Lemme fondamental d'Oka

Duhamel Nicolas

2 décembre 2014

L'objectif est de démontrer un lemme d'annulation pour les faisceaux cohérents sur un domaine cylindrique convexe. Le lemme de Cartan sur la décomposition des applications holomorphes à valeurs matricielles nous permettra de démontrer le lemme de fusion. On pourra alors en déduire l'existence de syzygies d'Oka et finalement le lemme fondamental d'Oka.

1 Lemme de Cartan

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. À partir de systèmes générateurs finis de $\mathcal{F}$ sur E' et E'', on veut construire un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur $E' \cup E''$.

On va supposer que E' et E'' sont des produits de segments réels et l'on dira que ce sont des cubes. On supposera de plus que E' et E'' sont des cubes adjacents, c'est à dire qu'ils peuvent s'écrire sous la forme $E' = F \times E'_n$ et $E'' = F \times E''_n$ où F est un cube dans $\mathbb{C}^{n-1}$, E'_n et E''_n sont des cubes de $\mathbb{C}$ et $e = E'_n \cap E''_n$ est un segment non vide.

Lemme 1.1 (Décomposition matricielle de Cartan)**.** *Il existe un voisinage $V_0 \subset GL_p(\mathbb{C})$ de l'identité I_p tel que pour toute application holomorphe $\hat{A} : U \to V_0$ sur un voisinage U de $F \times e$, il existe des applications holomorphes $A' : U' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : U'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où U' et U'' sont des voisinages de E' et E'' tel que $\hat{A} = A'(A'')^{-1}$ sur $U' \cap U''$.*

On admettra certaines parties techniques de la démonstration (notamment une convergence normale).

Démonstration. On définit l'exponentielle et le logarithme de matrices par les formules classiques. On choisit V_0 un voisinage de l'identité tel que la série définissant le logarithme soit normalement convergente sur V_0. On pose

$$M(P, Q) = \exp(-P)\exp(P + Q)\exp(-Q)$$

On va agrandir un peu les cubes pour avoir une petite marge de manœuvre.

On pose

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= F + [-\delta,\delta]^{2(n-1)}\\ \tilde{E}'_{n(1)} &= E'_n + [-\delta,\delta]^2\\ \tilde{E}''_{n(1)} &= E''_n + [-\delta,\delta]^2\end{aligned}$$

avec $\delta > 0$ assez petit pour que l'on ait

$$F \times e \subset \tilde{F} \times (\tilde{E}'_{n(1)} \cap \tilde{E}''_{n(1)}) \Subset U$$

On décompose le chemin $\gamma_1 = \partial(\tilde{E}'_{n(1)} \cap \tilde{E}''_{n(1)})$ en deux chemins γ'_1 de $\tilde{E}'_{n(1)}$ et γ''_1 de $\tilde{E}''_{n(1)}$.

On suppose construit $E'_{n(k)}$ (resp. $E''_{n(k)}$) et on définit $E'_{n(k+1)}$ (resp. $E''_{n(k+1)}$) en enlevant une épaisseur $\delta/2^{k+1}$; les chemins γ_k sont définit de la même manière que précédemment.

On pose $B_1(z', z_n) = \log A(z', z_n)$ pour $(z', z_n) \in \tilde{E}'_{n(1)} \cap \tilde{E}''_{n(1)}$. On a alors

$$\begin{aligned}B_1(z', z_n) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'_1} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma''_1} \frac{B_1(z',\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta\\ &= B'_1(z', z_n) + B''_1(z', z_n)\end{aligned}$$

Alors B'_1 (resp. B''_1) est holomorphe sur $\tilde{E}'_{(1)} = \tilde{F} \times \tilde{E}'_{n(1)}$ (resp. $\tilde{E}''_{(1)} = \tilde{F} \times \tilde{E}''_{n(1)}$).

On suppose construit des fonctions B'_k et B''_k holomorphes sur $\tilde{E}'_{(k)} = \tilde{F} \times \tilde{E}'_{n(k)}$ et $\tilde{E}''_{(k)} = \tilde{F} \times \tilde{E}''_{n(k)}$ respectivement telles que

$$B_k = B'_k + B''_k$$

sur l'intersection des domaines de définitions.

On pose alors

$$B_{k+1} = \log M(B'_k, B''_k)$$

Grâce à la décomposition de γ_{k+1} en γ'_{k+1} et γ''_{k+1}, on trouve des fonctions holomorphes B'_{k+1} et B''_{k+1} telles que

$$B_{k+1} = B'_{k+1} + B''_{k+1}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}A'(z', z_n) &= \lim \exp(B'_1(z', z_n))... \exp(B'_k(z', z_n))\\ A''(z', z_n) &= \lim \exp(-B''_1(z', z_n))... \exp(-B''_k(z', z_n))\end{aligned}$$

On admet la convergence normale de A' et A'' ; on en déduit que A' est holomorphe sur $\bigcap_{k\geq 1} \tilde{E}'_{(k)}$. Or on les $\tilde{E}'_{(k)}$ sont définis en partant d'une épaisseur δ et en enlevant successivement des épaisseurs $\delta/4$, $\delta/8$; donc à la limite il reste une épaisseur $\delta/2$. On en déduit que A' est holomorphe sur un voisinage de E' ; de même, A'' est holomorphe sur un voisinage de E''.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\exp(B_{k+1}) &= M(B'_k, B''_k) = \exp(-B'_k)\exp(B'_k + B''_k)\exp(-B''_k) \\
&= \exp(-B'_k)\exp(B_k)\exp(-B''_k) \\
&= \exp(-B'_k) ... \exp(-B'_1)\exp(B_1)\exp(-B''_1) ... \exp(-B''_k)
\end{aligned}$$

donc

$$A = \exp(B_1) = \exp(B'_1) ... \exp(B'_k)\exp(B_k)(\exp(-B''_1) ... \exp(-B''_k))^{-1}$$

d'où l'on en déduit à la limite que

$$A = A'(A'')^{-1}$$

□

Lemme 1.2 (Lemme de fusion)**.** *On suppose qu'il existe un nombre fini de sections $\sigma'_j \in \mathcal{F}(U')$ pour $1 \leq j \leq p'$ et $\sigma''_j \in \mathcal{F}(U'')$ pour $1 \leq j \leq p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur U' et U''. De plus, on suppose qu'il existe des fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur $U' \cap U''$ tel que*

$$\sigma'_j = \sum_{k=1}^{p''} a_{jk}\sigma''_k \qquad \sigma''_j = \sum_{k=1}^{p'} b_{jk}\sigma'_k$$

Alors il existe un voisinage $W \subset U' \cup U''$ de $E' \cup E''$ et des sections $\sigma_j \in \mathcal{F}(W)$ pour $1 \leq j \leq p = p' + p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur W.

Démonstration. On pose $\sigma' = (\sigma'_j)$, $\sigma'' = (\sigma''_j)$ et $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$. On a alors

$$\sigma' = A\sigma'' \qquad \sigma'' = B\sigma'$$

On va maintenant fusionner ces deux équations en une seule. Pour cela, on pose

$$\tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\sigma}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix}$$

De l'équation $\sigma'' = BA\sigma''$, on en déduit que

$$\tilde{A}\sigma'' = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sigma'' \\ \sigma'' - BA\sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\tilde{A}\tilde{\sigma}'' = \tilde{\sigma}'$.

On va aussi poser $P = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix}$. Calculons $Q\tilde{A}P^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} Q\tilde{A}P^{-1} &= \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{p'} & -A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ -B & I_{p''} \end{pmatrix} = I_p \end{aligned}$$

On cherche à étendre les applications holomorphes P et Q à un voisinage de $E' \cup E''$ tout en ne perturbant pas trop l'égalité précédente ; pour l'instant P et Q ne sont défini que sur $U' \cap U''$.

On approche les fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur un voisinage $W_0 \Subset U \cap U'$ de $E' \cap E''$ par des polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$ tel que

$$\hat{A}(z) = \tilde{Q}(z)\tilde{A}(z)\tilde{P}^{-1}(z) \in V_0$$

pour tout $z \in W_0$ où V_0 est le voisinage qui apparait dans la décomposition de Cartan et l'on note $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ les matrices obtenues en remplaçant les coefficients a_{jk}, b_{jk} par les polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$.

D'après la décomposition de Cartan, il existe des applications holomorphes $A' : W' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : W'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où $W' \subset U'$ et $W'' \subset U''$ sont des voisinages de E' et E'' telles que

$$\hat{A} = (A')^{-1}A''$$

sur $W' \cap W''$.

On a $\tilde{Q}\tilde{A}\tilde{P}^{-1} = (A')^{-1}A''$, donc $\tilde{A} = \tilde{Q}^{-1}(A')^{-1}A''\tilde{P}$. Comme $\tilde{A}\sigma'' = \sigma'$, on en déduit que

$$A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' = A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}'$$

sur $W' \cap W''$. Le premier terme de l'égalité étant défini sur W'' et le deuxième sur W', on peut définir $\sigma_j \in \mathcal{F}(W' \cup W'')$ par les formules suivantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{pmatrix} = \begin{cases} A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}' & \text{sur } W' \\ A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' & \text{sur } W'' \end{cases}$$

De plus, σ' engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \subset U'$ et $A'\tilde{Q}$ est inversible donc σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'. De même, σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'' ; on en déduit que σ engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \cup W''$. □

2 Syzygies d'Oka

On démontre l'existence de syzygies d'Oka de longueur arbitraire pour un faisceau cohérent au-dessus d'un voisinage d'un cube fermé.

Lemme 2.1 (Sysygy d'Oka). *Soit $E \Subset \mathbb{C}^n$ un cube fermé.*

1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent au-dessus d'un voisinage V de E, il existe un voisinage ouvert $E \subset U \subset V$ tel que $\mathcal{F}$ soit engendré par un nombre fini de sections sur U. On en déduit alors l'existence de $N \in \mathbb{N}$ et d'une suite exacte*
$$\mathcal{O}_U^N \to \mathcal{F}_{|U} \to 0$$
2. *Soit $\sigma_j \in \mathcal{F}(U)$ un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur U et soit $\sigma \in \mathcal{F}(U)$. Alors il existe un voisinage ouvert $E \subset U' \subset U$ et des fonctions holomorphes $a_j \in \mathcal{O}(U')$ telles que*
$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

Démonstration. Si dim $E = 0$, E est réduit à un point x.

D'après la cohérence de $\mathcal{F}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\sigma_{j,x} \in \mathcal{F}_x$ tel que le morphisme $\mathcal{O}_x^N \to \mathcal{F}_x$ soit surjectif, donc il existe un voisinage U de x tel que $\mathcal{O}_U^N \to \mathcal{F}_{|U}$ soit surjective. Par surjectivité de $\mathcal{O}_x^N \to \mathcal{F}_x$, il existe $a_{j,x} \in \mathcal{O}_x$ tel que $\sigma_x = \sum_{j=1}^N a_{j,x}\sigma_{j,x}$. Quitte à réduire U, on a alors $\sigma = \sum_{j=1}^N a_j \sigma_j$ sur U.

Supposons maintenant que $\nu = \dim E \geq 1$, et supposons le lemme soit vrai pour tous les cubes fermés de dimension $\leq \nu - 1$.

On écrit E sous la forme $E = F \times [0,T]$ où $T > 0$ et F est un cube de dimension $\leq \nu - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $t \in [0,T]$, il existe un voisinage ouvert U_t de $E_t = F \times t$ tel que $\mathcal{F}$ soit engendré par un nombre fini de sections sur U_t.

Par compacité de $[0,T]$, il existe un nombre fini d'ouvert U_t qui recouvre E, donc il existe
$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$$
tel que U_{t_j} recouvre E. De plus, pour tout $0 \leq j \leq L$ il existe un système générateur fini $(\sigma_{\alpha j})_\alpha$ de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_\alpha = F \times [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$.

On a $E_\alpha \cap E_{\alpha+1} = E_{t_\alpha}$ de dimension $\leq \nu - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fonctions holomorphes $a_{jk}, b_{jk} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_{\alpha+1})$ tel que, sur $U_\alpha \cap U_{\alpha+1}$, on a
$$\sigma_{\alpha,j} = \sum a_{jk}\sigma_{\alpha+1,j} \qquad \sigma_{\alpha+1,j} = \sum b_{jk}\sigma_{\alpha,j}$$

On va utiliser le lemme de fusion pour fusionner les systèmes générateurs de $E_1, ..., E_L$. On commence par l'appliquer à E_1 et E_2 ; on trouve alors un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_1 \cup E_2$. On l'applique ensuite à $E_1 \cup E_2$ et E_3, on trouve ainsi un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Par récurrence, on obtient alors un système générateur fini sur un voisinage de $E = E_1 \cup ... \cup E_L$.

Il nous faut construire des fonctions holomorphes a_j telles que
$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

sur un voisinage de E. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $t \in [0, T]$, il existe des fonctions holomorphes $a_{t,j}$ sur un voisinage $E_t \subset U'_t \subset U_t$ tel que

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

sur U'_t. Par le même argument de compacité que précédemment, il existe

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$$

tel que U_{t_j} recouvre E. De plus, il existe des fonctions holomorphes $a_{\alpha,j} \in \mathcal{U}_\alpha$ tel que

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_{j,\alpha} \sigma_j$$

sur un voisinage U_α de E_α.

On va modifier les fonctions holomorphes $(a_{j,\alpha})_\alpha$ pour pouvoir les recoller sur un voisinage de E, on veut de plus qu'après les avoir modifié on garde toujours la même égalité.

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\sigma_j)$ le faisceau des relations, c'est un sous-faisceau localement fini de $\mathcal{O}^N$; donc $\mathcal{R}$ est cohérent sur un voisinage de E. D'après la première partie, $\mathcal{R}$ est engendré par un nombre fini de sections (τ_h) sur un voisinage de E. De plus, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\sum_j a_{\alpha,j} \sigma_j = \sum_j a_{\beta,j} \sigma_j = \sigma$$

On en déduit alors que

$$\sum_j (a_{\alpha,j} - a_{\beta,j}) \sigma_j = 0$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta$. On pose alors $b_{\alpha,\beta,j} = a_{\alpha,j} - a_{\beta,j}$, on a $(b_{\alpha,\beta,j})_j \in \mathcal{R}(U_\alpha \cap U_\beta)$.

On applique l'hypothèse de récurrence sur $E_\alpha \cap E_\beta$, il existe des fonctions holomorphes $c_{\alpha,\beta,h} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ tel que

$$(b_{\alpha,\beta,j})_j = \sum_h c_{\alpha,\beta,h} \tau_h$$

On choisit un cylindre convexe Ω voisinage de E tel que U_α recouvre Ω. Par définition, Ω est un produit d'ouvert convexe de $\mathbb{C}$. D'après le théorème de représentation de Riemann, chacun de ces ouverts est biholomorphe à un disque ; donc Ω est biholomorphe à un polydisque. D'après le théorème de Dolbeault, on a $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$; on en déduit que $H^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega) = 0$.

On pose $c_{\beta,\alpha,h} = -c_{\alpha,\beta,h}$, alors on a $(c_{\alpha,\beta,h})_{\alpha,\beta} \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega)$. Par l'annulation de la cohomologie, il existe $d_{\alpha,h} \in Z^0(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega)$ tel que

$$c_{\alpha,\beta,h} = d_{\beta,h} - d_{\alpha,h}$$

On en déduit que

$$(a_{\alpha,j} - a_{\beta,j})_j = (b_{\alpha,\beta,j})_j = \sum_h c_{\alpha,\beta,h}\tau_h = \sum_h (d_{\beta,h} - d_{\alpha,h})\tau_h$$

En posant $\tau_h = (\tau_{hj})_j$, on en déduit que

$$a_{\alpha,j} + \sum_h d_{\alpha,h}\tau_{h,j} = a_{\beta,j} + \sum_h d_{\beta,h}\tau_{h,j}$$

Cette relation nous permet de recoller ces fonctions holomorphes en $a_j \in \mathcal{O}(\Omega)$. De plus, sur U_α, on a

$$\sum_j a_j\sigma_j = \sum_j a_{\alpha,j}\sigma_j + \sum_h d_{\alpha,h} \sum_j \tau_{hj}\sigma_j = \sigma$$

En effet, on a $\tau_h \in \mathcal{R}$ donc $\sum_j \tau_{hj}\sigma_j = 0$. Ce qui termine la preuve du lemme. □

Lemme 2.2 (Syzygies d'Oka)**.** *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent au-dessus d'un voisinage d'un cube fermé $E \Subset \mathbb{C}^n$. Alors pour tout $p \geq 1$, il existe un voisinage ouvert U de E, des entiers $N_1, ..., N_p \geq 0$ et une suite exacte*

$$0 \to \ker\phi_p \to \mathcal{O}_{|U}^{N_p} \to ... \to \mathcal{O}_{|U}^{N_1} \to \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

Ces suites exactes sont appelées syzygies d'Oka.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il existe un voisinage ouvert U_1 de E , un entier $N_1 \geq 0$ et une suite exacte

$$\mathcal{O}_{|U_1}^{N_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_{|U_1} \to 0$$

On peut la compléter pour donner la suite exacte

$$0 \to \ker\phi_1 \to \mathcal{O}_{|U_1}^{N_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_{|U_1} \to 0$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ étant cohérent, on en déduit que $ker\phi_1$ est un faisceau cohérent. En appliquant le lemme précédent, il existe un voisinage ouvert U_2 de E, un entier $N_2 \geq 0$ et une suite exacte

$$\mathcal{O}_{|U_2}^{N_2} \xrightarrow{\phi_2} \ker\phi_1 \to 0$$

Quitte à diminuer U_1 et U_2, on peut supposer que $U_1 = U_2 = U$ voisinage ouvert de E. D'autre part, on a $\mathrm{Im}\,\phi_2 = \ker\phi_1$; on en déduit alors une suite exacte

$$\mathcal{O}_{|U}^{N_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{O}_{|U}^{N_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

Que l'on complète pour donner la suite exacte

$$0 \to \ker\phi_2 \to \mathcal{O}_{|U}^{N_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{O}_{|U}^{N_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit le lemme. □

3 Lemme fondamental d'Oka

Dans la suite on aura besoin d'un théorème d'annulation de la cohomologie pour des degrés suffisamment grands.

Theorème 3.1. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\mathcal{F}$ un faisceau au-dessus de X. Alors pour tout $q \geq 2^n$, on a*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$$

Démonstration. On considère un pavage non régulier de X par des cubes fermés, c'est à dire, on recouvre X par des cubes fermés E_α qui n'ont pas de point commun en dehors des points du bord. On considère alors un recouvrement $\{U_\alpha\}$ par des cubes ouverts X tels que $E_\alpha \Subset U_\alpha \Subset X$ et on choisit les U_α suffisamment petits tel que si on prend au moins $2^n + 1$ ouvert parmi les U_α alors leur intersection est vide.

Si $q \geq 2^n$, alors on a $C^q(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}) = 0$; d'où $H^q(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}) = 0$. De plus, d'après le théorème de Dolbeault, on a $H^q(U_\alpha, \mathcal{F}) = 0$ pour tout α. On en déduit alors d'après le théorème de Leray que

$$H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}) = 0$$

□

On commence par démontrer le lemme fondamental d'Oka pour un faisceau cohérent défini sur un voisinage d'un cube fermé.

Lemme 3.2. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent au-dessus d'un voisinage d'un cube fermé $E \subset \mathbb{C}^n$. Alors, pour $q \geq 1$, on a*

$$H^q(int(E), \mathcal{F}) = 0$$

où $int(E)$ désigne l'intérieur de E.

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \to \ker \phi_1 \to \mathcal{O}^{N_1}_{|U_1} \to \mathcal{F}_{|U_1} \to 0$$

provenant des syzygies d'Oka. On la restreint sur $U = int(E)$ et on considère la suite exacte longue de cohomologie correspondante

$$H^q(U, \mathcal{O}^{N_1}) \to H^q(U, \mathcal{F}) \to H^{q+1}(U, \ker \phi_1) \to H^{q+1}(U, \mathcal{O}^{N_1})$$

D'après le théorème de Dolbeault, on a

$$H^q(U, \mathcal{O}^{N_1}) = H^{q+1}(U, \mathcal{O}^{N_1}) = 0$$

On en déduit que

$$H^q(U, \mathcal{F}) = H^{q+1}(U, \ker \phi_1)$$

On arrive ainsi par l'intermédiaire des syzygies d'Oka à augmenter le degré de la cohomologie. De plus, d'après le théorème précédent la cohomologie est nulle pour des degrés $\geq 2^{2n}$. Il ne nous reste plus qu'à utiliser des syzygies d'Oka de longueur plus grande pour conclure.

D'après l'existence de syzygies d'Oka de longueur 2, on a une suite exacte

$$0 \to \ker \phi_2 \to \mathcal{O}_{|U_2}^{N_2} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{O}_{|U_2}^{N_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_{|U_2} \to 0$$

On a donc Im $\phi_2 = \ker \phi_1$; en restreignant à U on a alors une suite exacte

$$0 \to \ker \phi_2 \to \mathcal{O}_{|U}^{N_2} \to \ker \phi_1 \to 0$$

Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que

$$H^{q+1}(U, \ker \phi_1) = H^{q+2}(U, \ker \phi_2)$$

En utilisant l'existence de syzygies d'Oka de longueur arbitraire et une récurrence immédiate, on en déduit que

$$H^q(U, \mathcal{F}) = H^{q+p}(U, \ker \phi_p)$$

Pour $p = 2^{2n} - q$, on en déduit d'après le théorème précédent l'annulation de la cohomologie. $\square$

Lemme 3.3 (Lemme fondamental d'Oka)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un cylindre convexe et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent au-dessus de Ω. Alors, pour $q \geq 1$, on a*

$$H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0$$

Remarque 1. *Dans le lemme fondamental d'Oka, on ne suppose plus que le faisceau est définit sur un voisinage de $\bar{\Omega}$. La démonstration du lemme fondamental d'Oka consiste à approcher Ω par l'intérieur par des cubes et à utiliser le lemme précédent d'annulation de la cohomologie.*

Démonstration. D'après le théorème de représentation de Riemann, Ω est biholomorphe à un cube ouvert. On supposera, sans perte de généralité, que Ω est un cube ouvert.

Soit $(\Omega_i)_{i \geq 0}$ une suite croissante de cubes ouverts tels que

$$\Omega_i \Subset \Omega_{i+1}, \qquad \Omega = \bigcup_{i \geq 0} \Omega_i$$

On sait d'après le lemme précédent que

$$H^q(\Omega_i, \mathcal{F}) = 0$$

On va chercher à approcher tout cocycle $f \in Z^q(\Omega, \mathcal{F})$ par des cobords $\delta g_i \in B^q(\Omega_i, \mathcal{F})$.

Soit $\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de Ω par des cubes, $\{U_\alpha \cap \Omega_i\}_\alpha$ est alors un recouvrement de Ω_i. D'après le théorème de Dolbeault, on a

$$H^q(U_\alpha, \mathcal{F}) = 0$$
$$H^q(U_\alpha \cap \Omega_i, \mathcal{F}) = 0$$

D'après le théorème de Leray, on en déduit que

$$\begin{aligned} H^q(\Omega,\mathcal{F}) &= H^q(\{U_\alpha\},\mathcal{F}), \\ H^q(\Omega_i,\mathcal{F}) &= H^q(\{U_\alpha\cap\Omega_i\},\mathcal{F}) = 0 \end{aligned}$$

Soit $f \in Z^q(\{U_\alpha\},\mathcal{F})$, on a $f_{|\Omega_i} \in Z^q(\{U_\alpha\cap\Omega_i\},\mathcal{F})$; d'après l'annulation de la cohomologie, il existe $g_i \in C^{q-1}(\{U_\alpha\cap\Omega_i\},\mathcal{F})$ tel que

$$f_{|\Omega_i} = \delta g_i$$

On se restreint au cas où $q \geq 2$:

On pose $\tilde{g}_1 = g_1$; supposons construit par récurrence $\tilde{g}_i \in C^{q-1}(\{U_\alpha \cap \Omega_i\},\mathcal{F})$ tel que

$$\begin{aligned} f_{|\Omega_i} &= \delta\tilde{g}_i \\ \tilde{g}_{i|\Omega_{i-1}} &= \tilde{g}_{i-1} \end{aligned}$$

On cherche à construire $\tilde{g}_{i+1}$ qui coïncide avec $\tilde{g}_i$ sur Ω_i. On a

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{g}_i - g_{i+1}|_{\Omega_i}) &= \delta\tilde{g}_i - \delta g_{i+1}|_{\Omega_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $h_{i+1} \in C^{q-2}(\{U_\alpha\cap\Omega_i\},\mathcal{F})$ tel que

$$\tilde{g}_i - g_{i+1}|_{\Omega_i} = \delta h_{i+1}$$

On étend $h_{i+1} \in C^{q-2}(\{U_\alpha\cap\Omega_i\},\mathcal{F})$ sur Ω, en posant

$$(\tilde{h}_{i+1})_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{q-1}} = 0 \quad si \quad U_{\alpha_1}\cap\ldots\cap U_{\alpha_{q-1}} \not\subset \Omega_i$$

On a alors $\tilde{h}_{i+1} \in C^{q-2}(\{U_\alpha\},\mathcal{F})$. De plus, on pose

$$\tilde{g}_{i+1} = g_{i+1} + \delta\tilde{h}_{i+1}|_{\Omega_{i+1}}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \delta\tilde{g}_{i+1} &= f_{|\Omega_{i+1}} \\ \tilde{g}_{i+1}|_{\Omega_i} &= \tilde{g}_i \end{aligned}$$

On définit alors $\tilde{g} \in C^{q-1}(\{U_\alpha\},\mathcal{F})$ par recollement des $\tilde{g}_i$. On en déduit que

$$\delta\tilde{g}_{|\Omega_i} = \delta\tilde{g}_i = f_{|\Omega_i}$$

On en conclut que $\delta\tilde{g} = f$. □