FORMULE DE PLANCHEREL

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{1}$$

Lemme 0.1. *L'intégrale 1 est absolument convergente. La forme linéaire* $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ *est continue.*

Pour $\pi = T(\sigma)$ *avec* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$*. De plus, la restriction de* β *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est non nulle.*

Démonstration. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix} \sigma^{-1}\right)\right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{2}$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s,W,\phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1 + \frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})(1+|a_n|)m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \\ \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX,\end{aligned} \tag{3}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour N suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s,W,\phi)$.

Passons a la deuxième partie, comme $\pi = T(\sigma)$, on sait que $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ donc π est (H_n,θ)-distinguée. Autrement dit, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi,\theta) \neq 0$. Ce dernier est un sous-espace de $\mathrm{Hom}_{H_n \cap P_{2n}}(\pi,\theta)$ qui est de dimension au plus 1 (Matringe, Prop 4.3). On en déduit que la restriction de β a $\mathcal{W}(\pi,\psi)$, qui est bien $H_n \cap P_{2n}$-invariant, est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\pi,\theta)$.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi,\psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n},\psi)$ (Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors β est non nulle sur cette fonction. $\square$

Proposition 0.1. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$*, on pose* $\pi = T(\sigma)$ *le transfert de* σ *dans* $\mathrm{Temp}(G_{2n})$*. La forme linéaire* $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ *est un élément de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1}),\theta)$*. On identifie* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $W \mapsto \widetilde{W}$*. Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{4}$$

pour tout $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$*.*

Démonstration. En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$ est de dimension au plus 1, d'apres la preuve du lemme 0.1. De plus, π est le transfert de σ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. $\square$

Lemme 0.2. *Soit* $\sigma \in \mathsf{Temp}(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{5}$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) &= \int_{N_n\backslash G_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \\ &\qquad \psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg \\ &= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \\ &\qquad \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh. \end{aligned} \tag{6}$$

On remarque que l'on a

$$\begin{aligned} \int_{N_n\backslash P_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} & \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdp \\ &= \beta\left(R\left(\sigma\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\widetilde{W}\right) \\ &= \beta(\widetilde{W}), \end{aligned} \tag{7}$$

puisque β est H_n-invariant. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{P_n\backslash G_n}\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh &= \int_{F^n}\widehat{\phi}(x)dx \\ &= \phi(0). \end{aligned} \tag{8}$$

On conclut grâce à la proposition 0.1. □

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

Lemme 0.3. *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on a*

$$\lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) = \phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{9}$$

Démonstration. On a

(10)

$$\begin{aligned} \gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi) &= \int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \\ &\qquad \psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dzdk|\det a|^s\delta_{B_n}(a)^{-1}da \end{aligned}$$

De plus, d'apres la these de Tate, on a

$$\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s ds = \int_{F^*}\widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx, \tag{11}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominee

$$\lim_{s\to 0+}\gamma(ns,1,\psi)\int_{Z_n}\phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x)dx = \phi(0). \tag{12}$$

On en déduit que $\lim_{s\to 0^+}\gamma(ns,1,\psi)J(s,W,\phi)$ est egal a

$$\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da, \tag{13}$$

ce qui nous permet de conclure. □

Corollaire 0.1 (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g\in G_{2n}$*, alors*

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(g,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab}\beta(W_{f,T(\sigma)}(g,.)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma. \tag{14}$$

Démonstration. On peut supposer que $g=1$ en remplaçant f par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g)=\int_{Z_n}f(zg)dz$, alors $\widetilde{f}\in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{15}$$

On choisit $\phi\in\mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0)=1$. Comme $\widetilde{f}_\pi=f_\pi$ pour tout $\pi\in Temp(PG_{2n})$, d'après le lemme 0.3, on a

(16)
$$\begin{aligned}\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)J(s,W_{\widetilde{f}}(1,.),\phi)\\ &= \lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})}J(s,W_{f,\pi}(1,.),\phi)d\mu_{PG_{2n}}(\pi).\end{aligned}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

(17)
$$\begin{aligned}&\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi =\\ &\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{Temp(PG_{2n})}J(1-s,\widetilde{W_{f,\pi}(1,.)},\widehat{\phi})c(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi).\end{aligned}$$

D'après (ref limite spectrale), cette dernière limite est égale à

$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1,\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)},\widehat{\phi})c(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma. \tag{18}$$

On conclut grâce au lemme 0.2. □

1. Formule de Plancherel

On note $Y_n=H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f\in\mathcal{S}(G_{2n})\mapsto\varphi_f\in\mathcal{S}(Y_n,\theta)$ avec

$$\varphi_f(y)=\int_{H_n}f(hy)\theta(h)^{-1}dh, \tag{19}$$

pour tout $y\in Y_n$.

Théorème 1.1. *Soit* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n)$, *il existe* $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *tel que* $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ *pour* $i = 1, 2$. *On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh, \tag{20}$$

où $f = f_1 * f_2^*$, *on note* $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. *On pose*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right) \theta(\xi_p) d\xi_p, \tag{21}$$

pour tout $\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1)))$. *La quantité* $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ *est indépendante du choix de* f_1, f_2. *Alors on a*

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{22}$$

Démonstration. On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2) dh_1 dh_2 dy. \tag{23}$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(y, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)} \tag{24}$$

est a support compact, ou $\mathcal{Y}_n$ est un système de représentant de Y_n. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon y et h_2 en une intégrale sur G_{2n}. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1} dh_1 dy, \tag{25}$$

qui est bien la relation 20.

D'après [unfolding] et 0.1, on a

$$\begin{aligned}\int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1} dh = \int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n^p} \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \\ \theta(\xi_p)\frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma d\xi_p.\end{aligned} \tag{26}$$

Lemme 1.1. *La fonction* $(\xi_p, \sigma) \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ *est a support compact, l'intégrale 26 est donc absolument convergente.*

Démonstration. La fonction $\xi_p \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ est lisse donc a support compact. De plus, d'apres la definition de f_π, $W_{f,\pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit K_f un sous-groupe ouvert compact tel que f est biinvariant par K_f. Alors $\pi(f) \neq 0$, seulement lorsque π admet des vecteurs K_f-invariant non nuls.

D'apres Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de representations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs K_f-invariant non nuls.

Comme toute representation $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$ est une induite d'une telle representation τ pour un bon choix de sous-groupe de Levi M, on en deduit le lemme. □

On échange les intégrales pour obtenir

$$\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{27}$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de f_1, f_2. Commençons par le

Lemme 1.2. *Soit* $\pi \in \mathsf{Temp}(G_{2n})$*. On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *:*

$$(W,W')^{Wh} = \int_{N_{2n}\backslash P_{2n}} W(p)\overline{W'(p)}dp, \tag{28}$$

pour tous $W, W' \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$*.*

L'opérateur $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi,\psi) \to \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi,\psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi} = \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \overline{\pi(f_2)W'} \otimes \pi(f_1)W'. \tag{29}$$

Démonstration. Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est P_{2n}-invariant, d'apres Bernstein (ref), il est aussi G_{2n}-invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, la decomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee)W &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (\pi(f^\vee)W, W')^{Wh}W' \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} (W, \pi(\overline{f^\vee})W')^{Wh}W'.\end{aligned} \tag{30}$$

Cette egalite nous permet grace au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\begin{aligned}\pi(f^\vee) &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} W' \otimes \pi(f^\vee)\overline{W'} \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W' \otimes \overline{\pi(f_2)W'},\end{aligned} \tag{31}$$

d'apres l'invariance par G_{2n} du produit scalaire.

On en deduit que

$$\begin{aligned}W_{f,\pi}(g_1,g_2) &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \int^*_{N_{2n}} (\pi(ug_2)\pi(f_1)W', \pi(g_1)\pi(f_2)W')\psi(u)^{-1}du \\ &= \sum_{W'\in\mathcal{B}(\pi,\psi)_f} \pi(f_1)W'(g_2)\overline{\pi(f_2)W'}(g_1),\end{aligned} \tag{32}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La derniere egalite est provient de [beuzart-plessis, Prop 2.14.2] (qui est une consequence de [Lapid-Mao, Lemme 4.4]. □

Le lemme 1.2 donne la relation

$$(\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} = \sum_{W'\in\mathcal{B}(T(\sigma),\psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2)W')}\beta(T(\sigma)(f_1)W'), \tag{33}$$

qui est bien indépendant du choix de f_1, f_2 puisque la restriction de β a $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est H_n-invariante.

Pour finir, [beuzart-plessis, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1,\varphi_2) \mapsto (\varphi_1,\varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)}\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)c(T(\sigma))c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|. \tag{34}$$

□