \leq l \neq l' \leq m_i} \left(\frac{x_{i,l}(\lambda) - x_{i,l'}(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{1 \leq l \neq l' \leq n_i} \left(\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)} - \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right) \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left(\frac{y_{j,l}(\lambda) - y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right) \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left(\frac{z_{k,l}(\lambda) - z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right) \right) F(\lambda),$$

où F est une fonction $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V (quitte à rétrécir V), il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas sur V . De même, on a

(95)

$$\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{\substack{1 \leq l \leq m_i \\ 1 \leq l' \leq n_i}} \left(s + \frac{x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l'}(\lambda)}}{d_i} \right)^{-1} \right) \\ \left(\prod_{j=1}^u \prod_{1 \leq l \neq l' \leq p_j} \left(s + \frac{y_{j,l}(\lambda) + y_{j,l'}(\lambda)}{e_j} \right)^{-1} \right) \left(\prod_{k=1}^v \prod_{1 \leq l \neq l' \leq q_k} \left(s + \frac{z_{k,l}(\lambda) + z_{k,l'}(\lambda)}{f_k} \right)^{-1} \right) G(2\lambda + s),$$

où la fonction G est une fonction $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante méromorphe sur $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $\frac{1}{2}V + \mathcal{H}$ (quitte à rétrécir V) ; ici $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$ s'injecte dans $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ par l'application $s \in \mathcal{H} \mapsto \lambda_s \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s, \dots, s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s, \dots, s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s, \dots, s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [5], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [5, Proposition 3.2.1], on écrit

(96)

$$\varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} = \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \varphi(\lambda) F(\lambda) G(2\lambda + s)$. De plus, φ_s est $W(PG_{2n}, \tau)$ -invariante à support compact. Les lettres P, Q, R désignent des fractions rationnelles qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [5, section 3]).

Proposition 3.3 (Beuzart-Plessis [5]). *La limite*

$$(97) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ns}{|W|} \int_{\mathcal{A}} \varphi_s(\lambda) \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k} \right) d\lambda$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(98)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda';$$

où

- $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$,
- c est le cardinal des $1 \leq k \leq t$ tel que $q_k \equiv 1 \pmod{2}$,
- $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
- W et W' sont définis de manière intrinsèque dans [5, section 3.3], W est isomorphe à $W(PG_{2n}, \tau)$ et W' est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$ (défini plus loin).

De plus, \mathcal{A}' est le sous-espace de \mathcal{A} défini par les relations :

- $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq i \leq t$ et $1 \leq l \leq n_i$,
- $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq j \leq u$ et $1 \leq l \leq \frac{p_j}{2}$,
- $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ pour tous $1 \leq k \leq v$ et $1 \leq l \leq \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe \mathcal{A}' de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$(99) \quad \mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v (i\mathbb{R})^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil}$$

qui envoie $(x_i(\lambda), y_j(\lambda), z_k(\lambda))$ sur $((x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}), (y_{j,1}, \dots, y_{j, \frac{p_j}{2}}), (z_{k,1}, \dots, z_{k, \lceil \frac{q_k}{2} \rceil}))$.

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$. D'après la caractérisation 84, il existe $1 \leq i \leq r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparaît dans 84). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T . Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après la proposition 3.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

$$(100) \quad \sigma = \left(\prod_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \prod_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \prod_{k=1}^v \nu_k^{\times \lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \right) \rtimes \sigma_0,$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$(101) \quad T(\sigma_0) = \bigotimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \pmod{2}}}^v \nu_k.$$

On note $L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v G_{f_k}^{\lceil \frac{q_k}{2} \rceil} \times SO(2m+1)$ et P un parabolique de Levi L . On a $\sigma = i_p^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 3.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant la classe d'isomorphisme de σ .

Comme précédemment, on normalise la mesure sur $\widehat{A_L}$ avec un facteur $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_L)}$ et on dispose d'un isomorphisme local $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto |\det|^{\lambda'} \in \widehat{A_L}$ où $|\det|^{\lambda'} = \prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{n_i} |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \times \prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \times \prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}}$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$, avec

$$(102) \quad \sigma_{\lambda'} = \left(\prod_{i=1}^t \prod_{l=1}^{n_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\prod_{j=1}^u \prod_{l=1}^{\frac{p_j}{2}} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ \times \left(\prod_{k=1}^v \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \rtimes \sigma_0.$$

De plus, d'après 84, pour $\lambda \in V$, $\pi_\lambda \in T(\text{SO}(2n+1)/\text{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$; quitte à rétrécir V . Dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 93), on obtient

$$(103) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ = \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ = \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.$$

De plus,

$$(104) \quad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i} \prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^v f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 3.3 et la relation 101. D'autre part, d'après la proposition 3.3 et l'équation 93, on a

$$(105) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\text{PG}_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\text{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P} \\ \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \rightarrow 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^t P_{m_i, n_i, s} \left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i} \right) \prod_{j=1}^u Q_{p_j, s} \left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j} \right) \prod_{k=1}^v R_{q_k, s} \left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k} \right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(106) \quad \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \rightarrow 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{\Lambda^2}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'.$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$(107) \quad \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \log(q_F)}{|W'|P} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, \text{Ad}, \psi)}{\log(q_F)^N} d\lambda';$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi)\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi) = \gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, Ad, \psi)$ et

$$(108) \quad \frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), Ad, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi).$$

Dans l'expression 107, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 107 est égal au membre de droite 103, d'après l'égalité 104. \square

4. UNE FORMULE D'INVERSION DE FOURIER

On note H_n le sous-groupe des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n . On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n qui envoie $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ sur $\psi(\text{Tr}(X))$.

On équipe H_n , $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$ et $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$ des mesures suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{H_n} f(s) ds &= \int_{G_n} \int_{M_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} f(\xi) d\xi &= \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \text{ invariante à gauche par } N_{2n}, \\ - \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} f(\xi) d\xi &= \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dX dg, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \text{ invariante à gauche par } N_{2n}. \end{aligned}$$

Proposition 4.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, alors on a*

$$(109) \quad \int_{H_n} f(s) \theta(s)^{-1} ds = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi) \theta(\xi)^{-1} \theta(\xi_p) d\xi d\xi_p.$$

où W_f est la fonction de $G_{2n} \times G_{2n}$ définie par

$$(110) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n . Pour $n = 1$, σ_n est trivial, $H_1 = N_2 Z(G_2)$ et $H_1^P = N_2$ donc $H_1^P \cap N_2 \backslash H_1^P$ est trivial. Le membre de droite est alors

$$(111) \quad \int_{F^*} W_f \left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f \left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) \psi(u)^{-1} du dz.$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n - 1$.

Le sous groupe Ω_n des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversibles, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n , en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de \overline{B}_n . On note $\tilde{\Omega}_n$ l'ensemble

des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où \tilde{Y} est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et \tilde{h} de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-1}$ et $\tilde{l}_n \in F^*$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$ et $\tilde{\Omega}_n$ à travers l'isomorphisme $(\tilde{y}, \tilde{l}, \tilde{l}_n) \in F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \tilde{\Omega}_n$ où $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1} \tilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \tilde{\Omega}_n^P$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\tilde{\Omega}_n^P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où \tilde{Y} est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{z} \in F^{n-1}$ et \tilde{p} de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-2}$ et $\tilde{l}_{n-1} \in F^*$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$. Dans la suite, on fera l'identification de $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$ et $\tilde{\Omega}_n^P$ à travers l'isomorphisme $(\tilde{z}, \tilde{l}, \tilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \tilde{\Omega}_n^P$ où $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$.

On équipe $\Omega_n, \tilde{\Omega}_n, \Omega_n^P, \tilde{\Omega}_n^P$ des mesures suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_n} f(\xi) d\xi &= \int_{\overline{B}_n} \int_{V_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dY dh, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{\tilde{\Omega}_n} f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} &= \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\tilde{Y} d\tilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{\Omega_n^P} f(\xi_p) d\xi_p &= \int_{\overline{B}_n \cap P_n} \int_{V_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) dZ dp, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}), \\ - \int_{\tilde{\Omega}_n^P} f(\tilde{\xi}_p) d\tilde{\xi}_p &= \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) d\tilde{Y} d\tilde{h}, \quad f \in \mathcal{S}(G_{2n}). \end{aligned}$$

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$(112) \quad \int_{\tilde{\Omega}_n^P} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p d\xi'_p d\tilde{\xi}_p,$$

On a choisi les représentants des matrices Y et \tilde{Y} de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{\Omega}_{n-1}$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p) R(\tilde{\xi}) f$, on a alors

$$(113) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi'_p \tilde{\xi}_p, \xi' \tilde{\xi}) |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi'_p d\xi'_p. \end{aligned}$$

De plus,

$$(114) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\xi'^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du,$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $v \mapsto \xi'_p v \xi'^{-1}_p$, ce qui donne

$$(115) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(v \xi'^{-1}_p u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du.$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left(v \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$(116) \quad W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi').$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$(117) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ & \int_{\Omega_{n-1}^p} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ & \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1} v s \tilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$.

On rappelle que l'on identifie $F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^*$ et $\tilde{\Omega}_n^p$ à travers l'isomorphisme $(\tilde{z}, \tilde{l}, \tilde{l}_{n-1}) \in F^{n-1} \times F^{n-2} \times F^* \mapsto \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \in \tilde{\Omega}_n^p$ où $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$

et $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_n \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$(118) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} v s \tilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de v par σ_n^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n , les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(v)$ devient après conjugaison $\psi(\text{Tr}(y) + \text{Ts}(t))$,

où $\text{Ts}(t) = t_{n-1, n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p} \tilde{Z} \tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p} n_1 \tilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \tilde{p} n_2 \tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p} t \tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p} y \tilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

$$(119) \quad \begin{aligned} & \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma_n^{-1} V \sigma_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} s \tilde{\xi} \right) \\ & \theta(s)^{-1} \psi(-\text{Tr}(y)) \psi(-\text{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1})) |\det \tilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}. \end{aligned}$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma_n^{-1} s \sigma_n$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et

dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n . Le changement de variable $X \mapsto \tilde{p}X\tilde{p}^{-1}$ donne

$$(120) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1}g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \tilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$(121) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1}V\sigma_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

Lemme 4.1. *Soit $F \in \mathcal{S}(M_n)$, alors*

$$(122) \quad \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{\text{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1}))|\det \tilde{p}|dt d\tilde{p} = F(0).$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2} \times F^$ à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \tilde{l} & \tilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{l} \in F^{n-2}$ et $\tilde{l}_{n-1} \in F^*$.*

Démonstration. La mesure $|\det \tilde{p}|d\tilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1} . En remarquant que $\text{Ts}(\tilde{p}t\tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à \tilde{p} et t , le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. \square

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(123) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{\Omega}_n} \int_{M_{n-1}} \int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}\tilde{\xi} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X))\psi(-\text{Tr}(y))d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\tilde{\xi} d\tilde{Z},$$

où $\sigma_n^{-1}V_0\sigma_n$ est le sous-groupe de $\sigma_n^{-1}V\sigma_n$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\tilde{\xi}$ de la forme $\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ où \tilde{Y} est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h} \in F^{n-1} \times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. Ce qui nous permet d'identifier $F^{n-1} \times F^{n-1} \times F^*$ et $\tilde{\Omega}_n$. L'intégrale devient

$$(124) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma_n^{-1} V_0 \sigma_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(y)) d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dX dg d\tilde{h} d\tilde{Y} d\tilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

$$(125) \quad \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_1^{-1}y + X + g\tilde{Y}g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

On effectue les changement de variable $y \mapsto n_1 y$ et $\tilde{Y} \mapsto g^{-1}\tilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X , y et \tilde{Y} en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X . On obtient alors

$$(126) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g\tilde{h} & 0 \\ 0 & g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ et on remarque que l'on a

$$(127) \quad \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables $X \mapsto n_1^{-1}(X + \tilde{Z} n_2) n_1$ nous donne alors

$$(128) \quad \int_{F^{n-1}} \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n^2} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) \psi(-\text{Tr}(\tilde{Z} n_2)) d(n_1, n_2) dX dg d\tilde{h} d\tilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables \tilde{Z} et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$(129) \quad \int_{F^{n-1} \times F^*} \int_{G_{n-1}} \int_{M_n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g\tilde{h} & 0 \\ 0 & n_1 g\tilde{h} \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dn_1 dX dg d\tilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur n_1 , g , \tilde{h} ; on trouve bien notre membre de gauche

$$(130) \quad \int_{G_n} \int_{M_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg.$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur \tilde{H} , H_{n-1} , $\tilde{\Omega}_{n-1}$ et H_{n-1}^P qui chacune est absolument convergente

mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 126) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 129). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 126, à part l'intégration sur \tilde{Z} , on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_{2n}g\|_\infty$. On a

(131)

$$W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}f}} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) =$$

$$(1 + |a_n|)^N |\det a(a')^{-1}|^{-1} W_f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $X, X' \in V_n$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(132)

$$\int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \int_{\bar{n}_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det a(a')^{-1}|$$

$$W_{r^N |\det|^{-\frac{1}{2}f}} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}, \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right)$$

$$\delta_{B_n}(a)^{-1} \delta_{B_{n-1}}(a')^{-1} da dX da' dX'$$

pour N suffisamment grand. On note $u_X = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$ et $u_{X'} = \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_n^{-1}$.

On a alors

$$(133) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b \sigma_n k \sigma_n^{-1} u_{(ak)^{-1}X(ak)},$$

où $b = \text{diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$ et

$$(134) \quad \sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'k' & 0 \\ 0 & a'k' \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} = b' \sigma_n k' \sigma_n^{-1} u_{(a'k')^{-1}X'(a'k')},$$

où $b' = \text{diag}(a'_1, a'_1, a'_2, a'_2, \dots)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X'(a'k')^{-1}$. D'après les lemmes 2.2 et la preuve du lemme 2.4, il existe $d > 0$ tel que pour tout $N \geq 1$, l'intégrale 132 est alors majorée à une constante près par

(135)

$$\int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \int_{V_n} \int_{A_n} (1 + |a_n|)^{-N} |\det a(a')^{-1}| m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X) \log(\|bt_X\|)^d$$

$$m(X')^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \left|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}\right|\right)^{-N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'}) \log(\|b't_{X'}\|)^d \delta_{B_n}^{-2}(a) \delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') da dX da' dX'.$$

Les quantités $m(X)$, $m(X')$, α et α' sont celles que l'on obtient par l'application de la proposition 2.8. On rappelle que $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, où $\|X\| = \sup_{i,j} |X_{i,j}|$. On a $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b')\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a') = |\det a'|^2$. On en déduit que cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$(136) \quad \int_{V_n} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^{d-j} dX,$$

$$(137) \quad \int_{V_n} m(X')^{-\alpha' N} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'}) \log(\|t_{X'}\|)^{d-j'} dX',$$

$$(138) \quad \int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^j |\det a| da,$$

et

$$(139) \quad \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + |\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a'_{n-1}|)^{-N} \log(\|b'\|)^{j'} |\det a'| da',$$

pour j, j' compris entre 0 et d . Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [12, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 2.3 pour les deux dernières. \square

5. FORMULES DE PLANCHEREL

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n})$, on note

$$(140) \quad \beta(W) = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} W(\xi_p) \theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p.$$

Lemme 5.1. *L'intégrale 140 est absolument convergente. La forme linéaire $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n} \backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ est continue. De plus, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est non nulle.*

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, $P_n = N_n A_{n-1} K_n^P$, où K_n^P est un sous-groupe compact, il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$(141) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \left| W \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout $k \in K_n^P$. D'après la preuve du lemme 2.4, on obtient la majoration suivante :

$$(142) \quad \int_{V_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})^{-N} m(X)^{-\alpha N} \delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a) \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,$$

pour tout $N \geq 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que dans la preuve du lemme 2.4.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n} \backslash P_{2n}, \psi)$ [6]. En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction à $A_{2n-1} K_{2n}^P$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. \square

Proposition 5.1. *Pour $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$, la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$.*

La preuve de cette proposition se fera après quelques préliminaires. On commence par prouver un lemme et introduire des notations.

Lemme 5.2. *Pour $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n} \backslash G_{2n})$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on a*

$$(143) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) = \phi(0) \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W(\xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

Démonstration. On a

$$(144) \quad \begin{aligned} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi) &= \int_{A_{n-1}} \int_{K_n} \int_{V_n} W \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ &\quad \psi(-\text{Tr}(X)) dX \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz dk |\det a|^s \delta_{B_n}(a)^{-1} da \end{aligned}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$(145) \quad \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz = \int_{F^*} \widehat{\phi}_k(x) |x|^{1-ns} dx,$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$(146) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi}_k(x) dx = \phi(0).$$

On en déduit, aussi par convergence dominée, que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi)$ est égal à

$$(147) \quad \begin{aligned} \phi(0) \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{V_n} W \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \\ \psi(-\text{Tr}(X)) dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. \square

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u) \psi(u)^{-1} du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [5], que l'on note

$$(148) \quad f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u) \psi(u)^{-1} du.$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$(149) \quad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du,$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Proposition 5.2 (Beuzart-Plessis [5]). *L'application linéaire*

$$f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto (\pi \mapsto W_{f,\pi}) \in \mathcal{S}(\text{Temp}(G_{2n}), C^w(N_{2n} \times N_{2n} \backslash G_{2n} \times G_{2n}, \psi \otimes \psi^{-1}))$$

est continue.

Proposition 5.3 (Beuzart-Plessis [5]). *Pour tout $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$. On pose $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\tilde{f} \in PG_{2n}$. On a $\tilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in \text{Temp}(PG_{2n})$. De plus,*

$$(150) \quad W_{\tilde{f}} = \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} W_{f,\pi} d\mu_{PG_{2n}}(\pi).$$

Lemme 5.3. *Soit $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, alors il existe $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $W_{f,\pi}(1, \cdot) = W$.*

Démonstration. On a

$$(151) \quad W_{f,\pi}(1, \cdot) = \int_{N_{2n}} f_\pi(u) \psi(u)^{-1} du.$$

D'autre part, soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ alors f est bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact K . On a une décomposition $V_\pi = V_\pi^K \oplus V_\pi(K)$, où $V_\pi(K)$ est l'espace des vecteurs K -invariants. Comme π est admissible, V_π^K est de dimension finie. On note \mathcal{B}_π^K une base de cet espace. Alors pour tout $g \in G_{2n}$, on a $f_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)) = \sum_{v \in \mathcal{B}_\pi^K} \langle \pi(g)\pi(f^\vee)v, v^\vee \rangle$, où $(v^\vee)_{v \in \mathcal{B}_\pi^K}$ est la base duale de \mathcal{B}_π^K . On en déduit que f_π est une somme (finie) de coefficient matriciel.

On note $\text{Coeff}^K = \{g \mapsto \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle, v \in V_\pi, \tilde{v} \in V_\pi\}$. Alors toute somme finie de Coeff^K est de la forme f_π avec $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K)$. En effet, $f \in \mathcal{S}(G_{2n}, K) \mapsto \pi(f^\vee) \in \text{End}(V_\pi^K)$ est surjective, où l'on a noté $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ le sous espace de $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ des fonctions bi-invariante par K . La surjectivité est une conséquence du lemme de Burnside et du fait que V_π^K est un $\mathcal{S}(G_{2n}, K)$ -module irréductible de dimension finie. L'isomorphe de représentation nous donne $\text{End}(V_\pi^K) \simeq \pi^K \boxtimes \tilde{\pi}^K$ le résultat.

Pour montrer le lemme, il nous faut montrer qu'il existe un coefficient matriciel $c = \langle \pi(\cdot)v, \tilde{v} \rangle$ tel que $W = \int_{N_{2n}} c(u) \psi(u)^{-1} du$. Or

$$(152) \quad v \mapsto \int_{N_{2n}} c(u) \psi(u)^{-1} du = \int_{N_{2n}} \langle \pi(u)v, \tilde{v} \rangle \psi(u)^{-1} du$$

est une fonctionnelle de Whittaker. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir \tilde{v} pour que cette fonctionnelle soit non nulle. C'est le contenu de [17, Théorème 6.4.1]. \square

Corollaire 5.1 (de la limite spectrale). *Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $g \in G_{2n}$, alors*

$$(153) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f,T(\sigma)}(g, \cdot)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\tilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\tilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$(154) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi.$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. D'après le lemme 5.2, la proposition 5.3 et la continuité de $\pi \mapsto J(s, W_{f,\pi}(1, \cdot), \phi)$, on a

$$(155) \quad \begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\tilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\tilde{f}}(1, \cdot), \phi) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(PG_{2n})} J(s, W_{f,\pi}(1, \cdot), \phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle 2.4, on a

$$(156) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \lim_{s \rightarrow 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\text{Temp}(\mathbb{P}G_{2n})} J(1-s, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,\pi}(1, \cdot)}, \widehat{\phi}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\mathbb{P}G_{2n}}(\pi).$$

La proposition 3.2, nous permet d'obtenir la relation

$$(157) \quad \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)/\text{Stab})} J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

En remplaçant f par $R(h)f$, $h \in H_n$, dans le membre de droite; cela revient à multiplier par $\theta(h)$. On en déduit la même relation pour le membre de droite. Ce qui signifie que

$$(158) \quad \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)/\text{Stab})} J(1, R(\xi) \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi}) - \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [5, Lemme 5.7.2] et la continuité de $\sigma \mapsto J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi})$, on en déduit que $J(1, R(\xi) \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi}) = \theta(\xi) J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi})$ pour tout $\xi \in H_n$ et donc que $J(1, \rho(w_{n,n}) \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, \cdot)}, \widehat{\phi})$ est (H_n, θ) -invariant (dans le sens où le changement f par $R(\xi)f$ revient à multiplier par $\theta(\xi)$).

Lemme 5.4. *Soit $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$ et $\pi = T(\sigma)$. Alors*

$$(159) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W),$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, soit $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, on a

$$(160) \quad J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg.$$

D'après le lemme 5.3, on choisit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $W_{f,\pi}(1, \cdot) = \rho(w_{n,n}^{-1})W$. D'après ce que l'on vient de dire précédemment, on en déduit que $J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$ vérifie la relation $J(1, R(\xi) \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \theta(\xi) J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi})$, pour tout $\xi \in H_n$.

Comme $\widehat{\phi}(e_n g)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1} U_{n-1}$, on en déduit que

$$(161) \quad \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dg$$

est (H_n, θ) -invariant en tant que fonction de \widetilde{W} . D'après l'isomorphisme G_{2n} -équivariant $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi) \mapsto \widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$, β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant, ce qui termine la preuve de la proposition 5.1.

Remarque 5.1. *Cette preuve que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ) -invariant est quelque peu détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ qui est de dimension au plus 1. En utilisant le fait que $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ donc π est (H_n, θ) -distinguée, on a $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. Ce dernier est un sous-espace de $\text{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. On en déduirait alors que la restriction de β à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien $H_n \cap P_{2n}$ -invariant, est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\pi, \theta)$. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension 1.*

Proposition 5.4. *Soit $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$, on pose $\pi = T(\sigma)$ le transfert de σ dans $\text{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément de $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$. On identifie $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ par l'isomorphisme G_{2n} -équivariant $W \mapsto \widetilde{W}$. Il existe un signe $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ tel que*

$$(162) \quad \beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W),$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

Démonstration. En effet, $\text{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [11]. De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$. Pour finir, en appliquant l'équation 162, pour π et $\widetilde{\pi}$, on obtient $\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\pi)c_\beta(\widetilde{\pi})\beta(\widetilde{W})$. Comme β est non nulle (lemme 5.1), on en déduit que $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. \square

Finissons la preuve du lemme 5.4, on remarque que l'on a

$$(163) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash G_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX \widehat{\phi}(e_n g) |\det g| dg \\ &= \int_{P_n \backslash G_n} \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh. \end{aligned}$$

De plus,

$$(164) \quad \begin{aligned} & \int_{N_n \backslash P_n} \int_{V_n} \widetilde{W} \left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \psi(-\text{Tr}(X)) dX dp \\ &= \beta \left(R \left(\sigma_n \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma_n^{-1} \right) \widetilde{W} \right) \\ &= \beta(\widetilde{W}), \end{aligned}$$

puisque β est (H_n, θ) -invariant. De plus,

$$(165) \quad \begin{aligned} & \int_{P_n \backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h) |\det h| dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x) dx \\ &= \phi(0). \end{aligned}$$

On conclut grâce à la proposition 5.4. \square

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 5.4 dans la relation 157. \square

5.1. Formule de Plancherel explicite sur $H_n \backslash G_{2n}$. On note $Y_n = H_n \backslash G_{2n}$ munie de la mesure quotient. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$(166) \quad \varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy) \theta(h)^{-1} dh,$$

pour tout $y \in G_{2n}$.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a

$$(167) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h) \theta(h)^{-1} dh,$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$.

En effet,

$$(168) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1 y) \overline{f_2(h_2 y)} \theta(h_1)^{-1} \theta(h_2) dh_1 dh_2 dy.$$

L'intégrale est absolument convergente. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon y et h_2 en une intégrale sur G_{2n} . Ce qui donne

$$(169) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1 y) \overline{f_2(y)} \theta(h_1)^{-1} dh_1 dy.$$

On pose

$$(170) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi} = (f_1, f_2)_{Y_n, \pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P} \beta(W_{f, \pi}(\xi_p, \cdot)) \theta(\xi_p) d\xi_p,$$

pour tout $\pi \in T(\text{Temp}(\text{SO}(2n+1)))$.

On note $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$ le quotient de $\mathcal{S}(Y_n, \theta)$ par l'intersection des noyaux de toutes les applications $\mathcal{S}(Y_n, \theta) \rightarrow \pi$ linéaires G_{2n} -équivariante.

Proposition 5.5. *Supposons $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \text{Temp}(\text{SO}(2n+1))$. La forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{Y_n, \pi}$ sur $\mathcal{S}(G_{2n})$ est une forme hermitienne continue semi-définie positive qui se factorise par $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_\pi$.*

Démonstration. Commençons par le

Lemme 5.5. *Soit $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$. On introduit un produit scalaire sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)$:*

$$(171) \quad (W, W')^{W_h} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p) \overline{W'(p)} dp,$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est de rang fini. Notons $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ une base finie orthonormée de son image. Alors

$$(172) \quad W_{f, \pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_2) W' \otimes \overline{\pi(f_1) W'}.$$

Démonstration. Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)^{W_h}$ est P_{2n} -invariant, d'après Bernstein [3], il est aussi G_{2n} -invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned} \pi(f^\vee)W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{Wh} W' \\ (173) \quad &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (W, \pi(\bar{f})W')^{Wh} W'. \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(\cdot, \cdot)^{Wh}$ de faire l'identification

$$(174) \quad \pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} W' \otimes \bar{\pi}(f) \overline{W'}.$$

La G_{2n} -invariance de $(\cdot, \cdot)^{Wh}$ nous donne que $W' \otimes \bar{\pi}(f_1 * f_2^*) \overline{W'} = \pi(f_2)W' \otimes \bar{\pi}(f_1) \overline{W'}$.

On obtient alors

$$(175) \quad \pi(f^\vee) = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_2)W' \otimes \overline{\pi(f_1)W'}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} W_{f, \pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \int_{N_{2n}}^* (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W') \psi(u)^{-1} du \\ (176) \quad &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2) \overline{\pi(f_2)W'}(g_1), \end{aligned}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [5, Prop 2.14.3]. \square

Le lemme 5.5 donne la relation

$$(177) \quad (f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma), \psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')} \beta(T(\sigma)(f_1)W')$$

qui est indépendant du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β à $\mathcal{W}(T(\sigma), \psi)$ est (H_n, θ) -invariante, d'après la proposition 5.1. De plus, $(f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)}$ dépend uniquement de $T(\sigma)(f_1)$ et $T(\sigma)(f_2)$. On en déduit que $(\cdot, \cdot)_{Y_n, \pi}$ se factorise par $\mathcal{S}(Y_n, \theta)_{T(\sigma)}$.

On remarque que

$$(178) \quad (f_1, f_2)_{Y_n, T(\sigma)} = (\beta \otimes \beta)(W_{f_1 * f_2^*, \pi}),$$

ce qui nous permet de déduire, d'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, que $(\cdot, \cdot)_{Y_n, T(\sigma)}$ est continue. \square

Théorème 5.1. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$. On a

$$(179) \quad (\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. D'après 4.1 et 5.1, on a

$$\begin{aligned} \int_{H_n} f(h) \theta(h)^{-1} dh &= \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{\text{Temp}(\text{SO}(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \\ (180) \quad &\quad \theta(\xi_p) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p. \end{aligned}$$

Lemme 5.6. La fonction $\sigma \mapsto \beta(W_{f, T(\sigma)}(\xi_p, \cdot))$ est à support compact.

Démonstration. D'après la définition de f_π , $W_{f,\pi}$ est nul dès que $\pi(f^\vee)$ l'est.

Soit K un sous-groupe ouvert compact tel que f^\vee est biinvariant par K . Alors $\pi(f^\vee) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K -invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra [21, Théorème VIII.1.2], il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f -invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in \text{Temp}(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M , on en déduit le lemme. \square

D'après la proposition 5.2 et le lemme 5.1, on sait que $\xi_p \mapsto \beta(W_{f,\pi}(\xi_p, \cdot))$ est continue. On en déduit que

$$(181) \quad \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} \beta(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, \cdot)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma$$

est absolument convergente.

De plus, l'intégration extérieure $\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \theta(\xi_p) d\xi_p$ n'est autre que la forme linéaire continue $\bar{\beta}(\cdot)$, on en déduit que l'on peut échanger l'ordre d'intégration pour obtenir

$$(182) \quad \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Pour finir, [5, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilineaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$(183) \quad \gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|.$$

\square

Corollaire 5.2. *On a une décomposition de Plancherel abstraite sur $L^2(H_n \backslash G_{2n})$:*

$$(184) \quad L^2(H_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

5.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.

Lemme 5.7. *On dispose d'un isomorphisme G_{2n} -équivariant d'espace de Hilbert*

$$(185) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta).$$

Démonstration. On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$, où \tilde{f} est définie par

$$(186) \quad \tilde{f}(g) = \int_{G_n} f \left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1} \right) d\gamma$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $X \in M_n$, on a

$$(187) \quad \begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

On note K un compact tel que $\text{supp}(f) \subset H_n K$. On en déduit que $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right)$ est nul sauf si il existe $g' \in G_n$ tel que $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix} \in K$. On en déduit alors que γ est dans un compact. L'intégrale est donc absolument convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
 &=_{\gamma \mapsto g_2 \gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
 &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
 &= \tilde{f}(g).
 \end{aligned}
 \tag{188}$$

Pour finir, montrons que \tilde{f} est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons g sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\tilde{f}(g) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(g) &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) d\gamma \\
 &= \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) \psi(\text{Tr}(\gamma x)) d\gamma
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact sur M_n , à savoir la fonction ϕ_k définie par $\phi_k(y) = f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) |\det y|^{-n}$ si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative $d\gamma$ en une mesure additive. On en déduit que \tilde{f} est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\tilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) = 0$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est (H_n, θ) -invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = c \|\tilde{f}\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \tilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \simeq L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= \int_{M_n \times K} \left| \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) \right|^2 dx dk \\
 &= \int_{M_n \times K} \left| \int_{G_n} f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right) \psi(\text{Tr}(\gamma x)) d\gamma \right|^2 dx dk \\
 &= \int_{M_n \times K} |\hat{\Phi}_k(x)|^2 dx dk.
 \end{aligned}
 \tag{190}$$

La transformé de Fourier conserve la norme L^2 avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$(191) \quad \begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} &= c' \int_{M_n \times K} |\phi_k(x)|^2 dx dk \\ &= c' \int_K \int_{G_n} |f\left(\sigma_n \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k \sigma_n^{-1}\right)|^2 \frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk. \end{aligned}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur M_n restreinte à G_n en une mesure multiplicative sur G_n . La mesure $\frac{d\gamma}{|\det \gamma|^n} dk$ est une mesure de Haar sur $G_n K \simeq H_n \backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_{L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)} = c \|f\|_{L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})}$. \square

Cet isomorphisme d'espace L^2 nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$ et sur $H_n \backslash G_n$. En effet, on dispose du

Théorème 5.2. *Une décomposition de Plancherel abstraite sur $L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$ est obtenue par la relation*

$$(192) \quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) = \int_{\text{Temp}(SO(2n+1))/\text{Stab}}^{\oplus} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \text{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 5.7 et du corollaire 5.2. \square

RÉFÉRENCES

- [1] J. ARTHUR, *The Endoscopic Classification of Representations Orthogonal and Symplectic Groups*, vol. 61, American Mathematical Soc., 2013.
- [2] D. BELT, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).
- [3] J. N. BERNSTEIN, *P-invariant distributions on $gl(n)$ and the classification of unitary representations of $gl(n)$ (non-archimedean case)*, in Lie Group Representations II, R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman, and J. Rosenberg, eds., Berlin, Heidelberg, 1983, Springer Berlin Heidelberg.
- [4] R. BEUZART-PLESSIS, *Archimedean theory and ϵ -factors for the Asai Rankin-Selberg integrals*, arXiv e-prints, (2018), p. arXiv :1812.00053.
- [5] R. BEUZART-PLESSIS, *Plancherel formula for $GL_n(F) \backslash GL_n(E)$ and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).
- [6] GEL'FAND, I. M. AND KAZHDAN, D. A., *On the representation of the group $GL(n, K)$ where K is a local field*, Functional Analysis and Its Applications, 6 (1972), pp. 315–317.
- [7] M. HARRIS, R. TAYLOR, AND V. G. BERKOVICH, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties. (AM-151)*, Princeton University Press, 2001.
- [8] G. HENNIART, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique*, Inventiones mathematicae, 139 (2000), pp. 439–455.
- [9] ———, *Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.
- [10] A. ICHINO, E. LAPID, AND Z. MAO, *On the formal degrees of square-integrable representations of odd special orthogonal and metaplectic groups*, Duke Math. J., 166 (2017), pp. 1301–1348.
- [11] H. JACQUET AND S. RALLIS, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.
- [12] H. JACQUET AND J. SHALIKA, *Exterior square L-functions, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, 2 (1990), pp. 143–226.
- [13] A. C. KABLE, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

- [14] P. K. KEWAT, *The local exterior square L -function : Holomorphy, non-vanishing and Shalika functionals*, Journal of Algebra, 347 (2011), pp. 153 – 172.
- [15] F. KNOP AND B. SCHALKE, *The dual group of a spherical variety*, Transactions of the Moscow Mathematical Society, 78 (2017).
- [16] N. MATRINGE, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.
- [17] Y. SAKELLARIDIS AND A. VENKATESH, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, arXiv e-prints, (2012), p. arXiv :1203.0039.
- [18] P. SCHOLZE, *The local Langlands correspondence for GL_n over p -adic fields*, Inventiones mathematicae, 192 (2013), pp. 663–715.
- [19] F. SHAHIDI, *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$* , American Journal of Mathematics, 106 (1984).
- [20] A. J. SILBERGER AND E.-W. ZINK, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p -adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, (1996).
- [21] J.-L. WALDSPURGER, *La formule de Plancherel pour les groupes p -adique. d’après Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), pp. 235–333.