# FORMULE DE PLANCHEREL SUR $\mathsf{GL}_n \times \mathsf{GL}_n \backslash \mathsf{GL}_{2n}$

Soit $F$ un corps de nombres et $\psi$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_F$. On note $H_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ avec $X \in M_n$ et $g \in \mathsf{GL}_n$. L'élément $\sigma$ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\theta$ le caractère sur $H_n$ défini par $\psi(\mathsf{Tr}(X))$.

Soit $\pi$ une représentation automorphe cuspidale de $\mathsf{GL}_{2n}$ et $\varphi \in \pi$. On introduit la période globale

$$\mathcal{P}_{H_n,\theta}(\phi) = \int_{[Z_n \backslash H_n]} \varphi(h)\theta(h)dh, \tag{1}$$

où $Z_n$ est le centre de $\mathsf{GL}_n$ et les crochets désignent le quotient des points adéliques modulo les points rationnels.

La factorisation de cette période globale comme produit de périodes locales va nous permettre d'obtenir une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash \mathsf{GL}_{2n}, \theta)$. Plus précisément, pour $\Phi$ une fonction de Schwartz globale et $W_\varphi$ la fonction de Whittaker associée à $\varphi$, on introduit dans la suite des fonctions zêta globale $J(s, W_\varphi, \Phi)$, qui sont reliées à la période globale par la relation

$$\mathsf{Res}_{s=1} J(s, W_\varphi, \Phi) = \mathcal{P}_{H_n,\theta}(\varphi)\widehat{\Phi}(0). \tag{2}$$

De plus, ces fonctions zêta globales se décomposent en un produit de fonctions zêta locales

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = L^S(s, \pi, \Lambda^2) \prod_{v \in S} J(s, W_v, \Phi_v), \tag{3}$$

où $S$ est un ensemble de places suffisamment grand. Le quotient $\frac{J(1, W_v, \Phi_v)}{\widehat{\Phi}_v(0)}$, que l'on désignera par $\beta$ dans la section 4, est la période locale qui nous servira à prouver le théorème 4.1.

On commence dans la section 1 par prouver une relation sur les facteurs $\gamma$ du carré extérieur. Les sections 2 et 3 sont des préliminaires pour le théorème 4.1. On fini dans la section 4 par prouver une formule de Plancherel explicite sur $L^2(H_n \backslash \mathsf{GL}_{2n}, \theta)$ et une formule de Plancherel abstraite sur $L^2(\mathsf{GL}_n \times \mathsf{GL}_n \backslash \mathsf{GL}_{2n})$.

**Théorème 0.1.** *Soit $F$ un corps $p$-adique. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(H_n(F) \backslash \mathsf{GL}_{2n}(F), \theta)$. On a l'égalité*

(4)

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(H_n(F) \backslash G_{2n}(F))} = \int_{\mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\mathsf{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{H_n(F) \backslash \mathsf{GL}_{2n}(F), T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, \mathsf{Ad}, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma,$$

*où $T : \mathsf{Temp}(SO(2n+1))/\mathsf{Stab} \to \mathsf{Temp}(G_{2n})$ est l'application de transfert, $(\varphi_1, \varphi_2)_{H_n(F) \backslash G_{2n}(F), T(\sigma)}$ est défini dans le théorème 4.1 à partir de la forme linéaire $\beta$.*

---

*Date*: 13 mai 2019.

**Théorème 0.2.** *Soit* $F$ *un corps* $p$*-adique. Une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(GL_n(F) \times GL_n(F)\backslash GL_{2n}(F))$ *est obtenue par la relation*

(5)
$$L^2(GL_n(F) \times GL_n(F)\backslash GL_{2n}(F)) = \int^{\oplus}_{Temp(SO(2n+1))/Stab} T(\sigma)\frac{|\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

0.1. **Notations.** Dans la suite on notera $F$ un corps $p$-adique (sauf dans la section 1 où $F$ peut désigner un corps archimédien) et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. On note $G_{2n}$ le groupe $GL_{2n}(F)$. On notera dans la suite $H_n = H_n(F)$ le groupe des $F$-points. On note $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $F$. On note $U_n$ le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in F^{n-1}$ et $P_n = G_{n-1}U_n$ le sous-groupe mirabolique.

Soit $G$ un groupe réductif connexe (dans la suite $G$ sera $GL_{2n}$, $SO_{2n+1}$ ou un quotient, sous-groupe de Levi de ces groupes). On note $Temp(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$. On note $Z_G$ le centre de $G(F)$ et $A_G$ le tore déployé maximal dans $Z_G$.

## 1. Facteurs $\gamma$ du carré extérieur

Dans cette partie $F$ un corps local de caractéristique 0 et $\psi$ un caractère non trivial de $F$. Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s,\pi,\Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s,W,\phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de $\pi$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque $F$ est non archimédien, ces intégrales $J(s,W,\phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs $\gamma$, que l'on note $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque $F$ est archimédien et que les facteurs $\gamma$ sont égaux à une constante de module 1 prés à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi), \tag{6}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

### 1.1. **Préliminaires.**

1.1.1. *Théorie locale.* Les intégrales $J(s,W,\phi)$ sont définies par

(7)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi(-Tr(X))dX\phi(e_n g)|\det g|^s dg$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. L'élément $\sigma$ est la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n\end{smallmatrix}\right)$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $Re(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

**Proposition 1.1** (Jacquet-Shalika [5])**.** *Il existe* $\eta > 0$ *tel que les intégrales* $J(s,W,\phi)$ *convergent absolument pour* $Re(s) > 1-\eta$.

Kewat montre, lorsque $F$ est p-adique, que ce sont des fractions rationnelles en $q^s$ où $q$ est le cardinal du corps résiduel de $F$. On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque $F$ est archimédien et d'un résultat de non annulation.

**Proposition 1.2** (Belt [1]). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en $s_0$. Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le point $s_0$ peut éventuellement être un pôle. Si $F$ est $p$-adique, on peut choisir $W$ et $\phi$ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation est non-ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart [3]) par ces intégrales.

**Proposition 1.3** (Jacquet-Shalika [5]). *Supposons que $F$ est $p$-adique, le conducteur de $\psi$ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de $F$. Soit $\pi$ une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note $\phi_0$ la fonction caractéristique de $\mathcal{O}^n$ et $W_0$ l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2). \tag{8}$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque $F$ est un corps $p$-adique. Plus précisément, on a la

**Proposition 1.4** (Matringe [7]). *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique et $\pi$ générique. Il existe un monôme $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $q^s$, tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}, \tag{9}$$

*où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de $\phi$ par rapport au caractère $\psi$ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \bar{\psi})$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec $w_n$ la matrice associée à la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & 2n \\ 2n & \cdots & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur $\gamma$ de Jacquet-Shalika par la relation*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}. \tag{10}$$

1.1.2. *Théorie globale.* La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra $\pi$ comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour ce faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit $K$ un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de $\mathbb{A}_K/K$. Soit $\Pi$ une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$W_\varphi(g) = \int_{N_{2n}(K)\backslash N_{2n}(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug)\psi_{\mathbb{A}}(u)du \tag{11}$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_{2n}(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{2n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz,

on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale
(12)
$$\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} W_\varphi\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbb{A}}(Tr(X))dX\Phi(e_n g)|\det g|^s dg$$

où l'on note $G_n$ le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, $B_n$ le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, $N_n$ le sous-groupe de $B_n$ des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et $M_n$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{A}_K$.

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

**Proposition 1.5** (Jacquet-Shalika [5])**.** *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $Re(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}), \tag{13}$$

*où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de $\Phi$ par rapport au caractère $\psi_{\mathbb{A}}$.*

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_\nu W_\nu$ et $\Phi = \prod_\nu \Phi_\nu$, où $\nu$ décrit les places de $K$, on a

$$J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_\nu J(s, W_\nu, \Phi_\nu). \tag{14}$$

1.1.3. *Globalisation.* Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont $F$ est une localisation. On dispose du

**Lemme 1.1** (Kable [6])**.** *Supposons que $F$ est un corps $p$-adique. Il existe un corps de nombres $k$ et une place $\nu_0$ telle que $k_{\nu_0} = F$, où $\nu_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$.*

On note $Temp(GL_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. On va définir une topologie sur $Temp(GL_{2n}(F))$. Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $GL_{2n}(F)$ et $\sigma$ une représentation irréductible de carré intégrable de $M$, on note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$, on dispose alors d'une application $\chi \otimes \lambda \in X^*(M) \otimes i\mathbb{R} \mapsto i_M^G(\sigma \otimes \chi_\lambda) \in Temp(GL_{2n}(F))$ où $\chi_\lambda(g) = |\chi(g)|^\lambda$. On définit alors une base de voisinage de $i_M^G(\sigma)$ dans $Temp(GL_{2n}(F))$ comme l'image d'une base de voisinage de 0 dans $X^*(M)\otimes i\mathbb{R}$.

Cette topologie sur $Temp(GL_{2n}(F))$ nous permet d'énoncer le résultat principal dont on aura besoin pour la méthode de globalisation.

**Proposition 1.6** (Beuzart-Plessis [2])**.** *Soient $k$ un corps de nombres, $\nu_0, \nu_1$ deux places distinctes de $k$ avec $\nu_1$ non archimédienne. Soit $U$ un ouvert de $Temp(GL_{2n}(k_{\nu_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ de $GL_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{\nu_0} \in U$ et $\Pi_\nu$ est non ramifiée pour toute place non archimédienne $\nu \notin \{\nu_0, \nu_1\}$.*

1.1.4. *Fonctions tempérées.* On aura besoin dans la suite de connaître la dépendance que $J(s, W, \phi)$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$. Pour ce faire, on introduit la notion de fonction tempérée et on étend la définition de $J(s, W, \phi)$ pour ces fonctions tempérées.

L'espace des fonctions tempérées $C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ est l'espace des fonctions $f : GL_{2n}(F) \to \mathbb{C}$ telles que $f(ng) = \psi(n)f(g)$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$ et $g \in GL_{2n}(F)$, on impose les conditions suivantes :

— Si $F$ est $p$-adique, $f$ est localement constante et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|f(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$ et $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$,

— Si $F$ est archimédien, $f$ est $C^\infty$ et il existe $d > 0$ et $C > 0$ tels que $|(R(u)f)(nak)| \leqslant C\delta_{B_{2n}}(a)^{\frac{1}{2}} \log(\|a\|)^d$ pour tous $n \in N_{2n}(F)$, $a \in A_{2n}(F)$, $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{2n}(F))$.

définir $\|a\|$ invariant sous la décomposition d'Iwasawa

On rappelle la majoration des fonctions tempérées sur la diagonale,

**Lemme 1.2.** *Soit* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$. *Alors, pour tout* $N \geqslant 1$, *il existe* $C > 0$ *tel que*

$$|W(bk)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{b_i}{b_{i+1}}|)^{-N} \delta_{B_{2n}}(b)^{\frac{1}{2}} \log(\|b\|)^d, \tag{15}$$

*pour tous* $b \in A_{2n}(F)$ *et* $k \in GL_{2n}(\mathcal{O})$.

**Lemme 1.3.** *Il existe* $N$ *tel que pour tous* $s$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *et* $d > 0$, *l'intégrale*

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|a\|)^d |\det a|^s da \tag{16}$$

*converge absolument.*

On étend la définition des intégrales $J(s, W, \phi)$ aux fonctions tempérées $W$, on montre maintenant la convergence de ces intégrales

**Lemme 1.4.** *Pour* $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F), \psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *l'intégrale* $J(s, W, \phi)$ *converge absolument pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

*Démonstration.* D'après la décomposition d'Iwasawa, on a $N_n\backslash G_n = A_n K_n$. Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk\, |\det a|^{\mathrm{Re}(s)}\, \delta^{-1}(a) da. \tag{17}$$

On pose $u_X = \sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = b u_{a^{-1}Xa} \sigma, \tag{18}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots)$. On effectue le changement de variable $X \mapsto aXa^{-1}$, l'intégrale devient alors

$$\int_{A_n} \int_{K_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} \left| W\left(b u_X \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right) \phi(e_n ak) \right| dXdk |\det a|^{\mathrm{Re}(s)} \delta^{-2}(a) da. \tag{19}$$

On écrit $u_X = n_X t_X k_X$ la décomposition d'Iwasawa de $u_x$ et on pose $k_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Le lemme 1.2 donne alors

$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{t_j b_j}{t_{j+1} b_{j+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d. \tag{20}$$

On aura besoin d'inégalités prouvées par Jacquet et Shalika concernant les $t_j$. On dispose de la

**Proposition 1.7** (Jacquet-Shalika [5]). *On a* $|t_k| \geqslant 1$ *lorsque* $k$ *est impair et* $|t_k| \leqslant 1$ *lorsque* $k$ *est pair. En particulier,* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \geqslant 1$ *lorsque* $j$ *est impair et* $|\frac{t_j}{t_{j+1}}| \leqslant 1$ *lorsque* $j$ *est pair.*

On combine alors cette proposition avec le fait que $\frac{b_j}{b_{j+1}} = 1$ lorsque $j$ est impair et $\frac{b_j}{b_{j+1}} = \frac{a_{\frac{j}{2}}}{a_{\frac{j}{2}+1}}$ lorsque $j$ est pair. Ce qui nous permet d'obtenir

(21)
$$|W(bt_X k_X k_\sigma)| \leqslant C 2^{-nN} \prod_{j=1, j \text{ impair}}^{2n-1} |\frac{t_j}{t_{j+1}}|^{-N} \prod_{i=1}^{2n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d$$

$$\leqslant C 2^{-nN} m(X)^{-\alpha N} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} \delta^{\frac{1}{2}}(bt_x) \log(\|bt_X\|)^d, \tag{22}$$

où $m(X) = sup(1, \|X\|)$, la dernière inégalité provient de [5, section 5.5]. D'autre part, il existe $C' > 0$ tel que

$$|\phi(e_n ak)| \leqslant C'(1 + |a_n|)^{-N}. \tag{23}$$

L'intégrale est alors majorée (à une constante prés) par le produit des intégrales

$$\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} m(X)^{-\alpha N} \delta^{\frac{1}{2}}(t_X) \log(\|t_X\|)^d dX \tag{24}$$

et

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + |\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N} (1 + |a_n|)^{-N} \log(\|b\|)^d |\det a|^{Re(s)} \delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) \delta_{B_n}^{-2}(a) da. \tag{25}$$

La première intégrale converge pour $N$ assez grand et la deuxième pour $N$ assez grand lorsque $Re(s) > 0$. On a utilisé la relation $\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b) = \delta_{B_n}^2(a)$. En effet,

$$\delta_{B_{2n}}(b) = |a_1|^{1-2n} |a_1|^{3-2n} |a_2|^{5-2n} |a_2|^{7-2n} ... |a_n|^{2n-3} |a_n|^{2n-1}, \tag{26}$$

$$= |a_1|^{4-4n} |a_2|^{12-4n} ... |a_n|^{4n-4}, \tag{27}$$

$$= \delta_{B_n}^4(a). \tag{28}$$

□

1.2. **Facteurs $\gamma$.** Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(.,\pi,\Lambda^2,\psi)$ à une constante (dépendant de $\pi$) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs $\gamma$ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur $\gamma^{JS}$ dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

Soit $\pi$ une représentation tempérée irréductible de $GL_{2n}(F)$. On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\hat{\phi})}{J(s,W,\phi)}$ lorsque l'on fait varier la représentation $\pi$, on dispose du

**Lemme 1.5.** *Soient* $W_0 \in \mathcal{W}(\pi,\psi))$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. *Supposons que* $J(s,W_0,\phi) \neq 0$. *Alors il existe une application continue* $\pi' \in \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F)) \mapsto W_{\pi'} \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi)$ *et un voisinage* $V \subset \mathrm{Temp}(GL_{2n}(F))$ *de* $\pi$ *tels que* $W_0 = W_\pi$ *et l'application* $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ *soit continue.*

*En particulier, si* $F$ *est un corps* $p$*-adique, ce quotient est égal à* $\gamma^{JS}(s,\pi',\Lambda^2,\psi)$ *(proposition 1.4) ; donc* $\pi' \in V \mapsto \gamma^{JS}(s,\pi',\Lambda^2,\psi)$ *est continue.*

*Démonstration.* On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La forme linéaire $W \in C^w(N_{2n}(F)\backslash GL_{2n}(F),\psi) \mapsto J(s,W,\phi)$ est continue, il existe donc un voisinage $V$ de $\pi$ tel que $J(s,W_{\pi'},\phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'},\hat{\phi})}{J(s,W_{\pi'},\phi)}$ est alors bien une fonction continue de $\pi'$ sur $V$. □

On étudie maintenant la dépendance du quotient $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ par rapport au caractère additif $\psi$, où l'on note $\mathcal{F}_\psi$ pour la transformée de Fourier par rapport à $\psi$. Les caractères additifs de $F$ sont de la forme $\psi_\lambda$ avec $\lambda \in F^*$ où $\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda x)$.

**Lemme 1.6.** *Soient* $\lambda \in F^*$, $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ *et* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. *Supposons que* $J(s,W,\phi) \neq 0$. *Alors*

$$\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi))}{J(s,W,\phi)} = |\lambda|^{n(s-\frac{1}{2})}\omega_\pi(\lambda)\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}. \tag{29}$$

*Démonstration.* En effet, la mesure de Haar auto-duale pour $\psi_\lambda$ est reliée à la mesure de Haar auto-duale pour $\psi$ par un facteur $|\lambda|^{\frac{n}{2}}$. On en déduit que $\mathcal{F}_{\psi_\lambda}(\phi)(x) = |\lambda|^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda x)$. Le changement de variable $g \mapsto \lambda^{-1}g$ dans l'intégrale définissant $J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.))$ donne

$$J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)(\lambda.)) = |\lambda|^{n(s-1)}\omega(\lambda)J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{30}$$

On en déduit immédiatement le lemme. □

Les facteurs $\gamma$ de Shahidi du carré extérieur vérifient la même dépendance par rapport au caractère additif $\psi$ (voir Henniart [3]). Dans la suite, on pourra donc choisir arbitrairement un caractère additif non trivial, les relations seront alors vérifiées pour tous les caractères additifs, en particulier pour le caractère $\psi$ que l'on a fixé.

**Proposition 1.8.** *Soit* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* $\pi$ *une représentation tempérée irréductible de* $GL_{2n}(F)$.

*Il existe une fonction méromorphe* $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ *telle que pour tous* $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, *on ait*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)J(s,W,\phi) = J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{31}$$

*De plus, il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi). \tag{32}$$

*Démonstration.* Soit $k$ un corps de nombres, on suppose que $k$ a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F=\mathbb{R}$ (respectivement $F=\mathbb{C}$) ; par exemple, $k=\mathbb{Q}$ si $F=\mathbb{R}$ et $k=\mathbb{Q}(i)$ si $F=\mathbb{C}$. Soient $\nu \neq \nu'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $U \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_K/K$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_\infty \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq \nu$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker $W_w$ et des fonctions de Schwartz $\phi_w$ dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty,\nu\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour $w=\infty$ ou $\nu$, on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s,W_w,\phi_w)\neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w. \tag{33}$$

On note $S=\{\infty,\nu\}$ l'ensemble des places où $\Pi$ est non ramifiée et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après la proposition 1.5, on a

$$\begin{aligned}&\prod_{w\in S\cup T} J(s,W_w,\phi_w)L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)\\ &= \prod_{w\in S\cup T} J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_w,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w))L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2),\end{aligned} \tag{34}$$

où $L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2)=\prod_{w\in S\cup T} L(s,\Pi_w,\Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient une relation similaire (voir Henniart [3]),

$$L^{S\cup T}(s,\Pi,\Lambda^2) = \prod_{w\in S\cup T}\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)L^{S\cup T}(1-s,\tilde{\Pi},\Lambda^2). \tag{35}$$

Les équations (34) et (35), en utilisant la proposition 1.4 pour les places $w \in \{\nu\}\cup T$, donne

$$\begin{aligned}&J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty,\mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) =\\ &J(s,W_\infty,\phi_\infty)\gamma^{Sh}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)\prod_{w\in\{\nu\}\cup T}\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}.\end{aligned} \tag{36}$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour $\Pi_\infty$, l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s,\Pi_\infty,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_\infty)$.

On s'occupe tout de suite du quotient $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}$ lorsque $w\in T$. En effet, $\Pi_w$ est non ramifiée, une combinaison de la proposition 1.3 et du lemme 1.6 va nous permettre de calculer ce quotient. Il existe $\lambda \in F^*$ et un caractère non ramifié $\psi_0$ de $F$ tel que $(\psi_{\mathbb{A}})_w(x)=\psi_0(\lambda x)$. La remarque suivant le lemme 1.6 nous dit que les facteurs $\gamma^{JS}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ et $\gamma^{Sh}(s,\pi,\Lambda^2,\psi)$ ont la même dépendance par rapport au caractère additif. On en déduit que

$$\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_w)} = \frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_w,\Lambda^2,\psi_0)} = 1, \tag{37}$$

d'après la proposition 1.3 (calcul non ramifié des intégrales de Jacquet-Shalika) et le calcul non ramifié des facteurs gamma de Shahidi (voir Henniart [3]).

L'équation (36) devient alors

$$\begin{aligned} &J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty)) = \\ &J(s, W_\infty, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_v)}. \end{aligned} \tag{38}$$

On choisit maintenant pour $U$ une base de voisinage contenant $\pi$, en utilisant le lemme 1.5 et la continuité des facteurs $\gamma$ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s,\rho(w_{n,n})\tilde{W},\mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s,W,\phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de $W$ et de $\phi$, que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$. La fonction $R(s)$ ne dépend pas du choix de la base de voisinage et des choix qui sont fait lors de l'utilisation de la proposition 1.6. En effet, on a

$$R(s) = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_\infty}(\phi_\infty))}{J(s, W, \phi_\infty)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\infty)}, \tag{39}$$

où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, qui est bien indépendant des choix que l'on a fait. De plus, $R$ est une limite de fractions rationnelles en $q_v^s$ (les quotients $\frac{\gamma^{Sh}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}{\gamma^{JS}(s,\Pi_v,\Lambda^2,(\psi_{\mathbb{A}})_v)}$) ; donc $R$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

En réutilisant le même raisonnement en la place $v'$, on voit que $R$ est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. L'équation (39) s'écrit

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = R(s)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{40}$$

La fonction $R$ est donc une fraction rationnelle en $q_v^s$ périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$. Ce qui est impossible sauf si $R$ est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{41}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)). \tag{42}$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi})}. \tag{43}$$

Puisque $\mathcal{F}_{\bar{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)\gamma^{JS}(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}) = 1. \tag{44}$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 42, on obtient

$$\overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\psi}). \tag{45}$$

Comme $\pi$ est tempérée, $\pi$ est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1. \tag{46}$$

D'autre part, le facteur $\gamma$ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{Sh}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1$ ; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. $\square$

**Proposition 1.9.** *Supposons que* $F$ *est un corps* $p$*-adique. Soit* $\pi$ *une représentation tempérée irréductible de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$*.*

*Le facteur* $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ *est défini par la proposition 1.4. Alors il existe une constante* $c(\pi)$ *de module 1 telle que pour tout* $s \in \mathbb{C}$*,*

$$\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi)\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi). \tag{47}$$

*Démonstration.* D'après le lemme 1.1, il existe un corps de nombres $k$ et une place $\nu_0$ telle que $k_{\nu_0} = F$, où $\nu_0$ est l'unique place de $k$ au dessus de $p$. Soient $\nu, \nu'$ deux places distinctes non archimédiennes et différentes de $\nu_0$. Soit $U \subset \mathrm{Temp}(\mathrm{GL}_{2n}(F))$ un ouvert contenant $\pi$. On choisit un caractère non trivial $\psi_{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}_k/k$.

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible $\Pi$ telle que $\Pi_{\nu_0} \in U$ et $\Pi_w$ soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq \nu$.

Pour $w = \nu_0, \nu$ ou une place archimédienne, on choisit d'après la proposition 1.2, des fonctions de Whittaker $W_w$ et des fonctions de Schwartz $\phi_w$ telles que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. Pour les places non ramifiées, on choisit les fonctions "non ramifiées" de la proposition 1.3. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

On note $S_\infty$ l'ensemble des places archimédienne, $S = S_\infty \cup \{\nu, \nu_0\}$ et $T$ l'ensemble des places où $\psi_{\mathbb{A}}$ est non ramifié. D'après l'équation fonctionnelle globale (proposition 1.5), on a

$$\begin{aligned} &\prod_{w \in S \cup T} J(s, W_w, \phi_w) L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= \prod_{w \in S \cup T} J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_w, \mathcal{F}_{(\psi_{\mathbb{A}})_w}(\phi_w)) L^{S \cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned} \tag{48}$$

où $L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. Les facteurs $\gamma$ de Shahidi vérifient (voir Henniart [3])

$$L^{S \cup T}(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \in S \cup T} \gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w) L^{S \cup T}(1 - s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2). \tag{49}$$

On rappelle que lors de la preuve de la proposition précédente, on a démontré que $\frac{\gamma^{Sh}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)}{\gamma^{JS}(s, \Pi_w, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_w)} = 1$ pour $w \in T$. En utilisant les propositions 1.4 et 1.8, on obtient donc la relation

$$\prod_{\nu_\infty \in S_\infty} c(\Pi_{\nu_\infty}) \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_\nu, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\nu)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_\nu, \Lambda^2, (\psi_{\mathbb{A}})_\nu)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_{\nu_0}, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_{\nu_0}, \Lambda^2, \psi)} = 1. \tag{50}$$

Le reste du raisonnement est maintenant identique à la fin de la preuve de la proposition 1.8. Par continuité, le quotient $\frac{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}{\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)}$ est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_\nu}$. Or c'est une fraction rationnelle en $q_{\nu_0}^s$, on obtient que c'est une constante. En évaluant $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en $s = \frac{1}{2}$, on montre que cette constante est de module 1. $\square$

## 2. Limite spectrale

Dans cette partie $F$ est un corps $p$-adique. On équipe $F$ avec la mesure de Haar $dx$ qui est autoduale par rapport à $\psi$. On équipe alors $A_M$ par la mesure $(d^\times x)^{\wedge \dim(A)}$ où $d^\times x = \frac{dx}{|x|_F}$ est la mesure de Haar sur $F^\times$.

Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $G$ et $\sigma \in \Pi_2(M)$. On note $W(G,M)$ le groupe de Weyl associé au couple $(G,M)$ et $W(G,\sigma)$ le sous-groupe de $W(G,M)$ fixant $\sigma$. Soit $\widehat{A_M}$ le dual unitaire de $A_M$et $d\widetilde{\chi}$ la mesure de Haar duale de celle de $A_M$. On équipe alors $\widehat{A_M}$ de la mesure $d\chi$ définie par

$$d\chi = \gamma^*(0,1,\psi)^{-\dim(A_M)} d\widetilde{\chi}, \tag{51}$$

où $\gamma^*(0,1,\psi) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\gamma(s,1,\psi)}{s\log(q_F)}$. La mesure $d\chi$ est indépendante du caractère $\psi$. Il existe une unique mesure $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures. On définit alors la mesure $d\pi$ sur $\mathrm{Temp}(G)$ localement autour de $\pi \simeq \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1} (\mathrm{Ind}_M^G)_* d\sigma. \tag{52}$$

La mesure $d\pi$ est choisie pour vérifier la relation 55.

On note $PG_{2n} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$, on définit $f_\pi$ par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{53}$$

pour tout $g \in PG_{2n}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

**Proposition 2.1** (Harish-Chandra [8]). *Il existe une unique mesure $\mu_{PG_{2n}}$ sur $\mathrm{Temp}(PG_{2n})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} f_\pi(g) d\mu_{PG_{2n}}(\pi), \tag{54}$$

*pour tous $f \in \mathcal{S}(PG_{2n})$ et $g \in PG_{2n}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :*

$$d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{|S_\pi|} d\pi, \tag{55}$$

*où $\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q_F)^{-n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}}\gamma(s,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)$, avec $n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)$ en $s=0$. Pour $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $\prod_{i=1}^k n_i$.*

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérés de $G$ et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où $\varphi_\pi$ est le paramètre de Langlands associé à $\pi$.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est un morphisme admissible $\phi : W_F' \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp_{2m}(\mathbb{C})$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ est définie par l'injection de $Sp_{2m}(\mathbb{C})$ dans $GL_{2m}(\mathbb{C})$. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \mathrm{Temp}(SO(2m+1))/\mathrm{Stab} \to \mathrm{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}) \iff \pi = \left( \bigtimes_{i=1}^k \tau_i \times \widetilde{\tau_i} \right) \times \bigtimes_{j=1}^l \mu_i \tag{56}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\mathrm{Temp}(SO(2m_j+1))/\mathrm{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

**Proposition 2.2.** *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{Temp}(PG_{2n}))$, *on a*

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}} =\\ \int_{\mathrm{Temp}(SO_{2n+1})/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.\end{aligned} \tag{57}$$

*Pour* $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$ *sous-représentation de* $\pi_1 \times \ldots \times \pi_l \times \sigma_0$, *avec* $\pi_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ *et* $\sigma_0 \in \Pi_2(SO(2m+1))$, *le facteur* $|S_\pi|$ *est le produit* $|S_{\pi_1}|\ldots|S_{\pi_l}||S_{\sigma_0}|$ *; où* $|S_{\sigma_0}| = 2^k$ *tel que* $T(\sigma_0) \simeq \tau_1 \times \ldots \times \tau_k$ *avec* $\tau_i \in \Pi_2(G_{m_i})$.

*Démonstration.* D'après la relation 55, on a

$$\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})} \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi. \tag{58}$$

Soit $\pi \in \mathrm{Temp}(PG_{2n})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que $\phi$ est à support dans un voisinage $U$ suffisamment petit de $\pi$. On écrit la représentation $\pi$ sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \tau_i^{\times m_i} \times \widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \mu_j^{\times p_j}\right) \times \left(\bigtimes_{k=1}^{v} \nu_k^{\times q_k}\right), \tag{59}$$

où

- — $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
- — $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- — $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ ( et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$ ) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$M = \left(\prod_{i=1}^{t} G_{d_i}^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^{u} G_{e_j}^{p_j} \times \prod_{k=1}^{v} G_{f_k}^{q_k}\right)/Z_{2n} \tag{60}$$

le sous-groupe de Levi de $PG_{2n}$ qui apparait dans la définition de $\pi$. Alors $\pi = \mathrm{Ind}_M^{PG_{2n}}(\tau)$ pour une certaine représentation $\tau$ de $M$.

On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de $M$, alors $X^*(M)\otimes\mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A} \subset \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{m_i+n_i} \times \prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{p_j} \times \prod_{k=1}^v (i\mathbb{R})^{q_k} = (i\mathbb{R})_M$ qui est l'hyperplan défini par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

On équipe $(i\mathbb{R})_M$ du produit des mesures de Lebesgue sur $i\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}$ de la mesure de Haar telle que la mesure quotient de $(i\mathbb{R})_M/\mathcal{A} \simeq i\mathbb{R}$ soit la mesure de Lebesgue. L'isomorphisme local $\chi \otimes \alpha \in X^*(M) \otimes \mathbb{R}/(\frac{2i\pi}{\log(q_F)})\mathbb{Z} \mapsto |\chi|_F^\alpha \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures, où l'on équipe $\widehat{A_M}$ de la mesure $\left(\frac{2\pi}{\log(q_F)}\right)^{\dim(A_M)} d\chi$.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :

- — $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda), \ldots, x_{i,m_i}(\lambda), \widetilde{x_{i,1}}(\lambda), \ldots, \widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i} \times (i\mathbb{R})^{n_i}$,
- — $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda), \ldots, y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,

— $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda), ..., z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,
pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A} \mapsto \pi_\lambda \in \mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$, où

$$\pi_\lambda = \left( \bigtimes_{i=1}^{t} \left( \bigtimes_{l=1}^{m_i} \tau_i \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{l=1}^{n_i} \widetilde{\tau_i} \otimes |\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}(\lambda)}}{d_i}} \right) \right) \times \left( \bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}} \right) \times \left( \bigtimes_{k=1}^{v} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}} \right). \tag{61}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)$, où $V$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}$ et $W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)$ est le sous-groupe de $W(\mathsf{PG}_{2n}, M)$ fixant la représentation $\tau$. Alors

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \int_U \phi(\pi) \frac{\gamma^*(0, \pi, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_\pi|\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)} d\pi \tag{62}$$

d'après la relation 55. Du choix des mesures $d\pi$ sur $\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})$ et $d\lambda$ sur $\mathcal{A}$, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)|} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_V \phi(\pi_\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda. \tag{63}$$

De plus, on a

$$|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{m_i+n_i} \prod_{j=1}^{u} e_j^{p_j} \prod_{k=1}^{v} f_k^{q_k}. \tag{64}$$

On notera ce produit $P$ dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\int_{\mathsf{Temp}(\mathsf{PG}_{2n})} \phi(\pi)\gamma(s, \pi, \Lambda^2, \psi)^{-1} d\mu_{\mathsf{PG}_{2n}}(\pi) = \frac{1}{|W(\mathsf{PG}_{2n}, \tau)|P} \left( \frac{\log(q)}{2\pi} \right)^{\dim(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \varphi(\lambda) \frac{\gamma^*(0, \pi_\lambda, \overline{\mathrm{Ad}}, \psi)}{\gamma(s, \pi_\lambda, \Lambda^2, \psi)} d\lambda, \tag{65}$$

où $\varphi(\lambda) = \phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda \in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs $\gamma$, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

**Propriété 2.1.** *Les facteurs $\gamma$ vérifient les propriétés suivantes :*
— $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \mathrm{Ad}) = \gamma(s, \pi_1, \mathrm{Ad})\gamma(s, \pi_2, \mathrm{Ad})\gamma(s, \pi_1 \times \widetilde{\pi_2})\gamma(s, \widetilde{\pi_1} \times \pi_2)$,
— $\gamma(s, \pi|\det|^x, \mathrm{Ad}) = \gamma(s, \pi, \mathrm{Ad})$,
— $\gamma(s, \pi, \mathrm{Ad})$ *a un zéro simple en* $s = 0$,
— $\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2, \Lambda^2) = \gamma(s, \pi_1, \Lambda^2)\gamma(s, \pi_2, \Lambda^2)\gamma(s, \pi_1 \times \pi_2)$,
— $\gamma(s, \pi|\det|^x, \Lambda^2) = \gamma(s + 2x, \pi, \Lambda^2)$,
— $\gamma(s, \pi, \Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s = 0$ *et* $\gamma(0, \pi, \Lambda^2) = 0$ *si et seulement si* $\pi$ *est dans l'image de l'application de transfert* $T$,
*pour tous* $x \in \mathbb{C}$, $\pi \in \Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1, \pi_2 \in \mathsf{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(66)

$$\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = \left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i})\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})\right)F(\lambda),$$

où $F$ est une fonction $C^\infty$ qui ne s'annule pas sur le voisinage $V$, il s'agit d'un produit de facteur $\gamma$ ne s'annulant pas. De même, on a

(67)

$$\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^{t}\prod_{\substack{1\leqslant l\leqslant m_i\\ 1\leqslant l'\leqslant n_i}}(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})^{-1}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^{u}\prod_{1\leqslant l< l'\leqslant p_j}(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{v}\prod_{1\leqslant l\leqslant l'\leqslant q_k}(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})^{-1}\right)G(2\lambda+s),$$

où la fonction $G$ est une fonction méromorphe sur $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ et n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$ ; ici $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)>0\}\cup\{0\}$ et s'injecte dans $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ par l'application $s\in\mathcal{H}\mapsto\lambda_s\in\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}$ dont les coordonnées sont $x_i(\lambda_s)=d_i(s,...,s)$, $y_j(\lambda_s)=e_j(s,...,s)$ et $z_k(\lambda_s)=f_k(s,...,s)$.

On énonce maintenant le résultat fondamental de [2], qui permet d'obtenir la proposition pour la représentation d'Asai. En reprenant les notations de [2], on écrit

(68)

$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)} = \varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}),$$

où $\varphi_s(\lambda)=\phi(\lambda)F(\lambda)G(2\lambda+s)$ et les lettres $P,Q,R$ désignent des polynômes qui apparaissent dans le quotient des facteurs $\gamma$ (voir [2, section 3]).

**Proposition 2.3** (Beuzart-Plessis [2])**.** *La limite*

$$\lim_{s\to0^+}\frac{ns}{|W|}\int_{\mathcal{A}}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda \tag{69}$$

*est nulle si $m_i\neq n_i$ pour un certain $i$ ou si l'un des $p_j$ est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à*

(70)

$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

*où*

— $D=\prod_{i=1}^{t}d_i^{n_i}\prod_{j=1}^{u}e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v}f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,

— *c est le cardinal des* $1 \leqslant k \leqslant t$ *tel que* $q_k \equiv 1 \mod 2$,
— $N = \sum_{i=1}^t n_i + \sum_{j=1}^u \frac{p_j}{2} + \sum_{k=1}^\nu \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$,
— *$W$ et $W'$ sont définis de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, $W$ est isomorphe à $W(\mathrm{PG}_{2n}, \tau)$ et $W'$ est isomorphe à $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$ (defini après 74).*

*De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$ défini par les relations :*
— $x_{i,l}(\lambda) + \widetilde{x_{i,l}}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant i \leqslant t$ *et* $1 \leqslant l \leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda) + y_{j,p_j+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant u$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lfloor \frac{p_j}{2} \rfloor$,
— $z_{k,l}(\lambda) + z_{k,q_k+1-l}(\lambda) = 0$ *pour tous* $1 \leqslant j \leqslant \nu$ *et* $1 \leqslant l \leqslant \lceil \frac{q_k}{2} \rceil$.

*On équipe $\mathcal{A}'$ de la mesure Lebesgue provenant de l'isomorphisme*

$$\mathcal{A}' \simeq \prod_{i=1}^t (i\mathbb{R})^{n_i} \prod_{j=1}^u (i\mathbb{R})^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^\nu (i\mathbb{R})^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor}. \tag{71}$$

Supposons tout d'abord que $\pi$ n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma \in \mathtt{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))/\mathtt{Stab}$. D'après la caractérisation 56, il existe $1 \leqslant i \leqslant r$ tel que $m_i \neq n_i$ ou $p_j$ est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 56). Alors en prenant $U$ suffisamment petit, on peut supposer que $U$ ne rencontre pas l'image de l'application de transfert $T$. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 2.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma \in \mathtt{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))/\mathtt{Stab}$ tel que $\pi = T(\sigma)$. Alors $m_i = n_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$ et les $p_j$ sont pairs. De plus, on peut écrire

$$\sigma = \left( \bigtimes_{i=1}^t \tau_i^{\times n_i} \times \bigtimes_{j=1}^u \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \times \bigtimes_{k=1}^\nu \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \right) \times \sigma_0, \tag{72}$$

où $\sigma_0$ est une représentation de $\mathrm{SO}(2m+1)$ pour un certain $m$ tel que

$$T(\sigma_0) = \bigtimes_{\substack{k=1 \\ q_k \equiv 1 \mod 2}}^{\nu} \nu_k. \tag{73}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Levi

$$L = \prod_{i=1}^t G_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^u G_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^\nu G_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times \mathrm{SO}(2m+1). \tag{74}$$

De plus, $\sigma = \mathtt{Ind}_L^{\mathrm{SO}(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(L)$. Le groupe $W'$ de la proposition 2.3 est isomorphe à $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$, où $W(\mathrm{SO}(2n+1), \sigma)$ est le sous-groupe de $W(\mathrm{SO}(2n+1), L)$ fixant $\sigma$.

Comme précédemment, $X^*(L) \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathtt{Temp}(\mathrm{SO}(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda'} = &\left( \bigtimes_{i=1}^t \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left( \bigtimes_{j=1}^u \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ &\times \left( \bigtimes_{k=1}^\nu \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0.\end{aligned} \tag{75}$$

De plus, d'après 56, pour $\lambda \in \mathcal{A}$, $\pi_\lambda \in T(\mathrm{SO}(2n+1)/\mathtt{Stab})$ si et seulement si $\lambda \in \mathcal{A}'$, dans ce cas $\pi_\lambda = T(\sigma_\lambda)$.

En utilisant cette caractérisation et la définition de la fonction $\varphi$ (équation 65), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} \phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,s,\mathrm{Ad},\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma \\ &= \frac{1}{|W'|}\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')}\int_{\mathcal{A}'}\phi(T(\sigma_{\lambda'}))\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|}d\lambda' \\ &= \frac{1}{|W'|}\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A}')}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{|S_{\sigma_{\lambda'}}|}d\lambda'.\end{aligned} \tag{76}$$

De plus,

$$|S_{\sigma_{\lambda'}}| = \prod_{i=1}^{t} d_i^{\,n_i}\prod_{j=1}^{u} e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^{v} f_k^{\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}|S_{\sigma_0}| = 2^c\frac{P}{D}, \tag{77}$$

d'après les notations de la proposition 2.3 et la relation 73. D'autre part, d'après la proposition 2.3 et l'équation 65, on a

(78)

$$\lim_{s\to 0^+} n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathrm{Temp}(PG_{2n})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{PG_{2n}}(\pi) = \frac{D(2\pi)^{N-1}2^{-c}\gamma^*(0,1,\psi)\log(q_F)}{|W'|P}$$

$$\left(\frac{\log(q_F)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to 0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}\Big(\frac{x_i(\lambda')}{d_i}\Big)\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}\Big(\frac{y_j(\lambda')}{e_j}\Big)\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}\Big(\frac{z_k(\lambda')}{f_k}\Big)d\lambda'.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\lim_{s\to 0^+}s^N\frac{\gamma^*(0,\pi_{\lambda'},\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)}d\lambda'. \tag{79}$$

De plus, on remarque que $s\mapsto\gamma(s,\pi_{\lambda'},\Lambda^2,\psi)^{-1}$ a un pôle d'ordre $N$ en $s=0$. Notre membre de gauche est donc égal à

$$\frac{D\,(2\pi)^{N-1}\,2^{-c}\log(q_F)}{|W'|P}\left(\frac{\log(q)}{2\pi}\right)^{\dim(\mathcal{A})}\int_{\mathcal{A}'}\varphi(\lambda')\frac{\gamma^*(0,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)}{\log(q_F)^N}d\lambda'; \tag{80}$$

On a utilisé les relations $\gamma^*(0,1,\psi)\gamma^*(s,\pi_{\lambda'},\overline{\mathrm{Ad}},\psi) = \gamma^*(s,\pi_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi)$ et

$$\frac{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\mathrm{Ad},\psi)}{\gamma(s,T(\sigma_{\lambda'}),\Lambda^2,\psi)} = \gamma(s,\sigma_{\lambda'},\mathrm{Ad},\psi). \tag{81}$$

Dans l'expression 80, le facteur $\frac{\log(q_F)}{2\pi}$ apparait avec un exposant $\dim(\mathcal{A}) - N + 1 = \dim(\mathcal{A}')$ ; on en déduit que 80 est égal au membre de droite 76, d'après l'égalité 77. $\square$

## 3. Une formule d'inversion de Fourier

On note $H_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $X$ est dans $M_n$ et $g$ dans $G_n$. On pose $H_n^P = H_n\cap P_{2n}$. On note $\theta$ le caractère sur $H_n$ défini par $\psi(\mathrm{Tr}(X))$.

**Proposition 3.1.** *Soit* $f\in\mathcal{S}(G_{2n})$*, alors on a*

$$\int_{H_n} f(s)\theta(s)^{-1}ds = \int_{H_n^P\cap N_{2n}\backslash H_n^P}\int_{H_n\cap N_{2n}\backslash H_n} W_f(\xi_p,\xi)\theta(\xi)^{-1}\theta(\xi_p)d\xi d\xi_p. \tag{82}$$

*où* $W_f$ *est la fonction de* $G_{2n} \times G_{2n}$ *définie par*

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}} f(g_1^{-1} u g_2) \psi(u)^{-1} du \tag{83}$$

*pour tous* $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, $H_1^P$ est trivial, $\sigma$ est trivial et $H_1 \simeq N_2 Z(G_2)$. Le membre de droite est alors

$$\int_{F^*} W_f\left(1, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) dz = \int_{F^*} \int_{N_2} f\left(u \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right) \psi(u)^{-1} du dz. \tag{84}$$

Ce qui est bien l'égalité voulue. Supposons maintenant que $n > 1$ et que la proposition soit vraie au rang $n - 1$.

L'ensemble $\Omega_n$ des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $Y$ est une matrice triangulaire inférieure stricte de taille $n$ et $h \in \overline{B}_n$ le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures inversible, s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n \cap N_{2n} \backslash H_n$. On injecte $\Omega_{n-1}$ dans $\Omega_n$, en rajoutant des 0 sur la dernière ligne et colonne de $Y$ et voyant $h$ comme un élément de $\overline{B}_n$. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble des matrices de la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{h} & 0 \\ 0 & \widetilde{h} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ \widetilde{y} & 0 \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_n \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{l} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{l}_n \in F^*$. On en déduit que $\Omega_n = \Omega_{n-1} \widetilde{\Omega}_n$.

De même, on dispose d'une décomposition, $\Omega_n^P = \Omega_{n-1}^P \widetilde{\Omega}_{n-1}$, où $\Omega_n^P$ est l'ensemble des matrices de $\Omega_n$ avec $h \in P_n$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{\Omega}_n$ avec $\widetilde{h} \in P_n$. De plus, $\Omega_n^P$ s'identifie à un ouvert dense du quotient $H_n^P \cap N_{2n} \backslash H_n^P$.

On utilise ces décompositions pour écrire le membre de droite de la proposition sous la forme

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\widetilde{\xi} d\xi_p' d\widetilde{\xi}_p, \tag{85}$$

où les mesures $d\xi'$, $d\widetilde{\xi}$, $d\xi_p'$ et $d\widetilde{\xi}_p$ sont respectivement des mesures de Haar à droite sur $\Omega_{n-1}$, $\widetilde{\Omega}_n$, $\Omega_{n-1}^P$ et $\widetilde{\Omega}_{n-1}$. On a choisi les représentants des matrices $Y$ et $\widetilde{Y}$ de sorte que le caractère $\theta$ soit trivial.

On fixe $\widetilde{\xi}_p \in \widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\Omega}_n$. On pose $f' = L(\widetilde{\xi}_p) R(\widetilde{\xi}) f$, on a alors

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_f(\xi_p' \widetilde{\xi}_p, \xi' \widetilde{\xi}) |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p' = \\ &\int_{\Omega_{n-1}^P} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi_p', \xi') |\det \xi_p' \xi'|^{-1} d\xi' d\xi_p'. \end{aligned} \tag{86}$$

De plus,

$$W_{f'}(\xi_p', \xi') = \int_{N_{2n-2}} \int_V f'({\xi'}_p^{-1} v u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(v)^{-1} dv du, \tag{87}$$

où $V$ est le sous-groupe des matrices de $N_{2n}$ avec seulement les deux dernières colonnes non triviales, on dispose donc d'une décomposition $N_{2n} = N_{2n-2} V$. On effectue le changement de variable $\nu \mapsto {\xi'}_p \nu {\xi'}_p^{-1}$, ce qui donne

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p|^2 \int_{N_{2n-2}} \int_V f'(\nu {\xi'}_p^{-1} u \xi') \psi(u)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu du. \tag{88}$$

On note $\widetilde{f'}(g) = |\det g|^{-1} \int_V f' \left( \nu \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right) \psi(\nu)^{-1} d\nu$ pour $g \in G_{2n-2}$ ; alors $\widetilde{f'} \in \mathcal{S}(G_{2n-2})$. On obtient ainsi l'égalité

$$W_{f'}(\xi'_p, \xi') = |\det \xi'_p \xi'| W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi'). \tag{89}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^p_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}} W_{f'}(\xi'_p, \xi') |\det \xi'_p \xi'|^{-1} d\xi' d\xi'_p = \\ &\int_{\Omega^p_{n-1}} \int_{\Omega_{n-1}} W_{\widetilde{f'}}(\xi'_p, \xi') d\xi' d\xi'_p = \int_{H_{n-1}} \widetilde{f'}(s) \theta(s)^{-1} ds = \\ &\int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f(\widetilde{\xi}_p^{-1} \nu s \widetilde{\xi}) \theta(s)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu ds. \end{aligned} \tag{90}$$

Il nous faut maintenant intégrer sur $\widetilde{\xi}_p$ et $\widetilde{\xi}$ pour revenir à notre membre de droite. Explicitons l'intégrale sur $\widetilde{\xi}_p$ en le décomposant sous la forme $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p} & 0 \\ 0 & \widetilde{p} \end{pmatrix} \sigma^{-1}$.
On obtient alors
(91)

$$\int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_V f \left( \sigma \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} \nu s \widetilde{\xi} \right) \theta(s)^{-1} \psi(\nu)^{-1} d\nu ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}.$$

La conjugaison de $\nu$ par $\sigma^{-1}$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix}$ où $n_1, n_2$ sont dans $U_n$, les coefficients de $y$ sont nuls sauf la dernière colonne et $t$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{n-1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le caractère $\psi(\nu)$ devient après conjugaison $\psi(Tr(y) + Ts(t))$, où $Ts(t) = t_{n-1,n}$. Les changements de variables $\widetilde{Z} \mapsto \widetilde{p} \widetilde{Z} \widetilde{p}^{-1}$, $n_1 \mapsto \widetilde{p} n_1 \widetilde{p}^{-1}$, $n_2 \mapsto \widetilde{p} n_2 \widetilde{p}^{-1}$, $t \mapsto \widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1}$ et $y \mapsto \widetilde{p} y \widetilde{p}^{-1}$ transforme l'intégrale précédente en

(92)

$$\begin{aligned} \int_{F^{n-2} \times F^*} \int_{F^{n-1}} \int_{\widetilde{\Omega}_n} \int_{H_{n-1}} |\det s|^{-1} \int_{\sigma^{-1} V \sigma} f \left( \sigma \begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{p}^{-1} \end{pmatrix} \sigma^{-1} s \widetilde{\xi} \right) \\ \theta(s)^{-1} \psi(-Tr(y)) \psi(-Ts(\widetilde{p} t \widetilde{p}^{-1})) |\det \widetilde{p}|^3 d \begin{pmatrix} n_1 & y \\ t & n_2 \end{pmatrix} ds d\widetilde{\xi} d\widetilde{Z} d\widetilde{p}. \end{aligned}$$

On explicite maintenant l'intégrale sur $s$ ce qui donne que $\sigma^{-1} s \sigma$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ avec $X$ une matrice de taille $n$ dont la dernière ligne et dernière colonne sont nulles et $g \in G_{n-1}$ vu comme élément de $G_n$. Le changement de variable $X \mapsto \widetilde{p}X\widetilde{p}^{-1}$ donne

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det \widetilde{p}^{-1}g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\
&f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{p}^{-1}g & 0\\ 0 & \widetilde{p}^{-1}g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.
\end{aligned} \tag{93}$$

On effectue maintenant le changement de variables $g \mapsto \widetilde{p}g$, notre intégrale devient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V\sigma} \\
&f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ t & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z}d\widetilde{p}.
\end{aligned} \tag{94}$$

**Lemme 3.1.** *Soit* $F \in \mathcal{S}(M_n)$, *alors*

$$\int_{F^{n-2}\times F^*}\int_{\mathrm{Lie}(U_n)} F(t)\psi(-\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1}))|\det\widetilde{p}|dtd\widetilde{p} = F(0). \tag{95}$$

*On rappelle que l'on identifie* $F^{n-2}\times F^*$ *à l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix}1_{n-2} & 0\\ \widetilde{l} & \widetilde{l}_{n-1}\end{pmatrix}$ *avec* $\widetilde{l} \in F^{n-2}$ *et* $\widetilde{l}_n \in F^*$.

*Démonstration.* La mesure $|\det\widetilde{p}|d\widetilde{p}$ correspond à la mesure additive sur $F^{n-1}$. En remarquant que $\mathrm{Ts}(\widetilde{p}t\widetilde{p}^{-1})$ n'est autre que le produit scalaire des vecteurs dans $F^{n-1}$ correspondant à $\widetilde{p}$ et $t$, le lemme n'est autre qu'une formule d'inversion de Fourier. □

Le lemme précédent nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\begin{aligned}
&\int_{F^{n-1}}\int_{\widetilde{\Omega}_n}\int_{M_{n-1}}\int_{G_{n-1}} |\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma} f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\widetilde{\xi}\right) \\
&\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dgdXd\widetilde{\xi}d\widetilde{Z},
\end{aligned} \tag{96}$$

où $\sigma^{-1}V_0\sigma$ est le sous-groupe de $\sigma^{-1}V\sigma$ où $t = 0$.

On explicite l'intégration sur $\widetilde{\xi}$ de la forme $\sigma\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}$ où $\widetilde{Y}$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0_{n-1} & 0\\ \widetilde{y} & 0\end{pmatrix}$ avec $\widetilde{y} \in F^{n-1}$ et $\widetilde{h} \in F^{n-1}\times F^*$ que l'on identifie avec un élément de $G_n$ dont seule la dernière ligne est non triviale. L'intégrale devient

$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_{n-1}}|\det g|^{-2}\int_{\sigma^{-1}V_0\sigma}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{h} & 0\\ 0 & \widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \tag{97}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(y))d\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Y}d\widetilde{Z}.$$

On remarque que l'on a

(98)
$$\begin{pmatrix}n_1 & y\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \widetilde{Y}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y+X+g\widetilde{Y}g^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix},$$

puisque $n_1y = y$. On effectue le changement de variable $\widetilde{Y} \mapsto g^{-1}\widetilde{Y}g$ et on combine les intégrales sur $X$, $y$ et $\widetilde{Y}$ en une intégration sur $M_n$ dont on note encore la variable $X$. On obtient alors

(99)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-2}\int_{U_n^2}$$
$$f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\widetilde{h} & 0\\ 0 & g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On effectue le changement de variable $n_2 \mapsto n_2n_1$ et on remarque que l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -\widetilde{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_2n_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n_1Xn_1^{-1}-\widetilde{Z}n_2\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1 & 0\\ 0 & n_1\end{pmatrix}. \tag{100}$$

Le changement de variables $X \mapsto n_1^{-1}(X+\widetilde{Z}n_2)n_1$ nous donne alors

(101)
$$\int_{F^{n-1}}\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n^2}f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))\psi(-\mathrm{Tr}(\widetilde{Z}n_2))d(n_1,n_2)dXdgd\widetilde{h}d\widetilde{Z}.$$

On reconnait une formule d'inversion de Fourier selon les variables $\widetilde{Z}$ et $n_2$ ce qui nous permet de simplifier notre intégrale en

$$\int_{F^{n-1}\times F^*}\int_{G_{n-1}}\int_{M_n}|\det g|^{-1}\int_{U_n}f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1g\widetilde{h} & 0\\ 0 & n_1g\widetilde{h}\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \tag{102}$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dn_1dXdgd\widetilde{h}.$$

Après combinaison des intégrations sur $n_1$, $g$, $\widetilde{h}$ ; on trouve bien notre membre de gauche

$$\int_{G_n}\int_{M_n}f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdg. \tag{103}$$

On remarquera que l'on a pris garde à ne pas échanger l'intégrale sur $V$ avec les intégrales sur $\widetilde{H}$, $H_{n-1}$, $\widetilde{\Omega}_{n-1}$ et $H_{n-1}^P$ qui chacune est absolument convergente mais l'intégrale totale ne l'est pas. On s'est contenté d'échanger des intégrales sur les différents $H$ d'une part, d'échanger des intégrales sur les $n_1, n_2, t, y$ qui compose l'intégrale sur $V$ d'autre part. On doit seulement vérifier qu'il n'y a pas de problème de convergence lorsque l'on combine l'intégration en $X$ sur $M_n$ (cf. intégrale 99) et lorsque l'on échange l'intégrale sur $U_n$ et $M_n$ (cf. intégrale 102). Pour ce qui est de la dernière intégrale, on intègre sur un sous-groupe fermé et $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ donc l'intégrale est absolument convergente. Pour ce qui est de l'intégrale 99, à part l'intégration sur $\widetilde{Z}$, on intègre sur un sous-groupe fermé donc on peut bien combiner les intégrales.

Finissons par montrer la convergence absolue de notre membre de droite. Notons $r(g) = 1 + \|e_n g\|_\infty$. On a

(104)
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) =$$
$$(1+|a_n|)^N|\det aa'|^{-1}W_f\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right),$$

pour tous $a \in A_n$, $a' \in A_{n-1}$, $k \in K_n$ et $k' \in K_{n-1}$.

Il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

(105)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^{-N}|\det aa'|$$
$$W_{r^N|\det|^{-\frac{1}{2}}f}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'k' & 0\\ 0 & a'k'\end{pmatrix}\sigma^{-1}, \sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\delta_{B_n}(a)^{-1}\delta_{B_{n-1}}(a')^{-1}da\,dX\,da'\,dX'$$

pour $N$ suffisamment grand. On introduit les variables $u_X$ et $u_{X'}$ ainsi que leur décomposition d'Iwasawa (voir la preuve du lemme 1.4). On a alors

$$\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1} = bu_{(ak)^{-1}X(ak)}, \tag{106}$$

où $b = diag(a_1, a_1, a_2, a_2, ...)$.

On effectue les changements de variables $X \mapsto (ak)X(ak)^{-1}$ et $X' \mapsto (a'k')X(a'k')^{-1}$, l'intégrale 105 est alors majorée à une constante près par

(107)
$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_{n-1}}\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n}\int_{A_n}(1+|a_n|)^N|\det aa'|m(X)^{-\alpha N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(bt_X)\log(\|bt_X\|)^d$$
$$m(X')^{-\alpha' N}\prod_{i=1}^{n-1}(1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(b't_{X'})\log(\|b't_{X'}\|)^d\delta_{B_n}^{-2}(a)\delta_{B_{n-1}}^{-2}(a')da\,dX\,da'\,dX'.$$

Cette dernière intégrale est majorée (à constante près) par le maximum du produit des intégrales

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_X)\log(\|t_X\|)^{d-j}dX, \tag{108}$$

$$\int_{\bar{\mathfrak{n}}_n} m(X')^{-\alpha' N}\delta_{B_{2n}}^{\frac{1}{2}}(t_{X'})\log(\|t_{X'}\|)^{d-j'}dX', \tag{109}$$

$$\int_{A_n} \prod_{i=1}^{n-1} (1+|\frac{a_i}{a_{i+1}}|)^{-N}(1+|a_n|)^{-N}\log(\|b\|)^j|\det a|da, \tag{110}$$

et

$$\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} (1+|\frac{a'_i}{a'_{i+1}}|)^{-N}(1+|a'_{n-1}|)^{-N}\log(\|b'\|)^{j'}|\det a'|da', \tag{111}$$

pour $j, j'$ compris entre 0 et $d$. Ces dernières intégrales convergent pour $N$ assez grand, voir [5, proposition 5.5] pour les deux premières intégrales et le lemme 1.3 pour les deux dernières.

□

## 4. Formules de Plancherel

Pour $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n})$, on note

$$\beta(W) = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} W(\xi_p)\theta(\xi_p)^{-1} d\xi_p. \tag{112}$$

**Lemme 4.1.** *L'intégrale 112 est absolument convergente. La forme linéaire $W \in \mathcal{C}^w(N_{2n}\backslash G_{2n}) \mapsto \beta(W)$ est continue.*

*Pour $\pi = T(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, la restriction de $\beta$ a $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi,\psi),\theta)$. De plus, la restriction de $\beta$ a $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est non nulle.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}} \left| W\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ak & 0 \\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\right| \delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{113}$$

pour tout $k \in K_n$. On effectue la même majoration que pour la convergence de l'intégrale $J(s, W, \phi)$, l'intégrale est donc majorée par

$$\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n}\int_{A_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2}(1+\frac{|a_i|}{|a_{i+1}|})(1+|a_n|)m(X)^{-\alpha N}\delta_{B_{2n}}(bt_X)^{\frac{1}{2}} \log(\|bt_X\|)^d \delta_{B_n}(a)\delta_{B_{n-1}}(a)^{-1} da dX, \tag{114}$$

pour tout $N \geqslant 1$. Cette dernière intégrale est convergente pour $N$ suffisamment grand par le même argument que pour la convergence de $J(s, W, \phi)$.

On montrera que $\beta$ restreint à $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est $(H_n,\theta)$-invariant lors de la preuve du lemme 4.3. En reprenant les indications de l'introduction, cela vient du fait que les fonctions $J(1, W, \phi)$ sont $(H_n,\theta)$-invariant.

Pour finir, le modèle de Kirillov $\mathcal{K}(\pi,\psi)$ contient $C_c^\infty(N_{2n}\backslash P_{2n},\psi)$ (ref)(Gelfand-Kazhdan). En particulier, il existe une fonction de Whittaker dont la restriction a $A_{2n-1}K_{2n}$ est l'indicatrice de $A_{2n-1}(\mathcal{O}_F)$, alors $\beta$ est non nulle sur cette fonction.

□

**Proposition 4.1.** *Soit $\sigma \in \mathrm{Temp}(SO(2n+1))$, on pose $\pi = T(\sigma)$ le transfert de $\sigma$ dans $\mathrm{Temp}(G_{2n})$. La forme linéaire $\widetilde{W} \in \mathcal{W}(\widetilde{\pi},\psi^{-1}) \mapsto \beta(\widetilde{W})$ est un élément* *de* $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1}), \theta)$*. On identifie* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *et* $\mathcal{W}(\widetilde{\pi}, \psi^{-1})$ *par l'isomorphisme* $W \mapsto \widetilde{W}$*. Il existe un signe* $c_\beta(\sigma) = c_\beta(\pi)$ *tel que*

$$\beta(\widetilde{W}) = c_\beta(\sigma)\beta(W), \tag{115}$$

*pour tout* $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$*.*

*Démonstration.* En effet, $\mathrm{Hom}_{H_n}(\mathcal{W}(\pi, \psi), \theta)$ est de dimension au plus 1, d'après l'unicité du modèle de Shalika [4]. De plus, $\pi$ est le transfert de $\sigma$ donc $\widetilde{\pi} \simeq \pi$. On en déduit l'existence de $c_\beta(\pi) \in \mathbb{C}$ qui vérifie $c_\beta(\widetilde{\pi})c_\beta(\pi) = 1$ donc $c_\beta(\pi)$ est un signe. □

On étend la forme linéaire $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}} f(u)\psi(u)^{-1}du$ par continuité en une forme linéaire sur $C^w(G_{2n})$ [2], que l'on note

$$f \in C^w(G_{2n}) \mapsto \int_{N_{2n}}^{*} f(u)\psi(u)^{-1}du. \tag{116}$$

Pour $f \in C^w(G_{2n})$, on peut ainsi définir $W_f$ par la formule

$$W_f(g_1, g_2) = \int_{N_{2n}}^{*} f(g_1^{-1}ug_2)\psi(u)^{-1}du, \tag{117}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ et $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$, on pose $W_{f,\pi} = W_{f_\pi}$.

**Lemme 4.2.** *Pour* $W \in \mathcal{S}(Z_{2n}N_{2n}\backslash G_{2n})$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$*, on a*

$$\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \phi(0)\int_{Z_{2n}(H_n\cap N_{2n})\backslash H_n} W(\xi)\theta(\xi)^{-1}d\xi. \tag{118}$$

*Démonstration.* On a

(119)

$$\gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi) = \int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dX\gamma(ns, 1, \psi)\int_{Z_n} \phi(e_n zk)|\det z|^s dzdk|\det a|^s\delta_{B_n}(a)^{-1}da$$

De plus, d'après la thèse de Tate, on a

$$\gamma(ns, 1, \psi)\int_{Z_n} \phi(e_n zk)|\det z|^s ds = \int_{F^*} \widehat{\phi_k}(x)|x|^{1-ns}dx, \tag{120}$$

où l'on a posé $\phi_k(x) = \phi(xe_n k)$ pour tous $x \in F$ et $k \in K_n$. Ce qui nous donne par convergence dominée

$$\lim_{s\to 0+} \gamma(ns, 1, \psi)\int_{Z_n} \phi(e_n zk)|\det z|^s dz = \int_F \widehat{\phi_k}(x)dx = \phi(0). \tag{121}$$

On en déduit que $\lim_{s\to 0^+} \gamma(ns, 1, \psi)J(s, W, \phi)$ est égal a

$$\phi(0)\int_{Z_n\backslash A_n}\int_{K_n}\int_{\mathrm{Lie}(B_n)\backslash M_n} W\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ak & 0\\ 0 & ak\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)$$
$$\psi(-\mathrm{Tr}(X))dXdk\delta_{B_n}(a)^{-1}da, \tag{122}$$

ce qui nous permet de conclure. □

**Corollaire 4.1** (de la limite spectrale)**.** *Soit* $f \in \mathcal{S}(G_{2n})$ *et* $g \in G_{2n}$, *alors*

$$\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(g,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Temp(SO(2n+1))/Stab} \beta(W_{f,T(\sigma)}(g,.)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{123}$$

*Démonstration.* On peut supposer que $g = 1$ en remplaçant $f$ par $L(g)f$. On pose $\widetilde{f}(g) = \int_{Z_n} f(zg)dz$, alors $\widetilde{f} \in PG_{2n}$. On a donc

$$\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi. \tag{124}$$

On choisit $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tel que $\phi(0) = 1$. Comme $\widetilde{f}_\pi = f_\pi$ pour tout $\pi \in Temp(PG_{2n})$, d'après le lemme 4.2, on a

$$\begin{aligned} \int_{Z_{2n}(H_n \cap N_{2n}) \backslash H_n} W_{\widetilde{f}}(1,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s,1,\psi) J(s, W_{\widetilde{f}}(1,.),\phi) \\ &= \lim_{s \to 0^+} n\gamma(s,1,\psi) \int_{Temp(PG_{2n})} J(s, W_{f,\pi}(1,.),\phi) d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned} \tag{125}$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$\begin{aligned} &\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ &\lim_{s \to 0^+} n\gamma(s,1,\psi) \int_{Temp(PG_{2n})} J(1-s, \widetilde{W_{f,\pi}(1,.)}, \widehat{\phi}) c(\pi) \gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1} d\mu_{PG_{2n}}(\pi). \end{aligned} \tag{126}$$

La proposition 2.2, nous permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned} &\int_{H_n \cap N_{2n} \backslash H_n} W_f(1,\xi)\theta(\xi)^{-1} d\xi = \\ &\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi}) c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} d\sigma. \end{aligned} \tag{127}$$

Le membre de gauche étant $(H_n,\theta)$-invariant, on en déduit que le membre de droite l'est aussi. Ce qui signifie que

$$\int_{Temp(SO(2n+1)/Stab} J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi}) - J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi}) d\mu(\sigma) = 0, \tag{128}$$

pour tout $\xi \in H_n$, où $d\mu(\sigma) = c(T(\sigma)) \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} d\sigma$.

D'après le lemme de séparation spectrale [2, Lemme 5.7.2], on en déduit que $J(1, R(\xi)\widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi}) = J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi})$ pour tout $\xi \in H_n$ et donc que $J(1, \widetilde{W_{f,T(\sigma)}(1,.)}, \widehat{\phi}))$ est $(H_n,\theta)$-invariant.

**Lemme 4.3.** *Soit* $\sigma \in Temp(SO(2n+1))$ *et* $\pi = T(\sigma)$. *Alors*

$$J(1, \widetilde{W}, \widehat{\phi}) = \phi(0) c_\beta(\sigma) \beta(W), \tag{129}$$

*pour tous* $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ *et* $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

*Démonstration.* En effet, on a

$$J(1,\widetilde{W},\widehat{\phi}) = \int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg. \tag{130}$$

On choisit $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que $W_{f,\pi}(1,.) = W$, on en déduit que l'intégrale sur $N_n\backslash G_n$ est $(H_n,\theta)$-invariante. Comme $\widehat{\phi}(e_n h)$ est arbitraire parmi les fonctions invariante à gauche par $G_{n-1}U_{n-1}$, on en déduit que

$$\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right) \psi(-Tr(X))dXdg \tag{131}$$

est $(H_n,\theta)$-invariant. Autrement dit, $\beta$ restreint à $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ est $(H_n,\theta)$-invariant, ce qui termine la preuve du lemme 4.1.

**Remarque 4.1.** *Cette preuve que* $\beta$ *restreint à* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ *est* $(H_n,\theta)$*-invariant est quelque peut détournée dû au fait qu'il nous manque un résultat. On conjecture que* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi,\theta)$ *qui est de dimension au plus* 1*. En utilisant le fait que* $\pi \simeq \widetilde{\pi}$ *donc* $\pi$ *est* $(H_n,\theta)$*-distinguée, on a* $Hom_{H_n}(\pi,\theta) \neq 0$*. Ce dernier est un sous-espace de* $Hom_{H_n\cap P_{2n}}(\pi,\theta)$*. On en déduirait alors que la restriction de* $\beta$ *a* $\mathcal{W}(\pi,\psi)$*, qui est bien* $H_n \cap P_{2n}$*-invariant, est un élément de* $Hom_{H_n}(\pi,\theta)$*. Ce qui simplifierait légèrement la preuve à condition de prouver le résultat de dimension* 1*.*

Finissons la preuve du lemme, on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}&\int_{N_n\backslash G_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n g)|\det g|dg\\ &= \int_{P_n\backslash G_n}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} \widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dX\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dhdp.\end{aligned} \tag{132}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{N_n\backslash P_n}\int_{Lie(B_n)\backslash M_n} &\widetilde{W}\left(\sigma\begin{pmatrix}1 & X\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ph & 0\\ 0 & ph\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\psi(-Tr(X))dXdp\\ &= \beta\left(R\left(\sigma\begin{pmatrix}h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\sigma^{-1}\right)\widetilde{W}\right)\\ &= \beta(\widetilde{W}),\end{aligned} \tag{133}$$

puisque $\beta$ est $(H_n,\theta)$-invariant. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{P_n\backslash G_n}\widehat{\phi}(e_n h)|\det h|dh &= \int_{F^n}\widehat{\phi}(x)dx\\ &= \phi(0).\end{aligned} \tag{134}$$

On conclut grâce à la proposition 4.1. □

Pour finir la preuve du corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 4.3 dans la relation 127. □

4.1. **Formule de Plancherel explicite sur $H_n\backslash G_{2n}$.** On note $Y_n = H_n\backslash G_{2n}$. On dispose d'une surjection $f \in \mathcal{S}(G_{2n}) \mapsto \varphi_f \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$ avec

$$\varphi_f(y) = \int_{H_n} f(hy)\theta(h)^{-1}dh, \tag{135}$$

pour tout $y \in Y_n$.

**Théorème 4.1.** *Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(Y_n, \theta)$, il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(G_{2n})$ tel que $\varphi_i = \varphi_{f_i}$ pour $i = 1, 2$. On a*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh, \tag{136}$$

*où $f = f_1 * f_2^*$, on note $f_2^*(g) = \overline{f_2(g^{-1})}$. On pose*

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi} = \int_{H_n^p \cap N_{2n}\backslash H_n^p} \beta\left(W_{f,\pi}(\xi_p, .)\right)\theta(\xi_p)d\xi_p, \tag{137}$$

*pour tout $\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1)))$. La quantité $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,\pi}$ est indépendante du choix de $f_1, f_2$. Alors on a*

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/Stab} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n,T(\sigma)} \frac{|\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)|}{|S_\sigma|} d\sigma. \tag{138}$$

*Démonstration.* On a

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{Y_n} \int_{H_n \times H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)}\theta(h_1)^{-1}\theta(h_2)dh_1 dh_2 dy. \tag{139}$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet,

$$(y, h_1, h_2) \in \mathcal{Y}_n \times H_n \times H_n \mapsto f_1(h_1 y)\overline{f_2(h_2 y)} \tag{140}$$

est à support compact, ou $\mathcal{Y}_n$ est un système de représentant de $Y_n$. On effectue le changement de variable $h_1 \mapsto h_1 h_2$ et on combine les intégrales selon $y$ et $h_2$ en une intégrale sur $G_{2n}$. Ce qui donne

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{L^2(Y_n)} = \int_{G_{2n}} \int_{H_n} f_1(h_1 y)\overline{f_2(y)}\theta(h_1)^{-1}dh_1 dy, \tag{141}$$

qui est bien la relation 136.

D'après 3.1 et 4.1, on a

$$\begin{aligned} \int_{H_n} f(h)\theta(h)^{-1}dh = &\int_{H_n \cap N_{2n}\backslash H_n^p} \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/Stab} \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right) \\ &\theta(\xi_p)\frac{\gamma^*(0, \sigma, Ad, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma))c_\beta(\sigma)d\sigma d\xi_p. \end{aligned} \tag{142}$$

**Lemme 4.4.** *La fonction $(\xi_p, \sigma) \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ est à support compact, l'intégrale 142 est donc absolument convergente.*

*Démonstration.* La fonction $\xi_p \mapsto \beta\left(W_{f,T(\sigma)}(\xi_p, .)\right)$ est lisse donc à support compact. De plus, d'après la définition de $f_\pi$, $W_{f,\pi}$ est nul des que $\pi(f)$ l'est.

Soit $K_f$ un sous-groupe ouvert compact tel que $f$ est biinvariant par $K_f$. Alors $\pi(f) \neq 0$, seulement lorsque $\pi$ admet des vecteurs $K_f$-invariant non nuls.

D'après Harish-Chandra (ref), il n'y a qu'un nombre fini de représentations $\tau \in \Pi_2(M)$ modulo $X^*(M) \otimes i\mathbb{R}$ qui admettent des vecteurs $K_f$-invariant non nuls.

Comme toute représentation $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$ est une induite d'une telle représentation $\tau$ pour un bon choix de sous-groupe de Levi $M$, on en déduit le lemme. $\square$

On échange les intégrales pour obtenir

$$\int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}} (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0, \sigma, \mathrm{Ad}, \psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) d\sigma. \tag{143}$$

Montrons que la quantité, $(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, \pi}$ est indépendante du choix de $f_1, f_2$. Commençons par le

**Lemme 4.5.** *Soit* $\pi \in \mathrm{Temp}(G_{2n})$. *On introduit un produit scalaire sur* $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ *:*

$$(W, W')^{Wh} = \int_{N_{2n} \backslash P_{2n}} W(p) \overline{W'(p)} dp, \tag{144}$$

*pour tous* $W, W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$.

*L'opérateur* $\pi(f^\vee) : \mathcal{W}(\pi, \psi) \to \mathcal{W}(\pi, \psi)$ *est de rang fini. Notons* $\mathcal{B}(\pi, \psi)_f$ *une base finie orthonormée de son image. Alors*

$$W_{f,\pi} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \overline{\pi(f_2) W'} \otimes \pi(f_1) W'. \tag{145}$$

*Démonstration.* Le produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ est $P_{2n}$-invariant, d'après Bernstein (ref), il est aussi $G_{2n}$-invariant.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, la décomposition de $\pi(f^\vee)W$ selon ce produit scalaire est

$$\begin{aligned} \pi(f^\vee) W &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (\pi(f^\vee) W, W')^{Wh} W' \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} (W, \pi(\overline{f^\vee}) W')^{Wh} W'. \end{aligned} \tag{146}$$

Cette égalité nous permet grâce au produit scalaire $(.,.)^{Wh}$ de faire l'identification

$$\begin{aligned} \pi(f^\vee) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} W' \otimes \pi(f^\vee) \overline{W'} \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1) W' \otimes \overline{\pi(f_2) W'}, \end{aligned} \tag{147}$$

d'après l'invariance par $G_{2n}$ du produit scalaire.

On en déduit que

$$\begin{aligned} W_{f,\pi}(g_1, g_2) &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \int^*_{N_{2n}} (\pi(u g_2) \pi(f_1) W', \pi(g_1) \pi(f_2) W') \psi(u)^{-1} du \\ &= \sum_{W' \in \mathcal{B}(\pi, \psi)_f} \pi(f_1) W'(g_2) \overline{\pi(f_2) W'}(g_1), \end{aligned} \tag{148}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G_{2n}$. La dernière égalité provient de [2, Prop 2.14.2]. □

Le lemme 4.5 donne la relation

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} = \sum_{W' \in \mathcal{B}(T(\sigma), \psi)_f} \overline{\beta(T(\sigma)(f_2) W')} \beta(T(\sigma)(f_1) W'), \tag{149}$$

qui est bien indépendant du choix de $f_1, f_2$ puisque la restriction de $\beta$ a $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est $H_n$-invariante.

Pour finir, [2, prop 4.1.1] nous dit que les formes sesquilinéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)_{Y_n, T(\sigma)} \frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|} c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma)$ sont automatiquement définies positives. On en déduit que

$$\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi) c(T(\sigma)) c_\beta(\sigma) = |\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)|. \tag{150}$$

□

### 4.2. **Formule de Plancherel abstraite sur $G_n \times G_n \backslash G_{2n}$.**

**Lemme 4.6.** *On dispose d'un isomorphisme d'espace de Hilbert*

$$L^2(G_n \times G_n \backslash G_{2n}) \simeq L^2(H_n \backslash G_{2n}, \theta). \tag{151}$$

*Démonstration.* On considère l'application $f \in C_c^\infty(H_n \backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n \backslash G_{2n})$, où $\widetilde{f}$ est définie par

$$\widetilde{f}(g) = \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma^{-1}\right) d\gamma \tag{152}$$

pour tout $g \in G_{2n}$.

Commençons par montrer que l'application est bien définie. En effet, pour $g' \in G_n$ et $x \in M_n$, on a $\begin{pmatrix} g' & X \\ 0 & g' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$, on en déduit que $f\left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma^{-1}\right)$ est nul sauf si $\begin{pmatrix} g'\gamma & X\gamma \\ 0 & g' \end{pmatrix}$ est dans un compact pour un certain $g'$, autrement dit, si $\gamma$ est dans un compact. L'intégrale est donc absolument convergente. De plus, pour tous $g_1, g_2 \in G_n$ et $g \in G_{2n}$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\right) &= \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} g\sigma^{-1}\right) d\gamma \\ &=_{\gamma \mapsto g_2\gamma g_1^{-1}} \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma^{-1}\right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} g\sigma^{-1}\right) d\gamma \\ &= \widetilde{f}(g). \end{aligned} \tag{153}$$

Pour finir, montrons que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, écrivons $g$ sous la forme $\begin{pmatrix} g_2 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} k$ avec $g_1, g_2 \in G_n$, $x \in M_n$ et $k \in K$. Alors $\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right)$, on a alors

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(g) &= \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & \gamma x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma^{-1}\right) d\gamma \\ &= \int_{G_n} f\left(\sigma \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma^{-1}\right) \psi(Tr(\gamma x)) d\gamma \end{aligned} \tag{154}$$

Cette dernière intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, à savoir la fonction $\phi_k$ définie par $\phi_k(y) = f\left(\sigma \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\sigma^{-1}\right) |\det y|^{-n}$ si $y \in G_n$ et 0 sinon. Le facteur $|\det y|^{-n}$ provient de la transformation de la mesure multiplicative $d\gamma$ en une mesure additive. On en déduit que $\widetilde{f}$ est à support compact modulo $G_n \times G_n$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ est bien définie.

Cette application est linéaire et injective. En effet, si $\widetilde{f} = 0$, alors $\phi_k = 0$ pour tout $k \in K$, donc $f\left(\sigma\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\sigma^{-1}\right)$ pour tout $\gamma \in G_n$ et $k \in K$. On en déduit que $f = 0$ car elle est $(H_n, \theta)$-invariante.

Pour finir, montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||f||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = ||\widetilde{f}||_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. Ce qui prouve que l'application $f \in C_c^\infty(H_n\backslash G_{2n}, \theta) \mapsto \widetilde{f} \in C_c^\infty(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert.

En effet,

$$\begin{aligned}
||\widetilde{f}||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= \int_{M_n\times K} |\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\right)|^2 dxdk \\
&= \int_{M_n\times K} |\int_{G_n} f\left(\sigma\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\sigma^{-1}\right)\psi(\mathrm{Tr}(\gamma x)d\gamma|^2 dxdk \\
&= \int_{M_n\times K} |\widehat{\phi}_k(x)|^2 dxdk.
\end{aligned} \tag{155}$$

La transformé de Fourier conserve la norme $L^2$ avec un choix de constante appropriée, on en déduit qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
||\widetilde{f}||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} &= c'\int_{M_n\times K} |\phi_k(x)|^2 dxdk \\
&= c'\int_K\int_{G_n} |f\left(\sigma\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\sigma^{-1}\right)|^2 \frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n}dk.
\end{aligned} \tag{156}$$

On met l'accent sur le fait que l'on a modifié la mesure additive sur $M_n$ restreinte à $G_n$ en une mesure multiplicative sur $G_n$. La mesure $\frac{d\gamma}{|\det\gamma|^n}dk$ est une mesure de Haar sur $G_nK \simeq H_n\backslash G_{2n}$. On en déduit bien qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $||f||_{L^2(H_n\backslash G_{2n},\theta)} = ||\widetilde{f}||_{L^2(G_n\times G_n\backslash G_{2n})}$. □

Cet isomorphisme d'espace $L^2$ nous permet de faire le lien entre les formules de Plancherel sur $G_n \times G_n\backslash G_{2n}$ et sur $H_n\backslash G_n$. En effet, on dispose du

**Théorème 4.2.** *Une décomposition de Plancherel abstraite sur* $L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n})$ *est obtenue par la relation*

$$L^2(G_n \times G_n\backslash G_{2n}) = \int_{\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}}^{\oplus} T(\sigma)\frac{|\gamma^*(0,\sigma,\mathrm{Ad},\psi)|}{|S_\sigma|}d\sigma. \tag{157}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme 4.6 et de la décomposition de Planchrel abstraite déduite du théorème 4.1. □

## Références


[1] D. Belt, *On the holomorphy of exterior-square L-functions*, arXiv preprint arXiv :1108.2200, (2011).

[2] R. Beuzart-Plessis, *Plancherel formula for* $GL_n(F)\backslash GL_n(E)$ *and applications to the Ichino-Ikeda and formal degree conjectures for unitary groups*, (2018).

[3] G. Henniart, *Correspondance de Langlands et Fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, International Mathematics Research Notices, 2010 (2010), pp. 633–673.

[4] H. Jacquet and S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Mathematica, 102 (1996), pp. 65–123.

[5] H. Jacquet and J. Shalika, *Exterior square L-functions*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, 2 (1990), pp. 143–226.

[6] A. C. Kable, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, American journal of mathematics, 126 (2004), pp. 789–820.

[7] N. Matringe, *Linear and Shalika local periods for the mirabolic group, and some consequences*, Journal of Number Theory, 138 (2014), pp. 1–19.

[8] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adique. d'aprÃĺs Harish-Chandra*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (2003), p. 235âĂŞ333.