Anneau noethérien de dimension infinie

13 novembre 2014

L'exemple suivant est dû à Nagata.

Proposition 1. *Soit k un corps et $A = k[T_0, T_1, ...]$ l'anneau des polynômes à une infinité de variables sur le corps k. Soit $(m_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels tels que $(m_{n+1} - m_n)$ tend vers l'infini, on note P_n l'idéal premier engendré par les variables $(T_j)_{m_n \leq j < m_{n+1}}$ et S la partie multiplicative $A - \cup_{n\geq 0} P_n$. Alors $S^{-1}A$ est un anneau noethérien de dimension infinie.*

La première étape est de comprendre les idéaux maximaux de $S^{-1}A$. On sait que les idéaux propres de $S^{-1}A$ sont de la forme $S^{-1}I$ où I est un idéal de A contenu dans $\cup_{n\geq 0} P_n$.

Lemme 1. *Soit I un idéal de A contenu dans la réunion des P_n. Alors il existe un entier $n \geq 0$ tel que I soit contenu dans P_n.*

En effet, supposons que $I \neq (0)$ et soit $f \in I$ non nul. On note $P^{(1)}, ..., P^{(k)}$ les idéaux premiers de la forme P_n qui sont engendrés par des variables qui apparaissent dans l'expression de f. D'autre part, soit $g \in I$ non nul ; on a $f + g \in I \subset \cup_{n\geq 0} P_n$. Si l'on suppose que $g \notin \cup_{1\leq i\leq k} P^{(i)}$ alors il existe un terme de g qui n'est dans aucun des idéaux $P^{(i)}$; on a deux monômes de $f + g$ contenant des variables indépendantes qui sont contenus dans des idéaux P_n distincts. On en déduit que $f + g \notin \cup_{n\geq 0} P_n$; ce qui est une contradiction. Ce qui montre que $g \in \cup_{1\leq i\leq k} P^{(i)}$; donc $I \subset \cup_{1\leq i\leq k} P^{(i)}$. Le lemme d'évitement montre alors que I est contenu dans l'un des idéaux $P^{(i)}$ qui est de la forme P_n.

D'après le lemme, on en déduit que les idéaux maximaux de $S^{-1}A$ sont exactement les idéaux de la forme $S^{-1}P_n$.

Lemme 2. *Pour $n \geq 0$, l'anneau local $(S^{-1}A)_{S^{-1}P_n}$ est noethérien.*

Les polynômes non nuls ne faisant intervenir que des variables T_j indépendantes de $T_{m_n}, ..., T_{m_{n+1}-1}$ n'appartiennent pas à P_n qui correspond à l'idéal maximal de l'anneau local $(S^{-1}A)_{S^{-1}P_n}$; donc sont inversibles dans ce localisé. D'autre part, l'anneau $(S^{-1}A)_{S^{-1}P_n}$ est isomorphe à A_{P_n} qui est un anneau de polynômes en $T_{m_n}, ..., T_{m_{n+1}-1}$ à coefficients dans le corps des fractions $k(T_j)$ où j décrit les entiers positifs privés de $\{m_n, ..., m_{n+1} - 1\}$. C'est un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur un corps ; on en déduit d'après le théorème de Hilbert que l'anneau $(S^{-1}A)_{S^{-1}P_n}$ est noethérien.

On peut maintenant passer à la preuve du fait que l'anneau $S^{-1}A$ est noethérien. Soit $(S^{-1}I_j)_{j\geq 0}$ une suite croissante d'idéaux propres de $S^{-1}A$. On suppose sans perte de généralité que $S^{-1}I_0 \neq (0)$, soit $f \in S^{-1}I_0$ non nul. On a déjà vu que f n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux $S^{-1}P^{(1)}, ..., S^{-1}P^{(k)}$ de la forme $S^{-1}P_n$. Pour tout $j \geq 1$, l'idéal $S^{-1}I_j$ est contenu dans un idéal maximal de la forme $S^{-1}P_n$. On a $f \in S^{-1}I_0 \subset S^{-1}I_j \subset S^{-1}P_n$; on en déduit que f appartient à $S^{-1}P_n$, ce dernier est donc l'un des idéaux $S^{-1}P^{(i)}$. On a alors

$$f \in S^{-1}I_0 \subset ... \subset S^{-1}I_j \subset ... \subset \cup_{1\leq i\leq k} S^{-1}P^{(i)}$$

Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $S^{-1}A$. Si $\mathfrak{M}$ n'est pas l'un des idéaux $S^{-1}P^{(i)}$ alors $(S^{-1}I_j)_{\mathfrak{M}} = A_{\mathfrak{M}}$ pour tout $j \geq 0$; sinon il existe $i \in \{1, ..., k\}$ tel que $\mathfrak{M} = S^{-1}P^{(i)}$, d'après le lemme précédent $(S^{-1}A)_{\mathfrak{M}}$ est noethérien donc la suite $((S^{-1}I_j)_{\mathfrak{M}})_{j\geq 0}$ est stationnaire. On note n_i le rang à partir duquel $(S^{-1}I_j)_{\mathfrak{M}}$ est constant et on pose $N = \max_{1\leq i\leq k}(n_i)$. Donc pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $S^{-1}A$, la suite $((S^{-1}I_j)_{\mathfrak{M}})_{j\geq 0}$ est constante à partir du rang N. On en déduit que la suite $(S^{-1}I_j)_{j\geq 0}$ est constante à partir du rang N ; donc l'anneau $S^{-1}A$ est noethérien.

Pour finir, il ne reste plus qu'à prouver que $S^{-1}A$ est de dimension infinie. Or la chaine

$$S^{-1}(T_{m_n}) \subset S^{-1}(T_{m_n}, T_{m_n+1}) \subset ... \subset S^{-1}(T_{m_n}, ..., T_{m_{n+1}-1})$$

est de longueur $m_{n+1} - m_n$ qui tend vers l'infini. Comme la dimension est le supremum des longueurs des chaines d'idéaux premiers ; on en déduit le résultat.