

Simulación del proceso de Markov asociado al sistema SKT conservativo de difusión cruzada.

Integrantes: Benjamín Bórquez y Vicente Poblete

22/12/2022

1 Contexto

Buscamos modelar la interacción entre dos especies animales que conviven en un determinado ecosistema espacio-temporal. Para esto consideramos funciones u y v que representan, para una variable espacial (\mathbb{R}^n) y una temporal (\mathbb{R}_+), la densidad de población de cada especie en ese lugar y tiempo.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta(d_1 u + a_{11} u^2 + a_{12} uv) = u(r_1 - s_{11} u - s_{12} v) \\ \partial_t v - \Delta(d_2 v + a_{21} uv + a_{22} v^2) = v(r_2 - s_{21} u - s_{22} v) \end{cases}$$

Este modelo fue propuesto por Shigesada, Kawasaki y Teramoto (SKT), con el fin de describir especies en competencia con difusión y repulsión local.

Los coeficientes d_i, r_i, a_{ij} y s_{ij} son reales no negativos y representan difusión natural, reproducción, difusión cruzada y competencia respectivamente.

Entendemos por sistema SKT conservativo aquel que no considera una variación en la cantidad de individuos de ninguna de las dos especies en el tiempo, es decir, cuando los coeficientes r_i y s_{ij} son nulos. Además, asumimos que los coeficientes de difusión cuadrática a_{ii} son también 0. Así, queda el sistema $(SKT)_C$ de la forma:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta(d_1 u + a_{12} uv) = 0 \\ \partial_t v - \Delta(d_2 v + a_{21} uv) = 0 \end{cases}$$

En [1], se propone un proceso de Markov continuo no homogéneo para modelar el problema cuando el espacio de sitios es un toro discretizado en M sectores. Si e_i es el vector canónico en la coordenada i -ésima del toro y θ es una variable aleatoria uniforme en $\{-1, 1\}$, entonces el proceso dado por las tasas:

$$\begin{cases} u_i \rightarrow u_i + (e_{i+\theta} - e_i) & \text{a tasa } 2u_i(d_1 + a_{12}v_i) \\ v_i \rightarrow v_i + (e_{i+\theta} - e_i) & \text{a tasa } 2v_i(d_2 + a_{21}u_i) \end{cases}$$

y se prueba que si existen N individuos y cuando $\frac{N}{M^2} \rightarrow \infty$, el proceso converge débilmente a una solución débil de $(SKT)_C$.

2 Metodología

Se propone una implementación del proceso de Markov con el objetivo de simular poblaciones sujetas a distintos parámetros de difusión d y difusión cruzada a . Esto implica una implementación basada en los vecinos de los estados actuales para reducir la cantidad de tasas calculadas. Además, usando esta implementación, se logra, a través de la función inversa generalizada, modelar los saltos de individuos a través del toro.

Esto nos permite jugar con los parámetros d, a, u_0 y v_0 para proponer distintos escenarios y comparar la conducta esperada de las especies con los resultados del proceso Markoviano.

3 Principales Resultados

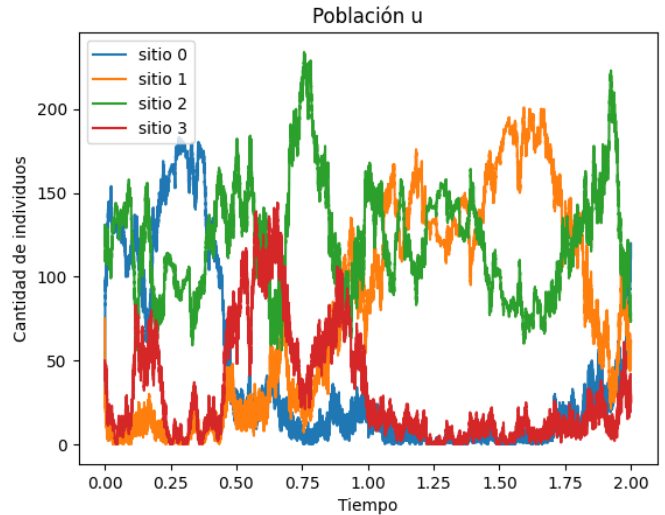


Fig. 1: Repulsión de u en los sitios 1 y 2

4 Referencias

- [1] Felipe Muñoz-Hernández, Ayman Moussa and Vincent Bansaye. Stability of a cross-diffusion system and approximation by repulsive random walks: a duality approach.