Lemme fondamental d'Oka

Duhamel Nicolas

23 novembre 2014

L'objectif est de démontrer un lemme d'annulation pour les faisceaux cohérents sur un domaine cylindrique convexe. On admettra le lemme de Cartan sur la décomposition des applications holomorphe à valeurs matricielles, que l'on utilisera pour démontrer le lemme de fusion. Cela nous permettra d'en déduire l'existence de syzygies d'Oka et finalement le lemme fondamental d'Oka.

1 Lemme de fusion

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. A partir de systèmes générateurs finis de $\mathcal{F}$ sur E' et E'', on veut construire un système générateur fini de $\mathcal{F}$ sur $E' \cup E''$.

On va supposer que E' et E'' sont des produits de segments réels et on dira que ce sont des cubes. On supposera de plus que E' et E'' sont des cubes adjacents, c'est à dire qu'ils peuvent s'écrire sous la forme $E' = F \times E'_n$ et $E'' = F \times E''_n$ où F est un cube dans $\mathbb{C}^{n-1}$, E'_n et E''_n sont des cubes de $\mathbb{C}$ et $e = E'_n \cap E''_n$ est un segment non vide.

Lemme 1.1 (Décomposition matricielle de Cartan)**.** *Il existe un voisinage $V_0 \subset GL_p(\mathbb{C})$ de l'identité I_p tel que pour toute application holomorphe $\hat{A} : U \to V_0$ sur un voisinage U de $F \times e$, il existe des applications holomorphes $A' : U' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : U'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où U' et U'' sont des voisinages de E' et E'' tel que $\hat{A} = (A')^{-1}A''$ sur $U' \cap U''$.*

Lemme 1.2 (Lemme de fusion)**.** *On suppose qu'il existe un nombre fini de sections $\sigma'_j \in \mathcal{F}(U')$ pour $1 \leq j \leq p'$ et $\sigma''_j \in \mathcal{F}(U'')$ pour $1 \leq j \leq p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur U' et U''. De plus, on suppose qu'il existe des fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur $U' \cap U''$ tel que*

$$\sigma'_j = \sum_{k=1}^{p''} a_{jk}\sigma''_k \qquad \sigma''_j = \sum_{k=1}^{p'} b_{jk}\sigma'_k$$

Alors il existe un voisinage $W \subset U' \cup U''$ de $E' \cup E''$ et des sections $\sigma_j \in \mathcal{F}(W)$ pour $1 \leq j \leq p = p' + p''$ qui engendre $\mathcal{F}$ sur W.

Démonstration. On pose $\sigma' = (\sigma'_j)$, $\sigma'' = (\sigma''_j)$ et $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$. On a alors

$$\sigma' = A\sigma'' \qquad \sigma'' = B\sigma'$$

On va maintenant fusionner ces deux équations en une seule. Pour cela, on pose

$$\tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\sigma}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix}$$

De l'équation $\sigma'' = BA\sigma''$, on en déduit que

$$\tilde{A}\sigma'' = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p''} \\ \sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\sigma'' \\ \sigma'' - BA\sigma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \mathbf{0}_{p'} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\tilde{A}\tilde{\sigma}'' = \tilde{\sigma}'$.

On va aussi poser $P = \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix}$. Calculons $Q\tilde{A}P^{-1}$, on a

$$Q\tilde{A}P^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & A \\ -B & I_{p''} - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & -A \\ \mathbf{0} & I_{p''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ B & I_{p''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p'} & \mathbf{0} \\ -B & I_{p''} \end{pmatrix} = I_p$$

On cherche à étendre les applications holomorphe P et Q à un voisinage de $E' \cup E''$ tout en ne perturbant pas trop l'égalité précédente ; pour l'instant P et Q ne sont définit que sur $U' \cap U''$.

On approche les fonctions holomorphes a_{jk}, b_{jk} sur un voisinage $W_0 \subset\subset U \cap U'$ de $E' \cap E''$ par des polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$ tel que

$$\hat{A}(z) = \tilde{Q}(z)\tilde{A}(z)\tilde{P}^{-1}(z) \in V_0$$

pour tout $z \in W_0$ où V_0 est le voisinage qui apparait dans la décomposition de Cartan et l'on note $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ les matrices obtenu en remplaçant les coefficients a_{jk}, b_{jk} par les polynômes $\tilde{a}_{jk}$, $\tilde{b}_{jk}$.

D'après la décomposition de Cartan, il existe des applications holomorphes $A' : W' \to GL_p(\mathbb{C})$ et $A'' : W'' \to GL_p(\mathbb{C})$ où $W' \subset U'$ et $W'' \subset U''$ sont des voisinages de E' et E'' telles que

$$\hat{A} = (A')^{-1}A''$$

sur $W' \cap W''$.

On a $\tilde{Q}\tilde{A}\tilde{P}^{-1} = (A')^{-1}A''$, donc $\tilde{A} = \tilde{Q}^{-1}(A')^{-1}A''\tilde{P}$. Comme $\tilde{A}\sigma'' = \sigma'$, on en déduit que

$$A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' = A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}'$$

sur $W' \cap W''$. Le premier terme de l'égalité étant définit sur W'' et le deuxième sur W', on peut définir $\sigma_j \in \mathcal{F}(W' \cup W'')$ par les formules suivantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{pmatrix} = \begin{cases} A'\tilde{Q}\tilde{\sigma}' & \text{sur } W' \\ A''\tilde{P}\tilde{\sigma}'' & \text{sur } W'' \end{cases}$$

De plus, σ' engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \subset U'$ et $A'\tilde{Q}$ est inversible donc σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'. De même, σ engendre $\mathcal{F}$ sur W'' ; on en déduit que σ engendre $\mathcal{F}$ sur $W' \cup W''$. $\square$