Lemme fondamental d'Oka

Duhamel Nicolas

29 novembre 2014

L'objectif est de démontrer un lemme d'annulation pour les faisceaux cohérents sur un domaine cylindrique convexe. On admettra le lemme de Cartan sur la décomposition des applications holomorphe à valeurs matricielles, que l'on utilisera pour démontrer le lemme de fusion. Cela nous permettra d'en déduire l'existence de syzygies d'Oka et finalement le lemme fondamental d'Oka.

1 Lemme de fusion

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. A partir de systèmes générateurs finis de $\mathcal{F}$ sur E' et E'', on veut construire un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur $E' \cup E''$.

On va supposer que E' et E'' sont des produits de segments réels et on dira que ce sont des cubes. On supposera de plus que E' et E'' sont des cubes adjacents, c'est à dire qu'ils peuvent s'écrire sous la forme $E' = F \times E'_n$ et $E'' = F \times E''_n$ où F est un cube dans $\mathbb{C}^{n-1}$, E'_n et E''_n sont des cubes de $\mathbb{C}$ et $e = E'_n \cap E''_n$ est un segment non vide.

Lemme 1.1 (Décomposition matricielle de Cartan)**.** *Il existe un voisinage $V_0 \subset GL_p(\mathbb{C})$ de l'identité I_p tel que pour toute application holomorphe $\hat{A} : U \to V_0$ sur un voisinage U de $F \times e$, il existe des applications holomorphes $A' : U' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : U'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où U' et U'' sont des voisinages de E' et E'' tel que $\hat{A} = (A')^{-1}A''$ sur $U' \cap U''$.*

Lemme 1.2 (Lemme de fusion)**.** *On suppose qu'il existe un nombre fini de sections $\sigma'_j \in \mathcal{F}(U')$ pour $1 \leq j \leq p'$ et $\sigma''_j \in \mathcal{F}(U'')$ pour $1 \leq j \leq p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur U' et U''. De plus, on suppose qu'il existe des fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur $U' \cap U''$ tel que*

$$\sigma'_j = \sum_{k=1}^{p''} a_{jk}\sigma''_k \qquad \sigma''_j = \sum_{k=1}^{p'} b_{jk}\sigma'_k$$

Alors il existe un voisinage $W \subset U' \cup U''$ de $E' \cup E''$ et des sections $\sigma_j \in \mathcal{F}(W)$ pour $1 \leq j \leq p = p' + p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur W.

Démonstration. On pose $\sigma' = (\sigma'_j)$, $\sigma'' = (\sigma''_j)$ et $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$. On a alors

$$\sigma' = A\sigma'' \qquad \sigma'' = B\sigma'$$

On va maintenant fusionner ces deux équations en une seule. Pour cela, on pose

$$\tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\sigma}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix}$$

De l'équation $\sigma'' = BA\sigma''$, on en déduit que

$$\tilde{A}\sigma'' = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sigma'' \\ \sigma'' - BA\sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\tilde{A}\tilde{\sigma}'' = \tilde{\sigma}'$.

On va aussi poser $P = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix}$. Calculons $Q\tilde{A}P^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} Q\tilde{A}P^{-1} &= \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & -A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ -B & I_{p''} \end{pmatrix} = I_p \end{aligned}$$

On cherche à étendre les applications holomorphe P et Q à un voisinage de $E' \cup E''$ tout en ne perturbant pas trop l'égalité précédente ; pour l'instant P et Q ne sont définit que sur $U' \cap U''$.

On approche les fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur un voisinage $W_0 \subset\subset U \cap U'$ de $E' \cap E''$ par des polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$ tel que

$$\hat{A}(z) = \tilde{Q}(z)\tilde{A}(z)\tilde{P}^{-1}(z) \in V_0$$

pour tout $z \in W_0$ où V_0 est le voisinage qui apparait dans la décomposition de Cartan et l'on note $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ les matrices obtenu en remplaçant les coefficients a_{jk}, b_{jk} par les polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$.

D'après la décomposition de Cartan, il existe des applications holomorphes $A' : W' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : W'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où $W' \subset U'$ et $W'' \subset U''$ sont des voisinages de E' et E'' telles que

$$\hat{A} = (A')^{-1}A''$$

sur $W' \cap W''$.

On a $\tilde{Q}\tilde{A}\tilde{P}^{-1} = (A')^{-1}A''$, donc $\tilde{A} = \tilde{Q}^{-1}(A')^{-1}A''\tilde{P}$. Comme $\tilde{A}\sigma'' = \sigma'$, on en déduit que

$$A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' = A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}'$$

sur $W' \cap W''$. Le premier terme de l'égalité étant définit sur W'' et le deuxième sur W', on peut définir $\sigma_j \in \mathcal{F}(W' \cup W'')$ par les formules suivantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{pmatrix} = \begin{cases} A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}' & \text{sur } W' \\ A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' & \text{sur } W'' \end{cases}$$

De plus, σ' engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \subset U'$ et $A'\tilde{Q}$ est inversible donc σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'. De même, σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'' ; on en déduit que σ engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \cup W''$. □

Lemme 1.3 (Sysygy d'Oka)**.** *Soit $E \subset\subset \mathbb{C}^n$ un cube fermé.*

1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un voisinage V de E, il existe un voisinage ouvert $E \subset U \subset V$ tel que $\mathcal{F}$ soit engendré par un nombre fini de section sur U. On en déduit alors l'existence de $N \in \mathbb{N}$ et d'une suite exacte*

$$\mathcal{O}_U^N \to \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

2. *Soit $\sigma_j \in \mathcal{F}(U)$ un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur U et soit $\sigma \in \mathcal{F}(U)$. Alors il existe un voisinage ouvert $E \subset U' \subset U$ et des fonctions holomorphes $a_j \in \mathcal{O}(U')$ tel que*

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

Démonstration. Si dim $E = 0$, E est réduit à un point x.

D'après la cohérence de $\mathcal{F}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\sigma_{j,x} \in \mathcal{F}_x$ tel que le morphisme $\mathcal{O}_x^N \to \mathcal{F}_x$ soit surjectif, donc il existe un voisinage U de x tel que $\mathcal{O}_U^N \to \mathcal{F}_{|U}$ soit surjectif. Par surjectivité de $\mathcal{O}_x^N \to \mathcal{F}_x$, il existe $a_{j,x} \in \mathcal{O}_x$ tel que $\sigma_x = \sum_{j=1}^N a_{j,x}\sigma_{j,x}$. Quitte à réduire U, on a alors $\sigma = \sum_{j=1}^N a_j\sigma_j$ sur U.

Supposons maintenant que $\nu =$ dim $E \geq 1$, et supposons le lemme soit vrai pour tout les cubes fermés de dimension $\leq \nu - 1$.

On écrit E sous la forme $E = F \times [0, T]$ où $T > 0$ et F est un cube de dimension $\leq \nu - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $t \in [0, T]$, il existe un voisinage ouvert U_t de $E_t = F \times t$ tel que $\mathcal{F}$ soit engendré par un nombre fini de sections sur U_t.

Par compacité de $[0, T]$, il existe un nombre fini d'ouvert U_t qui recouvre E, donc il existe

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$$

tel que U_{t_j} recouvre E. De plus, pour tout $0 \leq j \leq L$ il existe un système générateur fini $(\sigma_{\alpha j})_\alpha$ de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_\alpha = F \times [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$.

On a $E_\alpha \cap E_{\alpha+1} = E_{t_\alpha}$ de dimension $\leq \nu - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fonctions holomorphes $a_{jk}, b_{jk} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_{\alpha+1})$ tel que, sur $U_\alpha \cap U_{\alpha+1}$, on a

$$\sigma_{\alpha,j} = \sum a_{jk}\sigma_{\alpha+1,j} \qquad \sigma_{\alpha+1,j} = \sum b_{jk}\sigma_{\alpha,j}$$

On va utiliser le lemme de fusion pour fusionner les systèmes générateurs de $E_1, ..., E_L$. On commence par l'appliquer à E_1 et E_2 ; on trouve alors un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_1 \cup E_2$. On l'applique ensuite à $E_1 \cup E_2$ et E_3, on trouve ainsi un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur un voisinage de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Par récurrence, on obtient alors un système générateur fini sur un voisinage de $E = E_1 \cup ... \cup E_L$.

Il nous faut construire des fonctions holomorphes a_j tel que

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

sur un voisinage de E. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $t \in [0, T]$, il existe des fonctions holomorphe $a_{t,j}$ sur un voisinage $E_t \subset U'_t \subset U_t$ tel que

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_j \sigma_j$$

sur U'_t. Par le même argument de compacité que précédemment, il existe

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_L = T$$

tel que U_{t_j} recouvre E. De plus, il existe des fonctions holomorphes $a_{\alpha,j} \in \mathcal{U}_\alpha$ tel que

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} a_{j,\alpha} \sigma_j$$

sur un voisinage U_α de E_α.

On va modifier les fonctions holomorphes $(a_{j,\alpha})_\alpha$ pour pouvoir les recoller sur un voisinage de E, on veut de plus qu'après les avoir modifier on garde toujours la même égalité.

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\sigma_j)$ le faisceau des relations, c'est un sous-faisceau localement fini de $\mathcal{O}^N$; donc $\mathcal{R}$ est cohérent sur un voisinage de E. D'après la première partie, $\mathcal{R}$ est engendré par un nombre fini de sections (τ_h) sur un voisinage de E. De plus, sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\sum_j a_{\alpha,j} \sigma_j = \sum_j a_{\beta,j} \sigma_j = \sigma$$

On en déduit alors que

$$\sum_j (a_{\alpha,j} - a_{\beta,j}) \sigma_j = 0$$

sur $U_\alpha \cap U_\beta$. On pose alors $b_{\alpha,\beta,j} = a_{\alpha,j} - a_{\beta,j}$, on a $(b_{\alpha,\beta,j})_j \in \mathcal{R}(U_\alpha \cap U_\beta)$.

On applique l'hypothèse de récurrence sur $E_\alpha \cap E_\beta$, il existe des fonctions holomorphes $c_{\alpha,\beta,h} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$ tel que

$$(b_{\alpha,\beta,j})_j = \sum_h c_{\alpha,\beta,h} \tau_h$$

On choisit un cylindre convexe Ω voisinage de E tel que U_α recouvre Ω. Par définition, Ω est un produit d'ouvert convexe de $\mathbb{C}$. D'après le théorème de représentation de Riemann, chacun de ces ouverts est biholomorphe à un disque ; donc Ω est biholomorphe à un polydisque. D'après le théorème de Dolbeault, on a $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$; on en déduit que $H^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega) = 0$.

On pose $c_{\beta,\alpha,h} = -c_{\alpha,\beta,h}$, alors on a $(c_{\alpha,\beta,h})_{\alpha,\beta} \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega)$. Par l'annulation de la cohomologie, il existe $d_{\alpha,h} \in Z^0(\{U_\alpha\}, \mathcal{O}_\Omega)$ tel que

$$c_{\alpha,\beta,h} = d_{\beta,h} - d_{\alpha,h}$$

On en déduit que

$$(a_{\alpha,j} - a_{\beta,j})_j = (b_{\alpha,\beta,j})_j = \sum_h c_{\alpha,\beta,h}\tau_h = \sum_h (d_{\beta,h} - d_{\alpha,h})\tau_h$$

En posant $\tau_h = (\tau_{hj})_j$, on en déduit que

$$a_{\alpha,j} + \sum_h d_{\alpha,h}\tau_{h,j} = a_{\beta,j} + \sum_h d_{\beta,h}\tau_{h,j}$$

Cette relation nous permet de recoller ces fonctions holomorphes en $a_j \in \mathcal{O}(\Omega)$. De plus, sur U_α, on a

$$\sum_j a_j\sigma_j = \sum_j a_{\alpha,j}\sigma_j + \sum_h d_{\alpha,h} \sum_j \tau_{hj}\sigma_j = \sigma$$

En effet, on a $\tau_h \in \mathcal{R}$ donc $\sum_j \tau_{hj}\sigma_j = 0$. Ce qui termine la preuve du lemme. $\square$