FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \backslash \mathrm{GL}_{2n}$

Soit F un corps local de caractéristique 0 et ψ un caractère non trivial de F. On note G_n le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$.

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in G_n$. Soit θ le caractère sur H_n défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

Soit π une représentation automorphe cuspidale de GL_{2n} et $\varphi \in \pi$. On introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\phi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh. \tag{1}$$

La factorisation de cette période globale comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour Φ une fonction de Schwartz globale et W_φ la fonction de Whittaker associée à φ, on introduit dans la suite des fonctions zêta globale $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathrm{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{2}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v), \tag{3}$$

où S est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1,W_v,\Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$, que l'on désignera par β dans la section 4, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 4.1.

On commence dans la section 1 par prouver une relation sur les facteurs γ du carré extérieur qui nous sera utile. Les sections 2 et 3 sont des préliminaires pour le théorème 4.1. On fini dans la section 4 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta)$ et une formule de Plancherel abstraite sur $L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$.

0.1. **Notations.** On note B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F. On note U_n le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique.

Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera G_{2n}, SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de G. On note Z_G le centre de G et A_G le tore déployé maximal dans Z_G.

Date: 30 avril 2019.

1. Facteurs γ du carré extérieur

Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s,W,\phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi), \tag{4}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1.1. **Préliminaires.**

1.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s,W,\phi)$ sont définies par

$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\phi(e_n g)|\det g|^s dg \tag{5}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n\\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n\end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika [3]). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s,W,\phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1-\eta$.*

Kewat montre, lorsque F est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt [1]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s,W,\phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0. Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p-adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s,W,\phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s,\pi,\Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [2]) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika [3]). *Supposons que F est p-adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F. Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^n$ et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$J(s,W_0,\phi_0) = L(s,\pi,\Lambda^2). \tag{6}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p-adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe [5]). *Supposons que F est un corps p-adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ en q^s, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{J(s,W,\phi)}{L(s,\pi,\Lambda^2)} = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}, \tag{7}$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_{\psi}(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi},\bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = \epsilon(s,\pi,\Lambda^2,\psi)\frac{L(1-s,\tilde{\pi},\Lambda^2)}{L(s,\pi,\Lambda^2)}. \tag{8}$$

1.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s,W,\phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_{\varphi}(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{9}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s,W_{\varphi},\Phi)$ l'intégrale

(10)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W_{\varphi}\left(\sigma\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(Tr(X))dX\Phi(e_n g)|\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika [3]). *Les intégrales $J(s,W_{\varphi},\Phi)$ convergent absolument pour $Re(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s,W_{\varphi},\Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s,W_{\varphi},\Phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\varphi},\hat{\Phi}), \tag{11}$$

où $\tilde{W}_{\varphi}(g) = W_{\varphi}(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de

K, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v). \tag{12}$$

1.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1 (Kable [4]). *Supposons que F est un corps p-adique. Il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p.*

On note $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$. Soit M un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$ et σ une représentation irréductible de carré intégrable de M, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis [?]). *Soient k un corps de nombres, v_0, v_1 deux places distinctes de k avec v_1 non archimédienne. Soit U un ouvert de $\mathrm{Temp}(GL_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π de $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_v est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

1.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation π. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— Si F est p-adique, f est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$,

— Si F est archimédien, f est C^∞ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $\|a\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

Lemme 1.2. *Soit $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$. Alors, pour tout $N \geqslant 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d, \tag{13}$$

pour tous $b \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$.

Lemme 1.3. *Il existe* N *tel que pour tous* s *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et* $d > 0$, *l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da \tag{14}$$

converge absolument.

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées W, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

Lemme 1.4. *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Démonstration. D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n\backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-1}(a) da. \tag{15}$$

On pose $u_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma, \tag{16}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(b u_X \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dX dk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da. \tag{17}$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de u_x et on pose $k_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d. \tag{18}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les t_j. On dispose de la

Proposition 1.7 (Jacquet-Shalika [3]). *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* k *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* k *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* j *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* j *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque j est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque j est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C 2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d \tag{19}$$

$$\leqslant C 2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{20}$$

où $m(X) = \sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [3, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n a k)| \leqslant C'(1 + |a_n|)^{-N}. \tag{21}$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX \tag{22}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da. \tag{23}$$

La première intégrale converge pour N assez grand et la deuxième pour N assez grand lorsque $\mathrm{Re}(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n} |a_1|^{3-2n} |a_2|^{5-2n} |a_2|^{7-2n} ... |a_n|^{2n-3} |a_n|^{2n-1}, \tag{24}$$

$$= |a_1|^{4-4n} |a_2|^{12-4n} ... |a_n|^{4n-4}, \tag{25}$$

$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{26}$$

□

1.2. **Facteurs γ.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(., \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit π une représentation tempérée irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{J(s, W, \phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation π, on dispose du

Lemme 1.5. *Soient $W_0 \in \mathcal{W}(\pi, \psi))$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Supposons que $J(s, W_0, \phi) \neq 0$. Alors il existe une application continue $\pi' \in \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi)$ et un voisinage $V \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ de π tels que $W_0 = W_\pi$ et l'application $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ soit continue.*

En particulier, si F est un corps $\mathfrak{p}$-adique, ce quotient est égal à $\gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ (proposition 1.4) ; donc $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s, \pi', \Lambda^2, \psi)$ est continue.

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash \mathrm{GL}_{2n}(F), \psi) \mapsto J(s, W, \phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\phi})}{J(s, W_{\pi'}, \phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ par rapport au caractère additif ψ, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à ψ. Les caractères additifs de F sont de la forme ψ_λ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

Lemme 1.6. *Soient* $\lambda \in F^*$*,* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$*,* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$*. Supposons que* $J(s, W, \phi) \neq 0$*. Alors*

$$\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s, W, \phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{\psi}(\phi))}{J(s, W, \phi)}. \tag{27}$$

Démonstration. En effet, la mesure de Haar auto-duale pour ψ_λ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour ψ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega(\lambda)J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{28}$$

On en déduit immédiatement le lemme. □

Les facteurs γ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif ψ (voir Henniart [2]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère ψ que l'on a fixé.

Proposition 1.8. *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Soit* π *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$*.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$*,* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on ait*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{29}$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{30}$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soient $\nu \neq \nu'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_\mathbb{A}$ de $\mathbb{A}_K/K$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_\infty \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq \nu$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, \nu\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour $w = \infty$ ou ν, on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{31}$$

On note $S = \{\infty, \nu\}$ l'ensemble des places où Π est non ramifiée et T l'ensemble des places où $\psi_\mathbb{A}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$\begin{aligned}&\prod_{w \in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w)L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_\mathbb{A})_w}(\phi_w))L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2),\end{aligned} \tag{32}$$

où $L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} L(s,\Pi_w,\Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [2]),

$$L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} \gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{33}$$

Les équations (32) et (33), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{v\}\cup T$, donne

$$\begin{aligned} &J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s,W_\infty,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty) \prod_{w\in\{v\}\cup T} \frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w \in T$. En effet, Π_w est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 1.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié ψ_0 de F tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x) = \psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 1.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)} = 1, \tag{35}$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [2]).

L'équation (34) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s,W_\infty,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{36}$$

On choisit maintenant pour U une base de voisinage contenant π, en utilisant le lemme 1.5 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s,W,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{37}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, R est une limite de fractions rationnelles en q_v^s (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place v', on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (37) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{38}$$

La fonction R est donc une fraction rationnelle en q_v^s périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si R est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{39}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{40}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi})}. \tag{41}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1. \tag{42}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 40, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}). \tag{43}$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1. \tag{44}$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. $\square$

Proposition 1.9. *Supposons que F est un corps p-adique. Soit π une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$.*

Le facteur $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{45}$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p. Soient v, v' deux places distinctes non archimédiennes et différentes de v_0. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ un ouvert contenant π. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π telle que $\Pi_{v_0} \in U$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

Pour $w = v_0, v$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note S_∞ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{v, v_0\}$ et T l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w\in S\cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{46}$$

où $L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs γ de Shahidi vérifient (voir Henniart [2])

$$L^{S\cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S\cup T}(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{47}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 1.8, on obtient donc la relation

$$\prod_{v_\infty\in S_\infty} c(\Pi_{v_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{v_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1. \tag{48}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 1.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}{\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{v_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. □

2. Limite spectrale

Dans cette partie F est un corps p-adique. On équipe F avec la mesure de Haar dx qui est autoduale par rapport à ψ. On équipe alors A_M par la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur $F^\times$.

Soit M un sous-groupe de Levi de G et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G, M)$ le groupe de Weyl associé au couple (G, M) et $W(G, \sigma)$ le sous-groupe de $W(G, M)$ fixant σ. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\tilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de A_M. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0, 1, \psi)^{-\dim(A_M)} d\tilde{\chi}, \tag{49}$$

où $\gamma^*(0, 1, \psi) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\gamma(s,1,\psi)}{s\log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère ψ. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G, M)|^{-1} (\mathrm{Ind}_M^G)_* d\sigma. \tag{50}$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 53.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit f_π par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{51}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 2.1 (Harish-Chandra [6]). *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{52}$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_\pi|} d\pi, \tag{53}$$

où $\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q_F)^{-n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}}\gamma(s, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)$, avec $n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)$ en $s = 0$. Pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de G et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W'_F \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \mathrm{Temp}(SO(2m+1))/\mathrm{Stab} \to \mathrm{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^k \tau_i \times \widetilde{\tau_i} \right) \times \bigtimes_{j=1}^l \mu_i \tag{54}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\mathrm{Temp}(SO(2m_j+1))/\mathrm{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 2.2. *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{Temp}(PG_{2n}))$, on a*

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}} = \\ &\int_{\mathrm{Temp}(SO_{2n+1})/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned} \tag{55}$$

Pour $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_l \times \sigma_0$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $|S_{\pi_1}|...|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$; où $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ tel que $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times ... \times \tau_k$ avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

Démonstration. D'après la relation 53, on a

$$\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_\pi|\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi. \tag{56}$$

Soit $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π. On écrit la représentation π sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^t \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^u \mu_j^{\times p_j} \right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^v \nu_k^{\times q_k} \right), \tag{57}$$

où

— $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
— $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0, \mu_j, \Lambda^2, \psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
— $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0, \nu_k, \Lambda^2, \psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$M = \left(\prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} G_{f_k}^{q_k} \right) / Z_{2n} \tag{58}$$

le sous-groupe de Levi de PG_{2n} qui apparait dans la définition de π. Alors $\pi = \mathrm{Ind}_M^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation τ de M.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, alors $X^*(M)\otimes\mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v}(i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :
— $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), ..., x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), ..., \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
— $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), ..., y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), ..., z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, où

$$\begin{aligned} \pi_\lambda = & \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \left(\bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}} \right) \right) \\ & \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right). \end{aligned} \tag{59}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(PG_{2n}, \tau)$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(PG_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(PG_{2n}, M)$ fixant la représentation τ. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{Ad}, \psi)}{|S_\pi|\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi \tag{60}$$

d'après la relation 53. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(PG_{2n}, \tau)|} \left(\frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{Ad}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda. \tag{61}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j} \prod_{k=1}^{v} f_k^{q_k}. \tag{62}$$

On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \\ \frac{1}{|W(PG_{2n},\tau)|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} d\lambda,\end{aligned} \tag{63}$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 2.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*
- $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,Ad) = \gamma(s,\pi_1,Ad)\gamma(s,\pi_2,Ad)\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,
- $\gamma(s,\pi|\det|^x,Ad) = \gamma(s,\pi,Ad)$,
- $\gamma(s,\pi,Ad)$ *a un zéro simple en* $s=0$,
- $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,
- $\gamma(s,\pi|\det|^x,\Lambda^2) = \gamma(s+2x,\pi,\Lambda^2)$,
- $\gamma(s,\pi,\Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s=0$ *et* $\gamma(0,\pi,\Lambda^2)=0$ *si et seulement si* π *est dans l'image de l'application de transfert* T,

pour tous $x\in\mathbb{C}$, $\pi\in\Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1,\pi_2\in\mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = \left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}\left(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i}\right)\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}\left(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)\right) \\ \left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}\left(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}\left(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)\right)F(\lambda),\end{aligned} \tag{64}$$

où F est une fonction C^∞ qui ne s'annule pas sur le voisinage V, il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De même, on a

$$\begin{aligned}\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\ 1\leqslant l'\leqslant n_i}}\left(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i}\right)^{-1}\right) \\ \left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l<l'\leqslant p_j}\left(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j}\right)^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}\left(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k}\right)^{-1}\right)G(2\lambda+s),\end{aligned} \tag{65}$$

où la fonction G est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$; ici $\mathcal{H} = \{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s) = d_i(s,\dots,s)$, $y_j(\lambda_s) = e_j(s,\dots,s)$ et $z_k(\lambda_s) = f_k(s,\dots,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire. En reprenant les notations de

[?], on écrit

(66)
$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} = \varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda) = \phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda+s)$ et les lettres P, Q, R désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs γ (voir [?, section 3]).

Proposition 2.3 (Beuzart-Plessis [?]). *La limite*

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda \tag{67}$$

est nulle si $m_i \neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à

(68)
$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to 0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t} P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u} Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v} R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

où

— $D = \prod_{i=1}^t d_i^{n_i}\prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v} f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,
— *c est le cardinal des $1 \leqslant k \leqslant t$ tel que $q_k \equiv 1 \mod 2$,*
— $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^v \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$,
— *W et W' sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, W est isomorphe à $W(PG_{2n},\tau)$ et W' est isomorphe à $W(SO(2n+1),\sigma)$ (defini après 72).*

De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :
— $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lfloor\frac{p_j}{2}\rfloor$,
— $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant v$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil\frac{q_k}{2}\rceil$.

On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{n_i}\prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v}(i\mathbb{R})^{\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}. \tag{69}$$

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$. D'après la caractérisation 54, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 54). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 2.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les p_j sont pairs. De plus, on peut écrire

$$\sigma = \left(\bigtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\times n_i}\times\bigtimes_{j=1}^{u}\mu_j^{\times\frac{p_j}{2}}\times\bigtimes_{k=1}^{v}\nu_k^{\times\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}\right)\times\sigma_0, \tag{70}$$

où σ_0 est une représentation de $SO(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{\nu} \nu_k. \tag{71}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Levi

$$L = \prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times SO(2m+1). \tag{72}$$

De plus, $\sigma = Ind_L^{SO(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe W' de la proposition 2.3 est isomorphe à $W(SO(2n+1), \sigma)$, où $W(SO(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(SO(2n+1), L)$ fixant σ.

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in Temp(SO(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda'} = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ &\times \left(\bigtimes_{k=1}^{\nu} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0.\end{aligned} \tag{73}$$

De plus, d'après 54, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(SO(2n+1)/Stab)$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction φ (équation 63), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \phi(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, s, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma \\ &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \phi(T(\sigma_{\lambda'})) \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda' \\ &= \frac{1}{|W'|} \left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A}')} \int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|} d\lambda'.\end{aligned} \tag{74}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} {d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} f_k^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} |S_{\sigma_0}| = 2^c \frac{P}{D}, \tag{75}$$

d'après les notations de la proposition 2.3 et la relation 71. D'autre part, d'après la proposition 2.3 et l'équation 63, on a

(76)

$$\lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{Temp(PG_{2n})} \phi(\pi) \gamma(s, \pi, \lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1} 2^{-c} \gamma^*(0, 1, \psi) \log(q_F)}{|W'|P}$$

$$\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}'} \lim_{s \to 0^+} \varphi_s(\lambda') s^N \prod_{i=1}^{t} P_{m_i, n_i, s}\left(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\right) \prod_{j=1}^{u} Q_{p_j, s}\left(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\right) \prod_{i=1}^{\nu} R_{q_k, s}\left(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\right) d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'} \varphi(\lambda') \lim_{s \to 0^+} s^N \frac{\gamma^*(0, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi)}{\gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)} d\lambda'. \tag{77}$$

De plus, on remarque que $s \mapsto \gamma(s, \pi_{\lambda'}, \Lambda^2, \psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre N en $s = 0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi)}{\log(q_F)^N}d\lambda'; \tag{78}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0, 1, \psi)\gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, \overline{Ad}, \psi) = \gamma^*(s, \pi_{\lambda'}, Ad, \psi)$ et

$$\frac{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), Ad, \psi)}{\gamma(s, T(\sigma_{\lambda'}), \Lambda^2, \psi)} = \gamma(s, \sigma_{\lambda'}, Ad, \psi). \tag{79}$$

Dans l'expression 78, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$; on en déduit que 78 est égal au membre de droite 74, d'après l'égalité 75. □

3. Une formule d'inversion de Fourier

On note H_n l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où X est dans M_n et g dans G_n. On pose $H_n^P = H_n \cap P_{2n}$. On note θ le caractère sur H_n défini par $\psi(Tr(X))$.

Proposition 3.1. *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$, *alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(\xi_p, \xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{80}$$

où W_f *est la fonction de* $G_{2n}\times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du \tag{81}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Démonstration. On montre la proposition par récurrence sur n. Pour $n = 1$, H_1^P est trivial, σ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)dz = \int_{F^*}\int_{N_2} f\left(u\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}\right)\psi(u)^{-1}dudz. \tag{82}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n-1$.

L'ensemble Ω_n des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & Y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où Y est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille n et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n}\backslash H_n$. On injecte Ω_{n-1} dans Ω_n, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de Y et voyant h comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix}1_{n-1} & 0\\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1}\widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_{n-1}$, où Ω_n^P est l'ensemble des matrices de Ω_n avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{\Omega}_n$ avec $\widetilde{h} \in P_n$. De plus, Ω_n^P s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{83}$$

où les mesures $d\xi'$, $d\widetilde{\xi}$, $d\xi_p'$ et $d\widetilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur Ω_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_n$, Ω_{n-1}^P et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices Y et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère θ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p)R(\widetilde{\xi})f$, on a alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p'. \end{aligned} \tag{84}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'({\xi'}_p^{-1} \nu u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu du, \tag{85}$$

où V est le sous-groupe des matrices de N_{2n} avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2}V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p \nu {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p'|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\nu {\xi'}_p^{-1} u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu du. \tag{86}$$

On note $\widetilde{f'}(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left(\nu \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(\nu)^{-1} d\nu$ pour $g \in G_{2n-2}$; alors $\widetilde{f'} \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = |\det \xi_p' \xi'| W_{\widetilde{f'}}(\xi_p', \xi'). \tag{87}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f'}}(\xi_p', \xi') d\xi' d\xi_p' = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f'}(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ &\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} \nu s \widetilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu ds. \end{aligned} \tag{88}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$.

On obtient alors

(89)

$$\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left(\sigma \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} \nu s \widetilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de ν par σ^{-1} s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où n_1, n_2 sont dans U_n, les coefficients de y sont nuls sauf la dernière colonne et t est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(\mathrm{Tr}(y) + \mathrm{Ts}(t))$, où $\mathrm{Ts}(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p}\widetilde{Z}\widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p}n_1\widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p}n_2\widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p}y\widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(90)
$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s\widetilde{\xi}\right)$$
$$\theta(s)^{-1}\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}|^3 d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

On explicite maintenant l'intégrale sur s ce qui donne que $\sigma^{-1}s\sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec X une matrice de taille n dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de G_n. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{gathered} \int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det \widetilde{p}^{-1}g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\ f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1}g & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\ \psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{gathered} \tag{91}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{gathered} \int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2} \int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\ f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\ \psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| d\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} dg dX d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{gathered} \tag{92}$$

Lemme 3.1. *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det \widetilde{p}| dt d\widetilde{p} = F(0). \tag{93}$$

On rappelle que l'on identifie $F^{n-2} \times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1} \end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

Démonstration. La mesure $|\det \widetilde{p}| d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur F^{n-1}. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans F^{n-1} correspondant à $\widetilde{p}$ et t, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. $\square$

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

(94)

$$\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z},$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t=0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y}\in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}\in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de G_n dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \tag{95}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(96)

$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},$$

puisque $n_1y=y$. On effectue le changement de variable $\widetilde{Y}\mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur X, y et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur M_n dont on note encore la variable X. On obtient alors

(97)

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2\mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}. \tag{98}$$

Le changement de variables $X\mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(99)

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et n_2 ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1 g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1 dXdgd\widetilde{h}. \tag{100}$$

Après combinaison des intégrations sur n_1, g, $\widetilde{h}$; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{101}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur V avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, H_{n-1}, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et H^p_{n-1} qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents H d'une part, d'échanger des intégrales sur les n_1, n_2, t, y qui compose l'intégrale sur V d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en X sur M_n (cf. intégrale 97) et lorsque l'on échange l'intégrale sur U_n et M_n (cf. intégrale 100). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 97, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(102)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(103)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}dadXda'dX'$$

pour N suffisamment grand. On introduit les variables u_X et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 1.4). On a alors

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{104}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 103 est alors majorée à une constante près par

(105)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N|\det aa'|m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')dadXda'dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j}dX, \tag{106}$$

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X')^{-\alpha' N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'})\log(\|t_{X'}\|)^{d-j'}dX', \tag{107}$$

$$\int_{A_n}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}(1+|a_n|)^{-N}\log(\|b\|)^j|\det a|da, \tag{108}$$

et

$$\int_{A_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}(1+|a'_{n-1}|)^{-N}\log(\|b'\|)^{j'}|\det a'|da', \tag{109}$$

pour j, j' compris entre 0 et d. Ces dernières intégrales convergent pour N assez grand, voir [3, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 pour les deux dernières.

□

4. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1}d\xi_p. \tag{110}$$

Lemme 4.1. *L'intégrale 110 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue.*

Pour $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$*. De plus, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est non nulle.*

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}}\left|W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\right|\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1}dadX, \tag{111}$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$\begin{aligned}(112)\qquad \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})(1+|a_n|)m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \\ \log(\|bt_X\|)^d\delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1}da dX,\end{aligned}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ)-invariant lors de la preuve du lemme 4.3.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi, \psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n}, \psi)$ (Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. □

Proposition 4.1. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, on pose* $\pi = T(\sigma)$ *le transfert de* σ *dans* $\mathrm{Temp}(G_{2n})$*. La forme linéaire* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$*. On identifie* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $W \mapsto \widetilde{W}$*. Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$(113)\qquad \beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W),$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$*.*

Démonstration. En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après Jacquet-Rallis (ref). De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. □

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1}du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [beuzart-plessis], que l'on note

$$(114)\qquad f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^* f(u)\psi(u)^{-1}du.$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir W_f par la formule

$$(115)\qquad W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^* f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du,$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Lemme 4.2. *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on a*

$$(116)\qquad \lim_{s\to 0^+}\gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi.$$

Démonstration. On a

(117)

$$\begin{aligned}\gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \\ \psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\gamma(ns, 1, \psi)\int_{Z_n}\phi(e_nzk)|\det z|^s dzdk|\det a|^s\delta_{B_n}(a)^{-1}da\end{aligned}$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s ds = \int_{F^*} \widehat{\phi_k}(x) |x|^{1-ns} dx, \tag{118}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s \to 0+} \gamma(ns, 1, \psi) \int_{Z_n} \phi(e_n zk) |\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x) dx = \phi(0). \tag{119}$$

On en déduit que $\lim_{s \to 0^+} \gamma(ns, 1, \psi) J(s, W, \phi)$ est égal a

$$\begin{aligned} \phi(0) \int_{Z_n \backslash A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n) \backslash M_n} & W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \\ & \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX dk \delta_{B_n}(a)^{-1} da, \end{aligned} \tag{120}$$

ce qui nous permet de conclure. □

Corollaire 4.1 (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g \in G_{2n}$*, alors*

$$\begin{aligned} \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = & \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} \beta(W_{f, T(\sigma)}(g, .)) \\ & \frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \tag{121}$$

Démonstration. On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg) dz$, alors $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi. \tag{122}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\widetilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, d'après le lemme 4.2, on a

(123)

$$\begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) J(s, W_{\widetilde{f}}(1, .), \phi) \\ &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} J(s, W_{f,\pi}(1, .), \phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

(124)

$$\begin{aligned} & \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ & \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s, 1, \psi) \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} J(1 - s, \widetilde{W_{f,\pi}(1, .)}, \widehat{\phi}) c(\pi) \gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned}$$

La proposition 2.2, nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} & \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1, \xi) \theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ & \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1)/\mathrm{Stab}} J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1, .)}, \widehat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned} \tag{125}$$

Le membre de gauche étant (H_n, θ)-invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

(126)
$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma$.

Soit $z \in \mathcal{Z}(G)$ un élément du centre de Bernstein de G. En remplaçant f par zf, on en déduit que

(127)
$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} z(T(\sigma))(J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi})) d\mu(\sigma) = 0,$$

pour tout $\xi \in H_n$.

D'après le lemme de séparation spectrale (ref), on en déduit que $J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}}(1,.), \widehat{\phi}))$ est (H_n, θ)-invariant.

Lemme 4.3. *Soit* $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0)c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{128}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \int_{N_n\backslash G_n} \int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg. \tag{129}$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1,.) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n\backslash G_n$ est (H_n, θ)-invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

$$\int_{N_n\backslash P_n} \int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dXdg \tag{130}$$

est (H_n, θ)-invariant. Autrement dit, β restreint à $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est (H_n, θ)-invariant, ce qui termine la preuve du lemme 4.1.

Remarque 4.1. *Cette preuve que* β *restreint à* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est* (H_n, θ)*-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que* $Hom_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$ *qui est de dimension au plus* 1. *En utilisant le fait que* $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ *donc* π *est* (H_n, θ)*-distinguée, on a* $Hom_{H_n}(\pi, \theta) \neq 0$. *Ce dernier est un sous-espace de* $Hom_{H_n \cap P_{2n}}(\pi, \theta)$. *On en déduirait alors que la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, *qui est bien* $H_n \cap P_{2n}$*-invariant, est un élément de* $Hom_{H_n}(\pi, \theta)$. *Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension* 1.

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

(131)
$$\int_{N_n\backslash G_n} \int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg$$
$$= \int_{P_n\backslash G_n} \int_{N_n\backslash P_n} \int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ph & 0 \\ 0 & ph \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dhdp.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp \\ = \beta\left(R\left(\sigma\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\widetilde{W}\right) \\ = \beta(\widetilde{W}),\end{aligned} \tag{132}$$

puisque β est (H_n, θ)-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{P_n\backslash G_n} \widehat{\phi}(e_n h)|\det h| dh = \int_{F^n} \widehat{\phi}(x)dx \\ = \phi(0).\end{aligned} \tag{133}$$

On conclut grâce à la proposition 4.1. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 4.3 dans la relation 125. □

4.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$\varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1} dh, \tag{134}$$

pour tout $y \in Y_n$.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh, \tag{135}$$

où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^P \cap N_{2n}\backslash H_n^P} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{136}$$

pour tout $\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2. Alors on a

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{137}$$

Démonstration. On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n}\int_{H_n\times H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1 dh_2 dy. \tag{138}$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(y, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)} \tag{139}$$

est à support compact, ou $\mathcal{Y}_n$ est un système de représentant de Y_n. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon y et h_2 en une intégrale sur G_{2n}. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}}\int_{H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1} dh_1 dy, \tag{140}$$

qui est bien la relation 135.

D'après 3.1 et 4.1, on a

$$\begin{aligned}\int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh = \int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n^p}\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right) \\ \theta(\xi_p)\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma d\xi_p.\end{aligned} \tag{141}$$

Lemme 4.4. *La fonction* $(\xi_p,\sigma)\mapsto\beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right)$ *est à support compact, l'intégrale 141 est donc absolument convergente.*

Démonstration. La fonction $\xi_p\mapsto\beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p,.)\right)$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de f_π, $W_{f,\pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit K_f un sous-groupe ouvert compact tel que f est biinvariant par K_f. Alors $\pi(f)\neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K_f-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau\in\Pi_2(M)$ modulo $X^*(M)\otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi\in Temp(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M, on en déduit le lemme. □

On échange les intégrales pour obtenir

$$\int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma. \tag{142}$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2. Commençons par le

Lemme 4.5. *Soit* $\pi\in Temp(G_{2n})$. *On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *:*

$$(W,W')^{Wh}=\int_{N_{2n}\backslash P_{2n}}W(p)\overline{W'(p)}dp, \tag{143}$$

pour tous $W,W'\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$.

L'opérateur $\pi(f^\vee):\mathcal{W}(\pi,\psi)\to\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi,\psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi}=\sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}\overline{\pi(f_2)W'}\otimes\pi(f_1)W'. \tag{144}$$

Démonstration. Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est P_{2n}-invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi G_{2n}-invariant.

Pour $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee)W &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}(\pi(f^\vee)W,W')^{Wh}W' \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}(W,\pi(\overline{f^\vee})W')^{Wh}W'.\end{aligned} \tag{145}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee) &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}W'\otimes\pi(f^\vee)\overline{W'} \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f}\pi(f_1)W'\otimes\overline{\pi(f_2)W'},\end{aligned} \tag{146}$$

d'après l'invariance par G_{2n} du produit scalaire.

On en déduit que

$$(147)\quad \begin{aligned} W_{f,\pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int^*_{N_{2n}} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1), \end{aligned}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [?, Prop 2.14.2] (qui est une conséquence de [?, Lemme 4.4]). □

Le lemme 4.5 donne la relation

$$(148)\quad (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')}\beta(T(\sigma)(f_1)W'),$$

qui est bien indépendant du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β a $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est H_n-invariante.

Pour finir, [?, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$(149)\quad \gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)c(T(\sigma))c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|.$$

□

4.2. Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.

Lemme 4.6. *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$(150)\quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta).$$

Démonstration. □

Théorème 4.2. *On a la décomposition de Plancherel abstraite suivante*

$$(151)\quad L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) = \int^{\otimes}_{Temp(SO(2n+1))/Stab} T(\sigma) \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.6 et de la décomposition de Planchrel déduite du théorème 4.1. □

Références

[1] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square l-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[2] G. Henniart, *Correspondance de langlands et fonctions l des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[3] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square l-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[4] A. C. Kable, *Asai l-functions and jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[5] N. Matringe, *Linear and shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[6] J.-L. Waldspurger, *La formule de plancherel pour les groupes p-adiques. d'apres harish-chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), p. 235–333.