LIMITE SPECTRALE

Soit G un groupe réductif connexe (dans la suite G sera G_{2n}, SO_{2n+1} ou un quotient, sous-groupe de Lévi de ces groupes). On note $\mathrm{Temp}(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles tempérées de G. On note Z_G le centre de G et A_G un tore déployé maximal dans Z_G. Soit M un sous-groupe de Levi de G. Il existe une unique mesure (à constante prés) $d\sigma$ sur $\Pi_2(M)$ tel que l'isomorphisme local $\sigma \in \Pi_2(M) \mapsto \omega_\sigma \in \widehat{A_M}$ préserve localement les mesures de Haar sur $\widehat{A_M}$. On définit alors la mesure $d\pi$ localement autour de $\pi \simeq \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$ par la formule

$$d\pi = |W(G,M)|^{-1}(\mathrm{Ind}_M^G)_* d\sigma. \tag{1}$$

La mesure $d\pi$ est définie à une constante prés que l'on choisira de façon à ce que l'équation 4 soit vérifiée.

On note $\overline{G_{2n}} = G_{2n}(F)/Z_{2n}(F)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\overline{G_{2n}})$, pour $\pi \in \mathrm{Temp}(\overline{G_{2n}})$, on définit f_π par

$$f_\pi(g) = \mathrm{Tr}(\pi(g)\pi(f^\vee)), \tag{2}$$

pour tout $g \in \overline{G_{2n}}$, où $f^\vee(x) = f(x^{-1})$.

Proposition 0.1. *Il existe une unique mesure $\mu_{\overline{G_{2n}}}$ sur $\mathrm{Temp}(\overline{G_{2n}})$ telle que*

$$f(g) = \int_{\mathrm{Temp}(\overline{G_{2n}})} f_\pi(g)\, d\mu_{\overline{G_{2n}}}(\pi), \tag{3}$$

pour tous $f \in \mathcal{S}(\overline{G_{2n}})$ et $g \in \overline{G_{2n}}$. De plus, on a l'égalité de mesure suivante :

$$d\mu_{\overline{G_{2n}}}(\pi) = \frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)}{|S_\pi|} d\pi, \tag{4}$$

où $\gamma^*(0,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi) = \lim_{s\to 0}(s\log(q))^{-n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}}\gamma(s,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)$, avec $n_{\pi,\overline{\mathrm{Ad}}}$ l'ordre du zéro de $\gamma(s,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)$ en $s=0$; c'est le premier coefficient non nul de $\gamma(s,\pi,\overline{\mathrm{Ad}},\psi)$ à un facteur $\log(q)$ près. Pour $\pi \in \mathrm{Temp}(\overline{G_{2n}})$ sous-représentation de $\pi_1 \times ... \times \pi_k$, avec $\pi_i \in \Pi_2(\overline{G_{n_i}})$, le facteur $|S_\pi|$ est le produit $n_1...n_k$.

On note $\Phi(G)$ l'ensemble des paramètres de Langlands tempérées de G et $\mathrm{Temp}(G)/\mathrm{Stab}$ le quotient de $\mathrm{Temp}(G)$ par la relation d'équivalence $\pi \equiv \pi' \iff \varphi_\pi = \varphi_{\pi'}$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

On peut définir une application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$, rappelons qu'un élément de $\Phi(SO(2m+1))$ est une application $\phi : W_F' \to {}^L SO(2m+1)$. Or ${}^L SO(2m+1) = Sp(2m)$, l'application $\Phi(SO(2m+1)) \to \Phi(G_{2m})$ par l'injection de $Sp(2m)$ dans G_{2m}. La correspondance de Langlands locale pour $SO(2m+1)$ nous permet de définir une application de transfert $T : \mathrm{Temp}(SO(2m+1))/\mathrm{Stab} \to \mathrm{Temp}(G_{2m})$. On sait caractériser l'image de l'application de transfert. Plus exactement,

$$\pi \in T(\mathrm{Temp}(SO(2n+1))/\mathrm{Stab}) \iff \pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{k} \tau_i \times \widetilde{\tau_i}\right) \times \bigtimes_{j=1}^{l} \mu_i \tag{5}$$

avec $\tau_i \in \Pi_2(G_{n_i})$ et $\mu_j \in T(\mathrm{Temp}(SO(2m_j+1))/\mathrm{Stab}) \cap \Pi_2(G_{2m_j})$.

Proposition 0.2. *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(\overline{G_{2n}})$*, on a*

(6)
$$\lim_{s\to 0^+} 2n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathsf{Temp}(\overline{G_{2n}})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\overline{G_{2n}}} = \int_{\mathsf{Temp}(SO_{2n+1})/\mathsf{Stab}}\phi(T(\sigma))\frac{\gamma^*(0,\sigma,Ad,\psi)}{|S_\sigma|}d\sigma.$$

Démonstration. D'après la relation 4, on a

(7)
$$\int_{\mathsf{Temp}(\overline{G_{2n}})}\phi(\pi)\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\overline{G_{2n}}}(\pi) = \int_{\mathsf{Temp}(\overline{G_{2n}})}\phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi.$$

Soit $\pi \in \mathsf{Temp}(\overline{G_{2n}})$. En prenant des partitions de l'unité, on peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage U suffisamment petit de π. On écrit la représentation π sous la forme

$$\pi = \left(\bigtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\times m_i}\times\widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\right)\times\left(\bigtimes_{j=1}^{u}\mu_j^{\times p_j}\right)\times\left(\bigtimes_{k=1}^{v}\nu_k^{\times q_k}\right), \tag{8}$$

où
- $\tau_i \in \Pi_2(G_{d_i})$ vérifie $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant t$. De plus, pour tous $1 \leqslant i < i' \leqslant t$, $\tau_i \not\simeq \tau_{i'}$ et $\tau_i \not\simeq \widetilde{\tau_{i'}}$.
- $\mu_j \in \Pi_2(G_{e_j})$ vérifie $\mu_j \simeq \widetilde{\mu_j}$ et $\gamma(0,\mu_j,\Lambda^2,\psi) \neq 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant u$. De plus, pour tous $1 \leqslant j < j' \leqslant u$, $\mu_j \not\simeq \mu_{j'}$.
- $\nu_k \in \Pi_2(G_{f_k})$ vérifie $\gamma(0,\nu_k,\Lambda^2,\psi) = 0$ (et donc $\nu_k \simeq \widetilde{\nu_k}$) pour tout $1 \leqslant k \leqslant v$. De plus, pour tous $1 \leqslant k < k' \leqslant v$, $\nu_k \not\simeq \nu_{k'}$.

Soit

$$M = \left(\prod_{i=1}^{t}G_{d_i}^{m_i+n_i}\times\prod_{j=1}^{u}G_{e_j}^{p_j}\times\prod_{k=1}^{v}G_{f_k}^{q_k}\right)/Z_{2n} \tag{9}$$

le sous-groupe de Lévi de $\overline{G_{2n}}$ qui apparait dans la définition de π. On note $X^*(M)$ le groupe des caractères algébriques de M, alors $X^*(M)\otimes\mathbb{R}$ est en correspondance avec l'espace de ces exposants $\mathcal{A}_0 \subset \prod_{i=1}^{t}(i\mathbb{R})^{m_i+n_i}\times\prod_{j=1}^{u}(i\mathbb{R})^{p_j}\times\prod_{k=1}^{v}(i\mathbb{R})^{q_k}$ qui est l'hyperplan définit par la condition que la somme des coordonnées est nulle.

Dans la suite, on notera les coordonnées de la manière suivante :
- $x_i(\lambda) = (x_{i,1}(\lambda),...,x_{i,m_i}(\lambda),\widetilde{x_{i,1}}(\lambda),...,\widetilde{x_{i,n_i}}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{m_i}\times(i\mathbb{R})^{n_i}$,
- $y_j(\lambda) = (y_{j,1}(\lambda),...,y_{j,p_j}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{p_j}$,
- $z_k(\lambda) = (z_{k,1}(\lambda),...,z_{k,q_k}(\lambda)) \in (i\mathbb{R})^{q_k}$,

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_0$.

On dispose alors d'une application $\lambda \in \mathcal{A}_0 \mapsto \pi_\lambda \in \mathsf{Temp}(\overline{G_{2n}})$, où

$$\begin{aligned}\pi_\lambda = &\left(\bigtimes_{i=1}^{t}\left(\bigtimes_{l=1}^{m_i}\tau_i^{\times m_i}\otimes|\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda)}{d_i}}\right)\times\left(\bigtimes_{l=1}^{n_i}\widetilde{\tau_i}^{\times n_i}\otimes|\det|^{\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)}{d_i}}\right)\right)\\ &\times\left(\bigtimes_{j=1}^{u}\bigtimes_{l=1}^{p_j}\mu_j^{\times p_j}\otimes|\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda)}{e_j}}\right)\times\left(\bigtimes_{k=1}^{v}\bigtimes_{l=1}^{q_k}\nu_k^{\times q_k}\otimes|\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda)}{f_k}}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Cette dernière induit un homéomorphisme $U \simeq V/W(\overline{G_{2n}},M)$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}_0$ et $W(\overline{G_{2n}},M)$ est le groupe de Weyl associé au sous-groupe de Lévi M de $\overline{G_{2n}}$. Alors

(11)

$$\int_U \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\overline{G_{2n}}}(\pi) = \int_U \phi(\pi)\frac{\gamma^*(0,\pi,\overline{Ad},\psi)}{|S_\pi|\gamma(s,\pi,\Lambda^2,\psi)}d\pi$$

(12)
$$= \frac{1}{|W(\overline{G_{2n}},M)|}\int_V \phi(\pi_\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{|S_{\pi_\lambda}|\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda.$$

La première égalité provient de la relation 4. De plus, par définition de $|S_{\pi_\lambda}|$, on a $|S_{\pi_\lambda}| = \prod_{i=1}^t d_i^{m_i+n_i}\prod_{j=1}^u e_j^{p_j}\prod_{k=1}^v f_k^{q_k}$. On notera ce produit P dans la suite.

On en déduit l'égalité suivante :

(13)
$$\int_{\mathrm{Temp}(\overline{G_{2n}})} \phi(\pi)\gamma(s,\pi,\lambda^2,\psi)^{-1}d\mu_{\overline{G_{2n}}}(\pi) = \frac{1}{|W(\overline{G_{2n}},M)|P}\int_{\mathcal{A}_0}\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}d\lambda,$$

où $\varphi(\lambda)=\phi(\pi_\lambda)$ si $\lambda\in V$ et 0 sinon.

Décrivons maintenant la forme des facteurs γ, on aura besoin des propriétés de ces derniers.

Propriété 0.1. *Les facteurs γ vérifient les propriétés suivantes :*
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,Ad) = \gamma(s,\pi_1,Ad)\gamma(s,\pi_2,Ad)\gamma(s,\pi_1\times\widetilde{\pi_2})\gamma(s,\widetilde{\pi_1}\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,Ad) = \gamma(s,\pi,Ad)$,
— $\gamma(s,\pi,Ad)$ *a un zéro simple en* $s=0$,
— $\gamma(s,\pi_1\times\pi_2,\Lambda^2) = \gamma(s,\pi_1,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_2,\Lambda^2)\gamma(s,\pi_1\times\pi_2)$,
— $\gamma(s,\pi|\det|^x,\Lambda^2) = \gamma(s+2x,\pi,\Lambda^2)$,
— $\gamma(s,\pi,\Lambda^2)$ *a au plus un zéro simple en* $s=0$ *et* $\gamma(0,\pi,\Lambda^2)=0$ *si et seulement si* π *est dans l'image de l'application de transfert* T,

pour tous $x\in\mathbb{C}$, $\pi\in\Pi_2(G_m)$ *et* $\pi_1,\pi_2\in\mathrm{Temp}(G_m)$.

On en déduit que

(14)
$$\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi) = \left(\prod_{i=1}^t\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}(\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i})\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant n_i}(\frac{\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)-\widetilde{x_{i,l'}}(\lambda)}{d_i})\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^u\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}(\frac{y_{j,l}(\lambda)-y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})\right)\left(\prod_{k=1}^v\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}(\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})\right)F(\lambda),$$

où F est une fonction qui ne s'annule pas sur le voisinage V, il s'agit d'un produit de facteur γ ne s'annulant pas. De plus, on a

(15)
$$\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)^{-1} = \left(\prod_{i=1}^t\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant m_i}(s+\frac{x_{i,l}(\lambda)-x_{i,l'}(\lambda)}{d_i})^{-1}\right)$$
$$\left(\prod_{j=1}^u\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant p_j}(s+\frac{y_{j,l}(\lambda)+y_{j,l'}(\lambda)}{e_j})^{-1}\right)\left(\prod_{k=1}^v\prod_{1\leqslant l\neq l'\leqslant q_k}(s+\frac{z_{k,l}(\lambda)-z_{k,l'}(\lambda)}{f_k})^{-1}\right)G(\lambda+2s),$$

où la fonction G n'a pas de pôle sur $V+\mathcal{H}$, ici $\mathcal{H}$ est le demi-plan complexe et s'injecte dans V diagonalement.

On énonce maintenant le résultat fondamental de Raphaël Beuzart-Plessis, qui permet d'obtenir la proposition dans le cas unitaire.

Proposition 0.3 (Beuzart-Plessis, Proposition 3.3.1)**.** *En reprenant les notations de Beuzart-Plessis, on écrit*
(16)
$$\varphi(\lambda)\frac{\gamma^*(0,\pi_\lambda,\overline{Ad},\psi)}{\gamma(s,\pi_\lambda,\Lambda^2,\psi)}=\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k}).$$

La limite
(17)
$$\lim_{s\to0^+}2n\gamma(s,1,\psi)\int_{\mathcal{A}_0}\varphi_s(\lambda)\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda)}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda)}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda)}{f_k})d\lambda$$

est nulle si $m_i\neq n_i$ pour un certain i ou si l'un des p_j est impair. De plus, dans le cas contraire, elle est égale à
(18)
$$\frac{D(2\pi)^{N-1}2^{1-c}\gamma^*(0,1,\psi)}{|W'|}$$
$$\int_{\mathcal{A}'}\lim_{s\to0^+}\varphi_s(\lambda')s^N\prod_{i=1}^{t}P_{m_i,n_i,s}(\frac{x_i(\lambda')}{d_i})\prod_{j=1}^{u}Q_{p_j,s}(\frac{y_j(\lambda')}{e_j})\prod_{i=1}^{v}R_{q_k,s}(\frac{z_k(\lambda')}{f_k})d\lambda';$$

où
— $D=\prod_{i=1}^t d_i^{n_i}\prod_{j=1}^u e_j^{\frac{p_j}{2}}\prod_{k=1}^v f_k^{\lceil\frac{q_k}{2}\rceil}$,
— *c est le cardinal des $1\leqslant k\leqslant t$ tel que $q_k\equiv1 \mod 2$,*
— $N=\sum_{i=1}^t n_i\sum_{j=1}^u\lfloor\frac{p_j}{2}\rfloor+\sum_{k=1}^v\lceil\frac{q_k}{2}\rceil$,
— $\gamma^*(0,1,\psi)=\lim_{s\to0^+}\frac{\gamma(s,1,\psi)}{s}$,
— *W' est défini de manière intrinsèque dans l'article de Beuzart-Plessis, il est isomorphe au groupe de Weyl $W(SO(2n+1),L)$, le sous-groupe de Lévi L est définit plus loin (voir 21)*

De plus, $\mathcal{A}'$ est le sous-espace de $\mathcal{A}_0$ définit par les relations
— $x_{i,l}(\lambda)+\widetilde{x_{i,l}}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant i\leqslant t$ *et* $1\leqslant l\leqslant n_i$,
— $y_{j,l}(\lambda)+y_{j,p_j+1-l}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant j\leqslant u$ *et* $1\leqslant l\leqslant\lfloor\frac{p_j}{2}\rfloor$,
— $z_{k,l}(\lambda)+z_{k,q_k+1-l}(\lambda)=0$ *pour tous* $1\leqslant j\leqslant v$ *et* $1\leqslant l\leqslant\lceil\frac{q_k}{2}\rceil$.

Supposons tout d'abord que π n'est pas de la forme $T(\sigma)$ pour un certain $\sigma\in Temp(SO(2n+1))/Stab$. D'après la caractérisation 5, il existe $1\leqslant i\leqslant r$ tel que $m_i\neq n_i$ ou p_j est impair (on vérifie aisément que les autres cas se mettent sous la forme qui apparait dans 5). Alors en prenant U suffisamment petit, on peut supposer que U ne rencontre pas l'image de l'application de transfert T. Autrement dit, le terme de droite de la proposition est nul ; d'après 0.3, le terme de gauche l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe $\sigma\in Temp(SO(2n+1))/Stab$ tel que $\pi=T(\sigma)$. Alors $m_i=n_i$ pour tout $1\leqslant i\leqslant t$ et les p_j sont pairs. De plus, peut écrire

$$\sigma=\left(\bigtimes_{i=1}^{t}\tau_i^{\times n_i}\times\bigtimes_{j=1}^{u}\mu_j^{\times\frac{p_j}{2}}\times\bigtimes_{k=1}^{v}\nu_k^{\times\lfloor\frac{q_k}{2}\rfloor}\right)\times\sigma_0, \tag{19}$$

où σ_0 est une représentation de $\mathsf{SO}(2m+1)$ pour un certain m tel que

$$\mathsf{T}(\sigma_0) = \bigtimes_{k=1 q_k \equiv 1 \mod 2}^{\nu} \nu_k. \tag{20}$$

On voit apparaitre le sous-groupe de Lévi

$$\mathsf{L} = \prod_{i=1}^{t} \mathsf{G}_{d_i}^{n_i} \prod_{j=1}^{u} \mathsf{G}_{e_j}^{\frac{p_j}{2}} \prod_{k=1}^{\nu} \mathsf{G}_{f_k}^{\lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \times \mathsf{SO}(2m+1). \tag{21}$$

Plus exactement, $\sigma = \mathsf{Ind}_{\mathsf{L}}^{\mathsf{SO}(2n+1)}(\Sigma)$, où $\Sigma \in \Pi_2(\mathsf{L})$. Comme précédemment, $X^*(\mathsf{L}) \otimes \mathbb{R}$ est en correspondance avec $\mathbb{A}'$. On en déduit une application $\lambda' \in \mathcal{A}' \mapsto \sigma_{\lambda'} \in \mathsf{Temp}(\mathsf{SO}(2n+1))$, avec

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda'} = & \left(\bigtimes_{i=1}^{t} \bigtimes_{l=1}^{n_i} \tau_i^{\times n_i} \otimes |\det|^{\frac{x_{i,l}(\lambda')}{d_i}} \right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{u} \bigtimes_{l=1}^{p_j} \mu_j^{\times \frac{p_j}{2}} \otimes |\det|^{\frac{y_{j,l}(\lambda')}{e_j}} \right) \\ & \times \left(\bigtimes_{k=1}^{\nu} \bigtimes_{l=1}^{q_k} \nu_k^{\times \lfloor \frac{q_k}{2} \rfloor} \otimes |\det|^{\frac{z_{k,l}(\lambda')}{f_k}} \right) \times \sigma_0. \end{aligned} \tag{22}$$

$\square$