UNFOLDING

On note H l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź X est dans M_n et g dans G_n et $H_P = H \cap P_{2n}$. On note θ le caractÃÍre sur H dÃľfini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Proposition 0.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, *alors on a*

$$\int_H f(s)\theta(s)^{-1} ds = \int_{H_P \cap N_{2n} \backslash H_P} \int_{H \cap N_{2n} \backslash H} W_f(\xi_p, \xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)^{-1} d\xi d\xi_p. \tag{1}$$

Démonstration. On montre la proposition par rÃľcurrence sur n. Pour $n = 1$, H_P est trivial, σ est trivial et $H \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f\left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) \psi(u)^{-1} du dz. \tag{2}$$

Ce qui est bien l'ÃľgalitÃľ voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vrai au rang $n - 1$.

Le groupe $H \cap N_{2n} \backslash H$ est isomorphe Ãă l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź Y est une matrice triangulaire infÃľrieure stricte de taille n et h dans $N_n \backslash G_n$. On note H' le groupe $H \cap N_{2n} \backslash H$ au rang $n - 1$, c'est l'ensemble des matrices de la forme de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & 0 \\ 0 & h' \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź Y' est une matrice triangulaire infÃľrieure stricte de taille $n - 1$ et h' dans $N_{n-1} \backslash G_{n-1}$. On note $\tilde{H}$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź $\tilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n \backslash G_n$. On voit le groupe H' comme sous-groupe de $H \cap N_{2n} \backslash H$, en rajoutant des 0 sur la derniÃÍre ligne et colonne de Y' et voyant h' comme un ÃľlÃľment de $N_n \backslash G_n$. On en dÃľduit que $H \cap N_{2n} \backslash H = \tilde{H} H'$.

De mÃłme, on dispose d'une dÃľcomposition, $H_P \cap N_{2n} \backslash H_P = \tilde{H}_P H'_{P'}$, oÃź $H'_{P'}$ est le groupe $H_P \cap N_{2n} \backslash H_P$ au rang $n - 1$ et $\tilde{H}_P$ est l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} & 0 \\ 0 & \tilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź $\tilde{Z}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{z} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{z} \in F^{n-1}$ et $\tilde{p}$ est dans $P_{n-1} U_n \backslash P_n$.

On utilise ces dÃľcompositions pour Ãľcrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\tilde{H}_P} \int_{H'_{P'}} \int_{\tilde{H}} \int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p \xi'_p, \tilde{\xi}\xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1/2} d\xi' d\tilde{\xi} d\xi'_p d\tilde{\xi}_p, \tag{3}$$

on a choisi les reprÃľsentants des matrices Y, $\tilde{Y}$, Z et $\tilde{Z}$ de sorte que le caractÃÍre θ soit trivial.

On fixe $\tilde{\xi}_p \in \tilde{H}_P$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{H}$. On pose $f' = L(\tilde{\xi}_p)R(\tilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned}
&\int_{H'_{p'}}\int_{H'} W_f(\tilde{\xi}_p\xi'_p, \tilde{\xi}\xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1/2} d\xi' d\xi'_p = \\
&\int_{H'_{p'}}\int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p.
\end{aligned} \tag{4}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = \int_{N_{2n-2}}\int_V f'({\xi'}_p^{-1} v u \xi')\psi(u)^{-1}\psi(v)^{-1} dv du, \tag{5}$$

oÃź V est l'ensemble des matrices de N_{2n} avec seulement les deux derniÃĺres colonnes non triviales, on dispose donc d'une dÃľcomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $v \mapsto {\xi'}_p v {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}}\int_V f'(v{\xi'}_p^{-1} u \xi')\psi(u)^{-1}\psi(v)^{-1} dv du. \tag{6}$$

On note $\tilde{f}'(g) = |\det g|^{-1}\int_V f'(vg)\psi(v)^{-1} dv$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\tilde{f}' \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'Ãľgalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p\xi'| W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi'). \tag{7}$$

Appliquons l'hypothÃĺse de rÃľcurrence,

$$\begin{aligned}
&\int_{H'_{p'}}\int_{H'} W_{f'}(\xi'_p, \xi')|\det \xi'_p\xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\
&\int_{H'_{p'}}\int_{H'} W_{\tilde{f}'}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \tilde{f}'(s)\theta(s)^{-1} ds = \\
&\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_V f(\tilde{\xi}_p^{-1} v s \tilde{\xi})\theta(s)^{-1}\psi(v)^{-1} dv ds,
\end{aligned} \tag{8}$$

oÃź l'on note H_{n-1} le groupe H au rang $n-1$.

Il nous faut maintenant intÃľgrer sur $\tilde{\xi}_p$ et $\tilde{\xi}$ pour revenir Ãă notre membre de droite. Explicitons l'intÃľgrale sur $\tilde{\xi}_p$ en le dÃľcomposant sous la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p} & 0\\ 0 & \tilde{p}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$. On obtient alors

(9)

$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1}\int_V f\left(\sigma\begin{pmatrix}\tilde{p}^{-1} & 0\\ 0 & \tilde{p}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\tilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sigma^{-1} v s\tilde{\xi}\right)\theta(s)^{-1}\psi(v)^{-1} dv ds d\tilde{\xi} d\tilde{Z} d\tilde{p}.$$

La conjugaison de v par σ^{-1} s'Ãľcrit sous la forme $\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}$ oÃź n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la derniÃĺre colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & *\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Le caractÃĺre $\psi(v)$ devient aprÃĺs conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y)+\mathrm{Ts}(t))$, oÃź $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\tilde{Z} \mapsto \tilde{p}\tilde{Z}\tilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \tilde{p}n_1\tilde{p}^{-1}$,

$n_2 \mapsto \tilde{p} n_2 \tilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \tilde{p} t \tilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \tilde{p} y \tilde{p}^{-1}$ transforme l'intÃľgrale prÃľcÃľdente en

(10)
$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s \tilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1}))^{-1} |\det \tilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{Z}\, d\tilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intÃľgrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1} s \sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la derniÃĺre ligne et derniÃĺre colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme ÃľlÃľment de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \tilde{p} X \tilde{p}^{-1}$ donne

$$\int_{P_{n-1}U_n\backslash P_n}\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det \tilde{p}^{-1} g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma}$$
$$f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^{-1} g & 0 \\ 0 & \tilde{p}^{-1} g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \tag{11}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1}))^{-1} |\det \tilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg\, dX\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{Z}\, d\tilde{p}.$$

On effectue le changement de variables $g \mapsto \tilde{p} g$. En considÃľrant uniquement l'intÃľgration sur t et sur $\tilde{p}$ et en remarquant que $\mathrm{Ts}(\tilde{p} t \tilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant Ãă $\tilde{p}$ et t, on voit apparaitre une formule d'inversion de Fourier, ce qui nous permet de simplifier notre intÃľgrale en

$$\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}$$
$$f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \tag{12}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg\, dX\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{Z},$$

oÃź $\sigma^{-1} V_0 \sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1} V \sigma$ oÃź $t = 0$. Le changement de variable $n_2 \mapsto n_2 n_1$ donne

(13)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{\tilde{H}}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y)) d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} dg\, dX\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{Z}.$$

De plus, on a

(14)
$$\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ 0 & n_2 n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y n_1^{-1} + n_1 X n_1^{-1} - \tilde{Z} n_2 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix}.$$

On effectue les changements de variables $y \mapsto y n_1$ et $X \mapsto n_1^{-1} X n_1$. Ce qui nous permet de combiner les intÃľgrales selon y et X en une intÃľgration sur $M_{n-1} \times F^n$

dont on note encore la variable X. On effectue ensuite le changement de variables $X \mapsto X + \tilde{Z}n_2$ ce qui donne

$$\int_{F^{n-1}} \int_{\tilde{H}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1} \times F^n} |\det g|^{-2} \int_{U_n^2} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g & 0 \\ 0 & n_1 g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\tilde{Z}n_2))d(n_1, n_2)dXdgd\tilde{\xi}d\tilde{Z}. \tag{15}$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\tilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intÃľgrale en

$$\int_{\tilde{H}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1} \times F^n} |\det g|^{-2} \int_{U_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g & 0 \\ 0 & n_1 g \end{pmatrix} \sigma^{-1} \tilde{\xi}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1 dXdgd\tilde{\xi}. \tag{16}$$

On explicite l'intÃľgration sur $\tilde{xi}$ de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ oÃź $\tilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \tilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\tilde{y} \in F^{n-1}$ et $\tilde{h}$ est dans $P_n \backslash G_n$ et on effectue le changement de variable $\tilde{Y} \mapsto (n_1 g)^{-1} \tilde{Y} n_1 g$, on obtient alors

$$\int_{P_n \backslash G_n} \int_{F^{n-1}} \int_{G_{n-1}} \int_{M_{n-1} \times F^n} |\det g|^{-1} \int_{U_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X + \tilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 g h & 0 \\ 0 & n_1 g h \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1 dXdgd\tilde{Y}d\tilde{h}. \tag{17}$$

AprÃĺs combinaison des intÃľgrations en X, $\tilde{Y}$ et des intÃľgrations sur n_1, g, h ; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n} \int_{M_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{18}$$

□