De la Teoría de Grafos al Teorema de Pick

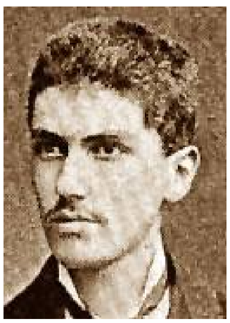
1st Miguel Ángel Castillo Espitia
MACC
Universidad del Rosario
Bogotá D. C., Colombia

2nd Sergio Nicolás Duque Báez
MACC
Universidad del Rosario
Bogotá D. C., Colombia

***Abstract*—Our project seeks to illustrate, through a program in language textit python, the area of a weighted graphic originated by the user. Through an algorithm that manages to convert the coordinates given by the plane graph into lattices ($drawing$), in order to execute the Pick Theorem.**

***Index Terms*—graph, drawing, Pick, Area, edges, vertex**

I. Introducción



En 1899 el matemático Georg Alexander Pick descubrió un fascinante resultado que relaciona, mediante una fórmula, el área de un polígono simple situado en $\mathbb{R}^2$ cuyos vétices son parejas ordenadas $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, con el número de vértices reticulares en la frontera y número de vértices reticulares en el interior del polígono, esta famosa fórmula es:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

En la imagen (1) podemos observar un ejemplo del Teorema de Pick.

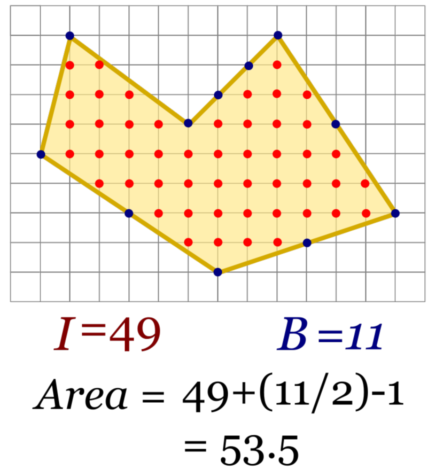


Imagen (1) obtenida de:
es.wikipedia.org/wiki/TeoremadePick/media/File:TeoremadePick.svg

Al iniciar el curso de Teoría de Grafos uno de los objetivos es representar de manera formal y matemáticamente redes interconectadas en cualquier contexto de la vida cotidiana. Además de lo anterior, cabe resaltar que hacer todo tipo de análisis en este campo de la Matemática Pura implica el uso de una serie de algortimos que abren las puertas a la verdadera y optimizada aplicación de los grafos. Gracias a los conceptos vistos en clase, tales como *grafos planos* y su *dibujo*, y teniendo en consideración el teorema mencionado anteriormente, planteamos una aplicación tangible, relacionando ambos factores.

II. Resumen

Nuestro proyecto busca ilustrar, mediante un programa en lenguaje *python*, el área de un grafo ponderado originado por el usuario. A través de un algoritmo que logra convertir las coordenadas dadas por el grafo plano en reticulares ($dibujo$), para así poder ejecutar el Teorema de Pick.

III. Funcionalidad

A. *Input e inicialización*

Al ejecutar el programa principal, se le pedirá al usuario describir a su gusto el grafo G que desee, se procede a indicar el orden $n \neq 0$ del grafo, de tal manera se tomará por conveniencia $V(G) = \{1, 2, ..., n\}$, se le pedirá al usuario ingresar las aristas con la ayuda de la notación: $xy \in E(G) : x, y \in V(G)$, con la condición que la i-ésima arista ingresada tiene como punto final el punto inicial de la i+1-ésima arista ingresada, cada una de estas aristas tendrá un peso que hará referencia a la distancia entre sus vértices, de tal manera que con estos datos es suficiente mostrar en pantalla un grafo isomorfo al que el usuario tiene en mente.

B. Procesamiento de datos

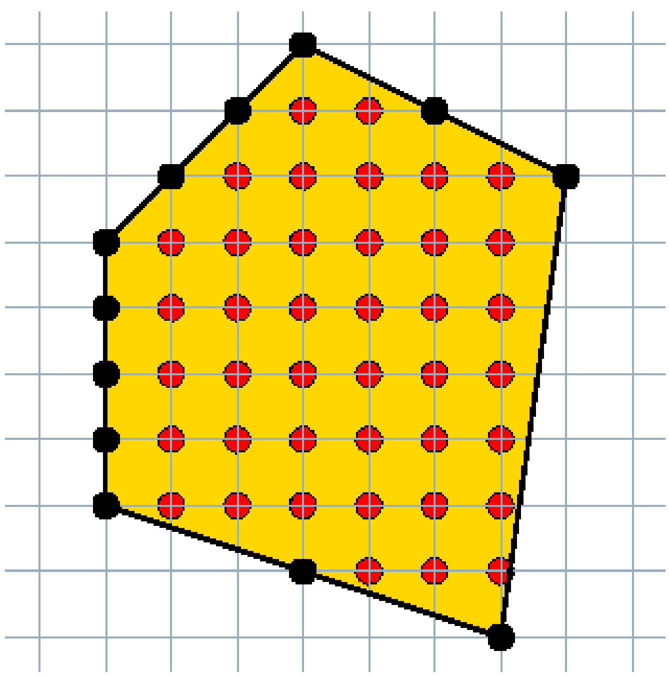
A partir de la creación del grafo se sigue con la creación de su dibujo f que posee como principales características:

- $f(1) = (0, 0)$
- $\forall x \in V(G), f(x) \in \mathbb{Z}^2$

esto para poder aplicar el Teorema de Pick de forma correcta; se crea una cuadrícula reticular para empezar a ver la representación gráfica de f, las imágenes de los $v \in V(G)$ tales que $v \neq 1$ se determinarán a partir de lo vértices que ya tienen imagen definida con la ayuda de la trigonometría y varias propiedades de los polígonos regulares. Una pregunta que surge de inmediato es: ¿Cómo tendremos la certeza que para todo $x \in V(G), f(x) \in \mathbb{Z}^2$? Es evidente ver que en muy pocos casos la distribución de los pesos de las aristas harán que todos los vértices tengan una imagen en $\mathbb{Z}^2$, para esto haremos uso de las aproximaciones a los valores enteros más cercanos para determinar las correspondientes imágenes, pero surge otra pregunta: ¿Así el área será exacta? La respuesta es claramente **¡NO!**, el área calculada es una aproximación del área exacta.

C. Output

Al terminar de procesar los datos, ya traducidos en f, procedemos a relacionar cada componente de la curva poligonal con una función lineal con domino $[a, b]$, para así poder tener certeza de la cantidad de todos los vertices reticulares en la frontera B, para contar los vértices interiores reticulares I nos apoyaremos en la rectas paralelas al eje y.



IV. CONCLUSIONES

Con respecto a la parte del software de este proyecto, pudimos darnos cuenta de la complejidad de la graficación de los grafos y cómo su uso en la geometría nos ayuda a modelar muchos problemas de la vida cotidiana.

También nos damos cuenta que el Teorema de Pick es una herramienta fácil de conectar con la Teoría de Grafos, y además que esta conexión creada, además de ser innovadora es muy llamativa e interesante.

Al finalizar con este proyecto, pudimos corroborar el gran uso y aplicación eficiente que nos brindan la Teoría de Grafos

REFERENCES

[1] D. West “Introduction to Graph Theory,” New York, 2007

[2] J. Clerk Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, 3rd ed., vol. 2. Oxford: Clarendon, 1892, pp.68–73.

[3] J. Ramirez, “El Teorema de Pick y redes y puntos” Barcelona, 2010.

[4] WIKIPEDIA, “Teorema de Pick” Retrieved from: https://es.wikipedia.org/wiki/TeoremadePick.

[5] ACADEMIC, “Grafos planos” Retrieved from: https://esacademic.com/dic.nsf/eswiki/539580.