FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

1. Préliminaires

Proposition 1. *Equation fonctionnelle locale*

Proposition 2. *Equation fonctionnelle globale*

Proposition 3. *Globalisation*

2. Facteurs γ

On se propose de démontrer l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Proposition 4. *Soit* $F=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$*.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ *telle que pour tous* s*,* $W\in W(\pi,\psi)$ *et* $\phi\in\mathcal{S}(F)$*, on ait*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)J(s,W,\phi)=J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{1}$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s\in\mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)=c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{2}$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F=\mathbb{R}$ (respectivement $F=\mathbb{C}$) ; par exemple, $k=\mathbb{Q}$ si $F=\mathbb{R}$ et $k=\mathbb{Q}(i)$ si $F=\mathbb{C}$. Soit $v\neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U\subset \mathtt{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π.

D'après la proposition 3, il existe une représentation automorphe cuspidale Π telle que $\Pi_\infty\in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w\neq v$.

D'après la proposition 2, on a

(3)

$$\begin{aligned}&J(s,W_\infty,\phi_\infty)J(s,W_v,\phi_v)L^S(s,\Pi,\Lambda^2)\\&\quad=J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_\psi(\phi_\infty))J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_v,\mathcal{F}_\psi(\phi_v))L^S(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2)\end{aligned}$$

et

$$L^S(s,\Pi,\Lambda^2)=\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,\psi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,\psi_v)L^S(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{4}$$

Date: 17 octobre 2018.

Le quotient de ces deux équations nous donne, en utilisant la proposition 1 sur Π_ν, la relation

$$\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_\psi(\phi_\infty))}{J(s,W_\infty,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,\psi_\infty)}\frac{\gamma^{JS}(s,\Pi_\nu,\Lambda^2,\psi_\nu)}{\gamma^{Sh}(s,\Pi_\nu,\Lambda^2,\psi_\nu)}=1. \tag{5}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,\psi_\infty)$.

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant la continuité des facteurs γ et des facteurs J, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$, qui est limite de fractions rationnelles en q_ν^s ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_\nu}$.

On réutilisant notre raisonnement en la place ν', on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{\nu'}}$; donc est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi)=R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)=c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{6}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)J(s,W,\phi)=J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{7}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)J(s,W,\phi)=\frac{J(s,W,\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\phi})}. \tag{8}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi))=\phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)\gamma^{JS}(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2,\bar{\phi})=1. \tag{9}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 7, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\phi)}=\gamma^{JS}(\bar{s},\bar{\pi},\Lambda^2,\bar{\phi}). \tag{10}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi}\simeq\bar{\pi}$. On en déduit, pour $s=\frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\phi)|^2=1. \tag{11}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{JS}(\frac{1}{2},\pi,\Lambda^2,\phi)|^2=1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est de module 1. □