LIMITE SPECTRALE

Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera G_{2n}, SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $Temp(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de G. On note Z_G le centre de G et A_G le tore déployé maximal dans Z_G. On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ. On équipe alors A_M par la mesure $(d^\times x)^{\wedge dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur $F^\times$.

Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G,M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G,M) et $W(G,\sigma)$ le sous-groupe de $W(G,M)$ fixant σ. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\widetilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ défini par

$$d\chi = \gamma^*(0,1,\psi)^{-dim(A_M)} d\widetilde{\chi}, \tag{1}$$

où $\gamma^*(0,1,\psi) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\gamma(s,1,\psi)}{s log(q_F)}$. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $Temp(G)$ localement autour de $\pi \simeq Ind_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1} (Ind_M^G)_* d\sigma. \tag{2}$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 5.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in Temp(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$f_\pi(g) = Tr(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{3}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 0.1. *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $Temp(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{Temp(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{4}$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|} d\pi, \tag{5}$$

où $\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi) = \lim_{s\to 0} (s log(q_F))^{-n_{\pi,\overline{Ad}}} \gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$, avec $n_{\pi,\overline{Ad}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s,\pi,\overline{Ad},\psi)$ en $s=0$. Pour $\pi \in Temp(PG_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $Temp(G)/Stab$ le quotient de $Temp(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W_F' \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour

$\mathsf{SO}(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $\mathsf{T} : \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2m+1))/\mathsf{Stab} \to \mathsf{Temp}(\mathsf{G}_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in \mathsf{T}(\mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))/\mathsf{Stab}) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{k} \tau_i \times \widetilde{\tau_i}\right) \times \bigtimes_{j=1}^{l} \mu_i \tag{6}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(\mathsf{G}_{n_i})$ et $\mu_j \in \mathsf{T}(\mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2m_j+1))/\mathsf{Stab}) \cap \Pi_2(\mathsf{G}_{2m_j})$.

Proposition 0.2. *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n}))$, *on a*

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}} = \\ &\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{SO}_{2n+1})/\mathsf{Stab}} \phi(\mathsf{T}(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,\mathsf{Ad},\psi)}{|\mathsf{S}_\sigma|} d\sigma.\end{aligned} \tag{7}$$

Pour $\sigma \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times ... \times \pi_l \times \sigma_0$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(\mathsf{G}_{n_i})$ *et* $\sigma_0 \in \Pi_2(\mathsf{SO}(2m+1))$, *le facteur* $|\mathsf{S}_\pi|$ *est le produit* $|\mathsf{S}_{\pi_1}|...|\mathsf{S}_{\pi_l}||\mathsf{S}_{\sigma_0}|$ *; où* $|\mathsf{S}_{\sigma_0}| = 2^k$ *tel que* $\mathsf{T}(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ *avec* $\tau_i \in \Pi_2(\mathsf{G}_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 5, on a

(8)

$$\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathsf{Ad}},\psi)}{|\mathsf{S}_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)} d\pi.$$

Soit $\pi \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π. On écrit la représentation π sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times p_j}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times q_k}\right), \tag{9}$$

où

- — $\tau_i \in \Pi_2(\mathsf{G}_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
- — $\mu_j \in \Pi_2(\mathsf{G}_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- — $\nu_k \in \Pi_2(\mathsf{G}_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$\mathsf{M} = \left(\prod_{i=1}^{t} \mathsf{G}_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} \mathsf{G}_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} \mathsf{G}_{f_k}^{q_k}\right)/\mathsf{Z}_{2n} \tag{10}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparait dans la définition de π. Alors $\pi = \mathsf{Ind}_{\mathsf{M}}^{\mathsf{PG}_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M. On note $\mathsf{X}^*(\mathsf{M})$ le groupe des caractères algébriques de M, alors $\mathsf{X}^*(\mathsf{M}) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v}(i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_{\mathsf{M}}$ qui est l'hyperplan définit par la condition que la somme des coordonnées est nulle. On équipe $(i\mathbb{R})_{\mathsf{M}}$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(i\mathbb{R})_{\mathsf{M}}/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in \mathsf{X}^*(\mathsf{M}) \otimes \mathbb{R} \mapsto |\chi|_{\mathsf{F}}^{\alpha} \in \widehat{\mathsf{A}_{\mathsf{M}}}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{log(q)}\right)^{\dim(A_M)}$ $d\chi$. Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante : $d\tilde{\chi}$???

— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), ..., x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), ..., \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), ..., y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), ..., z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$, où

$$\begin{aligned}\pi_\lambda = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t}\left(\bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}}\right) \times \left(\bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}}\right)\right)\\ &\times \left(\bigtimes_{j=1}^{u}\bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v}\bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\mathsf{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation τ. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathsf{Ad}}, \psi)}{|S_\pi|\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi \tag{12}$$

d'après la relation 5. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)|}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda)\frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathsf{Ad}}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda. \tag{13}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j} \prod_{k=1}^{v} f_k^{q_k}. \tag{14}$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) =\\ &\qquad \frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathsf{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda,\end{aligned} \tag{15}$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 0.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*

— $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \mathsf{Ad}) = \gamma(s, \pi_1, \mathsf{Ad})\gamma(s, \pi_2, \mathsf{Ad})\gamma(s, \pi_1 \times \widetilde{\pi_2})\gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
— $\gamma(s, \pi|\det|^x, \mathsf{Ad}) = \gamma(s, \pi, \mathsf{Ad})$,
— $\gamma(s, \pi, \mathsf{Ad})$ *a un zéro simple en* $s = 0$,
— $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2)\gamma(s, \pi_2, \Lambda^2)\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
— $\gamma(s, \pi|\det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,
— $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s = 0$ *et* $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ *si et seulement si* π *est dans l'image de l'application de transfert* T,

pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1, \pi_2 \in \mathsf{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(16)

$$\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)=\left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}\left(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}\left(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}\left(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}\left(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)\right)F(\lambda),$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V, il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

(17)

$$\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1}=\left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\1\leqslant l'\leqslant n_i}}\left(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)^{-1}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l<l'\leqslant p_j}\left(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}\left(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)^{-1}\right)G(2\lambda+s),$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$; ici $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s)=d_i(s,...,s)$, $y_j(\lambda_s)=e_j(s,...,s)$ et $z_k(\lambda_s)=f_k(s,...,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire. En reprenant les notations de Beuzart-Plessis, on écrit

(18)

$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}=\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}\left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}\left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}\right)\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}\left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}\right),$$

où $\varphi_s(\lambda)=\phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda+s)$ et les lettres P,Q,R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir Beuzart-Plessis, Section 3).

Proposition 0.3 (Beuzart-Plessis, Proposition 3.3.1)**.** *La limite*

$$\lim_{s\to0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}\left(\frac{x_i(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}\left(\frac{y_j(\lambda)}{e_j}\right)\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}\left(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}\right)d\lambda \tag{19}$$

est nulle si $m_i\neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(20)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right)\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right)\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right)d\lambda';$$

où

— $D=\prod_{i=1}^{t}d_i^{n_i}\prod_{j=1}^{u}e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v}f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,

— *c est le cardinal des* $1 \leqslant k \leqslant t$ *tel que* $q_k \equiv 1 \mod 2$,
— $N = \sum_{i=1}^{t} n_i + \sum_{j=1}^{u} \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^{v} \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
— *W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(\mathrm{PG}_{2n}, \tau)$ et W' est isomorphe à $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$ (defini après 24).*

De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :
— $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lfloor \frac{p_j}{2} \rfloor$,
— $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant v$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^{t} (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^{u} (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{v} (i\mathbb{R})^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor}. \tag{21}$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $\mathsf{T}(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))/\mathsf{Stab}$. D'après la caractérisation 6, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 6). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 0.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))/\mathsf{Stab}$ tel que $\pi = \mathsf{T}(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les p_j sont pairs. De plus, peut écrire

$$\sigma = \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times n_i} \times \bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \right) \times \sigma_0, \tag{22}$$

où σ_0 est une représentation de $\mathsf{SO}(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$\mathsf{T}(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{v} \nu_k. \tag{23}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Levi

$$\mathsf{L} = \prod_{i=1}^{t} \mathsf{G}_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} \mathsf{G}_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{v} \mathsf{G}_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times \mathsf{SO}(2m+1). \tag{24}$$

De plus, $\sigma = \mathsf{Ind}_{\mathsf{L}}^{\mathsf{SO}(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(\mathsf{L})$. Le groupe W' de la proposition 0.3 est isomorphe à $W(\mathsf{SO}(2n+1), \sigma)$, où $W(\mathsf{SO}(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(\mathsf{SO}(2n+1), \mathsf{L})$ fixant σ.

Comme précédemment, $X^*(\mathsf{L}) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned} \tag{25}$$

De plus, d'après 6, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in \mathsf{T}(\mathsf{SO}(2n+1)/\mathsf{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = \mathsf{T}(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 15), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,s,\mathrm{Ad},\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma \\
(26)\qquad &= \frac{1}{|W'|}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')}\int_{\mathcal{A}'}\phi(T(\sigma_{\lambda'}))\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|}d\lambda' \\
&= \frac{1}{|W'|}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|}d\lambda'.
\end{aligned}$$

De plus,

$$(27)\qquad |S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} d_i{}^{n_i}\prod_{j=1}^{u} e_j{}^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v} f_k{}^{\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}|S_{\sigma_0}| = 2^c\frac{P}{D},$$

d'après les notations de la proposition 0.3 et la relation 23. D'autre part, d'après la proposition 0.3 et l'équation 15, on a

(28)

$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}\gamma^*(0,1,\psi)\log(q_F)}{|W'|P}$$

$$\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to 0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$(29)\qquad \int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\lim_{s\to 0^+}s^N\frac{\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)}d\lambda'.$$

De plus, on remarque que $s\mapsto\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s=0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$(30)\qquad \frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{\log(q_F)^N}d\lambda';$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0,1,\psi)\gamma^*(s,\pi_{\lambda'},\overline{\mathrm{Ad}},\psi)=\gamma^*(s,\pi_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)$ et

$$(31)\qquad \frac{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\mathrm{Ad},\psi)}{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\Lambda^2,\psi)} = \gamma(s,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi).$$

Dans l'expression 30, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A})-N+1=\dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 30 est égal au membre de droite 26, d'après l'égalité 27. □