

Simulación del Fenómeno de cutoff en Cadenas de Markov

Martín Berrios

Diego Céspedes

Jueves 22 de Diciembre, 2022

1. Introducción

Consideremos una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ finita con matriz de transición P y distribución inicial μ . Es conocido que si P es irreducible, aperiódica y con distribución invariante π , entonces $\|P_\mu^n - \pi\|_{TV} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Es importante tener una noción de que tan rápido ocurre esta convergencia y a partir de que punto esta distancia está dentro de una tolerancia pequeña. Por ejemplo, un conocimiento preciso de la convergencia al equilibrio, nos permite estimar cuantas iteraciones son necesarias para la implementación de un método MCMC.

En algunos casos, la cantidad $\|P_\mu^n - \pi\|_{TV}$ se mantiene cercana a 1 por un tiempo, para luego converger rápidamente a 0. A este fenómeno se le conoce como *cutoff* y es el foco de este proyecto.

Estudiaremos dos modelos de cadenas de Markov finita en los que se puede observar el fenómeno de cutoff: la urna de Erhenfest y el Biased Random Walk (BRD).

2. Urna de Ehrenfest

La urna de Ehrenfest es un modelo de difusión, en él se consideran d pelotas y dos urnas, al comienzo todas las pelotas están en una urna, luego en cada paso, se elige una pelota, y esta pelota, puede quedarse donde está, o pasar a otra urna, se puede notar que el estado de la cadena está completamente determinada por la cantidad de pelotas en una urna, entonces el conjunto de estados es $\{0, \dots, n\}$, con probabilidades de transición $P(i, i-1) = \frac{i}{d+1}$, $P(i, i) = \frac{1}{d+1}$, $P(i, i+1) = \frac{d-i}{d+1}$. Lo que se demostró, es que si la distribución inicial de la cadena esta concentrada en 0, se observa cutoff, y si esta concentrada en $\frac{n}{2}$, no se observa el fenómeno.

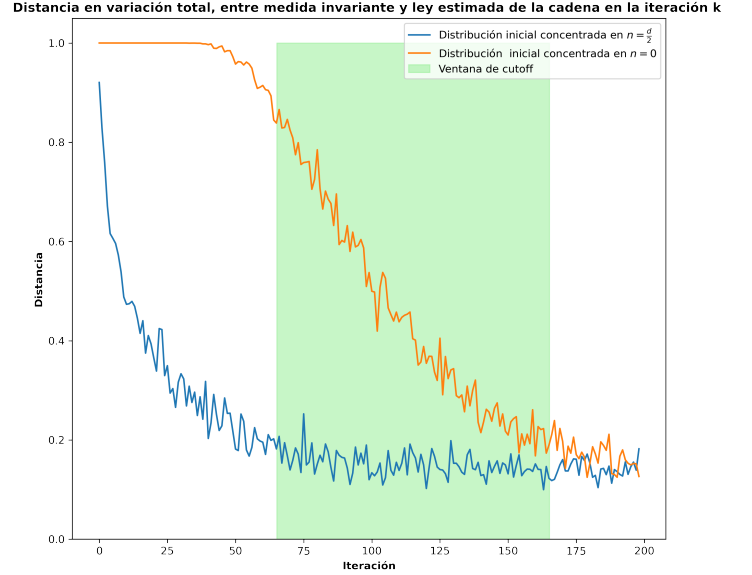


Figura 1: Simulación de la urna de Ehrenfest para 100 pelotas.

3. Biased Random Walk

La Biased Random Walk es un paseo en $\{0, \dots, n\}$ con probabilidades de transición $P_n(i, i+1) = 1/3 - \beta$, $P_n(i, i) = 1/3$ y $P_n(i, i-1) = 1/3 + \beta$. Aquí $\beta \in (0, 1/3)$ representa el *bias* (sesgo) que la cadena tiene hacia la izquierda. La presencia de este sesgo gatilla la aparición de un fenómeno de cutoff. Estudiamos en que momento ocurre este cutoff y de que forma es sensible a la elección del sesgo.

Referencias

- [1] P Diaconis. «The cutoff phenomenon in finite Markov chains.» En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93.4 (1996), págs. 1659-1664. DOI: 10.1073/pnas.93.4.1659.
- [2] C. Lancia. «Looking through the cutoff window». Tesis doct. Technische Universiteit Eindhoven, 2013.