

FACTEURS γ DU CARRÉ EXTÉRIEUR

Soit F un corps local de caractéristique 0, ψ un caractère non trivial de F et π une représentation tempérée irréductible de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. Jacquet et Shalika ont défini une fonction L du carré extérieur $L_{JS}(s, \pi, \Lambda^2)$ par des intégrales notées $J(s, W, \phi)$, où $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ est un élément du modèle de Whittaker de π et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ est une fonction de Schwartz. Matringe a prouvé que, lorsque F est non archimédien, ces intégrales $J(s, W, \phi)$ vérifient une équation fonctionnelle, ce qui permet de définir des facteurs γ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$.

On montre que l'on a encore une équation fonctionnelle lorsque F est archimédien et que les facteurs γ sont égaux à une constante de module 1 près à ceux définis par Shahidi, que l'on note $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$. Plus exactement, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1, telle que

$$(1) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. La preuve se fait par une méthode de globalisation, on considère π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. **Théorie locale.** Les intégrales $J(s, W, \phi)$ sont définies par

$$(2) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\mathrm{Lie}(B_n) \backslash M_n} W \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi(-\mathrm{Tr}(X)) dX \phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ et $s \in \mathbb{C}$. On a noté G_n le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans F . L'élément σ est la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$.

Jacquet et Shalika ont démontré que ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, plus exactement, on dispose de la

Proposition 1.1 (Jacquet-Shalika). *Il existe $\eta > 0$ tel que les intégrales $J(s, W, \phi)$ convergent absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1 - \eta$.*

Kewat montre, lorsque F est p -adique, que ce sont des fractions rationnelles en q^s où q est le cardinal du corps résiduel de F . On aura aussi besoin d'avoir le prolongement méromorphe de ces intégrales lorsque F est archimédien et d'un résultat de non annulation.

Proposition 1.2 (Belt). *Fixons $s_0 \in \mathbb{C}$. Il existe $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$ tels que $J(s, W, \phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et ne s'annule pas en s_0 . Si $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le point s_0 peut éventuellement être un pôle. Si F est p -adique, on peut choisir W et ϕ tels que $J(s, W, \phi)$ soit entière.*

Lorsque la représentation non ramifiée, on peut représenter la fonction L du carré extérieur obtenue par la correspondance de Langlands locale, que l'on note $L(s, \pi, \Lambda^2)$, (qui est égale à celle obtenue par la méthode de Langlands-Shahidi d'après un résultat d'Henniart) par ces intégrales.

Proposition 1.3 (Jacquet-Shalika). *Supposons que F est p -adique, le conducteur de ψ est l'anneau des entiers \mathcal{O} de F . Soit π une représentation non ramifiée de $GL_{2n}(F)$. On note ϕ_0 la fonction caractéristique de \mathcal{O}^n et W_0 l'unique fonction de Whittaker invariante par $GL_{2n}(\mathcal{O})$ et qui vérifie $W(1) = 1$. Alors*

$$(3) \quad J(s, W_0, \phi_0) = L(s, \pi, \Lambda^2).$$

Pour finir cette section, on énonce l'équation fonctionnelle démontrée par Matringe lorsque F est un corps p -adique. Plus précisément, on a la

Proposition 1.4 (Matringe). *Supposons que F est un corps p -adique et π générique. Il existe un monôme $\epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ en q^s , tel que pour tous $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, ont ait*

$$(4) \quad \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{J(s, W, \phi)}{L(s, \pi, \Lambda^2)} = \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\phi})}{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)},$$

où $\hat{\phi} = \mathcal{F}_\psi(\phi)$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère ψ et $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi)$ est la fonction de Whittaker définie par $\tilde{W}(g) = W(w_n(g^t)^{-1})$, avec w_n la matrice associée à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2n & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et $w_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. On définit alors le facteur γ de Jacquet-Shalika par la relation

$$(5) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = \epsilon(s, \pi, \Lambda^2, \psi) \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \Lambda^2)}{L(s, \pi, \Lambda^2)}.$$

1.2. Théorie globale. La méthode que l'on utilise est une méthode de globalisation. Essentiellement, on verra π comme une composante locale d'une représentation automorphe cuspidale. Pour se faire, on aura besoin de l'équivalent global des intégrales $J(s, W, \phi)$.

Soit K un corps de nombres et $\psi_{\mathbb{A}}$ un caractère non trivial de \mathbb{A}_K/K . Soit Π une représentation automorphe cuspidale irréductible sur $GL_{2n}(\mathbb{A}_K)$. Pour $\varphi \in \Pi$, on considère

$$(6) \quad W_\varphi(g) = \int_{N_n(K) \backslash N_n(\mathbb{A}_K)} \varphi(ug) \psi_{\mathbb{A}}(u) du$$

la fonction de Whittaker associée. On considère $\psi_{\mathbb{A}}$ comme un caractère de $N_n(\mathbb{A}_K)$ en posant $\psi_{\mathbb{A}}(u) = \psi_{\mathbb{A}}(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1})$. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K^n)$ une fonction de Schwartz, on note $J(s, W_\varphi, \Phi)$ l'intégrale

$$(7) \quad \int_{N_n \backslash G_n} \int_{\text{Lie}(B_n) \backslash M_n} W_\varphi \left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \right) \psi_{\mathbb{A}}(\text{Tr}(X)) dX \Phi(e_n g) |\det g|^s dg$$

où l'on note G_n le groupe $GL_n(\mathbb{A}_K)$, B_n le sous groupe des matrices triangulaires supérieures, N_n le sous-groupe de B_n des matrices dont les éléments diagonaux sont 1 et M_n l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{A}_K .

Finissons cette section par l'équation fonctionnelle globale démontrée par Jacquet et Shalika.

Proposition 1.5 (Jacquet-Shalika). *Les intégrales $J(s, W_\varphi, \Phi)$ convergent absolument pour $\operatorname{Re}(s)$ suffisamment grand. De plus, $J(s, W_\varphi, \Phi)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et vérifie l'équation fonctionnelle suivante*

$$(8) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\varphi, \hat{\Phi}),$$

où $\tilde{W}_\varphi(g) = W_\varphi(w_n(g^t)^{-1})$ et $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de ϕ par rapport au caractère $\psi_\mathbb{A}$.

Comme on peut s'y attendre, les intégrales globales sont reliées aux intégrales locales. Plus exactement, si $W = \prod_v W_v$ et $\Phi = \prod_v \Phi_v$, où v décrit les places de K , on a

$$(9) \quad J(s, W_\varphi, \Phi) = \prod_v J(s, W_v, \Phi_v).$$

1.3. Globalisation. Comme la preuve se fait par globalisation, la première chose à faire est de trouver un corps de nombres dont F est une localisation. On dispose du

Lemme 1.1. *Supposons que F est un corps p -adique. Il existe un corps de nombres k et une place v_0 telle que $k_{v_0} = F$, où v_0 est l'unique place de k au dessus de p .*

On note $\operatorname{Temp}(\operatorname{GL}_{2n}(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations tempérées irréductibles. Topologie sur $\operatorname{Temp}(\operatorname{GL}_{2n}(F))$.

Proposition 1.6 (Beuzart-Plessis). *Soit k un corps de nombres, v_0, v_1 deux places distinctes de k avec v_1 non archimédienne. Soit \mathcal{U} un ouvert de $\operatorname{Temp}(\operatorname{GL}_{2n}(k_{v_0}))$. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale irréductible Π de $\operatorname{GL}_{2n}(\mathbb{A}_k)$ telle que $\Pi_{v_0} \in \mathcal{U}$ et Π_v est non ramifiée pour toute place non archimédienne $v \notin \{v_0, v_1\}$.*

2. FACTEURS γ

Dans cette partie, on prouve l'égalité entre les facteurs $\gamma^{JS}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et $\gamma^{Sh}(\cdot, \pi, \Lambda^2, \psi)$ à une constante (dépendant de π) de module 1 près.

On commence à montrer cette égalité pour les facteurs γ archimédiens. Pour le moment, les résultats connus ne nous donnent même pas l'existence du facteur γ^{JS} dans le cas archimédien, ce sera une conséquence de la méthode de globalisation.

On aura besoin d'un résultat sur la continuité du quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \hat{\Phi})}{J(s, W, \Phi)}$ par rapport à π , on dispose du

Lemme 2.1. *Supposons que $J(s, W, \Phi) \neq 0$. Alors il existe une section $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ et un voisinage $V \subset \operatorname{Temp}(\operatorname{GL}_{2n}(F))$ de π tel que la fonction $\pi' \in V \mapsto \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\Phi})}{J(s, W_{\pi'}, \Phi)}$ soit continue.*

Démonstration. On utilise l'existence de bonnes sections $\pi' \mapsto W_{\pi'}$ (Beuzart-Plessis). La fonction $W \mapsto J(s, W, \Phi)$ est continue, il existe donc un voisinage V de π tel que $J(s, W_{\pi'}, \Phi) \neq 0$. Le quotient $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_{\pi'}, \hat{\Phi})}{J(s, W_{\pi'}, \Phi)}$ est alors bien une fonction continue de π' sur V . \square

Proposition 2.1. *Soit $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit π une représentation tempérée irréductible de $\operatorname{GL}_{2n}(F)$.*

Il existe une fonction méromorphe $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ telle que pour tous $s \in \mathbb{C}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $\phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on ait

$$(10) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \phi) J(s, W, \phi) = J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

De plus, il existe une constante $c(\pi)$ de module 1 telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$(11) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Démonstration. Soit k un corps de nombres, on suppose que k a une seule place archimédienne, elle est réelle (respectivement complexe) lorsque $F = \mathbb{R}$ (respectivement $F = \mathbb{C}$) ; par exemple, $k = \mathbb{Q}$ si $F = \mathbb{R}$ et $k = \mathbb{Q}(i)$ si $F = \mathbb{C}$. Soit $v \neq v'$ deux places non archimédiennes distinctes, soit $\mathcal{U} \subset \text{Temp}(\text{GL}_{2n}(F))$ un ouvert contenant π .

D'après la proposition 1.6, il existe une représentation automorphe cuspidale Π telle que $\Pi_\infty \in \mathcal{U}$ et Π_w soit non ramifiée pour toute place non archimédienne $w \neq v$.

On choisit maintenant des fonctions de Whittaker W_w et des fonctions de Schwartz ϕ_w dans le but d'appliquer l'équation fonctionnelle globale. Pour $w \notin \{\infty, v\}$, on prend les fonctions "non ramifiées" qui apparaissent dans la proposition 1.3. Pour $w = \infty$ ou v , on fait un choix, d'après la proposition 1.2, tel que $J(s, W_w, \phi_w) \neq 0$. On pose alors

$$W = \prod_w W_w \quad \text{et} \quad \Phi = \prod_w \phi_w.$$

D'après la proposition 1.5, on a

$$(12) \quad \begin{aligned} & J(s, W_\infty, \phi_\infty) J(s, W_v, \phi_v) L^S(s, \Pi, \Lambda^2) \\ &= J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_\psi(\phi_\infty)) J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_v, \mathcal{F}_\psi(\phi_v)) L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2), \end{aligned}$$

où $S = \{\infty, v\}$ et $L^S(s, \Pi, \Lambda^2) = \prod_{w \neq \infty, v} L(s, \Pi_w, \Lambda^2)$ est la fonction L partielle. D'autre part, les facteurs γ de Shahidi vérifient une relation similaire,

$$(13) \quad L^S(s, \Pi, \Lambda^2) = \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, \psi_v) L^S(1-s, \tilde{\Pi}, \Lambda^2).$$

Le quotient de (12) et (13), en utilisant la proposition 1.4 sur le facteur en Π_v , donne

$$(14) \quad \frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}_\infty, \mathcal{F}_\psi(\phi_\infty))}{J(s, W_\infty, \phi_\infty) \gamma^{Sh}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi_\infty)} \frac{\gamma^{JS}(s, \Pi_v, \Lambda^2, \psi_v)}{\gamma^{Sh}(s, \Pi_v, \Lambda^2, \psi_v)} = 1.$$

Ce qui prouve la première partie de la proposition pour Π_∞ , l'existence du facteur $\gamma^{JS}(s, \Pi_\infty, \Lambda^2, \psi_\infty)$.

On choisit maintenant pour \mathcal{U} une base de voisinage contenant π , en utilisant le lemme 2.1 et la continuité des facteurs γ de Shahidi, on en déduit que $\frac{J(1-s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))}{J(s, W, \phi)}$ est une fonction méromorphe indépendante de W et de ϕ , que l'on note $\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$, qui est le produit de $\gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi)$ et d'une fonction, que l'on note $R(s)$, qui est limite de fractions rationnelles en q_v^s ; donc R est une fonction périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_v}$.

On réutilisant notre raisonnement en la place v' , on voit que R est aussi périodique de période $\frac{2i\pi}{\log q_{v'}}$; donc est constante. Ce qui nous permet de voir qu'il existe une constante $c(\pi) = R$ telle que

$$(15) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \psi) = c(\pi) \gamma^{Sh}(s, \pi, \Lambda^2, \psi).$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que la constante $c(\pi)$ est de module 1. Reprenons l'équation fonctionnelle locale archimédienne,

$$(16) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \phi) J(s, W, \phi) = J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi)).$$

On utilise maintenant l'équation fonctionnelle sur la représentation $\tilde{\pi}$ pour transformer le facteur $J(1 - s, \rho(w_{n,n})\tilde{W}, \mathcal{F}_\psi(\phi))$, ce qui nous donne

$$(17) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \phi) J(s, W, \phi) = \frac{J(s, W, \mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)))}{\gamma^{JS}(1 - s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\phi})}.$$

Puisque $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}(\mathcal{F}_\psi(\phi)) = \phi$, on obtient donc la relation

$$(18) \quad \gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \phi) \gamma^{JS}(1 - s, \tilde{\pi}, \Lambda^2, \bar{\phi}) = 1.$$

D'autre part, en conjuguant l'équation 16, on obtient

$$(19) \quad \overline{\gamma^{JS}(s, \pi, \Lambda^2, \phi)} = \gamma^{JS}(\bar{s}, \bar{\pi}, \Lambda^2, \bar{\phi}).$$

Comme π est tempérée, π est unitaire, donc $\tilde{\pi} \simeq \bar{\pi}$. On en déduit, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(20) \quad |\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \psi)|^2 = 1.$$

D'autre part, le facteur γ de Shahidi vérifie aussi $|\gamma^{JS}(\frac{1}{2}, \pi, \Lambda^2, \phi)|^2 = 1$; on en déduit donc que $c(\pi)$ est bien de module 1. \square