

Análisis de Sistemas de Transporte

Apuntes CI3141: Versión 0.6: 2 de diciembre de 2022

Profesor: C. Angelo Guevara
Edición: Bastián Dominguez
Benjamín Guerrero
Felipe Tapia

Índice de Contenidos

1	Introducción	4
1.1	Sobre Estos Apuntes	4
1.2	Motivación	5
1.3	Necesidad del Análisis de Sistemas de Transporte	6
1.4	Enfoque Conceptual de Manheim	7
1.5	Necesidad de Intervenir: Círculo Vicioso de Transporte Público	10
1.6	Necesidad de Simplificar para Modelar: Definiciones Básicas	11
1.7	Modelo Clásico de Transporte	21
1.8	Problemas Propuestos	24
2	Demanda de Transporte	26
2.1	Introducción	26
2.2	Mercados Puntuales: La Demanda por Transporte como una Demanda Derivada	26
2.2.1	Conceptos Básicos	26
2.2.2	Equilibrio de Mercado	27
2.2.3	Función de Demanda de Transporte	28
2.2.4	Problemas Propuestos	30
2.3	Modelo de Uso de Suelo (o de Localización)	31
2.4	Generación y Atracción de Viajes	38
2.4.1	Introducción	38
2.4.2	Modelo de Factor de Crecimiento	39
2.4.3	Modelo de Regresión Lineal	41
2.4.4	Modelo de Análisis por Categorías	45
2.4.5	Problemas Propuestos	47
2.5	Distribución de Viajes	50
2.5.1	Introducción	50
2.5.2	Métodos de Factor de Crecimiento	50
2.5.3	Modelo Gravitacional	58
2.5.4	Modelo de Máxima Entropía	63
2.5.5	Problemas Propuestos	76
2.6	Partición Modal	80
2.6.1	Introducción	80
2.6.2	Teoría del Consumidor	83
2.6.3	Modelo de Utilidad Aleatoria	85
2.6.4	Modelo Logit Multinomial	87
2.6.5	Preferencias reveladas y declaradas	91
2.6.6	Estimación con Modelo Logit	93
2.6.7	Elasticidades Logit Multinomial	97
2.6.8	Logit Incremental	99
2.6.9	Pronóstico Agregado	101
2.6.10	Paradoja de los buses de colores (Logit Jerárquico)	104
2.6.11	Interdependencia entre partición modal, asignación a la red y distribución	106
2.6.12	Modelos Avanzados de Demanda de Transporte	107

2.6.13 Problemas Propuestos	107
3 Oferta de Transporte	114
3.1 Introducción	114
3.2 Diseño de Oferta de Sistemas Portadores	114
3.2.1 Sistema Cílico Simple Sin Carga de Retorno	114
3.2.2 Sistema cílico simple con carga de retorno	127
3.2.3 Sistema Cílico General	130
3.2.4 Optimización del sistema	134
3.2.5 Problemas Propuestos	141
3.3 Teoría de la Circulación	148
3.3.1 Definiciones básicas	148
3.3.2 Características fundamentales del tráfico	149
3.3.3 Relaciones entre las variables de tráfico	150
3.3.4 Relación flujo-tiempo de viaje	153
3.3.5 Demoras en intersecciones	154
3.3.6 Representación de una Red de Transporte	156
3.3.7 Costo Generalizado	157
3.3.8 Externalidades	158
3.4 Asignación a la Red	160
3.4.1 Introducción	160
3.4.2 Equilibrio	162
3.4.3 Notación y conceptos básicos	163
3.4.4 Asignación con Demanda Fija	164
3.4.5 Asignación con congestión	169
3.4.6 Primer Principio de Wardrop	170
3.4.7 Segundo Principio de Wardrop	172
3.4.8 Paradoja de Braess	173
3.4.9 Tarificación por congestión	174
3.4.10 Algoritmo de Asignación Incremental	177
3.4.11 Problema de Optimización Equivalente (P.O.E.)	178
3.4.12 Demanda Variable	181
3.4.13 Problemas propuestos	182
4 Noción de Equilibrio en Sistemas de Transporte	187
4.1 Síntesis Modelo Clásico de Transporte	187
4.2 Equilibrio Multimodal: Paradoja de Down-Thomsom	189
4.3 Mirada al sistema global	194
4.4 Desarrollo sustentable	196
5 Carga	197
5.1 Introducción	197
5.2 Definiciones Básicas	197
5.3 Modelamiento de la Oferta y Demanda de Carga	199
6 Evaluación Social de Proyectos de Transporte	202
6.1 Marco Regulatorio	202

6.2	Beneficios de transporte usando enfoque de mercados puntuales	204
6.3	Evaluación de Social de Proyectos de Transporte	209
6.4	Problemas Propuestos	212
Referencias		217

1. Introducción

1.1. Sobre Estos Apuntes

Este documento corresponde a versión 0.6 de los apuntes de un curso de Análisis de Sistemas de Transporte (CI-3141) que se dicta en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile.

El curso que sintetiza este apunte fue diseñado por los profesores Angelo Guevara y Marcela Munizaga, usando, en parte, material de realizaciones anteriores del curso que fueron dictados también por otros profesores. Se hace notar que varias secciones del apunte están basadas o inspiradas en varias fuentes, entre las que destaca el libro escrito por los profesores (Ortúzar y Willumsen, 2011).

El apunte tiene como propósito que el estudiante maneje los fundamentos del análisis de sistemas de transporte a partir de una comprensión profunda de su funcionamiento y que, de esta manera, sea capaz de entender cómo se evalúa el efecto de modificaciones en sistemas sencillos, incluyendo su interacción con la ciudad. Además, a manera de apoyo al estudio, en cada sección se incluyen problemas propuestos (principalmente tomados de Controles anteriores) que los estudiantes debieran ser capaces de resolver luego de estudiar la sección respectiva.

Se hace hincapié en que este apunte está orientado a ser material de apoyo de los cursos relacionados dictados en la FCFM de la Universidad de Chile, prohibiéndose su distribución para otros fines, sin la expresa autorización del autor.

La primera versión de estos apuntes fue transcrita por Bastián Domínguez, Felipe Tapia y Benjamín Guerrero, bajo la supervisión del profesor Angelo Guevara, a partir de las clases grabadas, láminas de presentaciones y material docente preparado por el profesor en los semestres primavera de 2019, 2020 y 2021. En una segunda etapa, estos apuntes han sido continuamente editados y enriquecidos por el profesor Guevara para llegar a la actual versión del documento. Se hace notar, sin embargo, que estos apuntes aún están en su versión 0.6, lo que implica que aún podrían haber algunos errores, de tipografía o de otro tipo. Se hace notar también que es posible que esta versión borrador contenga algunas imágenes o contenidos que puedan estar sujetos a derecho de autor. **Se agradece cualquier observación que ayude a corregir estos u otros errores que permitan mejorar estos apuntes.**

Angelo Guevara
crguevar@ing.uchile.cl
Santiago, 2 de diciembre de 2022

1.2. Motivación

¿Será conveniente construir una nueva línea de Metro, una autopista o un tren rápido?

La respuesta a esta pregunta no es obvia. Como ingeniero(a)s, a todos nos atraen hasta cierto punto este tipo de proyectos y cuando los vemos tendemos a quedar cautivados por la sofisticación de sus detalles técnicos pero, por supuesto, esa no es razón suficiente para recomendar su desarrollo. La respuesta tampoco va por el lado de reconocer los

Esta pregunta es muy difícil de responder por diversas razones. Primero, porque la implementación de este tipo de proyectos no es inmediata: desde que se toma la decisión de construir una línea de Metro, Autopista o Tren, hasta su apertura pueden transcurrir entre 5 y 10 años. Además, el proyecto tiene impactos a largo plazo (10 a 20 años después de su inauguración) sobre el sistema, lo que hace que la experimentación sistémica sea inviable. Para ver si realmente es conveniente desarrollar proyectos de transporte de gran envergadura es indispensable elaborar, estimar y aplicar *modelos*, en los que se puedan probar prototipos de estos proyectos.

Por otra parte, proyectos de esta envergadura son muy costosos. Por ejemplo una nueva línea de metro requiere una inversión de aproximadamente 3 mil millones de dólares que, para dar una idea de la magnitud de este gasto, es un monto similar al costo de enviar un rover a Marte. Para un país como Chile, ésta es una inversión muy arriesgada, ya que no se puede gastar tal cantidad de dinero en una obra sólo porque “puede ser conveniente”. Hay un sinnúmero de necesidades urgentes que Chile necesita resolver y el presupuesto es limitado. Antes de invertir en este costoso proyecto de transporte es necesario entender su impacto en la economía, pero también su impacto en el medio-ambiente y en la sociedad en su conjunto.

En efecto, más allá del aspecto económico, definir la conveniencia o no de realizar un proyecto es multifactorial, lo que se busca en general es lograr un desarrollo *sustentable o sostenible*. Una sociedad es sustentable o sostenible si el desarrollo económico, el bienestar social y el medio ambiente están en equilibrio. Para ello, es crucial tener la capacidad de **satisfacer las necesidades de la sociedad en el presente sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer las propias** (ver Figura 1).

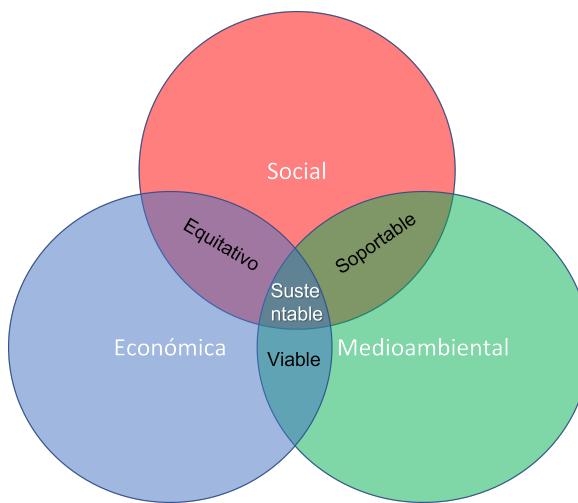


Figura 1: Ámbitos de la Sustentabilidad

El transporte cumple un rol fundamental en la sustentabilidad porque es un ámbito de la ingeniería que, además de implicar costos considerables, tiene un impacto directo en la calidad de vida de las personas, en el medio ambiente y, de manera indirecta, en la economía. Si bien esto muchas veces es difícil de lograr, hay algunos ejemplos de éxito destacables como, por ejemplo, el de la ciudad Curitiba. Esta ciudad brasileña se ha convertido en una ciudad más habitable gracias a la construcción de un sistema de autobuses intraurbano eficiente, la ampliación de los espacios verdes urbanos y la satisfacción de las necesidades básicas de los ciudadanos pobres (Basiago, 1998). En este curso veremos herramientas de modelación para, desde el punto de vista de la Ingeniería, poder responder a estos desafíos.

1.3. Necesidad del Análisis de Sistemas de Transporte

El objeto de estudio de este curso son los **Sistemas de Transporte**, definidos como la combinación de todos los factores que afectan el movimiento de personas o bienes de un lugar a otro. Algunos de los elementos que componen los Sistemas de Transporte son: los medios físicos (suelo, ríos, lagos, etc.), los modos de desplazamiento (auto, tren, bus, etc.), las redes por las cuales se realiza el desplazamiento (calles, vías de tren, senderos, etc.), los agentes reguladores del movimiento (Ministerios y municipalidades) y los operadores de servicios dispuestos al desplazamiento, que pueden ser públicos o privados.

El Análisis de Sistemas de Transporte busca abordar, entre otras, las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos pasajeros usarán el nuevo proyecto?
- ¿En qué horarios y para qué propósitos?
- ¿Qué impacto tendrá en la economía?
- ¿Qué ocurrirá con el uso del suelo?
- ¿Qué impacto tendrá en la segregación social?

- ¿Qué impacto tendrá en las emisiones?
- ¿Qué impacto tendrá en la calidad de vida?

Antes de continuar, se debe definir qué es la Ingeniería de Transporte. Se define Ingeniería como la ciencia mediante la cual las propiedades de la materia y la energía son transformadas en beneficio de la sociedad, mientras que el concepto Transporte se refiere al hecho de trasladar algo o a alguien de un lugar a otro. Por lo tanto, se puede definir la Ingeniería de Transporte como la ciencia mediante la cual las propiedades de la materia y la energía son transformadas para permitir el traslado de personas y mercancías de un lugar a otro, de manera que sea útil para la sociedad.

Tradicionalmente, la Ingeniería de Transporte era vista con tres componentes fundamentales. En primer lugar se tiene la **infraestructura**, que corresponde a las obras civiles que son puestas a disposición para el transporte de pasajeros o carga, tales como los puentes, calles, vías ferroviarias, paraderos y andenes, entre otros. En segundo lugar están los **equipos**, que corresponden a los elementos que operan sobre la infraestructura disponible (i.e. vehículos). Finalmente, está la **operación**, que es la forma en que se utilizan los equipos para que interactúen con la infraestructura.

Si bien cada una de estas componentes de análisis (infraestructura, equipos y operación) son importantes en si mismas, el principal desafío va más allá. No solo interesa cómo proveer la capacidad de transporte (ancho de vías o frecuencia de trenes) para satisfacer la demanda de viajes, sino que interesa entender lo que gatilla esa demanda, los beneficios y costos (de todo tipo) que trae aparejado satisfacerla, y diseñar maneras alternativas lograr los fines últimos de esta. Con este fin, en la actualidad, la Ingeniería de Transporte se ve con un enfoque de sistemas, en el cual, conociendo aspectos fundamentales de Infraestructura, Equipos y Operación, se preocupa de las interrelaciones entre dichas componentes y del análisis, diseño y operación del Sistema de Transporte en su conjunto.

1.4. Enfoque Conceptual de Manheim

Marvin L. Manheim fue un profesor del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) que algunos consideran el padre del análisis de sistemas de transporte. Según (Manheim, 1979), el gran desafío de la Ingeniería de Transporte es...

“...intervenir delicada y deliberadamente en la sociedad y en su entorno, con el objeto de usar su sistema de transporte de forma efectiva, coordinadamente con otras acciones privadas y públicas, a fin de alcanzar las metas de dicha sociedad”.

(Manheim, 1979) propone un marco conceptual de análisis que considera que en una ciudad interactúan tres sistemas, los cuales se detallan a continuación:

- Sistema de Transporte (T): Como se señaló anteriormente, se refiere a la combinación entre la infraestructura de transporte, los equipos (o vehículos) y la operación. Son todos los elementos que definen la **OFERTA por transporte**.
- Sistema de Actividades (A): Son todas las actividades y características que definen a la ciudad y su población. Se refiere a las actividades que son realizadas por la población (vivienda, trabajo, estudio, ocio, etc.), así como a la localización de dichas actividades, es decir, dónde

se ubican las viviendas, los empleos, los recintos educacionales, centros comerciales, etc. En consecuencia, el sistema de actividades agrupa todos los aspectos que definen la **DEMANDA por transporte**.

- Estructura de Flujos (F): Se refiere a cómo se trasladan las personas o la mercancía en un sistema de transporte, dado un sistema de actividades. Aquí se tienen elementos como los orígenes de viaje, destinos de viaje, rutas, volumen de pasajeros y de carga, además del nivel de servicio. En resumen, la estructura de flujos es la manifestación del **equilibrio entre la oferta y la demanda**.
 - Viaje: Es el traslado entre un origen y un destino, de un cierto tipo de persona o carga, con un cierto propósito.
 - Origen: Es el lugar donde inicia el viaje.
 - Destino: Es el lugar donde termina el viaje.
 - Ruta: Es la secuencia de arcos utilizados para llegar desde un origen a un destino.
 - Volumen: Es la agregación de los viajes de personas o carga, agregados en base a algún criterio (multidimensional).
 - Corte Temporal: Es el estado del sistema en un tiempo establecido a futuro. En los proyectos de transporte, suelen considerarse cortes temporales de 5, 10 y 20 años dependiendo de su magnitud.
 - Nivel de Servicio: Conjunto de características del servicio experimentado por los usuarios del sistema de transporte, como tiempo de acceso, tiempo de viaje, comodidad, seguridad, confiabilidad, etc. Por lo tanto, el nivel de servicio se expresa como un vector de características.

Además, estos tres sistemas interactúan a través de tres tipos de relaciones, las cuales conforman lo que se conoce como Esquema de Manheim (Figura 2).

- Relación tipo 1: La estructura de flujos está determinada por A y T. Por ejemplo, la inauguración de un centro comercial (cambio en A) causará que el sector atraiga muchos viajes y eventualmente causar congestión. También se puede pensar en la construcción de una nueva línea de metro (cambio en T), ya que los nuevos usuarios provendrían de otras líneas de metro o incluso desde otros modos, afectando el volumen de viajes. Es importante notar que estos impactos son de corto plazo, es decir, aparecen apenas se materializan los proyectos.
- Relación tipo 2: La estructura de flujos provoca cambios en A. Un ejemplo de ello es lo que ocurre en las afueras de las estaciones de metro, el alto flujo de personas motiva a vendedores ambulantes a ubicarse allí. A diferencia de relación tipo 1, la relación tipo 2 es de mediano a largo plazo, por lo que estos impactos tardan más tiempo en manifestarse.
- Relación tipo 3: La estructura de flujos provoca cambios en T. Por ejemplo, en respuesta a la alta demanda en un recorrido de buses, se incorporan servicios expresos y/o cortos que permiten potenciar el recorrido. También se tiene el caso contrario, cuando un recorrido de buses tiene baja demanda se opta por eliminar dicho servicio. Al igual que la relación de tipo 2, la relación de tipo 3 es de mediano a largo plazo.

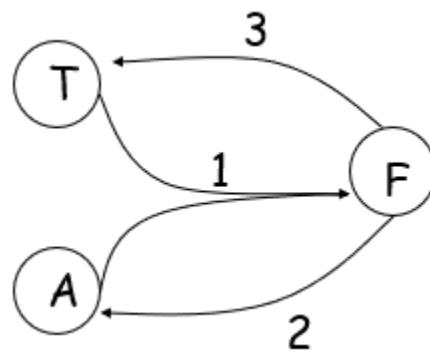


Figura 2: Enfoque Manheim (Manheim, 1979)

La pregunta que surge a continuación es la siguiente: ¿Cómo se puede influir en el sistema? Para ello, se tienen dos alternativas:

- Se puede influir sobre T, mediante el uso de opciones tecnológicas, topológicas y de política de operación.
- Se puede influir sobre A, mediante el uso de opciones de corto plazo (si voy a viajar o no) y de largo plazo (si me voy a cambiar de casa o trabajo).

En este curso se abordará principalmente el desarrollo de modelos que permitan predecir cual será el flujo si es que hay un cambio en el sistema de transporte o en el sistema de actividades, es decir, relaciones de tipo 1. En otras palabras, lo que se busca responder a través de estos modelos es: si se cambia de T a T' o de A a A', ¿cuál será el cambio en el flujo (DF)?

$$\begin{aligned} T \rightarrow T' &= DT \\ A \rightarrow A' &= DA \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad F \rightarrow F' = DF$$

Una representación más compartimentada del Sistema de Transporte y las interrelaciones descritas por (Manheim, 1979) es ilustrada por el esquema de la Figura 3:

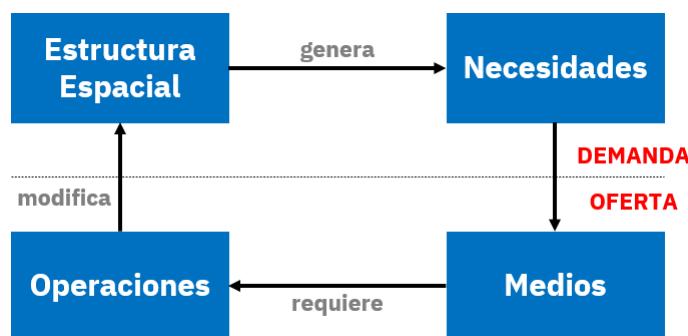


Figura 3: Representación del Sistema de Transporte

En la figura, la **estructura espacial** se refiere a la localización de las actividades: residencias, comercio, industria, servicios y educación, entre otros. Las **necesidades** se refieren a los motivos que posteriormente dan lugar a los viajes, que constituyen la demanda por transporte. Por su parte, los **medios** corresponden tanto a los medios físicos (aéreo, marítimo, terrestre) como a los modos de transporte (auto, camión, barco, caminata, etc.). Por último, las **operaciones** refieren a las políticas que definen el funcionamiento del sistema de transporte (frecuencia, tarifas, recorridos, detenciones, etc.). Los medios en conjunto con las operaciones, constituyen la oferta por transporte.

Las operaciones causan modificaciones en la estructura espacial ya que modifican el movimiento de los usuarios en la red, y, por lo tanto, ofrece oportunidades para la localización de actividades. Por ejemplo, si se decide construir una calle para descongestionar otra, es posible que, como muchas personas van a usar esa calle nueva, alguien decida construir un supermercado o un colegio en esa calle. Como veremos a lo largo de este curso, este cambio en el uso de suelo va a generar viajes entre una zona y otra, lo que finalmente se traduce en un cambio del flujo en las calles.

Estas interrelaciones entre componentes del sistema de transporte tiene un aspecto que los diferencia de otras ramas de ingeniería: el factor humano. Los flujos que vemos en terreno son, a final de cuentas, el resultado de la interacción de las decisiones micro de millones de individuos. Debido a esto, muchas veces será necesario tomar prestados o adaptar conceptos y herramientas de ciencias sociales en este análisis. En particular interesa dar cuenta de la manera en la que los diferentes agentes toman las decisiones de transporte

- Los usuarios buscan maximizar su utilidad (U)
- Los operadores buscan maximizar su ganancia (p)
- El Estado busca maximizar el beneficio social (B.S)

1.5. Necesidad de Intervenir: Círculo Vicioso de Transporte Público

Un ejemplo que ayuda a ilustrar la necesidad de intervenir en los sistemas de transporte es los que se conoce como el **círculo vicioso del transporte público**, en el cual la calidad y los usuarios del transporte público tienden naturalmente a disminuir.

La Figura 4 describe lo que ocurre en el círculo vicioso del transporte público. En ella se observa que, por un lado, el aumento en el ingreso de las personas produce un aumento en la tasa de motorización (número de autos por hogar) en la ciudad. Esto a su vez provoca una **reducción del número de usuarios de transporte público** y un aumento de la congestión vehicular (por el cambio modal), además de mayor contaminación ambiental. Por otro lado, el aumento de la población expande los límites de la ciudad, ya que el precio del suelo sube debido a la mayor demanda por viviendas. La expansión de la ciudad y el aumento de la congestión hacen que el transporte público sea menos eficiente porque deben recorrer mayores distancias para satisfacer la demanda. Esta ineficiencia produce déficit en las empresas operadoras, que trata de ser subsanado mediante una reducción de recorridos y frecuencias y un aumento de las tarifas, degradando el servicio y así

disminuyendo aún más el número de usuarios de transporte público.

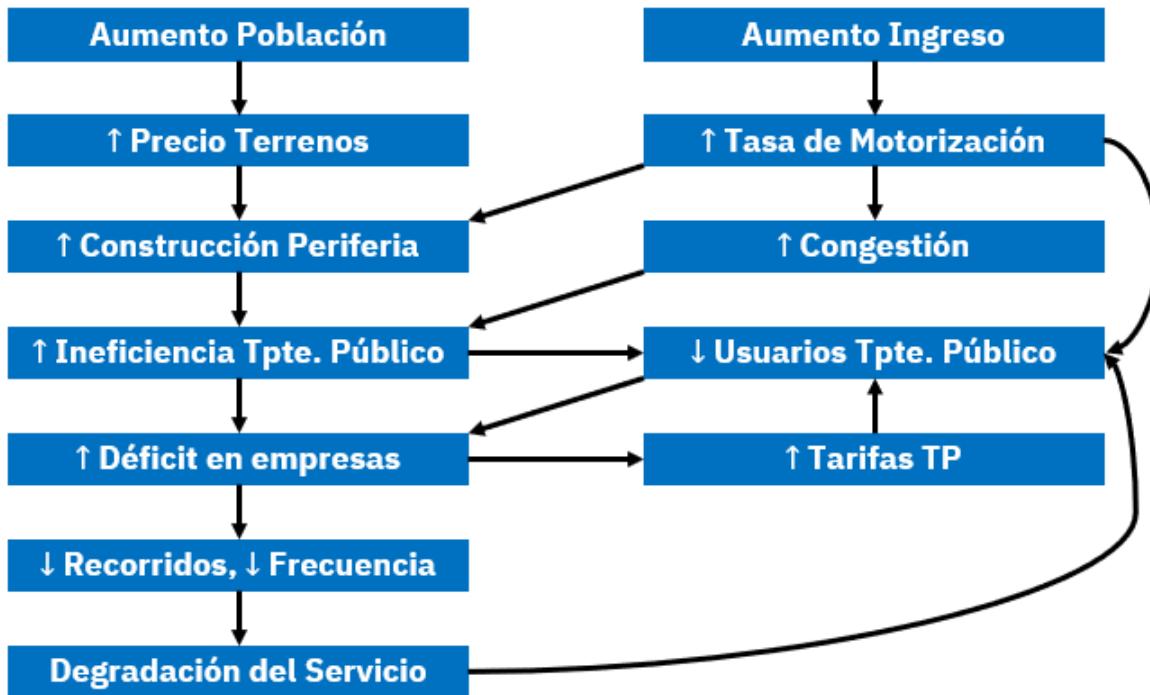


Figura 4: Círculo vicioso del transporte público

Este espiral de deterioro es grave, ya que el transporte público es un eje fundamental en el funcionamiento sustentable de una ciudad, debido a que es mucho más eficiente que el transporte privado en términos de uso del espacio, porque un mismo número de personas se puede trasladar usando mucho menos suelo. Por lo tanto, a medida que la población crece en tamaño e ingreso, es necesario intervenir de alguna manera el sistema para que funcione adecuadamente. En este curso se verán herramientas para entender cómo funcionan los sistemas de transporte, de manera de sentar las bases para entender el impacto de diversas alternativas de intervención.

1.6. Necesidad de Simplificar para Modelar: Definiciones Básicas

La demanda por viajes es una demanda derivada de la demanda por actividades, es decir, las personas no buscan viajar por el hecho de viajar (a menos que sea un viaje de vacaciones por placer), sino que para realizar otras actividades. Por su parte, las componentes del sistema de actividades son el resultado de las innumerables decisiones tomadas por millones de personas a lo largo del tiempo, por lo cual la representación del sistema de transporte en la realidad puede ser muy compleja.

Por ejemplo, consideremos el problema de representar en detalle la programación de actividades de un día de una persona. Si hay, digamos, 10 actividades para realizar en el día, entonces existen $10! = (10 * 9 * \dots * 2 * 1)$ posibles formas de ordenar esas actividades. Luego, se tienen 10 horarios

posibles para cada actividad (se realiza la actividad A a las 8:00 o a las 9:00), 1000 ubicaciones posibles para cada actividad (por ejemplo, para comprar una bebida, hay 1000 supermercados y botillerías para escoger), 5 modos de hacer cada actividad (caminando, en bicicleta o en automóvil a comprar) y 10 rutas para cada actividad (por la ruta más corta o por una ruta más escénica) se tiene un total aproximado de 10^{17} combinaciones. Modelar esa magnitud de opciones para cada una de las millones de personas que habitan en una ciudad, es casi imposible.

Por lo tanto, es necesario simplificar este problema, de manera que aún se obtengan resultados válidos. Esto se puede hacer de las siguientes maneras:

- Acotar el área de estudio
- Dividir el espacio en zonas (Zonificación)
- Usar intervalos de tiempo discretos (Periodización)
- Definir individuos o carga en base a categorías
- Categorizar actividades
- Representar patrones de viaje en modos

La Figura ?? muestra tres esquemas para describir las actividades de una persona: por itinerario (schedule), por ciclos (tours) y por viajes (trips). La representación por viajes es la más sencilla y, de hecho, es la que se utilizará durante el curso, a través del modelo de cuatro etapas. Sin embargo, es importante recordar que la representación más acorde a la realidad es el esquema de itinerario.

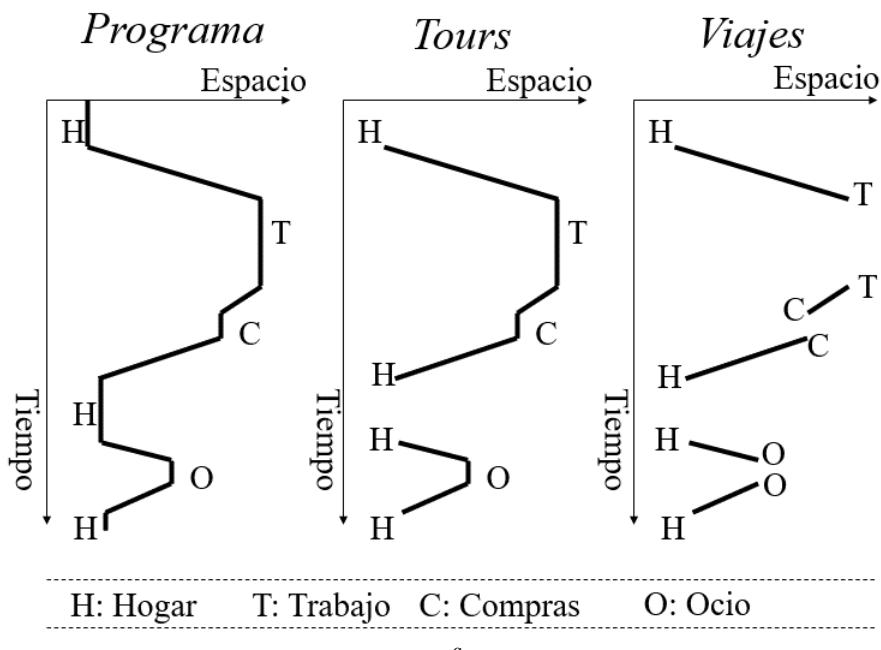


Figura 5: Esquemas de actividades de una persona.

^a Adaptado de: Ben-Akiva (2008) 1.201 Transportation Systems Analysis: Demand Economics

Además de la simplificación de la representación de las actividades en viajes, también se deben hacer agregaciones espaciales, pues es muy difícil trabajar con el nivel de granularidad del territorio real. Es por esto que, para analizar un proyecto, lo primero que se debe hacer es definir el **área de estudio**, que corresponde al área en que se va a modelar el impacto del proyecto sobre el flujo. El área de estudio es mayor al área del proyecto (ver Figura 6), contiene los principales orígenes y destinos y permite identificar re-ruteos o cambios de destino.



Figura 6: Área de estudio.

Luego de identificar el área de estudio, se define una **zonificación**, que consiste en dividir dicha área en zonas que capturen características similares de la ciudad y/o su población. El tamaño de las zonas debe ser tal que exista un balance entre precisión y costo: las zonificaciones gruesas son menos costosas en términos de búsqueda de información y procesamiento de datos, mientras que las zonificaciones más finas permiten obtener mejores resultados. En el caso de la Región Metropolitana, la Encuesta Origen Destino del 2006 considera 779 zonas (Sectra-PUC, 2008), aunque también se podrían considerar zonificaciones más gruesas, tales como comunas o macrozonas.

La Figura 7 muestra la representación de una zona. Si bien cada zona posee una forma y extensión determinada, para efectos de modelación se representan mediante un centroide, el cual captura todos los viajes generados y atraídos en la zona. A su vez, los centroides se vinculan a la red de transporte a través de conectores, los cuales representan el tiempo y distancia de acceso a la red.

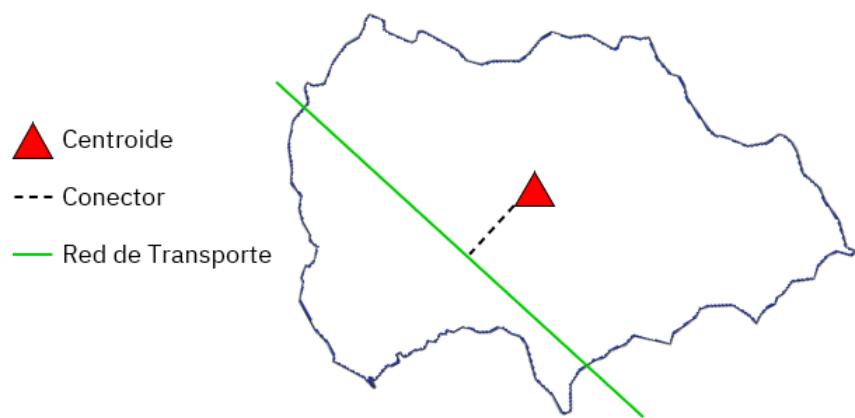


Figura 7: Representación de una zona.

En cuanto al tiempo, en primera instancia se podría pensar en promediar la cantidad de viajes por día o por año. Sin embargo, esto no es una buena idea debido a que el flujo de viajes puede tener grandes variaciones durante el año o incluso durante un día. Por lo tanto, usar valores promedio lleva a diseñar un proyecto que no considera el máximo flujo de la red, lo que puede llevar a congestión.

Por lo tanto, lo que se hace es dividir el tiempo mediante una **periodización** para que su análisis sea más simple. Los períodos dependen del problema a estudiar, habitualmente se consideran punta mañana versus fuera de punta, dia laboral versus fin de semana, temporada lectiva versus estival, etc. Hay diversas maneras de determinar los períodos, pero en general todas se basan análisis de grupos o "clusters" (Edwards y Cavalli-Sforza, 1965)

Para ilustrar lo anterior, en la Figura 8 se muestra la distribución horaria de los viajes en Santiago tomado de datos de la EOD 2012 en un histograma de viajes cada 15 minutos. Utilizando este tipo de representación de los datos, se puede identificar claramente que existe un período punta mañana que, al menos, debiera abarcar entre las 6:45 y las 8:30 AM, con una punta especialmente marcada entre las 7:30 y las 8:00 aproximadamente.

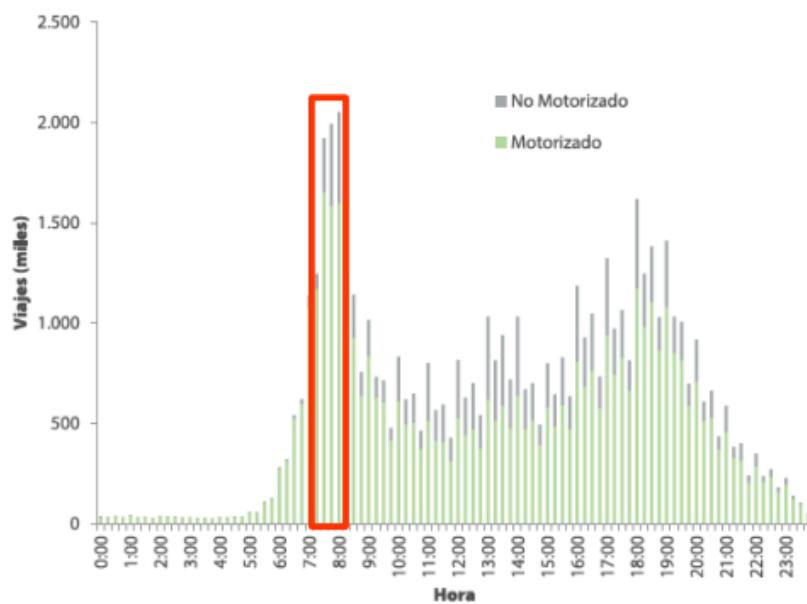


Figura 8: Distribución horaria de viajes en día laboral, temporada normal.

Fuente: (Sectra-UAH, 2014)

Otra simplificación necesaria es el uso de **cortes temporales**. Los costos y beneficios van a evolucionar de manera continua en el horizonte de evaluación, i.e., el que nos interesa analizar un proyecto. Para simplificar el problema, en vez de analizar lo que pasa con el proyecto cada día durante, e.g. 20 años, lo que se hace es analizar días representativos en algunos años específicos (e.g 5, 10, 15 y 20), asumiendo algún tipo de interpolación entre los cortes temporales elegidos. Por supuesto, la elección de los cortes temporales de análisis van a depender de cada proyecto que se esté considerando. Para un proyecto de nivel estratégico, como una línea de metro, lo usual es considerar un horizonte de 20 años y dos cortes temporales: 10 y 20 años.

Por otra parte, también es necesario **categorizar la demanda**, tanto a las personas como a las actividades. Cada individuo es diferente en la realidad, pero para simplificar, se agrupa a las personas según algunas características socioeconómicas, como el ingreso, la posesión de automóvil, la estructura familiar, etc. Mientras tanto, las actividades son definidas por sus propósitos agregados (trabajo, estudio, compras, ocio, etc.). Al igual que las simplificaciones anteriores, las categorías dependen del problema que se va a estudiar. La Tabla 1 muestra la distribución de las actividades en base a su propósito para la ciudad de Santiago en 2012.

Tabla 1: Agregación por propósito de viaje según (Sectra-UAH, 2014)

Propósito	Viajes (miles)	Porcentaje
Al trabajo	5423,3	29,4%
Al estudio	3272,4	17,7%
Compras	3113,9	16,9%
Buscar/Dejar a alguien	1374,7	7,4%
Trámites	1185,1	6,4%
Visitar a alguien	792,8	4,3%
Salud	656,9	3,6%
Recreación	644,4	3,5%
Otro	627,2	3,4%
Por trabajo	526,7	2,9%
Por estudio	333,2	1,8%
Buscar o dejar algo	258,0	1,4%
Comer o tomar algo	250,3	1,4%

La razón por la que se separan los viajes por su propósito no solo se debe a que la cantidad de viajes es diferente. Los horarios en los que se realizan los viajes, las causas que los explican y la manera en que evolucionan también difieren con el propósito. La Figura 9 muestra la distribución horaria de los viajes en un día laboral para los propósitos trabajo, estudio y otros; donde se observa claramente la diferencia entre los perfiles de viajes de trabajo/estudio con el de los otros propósitos.

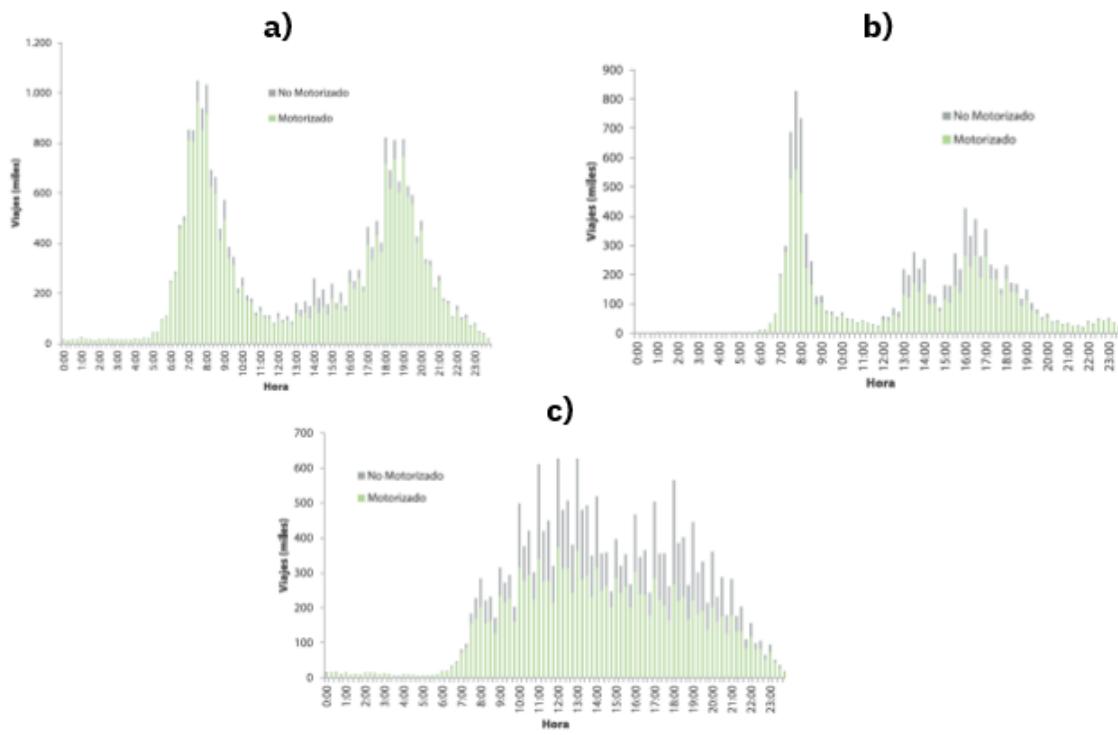


Figura 9: Perfil de viajes según propósito: a) trabajo, b) estudio y c) otros.
(Sectra-UAH, 2014)

Una última simplificación consiste en la **categorización de los modos de transporte**. Las categorías consideradas van a depender del problema que se esté analizando. Por ejemplo, en el análisis de una ciudad como Santiago, los modos a considerar pueden ser: Transporte privado, Transporte público, Taxis, Uber, Bicicleta, etc. A modo de ejemplo, la Tabla 2 se describe la partición Modal en el período punta mañana de un día laboral normal en la ciudad de Santiago, es decir el % o proporción de viajes en cada modo.

Tabla 2: Participación modal en el período punta mañana de un día laboral normal ((Sectra-UAH, 2014)).

Modo de Transporte	Total Día		Punta Mañana (7:30-9:00)	
	Viajes (miles)	%	Viajes (miles)	%
Auto	4.748,6	25,7%	811,0	29,1%
Bipl	4.171,3	22,6%	676,3	24,3%
Bipl - Otros Público	301,9	1,6%	48,9	1,8%
Bipl - Otros Privado	148,2	0,8%	28,4	1,0%
Taxi Colectivo	530,4	2,9%	57,2	2,0%
Taxi Básico	315,0	1,7%	29,2	1,0%
Otros	1.135,4	6,2%	295,4	10,6%
Caminata	6.363,3	34,5%	740,6	26,6%
Bicicleta	747,1	4,0%	101,2	3,6%
Total	18.461,1	100,0%	2.788,2	100,0%

La cantidad de viajes realizados en los distintos modos de transporte puede variar con el tiempo debido al crecimiento de la población, del ingreso y otros factores. Por ejemplo, el gráfico de la Figura 10 muestra la variación entre las EOD de 2001 y 2012 en Santiago, donde destaca el aumento relativo del modo automóvil debido al espiral de deterioro del transporte público descrito anteriormente.

Figura 30: Evolución de la participación modal 2001 - 2012, día laboral en temporada normal (viajes motorizados comparables)

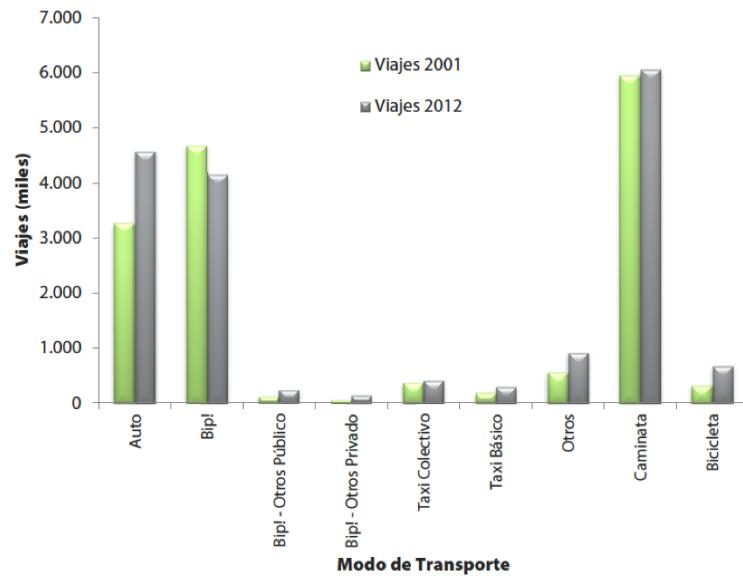


Figura 10: Variación entre las EOD de 2001 y 2012 en Santiago (Sectra-UAH, 2014)

Una vez aplicadas todas estas simplificaciones, el objetivo es construir la **matriz origen-destino**.

destino, la cual es una abstracción fundamental para el análisis de sistemas de transporte. La matriz origen-destino contiene las siguientes componentes:

- O_i : total de viajes generados en la zona i .
- D_j : total de viajes atraídos a la zona j .
- V_{ij} : número de viajes entre zona i y j en periodo t .
- T : total de viajes en área de estudio en periodo t .

La Tabla 4 muestra la estructura de una matriz origen destino:

Tabla 3: Matriz Origen-Destino.

<i>O/D</i>	1	2	3	...	<i>j</i>	...	<i>n</i>	Total
1	V_{11}	V_{12}						O_1
2	V_{21}	V_{22}						O_2
3	V_{31}	V_{32}						O_3
...								...
i					V_{ij}			O_i
...								...
n							V_{nn}	O_n
Total	D_1	D_2	D_3		D_j		D_n	T

En la matriz, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$O_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} \quad D_j = \sum_{i=1}^n V_{ij} \quad T = \sum_{i=1}^n O_i = \sum_{j=1}^n D_j$$

La Tabla 4 muestra la matriz origen-destino correspondiente a las macrozonas de Santiago descritas en la Figura 11.

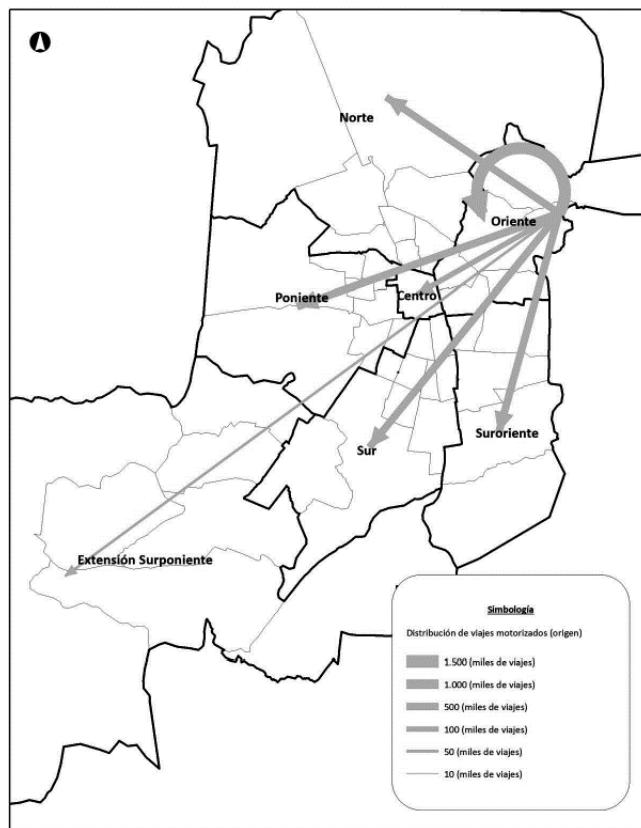


Figura 11: Macrozonas de Santiago. (Sectra-UAH, 2014)

Tabla 4: Matriz O-D de viajes por sector en día laboral temporada normal (Sectra-UAH, 2014)

Sector Origen	Sector Destino								Total (miles)
	Norte	Poniente	Oriente	Centro	Sur	Sur-Oriente	Extensión Sur-Poniente	Externo	
Norte	1.716,9	105,6	158,3	169,2	57,3	53,7	7,5	0,3	34,6 2.303,5
Poniente	110,7	2.422,4	182,7	267,2	140,8	68,4	31,5	2,6	76,9 3.303,1
Oriente	167,9	183,1	2.783,2	298,3	138,0	309,6	10,2	9,5	29,6 3.929,4
Centro	174,3	268,6	294,9	788,8	172,6	155,9	26,9	2,6	13,1 1.897,8
Sur	54,4	141,3	148,3	167,6	2.362,9	164,9	23,6	3,0	83,0 3.148,9
Sur-Oriente	49,8	69,1	313,8	149,4	161,5	1.945,4	8,6	5,6	46,7 2.750,0
Extensión Sur-Poniente	8,2	32,7	16,7	25,4	23,7	6,8	652,9	6,4	23,6 796,5
Externo	0,1	1,1	5,8	4,1	4,2	4,3	3,0	0,9	0,0 23,5
S/I	35,9	73,4	32,4	11,1	84,6	42,7	23,0	0,0	5,5 308,4
Total (miles)	2.318,2	3.297,4	3.936,0	1.881,1	3.145,6	2.751,6	787,2	31,0	313,0 18.461,1

La tabla muestra que:

- Mayoría de viajes son intra-zonales.
- Pocos viajes cruzan la ciudad de Sur a Norte o de Norte a Sur.

- Hay más viajes de Oriente-Poniente.
- A pesar de su tamaño, la macrozona Norte genera pocos viajes.

Un análisis de este tipo puede usarse para identificar, por ejemplo, los sectores del sistema que requieren ser observados con mayor atención y eventualmente ser intervenidos. Por ejemplo, en el caso de la Región Metropolitana, se podría inferir que es necesario proveer algún tipo de infraestructura en el eje oriente-poniente.

1.7. Modelo Clásico de Transporte

El análisis de sistemas de transporte que se desarrolla en estos apuntes se describirá en base a lo que se conoce como **Modelo Clásico de Transporte** o **Modelo de 4 etapas**, el cual es **uno** de los posibles enfoques de modelación para representar el sistema de transporte. **No es el único modelo, ni tampoco necesariamente es el mejor modelo**, pero es un enfoque práctico y es el que se usa hoy en día en Chile y en otros países para hacer análisis estratégico. También es **útil desde un punto de vista pedagógico** para comprender las partes que componen el sistema, cómo evolucionan en el tiempo y cómo interactúan.

Se recuerda de la sección anterior que existen tres maneras de representar las actividades realizadas por un individuo: itinerario, ciclo y viajes. El modelo clásico de 4 etapas considera la representación por viajes. El modelo clásico divide el problema de representar las relaciones tipo I en etapas que pueden ser interpretadas como decisiones sucesivas que resultan en el viaje realizado por las personas, representadas en las siguientes 4 preguntas:

- ¿Viajar o no?
- ¿Hacia dónde viajo?
- ¿En qué modo de transporte?
- ¿Cuál es la ruta que tomo?

Sin embargo, es necesario señalar que esta separación en preguntas no significa necesariamente que las personas tomen sus decisiones de viaje en ese orden, o si quiera que esas sean las decisiones que toman. Ésta es solo una abstracción que intenta sintetizar el tipo de decisiones que se deben tomar y simplifica el análisis del problema. Existen otros enfoques de modelación más sofisticados, en general basados en micro-simulación, que permiten representar de manera mucho más realista las millones de decisiones individuales que resultan en los flujos observados en el sistema de transporte, pero aún no contamos con las herramientas necesarias para seguir dicho enfoque de análisis. Algunos enfoques de modelación en esa línea se abordan más adelante en el curso **Demanda de Transporte**.

Formalmente, estas cuatro preguntas se sintetizan en cuatro modelos agregados o etapas de análisis:

- Generación y Atracción de viajes

- Distribución de viajes
- Partición Modal
- Asignación a la Red

Estas cuatro etapas conforman el modelo clásico transporte que, bajo el marco conceptual de (Manheim, 1979), permite representar las relaciones tipo I, es decir, cómo la combinación de un sistema de actividades (A) y un sistema de transporte (T) se traduce en un sistema de flujos (F) que observamos en terreno. Además, a este modelo de cuatro etapas se le puede añadir una quinta, que representa el problema del uso de suelo, basada en la pregunta: ¿Dónde decido vivir/trabajar?

Bajo el marco conceptual de (Manheim, 1979), la etapa de uso de suelo busca dar cuenta de las relaciones tipo 2, es decir, la forma en que el equilibrio de flujos (F) se traduce en localizaciones de firmas y hogares que definen el sistema de actividades (A). El contenido de este apunte se centrará en el modelo clásico de 4 etapas, resumiendo algunas nociones iniciales sobre los modelos de uso de suelo. Este tópico se trata con mayor profundidad en el curso **Economía Urbana**, donde se discutirán aspectos del modelo MUSSA¹, software desarrollado por el profesor Francisco Martínez.

La Figura 12 muestra las relaciones entre las etapas y elementos como el desarrollo urbano, demanda y oferta:

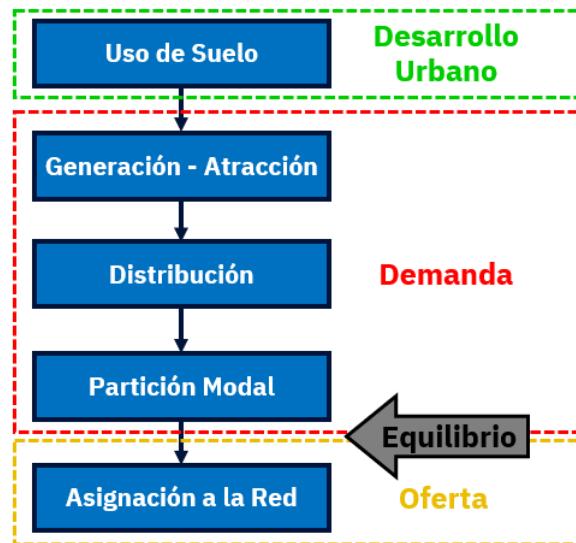


Figura 12: Relación entre las etapas del Modelo Clásico de Transporte.

Este enfoque de modelación considera en primer lugar la etapa de uso de suelo, la cual da cuenta de la componente de **desarrollo urbano**, es decir, la localización de firmas y hogares en los cortes temporales de análisis. Las preguntas de ‘hacia dónde’ y ‘cómo’ se desarrollará la ciudad no son triviales de responder. Este modelo puede ser una simulación microeconómica sofisticada del equilibrio del sistema urbano, como en el modelo MUSSA, o bien ser el resultado del ‘criterio

¹ <http://ingenieria.uchile.cl/investigacion/98359/software-mussas>

experto' en que agentes relevantes - públicos y privados - estiman como posibles diferentes escenarios de desarrollo urbano para el área de análisis.

Dicho esto, a continuación se detallarán las cuatro etapas clásicas del modelo:

1. Generación-Atracción: En esta etapa se estima la cantidad de viajes que comienzan y concluyen en cada zona, por lo que el resultado es un vector de viajes generados y un vector de viajes atraídos:

- O_i : total de viajes que tienen origen en la zona i
- D_j : total de viajes que tienen destino en la zona j

2. Distribución: Aquí se calcula la cantidad de viajes entre cada par origen-destino, construyendo así una matriz origen-destino como la de la Tabla 4, donde la variable relevante es:

- V_{ij} : total de viajes que tienen origen en la zona i y destino en la zona j

Dados O_i y D_j , existen infinitas combinaciones de V_{ij} posibles. El modelo de distribución permite encontrar el V_{ij} más apropiado.

3. Partición Modal: En esta etapa, el objetivo es obtener una matriz de viajes por modo, por lo que se requiere calcular la probabilidad o proporción de uso de cada modo. Para ello, los V_{ij} obtenidos en la parte anterior se multiplican por p_{ij}^m en el par origen destino (i, j) , que representa la proporción de uso del medio de transporte m . De esta manera, la variable resultante es:

- V_{ij}^m , la cantidad de viajes hechas entre i y j con el modo m . Notar que se deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$V_{ij}^m = p_{ij}^m V_{ij}$$

$$\sum_m V_{ij}^m = V_{ij}$$

El modelo va a depender de los atributos de los distintos modos de viaje (tales como el costo y el tiempo de viaje) y de las características de los usuarios (ingreso, edad, género, etc.).

4. Asignación a la Red: Con los viajes calculados para distintos modos de transporte, se utiliza el modelo de asignación para definir las calles y rutas en las que se van a realizar estos viajes, es decir, asigna flujo vehicular y tiempo de viaje a los arcos de la red de transporte en base a la demanda. De esta manera, la variable resultante de esta etapa es:

- V_{ij}^{mr} : cantidad de viajes hechos entre i y j con el modo m en la ruta r .

La modelación de las etapas del modelo clásico por separado permite abordar de manera práctica un problema que es muy complejo. Sin embargo, esta separación es artificial pues todas las etapas interactúan en ambos sentidos en la realidad. La interdependencia de las etapas de modelación se puede resumir en la Figura 13:

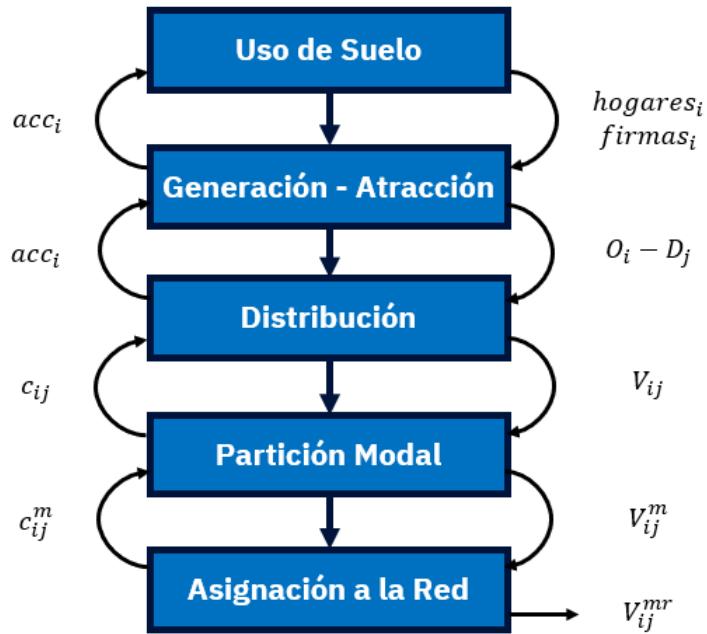


Figura 13: Interdependencia entre las etapas de modelación.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, cada etapa utiliza como input el resultado de la etapa anterior. Además, en cada etapa se calcula un costo generalizado que afecta el funcionamiento de la etapa anterior. En efecto, el costo del modo m del par (i, j) que se utiliza en la etapa de partición modal proviene de la etapa de asignación, mientras que el costo del par (i, j) se origina en la etapa de partición modal. Las otras etapas generan un costo a largo plazo en base a la accesibilidad de la zona (representado por $c_i = acc_i$), concepto que se verá más adelante.

1.8. Problemas Propuestos

Problema 1

En relación al modelo clásico de transporte de 4 (o 5) etapas conteste:

- (a) Indique el nombre y los inputs y outputs de cada una de las etapas.
- (b) Explique cuál es el problema de la formulación secuencial en sistemas con presencia de congestión. ¿Cómo lo solucionaría?

Problema 2

- (a) De un ejemplo que ilustre las limitaciones que tiene el modelo de cuatro etapas en la representación de la respuesta de los usuarios a la tarificación vial.
- (b) Indique qué aspectos considerados en el enfoque de Manheim son representados (y cuáles no) por el modelo clásico de transporte de 4 (ó 5) etapas.

Problema 3

Suponga que debido a las ventajas que ofrece el teletrabajo, se implemente de manera definitiva la modalidad remota (total o parcial) en aquellos empleos en que sea posible. En el contexto del enfoque Manheim, indique cuáles elementos se ven modificados por la situación descrita y por qué.

2. Demanda de Transporte

2.1. Introducción

En esta sección se abordarán con cierto detalle las primeras etapas del Modelo clásico de Transporte: Generación y Atracción, Distribución y partición Modal, además del modelo de Uso de Suelo. Estos modelos permitirán determinar la Demanda de Transporte, es decir, la cantidad de personas que van a usar un modo de transporte específico para ir desde una zona a otra.

Sin embargo, antes de empezar a revisar las componentes del modelo clásico de transporte revisaremos un modelo conceptual de análisis microeconómico que permite ilustrar muy bien el que la **la demanda por transporte es una demanda derivada por la realización de actividades**: El modelo de mercados puntuales.

2.2. Mercados Puntuales: La Demanda por Transporte como una Demanda Derivada

2.2.1. Conceptos Básicos

El enfoque de mercados puntuales es un modelo conceptual que permitirá entender la generación de viajes o demanda, como una demanda derivada y, más tarde, en la Sección 6.2 identificar la fuente de beneficios de las opciones de transporte. Para comenzar, recordemos algunas definiciones básicas que se abordan en el curso de Economía de Plan Común:

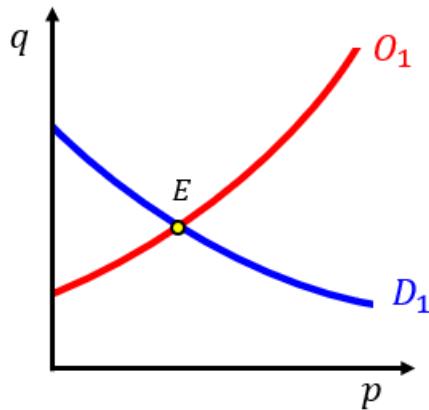


Figura 14: Conceptos básicos de mercados puntuales

- q : **cantidad** producida de un determinado bien.
- p : **precio** del bien.
- O_1 : **Curva de Oferta**. Cantidad del bien que la o las empresas están dispuestas a vender a un precio p , es decir, $O_1 = O_1(p)$. Naturalmente, estarán dispuestas a producir y vender más bienes a medida que su precio de venta es mayor, por lo que esta función es creciente.

- **D_1 : Curva de Demanda.** Cantidad del bien x que los consumidores están dispuestos a adquirir a un precio p , por lo cual se tiene $D_1 = D_1(p)$. Es evidente que los usuarios querrán comprar más bienes cuando su precio es menor, por lo que esta función es decreciente.
- **E: Equilibrio.** Situación en donde la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada. En el gráfico, es la intersección entre ambas curvas.

2.2.2. Equilibrio de Mercado

Consideremos dos mercados aislados en los que se comercializa el mismo producto, como se muestra en la Figura 15. Como los ejes están invertidos, las curvas que se muestran en la figura son las funciones inversas. En cada mercado i se tiene un equilibrio aislado, dado por el punto (q_i^*, p_i^*) .

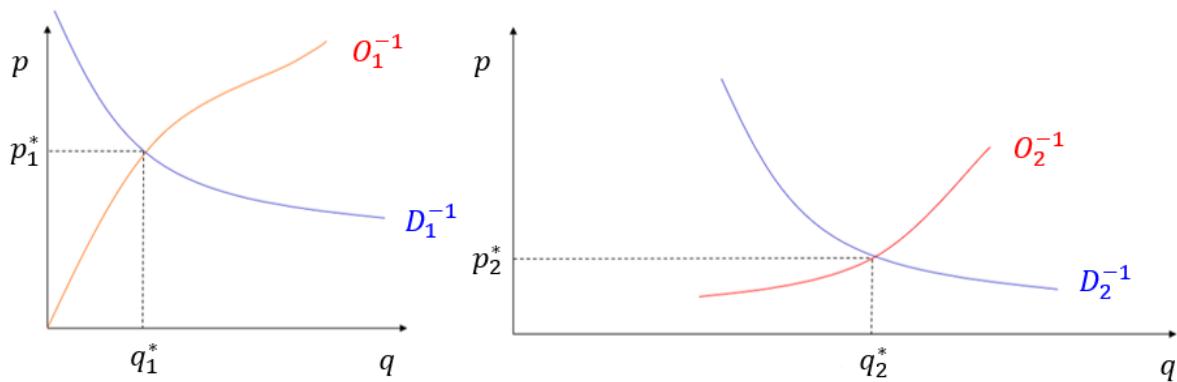


Figura 15: Curvas de oferta y demanda para dos mercados aislados.

¿Qué sucede si se conectan ambos mercados? La Figura 16 muestra gráficamente esta situación.

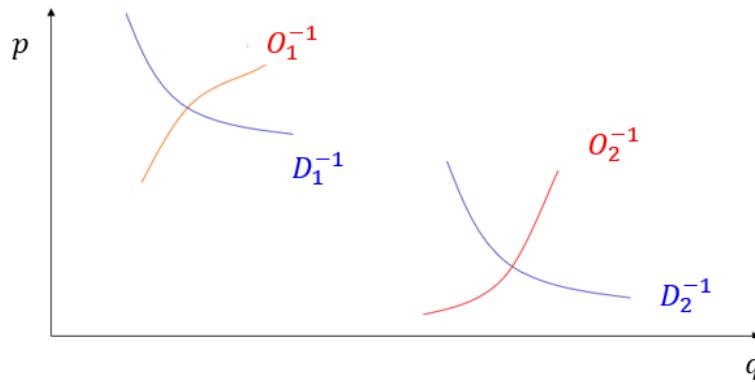


Figura 16: Mercados 1 y 2 conectados.

En este caso, con los mercados unidos, el precio es más bajo en el mercado 2, por lo que los consumidores del mercado 1 querrán comprar a los productores del mercado 2, lo cual inducirá un **transporte del producto** desde el mercado más barato (mercado 2) hacia el mercado más caro

(mercado 1). Dicho de otro modo, se genera un **exceso de demanda** en el mercado 1 y un **exceso de oferta** en el mercado 2, como se observa en el gráfico de la Figura 17:

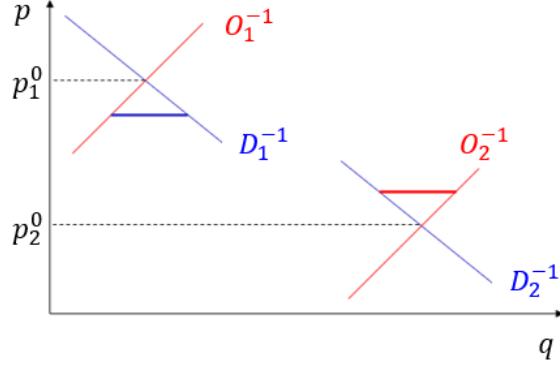


Figura 17: Exceso de oferta y exceso de demanda.

Sea q_i la cantidad de bien (producido o demandado) en el mercado i y p_i su precio. Las funciones de oferta y demanda están dadas por $O_i(p_i) = q_i$ y $D_i(p_i) = q_i$, respectivamente. Así, de acuerdo al gráfico los excesos de demanda y oferta están dados por:

$$ED_1(p_1) = D_1(p_1) - O_1(p_1)$$

$$EO_2(p_2) = O_2(p_2) - D_2(p_2)$$

Observación: Los excesos de oferta y demanda presentados aquí corresponden a las diferencias de las funciones directas de oferta y demanda (no las inversas que se presentan en los gráficos), por lo cual estas funciones indican cantidad de producto en función del precio. Notar además que, para que no se pierda producto durante el transporte, se debe cumplir que $ED_1 = EO_2 = Q_t$.

2.2.3. Función de Demanda de Transporte

Consideremos ahora el mercado de transporte, el cual está ligado a la situación de los mercados conectados, tal como se observa en el gráfico de la Figura 18. Nos interesa saber cual es la situación de equilibrio en este mercado, para ello, definamos t como la tarifa de transporte, dada por:

$$t = p_1 - p_2 = ED_1^{-1}(Q_t) - EO_2^{-1}(Q_t)$$

Notar que si consideramos los precios de equilibrio aislado ($t = p_1^0 - p_2^0$), no se transporta producto, ya que no existen incentivos para transportar el producto. Por otro lado, cuando la tarifa de transporte es cero, se tiene la máxima cantidad transportada, dada por Q_{max} .

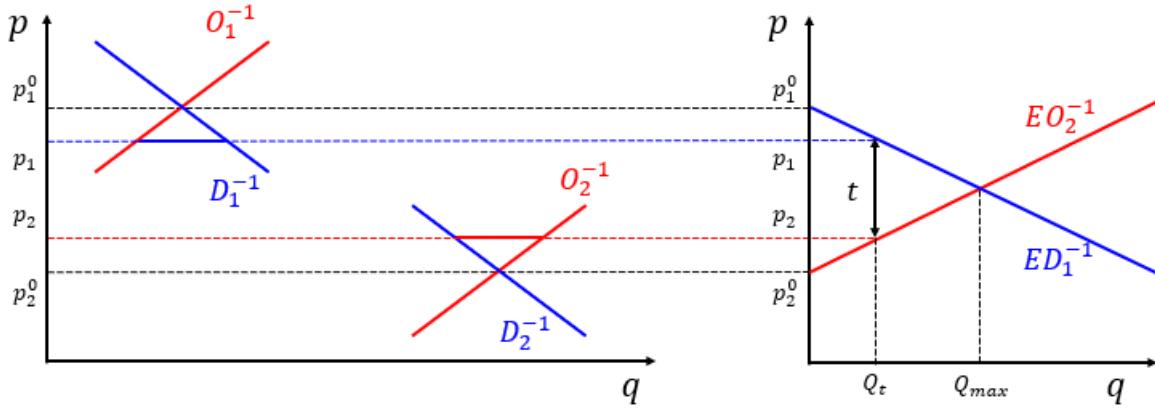


Figura 18: Exceso de oferta y demanda en función del precio y la cantidad.

A partir de lo anterior, se puede definir la demanda de transporte del producto como $Q_t = D(t)$, que indica cuánto producto se está dispuesto a transportar cuando la tarifa de transporte es t . La Figura 19 muestra el gráfico de la función (inversa) demanda de transporte, donde el eje horizontal corresponde a la cantidad transportada y el eje vertical a la tarifa de transporte.

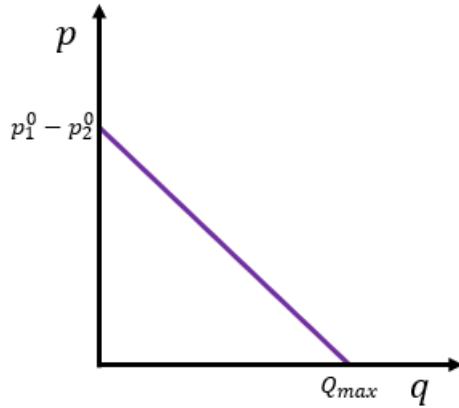


Figura 19: Curva de Demanda de transporte.

En la Figura 19 se observa que cuando la tarifa de transporte está dada por la diferencia de los precios de equilibrio aislado, o un valor mayor, la cantidad transportada será cero. Por otro lado, cuando la tarifa de transporte es cero, la cantidad transportada es máxima. En este caso, $p_1 = p_2$:

$$Q_{max} = Q(t = 0) = ED_1(p_1 = p_2) = EO_2(p_1 = p_2)$$

Equivalentemente, para valores de tarifa de transporte para valores entre cero y la diferencia de precios de equilibrio aislado, la cantidad transportada estará entre 0 y Q_{max} .

En los casos en los que se producen viajes se tiene que los productores del mercado 1 (caro) venden menos y a menor precio, mientras que los compradores del mercado 1 compran más y más barato. Esto sucede al revés en el mercado 2 (barato).

Como se explicó anteriormente, la función de demanda de transporte que se deriva del modelo estilizado de mercado puntuales sirve para exemplificar la naturaleza derivada de esta demanda. En este modelo estilizado se habla de un producto, pero en la realidad esto podría corresponder a una persona que viaja, por ejemplo, para satisfacer la demanda de *cocineros* de la zona 1 que tienen los restaurantes "de la zona 2. En este ejemplo, la zona 1 tiene un exceso de oferta de *cocineros* porque, por ejemplo, se trata de una zona residencial y la zona 2 tiene un exceso de demanda de cocineros porque, por ejemplo, concentra un número importante de restaurantes. En este caso, se observará, por ejemplo, una demanda de viajes de personas de la zona 1 a la 2 con propósito *ir a trabajar como cocinero*. Esos viajes de personas entre 1 y 2 se sumarán con los viajes de personas que lo hacen con propósito ir a trabajar como *albañil*, o que van a ver una película, o cualquier otro propósito que potencialmente genere viajes entre 1 y 2.

Por supuesto, en el caso del transporte de personas no solo la tarifa de viaje será determinante en el número de viajes que se hacen entre ambas zonas sino que también el tiempo. Como veremos más adelante esto estará determinado por una función de oferta de transporte que combine tiempo y tarifa, donde el tiempo es creciente en el número de viajes (debido a la congestión) y está ponderado por un *valor subjetivo del tiempo* para ser expresado en unidades monetarias.

Tal como ocurría en otros mercados, el equilibrio en el mercado de transporte corresponderá a la intersección de las curva de demanda de por transporte con la curva de oferta, lo que determinará el numero de viajes que se producirá y, consecuentemente, el número de *cocineros* que se quedaran trabajando en 1 y que viajarán a 2.

2.2.4. Problemas Propuestos

Problema 1

Considere el caso de dos mercados inicialmente aislados, que se conectan mediante la construcción de facilidades de transporte. Dadas las curvas de oferta y demanda de un bien que se produce y consume en ambos mercados, encuentre la curva de demanda por transporte de ese bien. Especifique el rango de validez de la ecuación encontrada.

M1	Oferta	$q = 30 \cdot (p + 200)$
	Demanda	$q = 10 \cdot (1000 - p)$
M2	Oferta	$q = 10 \cdot (p + 700)$
	Demanda	$q = 30 \cdot (1000 - p)$

Problema 2

Considere dos localidades que producen y consumen arroz. Sus curvas de oferta y demanda están dadas por las siguientes funciones:

L1	Oferta	$p = 20 + q$
	Demanda	$p = 120 - 3q$
L2	Oferta	$q = p - 40$
	Demanda	$q = 200 - p$

Si ambas localidades tienen prohibida la importación de arroz, y decidieran levantar dicha prohibición:

- Obtenga el equilibrio inicial, e identifique qué localidad sería importadora y exportadora respectivamente si se levantara la prohibición.
- Obtenga y grafique las curvas de exceso de demanda y exceso de oferta en cada localidad.
- Derive la curva de demanda por servicios de transporte. ¿Cuánto es lo máximo que podría cobrarse por transportar arroz entre ambas localidades para que exista demanda por transporte y cuánto sería esa demanda? ¿Cuál es la máxima cantidad de arroz que se podría llegar a transportar y a qué tarifa?
- Suponga que la oferta por transporte corresponde a una curva que representa cómo aumenta el tiempo de viaje al aumentar el número de viajes debido a la congestión. Luego, el tiempo de viaje se transforma en dinero al ser multiplicado por un *valor del tiempo*. Explique cómo calcularía la cantidad producida y consumida en cada mercado y la cantidad transportada.

2.3. Modelo de Uso de Suelo (o de Localización)

Después de ver el modelo conceptual de mercados puntuales que permite mostrar la naturaleza derivada de la demanda de transporte, ahora vamos a empezar a ver modelos prácticos que permiten modelar el sistema de transporte y actividades de manera agregada.

El primer modelo corresponde al *modelo de uso de suelo*. Este modelo permite modelar el sistema de actividades, más específicamente, dónde las viven las personas , las firmas se localizan y dónde se realizan las actividades. A partir de este modelo se puede saber la ubicación y características de hogares y firmas, así como el tamaño de los terrenos y el tipo de construcción que habrá en ellos, tanto en el presente como en cortes temporales futuros.

Estos modelos pueden ser muy sencillos o más sofisticados. Los modelos sencillos corresponden a lo que se conoce como *escenarios de desarrollo urbano*, o criterio experto, que no son más que reuniones en los que los agentes relevantes de una ciudad se ponen de acuerdo respecto de la posible evolución del uso del suelo en el área de interés. En el otro extremo, los modelos más sofisticados permiten determinar el valor del suelo en cada localización y/o evolución de la oferta inmobiliaria simulando las decisiones de cada agente. Los aspectos fundamentales que el modelo debe tener en consideración son los siguientes:

- Crecimiento población y economía
- Problema de localización de los agentes (hogares y firmas)
- La interdependencia en las elecciones

- Problema de oferta inmobiliaria
- El precio, la renta y la plusvalía
- Evolución del sistema de transporte
- Equilibrio urbano

En este modelo, se debe apreciar claramente la diferencia entre forma urbana y estructura urbana. La forma urbana se refiere a la topología del sistema de transporte urbano, así como a la infraestructura adyacente; mientras que la estructura urbana se refiere al conjunto de relaciones que se derivan de la forma urbana y las relaciones subyacentes entre personas, carga e información.

La estructura urbana puede ser caracterizada por dos clases de modelos: modelos concéntricos, en los que las actividades se realizan en torno al centro de la ciudad; y modelos multinúcleo, en los que las actividades se concentran en determinados sectores. A su vez, los modelos pueden ser estáticos (hay equilibrio temporal) o dinámicos (hay interacción temporal).

Los modelos concéntricos tienen una carácter meramente esquemáticos y conceptuales. Por simplicidad, explican la localización de actividades en función de la productividad, y asumen que hay competencia para localizarse cerca del centro (Figura 20). Por ejemplo, en el modelo concéntrico de Burgess, la zona A representa el distrito central, B representa la zona de transición, C es la zona residencial de la clase baja, D es la zona residencial de la clase media, y E es la zona residencial de la clase alta.

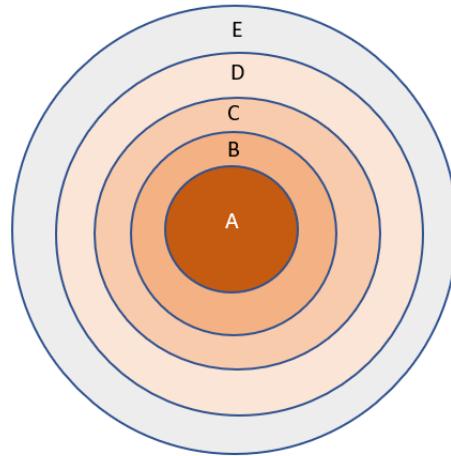


Figura 20: Modelo de uso de suelo concéntrico de Burgess

Un ejemplo típico donde se manifiesta el modelo concéntrico corresponde a varias ciudades de Estados Unidos, como Dallas, en la Figura 21, donde, al fondo de la foto del suburbio compuesto por casas individuales, se observa el *Central Business District (CBD)* con edificios muy altos.

Figura 21: Suburbio y CBD de Dallas, Texas ^a

^a https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Dallas_skyline_and_suburbs.jpg

Mientras tanto, los modelos multinúcleo incorporan la importancia del transporte en la localización, y definen la existencia de sub-centros, en los que se asume que los residentes pueden realizar actividades económicas sin tener que viajar al centro de la ciudad. La Figura 22 muestra el esquema multinúcleo simple, donde se observa que mientras crece la ciudad, se aprovechan los ejes de transporte para generar nuevos centros de actividades. Este modelo se vuelve más prevalente desde la incorporación del automóvil y el aumento de su uso, y a la consiguiente expansión de las ciudades.

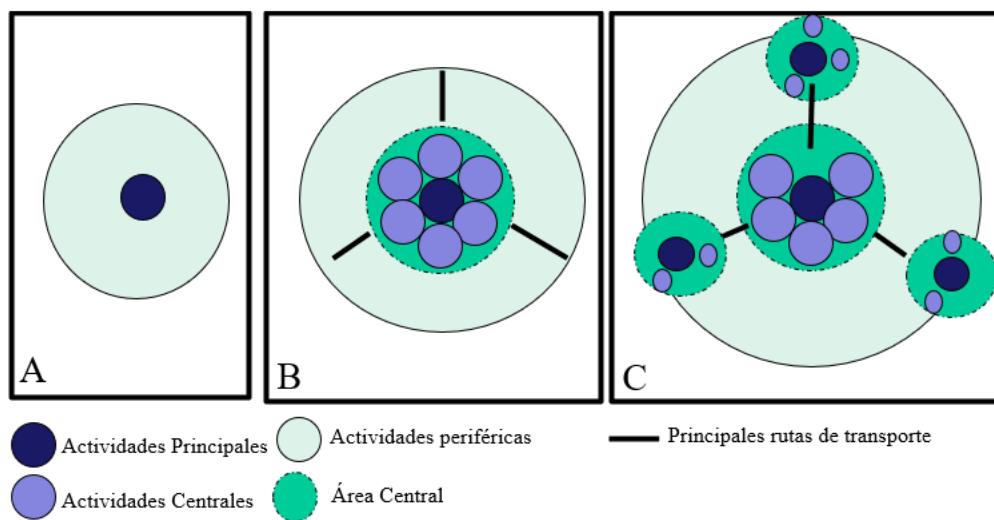


Figura 22: Modelo multinúcleo simple.

Por supuesto, la realidad es mucho más compleja. A modo de ejemplo en la Figura 23 se muestra la densidad habitacional a nivel de manzana en la ciudad de Santiago. Acá se puede ver diversas

aglomeraciones de hogares, en torno a servicios locales, que están repartidas por toda la ciudad.

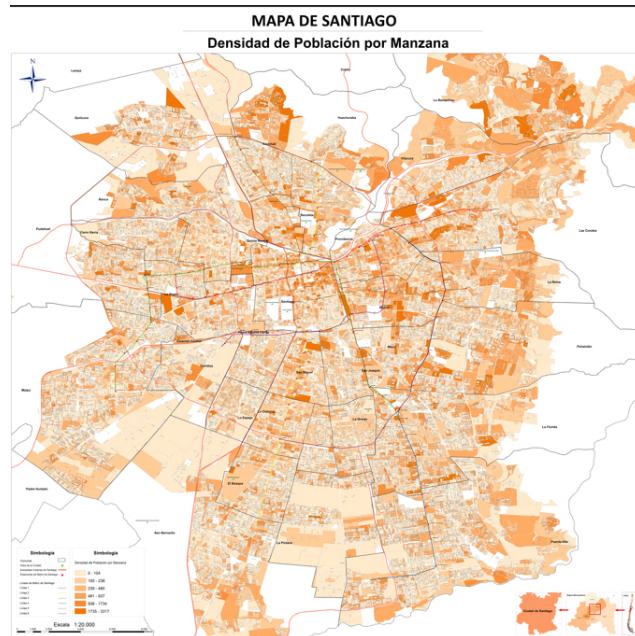


Figura 23: Mapa de Densidad de Población total Ciudad de Santiago Censo 2017-2018^a

^a <https://www.teramaps.com/blog/mapa-de-densidad-de-poblacion-total-ciudad-de-santiago>

Para tratar de capturar mejor esta complejidad, un paso más allá de los modelos Burgess y multinúcleo, que buscaban representar la ciudad de manera esquemática en base a ciudades observadas, están los modelos que buscan el equilibrio urbano. Estos modelos buscan representar la ciudad como el resultado de las decisiones de muchos y variados agentes (residentes de diversos niveles de ingreso, industrias de variados tipos) que compiten por un suelo escaso, y el mercado inmobiliario llega a un equilibrio (o sea, nadie puede cambiarse y mejorar). El mejor ejemplo de este grupo de modelos corresponde al modelo MUSSA (Martínez y Donoso, 2010), desarrollado inicialmente para la ciudad de Santiago y aplicado en muchas ciudades del mundo (Minnesota, París, Berlín, Singapur, Beijing, etc.). En este equilibrio urbano, existen dos componentes principales: la demanda, que es representada por agentes (residentes y negocios) que compran viviendas u otros bienes inmuebles; y la oferta, que es representada por las inmobiliarias que ofrecen esos bienes inmuebles. Cada agente elige la localización que maximiza su utilidad dados los atributos de localización y los precios, bajo restricción de presupuesto. Luego, con esa información, para cada localización, el agente define su disposición a pagar, dado el nivel de utilidad. Por otro lado, las inmobiliarias eligen qué ofrecer en cada lugar para maximizar sus ganancias, dada la tecnología y regulaciones. La transacción se hace mediante remates, en los que la propiedad se vende al mejor postor (i.e., aquel agente que está dispuesto a pagar más que otros por la propiedad). Así, se llega al equilibrio entre la oferta y la demanda. Un resumen del equilibrio urbano se puede ver en la Figura 24 :

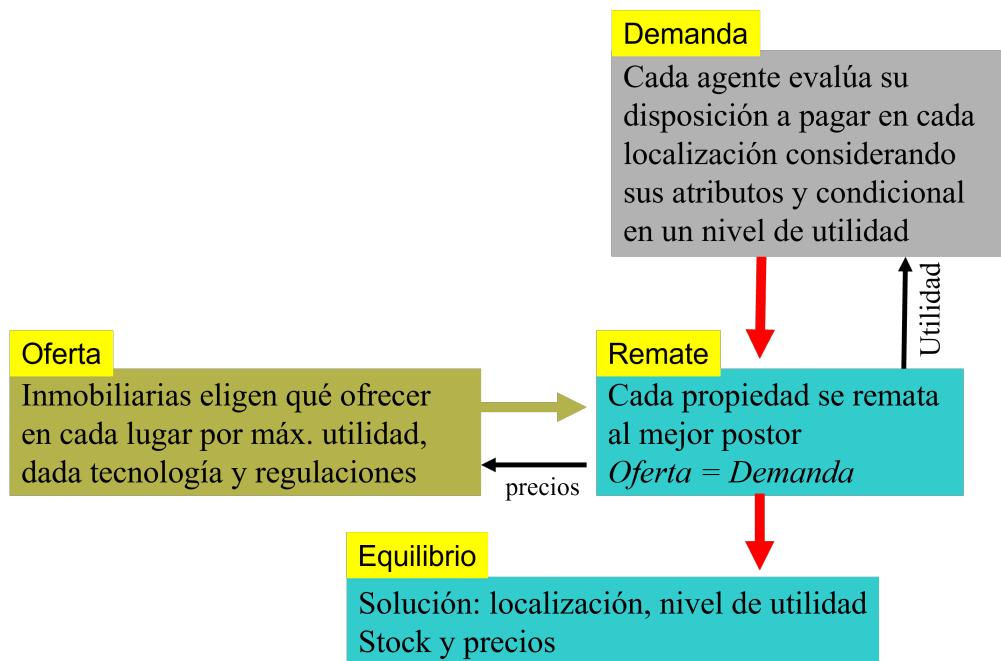


Figura 24: Equilibrio Urbano.

En este curso no se profundizará el análisis sobre el modelo de uso de suelo, más allá de las definiciones conceptuales entregadas en este sección. Los alumnos interesados pueden tomar el curso *Economía Urbana*, y/o revisar el libro (Martínez, 2018).

Sin perjuicio de lo anterior, para finalizar esta sección, mostraremos un resultado interesante que ilustra el equilibrio de agentes individuales en el mercado del suelo. Este resultado es conocido como la *ley de Hotelling*.

La ley de Hotelling explica algo que se observa en muchos mercados, explica por qué es racional que los productores hagan sus productos lo más similares posible. Esto también se conoce como el principio de diferenciación mínima, o como el modelo de ciudad lineal de Hotelling (Hotelling, 1929).

Considere una playa de la largo L en la que los bañistas se distribuyen uniformemente a lo largo de la costa, con el fin de contar cada uno con el mayor espacio posible de playa disponible solo para si mismo. Suponga ahora que llega a la playa un único vendedor a ponerse con un puesto de helados. ¿Dónde le convendrá localizarse a este vendedor para maximizar sus ventas? Si uno considera que para las personas será más probable comprar helado cuanto más cerca del heladero se encuentren, es fácil notar que la localización óptima para el heladero, aquella donde maximiza la venta de helados, será en $L/2$.

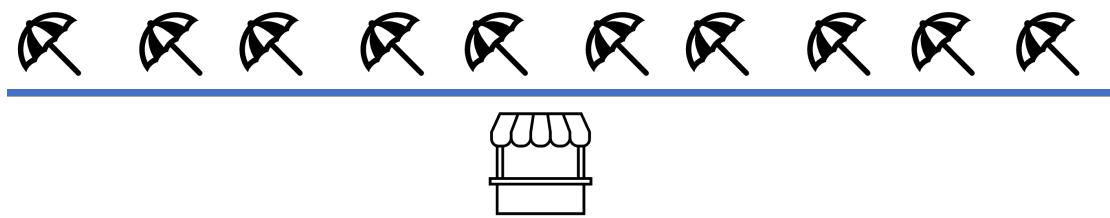


Figura 25: Ley de Hotelling

Considere ahora que llega a la playa un segundo vendedor que a ponerse con un puesto de helados. ¿Dónde le convendrá localizarse a este segundo vendedor? Es fácil ver que cualquier localización diferente a $L/2$ será sub-óptima para el segundo vendedor, pues implicaría renunciar a cierta demanda potencial de compradores que sería mejor atendida por el primer heladero. Entonces, en el equilibrio, ambos vendedores están localizados en el medio, cada uno atiende a la mitad de los consumidores y, en promedio, los usuarios tienen que caminar $L/4$ para comprar su helado. Lo mismo pasará si llega un tercer o un cuarto vendedor, para quienes también resultará óptimo instalarse en $L/2$. Lo que muestra la Ley de Hotelling es lo que vemos muchas veces en la ciudad donde, en una misa cuadra o casi uno al lado de otro, se ubican dos farmacias, dos bencineras y hasta todo un barrio que provee cierto tipo de servicios, como ocurre, por ejemplo, con el barrio *10 de Julio* en la ciudad de Santiago. El fenómeno también ocurre en otro tipo de mercados, no solo en el suelo. Esto explica, por ejemplo, por qué refrigeradores en el mismo rango de precios se ven casi idénticos de una marca a otra o por qué los menús de McDonalds y Burger King son muy similares.

Ahora, ¿Hay alguna localización de los vendedores que sea *socialmente* mejor que la que ocurre espontáneamente? Si claro. Si acaso los dos vendedores se ubicaran en $L/4$ y $3L/4$ respectivamente, cada uno seguiría atendiendo a la mitad de los bañistas, pero ahora los consumidores tendrían que caminar, en promedio, $L/8$ para obtener su helado. Sin embargo esta situación no es un equilibrio. Si acaso los dos vendedores empiezan localizados en $L/4$ y $3L/4$, tendrán incentivos para moverse a $L/2$, ya sea porque al hacerlo aumentarán marginalmente su participación de mercado o bien porque compensarán la pérdida producida porque el otro vendedor se movió al centro. Este resultado se pone a veces como un ejemplo en el que la regulación del mercado de uso de suelo es necesaria para llegar a un óptimo social, es decir, una localización en que hay un mayor beneficio global.

El modelo de Hotelling recién presentado suponía que los bañistas se ubicaban uniformemente a lo largo de la playa para maximizar el espacio disponible. ¿Cómo debiera cambiar la distribución de bañistas luego de la llegada de los vendedores de helados? Asumiendo que a los bañistas les gustaría estar cerca del los heladeros, es razonable pensar que los bañistas sacrificarán algo de su espacio privado disponible por estar más cerca del centro de la playa, llegando a algún tipo de distribución con mayor concentración en torno a los vendedores de helados, que dependerá de la heterogeneidad entre los bañistas en su preferencia relativa entre espacio de playa privado y la distancia necesaria para acceder a un helado. Aquellos bañistas que aman sobre todas las cosas los helados, se apiñarán en torno al heladero, mientras que aquellos a los que no les gustan tanto los helados y prefieren la privacidad, se localizarán mucho más lejos de $L/2$.

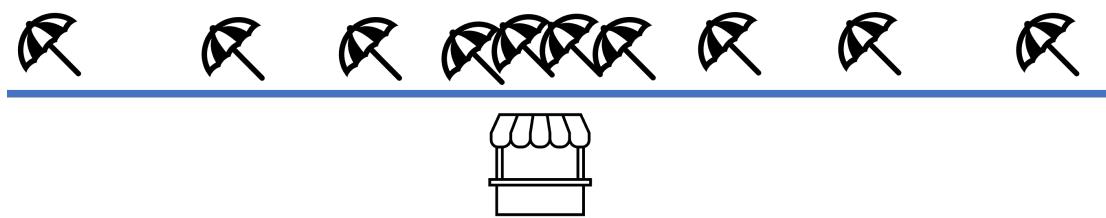


Figura 26: Ley de Hotelling + Cambio en el uso del Suelo

Supongamos finalmente que un grupo de emprendedores ofrece el servicio de reservar un puesto en la playa (llegando muy temprano), a quien le haga el mayor pago. ¿Cómo esperaríamos que fuera la distribución del valor transado por un puesto a lo largo de la playa? ¿Cómo esperaríamos que fuera la distribución del ingreso de los bañistas a lo largo de la playa a consecuencia de esto? ¿Cómo cambiarían los resultados anteriores si acaso se implementara un sistema de transporte que, comparado con la caminata, permitiera llegar más rápido a los extremos de la playa? Si observan con atención la ciudad, este tipo de fenómenos, que acá son descritos de forma estilizada, se ven en muchos casos, donde los bañistas corresponden a los hogares, los heladeros a las firmas y quienes reservan puestos cumplen el rol de la inmobiliarias. Este tipo de fenómenos es lo que busca ser modelado en un caso general con herramientas como MUSSA (Martínez y Donoso, 2010), utilizando el marco teórico representado en la Figura 24.

2.4. Generación y Atracción de Viajes

2.4.1. Introducción

En esta primera etapa del que es conocido como el *modelo clásico de cuatro etapas*. El objetivo del modelo de Generación-Atracción de viajes es calcular la cantidad de viajes diarios generados y atraídos por cada una de las zonas definidas, dadas las localizaciones de los hogares y de las firmas (trabajos, colegios, supermercados, etc.), y cualquier otro atributo del uso del suelo que pueda ser relevante. Cabe destacar que este modelo implica una simplificación y agregación importante en cuanto a que se asume que las actividades realizadas por cada persona pueden ser representadas por los viajes que realiza y lo que interesa es sólo el total de viajes generados o atraídos por zona que son explicados por los atributos de cada zona. Tiene la gracia, no menor, que permite modelar el total de viajes generados de manera práctica en base a variables que son relativamente fáciles de obtener y de proyectar, por lo que es un modelo ampliamente usado en la práctica.

Este supuesto requiere una primera clasificación de los viajes:

- Viajes basados en el hogar (BH): Corresponden a los viajes cuyo origen o destino corresponden al hogar de la persona que lo realiza. Esto permite establecer una relación entre los viajes realizados por los habitantes del hogar y sus características y/o actividades.
- No basados en el hogar (NBH): Son los viajes que no corresponden a la descripción anterior. Un ejemplo de ello sería un viaje desde el trabajo al comercio.

Los viajes también se pueden clasificar por su propósito (trabajo, estudio, ocio, etc.), por la hora del día en el que se realiza (punta mañana, medio día, punta tarde, etc.) o por el tipo de persona que realiza el viaje (estudiante, adulto mayor, etc.). La razón por la que se realiza esta clasificación es que los viajes con diferentes propósitos o realizados por distintos tipos de persona presentan perfiles diferentes, por ejemplo, los viajes con propósito trabajo se concentran en las horas punta. En consecuencia, los modelos suelen ser diferentes dependiendo de la desagregación que se esté considerando.

En cuanto a los modelos, es importante comenzar identificando sus tres componentes principales:

- Teoría: Corresponde al marco conceptual en el que se sustenta el modelo. En el caso de los modelos de generación y atracción, corresponde a las características de la zona que explica el patrón de viajes. Por ejemplo, es esperable que en aquellas zonas donde hay más hogares se generen más viajes, mientras que en las zonas con mayor cantidad de firmas se espera una mayor atracción de viajes.
- Estimación/calibración: A partir de datos obtenidos en terreno, se estiman los coeficientes o factores del modelo de forma tal que los resultados se ajusten a la situación observada. En este caso, se ajustan los coeficientes de modo que las características observadas de los hogares reproduzcan el patrón de viajes.
- Pronóstico: En función de los coeficientes obtenidos para el modelo ajustado, se evalúa el modelo para los datos correspondientes a escenarios futuros.

Los modelos requieren información para ser calibrados. Dicha información se puede recolectar de diferentes maneras: realizando observaciones (estado de las calles), haciendo preguntas a la gente (encuestas), o bien realizando mediciones (flujo de vehículos). La información obtenida puede estar en forma catastral (un censo) o muestral (encuesta). A su vez, las encuestas pueden ser de preferencias declaradas (PD) o de preferencias reveladas (PR). La información también puede ser mostrada mediante secciones transversales y series de tiempo.

La herramienta fundamental que se usa para este modelo es la encuesta origen-destino (EOD), la cual recopila una muestra aleatoria de las manzanas de cada zona, y después se muestran un par de casas en cada manzana. En el caso de Santiago, la EOD tiene una muestra de alrededor de 16.000 hogares. Esta encuesta se hace usualmente de manera tradicional, es decir, el encuestador va a la casa de alguien y hace las preguntas necesarias, pero actualmente se está probando el procesamiento de datos pasivos (que no requieren cooperación directa por parte de las personas), tales como los datos GPS de los celulares o los datos de la tarjeta Bip!. Los datos provenientes de la EOD se pueden clasificar por su nivel de análisis (zona, residencia, individuo).

¿Cuál es la variable dependiente en la modelación de la generación de viajes? Esto va a depender del problema, pero generalmente son los viajes con origen o destino en una zona o en un tipo de hogar, con un propósito y período de tiempo determinados (por ejemplo, viajes con origen en la zona i , propósito trabajo, punta mañana).

En este curso se abordarán 3 modelos de Generación/Atracción:

- Factor de Crecimiento
- Regresión Lineal
- Análisis por Categorías

2.4.2. Modelo de Factor de Crecimiento

El modelo de factor de crecimiento (Ortúzar y Willumsen, 2011) consiste en ponderar los viajes generados o atraídos en cada zona por un único factor. Si bien es el modelo más sencillo, también es el de peor rendimiento, por lo que se recomienda su uso sólo a nivel de “idea”, es decir, para comprobar si vale la pena el análisis profundo de un problema en particular. Este modelo se representa con la siguiente ecuación:

$$O_i^f = F_i * O_i^a$$

En esta ecuación:

- O_i^a : Viajes actuales que se originan en la zona i .
- O_i^f : Viajes futuros que se originarán en la zona i .
- F_i : Factor de crecimiento. Este factor se puede definir de la siguiente manera:

$$F_i = \frac{f(TM_i^f, P_i^f, I_i^f)}{f(TM_i^a, P_i^a, I_i^a)}$$

La ecuación anterior indica que el factor de crecimiento se calcula como una razón de dos funciones basadas los siguientes datos:

- TM_i^a : Tasa de motorización actual en la zona i .
- P_i^a : Población actual en la zona i .
- I_i^a : Ingreso actual en la zona i .
- TM_i^f : Tasa de motorización futura en la zona i .
- P_i^f : Población futura en la zona i .
- I_i^f : Ingreso futuro en la zona i .

Estos datos definen a la zona de un modo muy general o “grueso”, lo que explica la pobre calidad de este modelo. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo: se tiene una zona con 500 hogares, de los cuales 250 tienen auto y 250 no lo tienen. Los hogares con auto generan 6 viajes/día, mientras que los hogares sin auto generan 2,5 viajes/día. Suponiendo que en el futuro todos los hogares tendrán auto ¿cuál es la predicción del modelo de factor de crecimiento?

En primer lugar, hay que calcular O_i^a . Para ello, se deben sumar los viajes generados por los hogares sin auto y los generados por los hogares con auto:

$$O_i^a = 250 * 6 + 250 * 2.5 = 1500 + 625 = 2125 \text{ viajes/día}$$

Luego, hay que calcular F_i . En este caso, dado que sólo se cuenta con información de la tasa de motorización, sólo se considerará esta variable para el cálculo del factor de crecimiento. La tasa de motorización se calcula del siguiente modo:

$$TM = \frac{\text{número de hogares con auto}}{\text{número total hogares}}$$

Así, las tasas de motorización actuales y futuras están dadas por:

$$TM_i^a = \frac{250}{500} = 0.5 \quad TM_i^f = \frac{500}{500} = 1$$

De esta manera, se obtiene el factor de crecimiento:

$$F_i = \frac{TM_i^f}{TM_i^a} = \frac{1}{0.5} = 2$$

Finalmente, se calcula los viajes generados en el futuro:

$$O_i^f = F_i * O_i^a = 2 * 2125 = 4250 \text{ viajes/día}$$

De esta forma, se ha obtenido que si en el futuro todos los hogares de la zona tienen auto, el número de viajes se duplicará. Este resultado es bastante discutible, de hecho se podrían plantear varias dudas al respecto:

- ¿La relación entre generación de viajes y tasa de motorización es realmente lineal?
- ¿La tasa de motorización es el único factor que influye en la generación de viajes?
- ¿Todos los hogares con auto generarán la misma cantidad de viajes?
- ¿Qué ocurrirá si los hogares poseen un segundo auto?

2.4.3. Modelo de Regresión Lineal

El modelo de regresión lineal es un modelo que permite establecer una relación lineal entre una variable dependiente o explicativa (la variable que se quiere modelar) y una serie de variables independientes o explicativas (que explican el comportamiento de la variable independiente). Este es un modelo flexible utilizado para todo tipo de análisis, incluyendo modelos de generación de viajes como en este caso. La teoría y práctica para aplicar este tipo de modelos se basa en el Teorema de Gauss-Markov, que excede los alcances de este curso y que se verá más delante en el curso **Análisis de Datos para Ingeniería**. En este apunte solo se hará referencia a la **intuición** general del modelo y su aplicación en este contexto, invitando a los alumnos interesados en aplicar este tipo de herramientas profesionalmente a completar su formación al respecto.

Este modelo se describe por una función que relaciona el valor de una variable dependiente y_n , para observación n , como función lineal de un conjunto de K variables independientes x_{kn} de la siguiente forma:

$$y_n = \sum_{k=1}^K \beta_k * x_{kn} + \varepsilon_n$$

donde β_k son los coeficientes del modelo que se busca estimar y ε_n es el error del modelo.

El objetivo del modelo es, a partir de los datos observados de y_n (en este caso, los viajes generados o atraídos por una zona n) y de los x_{kn} (e.g. uso de suelo de la zona n), estimar los coeficientes de forma tal de que el modelo reproduzca la situación observada **minimizado la suma del cuadrado de los errores**.

Se puede mostrar que el vector de estimadores $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_K)^t$ que minimiza la suma de los errores al cuadrado, corresponde a:

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

donde $Y = (y_1, \dots, y_N)^t$ y X es una matriz de $N \times K$, donde cada columna es igual a $X_k = (x_{k1}, \dots, x_{kN})^t$.

La Tabla 5 muestra las variables explicativas que pueden influir en la generación y la atracción de viajes, de manera general y también para los propósitos estudio y trabajo:

Tabla 5: Posibles variables explicativas por propósito

	Generales	Estudio	Trabajo
Generación (O_i)	Población Ingreso Edad Ocupación Tamaño Familiar Tasa de Motorización	Número de estudiantes	Número de trabajadores
Atracción (D_j)	Presencia de centros comerciales, hospitales, cines, parques. Volumen de ventas Accesibilidad	Número de establecimientos educacionales	Número de puestos de trabajo Área total de empresas

La regresión puede ser a nivel zonal o a nivel hogar. En el caso de una regresión a nivel zonal, en primer lugar, se propone la siguiente hipótesis inicial: *El número de viajes producidos o atraídos por cada zona es función lineal de las características socioeconómicas de los hogares de la zona, o de las características de uso de suelo de la zona.*

Al asumir que esto se cumple, se requiere que exista gran varianza entre las zonas para poder estimar. Esto se puede observar en la Figura 27. En el gráfico de la izquierda, existe poca varianza entre las zonas, lo que causa que la regresión lineal no sea muy efectiva. En el de la derecha, existe una mayor varianza, por lo que se obtiene un mejor ajuste en la regresión lineal. Por lo tanto, se debe hacer un número de observaciones igual al número de zonas para obtener una regresión con buen ajuste. Además, se recomienda excluir las zonas “cero”, es decir, viajes basados en el hogar en zonas no residenciales, porque su inclusión usualmente empeora el ajuste de la regresión lineal (al añadir datos con $x = 0$ e $y = 0$).

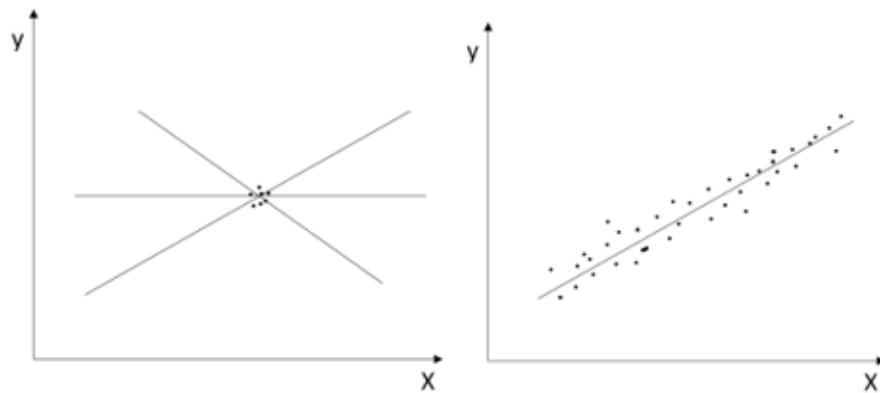


Figura 27: Datos con varianza baja (izquierda) y varianza alta (derecha).

A modo de ejemplo, la Tabla 6 contiene los parámetros β de un modelo de atracción con regresión lineal zonal hecha en la ciudad de Puerto Montt. Este modelo se realizó con viajes en hora punta mañana, no basados en el hogar, y cuyo propósito era trabajo.

Tabla 6: Estimadores $\hat{\beta}$ e indicadores de bondad de ajuste del un modelo de regresión lineal de atracción de viajes punta mañana para Puerto Montt

	Parámetro $\hat{\beta}$	<i>t</i>
Superficie de oficinas	0,00467	7,0
Atenciones médicas anuales	0,000789	3,8
Matrícula Básica Colegio Particular	0,119	3,8
Matrícula Básica Colegio Particular Subencionado	0,0471	2,6
R^2	0.76	

En la Tabla 6 se reportan primero los estimadores $\hat{\beta}$ de los parámetros del modelo β del modelo, junto con algunos indicadores de bondad de ajuste del modelo, como el test *t* de cada parámetro, el R^2 que mide el ajuste general del modelo y el peso relativo de cada parámetro. La derivación, práctica e interpretación de estos indicadores se verá en profundidad en el curso *Análisis de Datos para Ingeniería*, pero ahora nos quedaremos solo con una definición intuitiva. Primero que nada, el signo de los parámetros sugiere que todos los factores de uso de suelo considerados (superficie de oficinas, Matrículas, etc.) tienen un efecto positivo en el número de viajes atraídos y, por ejemplo, una matrícula básica en colegio particular implica, en valor esperado, 0.12 viajes atraídos en punta mañana. El R^2 se construye en base a los residuos (error del modelo estimado) y puede interpretarse como el *porcentaje de varianza explicada*, por lo que uno debiera tender a preferir modelos que tienen un R^2 más grande. Sin embargo, hay que tener cuidad pues este indicador solo puede utilizarse para comparar modelos estimados con los mismos datos y en los cuales la variable dependiente esté en la misma escala². El valor del test *t* de cada parámetro estimado corresponde a un estadístico (algo que construimos de los datos) que permite evaluar la hipótesis nula de si acaso ese parámetro en particular es igual a cero, o sea que de verdad afecta la generación de viajes en este ejemplo. Utilizado varios supuestos y desarrollos se puede afirmar, con cierto nivel de confianza, que se rechaza o acepta (*no se puede rechazar*) la hipótesis nula si acaso el valor de *t* sobrepasa o no cierto *valor crítico*. Si uno considera un nivel de confianza de 95% y una tiene una muestra suficientemente grande, el valor crítico de *t* es 1,96, por lo cual, en este ejemplo, para todos los parámetros se rechaza la hipótesis nula, por lo que correspondería incluirlos en el modelo.

En algunas ocasiones, realizar una regresión lineal a nivel zonal no es el mejor método. Puede que existan muy pocas zonas, lo que lleva a una menor varianza. En tal caso, sería más apropiado usar una regresión a nivel hogar. Para una regresión lineal a nivel hogar, se propone la siguiente hipótesis: *El número de viajes generados por hogar es función lineal de las características de los hogares*.

Por ejemplo, se puede tener el siguiente modelo con dos parámetros:

$$\frac{Viajes}{hogar} = 0,91 + 1,44 * \text{Número de trabajadores} + 1,07 * \text{Número de autos}$$

² Todos los detalles escabrosos luego en el curso Análisis de Datos para Ingeniería

En este modelo, cada parámetro representa la cantidad de viajes por hogar que se añaden si la variable correspondiente aumenta en una unidad. En la ecuación, si se añaden 100 trabajadores, el número de viajes por hogar aumenta en 144. La constante representa la cantidad de viajes que no contemplan los parámetros del modelo. En este caso, son los viajes que no dependen ni del número de trabajadores ni del número de autos.

¿Qué pasa si las relaciones no son lineales? En tal caso, es posible linealizar el modelo usando escala logarítmica, o un modelo lineal por tramos. Por ejemplo, se tiene el siguiente modelo:

$$\frac{\text{Viajes}}{\text{hogar}} = 0,84 + 1,41 * x_1 + 0,75 * z_1 + 3,14 * z_2$$

en el cual x_1 es el número de trabajadores, z_1 es una variable dummy que vale 1 para hogares con 1 auto y 0 en otro caso, mientras que z_2 es una variable dummy que vale 1 para hogares con 2 ó + autos y 0 en otro caso.

En este modelo, z_1 y z_2 son parámetros que representan el efecto de la cantidad de autos en el hogar. La relación es no-lineal, pero en este caso se puede representar como un modelo lineal por tramos, tal como lo muestra el gráfico de la Figura 28:

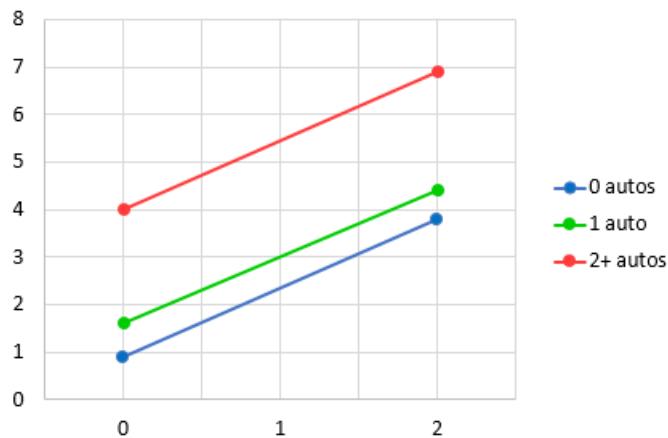


Figura 28: Modelo lineal por tramos.

Por último, para calcular los viajes totales de una zona a partir de una regresión a nivel hogar, gracias a que el modelo es lineal, simplemente se debe multiplicar el resultado del modelo por el número de hogares en la zona. Este no será válido en modelos de elección discreta, que veremos más adelante. Para los dos modelos de viajes por hogar mostrados anteriormente, se tendrán los siguientes resultados:

$$O_i = N_i * (0,91 + 1,44 * x_1 + 1,07 * x_2)$$

$$O_i = N_i * (0,84 + 1,41 * x_1 + 0,75 * z_1 + 3,14 * z_2)$$

en la que N_i es la cantidad de hogares en la zona i y O_i la cantidad de viajes totales en la zona i .

2.4.4. Modelo de Análisis por Categorías

Tal como lo indica su nombre, este modelo se basa en la definición de categorías de hogares de acuerdo a ciertas características. Para ello, se supone que las tasas de generación de viajes son constantes para determinados tipos de hogares (Ortúzar y Willumsen, 2011). De hecho, lo que cambia es la distribución de hogares por categoría en la zona en cuestión. El modelo, muy sencillo, se escribe de la siguiente manera. Definiendo:

- h : tipo de hogar
- $t(h)$: Promedio de Viajes realizados por los habitantes del hogar tipo h , en donde h puede estar determinado por diferentes categorías tales como tasa de motorización, ingreso, etc.
- $a_i(h)$: número de hogares tipo h en la zona i

Con estas definiciones, es posible modelar el número de viajes con origen en la zona i como la suma del número de hogares de cada categoría en la zona i multiplicado por la tasa de generación de viajes de dicha categoría, es decir:

$$O_i = \sum_{h \in H} a_i(h) * t(h)$$

Sin embargo, se puede mostrar (Guevara y Thomas, 2007) que modelo de análisis por categorías puede formularse también como una regresión lineal :

$$y_n = \sum_{c \in C} \beta_c 1_{n \in c} + \varepsilon_n$$

En esta ecuación:

- y_n : Son los viajes del hogar n .
- C : Es un conjunto de clases (c) por las cuales se pueden clasificar los hogares. Pueden ser clases de ingresos, tasa de motorización, número de habitantes, etc., o bien una combinación de éstas (por ejemplo, hogares de ingreso medio con 1 auto). Las categorías usadas van a depender del problema.
- β_c : Parámetro asociado a la clase c .
- $1_{n \in c}$: Este valor es 1 si el hogar n pertenece a la clase c y 0 si no.
- ε_n : Error asociado al hogar n .

Resolviendo el problema de minimización de errores al cuadrado, es fácil mostrar que el estimador $\hat{\beta}_c = t(c)$. Esto tiene la enorme ventaja de que permite aplicar todas las herramientas estadísticas del modelo de regresión lineal al modelo de análisis por categorías para, por ejemplo, hacer test de hipótesis sobre el número de categorías.

También se puede realizar predicciones a futuro con este modelo. Para ello, se deben simular los valores de $a_i(h)$ y $t(h)$ en cada corte temporal.

Para ver este modelo en acción, usemos el ejemplo mostrado anteriormente para probar el modelo de factor de crecimiento: se tiene una zona con 500 hogares, de los cuales 250 tienen auto y 250 no lo tienen. Los hogares con auto generan 6 viajes/día, mientras que los hogares sin auto generan 2,5 viajes/día. Suponiendo que en el futuro todos los hogares tendrán auto ¿cuál es la predicción del modelo de análisis por categorías? En este caso, se pueden definir los hogares tipo 1 (con auto) y 2 (sin auto). Luego:

$$t(1) = 6 \frac{\text{viajes}}{\text{hogar*día}} \quad t(2) = 2,5 \frac{\text{viajes}}{\text{hogar*día}}$$

$$O_i^a = 250 * 6 + 250 * 2,5 = 2125 \frac{\text{viajes}}{\text{día}}$$

$$O_i^f = 500 * 6 = 3000 \frac{\text{viajes}}{\text{día}}$$

Veamos otro ejemplo, esta vez con datos reales. A continuación, se muestran las tasas de generación de viajes originados en el hogar, en el período punta mañana, con propósito trabajo y estudio. Se observa que la tasa de generación aumenta tanto con el ingreso como con el número de vehículos por hogar, sin embargo, también se puede observar que el aumento no es igual para ambos propósitos.

Tabla 7: Tasas de generación de viajes según propósito

Ingreso	Rango	Propósito Trabajo			Propósito Estudio		
		0 autos	1 auto	2+ autos	0 autos	1 auto	2+ autos
Bajo	< \$170.000	0,351	0,532	0,660	0,450	0,468	0,582
Medio	Entre \$170.000 y \$300.000	0,621	0,802	0,930	0,468	0,487	0,600
Alto	> \$300.000	0,891	1,072	1,200	0,473	0,491	0,605

El modelo de Análisis por Categorías tiene ciertas ventajas y desventajas en comparación con otros modelos.

Ventajas:

- Es un concepto muy sencillo e intuitivo.
- Es una regresión lineal en clases.
- Pertinencia de clases es verificable con pruebas estadísticas.
- Calcular tasa generación es trivial.

Desventajas:

- Potencialmente pobre representación de la realidad (modelo muy simplificado).
- Predecir la distribución de los hogares puede ser difícil (hay que simular $a_i(h)$).

Para concluir este tema, se recuerda que los modelos de generación de viajes incluyen datos de uso de suelo, demografía y accesibilidad para calcular los viajes generados (O_i) y atraídos (D_j).

Es importante notar que el modelo debiera ser tal que $\sum_i O_i = \sum_j D_j$, es decir, el total de viajes generados por todas las zonas sea igual al total de viajes atraídos por todas las zonas. Si esto no ocurre, es necesario realizar un ajuste de los viajes predichos, en base al modelo que sea más confiable en términos de precisión en la toma de datos y rigurosidad de la metodología. Esta corrección consiste en calcular un factor como el total de viajes más confiable dividido en el total de viajes menos confiables, luego se pondera el vector de viajes menos confiable por este factor. Por último, es necesario mencionar que ninguno de estos modelos considera los costos de transporte, por lo que en esta etapa se está ignorando la elasticidad.

2.4.5. Problemas Propuestos

Problema 1

A usted lo llaman de la empresa Transportes S.A. debido a sus acabados conocimientos de transporte para encomendarle una tarea, la cual consiste en estimar el número total de viajes futuros para una zona específica de la ciudad. Para esto la empresa realizó dos tipos de estudios: i) Un análisis por categorías donde los hogares fueron clasificados según dos características: tasa motorización (Tiene o No Tiene automóvil) y nivel de ingreso (Alto, Medio y Bajo) y ii) un Análisis por Clasificación Múltiple (regresión lineal) usando las mismas categorías que para el caso i) tomando como categoría base el ingreso alto que tiene automóvil. Sin embargo, un problema computacional borró parte de los registros quedando en la actualidad la siguiente información disponible:

Tabla 1: Coeficientes y estadísticos t para ACM.

Categoría	Coef.	t
Intercepto	13,6	12,87
Alto – No Tiene	-1,2	4,22
Medio – Tiene	-2,5	5,12
Medio – No tiene		1,55
Bajo – Tiene	-4,3	1,82
Bajo – No Tiene		3,45

Tabla 2: Número de hogares en año base por categoría.

I/A	Tiene	No Tiene	TOTAL
Alto		50	
Medio	1256		2800
Bajo			
TOTAL		3500	

Tabla 3: Total de viajes observados en el año base por categoría.

I/A	Tiene	No Tiene	TOTAL
Alto			
Medio			27000
Bajo			
TOTAL		21000	

Con la información proporcionada, se pide:

- (a) Determinar el valor de los coeficientes del análisis por clasificación múltiple para la categoría Medio-No Tiene y Bajo No Tiene.
- (b) Se ha pronosticado la cantidad de hogares en cada categoría para una zona específica de Santiago tal como se detalla en la Tabla 4. Utilice sus resultados y los datos de esta tabla para estimar el número total de viajes futuros en esta zona.

Tabla 4: Número de hogares pronosticados por categoría.

I/A	Tiene	No Tiene	TOTAL
Alto	130	20	150
Medio	300	220	520
Bajo	35	270	305
TOTAL	465	510	975

Problema 2

Para una zona compuesta por 2000 hogares, determine el número de viajes generados considerando los siguientes modelos desagregados por hogar.

$$Y_1 = 0,1 + 0,4X_1 + 0,07X_2 + 0,6X_3$$

$$Y_2 = 0,08 + 0,3X_1 + 0,08X_2 + 0,8Z_1 + 1,6Z_2$$

donde Y es el número de viajes por hogar en hora punta; X_1 el número de empleados por hogar; X_2 el número de residentes en el hogar; X_3 el número de autos en el hogar; Z_1 una variable dummy que indica si el hogar tiene o no automóvil; y Z_2 es una variable dummy que indica si el hogar cuenta con dos automóviles o más.

Del total de hogares un 50% no posee auto y un 30% posee sólo un auto. Suponga que los hogares tienen como máximo 2 autos, el número de empleados medio por hogar es 1,5 y el número de residentes medio es 3,5.

Compare y analice ambas formulaciones.

Problema 3

A partir del análisis de clasificación múltiple considerando clasificación de acuerdo a ingreso (Alto, Medio y Bajo) y posesión de automóvil (Tiene o No Tiene)

- (a) ¿En qué se modifican los resultados al cambiar la categoría base?
- (b) Para un caso en que la categoría base fuese “Ingreso Bajo que Tiene vehículo”, indique el signo que debieran tener los coeficientes asociados a cada una de las categorías.
- (c) Imagine ahora que se toma como categoría base el Ingreso Medio que Tiene vehículo. Indique el signo esperado para cada uno de los coeficientes asociados a cada una de las categorías. Justifique.

Problema 4

Para modelar en forma agregada la generación de viajes G (Viajes/día) en una zona urbana se han planteado los siguientes modelos.

1. $G = 338 + 2.6X_1 - 1,5X_2 - 0,4X_3$
2. $G = 227 + 2.0X_1 + 0.2X_2 + 0.3X_3 + 0.1X_4$
3. $G = X_1(1.37 + 0.5\frac{X_2}{X_1} - 0.2\frac{X_3}{X_1} + 0,4X_4)$
4. $G = 430X_1 + 22X_2 - 30X_3 + 1,7X_4X_1$

donde X_1 es el número de habitantes por zona; X_2 el número de personas con empleo; X_3 el número de personas mayores de 65 años y X_4 la proporción de hombres. ¿Qué modelo elegiría? Justifique.

2.5. Distribución de Viajes

2.5.1. Introducción

En esta sección, se abordarán los modelos de distribución de viajes, los cuales permiten calcular la cantidad de viajes entre cada par origen destino (por ejemplo, cuántos viajes se realizan desde Maipú a Santiago Centro en punta mañana), respondiendo así a la pregunta “¿hacia donde viajar?”. Estos modelos utilizan los resultados de la etapa de generación y atracción de viajes, es decir, los vectores de orígenes y destinos, dados por $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ y $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$, respectivamente. El resultado de esta etapa es una matriz origen-destino (Figura 29). Un ejemplo de ello es la matriz O-D de Santiago en día laboral que se reportaba antes en la Tabla 4.

O/D	1	...	n	O_i
1				O_1
...		$i V_{ij}?$		
n				O_n
D_j	D_1	...	D_n	T

Figura 29: Estructura de matriz O-D.

Es importante notar que en esta matriz, T es la suma de todos los viajes en el problema, por lo que naturalmente se debe satisfacer la siguiente condición:

$$T = \sum_i O_i = \sum_j D_j$$

En esta etapa se deben encontrar los valores de V_{ij} para completar la matriz. Para ello, se deben tener en cuenta varias restricciones, tales como viajes generados y atraídos, costos y matrices observadas. A continuación, se presentarán los métodos disponibles para la modelación de la distribución de viajes.

2.5.2. Métodos de Factor de Crecimiento

Al igual que en el caso del modelo de generación y atracción, el factor de crecimiento (Ortúzar y Willumsen, 2011) es el método más sencillo, por lo que sólo se recomienda su uso en un análisis táctico o cuando el proyecto es muy acotado (por ejemplo, la instalación de un semáforo en una intersección). Existen tres versiones de este método. La primera versión es el **factor de crecimiento uniforme**, el cual sólo utiliza información sobre la variación de T :

$$V_{ij}^f = F * v_{ij}^a \quad \forall i, j$$

donde V_{ij}^f corresponde a los viajes desde la zona i y la zona j en el futuro, mientras que v_{ij}^a corresponde a los viajes actuales (o del año base) en el mismo par.

La segunda versión corresponde a los **métodos simplemente acotados**, los cuales usan factores de crecimiento diferenciados para cada origen (F_i) o a cada destino (F_j). El modelo de factor de crecimiento simplemente acotado a orígenes está dado por la siguiente expresión:

$$V_{ij}^f = F_i * v_{ij}^a \quad F_i = \frac{O_i^f}{\sum_j v_{ij}^a} = \frac{O_i^f}{O_i^a}$$

donde que O_i^f representa los viajes futuros que se originan en la zona i , y O_i^a representa los viajes actuales que se originan en i . Es decir, el factor de crecimiento la zona i se calcula como la razón entre los viajes generados en el futuro y los viajes generados en el año base en dicha zona.

Análogamente, se tiene el factor de crecimiento simplemente acotado a destinos:

$$V_{ij}^f = F_j * v_{ij}^a \quad F_j = \frac{D_j^f}{\sum_i v_{ij}^a} = \frac{D_j^f}{D_j^a}$$

donde D_j^f y D_j^a representan los viajes futuros y actuales atraídos en la zona j , respectivamente. En este caso, el factor de crecimiento asociado a la zona j se calcula como la razón entre los viajes futuros y los viajes actuales atraídos en la zona j .

Mientras se desarrollan los modelos, es fundamental comprobar que se satisfagan las restricciones de orígenes y destinos, dadas por:

$$O_i = \sum_j V_{ij}^f \quad D_j = \sum_i V_{ij}^f$$

Es decir, si se da el vector O_i^f como dato para hacer el modelo, la suma de las filas en la matriz de los V_{ij}^f modelados debe ser igual al O_i^f dado. Esto es análogo para los destinos.

Para entender este método, se tiene el siguiente ejemplo: Sea un problema de distribución con T futuro igual a 69 viajes y con la siguiente matriz O-D de viajes actuales v_{ij}^a :

2	5	7
4	6	9
3	8	7

¿Cuál va a ser el factor de crecimiento? Con la matriz, se pueden obtener los viajes actuales generados O_i^a sumando sobre las filas:

			O_i^a
2	5	7	14
4	6	9	19
3	8	7	18
			51

Al sumar los tres valores de O_i^a , se obtiene un total de viajes actuales de 51. Dado que también se cuenta con el total de viajes futuros, es posible calcular el factor de crecimiento uniforme:

$$F = \frac{T^f}{T^a} = \frac{69}{51} = 1,3529$$

Luego, se pondrá la matriz actual por el factor de crecimiento obtenido, es decir, se multiplican todos los elementos de la matriz por dicho factor. Así, se obtiene la matriz futura de viajes:

			O_i^a			TOT
2	5	7	14			
4	6	9	19			
3	8	7	18			
			51	$\times 1,3529 =$		
				2.7	6.8	9.5
				5.4	8.1	12.2
				4.1	10.8	9.5
						24.4
						69

Supongamos que ahora también se tiene el vector de viajes generados en el futuro O_i^f :

O_i^f
23
21
25
69

En tal caso, es posible usar el método simplemente acotado a orígenes. Se calcula el vector de factores de crecimiento por origen:

$$F_1 = \frac{23}{14} \quad F_2 = \frac{21}{19} \quad F_3 = \frac{25}{18}$$

Luego, multiplicando estos factores por los valores de la matriz en las filas correspondientes, se obtiene una segunda matriz futura:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & O_i^a & \\ \hline 2 & 5 & 7 & 14 \\ \hline 4 & 6 & 9 & 19 \\ \hline 3 & 8 & 7 & 18 \\ \hline & & 51 & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline F_i \\ \hline 1.64 \\ \hline 1.11 \\ \hline 1.39 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & TOT & o_i^f \\ \hline 3.3 & 8.2 & 11.5 & 23 \\ \hline 4.4 & 6.6 & 10.0 & 21 \\ \hline 4.2 & 11.1 & 9.7 & 25 \\ \hline & 69 & 69 & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Notar que en ambos casos se cumplen las restricciones impuestas: total de viajes y generación de viajes en el futuro. No obstante, no necesariamente la atracción de viajes en el futuro se ajusta a la situación observada. Se tendría una situación análoga si se acota por destinos en lugar de orígenes.

En el caso de contar con los vectores de viajes generados y atraídos en el futuro, es posible considerar la posibilidad de desarrollar el **método doblemente acotado**, la tercera versión del método de factor de crecimiento, definido del siguiente modo:

$$V_{ij}^f = F_{ij} * v_{ij}^a$$

En este caso se tendría un factor para cada elemento de la matriz origen-destino, formando una matriz de factores. Esta matriz de factores F_{ij} dependerá tanto de la generación como de la atracción de viajes en el futuro. ¿Cómo se calcularía?

Una primera idea (que veremos que no es tan buena) sería calcular los factores simplemente acotados por orígenes y destinos para posteriormente promediarlos, es decir:

$$F_{ij} = \frac{F_i + F_j}{2} = \frac{\frac{O_i^f}{O_i^a} + \frac{D_j^f}{D_j^a}}{2}$$

Usemos el ejemplo anterior. Se tiene una zona con un total de viajes futuros T^f igual a 69 y con la siguiente matriz actual:

2	5	7
4	6	9
3	8	7

Además, se tienen los siguientes vectores de generación y atracción en el futuro, denotados por O_i^f y D_j^f respectivamente:

O_i^f
23
21
25
D_j^f 15 28 26 69

En primer lugar, se calculan los vectores de generación y atracción actuales (O_i^a y D_j^a , respectivamente) simplemente sumando sobre las filas y columnas de la matriz observada:

				O_i^a
2	5	7	14	
4	6	9	19	
3	8	7	18	
D_j^a	9	19	23	51

Con los vectores de generación y atracción actuales y futuros (señalados en verde), se calculan los vectores de factor de crecimiento F_i y F_j como la razón entre generación o atracción futura y actual, según corresponda:

				F_i
				1.64
				1.11
				1.39
F_j	1.67	1.47	1.13	

Luego, se calcula la matriz de factores promediando los valores de los dos vectores de factor de crecimiento obtenidos anteriormente (señalados en amarillo):

1.66	1.56	1.39
1.39	1.29	1.12
1.53	1.43	1.26

Finalmente, se ponderan los viajes actuales por sus respectivos factores de crecimiento, obteniéndose la siguiente matriz de viajes futuros:

				O_i^a					TOT	O_i^f			
D_j^a				1.66	1.56	1.39			3.3	7.8	9.7	20.8	23
				1.39	1.29	1.12			5.6	7.7	10.1	23.4	21
				1.53	1.43	1.26			4.6	11.4	8.8	24.8	25
D_j^a	9	19	23	51			TOT	13.5	26.9	28.6	69		
					D_j^f	15	28	26			69		

Si bien el total de viajes de la matriz futura efectivamente da como resultado 69, los vectores de generación y atracción futuros calculados de esta manera (en azul) no concuerdan con los vectores futuros dados como dato (en verde). En otras palabras, no cumplen con ninguna de las restricciones señaladas y, por lo tanto, el uso del promedio de los factores no es adecuado.

Una solución más apropiada es la resolución de un problema de punto fijo: un proceso iterativo en el cual se calcula un factor que cumpla la restricción de orígenes y luego, a partir de los datos ya ajustados, se calcula un factor que cumpla la restricción de destinos. Después de ajustar, se vuelve a calcular un factor para los orígenes y la iteración continúa hasta lograr la convergencia, es decir, hasta que se obtenga un resultado que cumpla con ambas restricciones bajo cierto margen de error. Se puede mostrar que este tipo de método *iterativo proporcional* o de *tabla de doble entrada* permite, bajo ciertas condiciones, encontrar una solución única al problema.

A continuación, se mostrará el método de Furness (Robillard y Stewart, 1974) para obtener modelos de factor de crecimiento doblemente acotados.

Sea:

$$V_{ij} = v_{ij} a_i b_j$$

en el que V_{ij} son los viajes de i a j futuros, mientras que v_{ij} son los viajes de i a j actuales. Los vectores de origen y destino futuros O_i y D_j son datos del problema (NOTA: para simplificar notación, de ahora en adelante se denotarán los vectores futuros sin el superíndice f).

El proceso para el cálculo de la matriz futura es el siguiente:

1. PASO INICIAL: Se asume $b_j^0 = 1$. Luego, se debe encontrar un a_i^0 tal que se satisfaga la restricción de orígenes:

$$O_i = \sum_j V_{ij} \Rightarrow O_i = \sum_j v_{ij} a_i^0 b_j^0 \Rightarrow O_i = a_i^0 \sum_j v_{ij} b_j^0 \Rightarrow a_i^0 = \frac{O_i}{\sum_j v_{ij} b_j^0}$$

2. ITERACION: Usando los a_i^n (a_i de la iteración anterior), se debe encontrar un b_j^{n+1} tal que

se cumpla la restricción de destinos.

$$D_j = \sum_i V_{ij} \Rightarrow D_j = \sum_i v_{ij} a_i^n b_j^{n+1} \Rightarrow D_j = b_j^{n+1} \sum_i v_{ij} a_i^n \Rightarrow b_j^{n+1} = \frac{D_j}{\sum_i v_{ij} a_i^n}$$

3. Usando los b_j^{n+1} encontrados en el paso 2, se debe encontrar a_i^{n+1} nuevo tal que se cumpla la restricción en los orígenes indicada en el paso 1:

$$a_i^{n+1} = \frac{O_i}{\sum_j v_{ij} b_j^{n+1}}$$

4. Se evalúa criterio de convergencia (por ejemplo, diferencia de factores de una iteración a otra). Si se cumple, finaliza el proceso; si no, se vuelve al paso 2.

Consideremos nuevamente el ejemplo anterior. Se tiene como información la matriz actual observada (por lo tanto, también los vectores de generación y atracción actuales) y los vectores de generación y atracción en el futuro:

	O_i^a	O_i^f			
D_j^a	9	19	23	51	
D_j^f	15	28	26		69

Se comienza imponiendo $b_j^0 = 1$, luego se calculan los a_i^0 . Para ilustrar el proceso, se muestra el cálculo de a_1^0 , sin embargo, es sumamente importante recordar que tanto a_i como b_j son vectores, por lo que se tiene un factor por cada zona.

$$a_1^0 = \frac{O_1}{\sum_j v_{1j} b_j^0} = \frac{O_1}{v_{11} b_1^0 + v_{12} b_2^0 + v_{13} b_3^0} = \frac{23}{2 * 1 + 5 * 1 + 7 * 1} \Rightarrow a_1^0 = 1.64$$

	O_i^a	O_i^f	a_i^0		
D_j^a	9	19	23	51	
D_j^f	15	28	26		69
b_j^0	1	1	1		

Veamos que ocurre al ponderar la matriz actual por los factores obtenidos hasta el momento:

			TOT	o_i^f
	3.3	8.2	11.5	23
	4.4	6.6	10.0	21
	4.2	11.1	9.7	25
TOT	11.9	25.9	31.2	69
D_j^f	15	28	26	69

Se observa que la matriz obtenida cumple con la restricción de orígenes, pero no con la restricción de destinos. Esto es natural debido a que hasta el momento sólo se ha calculado a_i^0 a partir de la restricción de orígenes. Veamos que ocurre al realizar otra iteración. Comenzamos calculando b_j^1 :

$$b_j^1 = \frac{O_1}{\sum_i v_{i1} a_i^0} = \frac{O_1}{v_{11} a_1^0 + v_{21} a_2^0 + v_{31} a_3^0} = \frac{15}{2 * 1.64 + 4 * 1.11 + 3 * 1.39} \Rightarrow b_j^1 = 1.26$$

			O_i^a	O_i^f	a_i^0
	2	5	7	14	23
	4	6	9	19	21
	3	8	7	18	25
D_j^a	9	19	23	51	
D_j^f	15	28	26		69
b_j^0	1	1	1		
b_j^1	1.26	1.08	0.83		

Observemos nuevamente que ocurre con la matriz futura al utilizar los nuevos b_j :

			TOT	o_i^f
	4.1	8.9	9.5	22.5
	5.6	7.2	8.3	21.1
	5.3	11.9	8.2	25.4
TOT	15	28	26	69
D_j^f	15	28	26	69

En este caso, como los últimos factores calculados fueron los b_j , se cumple la restricción de destinos y no la de orígenes. No obstante, ahora se tiene un mejor ajuste en el caso de los orígenes, de hecho, si se considera como criterio de convergencia el decimal se tendría un resultado satisfactorio. Para conseguir una mejor convergencia, se pueden realizar tantas iteraciones como sean necesarias.

La mayor virtud del método de factor de crecimiento es que es simple de entender y de utilizar, sin embargo, también presentan una serie de características que podrían ser una desventaja frente a otros modelos:

- Requieren de mucha información (una matriz de viajes actuales completa, por ejemplo).
- Dependen fuertemente de cuán exacta sea la matriz del año base. Si está errada, ese error se va a amplificar al aplicar factor de crecimiento. Si uno de los v_{ij}^a es igual a 0, entonces el valor de viajes futuros en ese par va a ser 0. Por lo anterior, la convergencia no está garantizada.
- No considera posibles mejoras en el sistema de transporte (construcción de calles, nuevo modo de transporte, cambios en la tarificación, etc.) o congestión, es decir, considera cambios en los costos de transporte. Por lo tanto, estos modelos tienen mejor desempeño en el corto plazo.

2.5.3. Modelo Gravitacional

El primer ejemplo de modelo de distribución que permite dar cuenta de los costos del sistema de transporte corresponde al modelo gravitacional. Tal como lo indica su nombre, este modelo busca replicar el modelo gravitacional de Newton, en el cual se postula que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos cuerpos está directamente relacionada con su masa e inversamente relacionada con la distancia que los separa. El esquema del modelo de Newton se muestra en la Figura 22.

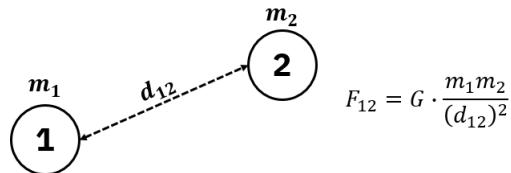


Figura 30: Esquema Modelo Gravitacional de Newton

Para aplicar este modelo a transporte, se hace un símil entre los cuerpos y las zonas; y la masa del cuerpo y la población de la zona. Dicho esto, la hipótesis del modelo es la siguiente: *Mientras mayor sea la distancia entre dos zonas, habrá menos atractividad entre esas zonas (de forma similar a la fuerza de gravedad real) y en consecuencia habrán menos viajes.*

En efecto, sean dos zonas A y B , con población P_A y P_B respectivamente y separadas por una distancia d_{ab} , tal como lo muestra la Figura 23:



Figura 31: Esquema Modelo Gravitacional en Transporte

Nos interesa calcular la cantidad de viajes entre la zona A y la zona B . Si usamos la fórmula equivalente al modelo gravitacional de Newton, se tiene lo siguiente:

$$V_{AB} = K \frac{P_A P_B}{d^2}$$

Se puede generalizar el modelo de la siguiente forma:

$$V_{ij} = K \frac{O_i D_j}{d_{ij}^n}$$

Al igual que en el modelo de Factor de Crecimiento, se deben tener en consideración las restricciones de orígenes y destinos:

$$O_i = \sum_j V_{ij} \quad D_j = \sum_i V_{ij}$$

Reemplazando, se puede obtener que:

$$\begin{aligned} O_i &= \sum_j K \frac{O_i D_j}{d_{ij}^n} & D_j &= \sum_i K \frac{O_i D_j}{d_{ij}^n} \\ K &= \frac{1}{\sum_j \frac{D_j}{d_{ij}^n}} \equiv K_i & K &= \frac{1}{\sum_i \frac{O_i}{d_{ij}^n}} \equiv K_j \end{aligned}$$

En otras palabras, no se puede usar la misma constante K para los orígenes y los destinos sin violar las restricciones. Por lo tanto, es necesario usar dos constantes, llamadas factores de balance y denotadas por A_i y B_j . Por lo tanto, se tiene la siguiente formula general para el modelo:

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j d_{ij}^{-n}$$

A partir de las restricciones de orígenes y destinos, los factores de balance están dados por:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\sum_j B_j D_j d_{ij}^{-n}} \equiv K_i \\ B_j &= \frac{1}{\sum_i A_i O_i d_{ij}^{-n}} \equiv K_j \end{aligned}$$

Se puede generalizar aún más el modelo. En lugar de la distancia, se propone utilizar el **costo generalizado de viaje**, denotado por c_{ij} . Este costo corresponde a una combinación de los costos monetarios (pasaje, combustible, peajes, etc.) y los costos asociados a tiempo (viaje, caminata, espera, transbordo), además de otros aspectos tales como la comodidad y la seguridad, entre otros.

Más adelante, en la etapa de partición modal se verá cómo se calcula el costo generalizado cuando hay varios modos de transporte posibles usando modelos de elección discreta, basado en el

enfoque microeconómico. Se recuerda que el modelo de partición modal necesita el resultado del modelo de distribución para operar, por lo tanto, las relaciones entre los componentes son en ambas direcciones. Esto se puede ver en la Figura 32:

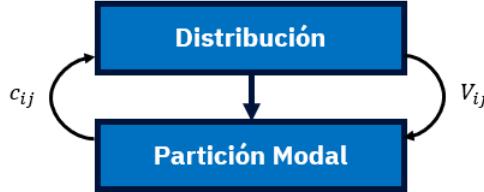


Figura 32: Interrelaciones entre modelos de distribución y partición modal

Hasta ahora, la función que se había usado para el costo generalizado es c_{ij}^{-n} , pero se puede utilizar cualquier forma funcional, como la exponencial ($f(c_{ij}) = e^{-\beta c_{ij}}$), mientras con que el número de viajes decrezca al aumentar el costo. Más adelante se verá un enfoque que justifica el uso de la función exponencial en este caso. Así, el modelo resultante es el siguiente:

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}$$

Con respecto a los factores de balance A_i y B_j , estos dependen del beneficio obtenido al visitar y del beneficio obtenido al ser visitado, respectivamente. En estricto rigor, estos factores están asociados, respectivamente, a los conceptos de **accesibilidad** y **atractividad** de la zona.

Al igual que los factores del método de Furness, los factores de balance A_i y B_j se calculan mediante un proceso iterativo, el cual se detalla a continuación:

1. PASO INICIAL: Se impone $A_i^0 = 1$, luego se calcula B_j^0 a partir de la restricción de destinos:

$$D_j = \sum_i V_{ij} = \sum_i A_i^0 O_i B_j^0 D_j e^{-\beta c_{ij}} \Rightarrow B_j^0 = \frac{1}{\sum_i A_i^0 O_i e^{-\beta c_{ij}}}$$

2. ITERACION: Usando los B_j obtenidos de la iteración anterior (B_j^n), se calcula A_i^{n+1} a partir de la restricción de orígenes:

$$O_i = \sum_j V_{ij} = \sum_j A_i^{n+1} O_i B_j^n D_j e^{-\beta c_{ij}} \Rightarrow A_i^{n+1} = \frac{1}{\sum_j B_j^n O_i e^{-\beta c_{ij}}}$$

3. Con los A_i^{n+1} obtenidos en el paso 2, se calcula B_j^{n+1} de acuerdo a la restricción de destinos indicada en el paso 1, es decir, se usa la siguiente expresión:

$$B_j^{n+1} = \frac{1}{\sum_i A_i^{n+1} O_i e^{-\beta c_{ij}}}$$

4. Se evalúa convergencia según algún criterio. Si se cumple, se finaliza el proceso; si no, se vuelve al paso 2.

Por último está el factor β . Este valor representa la manera en que los costos generalizados impactan en la cantidad de viajes, es decir, es la sensibilidad de la población al costo: un β mayor tendrá un mayor impacto en los viajes frente a cambios en el costo. β puede depender de factores como el nivel de ingreso o la edad de la persona, entre otros. Al final de la sección se explicará cómo estimar el valor de β .

Usemos el problema anterior para aplicar el modelo, considerando una función de costos exponencial ($f(c_{ij}) = e^{-\beta c_{ij}}$) y $\beta = 0.009$. La matriz observada y los vectores futuros eran los siguientes:

			O_i^a	O_i^f	
D_j^a	2	5	7	14	23
	4	6	9	19	21
	3	8	7	18	25
D_j^a	9	19	23	51	
D_j^f	15	28	26		69

Además, se cuenta con la siguiente matriz de costos generalizados c_{ij} (NOTA: es bastante útil contar explícitamente con la matriz exponencial de costos $e^{-\beta c_{ij}}$ para facilitar los cálculos):

c_{ij}			$e^{-\beta c_{ij}}$		
33	65	72	0.74	0.56	0.52
65	23	55	0.56	0.81	0.61
73	57	15	0.52	0.60	0.87

PASO INICIAL:

Se asume que $A_i^0 = 1$. Luego, se utiliza la restricción en los destinos para calcular B_j^0 . Para ejemplificar, se calcula B_1^0 :

$$B_1^0 = \frac{1}{\sum_i A_i^0 O_i e^{-\beta c_{i1}}} = \frac{1}{1 * 23 * 0.74 + 1 * 21 * 0.56 + 1 * 25 * 0.52} \Rightarrow B_1^0 = 0.024$$

			O_i^a	O_i^f	A_i^0		$e^{-\beta c_{ij}}$
D_j^a	2	5	7	14	23	1	
	4	6	9	19	21	1	
	3	8	7	18	25	1	
D_j^a	9	19	23	51			
D_j^f	15	28	26		69		
B_j^0	0.024	0.022	0.021				

Evaluando el modelo para los factores de balance calculados, se tiene la siguiente matriz futura:

	<i>TOT</i>	<i>o_i^f</i>		
6.1	8.0	6.7	20.8	23
4.2	10.6	7.1	21.9	21
4.7	9.4	12.2	26.3	25
<i>TOT</i>	15	28	26	69
<i>D_j^f</i>	15	28	26	69

ITERACION 1:

Con los valores de B_j^0 encontrados, se usa la restricción en los orígenes para calcular A_i^1 :

$$A_1^1 = \frac{1}{\sum_j B_j^0 D_j e^{-\beta c_{1j}}} = \frac{1}{0.024 * 15 * 0.74 + 0.022 * 28 * 0.56 + 0.021 * 26 * 0.52} = 1.117$$

	<i>O_i^a</i>	<i>O_i^f</i>	<i>A_i⁰</i>	<i>A_i¹</i>
2	14	23	1	1.117
4	19	21	1	0.967
3	18	25	1	0.969
<i>D_j^a</i>	9	19	23	51
<i>D_j^f</i>	15	28	26	69
<i>B_j⁰</i>	0.024	0.022	0.021	

e^{-β c_{ij}}

0.74	0.56	0.52
0.56	0.81	0.61
0.52	0.60	0.87

Evaluando nuevamente el modelo se tiene:

	<i>TOT</i>	<i>o_i^f</i>		
6.8	8.9	7.3	23	23
4.1	10.1	6.8	21	21
4.5	9.0	11.5	25	25
<i>TOT</i>	15.4	28.0	25.6	69
<i>D_j^f</i>	15	28	26	69

Podemos ver que con sólo una iteración ya alcanzó un ajuste aceptable. Si se desea alcanzar resultados aún más precisos, se puede aumentar el número de iteraciones.

¿Qué hacer si no se conoce β ? Si se conocen tanto v_{ij} como O_i , D_j , c_{ij} en el año base, entonces se debe estimar un valor de β . En la siguiente sección se verá que β proviene de la restricción de costo total del sistema, por lo que la estimación debe ser tal que el valor de β reproduzca dicho costo total.

Para ello, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se da un β_0 inicial.
2. Se resuelve el problema de punto fijo en A_i y B_j (es decir, se resuelve el modelo hasta obtener valores que converjan)
3. Verificar si se cumple con la restricción $C = \sum_{ij} (c_{ij} V_{ij})$.
4. Si se cumple la restricción (bajo cierto margen de error), el problema está resuelto. Si no, se busca otro β (usando método de Newton, o algún otro método), y se vuelve al paso 2.

¿Cómo resolver si hay cambios en el sistema de actividades o en el sistema de transporte? Estos cambios se traducen en vectores de origen destino (\widetilde{O}_i , \widetilde{D}_j) y/o un cambios en la matriz de costos (\widetilde{c}_{ij}). Entonces, para predecir la matriz de viajes futura (\widetilde{V}_{ij}), se usa el modelo con los datos nuevos, pero se mantiene el parámetro β . De este modo, los viajes futuros están dados por:

$$\widetilde{V}_{ij} = \widetilde{A}_i \widetilde{O}_i \widetilde{B}_j \widetilde{D}_j e^{-\beta \widetilde{c}_{ij}}$$

Para finalizar, se muestran los resultados de los distintos modelos de distribución que se han visto hasta ahora para el mismo problema:

Factor de Crecimiento Uniforme				Factor de Crecimiento Simpl. Acotado			
		<i>TOT</i>	O_i^f			<i>TOT</i>	O_i^f
2.7	6.8	9.5	18.9	23		3.3	8.2
5.4	8.1	12.2	25.7	21		4.4	6.6
4.1	10.8	9.5	24.4	25		4.2	11.1
<i>TOT</i>	12.2	25.7	31.2	69		<i>TOT</i>	15.9
D_j^f	15	28	26			D_j^f	15

Método de Furness				Modelo Gravitacional			
		<i>TOT</i>	O_i^f			<i>TOT</i>	O_i^f
4.1	8.9	9.5	22.5	23		6.8	8.9
5.6	7.2	8.3	21.1	21		4.1	10.1
5.3	11.9	8.2	25.4	25		4.5	9.0
<i>TOT</i>	15	28	26	69		<i>TOT</i>	15.4
D_j^f	15	28	26			D_j^f	15

2.5.4. Modelo de Máxima Entropía

Hasta este punto, los modelos de distribución descritos nos permiten reproducir los totales por Origen y Destino y dar cuenta de los costos de transporte, pero son *ad-hoc*, en cuanto parten de supuestos arbitrarios que permiten cumplir con los requerimientos. Sin embargo, no queda claro cuáles son los supuestos de comportamiento que están detrás de ellos, ni cómo se podrían generalizar a casos más complejos. (Wilson, 1969) resuelve estas limitaciones, proponiendo el Modelo de distribución basado en la maximización de la entropía.

Este modelo también proviene de la física, y permite transparentar los supuestos que sustentan la parte teórica del modelo. Como lo indica su nombre, este modelo tiene como base el **principio de maximización de la entropía**, el cual se explica a continuación. En el problema de transporte, se pueden identificar tres niveles: macro, meso y micro. Estos niveles van a corresponder, respectivamente, a los vectores origen/destino, a las matrices de viajes posibles y a todas las decisiones individuales de viaje en cada matriz de viaje, tal como se esquematiza en la Figura ??:

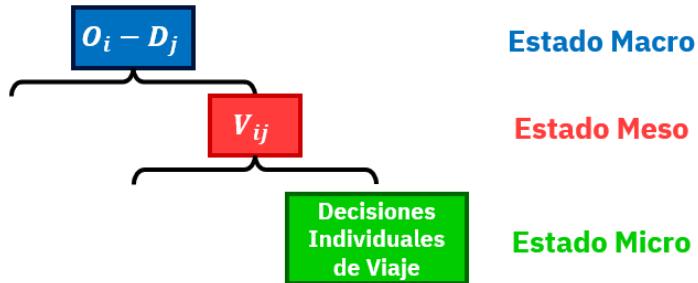


Figura 33: Estados macro, meso y micro

Al ser un problema de distribución, se debe escoger una de las matrices V_{ij} , conociendo los vectores de origen destino. La pregunta que surge es: ¿cuál es la mejor matriz de viajes? La respuesta a esta pregunta es la matriz de viajes más probable. Entonces, surge otra pregunta: ¿cuál es la matriz de viajes más probable?

Para responder esta pregunta, se comienza postulando la siguiente hipótesis: *A falta de mayor información, todos los microestados son equiprobables*. Por lo tanto, dado un estado macro (restricciones), se debe ver cuál es el estado meso más probable. Al cumplirse la hipótesis, entonces el estado meso más probable será el que tenga un mayor número de microestados asociados.

Apliquemos este principio en un pequeño ejemplo: Sean 2 zonas con 4 habitantes denotados por A, B, C y D. El estado macro (restricciones) es el siguiente:

$$O_1 = O_2 = 2$$

$$D_1 = D_2 = 2$$

Como se señaló anteriormente, se debe identificar el estado meso más probable. Los siguientes mesoestados son compatibles con el estado macro:

Tabla 8: Mesoestados 1, 2 y 3

Mesoestado 1	Mesoestado 2	Mesoestado 3
1 1 2	2 0 2	0 2 2
1 1 2	0 2 2	2 0 2
2 2 4	2 2 4	2 2 4

Queremos encontrar el mesoestado más probable, es decir, el mesoestado con mayor número

de microestados asociados. Veamos cuantos microestados posee cada mesoestado: de acuerdo a la Tabla 11, el mesoestado 1 tiene 24 microestados asociados, mientras que los mesoestados 2 y 3 están asociados a 6 microestados cada uno. Por lo tanto, el mesoestado 1 es el más probable, por lo que se elige en este modelo.

Tabla 9: Microestados asociados.

Microestados 1							
A	B	A	B	A	C	A	C
C	D	D	C	B	D	D	B
B	A	B	A	B	C	B	C
C	D	D	C	A	D	D	A
C	A	C	A	C	B	C	B
B	D	D	B	A	D	D	A
D	A	D	A	D	B	D	C
B	C	C	B	A	C	C	A

Microestados 2		
AB	O	AC
O	CD	O
BC	O	BD
O	AD	O

Microestados 3		
O	AB	O
CD	O	BD
O	BC	O
AD	O	AC

Generalizando, se define la **entropía** W del mesoestado $\{V_{ij}\}$ como el número de microestados asociados. Suponiendo un total de T viajes, el valor de la entropía se define mediante combinaciones:

$$W\{V_{ij}\} = \binom{T}{V_{11}} \binom{T - V_{11}}{V_{12}} \binom{T - V_{11} - V_{12}}{V_{13}} \dots$$

donde $\binom{T}{V_{11}}$ representa el número de subconjuntos de V_{11} viajes escogidos del total de T viajes.

Además, se recuerda que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

en donde $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$. Así:

$$W\{V_{ij}\} = \frac{T!}{(T - V_{11})!V_{11}!} * \frac{(T - V_{11})!}{(T - V_{11} - V_{12})!V_{12}!} * \dots = \frac{T!}{V_{11}! * V_{12}! * \dots} = \frac{T!}{\prod_{ij} V_{ij}!}$$

En el ejemplo, la entropía de cada mesoestado es:

$$W_{M1}\{V_{ij}\} = \frac{4!}{1! * 1! * 1! * 1!} = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$$

$$W_{M2}\{V_{ij}\} = W_{M3}\{V_{ij}\} = \frac{4!}{2! * 2!} = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{2 * 2} = 6$$

Al buscar el mesoestado más probable, se busca aquel con mayor número de microestados, es decir, aquel con mayor $W\{V_{ij}\}$. En otras palabras, lo que se pretende es maximizar $W\{V_{ij}\}$:

$$\max W\{V_{ij}\} = \frac{T!}{\prod_{ij} V_{ij}!}$$

Sin embargo, debido a su forma funcional, esta función es difícil de optimizar. Por lo tanto, es necesario realizar algunas manipulaciones algebraicas para tener una función más sencilla.

En primer lugar, se aplica logaritmo. Dado que la función logaritmo es monótona, se tiene:

$$\max W\{V_{ij}\} = \frac{T!}{\prod_{ij} V_{ij}!} \iff \max \ln(W\{V_{ij}\}) = \ln\left(\frac{T!}{\prod_{ij} V_{ij}!}\right) = \ln(T!) - \sum_i \sum_j \ln(V_{ij}!)$$

Luego, se utiliza la aproximación de Stirling, la cual afirma que para N grande se cumple:

$$\ln(N!) \sim N \ln(N) - N$$

Por lo tanto, la función a optimizar queda del siguiente modo:

$$\max \ln(W\{V_{ij}\}) = \ln(T!) - \sum_i \sum_j \ln(V_{ij}!) = T \ln(T) - T - \sum_i \sum_j (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij})$$

Además, el término T es una constante que no cambia con los V_{ij} , por lo que se puede eliminar del problema. Por lo tanto, el problema de optimización a resolver es:

$$\max_{V_{ij}} S = \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_i \sum_j (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij})$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_j V_{ij} = O_i \quad \forall i \quad (\alpha_i)$$

$$\sum_i V_{ij} = D_j \quad \forall j \quad (\gamma_j)$$

$$\sum_{i,j} V_{ij} c_{ij} = C \quad (\beta)$$

Para resolver este problema, comenzamos planteando el lagrangiano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \sum_i \alpha_i (O_i - \sum_j V_{ij}) + \sum_j \gamma_j (D_j - \sum_i V_{ij}) + \beta (C - \sum_{i,j} V_{ij} c_{ij})$$

Luego, se debe calcular la derivada de L y se iguala a 0:

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ij}} = - \left(1 * \ln(V_{ij}) + V_{ij} * \frac{1}{V_{ij}} - 1 \right) - \alpha_i - \gamma_j - \beta c_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ij}} = - \ln(V_{ij}) - \alpha_i - \gamma_j - \beta c_{ij} = 0$$

$$\ln(V_{ij}) = -\alpha_i - \gamma_j - \beta c_{ij} \implies V_{ij} = e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}}$$

Reemplazando este resultado en las restricciones de orígenes y destinos, obtenemos una expresión para $e^{-\alpha_i}$ y $e^{-\beta c_{ij}}$:

$$O_i = \sum_j V_{ij} = \sum_j e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}} \Rightarrow e^{-\alpha_i} = \frac{O_i}{\sum_j e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}}}$$

$$D_j = \sum_i V_{ij} = \sum_i e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}} \Rightarrow e^{-\gamma_j} = \frac{D_j}{\sum_i e^{-\alpha_i} e^{-\beta c_{ij}}}$$

Luego, se definen los factores A_i y B_j del siguiente modo:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}}} \quad B_j = \frac{1}{\sum_i e^{-\alpha_i} e^{-\beta c_{ij}}}$$

Finalmente, el resultado es:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_i} &= A_i O_i & e^{-\gamma_j} &= B_j D_j \\ V_{ij} &= e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}} = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_{ij}} \\ A_i &= \frac{1}{\sum_j B_j D_j e^{-\beta c_{ij}}} & B_j &= \frac{1}{\sum_i A_i O_i e^{-\beta c_{ij}}} \end{aligned}$$

Este resultado se conoce como **modelo de maximización de la entropía** doblemente acotado con restricción de costo. Notemos que tanto la fórmula como las restricciones son las mismas del modelo gravitacional con función de costo exponencial, aunque utilizando un enfoque diferente.

Dado que se desconocen los costos c_{ij} , es necesario calibrar el coeficiente β . Como se señaló en la sección anterior, β es el multiplicador de Lagrange de la restricción de costo. Se puede calcular β usando el método Newton-Raphson, pero no se abordará en este apunte. Para efectos del curso, β usualmente será dato del problema.

Estos resultados le dan un marco teórico con supuestos transparentes (todos los microestados son equiprobables) al modelo gravitacional, y permite extender el análisis a casos relevantes. De hecho, la gran virtud de este modelo es su flexibilidad: al agregar o quitar restricciones se pueden analizar varios casos posibles, tales como:

- Simplemente acotado en orígenes, destinos o en el total
- Sin costos o con costos iguales
- Con matriz a priori (matriz de viajes actuales/anteriores conocida)
- Conteos de flujo
- Irrestringido, etc.

A continuación, se abordarán algunos de estos casos.

1. **Caso irrestringido:** En este caso, no hay restricciones de orígenes, destinos ni costos. El único dato disponible es el total de viajes T :

$$\max_{V_{ij}} S = \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij})$$

s.a.

$$\sum_i \sum_j V_{ij} = T \quad (\alpha)$$

Se plantea el Lagrangiano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \alpha(T - \sum_{i,j} V_{ij})$$

Luego, derivamos e igualamos a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{ij}} &= -\ln(V_{ij}) - \alpha = 0 \\ \ln(V_{ij}) &= -\alpha \\ V_{ij} &= e^{-\alpha} \end{aligned}$$

Así, reemplazando en la restricción de total de viajes, se obtiene:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i,j} V_{ij} = \sum_{i,j} e^{-\alpha} = N^2 e^{-\alpha} \\ \implies e^{-\alpha} &= \frac{T}{N^2} \implies V_{ij} = \frac{T}{N^2} \end{aligned}$$

Es decir, la solución corresponde a una matriz plana donde los viajes entre todos los pares (i,j) son iguales a T/N^2 .

2. **Costos iguales:** En este caso, el costo de cada ruta es el mismo, es decir, $c_{ij} = c$. El problema va a ser el siguiente:

$$\max_{V_{ij}} S = \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij})$$

s.a:

$$\sum_j V_{ij} = O_i \quad \forall i \quad (\alpha_i)$$

$$\sum_i V_{ij} = D_j \quad \forall j \quad (\gamma_j)$$

$$\sum_i \sum_j V_{ij} c = C \quad (\beta)$$

Se plantea el Lagrangiano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \sum_i \alpha_i (O_i - \sum_j V_{ij}) + \sum_j \gamma_j (D_j - \sum_i V_{ij}) + \beta (C - \sum_{i,j} V_{ij} c)$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ij}} = -\ln(V_{ij}) - \alpha_i - \gamma_j - \beta c = 0$$

$$\ln(V_{ij}) = -\alpha_i - \gamma_j - \beta c$$

$$V_{ij} = e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c}$$

Reemplazando el resultado en las restricciones de orígenes, resulta:

$$O_i = \sum_j V_{ij} = \sum_j e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c} = e^{-\alpha_i} e^{-\beta c} \sum_j e^{-\gamma_j}$$

$$\implies e^{-\alpha_i} e^{-\beta c} = \frac{O_i}{\sum_j e^{-\gamma_j}}$$

Definiendo A , se obtiene lo siguiente:

$$A = \frac{1}{\sum_j e^{-\gamma_j}}$$

$$\implies e^{-\alpha_i} e^{-\beta c} = A O_i$$

$$\implies V_{ij} = e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{-\beta c} = A O_i e^{-\gamma_j}$$

Ahora se reemplaza el resultado en la restricción del destino:

$$D_j = \sum_i V_{ij} = \sum_i A O_i e^{-\gamma_j} = A e^{-\gamma_j} \sum_i O_i$$

$$\implies A e^{-\gamma_j} = \frac{D_j}{\sum_i O_i} = \frac{D_j}{T}$$

Finalmente, se obtiene una expresión para V_{ij} , dada por la siguiente expresión:

$$V_{ij} = A O_i e^{-\gamma_j} \implies V_{ij} = \frac{O_i D_j}{T}$$

Notemos que la solución obtenida cuando los costos son iguales entre todas las zonas depende únicamente de los viajes generados y atraídos por las zonas involucradas y no de los costos del par origen destino en cuestión. Sin embargo, es interesante discutir el impacto real que puede tener la magnitud del costo: si bien un costo plano no se refleja directamente en la distribución de viajes (ya que en teoría, para un conjunto de alternativas de destino, al usuario le es indiferente dónde viajar si el costo es el mismo), el costo puede tener un impacto indirecto en la generación y atracción de viajes. Para un usuario seguramente no será lo mismo un escenario en que los viajes sean gratuitos frente a otro en que los viajes sean excesivamente costosos. Es decir, la magnitud del costo podría afectar la decisión de viajar o no. Si bien los modelos de generación de viajes que se han visto en este curso no permite captar efectos de este tipo, estos son sin duda reales y relevantes, lo que sirve de motivación para el desarrollo de modelos más sofisticados.

3. **Costos cero:** En este caso, se tiene que los costos de viajar en todos los pares origen-destino es cero, es decir, $c_{ij} = 0$. De esta manera, el problema de optimización a resolver es el que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{V_{ij}} S &= \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) \\ \text{s.a.} \quad \sum_j V_{ij} &= O_i \quad \forall i \quad (\alpha_i) \\ \sum_i V_{ij} &= D_j \quad \forall j \quad (\gamma_j) \end{aligned}$$

Comenzamos planteando el Lagrangiano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \sum_i \alpha_i (O_i - \sum_j V_{ij}) + \sum_j \gamma_j (D_j - \sum_i V_{ij})$$

Luego, se plantean las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{ij}} &= -\ln(V_{ij}) - \alpha_i - \gamma_j = 0 \\ \ln(V_{ij}) &= -\alpha_i - \gamma_j \\ V_{ij} &= e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} \end{aligned}$$

Ahora se reemplaza el resultado obtenido en la restricción de orígenes:

$$\begin{aligned} O_i &= \sum_j V_{ij} = \sum_j e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} = e^{-\alpha_i} \sum_j e^{-\gamma_j} \\ \implies e^{-\alpha_i} &= \frac{O_i}{\sum_j e^{-\gamma_j}} \end{aligned}$$

Definiendo A , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sum_j e^{-\gamma_j}} \\ \implies e^{-\alpha_i} &= AO_i \\ \implies V_{ij} &= e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} = AO_i e^{-\gamma_j} \end{aligned}$$

Reemplazando este nuevo resultado en la restricción del destino, resulta:

$$\begin{aligned} D_j &= \sum_i V_{ij} = \sum_i AO_i e^{-\gamma_j} = Ae^{-\gamma_j} \sum_i O_i \\ \implies Ae^{-\gamma_j} &= \frac{D_j}{\sum_i O_i} = \frac{D_j}{T} \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la expresión para los viajes entre i y j :

$$V_{ij} = O_i Ae^{-\gamma_j} \implies V_{ij} = \frac{O_i D_j}{T}$$

El resultado obtenido en este caso es el mismo que en el caso de costos iguales. Este era un resultado esperable, ya que el problema de costos cero es un caso particular del problema de costos iguales. No obstante, como se señaló anteriormente, la magnitud del costo podría afectar indirectamente la generación y atracción de viajes.

4. **Simplemente acotado en destinos:** En este caso, sólo se cuenta con la restricción de destinos. Por lo tanto, el planteamiento del problema es el que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \max_{V_{ij}} S &= \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) \\ s.a. \quad \sum_i V_{ij} &= D_j \quad \forall j \quad (\gamma_j) \\ \sum_{i,j} V_{ij} c_{ij} &= C \quad (\beta) \end{aligned}$$

Se plantea el lagrangeano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \sum_j \gamma_j (D_j - \sum_i V_{ij}) + \beta (C - \sum_{i,j} V_{ij} c_{ij})$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ij}} = -\ln(V_{ij}) - \gamma_j - \beta c_{ij} = 0$$

$$\ln(V_{ij}) = -\gamma_j - \beta c_{ij}$$

$$V_{ij} = e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}}$$

Ahora, reemplazamos el resultado en la restricción de destinos:

$$\begin{aligned} D_j &= \sum_i V_{ij} = \sum_i e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}} = e^{-\gamma_j} \sum_i e^{-\beta c_{ij}} \\ &\implies e^{-\gamma_j} = \frac{D_j}{\sum_i e^{-\beta c_{ij}}} \end{aligned}$$

Definiendo B_j , resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{1}{\sum_i e^{-\beta c_{ij}}} \\ &\implies e^{-\gamma_j} = B_j D_j \\ &\implies V_{ij} = e^{-\gamma_j} e^{-\beta c_{ij}} = B_j D_j e^{-\beta c_{ij}} \end{aligned}$$

Se puede demostrar de forma análoga para el problema simplemente acotado por orígenes, que los viajes entre la zona i y la zona j están dados por:

$$V_{ij} = \frac{O_i}{\sum_j e^{-\beta c_{ij}}} e^{-\beta c_{ij}} = A_i O_i e^{-\beta c_{ij}}$$

5. **Matriz a priori:** En este caso, se tiene una matriz de viajes inicial v_{ij} . La idea es que la matriz resultante del modelo conserve la forma de la matriz a priori.

Esto se puede lograr considerando una función de **entropía modificada**, que toma la siguiente forma:

$$\max \ln W' = - \sum_{i,j} \left(V_{ij} \ln \left(\frac{V_{ij}}{v_{ij}} \right) - V_{ij} + v_{ij} \right)$$

Para mostrar esto, veamos que pasa cuando se resuelve este problema de optimización sin restricciones. Para obtener la solución óptima basta con derivar la función objetivo e igualar a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln W'}{\partial V_{ij}} &= 1 * \ln \frac{V_{ij}}{v_{ij}} + V_{ij} * \frac{v_{ij}}{V_{ij}} * \frac{1}{v_{ij}} - 1 \\ &\implies \ln \left(\frac{V_{ij}}{v_{ij}} \right) + 1 - 1 = 0 \implies V_{ij} = v_{ij} \end{aligned}$$

Esto muestra que la función de entropía modificada busca conservar la forma de la matriz a priori o, más formalmente, que el resultado que maximiza la entropía en el caso irrestricto es justamente la matriz a priori. Se pueden obtener resultados más complejos a medida que se incorporan restricciones. De hecho, se puede mostrar que el modelo de Furness, que vimos anteriormente, corresponde al modelo de máxima entropía con matriz a priori y doblemente acotado.

6. **Conteos de flujo:** En este caso, se tiene información de terreno acerca de encuestas de

intersección (en donde se detiene a un vehículo y se le pregunta al conductor su origen y su destino). Esto permite definir la función f_a (flujo en arco a):

$$f_a = \sum_{i,j} p_{ij}^a V_{ij}$$

En la que el término p_{ij}^a se refiere a la proporción de los viajes entre i y j que utilizan el arco a . Consideremos el problema con restricción de orígenes, destinos y conteos de flujo, es decir:

$$\max_{V_{ij}} S = \ln(W\{V_{ij}\}) = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij})$$

s.a:

$$\sum_j V_{ij} = O_i \quad \forall i \quad (\alpha_i)$$

$$\sum_i V_{ij} = D_j \quad \forall j \quad (\gamma_j)$$

$$\sum_{i,j} p_{ij}^a V_{ij} = f_a \quad \forall a \quad (\lambda_a)$$

Se plantea el Lagrangiano:

$$L = - \sum_{i,j} (V_{ij} \ln(V_{ij}) - V_{ij}) + \sum_i \alpha_i (O_i - \sum_j V_{ij}) + \sum_j \gamma_j (D_j - \sum_i V_{ij}) + \sum_a \lambda_a (f_a - \sum_{i,j} p_{ij}^a V_{ij})$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial V_{ij}} = -\ln(V_{ij}) - \alpha_i - \gamma_j - \sum_a \lambda_a p_{ij}^a$$

$$\ln(V_{ij}) = -\alpha_i - \gamma_j - \sum_a \lambda_a p_{ij}^a$$

$$V_{ij} = e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} e^{\sum_a \lambda_a p_{ij}^a}$$

Consideremos el siguiente cambio de variable:

$$\lambda_a = -\ln x_a \implies -\lambda_a p_{ij}^a = \ln x_a^{p_{ij}^a}$$

$$\implies -\sum_a \lambda_a p_{ij}^a = \sum_a \ln x_a^{p_{ij}^a} \implies e^{-\sum_a \lambda_a p_{ij}^a} = e^{\sum_a \ln x_a^{p_{ij}^a}}$$

$$\implies e^{-\sum_a \lambda_a p_{ij}^a} = \prod_a x_a^{p_{ij}^a}$$

Así, la expresión para los viajes entre i y j está dada por:

$$V_{ij} = e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a}$$

Reemplazando el resultado en las restricciones de orígenes, resulta:

$$\begin{aligned} O_i = \sum_j V_{ij} &= \sum_j \left(e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right) = e^{-\alpha_i} \sum_j \left(e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right) \\ \implies e^{-\alpha_i} &= \frac{O_i}{\sum_j \left(e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right)} \end{aligned}$$

Definiendo A_i , se obtiene lo siguiente:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j \left(e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right)} \implies e^{-\alpha_i} = A_i O_i$$

Del mismo modo, reemplazamos para la restricción de destino:

$$\begin{aligned} D_j = \sum_i V_{ij} &= \sum_i \left(e^{-\alpha_i} e^{-\gamma_j} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right) = e^{-\gamma_j} \sum_i \left(e^{-\alpha_i} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right) \\ \implies e^{-\gamma_j} &= \frac{D_j}{\sum_i \left(e^{-\alpha_i} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right)} \end{aligned}$$

Se define B_j , obteniendo el siguiente resultado:

$$B_j = \frac{1}{\sum_i \left(e^{-\alpha_i} \prod_a x_a^{p_{ij}^a} \right)} \implies e^{-\gamma_j} = B_j D_j$$

Finalmente, la expresión para los viajes desde i hacia j es la siguiente:

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j \prod_a x_a^{p_{ij}^a}$$

7. Modelo de Maximización de entropía como probabilidad (entropía de Shannon):

Consideremos el siguiente cambio de variable:

$$P_{ij} = \frac{V_{ij}}{T}$$

Entonces se puede escribir el problema de optimización de la siguiente manera:

$$\max S = T \ln(T) - T - \sum_{i,j} (P_{ij} T \ln(P_{ij} T) - P_{ij} T)$$

$$\max S = T \ln(T) - T - (T \sum_{i,j} P_{ij} \ln(P_{ij}) + T \ln(T) \sum_{i,j} P_{ij} - T \sum_{i,j} P_{ij})$$

Como:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} P_{ij} &= 1 \\ \implies \max S &= T \ln(T) - T - (T \sum_{i,j} P_{ij} \ln(P_{ij}) + T \ln(T) - T) \\ \implies \max S &= -T \sum_{i,j} P_{ij} \ln(P_{ij}) \end{aligned}$$

Finalmente, como T es una constante, se puede anular. Así, el problema de optimización es:

$$\max S = - \sum_{i,j} P_{ij} \ln(P_{ij})$$

s.a.

$$\sum_j P_{ij} = \frac{O_i}{T} \quad \forall i \quad (\alpha_i)$$

$$\sum_i P_{ij} = \frac{D_j}{T} \quad \forall j \quad (\gamma_j)$$

$$\sum_{i,j} P_{ij} c = \frac{C}{T} \quad (\beta)$$

Más adelante, se verá que este modelo es equivalente al modelo de elección discreta.

El siguiente cuadro comparativo detalla las diferencias entre los modelos:

Tabla 10: Comparación entre modelos de distribución.

	Información Utilizada	Supuestos	Aspectos a Considerar
Factor Crecimiento Uniforme	T v_{ij}		<ul style="list-style-type: none"> - No cambia la estructura observada inicialmente. - No dependen del uso de suelo. - Mantiene los ceros en zonas con cero viajes - No reflejan cambios en el costo generalizado
Simpl. Acotado Dobl. Acotado Furness	T $O_i - D_j$ v_{ij}	Los viajes crecen en función de “algo” (poco transparente)	
Mod. Gravitacional	T $O_i - D_j$ $\beta - c_{ij}$	Zonas atraen viajes de la misma forma que la atracción universal, es decir, disminuyen con la distancia/costo	Insensibles a cambios en el sistema de transporte (si se basa en distancia)
Max. Entropía	T $O_i - D_j$ $\beta - c_{ij}$	Todos los microestados son equiprobables, siendo la matriz OD más probable la que tiene mayor número de microestados	Más complejo y flexible que los anteriores, puede usarse en varias situaciones

2.5.5. Problemas Propuestos

Problema 1

Considere la siguiente información de un modelo de generación y atracción de viajes y uno de distribución de viajes:

- El área de estudio ha sido dividida en cuatro zonas.
- Se ha decidido no segmentar por periodo, propósito de viaje, ni tipo de persona.
- Para distribución se utilizará el principio de maximización de la entropía.
- Se realizó un catastro de uso de suelo, cuyos resultados se sintetizan en la Tabla 1.
- Se realizó un estudio de costos, cuyos resultados se sintetizan en la Tabla 2.
- Se calibró modelos de generación y atracción de viajes, se describen en la Tabla 3.

Tabla 1: Catastro de Uso de Suelo

Variable		1	2	3	4
P	Población [Personas]	1100	850	1220	1400
I	Ingreso [miles \$ mensual per capita]	125	140	120	100
CS	Superficie comercio y servicios [m^2]	1400	2100	1100	1700
E	Plazas de estudio [cant.]	700	450	500	500

Tabla 2: Matriz de Costos

Zona	1	2	3	4
1	300	300	300	300
2	300	300	300	300
3	300	300	300	300
4	300	300	300	300

Tabla 3: Modelos de Generación y Atracción por zona

Generación (O_i)	M_1	$Y = 12 + 1,27 \cdot P + 0,25 \cdot I$ (1,63)(1,82) (2,31)	$R^2 = 0,65$
	M_2	$Y = 100 - 2,5 \cdot P + 1,25 \cdot I$ (1,96)(3,52) (3,63)	$R^2 = 0,45$
Atracción (D_j)	M_1	$Y = 800 + 0,035 \cdot CS + 1,00 \cdot E$ (2,52) (2,51) (2,54)	$R^2 = 0,35$
	M_2	$Y = 500 + 0,23 \cdot \ln(CS) + 0,9 \cdot E$ (2,03)(1,93) (2,85)	$R^2 = 0,25$

- (a) Proponga, justificadamente, dos formas de mejorar el enfoque de modelación planteado.
- (b) ¿Qué modelos de Generación-Atracción preferiría? Justifique detalladamente.
- (c) Determine los vectores origen-destino para cada zona.
- (d) Ajuste los vectores origen y destino de forma tal que los totales coincidan. ¿Cuál de los dos modelos (generación o atracción) le parece más confiable para calcular el total de viajes?
- (e) ¿Qué información sería necesaria para poder estimar el parámetro beta del modelo de distribución de máxima entropía? Indique cómo utilizaría dicha información en caso de tenerla.
- (f) Muestre que la peculiar forma de la matriz de costos simplifica el resultado del modelo de distribución, de forma tal que se necesita conocer el valor de β para aplicar el modelo.
- (g) Calcule la matriz de viajes utilizando el resultado demostrado en (f).

Problema 2

Suponga que se tiene la siguiente información para la generación y atracción de viajes en un área de modelación que fue dividida en dos zonas.

Zona	O_i	D_j
1	350	200
2	650	800

- (a) Suponiendo que sólo cuenta con la información encontrada en a) indique: ¿Cuál de las siguientes matrices tiene mayor entropía? ¿Cuál elegiría? ¿Es la matriz elegida, la más probable dada la información disponible hasta este punto?

Matriz de Viajes 1

O/D	1	2
1	70	280
2	130	520

Matriz de Viajes 2

O/D	1	2
1	175	175
2	325	325

Matriz de Viajes 3

O/D	1	2
1	250	250
2	250	250

- (b) Si los costos de transporte están dados por la matriz c_{ij} encuentre la matriz más probable de ocurrir en esta situación si se utiliza un parámetro de Lagrange igual 0.1 para la restricción de costo. Observación: basta con realizar sólo dos iteraciones para este problema.

Matriz de Costos

O/D	1	2
1		10
2	10	

Problema 3

La empresa Transportes S.A. lo contacta para que usted le recomiende un modelo de Distribución de viajes para poder predecir los viajes futuros en Santiago al año 2030. Para esa fecha se estima que estaría construida la nueva línea de Metro por Irarrázaval. ¿Cuál(es) modelo de los vistos en clases le recomendaría y cuál(es) no? Justifique su respuesta.

Problema 4

MIDEPLAN ha desarrollado un modelo estratégico para analizar el fenómeno del transporte en la ciudad de Santiago, llamado Estraus, el cual, en su última versión, divide a la ciudad en 409 zonas. Estime el número de viajes más probable entre las zonas 225 y 204 (comprendidas entre las calles Alameda, Santa Rosa, Marín, San Diego –Bandera, Alameda, Catedral, y Mac Iver) en el periodo punta mañana y en los casos que se describen a continuación.

- (a) Suponiendo que la única información que tiene es que el total de viajes modelados en Estraus para el periodo punta mañana en el corte temporal considerado es de 220.000 viajes/hora.
- (b) Suponiendo que, además del total de viajes, se sabe que $O_{225} = 435$ viajes/hora y $D_{204} = 7800$ viajes/hora en punta mañana.

Problema 5

A partir del modelo de maximización de la entropía para modelos de distribución de viajes, compruebe que si se deriva el modelo incluyendo la restricción (1) se llega al modelo gravitacional con $f(c_{ij}) = e^{-\beta c_{ij}}$

$$\sum_{i,j} V_{ij} c_{ij} = C \quad (1)$$

Con c_{ij} el costo generalizado de viaje para ir desde i a j; C el costo total de viaje en el sistema. (Ayuda: recuerde la aproximación de Stirling: $\ln X! = X \ln X - X$)

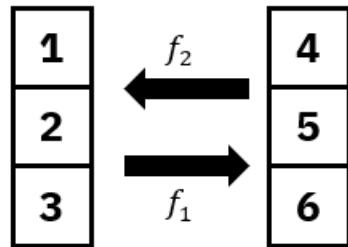
Problema 6

Dada la información de la matriz proponga justificadamente el total de viajes generados y atraídos por cada zona si los costos inter e intra zonales resultan ser similares entre sí.

O/D	1	2	3	D_j
1	20	10		
2			15	
3	50		25	
O_i				200

Problema 7

Se desea conocer la matriz de viajes de “Villarriba”. Para efectos de modelación, el pueblo se dividió en 6 zonas y se cuenta con una estimación de los viajes en auto generados por zona y el conteo de flujo vehicular en los dos únicos puentes unidireccionales del pueblo, tal como muestra la figura. ¿Cuál es la matriz de viajes más probable?



Se tienen los siguientes datos:

$$O_i = (100, 300, 400, 200, 300, 600); f_1 = 500; f_2 = 600$$

$$V_{ij} = A_i O_i \prod_a X_a^{p_{ija}}$$

2.6. Partición Modal

2.6.1. Introducción

En esta sección se estudiarán los modelos de partición modal, los cuales permiten calcular matrices O-D por modo de transporte, es decir, calcula la cantidad de viajes en automóvil, transporte público, bicicleta, etc. Para ello, estos modelos utilizan las matrices O-D obtenidas del modelo de distribución, además de la **proporción de uso** de cada modo.

A modo de ejemplo, la Figura 10, mostrada anteriormente, se detalla la comparación de la partición modal en Santiago para los años 2001 y 2012, las cuales fueron construidas a partir de datos tomados en terreno, preguntándole a la gente acerca de los viajes que realizan: origen y destino, además del modo en que efectuaron dichos viajes. Se puede notar que entre los años de 2001 y 2012, la proporción de viajes realizados en automóvil aumentó desde un 21% a 26,1%, mientras que la proporción de viajes en transporte público bajó desde un 30,1% a un 23,7%.

Al observar esta tendencia, vale la pena preguntarse: ¿Es esta la situación deseada para la ciudad? ¿Por qué está pasando esto? ¿Se puede hacer algo para cambiar este proceso? Es posible hacerse una idea revisando nuevamente el Círculo Vicioso del Transporte Público.

Lo socialmente óptimo es que las personas prefieran el transporte público, bicicleta o la caminata, debido a que utilizan menos espacio y además generan menos externalidades negativas (emisiones, ruido) que el automóvil. Sin embargo, las personas suelen buscar el beneficio personal (en la sección de Asignación a la Red se discutirá con más detalle este tema), por lo que suelen preferir los automóviles debido a las características que ofrece, tales como seguridad, comodidad e independencia. El problema de esto es que los usuarios de automóvil no perciben los impactos que causan sobre el resto de las personas, provocando fenómenos indeseados como la congestión.

Cada ciudad en el mundo tiene su visión acerca de su propia estructura y dinámica, lo que se traduce en el favorecer de ciertos modos de transporte por sobre otros. El proceso para materializar el tipo de ciudad deseada es complejo, involucrando a varios actores por mucho tiempo. Más adelante, en los cursos *Planificación Urbana y Transporte* y *Políticas de Transporte* se exploran algunas de estos procesos.

A continuación, se verán ejemplos de infraestructura que dan cuenta de ello en varios países del mundo.

Para comenzar, se tiene el caso de Estados Unidos. En varias ciudades de aquel país optan por favorecer al transporte privado, con el fin de que todos sus habitantes puedan tener acceso a dicho modo de transporte. Esto ocurre a tal punto que se construyen enormes intersecciones entre autopistas, como las que se muestran en la Figura 34:



Figura 34: Autopistas de Milwaukee (izquierda) y Los Ángeles (derecha)

En algunas ciudades de Latinoamérica ocurre una situación similar. También con el objetivo de favorecer el uso de automóvil, se construyen autopistas urbanas para reducir los tiempos de viaje. El inconveniente de esto es que, si no se regulan adecuadamente mediante un sistema de tarificación, la cantidad de autos crece de tal forma que terminan causando congestión en el largo plazo. La Figura 35 muestra un ejemplo de ello en las ciudades de San Juan (Argenina) y Sao Paulo (Brasil).



Figura 35: Autopistas Urbanas en San Juan (izq.) y Sao Paulo (der.)

Otras ciudades, como por ejemplo Bangkok (Tailandia), prefieren favorecer el uso de motocicletas. Si bien son más eficientes que los automóviles en términos del uso de espacio, también suelen ser más peligrosas, ya que protagonizan una mayor cantidad de accidentes y muertes.



Figura 36: Motocicletas en Bangkok, Tailandia.

Por su parte, en Cali (Colombia) no existe demasiada rigurosidad en cuanto al uso de espacios. De hecho, en la Figura 37 se observa que los autos bloquean la vereda para usarla de estacionamiento, ya que esta acción no se encuentra penada por la ley.



Figura 37: Autos estacionados en una vereda de Cali.

Contrario a los enfoques vistos anteriormente, en ciudades como Amsterdam (Países Bajos) y Estambul (Turquía) prefieren incentivar la caminata a través de la habilitación de calles peatonales, tal como se observa en la Figura 38.



Figura 38: Calles peatonales en Amsterdam (izq.) y Estambul (der.)

De hecho, Países Bajos también es conocido por ser la nación con la mayor cultura ciclista en el mundo. La gran mayoría de su población es propietaria de al menos una bicicleta, por lo cual potencian su uso a través de la construcción de ciclovías. La Figura 39 muestra un ejemplo de ello.



Figura 39: Ciclovía en Holanda

En cuanto a Chile, particularmente en Santiago, en los últimos años se han realizando intervenciones favoreciendo al tránsito de peatones. En la Figura 40, se muestran las calles Santo Domingo y Bandera, las cuales tenían dos pistas de tránsito vehicular. En el caso de la calle Santo Domingo, se redujo el espacio vehicular a sólo una pista y aumentando así el ancho de las veredas, mientras que la calle Bandera fue habilitada como paseo peatonal.



Figura 40: Calles Santo Domingo (izq.) y Bandera (der.), Santiago de Chile

En esta sección, se estudia el marco de análisis para determinar cuáles elementos participan en la elección de modo. Saber qué elementos modifican la partición modal es esencial para mejorar el funcionamiento de la ciudad y permite llevar a cabo las intervenciones descritas anteriormente.

2.6.2. Teoría del Consumidor

La partición modal es la etapa del modelo clásico de transporte en la que se calcula el número de viajes en cada modo. Como se mencionó anteriormente, esta estimación se hace a partir de la matriz origen-destino obtenida en la etapa de distribución. Con los modelos de partición modal se calcula la proporción de cada modo, obteniendo una matriz origen-destino para cada uno de ellos:

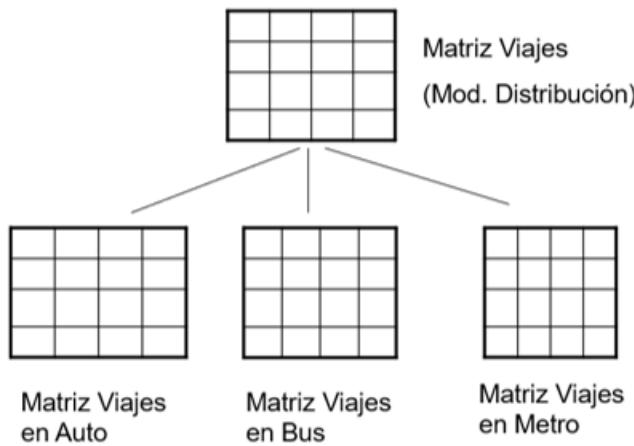


Figura 41: Esquema de matrices en partición modal.

A diferencia de las etapas anteriores en que el análisis se realiza a nivel agregado, en la etapa de partición modal se estudian las decisiones individuales de los usuarios. En estricto rigor, lo que se calcula en este modelo es la **probabilidad de elección** de un modo de transporte, como función de los atributos (o nivel de servicio) de dicho modo y de las características del usuario. Una vez calculadas las probabilidades de elección, el modelo se aplica para cada par origen-destino, obteniendo así las matrices modales a partir de la matriz total del modelo de distribución.

Otra característica de este modelo es que es interpretable microeconómicamente, lo que permite obtener valoraciones subjetivas de elementos como el tiempo, seguridad y calidad y la estimación formal de beneficios derivados de proyectos de transporte. En particular, bajo este enfoque de análisis se puede estimar el concepto fundamental **Valor subjetivo del Tiempo de Viaje**, que se interpreta como lo que la gente está dispuesta a pagar por disminuir su tiempo de viaje.

La derivación precisa del modelo de partición modal a partir de la teoría del consumidor se aborda en el curso *Economía de Transporte* dictado por el profesor Sergio Jara, y en su libro (Jara-Díaz, 2007). En lo que sigue se esbozan los componentes principales de este enfoque de análisis.

El modelo de partición modal se basa en la Teoría del Consumidor, la cual establece que las personas toman decisiones racionales con el fin de maximizar su utilidad directa (U), resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\max_{X,i} U(X_1, X_2, \dots, X_n, Q_i)$$

s.a.

$$\sum_j P_j X_j + c_i \leq I$$

$$X_j \geq 0$$

$$i \in A$$

En este problema, la utilidad directa depende del consumo de bienes continuos descritos en el

vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ y de bienes discretos, descritos en la matriz Q de n filas y m columnas, en donde n es la cantidad de atributos utilizados para describir cada uno de los m bienes discretos. Los bienes continuos son aquellos que pueden ser adquiridos en cantidades variables (por ejemplo, los alimentos). Por su parte, los bienes discretos, tal como indica su nombre, se adquieren en cantidades discretas (en estricto rigor, una unidad) y está representado por la matriz Q , en donde la i -ésima columna Q_i almacena las medidas de calidad del i -ésima bien discreto. En este caso, el bien discreto será el viaje en un modo de transporte determinado, cuyos atributos serían aspectos tales como el tiempo de viaje, tarifa, seguridad, comodidad, entre otros.

La primera restricción es la restricción de presupuesto, la cual establece que un usuario no puede gastar más dinero del que dispone (dado por su ingreso I): P_j es el precio del bien X_j , c_i es el costo generalizado del bien discreto i . Las otras dos restricciones son más intuitivas: la segunda plantea que la cantidad de bienes adquiridos no puede ser negativa, mientras que la tercera establece que la alternativa escogida pertenece a un conjunto de alternativas disponibles denotado por A .

La resolución de este problema se divide en dos etapas, las cuales se detallan a continuación:

1. Se resuelve el problema condicionado en la alternativa i :

$$\max_X U(X, Q_i)$$

s.a.

$$\sum_j P_j X_j \leq I - c_i$$

$$X_j \geq 0$$

Dado que se asume i fijo, se resuelve el problema condicionado en ese i . La solución está dada por la demanda condicional (en i) por bienes continuos, denotado por X^* . Este vector depende del ingreso disponible ($I - c_i$) y el vector de precios P . Posteriormente, se evalúa la utilidad en X^* y Q_i , obteniendo la utilidad indirecta condicional, denotada por V_i y que corresponde a la máxima utilidad alcanzable al escoger la alternativa i .

$$V_i \equiv U(X^*(P, (I - c_j)), Q_i)$$

2. Elección de la alternativa i que proporciona la máxima utilidad indirecta

$$\max_{i \in A} V_i \equiv U(I - c_i, P, Q_i)$$

2.6.3. Modelo de Utilidad Aleatoria

La transformación del modelo de elección basado en un modelo práctico se aborda en profundidad en el curso *Demanda de Transporte*, oportunidad en la que se muestra que este marco conceptual no solo es útil para el análisis de partición modal, sino que también para modelar todo tipo de elecciones, incluyendo: ruta, localización, estilo de vida, posesión de automóvil, programa

de actividades, etc. A continuación se esbozan los aspectos que son fundamentales para su aplicación en el contexto del análisis de sistemas de transporte en el marco del modelo clásico de cuatro etapas.

De acuerdo a lo planteado por la Teoría del Consumidor, un individuo q escogerá la alternativa i que le proporcione la máxima utilidad indirecta condicional. Dicha utilidad se puede expresar en función de k atributos de la alternativa i , es decir:

$$V_{iq} = \sum_k \theta_{ki} X_{k iq}$$

donde $X_{k iq}$ corresponde al atributo k de la alternativa i que percibe el individuo q y θ_{ki} es el coeficiente asociado a atributo. Los atributos pueden ser, por ejemplo, el tiempo de viaje, costo monetario, seguridad ante robos, comodidad, etc. En general, al conjunto de los atributos $X_{k iq}$ se les llama Nivel de Servicio, y no todos son medibles.

Por ejemplo, si los parámetros son tiempo y costo, la utilidad de la alternativa i está dada por:

$$V_{iq} = \theta_t t_{iq} + \theta_c c_{iq}$$

En este caso, lo más natural es que las personas se sientan más descontentas cuando el modo de transporte demora más tiempo o es más costoso, por lo que la utilidad debería disminuir frente a un aumento del tiempo y el costo. En consecuencia, se espera que tanto θ_t como θ_c tengan signo negativo.

Sin embargo, hasta el momento se ha considerado que el individuo (y el investigador que lo modela) cuenta con información perfecta sobre todas las alternativas disponibles, lo cual en la práctica no es cierto. Se puede pensar en las siguientes situaciones:

- Consideremos dos individuos aparentemente idénticos: edad, género, ocupación, etc., y además son vecinos, por lo que perciben los mismos atributos de transporte. Aún así, puede ocurrir que elijan un modo diferente.
- Un mismo individuo puede tomar decisiones diferentes dentro de un período de tiempo, eligiendo alternativas que en teoría tienen una menor utilidad. Por ejemplo, en una semana determinada, un/a estudiante podría escoger viajar un día en transporte público, otro día en bicicleta, otro caminando, etc.

Para tener en cuenta estos aspectos (McFadden, 1974) propuso el **Modelo de Utilidad Aleatoria** (o RUM, por sus siglas en inglés). En él, la utilidad indirecta se divide en dos partes: la parte determinística (que el investigador puede medir) y la parte aleatoria (que es latente para el investigador). Esto se expresa de la siguiente manera:

$$U_{iq} = V_{iq} + \varepsilon_{iq}$$

donde:

- U_{iq} : Es la utilidad que entrega la alternativa i al individuo q .
- V_{iq} : Componente determinística de la utilidad. Es la utilidad a la que tiene acceso el modelador a través de los atributos considerados.
- ε_{iq} : Componente aleatoria de la utilidad. Corresponde a los errores de medición y **captura todo lo que el modelador no puede observar**.

De esta manera, la utilidad es ahora una variable aleatoria, por lo que cada modo posee una **probabilidad de elección**. La probabilidad de elegir una alternativa (modo) i dentro de un conjunto de alternativas disponibles A_q es equivalente a calcular la probabilidad de que la utilidad de dicha alternativa sea mayor o igual que la utilidad del resto de las alternativas, es decir:

$$\begin{aligned} Pr(i|A_q) &= Pr(V_{iq} + \varepsilon_{iq} \geq V_{jq} + \varepsilon_{jq}), \quad \forall j \in A_q \\ \implies Pr(i|A_q) &= Pr(\varepsilon_{jq} - \varepsilon_{iq} \leq V_{iq} - V_{jq}) \end{aligned}$$

La probabilidad va a depender de la distribución de ε_{iq} . La primera opción es suponer que la variable aleatoria distribuya de manera normal, de la misma manera que muchos fenómenos naturales. Si se asume que ε_{iq} distribuye de manera normal con promedio 0 y desviación estándar σ , entonces ocurre lo siguiente:

$$\varepsilon_{iq} \sim N(0, \sigma) \implies Pr(i|A_q) = \int_{-\infty}^{V_{iq}-V_{1q}} \int_{-\infty}^{V_{iq}-V_{2q}} \cdots \int_{-\infty}^{V_{iq}-V_{jq}} N(0, \Sigma_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}) d\varepsilon$$

Como se puede apreciar, este modelo - llamado Probit - es bastante difícil de resolver cuando existen muchas alternativas disponibles (cada alternativa nueva añade una integral a la función).

2.6.4. Modelo Logit Multinomial

Otro supuesto posible es que la utilidad aleatoria distribuye Gumbel o Valor Extremo Tipo 1, que es la manera en la que distribuyen los máximos. Más adelante, en el curso de **Demanda de Transporte** demostraremos que asumir que los términos de error distribuyen i.i.d. Gumbel permite tener una forma cerrada de la integral que representa la probabilidad de elección, dando lugar a la siguiente expresión:

$$P_i \equiv Pr(i|A_q) = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}}$$

Este modelo se llama **Logit Multinomial** (MNL) y es muy usado para la modelación de elecciones, ya que es sustancialmente más sencillo de calcular que el modelo Probit.

Por ejemplo, si un individuo q cuenta únicamente con las alternativas auto (a) y bus (b), las probabilidades de elección son las siguientes:

$$P_a = \frac{e^{\mu V_{aq}}}{e^{\mu V_{aq}} + e^{\mu V_{bq}}}$$

$$P_b = \frac{e^{\mu V_{bq}}}{e^{\mu V_{aq}} + e^{\mu V_{bq}}}$$

Es importante mencionar que este modelo depende tanto de los atributos de la alternativa escogida como los de las otras alternativas. Dado que la utilidad no es una medida absoluta, lo importante en este modelo es la diferencia de utilidades entre alternativas. En efecto:

$$P_i = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} = \frac{1}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu(V_{jq} - V_{iq})}}$$

El término μ que aparece en la ecuación es el factor de escala que proviene de la distribución Gumbel, y se define del siguiente modo:

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma}$$

donde σ es la desviación estándar. A partir de la fórmula de μ se puede observar que está inversamente relacionada con la varianza de los errores.

Un inconveniente de este factor es que no se puede estimar, formalmente, no se puede *identificar*. Dada la forma de la utilidad discreta (depende linealmente de los atributos), es imposible separar el factor μ de los parámetros θ en el cálculo de la probabilidad de elección, por lo que habrán infinitas combinaciones de ambos parámetros que resulten en el misma probabilidad.

Luego:

$$V_{iq} = \sum_k \theta_{ki} X_{kiq} \rightarrow \mu \theta_k = \theta'_k \rightarrow \mu V_{iq} = V'_{iq}$$

Usualmente (al menos para efectos de este curso), se utiliza la normalización $\mu = 1$, pero otras alternativas son igualmente válidas.

A continuación, se describirán algunas características y propiedades del modelo Logit:

- La suma de las probabilidades de elección de todos los modos es igual a 1:

$$\sum_{j \in A_q} P_j = \sum_{j \in A_q} \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} = \frac{1}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} * \sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}} = 1$$

- Si todas las alternativas tienen igual utilidad, entonces son equiprobables:

$$P_i = \frac{e^{\mu V}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V}} = \frac{e^{\mu V}}{N e^{\mu V}} = \frac{1}{N}$$

- Si la utilidad de uno de los modos tiende a infinito (es decir, es considerablemente mayor a las otras utilidades), entonces la probabilidad de escoger ese modo tiende a 1:

$$P_i = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} \approx \frac{e^{\mu V_{iq}}}{e^{\mu V_{iq}}} = 1 \quad V_{iq} \sim \infty$$

- Si un modo no da utilidad al individuo, entonces la probabilidad de elegirlo tiende a 0.

$$P_i = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} = \frac{1}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{iq}}} \approx 0 \quad V_{iq} \sim \infty$$

- Si $\mu \rightarrow \infty$ (varianza cero), entonces la probabilidad de escoger a la alternativa k va a depender de su utilidad relativa a las otras alternativas. Si la utilidad es mayor, la probabilidad tiende a 1. Si es menor, entonces tiende a 0. En palabras simples, se tiene una decisión del tipo “todo o nada”.

$$P_i = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} = \frac{1}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu(V_{jq}-V_{iq})}} \approx \begin{cases} 1 & \text{si } V_{iq} > V_{jq} \\ 0 & \text{si } V_{iq} < V_{jq} \end{cases} \quad \mu \sim \infty$$

- Si $\mu \rightarrow 0$ (varianza muy grande), entonces todas las probabilidades son equiprobables.

$$P_i = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} = \frac{e^0}{\sum_{j \in A_q} e^0} = \frac{1}{N} \quad \mu \sim 0$$

- **Independencia de alternativas irrelevantes:** Las proporciones relativas entre dos alternativas se mantienen, sin importar el número de alternativas totales. En efecto:

$$\frac{P_i}{P_k} = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}} * \frac{\sum_{j \in A_q} e^{\mu V_{jq}}}{e^{\mu V_{kq}}} = \frac{e^{\mu V_{iq}}}{e^{\mu V_{kq}}} = e^{\mu(V_{iq}-V_{kq})}$$

Consideremos un modelo MNL con 3 alternativas, cuyas utilidades discretas son las siguientes:

$$V_1 = C_1 + \theta_1 X_{11} + \theta_2 X_{21} + \theta_3 X_{31}$$

$$V_2 = C_2 + \theta_1 X_{12} + \theta_2 X_{22} + \theta_3 X_{32}$$

$$V_3 = C_3 + \theta_1 X_{13} + \theta_2 X_{23} + \theta_3 X_{33}$$

Estas utilidades tienen constantes modales C_i , es decir, cada alternativa proporciona una utilidad (o desutilidad) sólo por el hecho de elegirla. Como en el modelo Logit sólo importa la diferencia de utilidades, no se puede identificar el efecto de cada constante por sí misma. Por ello, se debe fijar una de las constantes modales en 0 como referencia.

Por su parte, los parámetros θ se interpretan como la utilidad marginal del atributo X_{ik} :

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_{ik}} = \theta_k$$

Así, si la magnitud del coeficiente θ_k es alta, entonces la utilidad V_i tendrá grandes variaciones cuando la variable X_{ik} varía. Además, es posible obtener algunas interpretaciones adicionales a partir de los coeficientes, a modo de ejemplo consideremos la siguiente función de utilidad determinística de un individuo q :

$$V_{iq} = C_i + \theta_{tv}tv_i + \theta_{te}te_i + \theta_{tc}tc_i + \theta_c costo_i$$

donde tv_i es el tiempo de viaje, te_i es el tiempo de espera y tc_i es el tiempo de caminata. Se define el **valor subjetivo del tiempo** del siguiente modo:

$$\frac{\theta_{tv}}{\theta_c} = \frac{\partial V_{iq}/\partial tv_i}{\partial V_{iq}/\partial costo_i} = VST$$

El Valor Subjetivo del Tiempo (VST) se mide en $$/unidad\ de\ tiempo$ y representa el costo que está dispuesto a pagar un individuo por ahorrar una unidad de tiempo (en este caso, tiempo de viaje). El coeficiente del costo puede interpretarse como una medida de la utilidad marginal del ingreso, en el óptimo y, por lo tanto, debiera decrecer con el ingreso. Luego, dado que el coeficiente del costo está en el denominador del VST, mientras mayor sea el nivel de ingreso del individuo, mayor va a ser su valor subjetivo del tiempo

Además de los atributos del modo de transporte, también se pueden incorporar a la función de utilidad otras variables que describan al individuo, tales como la edad, ingreso, género, etc. A continuación se mostrarán dos ejemplos de aquello.

Ejemplo 1: Consideremos un modelo Logit en el que existen dos alternativas de transporte (auto y bus). En este caso, se propone que el logaritmo natural de la edad afecta a la utilidad del auto de forma lineal. De esta manera, las utilidades de cada modo son las siguientes:

$$V_{auto} = \beta_0 + \beta_1 t_{auto} + \beta_2 c_{auto} + \beta_3 \ln(Edad)$$

$$V_{bus} = \beta_1 t_{bus} + \beta_2 c_{bus}$$

donde t_i es el tiempo total en el modo i y c_i es el costo del modo i . Se puede observar que la utilidad del bus no tiene un coeficiente β_0 , lo cual se debe a que en estricto rigor dicha variable está fijada en cero como referencia. Las ecuaciones se resumen en la tabla de especificaciones que se muestra en la Tabla 14:

Tabla 11: Especificaciones ejemplo 1

Modo	β_0	β_1	β_2	β_3
Auto	1	t_{auto}	c_{auto}	$\ln(Edad)$
Bus	0	t_{bus}	c_{bus}	0

Ejemplo 2: Se tiene un modelo Logit con las mismas alternativas que en el ejemplo 1. En este caso, se propone que la edad afecta de diferente forma en la utilidad del automóvil dependiendo de la edad del individuo. Se tienen las siguientes especificaciones:

$$V_{auto} = \beta_0 + \beta_1 c_{auto} + \beta_2 edad_1 + \beta_3 edad_2$$

$$V_{bus} = \beta_1 c_{bus}$$

donde $edad_1$ y $edad_2$ son variables dummy que valen 1 o 0 dependiendo de la edad del usuario:

$$Edad_1 = \begin{cases} 1 & \text{si edad} < 20 \text{ años} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad Edad_2 = \begin{cases} 1 & \text{si edad} > 40 \text{ años} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las ecuaciones pueden resumirse en la Tabla 15:

Tabla 12: Especificaciones ejemplo 2.

Modo	β_0	β_1	β_2	β_3
Auto	1	c_{auto}	$edad_1$	$edad_2$
Bus	0	c_{bus}	0	0

2.6.5. Preferencias reveladas y declaradas

Para estimar un modelo de partición modal, se requiere recolectar información a nivel de usuario. Idealmente, se debe contar con la siguiente información a nivel de individuo:

- Conjunto de alternativas disponibles: auto, bus, metro, etc.
- Características socioeconómicas del individuo: edad, género, ingreso, etc.
- Atributos de alternativas disponibles: tiempo, costo, etc.
- Alternativa elegida

Algunos de estos datos se pueden ver en la Tabla 16:

Tabla 13: Datos obtenidos para 6 individuos.

n	Edad	t_{auto}	c_{auto}	t_{bus}	c_{bus}	Elección
1	35	15,4	2.500	58,2	590	Auto
2	45	14,2	3.800	31,0	590	Bus
3	37	19,6	5.425	43,6	1.220	Auto
4	42	50,8	3.000	59,9	610	Auto
5	32	55,5	1.200	33,8	590	Bus
6	15	N/A	N/A	48,4	590	Bus

Por ejemplo, en esta tabla se tienen dos modos de transporte (auto y bus), la edad de cada persona, los atributos de tiempo y costo de cada persona para ambos modos, y se tiene la elección real de la persona. No siempre se tienen estos datos, como ocurre en la observación 6 (corresponde a una persona que no tiene suficiente edad para conducir y por eso no hay atributos para este medio).

Estos datos se pueden obtener de dos formas: por preferencias reveladas y por preferencias declaradas.

Las **preferencias reveladas** son observaciones o mediciones directas de las acciones de las personas. Por ejemplo, preguntarle a una persona que está viajando en automóvil acerca de su origen y destino, cuáles modos tenía disponible, los atributos de cada modo, etc. Si bien las preferencias reveladas tienen el beneficio de entregar la información real de las acciones de las personas (lo cual es muy valioso), también tienen varios inconvenientes. Dentro de los más relevantes están su alto costo y la eventual dificultad para la medición de datos, dependiendo de lo que se quiera medir. Además, hay poca varianza en las variables y no considera la posibilidad de incluir nuevos modos de transporte futuros.

Por su parte, las **preferencias declaradas** consisten en hacer encuestas a la gente sobre situaciones hipotéticas, como la que se muestra en la Figura 42 (Guevara, Tirachini, Hurtubia, y Dekker, 2020). En ella, se pregunta si el/la encuestado/a prefiere ir de pie en un tren lleno que se demora 19 minutos, o bien ir sentado en un tren vacío que se demora 31 minutos.

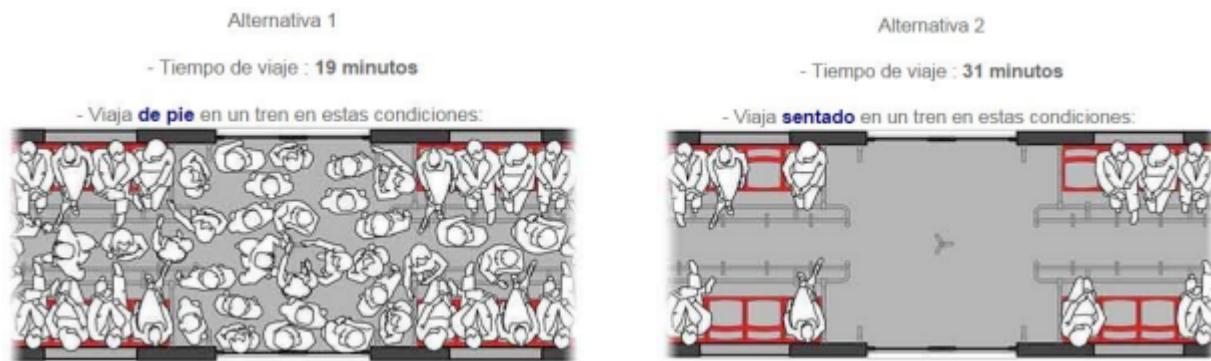


Figura 42: Ejemplo de encuesta de preferencias declaradas.

Las encuestas de este tipo son mucho más baratas que las de preferencias reveladas, ya que es más fácil recolectar datos (se le puede preguntar a cualquier persona en cualquier horario). Además, dada su naturaleza, existe una gran varianza en las variables y permite analizar la incorporación de nuevas alternativas de transporte. Sin embargo, la gran debilidad de este tipo de encuestas es que las personas no siempre hacen lo que dicen. Esto puede ocurrir por una serie de sesgos, como el de política (digo que sí porque el partido por el que voto apoya esa alternativa), el de no restricción (digo que sí sin saber si el modo me sirve o no) y el de autoafirmación (digo que sí para no desilusionar al encuestador).

Para finalizar, en la Tabla 14 se resumen las principales diferencias entre los dos tipos de encuestas:

Tabla 14: Diferencias entre preferencias reveladas y declaradas.

Método	Preferencias Reveladas	Preferencias Declaradas
Costo	Alto	Bajo
Dificultad para obtener datos	Alta	Baja
Varianza de las variables	Poca	Mucha
Permite analizar alternativas nuevas	No	Si
Mide exactamente lo que la gente hace	Si	No

2.6.6. Estimación con Modelo Logit

El investigador, que por ejemplo esté aplicando este modelo para evaluar un proyecto, no conoce los parámetros reales (poblacionales) θ_k . Lo que sí se conoce, gracias a las mediciones realizadas en encuestas de preferencias relevadas y preferencias declaradas, son los atributos de cada medio de transporte, así como la elección real de cada persona. Por ejemplo, se sabe que el individuo A escogió el bus y se sabe el costo del pasaje y el tiempo de viaje, pero no se sabe cuánto influyó el costo y el tiempo en la elección).

Por esto, se busca estimadores $\hat{\theta}_k$ tales que las predicciones sean *buenas*³ con los datos disponibles. Que una predicción sea “buena” significa que la probabilidad de que cada persona elija la alternativa que se eligió en la realidad es muy alta. Por ejemplo, si la persona A eligió automóvil, la persona B eligió metro y la persona C eligió bus, se estiman los parámetros $\hat{\theta}_k$ que, junto con los atributos medidos, generen un modelo en el que se maximice la probabilidad de que A elija el auto, B elija el Metro y C elija el bus:

$$\max Pr(A \text{ elige auto}, B \text{ elige metro}, C \text{ elige bus})$$

Usando las propiedades de las probabilidades, lo anterior es igual a:

$$\max(Pr(A \text{ elige auto}) * Pr(B \text{ elige metro}) * Pr(C \text{ elige bus}))$$

En estadística, la probabilidad de que las elecciones predichas sean iguales a las elecciones reales tiene el nombre de verosimilitud y se denota por L^* (por su nombre en inglés, “likelihood”). En

³ Formalmente consistentes y eficientes, pero eso lo veremos en el curso *Demanda de Transporte*

otras palabras, lo que se busca es estimar parámetros θ'_k que maximicen la verosimilitud del modelo:

$$\max(Pr(A \text{ elige auto}) * Pr(B \text{ elige metro}) * Pr(C \text{ elige bus})) = \max L^*$$

Para ilustrar este proceso, veamos un ejemplo. Consideremos los datos de la Tabla 16, y que la utilidad de las personas sea de la manera vista en el ejemplo 1 de especificación por edad, es decir:

$$V_{aq} = \beta_0 + \beta_1 t_a + \beta_2 c_a + \beta_3 \ln(Edad)$$

$$V_{bq} = \beta_1 t_b + \beta_2 c_b$$

Entonces, para la persona 1:

$$V_{a1} = \beta_0 + \beta_1 * 15.4 + \beta_2 * 2500 + \beta_3 * \ln(35)$$

$$V_{b1} = \beta_1 * 58.2 + \beta_2 * 590$$

Se sabe que la persona 1 eligió el auto. Por lo tanto, si se considera un modelo Logit con $\mu = 1$, la probabilidad de que la persona 1 elija el automóvil será la siguiente:

$$P_{a1} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 * 15.4 + \beta_2 * 2500 + \beta_3 * \ln(35)}}{e^{\beta_0 + \beta_1 * 15.4 + \beta_2 * 2500 + \beta_3 * \ln(35)} + e^{\beta_1 * 58.2 + \beta_2 * 590}}$$

Para la persona 2, que eligió bus, se tiene lo siguiente:

$$V_{a2} = \beta_0 + \beta_1 * 14.2 + \beta_2 * 3800 + \beta_3 * \ln(45)$$

$$V_{b2} = \beta_1 * 31.0 + \beta_2 * 590$$

$$P_{b2} = \frac{e^{\beta_1 * 31.0 + \beta_2 * 590}}{e^{\beta_0 + \beta_1 * 14.2 + \beta_2 * 3800 + \beta_3 * \ln(45)} + e^{\beta_1 * 31.0 + \beta_2 * 590}}$$

Se puede hacer el mismo cálculo para las observaciones restantes. Es importante notar que estas probabilidades de elección dependen del vector de parámetros θ , donde el “mejor” θ es el que hace más probable las elecciones observadas en la muestra, es decir, es el que maximiza la verosimilitud:

$$\max L^*(\theta) = (P_{a1} * P_{b2} * \dots * P_{b6})$$

Para el caso general, se debe definir el siguiente término:

$$y_{iq} = \begin{cases} 1 & \text{si la persona } q \text{ elige la alternativa } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

De esta manera, para Q personas, N alternativas y k parámetros, se puede expresar la verosi-

militud de la siguiente manera:

$$L^*(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{q=1}^Q \prod_{j=1}^N P_{jq}^{y_{jq}}$$

Y finalmente se puede definir $\hat{\theta}$ como el vector de parámetros que maximiza L^* :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L^*(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

La forma actual de la función de verosimilitud es difícil de manejar, por lo cual es conveniente usar el logaritmo de la verosimilitud para simplificar el problema:

$$\ln L^*(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^N \ln(P_{jq}) * y_{jq} = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

Esta función se llama log-verosimilitud, y se denota por L . Como el logaritmo natural es una función monótona, el vector $\hat{\theta}$ que maximiza la verosimilitud también va a maximizar la log-verosimilitud, por lo cual se cumple que:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

A partir de la log-verosimilitud, se pueden obtener varios indicadores de la calidad del modelo, y que son usados para mostrar que un modelo es mejor que otro en la representación de la realidad como, por ejemplo, la bondad de ajuste de ρ^2 :

$$\rho^2 = 1 - \frac{L(\hat{\theta})}{L(0)}$$

en el que $L(\hat{\theta})$ es la log-verosimilitud del modelo estimado y $L(0)$ es la log-verosimilitud de un modelo en el que todas las alternativas son equiprobables.

Por su definición, el máximo valor teórico de la verosimilitud L^* es 1 (nunca se alcanza en la realidad). Dado que $\ln(1) = 0$, el máximo valor teórico de L es 0. Como se espera que el modelo equiprobable es siempre peor que el modelo estimado, entonces $L(\hat{\theta})$ debería ser más cercano a 0 que $L(0)$. Así, mientras más cercano sea el valor de ρ^2 a 1, mejor va a ser el modelo estimado.

Existen casos en los que, en lugar de las elecciones de los individuos, los datos disponibles presentan las particiones modales observadas, como se muestra en la Tabla 15:

Tabla 15: Datos con particiones modales observadas.

O-D	t_{auto}	c_{auto}	t_{bus}	c_{bus}	$\%_{auto}$	$\%_{bus}$
Norte-Sur	58	844	107	520	59%	41%
Norte-Oriente	51	746	95	520	59%	41%
Norte-Poniente	49	711	90	520	59%	41%
...
Sur-Poniente	36	525	67	520	60%	40%
Sur-Sur	21	305	39	520	61%	39%

Esta tabla entrega la partición modal agregada por par OD en la ciudad, obtenida a partir de la EOD 2012 (Sectra-UAH, 2014).

Para estimar el modelo en estos casos, se puede utilizar lo que se conoce como el *método de Berkson y Theil* (Berkson, 1953). Para implementarlo, hay que notar que la utilidad del modo i está dada por la siguiente expresión:

$$V_i = \theta_i + \theta_t t_i + \theta_c c_i$$

Luego, se tiene lo siguiente al usar la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes:

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{e^{V_a}}{e^{V_a} + e^{V_b}} & P_b &= \frac{e^{V_b}}{e^{V_a} + e^{V_b}} \\ \implies \frac{P_a}{P_b} &= e^{(V_a - V_b)} \\ \implies \ln\left(\frac{P_a}{P_b}\right) &= V_a - V_b = (\theta_a - \theta_b) + \theta_t(t_a - t_b) + \theta_c(c_a - c_b) \end{aligned}$$

Como se tienen dos modos, hay que normalizar una de las constantes modales a 0. En este caso consideremos $\theta_b = 0$. Luego, reemplazando los datos de las probabilidades modales y los atributos, se tiene lo siguiente para el par Norte-Sur (NS):

$$\ln\left(\frac{0.59}{0.41}\right) = V_a - V_b = \theta_a + \theta_t(58 - 107) + \theta_c(844 - 520) + \varepsilon_{NS} = 0.040$$

donde el error ε_{NS} presente en la ecuación se puede interpretar como la combinación de todos los errores de medición que puede tener la medición de las probabilidades modales agregadas.

Se repite este proceso para todos los pares origen destino, formando un sistema de ecuaciones. Con esto, se pueden estimar los coeficientes mediante regresión lineal, minimizando la suma de los errores al cuadrado. Se puede demostrar que los estimadores obtenidos de esta manera son

justamente los estimadores que maximizan la verosimilitud. Esta manera de estimar los parámetros se conoce como el método de Berkson y Theil (Berkson, 1953).

A continuación, se verá cómo se pueden interpretar los resultados del modelo para hacer pronósticos en el tiempo.

2.6.7. Elasticidades Logit Multinomial

En el modelo Logit, la **elasticidad directa** se refiere a la variación porcentual de la probabilidad P_{iq} dada una variación de un 1% del atributo X_{kiq} .

$$E_{X_{kiq}}^{P_{iq}} = \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kiq}} * \frac{X_{kiq}}{P_{iq}}$$

Por otra parte, la **elasticidad cruzada** se refiere a la variación de la probabilidad P_{iq} dada una variación de 1% de los atributos X_{kjq} (que son de una alternativa diferente).

$$E_{X_{kjq}}^{P_{iq}} = \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kjq}} * \frac{X_{kjq}}{P_{iq}}$$

Nos interesa saber el signo de las elasticidades, por lo cual se requiere obtener una expresión para la derivada de la probabilidad P_{iq} en el atributo X_{kiq} . Dado que la probabilidad es función de las utilidades, por regla de la cadena se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kiq}} = \frac{\partial P_{iq}}{\partial V_{iq}} * \frac{\partial V_{iq}}{\partial X_{kiq}}$$

Además, dada la linealidad de la utilidad en los atributos, se tiene que:

$$V_{iq} = \sum_k \theta_k X_{kiq} \implies \frac{\partial V_{iq}}{\partial X_{kiq}} = \theta_k$$

$$\implies \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kiq}} = \theta_k \frac{\partial P_{iq}}{\partial V_{iq}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kiq}} &= \theta_k \frac{\partial}{\partial V_{iq}} \left(\frac{e^{V_{iq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} \right) = \theta_k \frac{e^{V_{iq}} \sum_j e^{V_{jq}} - e^{V_{iq}} e^{V_{iq}}}{(\sum_j e^{V_{jq}})^2} = \theta_k \left(\frac{e^{V_{iq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} - \frac{(e^{V_{iq}})^2}{(\sum_j e^{V_{jq}})^2} \right) \\ &\implies \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kiq}} = \theta_k P_{iq} - \theta_k P_{iq}^2 = \theta_k P_{iq}(1 - P_{iq}) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión para la elasticidad directa:

$$E_{X_{kiq}}^{P_{iq}} = \theta_k P_{iq}(1 - P_{iq}) * \frac{X_{kiq}}{P_{iq}} = \theta_k (1 - P_{iq}) X_{kiq}$$

Si se consideran atributos como el tiempo o el costo, que generan desutilidad cuando aumentan, se tiene $\theta_k < 0$ y en tal caso la elasticidad directa es negativa. Esto tiene sentido, ya que si un modo aumenta alguno de estos atributos será menos atractivo para el individuo y, en consecuencia, tendrá una menor probabilidad ser elegido.

Se procede de la misma manera para la elasticidad cruzada. Nuevamente usando regla de la cadena, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kjq}} = \frac{\partial P_{iq}}{\partial V_{jq}} * \frac{\partial V_{jq}}{\partial X_{kjq}}$$

Por linealidad de la utilidad en los atributos:

$$\begin{aligned} V_{jq} &= \sum_k \theta_k X_{kjq} \implies \frac{\partial V_{jq}}{\partial X_{kjq}} = \theta_k \\ \implies \frac{\partial P_{jq}}{\partial X_{kjq}} &= \theta_k \frac{\partial P_{jq}}{\partial V_{jq}} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kjq}} &= \theta_k \frac{\partial}{\partial V_{jq}} \left(\frac{e^{V_{iq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} \right) = \theta_k \frac{0 * \sum_j e^{V_{jq}} - e^{V_{iq}} e^{V_{jq}}}{(\sum_j e^{V_{jq}})^2} = -\theta_k \frac{e^{V_{iq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} \frac{e^{V_{jq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} \\ \implies \frac{\partial P_{iq}}{\partial X_{kjq}} &= -\theta_k P_{iq} P_{jq} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión para la elasticidad cruzada:

$$E_{X_{kjq}}^{P_{iq}} = -\theta_k P_{iq} P_{jq} * \frac{X_{kjq}}{P_{iq}} = -\theta_k P_{jq} X_{kjq}$$

En este caso, si $\theta_k < 0$ como ocurre con el tiempo y el costo, entonces se tiene que la elasticidad cruzada es positiva. Esto tiene sentido, ya que si estos atributos aumentan, el modo j se hace menos atractivo, aumentando la probabilidad de que el individuo elija el medio i .

La ecuación de elasticidad puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E_X^P &= \frac{\partial P}{\partial X} * \frac{X}{P} \approx \frac{\Delta P}{\Delta X} * \frac{X}{P} \\ \Delta P &\approx E_X^P * \Delta X * \frac{P}{X} \end{aligned}$$

Esta aproximación de ΔP es relativamente buena si ΔX es pequeño y la probabilidad P es aproximadamente lineal en esa variación.

2.6.8. Logit Incremental

Sean P_i^0 y P_i^f las probabilidades de elegir la alternativa i en el presente y en el futuro, respectivamente. Estas probabilidades se definen por las siguientes ecuaciones:

$$P_i^0 = \frac{e^{V_i^0}}{\sum_j e^{V_j^0}} \quad P_i^f = \frac{e^{V_i^f}}{\sum_j e^{V_j^f}}$$

Se puede definir la utilidad final como la utilidad inicial más la variación de la utilidad de i en el período de tiempo en cuestión, es decir:

$$V_i^f = V_i^0 + \Delta V_i$$

Así, reescribiendo el modelo:

$$\begin{aligned} P_i^f &= \frac{e^{V_i^0 + \Delta V_i}}{\sum_j e^{V_j^0 + \Delta V_j}} = \frac{e^{V_i^0} e^{\Delta V_i}}{\sum_j e^{V_j^0} e^{\Delta V_j}} * \frac{\frac{1}{\sum_j e^{V_j^0}}}{\frac{1}{\sum_j e^{V_j^0}}} = \frac{\frac{e^{V_i^0}}{\sum_j e^{V_j^0}} e^{\Delta V_i}}{\frac{\sum_j e^{V_j^0} e^{\Delta V_j}}{\sum_j e^{V_j^0}}} \\ &\implies P_i^f = \frac{P_i^0 e^{\Delta V_i}}{\sum_j P_j^0 e^{\Delta V_j}} \end{aligned}$$

Además, el cambio de utilidad del modo i se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= (\theta_i + \sum_k \theta_k X_{ki}^f) - (\theta_i + \sum_k \theta_k X_{ki}^0) \implies \Delta V_i = \sum_k \theta_k (X_{ki}^f - X_{ki}^0) \\ &\implies \Delta V_i = \sum_k \theta_k \Delta X_{ki} \end{aligned}$$

De esta manera, las probabilidades futuras están dadas por:

$$P_i^f = \frac{P_i^0 e^{\sum_k \theta_k \Delta X_{kj}}}{\sum_j P_j^0 e^{\sum_k \theta_k \Delta X_{ki}}}$$

Lo relevante de este resultado es que para calcular las nuevas probabilidades no es necesario calcular las nuevas utilidades. Basta con conocer las probabilidades actuales, los cambios en los atributos y los valores de los coeficientes.

Veamos un ejemplo: Se quiere modelar la elección de ruta entre un túnel y su cuesta respectiva. En la actualidad, el 45 % de los 1000 usuarios diarios prefieren la cuesta. El valor del tiempo de los usuarios es de 45 [\$/min] y el coeficiente del costo es de -0.06 [útil/min]. Calcule los ingresos diarios adicionales que produciría un ensanchamiento del túnel, que se traduce en una reducción de 5 minutos de viaje, si la tarifa del mismo se mantiene en \$2500.

Para comenzar, los ingresos diarios adicionales estarán dados por la diferencia entre los ingresos futuros (luego del ensanchamiento del túnel) y los ingresos actuales. A su vez, los ingresos están dados por la suma de las tarifas pagadas por cada usuario. De esta manera, se tiene lo siguiente:

$$\Delta I = I^f - I^0 \implies \Delta I = c_{tunel}(N_{tunel}^f - N_{tunel}^0)$$

Además, la cantidad de usuarios que utilizan el túnel se puede expresar como:

$$N_{tunel}^f = N * P_{tunel}^f \quad N^0 = N * P_{tunel}^0$$

$$\implies \Delta I = c_{tunel} * N(P_{tunel}^f - P_{tunel}^0)$$

Considerando un modelo Logit de probabilidad de elección, se puede calcular la probabilidad futura del siguiente modo (recordar que las probabilidades actuales son datos del problema):

$$\begin{aligned} P_{tunel}^f &= \frac{P_{tunel}^0 e^{\Delta V_{tunel}}}{P_{tunel}^0 e^{\Delta V_{tunel}} + P_{cuesta}^0 e^{\Delta V_{cuesta}}} \\ \implies \Delta I &= c_{tunel} * N \left(\frac{P_{tunel}^0 e^{\Delta V_{tunel}}}{P_{tunel}^0 e^{\Delta V_{tunel}} + P_{cuesta}^0 e^{\Delta V_{cuesta}}} - P_{tunel}^0 \right) \\ \implies \Delta I &= c_{tunel} * N * P_{tunel}^0 * \left(\frac{e^{\Delta V_{tunel}}}{P_{tunel}^0 e^{\Delta V_{tunel}} + P_{cuesta}^0 e^{\Delta V_{cuesta}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

En cuanto a la variación de utilidades, dado que sólo cambia el tiempo de viaje en la alternativa túnel, se tienen los siguientes cambios de utilidad por alternativa:

$$\begin{aligned} \Delta V_{tunel} &= \theta_t \Delta t_{tunel} \quad \Delta V_{cuesta} = 0 \\ \implies \Delta I &= c_{tunel} * N * P_{tunel}^0 * \left(\frac{e^{\theta_t \Delta t_{tunel}}}{P_{tunel}^0 e^{\theta_t \Delta t_{tunel}} + P_{cuesta}^0 e^0} - 1 \right) \end{aligned}$$

Hasta ahora se cuenta con la siguiente información:

- $c_{tunel} = 2500$ [\\$]
- $N = 1000$
- $P_{cuesta}^0 = 0.45$; $P_{tunel}^0 = 0.55$
- $\Delta t_{tunel} = -5$ [min]
- $\theta_c = -0.06$ [util/\\$]
- $VST = 45$ [\$/min]

Es decir, sólo falta obtener θ_t . Como se tiene el valor del coeficiente del costo (), podemos calcular θ_t a partir de la definición:

$$\begin{aligned} VST &= \frac{\theta_t}{\theta_c} \implies \theta_t = VST * \theta_c = 45 \text{ [$/min]} * -0.06 \text{ [util/\$]} \\ &\implies \theta_t = -2.7 \text{ [util/min]} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores obtenidos, resulta:

$$\begin{aligned}\Delta I &= \$2500 * 1000 * 0.55 * \left(\frac{e^{-2.7[\text{util}/\text{min}]*-5[\text{min}]}}{0.55e^{-2.7[\text{util}/\text{min}]*-5[\text{min}]} + 0.45} - 1 \right) \\ &\implies \Delta I = \$1.125.000\end{aligned}$$

2.6.9. Pronóstico Agregado

Hasta ahora, los modelos que se han visto se aplican para elecciones individuales. Sin embargo, en los proyectos de transporte los análisis y predicciones se hacen a nivel agregado (por ejemplo, zonal o poblacional), entonces la pregunta que surge es cómo obtener una probabilidad representativa para la zona o población. Consideremos un ejemplo simplificado de dos individuos A y B, el cual se representa en el gráfico de la Figura 36:

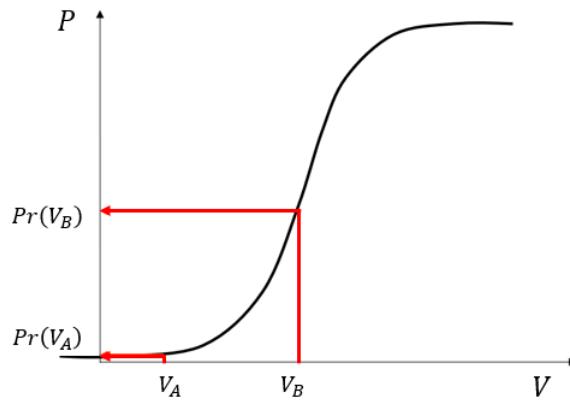


Figura 43: Probabilidad agregada.

En el gráfico se muestra la función Logit, que permite relacionar las utilidades que cada individuo percibe para algún modo de transporte con la probabilidad de elección de dicho modo. Se busca conocer la probabilidad agregada de los dos individuos. En primera instancia, se tienen dos opciones:

1. El promedio de las probabilidades de los dos individuos.

$$P = \frac{Pr(V_A) + Pr(V_B)}{2}$$

2. La probabilidad de la utilidad promedio de los dos grupos.

$$P = Pr\left(\frac{V_A + V_B}{2}\right)$$

Si la función de probabilidad no es lineal, entonces estas opciones no darán el mismo valor. La diferencia entre estas opciones se llama sesgo de agregación, y se puede observar en el gráfico de la Figura 37:

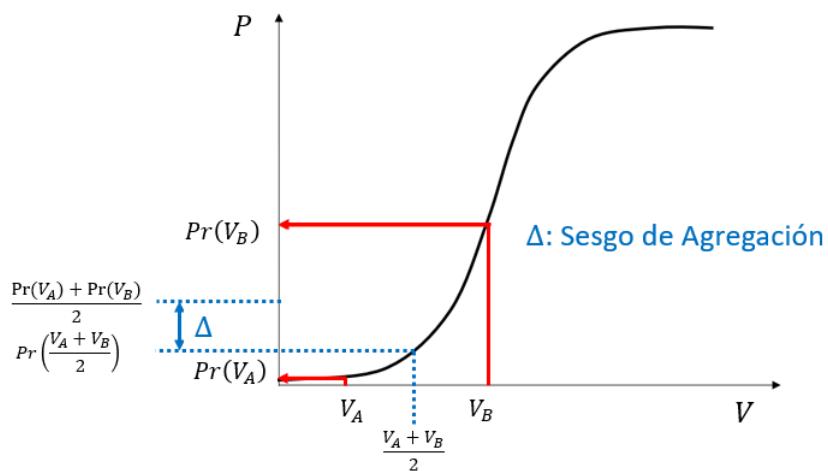


Figura 44: Sesgo de agregación

En la opción 2 se realiza la agregación antes de aplicar la fórmula. Esto hace que se pierda la utilidad específica de cada grupo, por lo que no es una opción razonable (se pierde información). Sólo se puede usar esta opción si el modelo es lineal (que tiene sesgo nulo).

Por otro lado, la opción 1 es equivalente a calcular la esperanza de las probabilidades. En efecto, expandiendo esto para N individuos, se tiene:

$$P = \frac{1}{N} \sum_i P(V_i)$$

Para que esta opción sea razonable, se deben cumplir los siguientes supuestos:

- Todos los habitantes tienen la misma sensibilidad a los cambios de atributo. Es decir, tienen el mismo θ_k .
- Los atributos son obtenidos a partir de una encuesta de preferencias relevadas. Como ya se discutió anteriormente, este método es costoso y no considera alternativas no escogidas.

A continuación, en la Tabla 16 se muestran las probabilidades individuales de Q individuos que tienen J alternativas de elección.

Tabla 16: Probabilidades individuales

	Alternativas				Suma
Personas	$P_{11}(x_1)$	$P_{21}(x_1)$...	$P_{J1}(x_1)$	1
	$P_{12}(x_2)$	$P_{22}(x_2)$...	$P_{J2}(x_2)$	1

	$P_{1Q}(x_Q)$	$P_{2Q}(x_Q)$...	$P_{JQ}(x_Q)$	1
	Suma	D_{1Q}	D_{2Q}	...	D_{JQ}
					Q

En la tabla, $P_{jq}(X_q)$ es la probabilidad de el individuo q elija la alternativa j , siendo X_q los atributos que percibe dicha persona. A partir de esto se puede definir la probabilidad agregada para el grupo de personas Q :

$$P_{jQ} = \frac{D_{jQ}}{Q} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q P_{jq} \quad P_{jQ} = \int_{X_Q} P_{jq} f_{X_Q} dX$$

Es importante mencionar que estas metodologías son teóricas, ya que en la práctica no siempre se cuentan con las probabilidades de cada individuo de la población. Para resolver esta limitación, se tienen tres enfoques diferentes:

- **Enfoque inocente:** Corresponde a la opción dos planteada anteriormente, es decir, calcula la probabilidad agregada como la probabilidad del promedio de los atributos. Este enfoque asume que no existe sesgo de agregación, por lo que sólo funciona si probabilidad es lineal.

$$P_{jQ} = P_j(\bar{X}_Q)$$

- **Enumeración muestral:** Se extrae una muestra de la población y se calcula la probabilidad agregada como la probabilidad promedio de la muestra, luego se extrapolan los resultados para la población. Para esto, se requiere una muestra aleatoria representativa.

$$P_{jQ} = \frac{1}{N} * \sum_{q=1}^N P_{jq}$$

- **Clasificación:** Se divide la población en grupos de individuos con características similares (por ejemplo, ingreso) y se aplica el enfoque inocente a cada uno de estos grupos. De esta manera, disminuye el sesgo de agregación.

$$P_{jQ} = \sum_{c \in Q} \frac{Q_c}{Q} P_j(\bar{X}_c)$$

En el modelo clásico de cuatro etapas, las matrices por modo de transporte i se obtienen usualmente de la siguiente manera: se usa enfoque inocente agregando los niveles de servicio (tiempo

y costo) para cada par OD, es decir, se promedian los tiempos de viaje y los costos de las personas que van de una zona A a otra zona B. Luego, se divide la demanda por clase (c), horario (h) y propósito (p), para luego aplicar el modelo Logit:

$$P_{i,od}^{phc} = \frac{e^{V_{i,od}^{phc}(\bar{t}_{i,od}^{phc}, \bar{c}_{i,od}^{phc})}}{\sum_j e^{V_{j,od}^{phc}(\bar{t}_{j,od}^{phc}, \bar{c}_{j,od}^{phc})}}$$

Se recuerda que al estar utilizando enfoque inocente, existirá un error de agregación en este método, lo que se traduce en limitaciones para este enfoque.

Finalmente, una vez calculadas las probabilidades de elección por modo, se puede calcular la matriz de viajes para el modo i de la siguiente manera:

$$V_{i,od}^{phc} = V_{od}^{phc} * P_{i,od}^{phc}$$

2.6.10. Paradoja de los buses de colores (Logit Jerárquico)

Supongamos que se tienen dos modos de transporte, bus y auto, con características idénticas, por lo que las utilidades correspondientes también son idénticas:

$$V_a = V_b$$

$$\implies P_a = P_b = \frac{1}{2}$$

Luego, supongamos que la mitad de los buses se pinta de rojo y la otra mitad de azul. Como no se cambian las utilidades, se tiene que:

$$V_a = V_{b(rojo)} = V_{b(azul)}$$

$$P_a = P_{b(rojo)} = P_{b(azul)} = \frac{1}{3}$$

Esta aparente paradoja (en la que la probabilidad de ir en auto se reduce sin cambiar el nivel de servicio de los buses) se debe a como está definido el modelo Logit. Recordemos que el modelo Logit proviene de asumir una distribución i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) Gumbel, es decir, se asume que los errores del modelo tienen la misma varianza y no están correlacionados entre ellos. La Figura 45 muestra el esquema y matriz de varianzas y covarianzas del modelo logit:

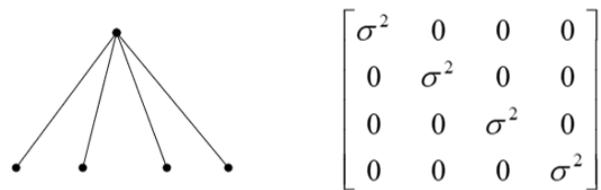


Figura 45: Esquema y matriz de varianzas y covarianzas modelo Logit.

La matriz de la derecha es la matriz de varianzas y covarianzas de los errores. Al usar este modelo en el ejemplo de los buses de colores se produce la paradoja, ya que los buses rojos y los buses azules están muy correlacionados, lo cual no es capturado por el modelo Logit.

Para este problema, se usa una variación de Logit llamada **Logit Jerárquico o Anidado**, que permite capturar de manera sencilla las correlaciones entre las alternativas:

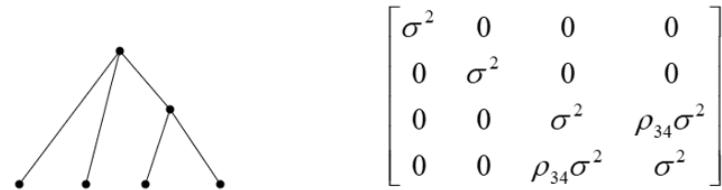


Figura 46: Esquema y matriz de varianzas y covarianzas para modelo Logit Jerárquico.

Este modelo permite capturar la correlación entre los buses azules y los buses rojos, dando un mejor resultado que el modelo Logit convencional. La razón por la que este modelo se llama Logit Jerárquico o Anidado es debido a que se puede ver como diferentes modelos Logit en cada nido, como se logra observar en la Figura 47:

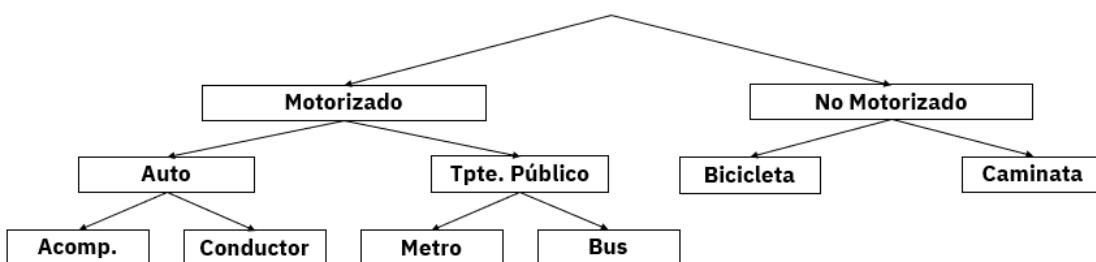


Figura 47: Ejemplo de nidos en problema de Partición Modal.

Una de las maneras en que se puede formular la probabilidad de elegir un modo j que pertenece a un nido m es usando el Teorema de Bayes:

$$P(j) = P(m) * P(j|m)$$

en el que la probabilidad condicional $P(j|m)$ (la probabilidad de j dado m) es la probabilidad de que se elija el medio j sabiendo que se elige el nido m .

La Figura 48 muestra de manera gráfica las definiciones de las probabilidades $P(m)$ y $P(j|m)$:

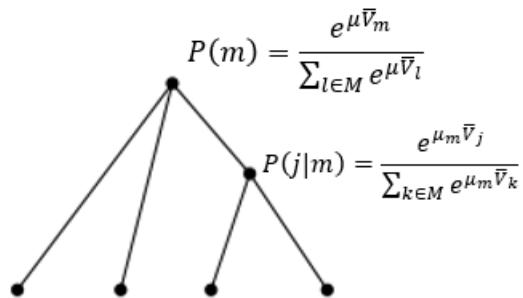


Figura 48: Probabilidades en el esquema de Logit Jerárquico.

La figura muestra que las funciones de probabilidad se diferencian en el parámetro de escala μ , siendo μ_m el parámetro de escala de todas las elecciones dentro del nido m .

Calcular $P(j|m)$ es simple, ya que se tienen las utilidades de las alternativas en el nido m . Sin embargo, para calcular $P(m)$ se necesita la utilidad del nido m , la cual debe calcularse a partir de las utilidades de las alternativas dentro del nido. La mejor aproximación para esta utilidad (la cual fue calculada por Ben-Akiva y McFadden en los años 70) es la llamada Utilidad Máxima Esperada:

$$\bar{V}_m = \frac{1}{\mu_m} \ln \sum_{k \in m} e^{\mu_m V_k}$$

2.6.11. Interdependencia entre partición modal, asignación a la red y distribución

Los tiempos y costos a utilizar en el modelo de partición modal se obtienen del modelo de asignación a la red (que veremos más adelante), como resultado del equilibrio en el sistema. De la misma manera, como discutíamos antes, el costo generalizado que se utiliza en el modelo de distribución se obtiene del modelo de partición modal. Esto implica que existe interdependencia entre las etapas de Partición Modal y Asignación a la Red y entre las etapas de Distribución y Partición Modal, tal como se observa en la Figura 49 ⁴.

⁴ Notar que hay un abuso de notación acá. En la Figura 49 V_{ij} se refiere a una celda de la matriz origen-destino, pero en toda esta sección sobre partición modal V se refiere en general a la parte sistemática de la utilidad indirecta

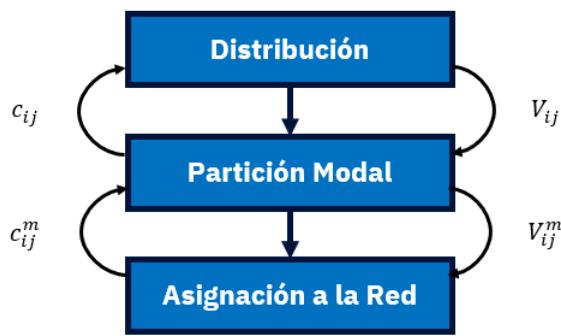


Figura 49: Interdependencia entre etapas

Cuando vimos el modelo de distribución, quedó pendiente indicar la mejor manera de considerar el costo generalizado. Ahora podemos responder esa pregunta. De acuerdo a lo mostrado en la Figura 49, el costo utilizado en el modelo de distribución surge en el modelo de partición modal. Se necesita una medida que permita capturar el efecto del tiempo y el dinero, y además englobar las características de **todos** los modos de transporte disponibles para el par OD, ya que el modelo de distribución no distingue entre medios de transporte. Para ello, se propone usar la **utilidad máxima esperada de los modos disponibles en el par OD** que, como vimos antes cuando estudiamos el modelo Logit Jerárquico, tiene la siguiente forma:

$$c_{ij} \equiv \bar{V}_{ij} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{m \in M_{ij}} e^{\mu V_m ij}$$

donde μ es el factor de escala del modelo Logit aplicado en el par (i, j) (que se normaliza en 1) y V_{mij} es la utilidad correspondiente al modo m en el par (i, j) , mientras que M_{ij} es el conjunto de alternativas (modos) disponibles para el par (i, j) . Este resultado \bar{V}_{ij} , que engloba el costo monetario, de tiempo y otros de todos los modos en cada par OD, se utiliza como el costo generalizado c_{ij} en el modelo de distribución.

2.6.12. Modelos Avanzados de Demanda de Transporte

Más adelante, en el curso **Demanda de Transporte**, profundizaremos en la derivación formal y extensiones de los modelos presentados en esta sección, algunos de los cuales, como el Logit Jerárquico, tienen su génesis en los inicios de la Ingeniería de Transporte en los años 70. Veremos, además, herramientas prácticas para dar cuenta, entre otras cosas, de heterogeneidad de gustos, fusión de datos, variables latentes y un largo etcétera en esta área de investigación que está en continuo desarrollo.

2.6.13. Problemas Propuestos

Problema 1

Considere la siguiente especificación para un modelo binario de elección de modo de transporte:

Modo	β_0	β_1	β_2	β_4	β_5
Auto	1	t_{auto}	0	$\frac{c_{auto}}{I}$	1_{mujer}
Bus	0	0	t_{bus}	$\frac{c_{bus}}{I}$	0

donde:

- tv_{auto} : tiempo total de viaje en auto
- tv_{bus} : tiempo total de viaje en bus
- c_{auto} : costo total del viaje en auto
- c_{bus} : costo total del viaje en bus
- I : ingreso familiar (\$)
- 1_{mujer} : 1 si es mujer, 0 si es hombre

- (a) De acuerdo a este modelo, ¿cuánto dinero están dispuestos a pagar los usuarios de auto por una reducción marginal en su tiempo de viaje? O, en otras palabras, ¿Cuál es el Valor Subjetivo del Tiempo (VST) de viaje en auto? Exprese el VST en términos de los parámetros y datos disponibles. (Indicación: $VST = \frac{\partial U}{\partial t} / \frac{\partial U}{\partial c}$)

Considere ahora la siguiente especificación revisada del modelo.

Modo	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Auto	1	t_{auto}	0	$\frac{c_{auto}}{I}$	0	1_{mujer}
Bus	0	0	t_{bus}	0	$\frac{c_{bus}}{I}$	0

- (b) ¿Es estimable este modelo? Explique.
- (c) ¿Qué hipótesis está implícita en esta nueva especificación del modelo? ¿Es razonable esta hipótesis? ¿Por qué?
- (d) ¿Cómo verificaría la validez de esta hipótesis?
- (e) Explique cómo utilizaría este modelo de partición modal para calcular el costo generalizado de transporte del modelo de distribución de viajes.
- (f) Suponga que modelo fue estimado usando una muestra aleatoria de tamaño N. ¿Cómo calcularía la partición modal del modo Auto en la población? Explique.

Problema 2

Considere un modelo Logit Jerárquico de elección entre auto, bus y metro, donde los dos últimos modos pertenecen a un nido. Derive una expresión para la probabilidad de elección de Bus, como función de las probabilidades iniciales y de la magnitud del cambio en la utilidad del Auto.

Problema 3

En un par OD se observa que el 30 % de los viajes se realiza en auto a un costo de \$500. El problema puede ser modelado con un Logit Binomial entre el modo “auto” y el modo “otros”, donde la función de utilidad es lineal en el costo y el tiempo de viaje. Se sabe que la elasticidad costo directa de los viajes en auto es de -0,35 y que el valor subjetivo del tiempo de viaje es de 500 \$/hr.

$$U_i = \alpha_i + \alpha_c c_i + \alpha_t t_i$$

Suponga que se desarrolla un proyecto de transporte que permite reducir el tiempo de viaje en auto en dicho par OD en 15 minutos. ¿Cuál será la partición modal después del proyecto?

Problema 4

- (a) Determine una expresión general para la elasticidad costo directa y cruzada de la probabilidad de elegir un modo determinado, considerando un modelo logit multinomial.
- (b) Encuentre una expresión para la razón entre la probabilidad de elección de dos modos cuando hay un cambio en el vector de costos, en función de las probabilidades iniciales y las variaciones en el vector de costos, si se considera un modelo logit multinomial.
- (c) Considere dos individuos cuyo modo de transporte utilizado, origen y destino son los mismos. Si el individuo A tiene disponible un modo menos que el individuo B. ¿Cuál individuo tendrá mayor probabilidad de elegir el modo utilizado si considera un modelo logit multinomial?

Problema 5

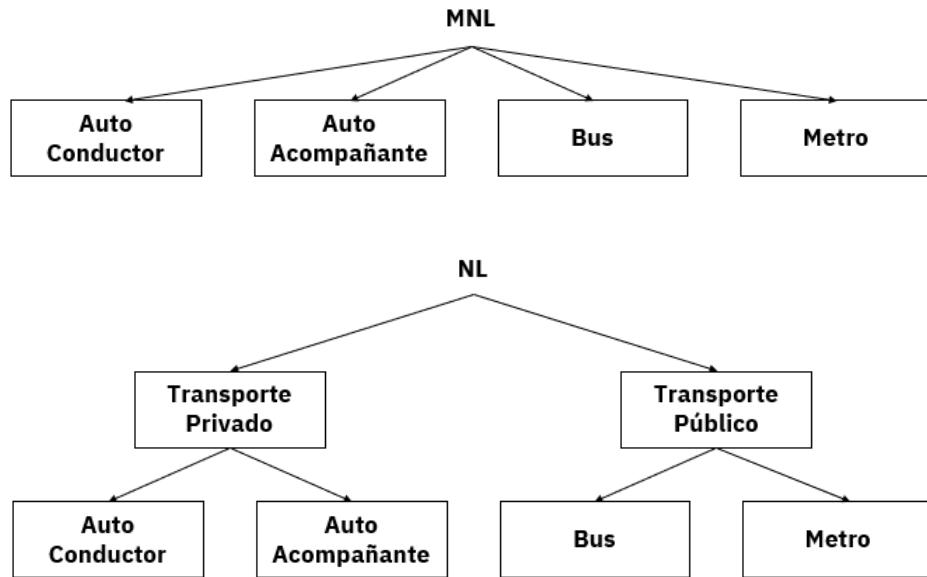
Considere que desea modelar la elección de modo de transporte en una ciudad como Santiago de Chile en punta mañana.

- (a) Indique modos de transporte consideraría y qué tipo de información sería necesario recolectar de cada uno de ellos para estimar un modelo de partición modal.
- (b) Proponga una especificación para la función de utilidad del modelo de partición modal. Señale variables específicas y formas funcionales que recomendaría considerar.
- (c) Plantee y argumente hipótesis plausibles sobre el signo y tamaño de los parámetros del modelo.
- (d) Suponga que el modelo de partición modal puede representarse por un Logit Multinomial. Escriba la log verosimilitud del modelo e indique cómo utilizaría esta expresión para estimar los parámetros del modelo.
- (e) Indique cómo verificaría las hipótesis planteadas en c) respecto de los parámetros.
- (f) Discuta sobre lo apropiado (o inapropiado) que resulta considerar un modelo Logit Multinomial para el caso en estudio. Sugiera otros modelos que podrían capturar de mejor manera el fenómeno descrito. Justifique.

Problema 6

Se tiene un modelo de elección modal con las siguientes alternativas: Auto-conductor (AC), Auto-acompañante (AA), Bus (B) y Metro (M). Suponga que un investigador considera dos posibles

modelos: Logit Multinomial (MNL) y Logit Anidado (NL), los cuales se presentan esquematizados. Los resultados de estimación de estos modelos se presentan en la tabla adjunta.



Variable Explicativa	Alternativa*	MNL	NL
Constante Auto-Acompañante	AA	-2,26 (-5,93)	-1,56 (-3,91)
Constante de Bus	B	-3,49 (-5,33)	-2,19 (-3,31)
Constante de Metro	M	.1,84 (-6,36)	-1,20 (-5,63)
Costo/Ingreso-hora	Todas	-1,68 (-4,31)	1,10 (-2,03)
Tiempo de Viaje [min]	Todas	-0,164 (-5,65)	-0,143 (-4,82)
Número de personas con licencia en el hogar	AC	1,02 (2,81)	1,02 (2,73)
Dummy Jefe de Hogar (1 si la persona es jefe de hogar, 0 si no)	AC	0,627 (-3,37)	0,267 (1,97)
Densidad de empleo en el destino	AA	4,13 (-4,18)	2,12 (-1,58)
Dummy Centro (1 si el hogar está cerca del centro, 0 si no)	AC	-0,502 (-9,65)	-0,0284 (-2,85)
$\mu_{publico}$			10,3 (-6,39)
$\mu_{privado}$			3,37 (-1,86)
Log-likelihood inicial		-1068,9	-1068,9
Log-likelihood final		-595,83	-545,72

*Cada variable entra en la función de utilidad de las alternativas indicadas y vale cero en el resto (t-test en paréntesis)

- (a) Considere la especificación MNL. Las constantes específicas de alternativa (ASC) se especificaron usando AC como referencia. Suponga que el investigador desea presentar las ASC

usando en cambio en modo M como la base. ¿Sería necesario re-estimar el modelo en ese caso? Explique.

- (b) Escriba las expresiones para la probabilidad de elegir el modo AA (P_{AA}), cuando el modelo es MNL y NL, respectivamente. ¿Qué normalización está implícita en los resultados reportados en la Tabla para cada modelo? ¿Cuál de los modelos estimados debiera ser elegido como el mejor? Describa su razonamiento y las pruebas de hipótesis que sean necesarias.
- (c) Suponiendo que cuenta con una muestra aleatoria de tamaño N ¿Cómo evaluaría el impacto en la partición modal del bus de un aumento de un 15% del costo del modo auto para los modelos MNL, NL?

Problema 7

Considere el modelo Logit Jerárquico. ¿El factor de escala de un nido debiera ser mayor o menor que el factor de escala de la raíz? ¿Por qué?

Problema 8

Una empresa consultora ha estimado el siguiente modelo de demanda tipo Logit Multinomial para viajes al trabajo en un corredor:

Parámetro	Valor
Tiempo de viaje	-0,056
Tiempo de espera	-0,065
Tarifa	-0,009

Los modos disponibles son taxi, bus y automóvil, con los siguientes niveles de servicio:

Modo	tv [min]	te [min]	tarifa [\$]
Auto	20	0	1200
Taxi	25	5	500
Bus	40	8	250

La constante modal asociada a taxi vale -1.7, mientras que la constante asociada al bus vale -3.8. Con la información entregada, se pide:

- (a) Calcular las particiones modales en la situación planteada.
- (b) Calcular la partición modal si los buses duplican su frecuencia.
- (c) Calcular el VST de viaje y espera.

Problema 9

Un individuo tiene cinco modos disponibles para viajar al trabajo. Los costos (precios) y tiempos de viaje totales observados para los diferentes modos son:

Modo	Costo [\\$]	Tiempo de Viaje [min]
1	220	55
2	510	45
3	500	60
4	1100	32
5	2500	30

Considerando esta información, que puede decir sobre el valor (subjetivo) del tiempo de este individuo si:

- (a) siempre usa modo 2
- (b) usa modo 2 y 4 con la misma frecuencia
- (c) usualmente usa modo 2, y cambia a modo 3 de vez en cuando.

Problema 10

Cierra los ojos. Tras aprobar con excelente nota Análisis de Sistemas de Transporte, te tomas unas merecidas vacaciones en Argentina junto a dos amigos (Pedro y Ana), siguiendo a la Roja en su periplo americanista. En el entretiempo de la final entre Chile y Brasil, el partido va 1 a 1 y les baja un hambre que parecen dos. Ansiosos de seguir aplicando los conocimientos adquiridos en el curso, tus amigos y tú deciden modelar su comportamiento de elección de comida usando un modelo Logit.

El estadio Monumental Antonio Vespucio Liberti ofrece, este 24 de Julio, dos opciones de comida para la hinchada: comida rápida y comida vegana. Revisando por internet averiguan los costos de cada una de las opciones de comida. Los costos difieren para los tres debido a las distintas cantidades de comida que cada uno desea comprar. La siguiente tabla resume la información disponible, incluyendo la elección de cada uno.

Persona	Elección	c_R [\\$]	c_V [\\$]
Tú	Rápida (R)	3	8
Ana	Rápida (R)	5	4
Pedro	Vegana (V)	6	6

- (a) Calcule el estimador máximo-verosímil (MLE) de un modelo Logit que sólo considere constantes específicas de alternativa (ASC), pero no información sobre el costo.
- (b) Después de tratar infructuosamente de descargar la aplicación “Biogeme for Android”, deciden estimar de manera aproximada el MLE del modelo que incluye también al costo. Mientras

los equipos vuelven a la cancha (y ustedes ya saborean sus respectivas elecciones) concluyen que el coeficiente de costo debiese estar cerca de -0.365 y la ASC de comida vegana cerca de -0.383. ¿Son estos estimadores aproximados estadísticamente mejores o peores que los que se obtenían del modelo que sólo incluía las ASC?

- (c) Minuto 90+3. El partido sigue 1 a 1 y hay un penal a favor de Chile. Sin embargo, la curiosidad los carcome y deciden verificar si acaso los estimadores “aproximados” son de hecho MLE. ¿Cómo lo harían?

3. Oferta de Transporte

3.1. Introducción

Hasta el momento, se ha estudiado cómo funciona el sistema en su totalidad y particularmente el comportamiento de la **demandapor transporte**, con el objetivo de representar esta demanda y entender cómo reacciona frente a cambios tanto en el nivel de servicio como en las características de las personas y de la ciudad. Las tres primeras etapas del modelo clásico de transporte de cuatro etapas (Generación y Atracción, Distribución y Partición Modal) permiten obtener para cada par O-D una estimación del número de viajes por modo en un período determinado. Considerando este resultado – en primera instancia – como un dato fijo, en este capítulo se abordarán los elementos que conforman el diseño de la **ofertapor transporte** que permitirá satisfacer dicha demanda.

3.2. Diseño de Oferta de Sistemas Portadores

En esta sección, se verán nociones sobre diseño de oferta de sistemas portadores, es decir, aquellos que involucran la operación y gestión de servicios de transporte, incluyendo personal, pasajeros y/o carga. Algunos ejemplos de sistemas portadores son los sistemas de transporte público como Transantiago (ahora Red) y Metro, los servicios de transporte aéreo que ofrecen las aerolíneas; por el lado del transporte de carga se puede considerar el transporte de mercancía a través de barcos y el transporte de material minero, entre otros.

Para comenzar, se reconoce la existencia de una tecnología de transporte que permitirá construir una función de transformación $F(X, Y) \geq 0$, en la que Y corresponde a una demanda fija (entre un par O-D, en un período y modo de transporte determinados), y X son los insumos (vías, terminales, vehículos, etc.). Lo que se busca es qué combinación de los insumos resulta en una forma óptima de trasladar un flujo Y personas o carga, mediante la función $F(X, Y)$.

Para ello, inicialmente se estudiarán algunos esquemas simplificados a nivel de par O-D – de forma similar a como se estudia la viga como elemento básico del análisis estructural – con demanda fija, para luego complejizar el problema y así obtener resultados más sofisticados. No obstante, se verá que a pesar de lo simplificado del problema, es posible definir una función de producción que permita relacionar la demanda con los distintos elementos que conforman el nivel de servicio.

3.2.1. Sistema Cíclico Simple Sin Carga de Retorno

El sistema cíclico simple consiste en un esquema compuesto por un único par O-D, en el cual se tiene una demanda de transporte de un producto único de naturaleza continua y demanda estacionaria. Para satisfacer esta demanda, una flota de vehículos transporta el producto – pasajeros o carga – desde el origen (terminal de carga) hacia el destino (terminal de descarga), para luego retornar vacíos hacia el origen.

A modo de simplificación, este sistema cumple con las siguientes características:

- Sistema ideal aislado: no es influenciado por condiciones externas, como congestión, accidentes, cruces de autos/peatones, etc.
- Discreto: la cantidad de vehículos es entera.
- Con operación cíclica de frecuencia fija: los vehículos siempre se mantienen en el sistema, de manera que siempre toma el mismo tiempo en hacer un circuito.
- Con vehículos idénticos e intercambiables: todos los vehículos poseen iguales características.

La Figura 43 muestra el esquema del sistema cíclico simple sin carga de retorno.

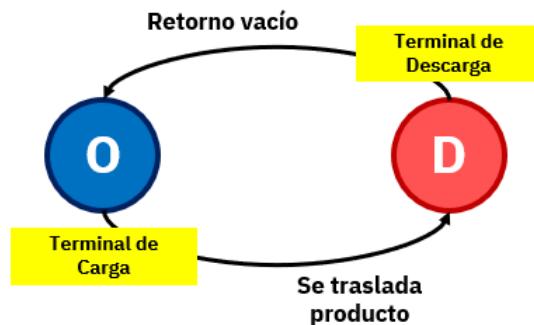


Figura 50: Esquema de sistema cíclico simple sin carga de retorno.

Nos interesa expresar la cantidad de vehículos necesarios en función de la demanda de transporte en el par O-D en estudio. Para ello, a partir de este esquema se definen los siguientes elementos:

- λ [UF/UT]: **Intensidad del flujo de transporte.** Corresponde a la cantidad de producto que se debe transportar, es decir, la demanda de pasajeros o carga del sistema.
- K [UF/veh]: **Capacidad del vehículo.** Se entiende como la máxima cantidad de producto que es posible cargar en cada vehículo. Este parámetro se establece por el tamaño del vehículo (peso y volumen), el tipo de vehículo, el estado de la vía, etc.
- k [UF/veh]: **Tamaño de embarque del vehículo.** Es la cantidad realmente cargada en un vehículo en un ciclo dado. Naturalmente, se tiene que $k \leq K$, ya que un vehículo (en teoría) no puede transportar más producto de lo que indica su capacidad.
- S : **Número de sitios de atención.** Los sitios corresponden a las instalaciones donde los vehículos realizan los procesos de carga y descarga. Se debe tener en cuenta que cada sitio atiende a un solo vehículo a la vez.
- μ^+ [UF/UT]: **capacidad de carga.** Cantidad de lo transportado que es posible cargar por unidad de tiempo.
- μ^- [UF/UT]: **capacidad de descarga.** Cantidad de lo transportado que es posible descargar por unidad de tiempo.
- f [veh/UT]: **frecuencia de servicio.** Es el número de vehículos que pasan por un punto de la trayectoria por unidad de tiempo. En el modelo cíclico simple, este término es constante.

- $h = \frac{1}{f}$: **Intervalo**. Es el período de tiempo que transcurre entre un vehículo y el siguiente.
- $t(k)$ [UT]: **tiempo de viaje** del vehículo con carga k .
- B [veh]: **Tamaño de flota**. Corresponde al número de vehículos disponibles.
- η : **Proporción de vehículos en servicio**. Por distintos motivos (mantención, reparación, etc), no toda la flota disponible se encuentra en servicio. El término η da cuenta del porcentaje de vehículos de la flota que se encuentra en circulación.
- UF: unidad física. En el caso de transporte de pasajeros se refiere al número de pasajeros, mientras que en el caso del transporte de carga se refiere al peso o volumen, entre otros.
- UT: unidad de tiempo (e.g. hora, minuto, día, etc.)

Teniendo todos estos elementos en consideración, se define el problema para obtener la función de Transporte. Sea:

- $t_1(k)$: tiempo de viaje entre el origen y el destino, con carga k . Se recuerda que $k \leq K$.
- $t_2(0)$: tiempo de viaje entre el destino y el origen. Como no hay carga en el retorno, $k = 0$.
- t_c : es el **tiempo de ciclo**, es decir, es la suma de los tiempos de carga y descarga y de los tiempos de viaje para un vehículo dado.

De acuerdo a la definición anterior, el tiempo de ciclo está dado por la siguiente expresión:

$$t_c = t_1(k) + t_2(0) + \frac{k}{\mu^+} + \frac{k}{\mu^-}$$

donde k/μ^+ y k/μ^- corresponden al tiempo de carga y descarga, respectivamente. En efecto, dado que $\mu^{+/-}$ es la tasa de carga/descarga, se interpreta $1/\mu^{+/-}$ como el tiempo que tarda la carga/-descarga de una unidad de producto. Luego, $k/\mu^{+/-}$ es el tiempo que tarda la carga/descarga de k unidades, que es justamente la cantidad de producto que efectivamente transporta el vehículo.

Por otro lado, la frecuencia necesaria para satisfacer la demanda es:

$$f' = \frac{\lambda}{k}$$

El número de vehículos en servicio ηB debería ser suficiente para ofrecer esta frecuencia:

$$f = \frac{\eta B}{t_c}$$

Si hay equilibrio de oferta y demanda, se tiene que $f' = f$. Así:

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{\eta B}{t_c}$$

Finalmente, reemplazando, se obtiene una expresión para λ :

$$\lambda = \frac{\eta B k}{t_c} = \frac{\eta B k}{t_1(k) + t_2(0) + \frac{k}{\mu^+} + \frac{k}{\mu^-}}$$

Esta fórmula es la **Función de producción de Transporte**, y representa la máxima cantidad de “transporte” que se puede producir con los insumos disponibles.

Veamos un ejemplo de sistema de ciclo simple sin carga de retorno: Supongamos que se necesita pavimentar un camino. El contrato del proyecto especifica lo siguiente:

- El pavimento debe tener 20 [cm] de espesor.
- La calzada tiene un ancho de 14 [m].
- El grado de avance diario debe ser de 100 [m] lineales al día.
- El trabajo tiene tres turnos de 8 [hr] cada uno.

Se poseen los siguientes recursos:

- Camiones mezcladores con capacidad de 6 [m^3] cada uno.
- La tasa de carga y descarga de los camiones es de 0.2 [m^3/min].
- El tiempo de subida es de 3 [hr], y el tiempo de bajada es de 2 [hr].

Si se supone que los camiones viajan completamente cargados en la ida ($k = K$), ¿cuántos camiones son necesarios para satisfacer λ ?

Lo que se busca en este problema es el valor de ηB . Para ello, se realiza lo siguiente:

1. A partir de las dimensiones de la calzada indicadas en el contrato, se calcula la demanda λ .
2. Con los recursos dados, se calcula el tiempo de ciclo t_c .
3. Con los resultados obtenidos, se calcula el valor de ηB .

En este caso, λ corresponde al volumen diario de material que se requiere para cumplir con las dimensiones del pavimento y el grado de avance diario:

$$\lambda = V_{diario} = E * A * L = 20 [cm] * 14 [m] * 100 \left[\frac{m}{dia} \right] = 280 \left[\frac{m^3}{dia} \right]$$

La información de los turnos indica que el proyecto está funcionando de forma continua durante las 24 horas del día.

Dado que los camiones circulan a capacidad, se tiene $k = K$, es decir, $k = 6 [m^3]$. Luego, con la información de recursos se calcula el tiempo de ciclo:

$$t_1(k) = 3 [hr] \quad t_2(0) = 2 [hr] \quad \frac{k}{\mu^+} = \frac{k}{\mu^-} = \frac{6 [m^3]}{0.2[m^3/min]} = 30 [min] = 0.5 [hr]$$

$$\Rightarrow t_c = t_1(k) + t_2(0) + \frac{k}{\mu^+} + \frac{k}{\mu^-} = 3 [hr] + 2 [hr] + 0.5 [hr] + 0.5 [hr] = 6 [hr] = 0.25 [dia]$$

Finalmente, usando la función de producción de transporte, se obtiene el resultado. Como no es posible tener fracciones de vehículo, se aproxima ηB a la unidad superior.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\eta B k}{t_c} \Rightarrow \eta B = \frac{\lambda t_c}{k} \\ \Rightarrow \eta B &= \frac{280 [m^3/hr] * 0.25 [dia]}{6 [m^3/veh]} = 11.67 [veh] \\ \Rightarrow \eta B &= 12 [veh]\end{aligned}$$

Ahora veamos algunas derivaciones a partir de la función de producción para ver como se relacionan los distintos elementos que participan en el diseño de oferta y los impactos que producen cada uno de ellos.

- Sustitución entre flota y capacidad de carga/descarga:** Comencemos definiendo el tiempo medio de carga/descarga de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right)$$

Luego, la función de producción de transporte puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\eta B k}{t_c} = \frac{\eta B k}{t_1(k) + t_2(0) + \frac{k}{\mu^+} + \frac{k}{\mu^-}} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\eta B k}{t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu}}\end{aligned}$$

A partir de esto, se obtiene la siguiente expresión para B :

$$\begin{aligned}\eta B k &= \lambda \left(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu} \right) \\ \Rightarrow B &= \frac{\lambda}{\eta k} (t_1(k) + t_2(0)) + \frac{2\lambda}{\eta} * \frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

Así, se tiene B en función de μ . Además, si se asume que λ , k y los tiempos de viaje son constantes, se tiene la siguiente forma funcional:

$$B = \alpha_2 + \alpha_1 * \frac{1}{\mu}$$

donde α_1 y α_2 están dados por:

$$\alpha_1 = \frac{2\lambda}{\eta} \quad \alpha_2 = \frac{\lambda}{\eta k} (t_1(k) + t_2(0))$$

De la expresión obtenida, para una demanda conocida λ se observa que existe una relación inversa entre la flota requerida y la tasa de carga/descarga. En otras palabras, si se mejoran las tasas de carga y descarga (hasta cierto punto), se requerirá una menor flota, lo que conlleva a un menor gasto por parte de los operadores. Esta relación se muestra gráficamente en la Figura 44:

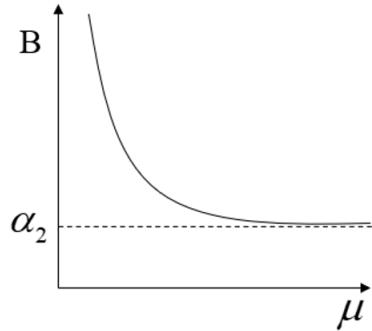


Figura 51: Relación entre tamaño de flota y tasa de carga/descarga.

2. **Productividad marginal de μ :** Ahora, veamos qué pasa con la producción λ si cambia el valor de la tasa de carga/descarga μ . Es decir, se quiere calcular la derivada de λ en μ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\eta B k}{t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu}} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} &= \frac{-\eta B k \cdot \frac{-2k}{\mu^2}}{(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu})^2} = \frac{2\eta B k^2}{\mu^2(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu})^2} \geq 0\end{aligned}$$

Se observa que al aumentar la tasa de carga/descarga, la producción aumenta. Sin embargo, este crecimiento disminuye con μ , de hecho, cuando $\mu \rightarrow \infty$, la derivada se hace cero, lo cual indica la existencia de un B máximo.

3. **Sustitución entre B y k :** De forma similar a lo realizado con μ , se puede establecer una relación entre la flota B y el tamaño de embarque k . En efecto:

$$\eta B k = \lambda \left(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu} \right)$$

$$B = \frac{\lambda}{\eta} (t_1(k) + t_2(0)) \cdot \frac{1}{k} + \frac{2\lambda}{\eta\mu}$$

Así, B queda en función de k . Si se asume que λ , μ y los tiempos de viaje son constantes, se tiene la siguiente forma funcional:

$$B = \gamma_1 * \frac{1}{k} + \gamma_2$$

donde γ_1 y γ_2 están dados por:

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\eta}(t_1(k) + t_2(0)) \quad \gamma_2 = \frac{2\lambda}{\eta\mu}$$

Esta relación se muestra gráficamente en la Figura 52:

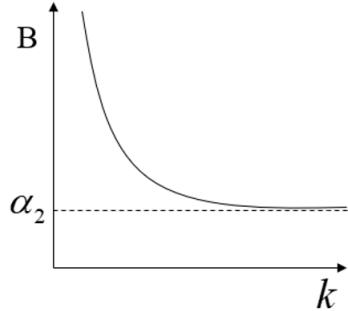


Figura 52: Relación entre tamaño de flota y tamaño de embarque.

De la figura, se observa que a medida que aumenta la tasa de embarque (o la capacidad si se asume $k = K$) disminuye la flota mínima requerida. Es necesario mencionar que esta tasa de sustitución no es constante, en otras palabras, a medida que aumenta la tasa de embarque o capacidad, la disminución de la flota requerida es cada vez menor.

4. **Productividad marginal de k :** Ahora, veamos qué ocurre con la producción λ si cambia la tasa de embarque k . Es decir, se quiere calcular la derivada de λ en k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial k} &= \frac{\eta B \cdot (t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu}) - \eta B k \cdot \frac{2}{\mu}}{(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu})^2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{\eta B \cdot (t_1(k) + t_2(0))}{(t_1(k) + t_2(0) + \frac{2k}{\mu})^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Este resultado es válido si se asume que $t_1(k)$ es constante. De forma similar a la productividad marginal de μ , se observa que la productividad aumenta con la tasa de embarque (o capacidad si $k = K$). Además, a medida que k aumenta el crecimiento es cada vez menor: cuando $k \rightarrow \infty$, la derivada se hace cero, lo que indica la existencia de un B máximo.

Instalaciones de Carga/Descarga

Se entiende por sitio a una instalación que permite la carga o descarga de un vehículo. En el caso del transporte público, un paradero es considerado como un sitio. Se recuerda que:

- k/μ^+ : Tiempo necesario para cargar k .
- k/μ^- : Tiempo necesario para descargar k .
- $1/f$: Intervalo entre vehículos.

Si k/μ^+ o k/μ^- son mayores que $1/f$, el tiempo de carga/descarga excede el intervalo entre vehículos, lo que provoca que el vehículo que viene detrás debe esperar a que el primer vehículo termine su proceso de carga/descarga, generando una cola de vehículos. Para evitar esta situación, se requiere tener a disposición un sitio adicional.

Además, es necesario considerar el tiempo de posicionamiento t_p , que corresponde es el tiempo que transcurre entre la llegada de un vehículo al sitio y que éste se encuentre listo para cargar o descargar. Así, se necesita más de un sitio si se cumple que:

$$\frac{k}{\mu^{+/-}} + t_{pe} + t_{ps} > \frac{1}{f} \quad t_{pe} + t_{ps} = t_p$$

donde t_{pe} es el tiempo de posicionamiento de entrada y t_{ps} es el tiempo de posicionamiento de salida.

El gráfico de la Figura 53 muestra un caso en el que se requiere un segundo sitio de carga. En la figura, se observa que un primer vehículo llega al sitio, se posiciona, realiza su proceso de carga y comienza a salir. Al transcurrir un período de tiempo $1/f$, llega un segundo vehículo: dado que el intervalo es menor al tiempo que el primer vehículo permanece en el sitio, este segundo vehículo debe ocupar un segundo sitio. Al transcurrir un segundo período $1/f$, llega un tercer vehículo: dado que para ese entonces el primer sitio ya está desocupado, puede ocupar el primer sitio sin problemas. Es importante notar que debido a que el número de sitios es una cantidad discreta, se generan tiempos muertos en los cuales los sitios no son utilizados por ningún vehículo.

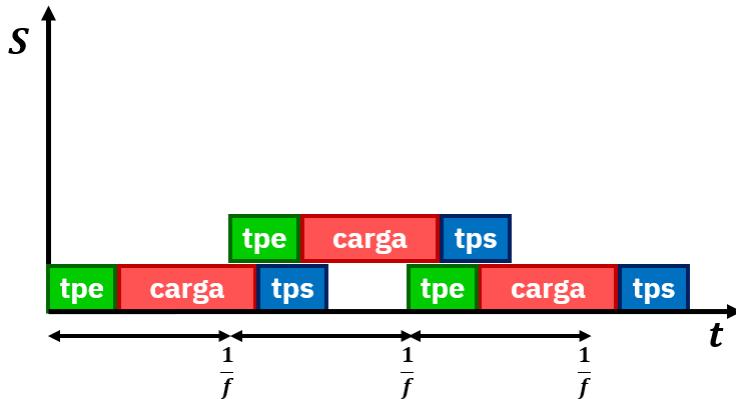


Figura 53: Gráfico de número de sitios.

Se puede calcular el número de sitios necesarios de la carga (S^+) de la siguiente manera:

$$S^+ \geq f \left(\frac{k}{\mu^+} + t_p \right)$$

Del mismo modo, se tiene para los sitios de descarga (S^-):

$$S^- \geq f \left(\frac{k}{\mu^-} + t_p \right)$$

Debido a que los sitios necesitan mantenimiento o dependiendo de las jornadas laborales, cada sitio está en operación en una proporción η_c del tiempo. De esta manera, el número de sitios de carga/descarga necesarios está dado por la siguiente condición:

$$\eta_c^{+/-} * S^{+/-} \geq \frac{fk}{\mu^{+/-}} + f * t_p = \frac{\lambda}{\mu^{+/-}} + f * t_p$$

Al igual que el tamaño de flota, el número de sitios debe ser una cantidad discreta, es decir, no pueden haber fracciones de sitio. En consecuencia, tanto $S^{+/-}$ como $\eta_c^{+/-} S^{+/-}$ deben ser números enteros mayores a 0. Además, S será el mínimo valor que cumpla la desigualdad descrita, siempre conservando el carácter de número entero.

Impactos sobre los usuarios en el Sistema

Hasta el momento se ha abordado los impactos que tienen las decisiones de las variables de diseño en los operadores, la interrogante que surge ahora es cómo afectan estas decisiones a los usuarios del sistema. Particularmente, se analizará cómo afecta el tiempo de espera.

Sea un paradero de buses en el cual sólo pasa un servicio con frecuencia fija f . En $t = 0$ se acaba de ir un primer bus y el paradero queda vacío. Luego, empiezan a llegar personas al paradero a una tasa constante λ , acumulándose hasta la llegada de un nuevo bus, al cual suben k usuarios. Esta situación se muestra en el gráfico de la Figura 54.

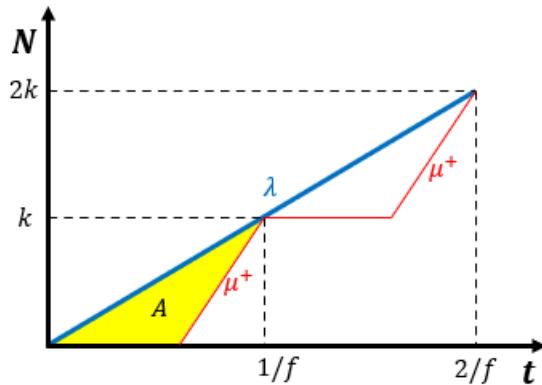


Figura 54: Carga de usuarios en un sistema en el que hay una tasa constante.

En el gráfico, se observa que transcurre un intervalo $1/f$ entre que dos buses consecutivos salgan del paradero. La línea azul representa el número de personas que ha llegado al paradero, mientras que la línea roja representa la cantidad de personas que han abordado un bus. Dado que el bus carga a las personas con tasa μ^+ , el tiempo de carga del vehículo es igual a k/μ^+ .

Nos interesa calcular el tiempo de espera de los usuarios. Para ello, se comienza calculando el área demarcada en amarillo (A), que representa el tiempo de espera acumulado de los k usuarios.

Esto se hace mediante la resta de dos áreas:

$$A = \frac{1}{2} \left(k \cdot \frac{1}{f} \right) - \frac{1}{2} \left(k \cdot \frac{k}{\mu^+} \right) = k \left(\frac{1}{2f} - \frac{k}{2\mu^+} \right)$$

Luego, se puede calcular el tiempo de espera promedio de los usuarios dividiendo el tiempo de espera acumulado en el número de usuarios que sube al bus:

$$t_e = \frac{A}{k} = \frac{1}{2f} - \frac{k}{2\mu^+}$$

El tiempo de espera es una componente del nivel de servicio. Generalmente, se busca disminuir este tiempo para mejorar el servicio, lo cual se puede hacer aumentando la frecuencia f o aumentando la capacidad K del bus. Desde el punto de vista de los usuarios, es preferible aumentar la frecuencia. Para ilustrar esto, consideremos la siguiente interrogante: ¿Qué es mejor, un bus grande ($2K$) que pasa cada 1 hora o dos buses pequeños (K) que pasan cada media hora?

$$f_2 = 2 \cdot f_1 = 2 \left[\frac{1}{hr} \right]$$

$$t_{e1} = \frac{1}{2f_1} - \frac{2k}{2\mu^+} \quad t_{e2} = \frac{1}{2f_2} - \frac{k}{2\mu^+}$$

Sean $K = 40$ [pax] y $\mu^+ = 10$ [pax/min].

$$t_{e1} = \frac{1}{2f_1} - \frac{2k}{2\mu^+} = 0.5 [hr] - 4 [min] = 26 [min]$$

$$t_{e2} = \frac{1}{2f_2} - \frac{k}{2\mu^+} = 0.25 [hr] - 2 [min] = 13 [min]$$

De esta manera, se observa que $t_{e1} = 2t_{e2}$, lo que indica que los buses pequeños reducen el tiempo de espera a la mitad y dan un mejor nivel de servicio que el bus grande.

Si el tiempo de espera incluye el tiempo que el usuario está dentro del bus antes de que salga del paradero, entonces se elimina el elemento $k/2\mu^+$ de la ecuación. Así:

$$t_e = \frac{1}{2f} = \frac{h}{2}$$

Es decir, el tiempo de espera promedio es igual a la mitad del intervalo entre salidas de buses. Esto tiene sentido desde un punto de vista estadístico: es equivalente al tiempo de espera promedio entre una persona que perdió el bus anterior y tuvo que esperar todo el intervalo; y otra persona que llegó justo a tiempo y no tuvo que esperar.

Veamos el siguiente problema: ¿Cuál es el valor esperado de tiempo de espera de un pasajero que llega aleatoriamente a una estación de metro, si los trenes salen regularmente cada 5 minutos?

El valor esperado del tiempo de espera de un usuario de metro es igual a la mitad del intervalo esperado entre los trenes, es decir:

$$E(W) = \frac{E(h)}{2} = 2.5 \text{ [min]}$$

Ahora, ¿cuánto sería $E(W)$ si los tiempos entre salidas de trenes son variables aleatorias h_i con media $E(h)$ y varianza $Var(h)$? El gráfico de la Figura 48 muestra esta situación:

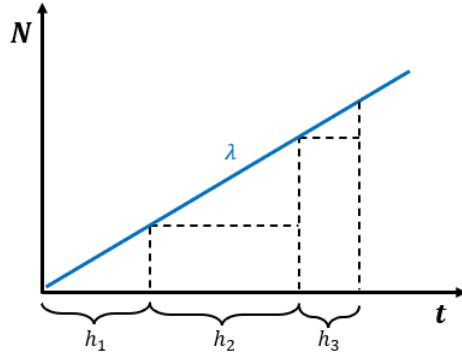


Figura 55: Sistema en el que los intervalos son aleatorios.

En este gráfico, se puede ver que la cantidad de pasajeros al final del intervalo h_3 va a ser:

$$T = \lambda(h_1 + h_2 + h_3)$$

Generalizando para n intervalos h_i , se tiene que:

$$T = \lambda \sum_i h_i$$

El tiempo total de espera de todos los usuarios es igual al área de los triángulos. Por ejemplo, para h_1 , el tiempo total de espera es:

$$A_1 = \frac{1}{2} * \lambda h_1 * h_1 = \frac{\lambda h_1^2}{2}$$

De este modo, se tiene que el tiempo total acumulado está dado por:

$$A = \sum_i A_i = \sum_i \frac{\lambda h_i^2}{2} = \frac{\lambda}{2} \sum_i h_i^2$$

El valor esperado del tiempo de espera $E(W)$ se calcula como:

$$E(W) = \frac{A}{T} = \frac{\frac{\lambda}{2} \sum_i h_i^2}{\lambda \sum_i h_i} = \frac{1}{2} \frac{\sum_i h_i^2}{\sum_i h_i} = \frac{1}{2} \frac{\sum_i h_i^2}{\frac{\sum_i h_i}{N}}$$

Además, por definición del valor esperado del intervalo, se tiene que:

$$E(h) = \frac{1}{N} \sum_i h_i \implies E(W) = \frac{1}{2} \frac{E(h^2)}{E(h)}$$

Por otro lado, se recuerda de probabilidades la siguiente propiedad:

$$Var(h) = E(h^2) - E(h)^2 \implies E(h^2) = E(h)^2 + Var(h)$$

Así, se obtiene el valor esperado del tiempo de espera:

$$E(W) = \frac{E(h)^2 + Var(h)}{2E(h)} \implies E(W) = \frac{E(h)}{2} + \frac{Var(h)}{2E(h)}$$

El segundo término de la suma se denomina **tiempo de espera en exceso**. La variabilidad del tiempo de espera incrementa su valor esperado, es decir, que el valor esperado del tiempo de espera se minimiza cuando $Var(h) = 0$. Debido a esto, mejorar la regularidad en las llegadas de los vehículos permite una reducción de los tiempos de espera, lo que lleva a una mejora de la calidad del servicio.

Cantidad de producto almacenada en el sistema

Para un vehículo, la cantidad de producto almacenado durante el ciclo se representa como el gráfico de la Figura 56:

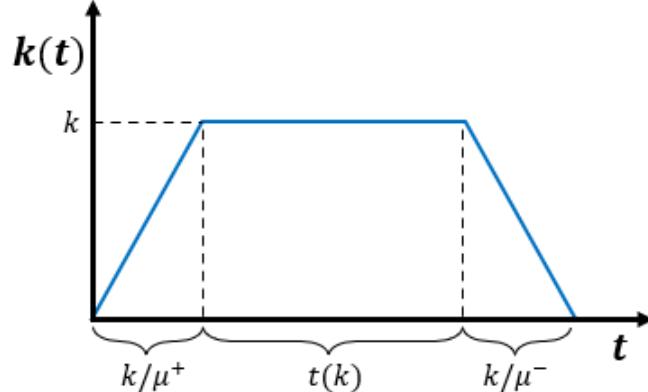


Figura 56: Cantidad de producto almacenado en un vehículo.

En la figura, se aprecian claramente los períodos de los procesos de carga, traslado y descarga. La **cantidad de producto almacenado en un vehículo** (R_1) equivale al área bajo la curva, es decir:

$$R_1 = \int_0^{t_c} k(t) dt = \frac{1}{2} k \frac{k}{\mu^+} + kt_1(k) + \frac{1}{2} k \frac{k}{\mu^-} \implies R_1 = kt_1(k) + \frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right)$$

A partir de este valor, se puede calcular la **cantidad de producto almacenado en el sistema por unidad de tiempo** (r) de la siguiente forma:

$$r = R_1 \cdot \frac{\text{cantidad de ciclos en un período}}{\text{duración del período}} \implies r = R_1 \cdot f$$

Recordemos que la frecuencia requerida para satisfacer la demanda λ está dada por:

$$f = \frac{\lambda}{k}$$

Reemplazando este resultado en la expresión de r se obtiene:

$$r = fk t_1(k) + \frac{fk^2}{2} \left(\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right) \implies r = \lambda t_1(k) + \frac{\lambda k}{2} \left(\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right)$$

Finalmente, con este término se puede calcular el **tiempo medio de permanencia** de lo transportado en el sistema, dado por la siguiente expresión:

$$t_m = \frac{r}{\lambda} = t_1(k) + \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right)$$

Este tiempo es un componente del nivel de servicio, ya que también aplica a pasajeros de transporte público.

Valor óptimo de k

En primer lugar, es necesario señalar que los cálculos realizados en esta sección sólo es válido en el corto plazo; a largo plazo se tiene que $k = K$. En segundo lugar, se debe tener en cuenta que el óptimo será distinto para el operador que para la sociedad. Específicamente, el operador busca satisfacer la demanda a mínimo costo, maximizando sus ganancias; mientras que la sociedad busca satisfacer la demanda a mínimo costo, pero sin sacrificar el nivel de servicio, maximizando el bienestar social.

Dicho esto, en el corto plazo, dada una flota de B vehículos de tamaño K , ¿cuál es el k que maximiza la demanda λ ? Recordando que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial k} \geq 0$$

se tiene que el valor de k óptimo para el operador es el máximo k posible, es decir, $k = K$. Este resultado es óptimo solo para el operador. El resultado cambia si se considera el bienestar de los usuarios: por ejemplo, una empresa de buses decide limitar k al número de personas que pueden ir sentadas, para mejorar la comodidad de los pasajeros.

3.2.2. Sistema cíclico simple con carga de retorno

Este sistema consiste en un par O-D servido por un servicio de transporte, donde se trasladan productos (pasajeros o carga) en ambos sentidos, es decir, tanto el origen como el destino son terminales tanto de carga como descarga. Debido a esta característica, este sistema resulta más eficiente en comparación con el sistema cíclico simple sin carga de retorno, ya que se aprovecha el viaje de regreso para transportar productos en lugar de retornar de utilizar un segundo sistema. La Figura 57 muestra un esquema de este sistema.

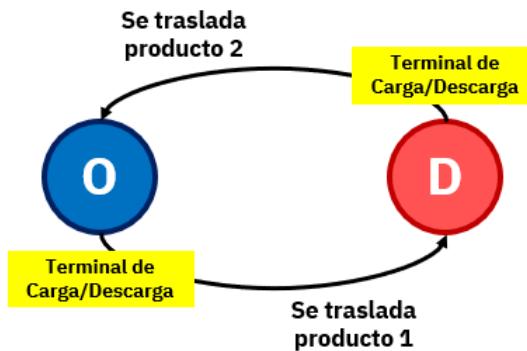


Figura 57: Esquema de sistema cíclico simple con carga de retorno.

Para este sistema, se supondrá que se transportarán productos distintos en los viajes de ida y regreso. En consecuencia, existen dos demandas denotadas por λ_1 y λ_2 . La frecuencia del servicio debe ser suficiente para satisfacer ambas demandas. Las frecuencias específicas para satisfacer cada demanda por separado están dadas por:

$$f'_1 = \frac{\lambda_1}{K_1} \quad f'_2 = \frac{\lambda_2}{K_2}$$

Este problema se puede resolver de dos formas:

- **Frecuencia Única:** Se utiliza una flota única que funciona con la misma frecuencia en ambos sentidos. La frecuencia está dada por la **demandा más exigente**. Cabe señalar que esta no corresponde necesariamente a la mayor demanda. En estricto rigor, la demanda más exigente es la que requiere una mayor frecuencia, es decir:

$$f = \max(f'_1, f'_2) = \max\left(\frac{\lambda_1}{K_1}, \frac{\lambda_2}{K_2}\right)$$

Cabe destacar que esto implica que una variable de diseño corresponde a la carga por sentido (k_i), la que, en general, solo en uno de los casos podrá corresponder a la capacidad del vehículo.

Al igual que para el sistema cíclico simple sin carga de retorno, la flota mínima requerida está dada por la siguiente expresión:

$$\eta B = ft_c$$

El tiempo de ciclo está compuesto por los tiempos de viaje trasladando ambos productos y los procesos de carga y descarga de cada uno. Suponiendo que los procesos de carga y descarga

son secuenciales, el tiempo de ciclo está dado por:

$$t_c = t_1(k_1) + t_2(k_2) + k_1 \left(\frac{1}{\mu_1^+} + \frac{1}{\mu_1^-} \right) + k_2 \left(\frac{1}{\mu_2^+} + \frac{1}{\mu_2^-} \right)$$

Sin pérdida de generalidad, suponiendo que la carga el sentido 1 es la más exigente, como se tiene la misma frecuencia, se tiene la siguiente relación:

$$\lambda_1 = f \cdot K_1 \quad \lambda_2 = f \cdot k_2$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{K_1}{k_2}$$

Para ilustrar esta situación consideremos el siguiente ejemplo: se necesitan transportar dos productos, de los cuales se sabe lo siguiente:

- Producto 1 (pesado): $\rho_1 = 4 \text{ [ton/m}^3]$, $\lambda_1 = 40 \text{ [ton/hr]}$
- Producto 2 (liviano): $\rho_2 = 1 \text{ [ton/m}^3]$, $\lambda_2 = 20 \text{ [ton/hr]}$

Además, la capacidad volumétrica de los vehículos es de $2 \text{ [m}^3/\text{veh]}$. Es decir, la capacidad máxima (en toneladas) para cada producto es:

$$K_1 = \rho_1 \cdot 2 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{veh}} \right] \Rightarrow K_1 = 8 \left[\frac{\text{ton}}{\text{veh}} \right]$$

$$K_2 = \rho_2 \cdot 2 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{veh}} \right] \Rightarrow K_2 = 2 \left[\frac{\text{ton}}{\text{veh}} \right]$$

Con esta información, se puede calcular la frecuencia mínima requerida para satisfacer cada demanda por separado:

$$f'_1 = \frac{\lambda_1}{K_1} = \frac{40 \text{ [ton/hr]}}{8 \text{ [ton/veh]}} \Rightarrow f'_1 = 5 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right]$$

$$f'_2 = \frac{\lambda_2}{K_2} = \frac{20 \text{ [ton/hr]}}{2 \text{ [ton/veh]}} \Rightarrow f'_2 = 10 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right]$$

La frecuencia está dada por:

$$f = \max \left(5 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right], 10 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right] \right) \Rightarrow f = 10 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right]$$

¿Qué ocurre si se define la frecuencia en base a la mayor demanda? Como se cumple que $\lambda_1 > \lambda_2$, se opera con $k_1 = K_1$ y la frecuencia está dada por:

$$f = \frac{\lambda_1}{K_1} = \frac{40 \text{ [ton/hr]}}{8 \text{ [ton/veh]}} \Rightarrow f'_1 = 5 \left[\frac{\text{veh}}{\text{hr}} \right]$$

$$\Rightarrow k_2 = k_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 8 \left[\frac{\text{ton}}{\text{veh}} \right] \cdot \frac{20 \text{ [ton/hr]}}{40 \text{ [ton/hr]}} \Rightarrow k_2 = 4 \left[\frac{\text{ton}}{\text{veh}} \right]$$

Se observa que el valor de k_2 es mayor que la capacidad K_2 , por lo que la frecuencia obtenida según al criterio de mayor demanda no es suficiente para satisfacer la demanda del producto 2.

Por lo tanto, si bien el criterio de mayor demanda es útil cuando la capacidad máxima para cada producto es la misma, el criterio de mayor frecuencia requerida es más general y permite tener en consideración aquellos casos en que existen restricciones que afecten y/o diferencien las capacidades para cada producto.

- **Plena Carga:** Se divide la flota en dos: la primera cubre la totalidad de la demanda menos exigente y parte de la demanda más exigente, mientras que la segunda cubre lo que falta de la demanda más exigente, retornando sin carga. Dependiendo de cual demanda es exigente, se tienen dos de las siguientes subflotas:

- B_1 : vehículos que transportan producto 1 con retorno vacío.
- B_{12} : vehículos que transportan producto 1 en la ida y producto 2 en el retorno.
- B_2 : vehículos que transportan producto 2 con retorno vacío.

Estas tres subflotas tienen los siguientes tiempos de ciclo:

$$\begin{aligned} t_{c1} &= t_1(K_1) + t_2(0) + K_1 \left(\frac{1}{\mu_1^+} + \frac{1}{\mu_1^-} \right) \\ t_{c12} &= t_1(K_1) + t_2(K_2) + K_1 \left(\frac{1}{\mu_1^+} + \frac{1}{\mu_1^-} \right) + K_2 \left(\frac{1}{\mu_2^+} + \frac{1}{\mu_2^-} \right) \\ t_{c2} &= t_1(0) + t_2(K_2) + K_2 \left(\frac{1}{\mu_2^+} + \frac{1}{\mu_2^-} \right) \end{aligned}$$

Como el peso de la carga reduce la velocidad del vehículo, se puede asumir que $t_i(K_i) \geq t_i(0)$. Así, se tienen las siguientes relaciones:

$$t_{c12} > t_{c1} \quad t_{c12} > t_{c2}$$

$$t_{c1} + t_{c2} - t_{c12} = t_1(0) + t_2(0) > 0$$

En el resultado anterior, se aprecia que el tiempo combinado de B_1 y B_2 es mayor que el tiempo de B_{12} . Por lo tanto, operacionalmente, no es conveniente tener las 3 subflotas, o tener flotas separadas para productos distintos. Por lo tanto, dependiendo de cuál sea la demanda más exigente, se tiene que B_1 es cero, o bien B_2 son cero.

Por ejemplo, si $f'_1 > f'_2$, en primer lugar, se establece un B_{12} tal que cubra la demanda menos exigente, en este caso, la del producto 2:

$$B_{12} = \frac{f'_2 * t_{c12}}{\eta}$$

Luego, se cubre la demanda del producto 1 que no es cubierta por la subflota B_{12} :

$$B_1 = \frac{(f'_1 - f'_2) * t_{c1}}{\eta}$$

Así, como toda la demanda está cubierta, $B_2 = 0$. Esto ocurre en viceversa para el caso $f'_2 > f'_1$, es decir, que si hay mayor demanda λ_2 , entonces $B_1 = 0$.

Para finalizar, se deja el siguiente problema propuesto: Sea un sistema cíclico simple con carga de retorno con las siguientes características:

- Los vehículos tienen una capacidad de $K = 30$ [ton], 25 [m^3].
- Los vehículos requieren mantenimiento durante 1 [dia/mes].
- El tiempo de viaje es de $t_v(k) = (d/v_{max}) + 0.0001k^2$ [hr].
- Las tasas de carga y descarga son: $\mu^+ = 500$ [kg/min], $\mu^- = 800$ [kg/min].
- La distancia entre los nodos es de $d = 100$ [km].
- El producto 1 es materia prima. Tiene una densidad de 2 [ton/ m^3], su demanda es $\lambda_1 = 300$ [ton/hr] y la velocidad máxima es $v_{max} = 100$ [km/hr].
- El producto 2 es el producto elaborado. Tiene una densidad de 0.8 [ton/ m^3], su demanda es $\lambda_2 = 340$ [ton/hr] y la velocidad máxima es $v_{max} = 50$ [km/hr].

Con la información proporcionada, calcule:

- La flota requerida B con operación de frecuencia única.
- La flota requerida B con operación a plena carga.

3.2.3. Sistema Cíclico General

El sistema cíclico general es más complejo y cercano a la realidad que el simple, pero aún es una simplificación de un sistema real. Este sistema consiste en un conjunto aislado de n terminales de carga y descarga (o estaciones), con un objeto de carga homogéneo y con una flota que funciona a una frecuencia única f . La Figura 58 muestra un esquema del Sistema Cíclico General:

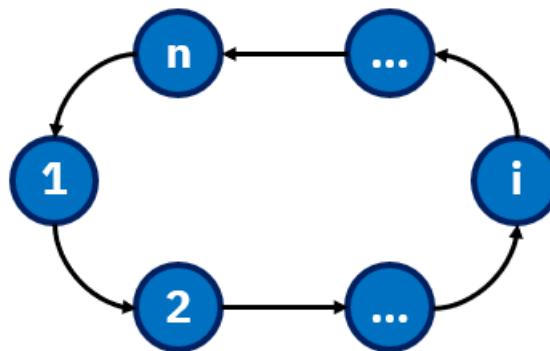


Figura 58: Esquema Sistema Cíclico General.

En este sistema, se mantienen los conceptos de tamaño de flota B , frecuencia f , tiempo de ciclo t_c y capacidad K . Además, se sigue cumpliendo la siguiente relación:

$$\eta B = f * t_c$$

En cada terminal i se tienen los siguientes elementos:

- $\mu_i^{+/-}$: **Rendimiento de carga/descarga.** Cantidad de producto que se carga/descarga del vehículo por unidad de tiempo en el terminal i .
- $S_i^{+/-}$: **Número de sitios de carga/descarga.** Cantidad de sitios disponibles para la carga y/o descarga en el terminal i .
- $\lambda_i^{+/-}$: **Demanda de ingreso/egreso.** Flujo que ingresa/sale en el terminal i .
- $k_i^{+/-}$: **Tamaño de embarque.** Cantidad de producto que ingresa/sale de cada vehículo en el terminal i . Para una frecuencia f conocida, se calcula como:

$$k_i^{+/-} = \frac{\lambda_i^{+/-}}{f}$$

- d_i : **Tiempo de detención.** Tiempo que el vehículo permanece en terminal i para los procesos de carga y descarga.

Por otra parte, en cada tramo $i \rightarrow i + 1$ se tienen los siguientes elementos:

- t_i : **Tiempo de viaje.** Tiempo que tarda el vehículo en recorrer el tramo.
- λ_i : **Flujo.** Cantidad de producto transportado en el tramo por unidad de tiempo.
- k_i : **Tamaño de embarque.** Cantidad de producto que transporta cada vehículo en el tramo.

Dados estos elementos, se tienen las siguientes relaciones:

1. El tiempo de ciclo de un vehículo está compuesto por los tiempos de viaje en todos los tramos y los tiempos de detención en todos los terminales del sistema.

$$t_c = \sum_{i=1}^n (t_i + d_i)$$

2. El flujo total de entrada debe ser igual al flujo total de salida. En palabras simples, lo que entra al sistema debe ser igual a lo que sale del mismo.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^+ = \sum_{i=1}^n \lambda_i^-$$

3. Naturalmente, la cantidad de producto transportado en cada vehículo es no negativa y no debe superar la capacidad de los vehículos.

$$\min(k_i) \geq 0; \quad \max(k_i) \leq K$$

4. Los procesos de carga/descarga pueden ser simultáneos (ocurren al mismo tiempo) o secuenciales (uno después del otro), según sean las características del vehículo y/o del terminal.

$$\text{carga secuencial: } d_i = \frac{k_i^+}{\mu_i^+} + \frac{k_i^-}{\mu_i^-}; \quad \text{carga simultánea: } d_i = \max \left[\frac{k_i^+}{\mu_i^+}, \frac{k_i^-}{\mu_i^-} \right]$$

5. La cantidad transportada por cada vehículo debe satisfacer lo que se conoce como ecuación de continuidad, es decir, la cantidad de producto transportada por un vehículo en un tramo $i \rightarrow i + 1$ debe ser igual al tamaño de embarque en el tramo anterior $i - 1 \rightarrow i$, sumado a la cantidad de producto que se carga en i y restado a la cantidad de producto que se descarga en el mismo terminal. Lo anterior se resume en la siguiente igualdad:

$$k_{i-1} + k_i^+ - k_i^- = k_i$$

6. Los valores de λ_i^+ y λ_i^- se pueden obtener a partir de λ_{ij} (flujo desde i hacia j), el cual se puede obtener a partir de una matriz O-D. Luego, λ_i^+ y λ_i^- se calculan de la siguiente manera:

$$\lambda_i^+ = \sum_k \lambda_{ik} \quad \lambda_i^- = \sum_k \lambda_{kj}$$

Es decir, la demanda de ingreso en el terminal i está dada por la suma de todos los flujos que tienen origen en i , mientras que la demanda de egreso en el terminal j está dada por la suma de todos los flujos que tienen destino en j . Alternativamente, el flujo de producto en el tramo $i \rightarrow i + 1$ λ_i se puede definir de la siguiente forma:

$$\lambda_i = \sum_{l,m} \lambda_{lm} \delta_{lm}^i$$

donde δ_{lm}^i el porcentaje del flujo que va entre los terminales l y m que pasa por el tramo entre el terminal i y el terminal $i + 1$.

7. La frecuencia se calcula considerando el tramo más cargado, en el cual los vehículos operarán a capacidad ($k_i = K$).

$$f = \frac{\max\{\lambda_i\}}{K}$$

Como la frecuencia es única, se puede calcular el resto de los k_i :

$$k_i = \frac{\lambda_i}{f}$$

Finalmente, con estos valores se puede calcular el tiempo de ciclo y el tamaño de flota:

$$t_c = \sum_{i=1}^n (t_i(k_i) + d_i); \quad B = \frac{ft_c}{\eta}$$

Tiempo promedio en el sistema

En un sistema cíclico general, el tiempo promedio en el sistema de un usuario que viaja desde el terminal i hacia el terminal j está dado por la siguiente expresión:

$$t_{s_{ij}} = \frac{1}{2f} + \sum_{l=i+1}^{j-1} d_l + \sum_{l=i}^{j-1} t_l(k_l) + \frac{k_j^-}{2\mu^-}$$

donde cada término corresponde respectivamente a: (1) tiempo de espera promedio en el terminal i (considerando la espera hasta que el vehículo salga del terminal), (2) tiempo total de detenciones en terminales intermedios, (3) tiempos de viaje en cada tramo y (4) tiempo promedio de bajada del vehículo. Esta ecuación se puede visualizar en la Figura 59:

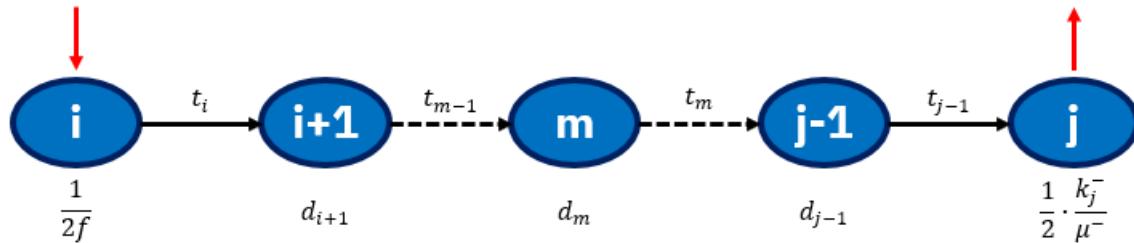


Figura 59: Tiempo promedio en el sistema.

Función de producción

¿Cómo se formula la función de producción en este caso, en el que hay varios destinos O-D, y por lo tanto, muchos λ_{ij} ? El producto es un vector de flujos por par ij , tipo de carga k y período t :

$$Y = \{Y_{ij}^{kt}\}$$

Para tener una medida aproximada, usualmente se agrega el flujo (e.g. pax-km, ton-km), pero se limita capacidad de análisis. Se podría definir el producto agregado de la siguiente manera:

$$\tilde{\lambda} = \sum_{ij} \lambda_{ij} d_{ij}$$

Pero esto no es trivial, y hace difícil derivar la función de producción. Una manera de escribirla sería la siguiente, asumiendo que λ_i^{max} es la demanda del tramo más cargado i :

$$\lambda_i^{max} = \frac{\eta B k}{t_c} \quad \lambda_l \leq \frac{\eta B k}{t_c} \quad \forall l \neq i$$

lo que conlleva la existencia de tramos l en los que los vehículos no van a máxima capacidad, haciendo el análisis más complejo. Esto se ve con más detalle en el curso Diseños de Servicio de Transporte.

Restricción de capacidad

¿Cómo cambiaría la solución del sistema cíclico general, si hubiera una restricción de frecuencia

en las vías ($f \leq f_{max}$)? Dado que $f = \lambda/k$, se puede satisfacer la demanda aumentando la capacidad de los vehículos usados. También se puede separar la flota en dos con detenciones diferentes.

3.2.4. Optimización del sistema

En el diseño de un sistema cíclico general que sirve a personas, ¿qué aspectos son relevantes en la calidad de servicio ofrecida? ¿Cómo se podría optimizar el sistema, desde el punto de vista del operador y/o el usuario?

Una primera opción son las **zonas pagas**, que son paraderos en los que se paga la tarifa antes de subir al vehículo. Este pequeño cambio permite reducir el tiempo de subida al vehículo (debido al ahorro del tiempo que tarda el pago y a que se pueden utilizar todas las puertas del vehículo para subir), reduciendo a su vez el tiempo de viaje de los usuarios que ya están dentro del vehículo y, en consecuencia, el tiempo de ciclo. Así, los operadores pueden usar menos buses – disminuyendo el costo de operación – para satisfacer la misma demanda.

Otra alternativa son los **bucles**, que son ciclos más pequeños diseñados para atender los tramos más cargados. Se asigna una parte de la flota para cubrir dichos bucles. Por ejemplo, en la Línea 1 del Metro de Santiago algunos trenes no realizan el recorrido completo de San Pablo a Los Dominicos, sino que van entre las estaciones Pajaritos y Manquehue. El diseño es tal que la frecuencia es más alta en los tramos más cargados y más baja en los tramos menos cargados. Así, los usuarios en los tramos más cargados esperan menos y se pueden usar menos trenes para satisfacer la demanda. Sin embargo, los usuarios que requieren viajar en los tramos menos cargados se ven perjudicados debido a que deben esperar más o eventualmente deberán hacer trasbordos si abordaron un tren que no realiza el recorrido completo. La Figura 60 muestra el esquema del bucle y un gráfico que contiene el perfil de carga y la capacidad en la Línea 1. En ella, se observa que debido al bucle la capacidad es considerablemente mayor que en los tramos que no forman parte del bucle.

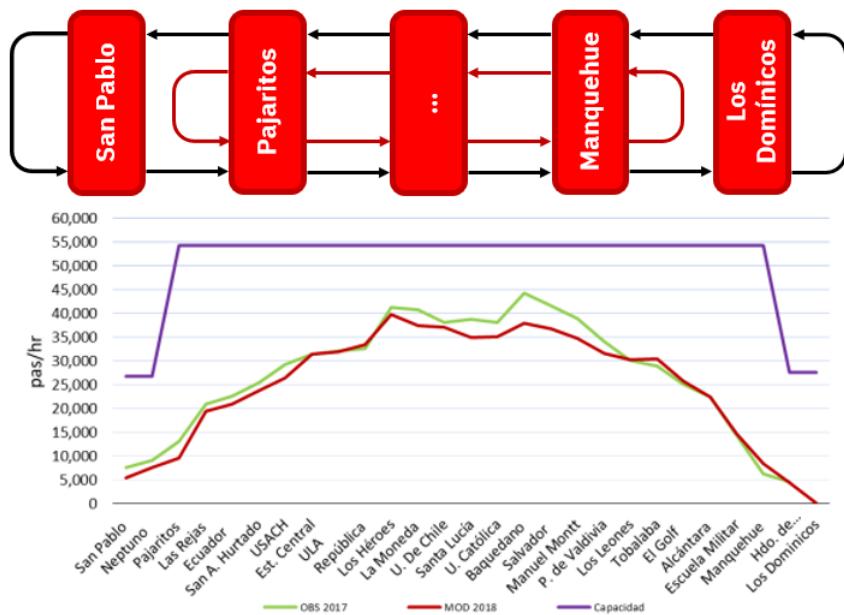


Figura 60: Bucle Pajaritos y perfil de carga (Fuente: DTPM)

Otra opción es la inclusión de **servicios expreso**, que sólo se detienen en ciertos terminales para reducir los tiempos de detención. Estos servicios suelen compartir los extremos del recorrido con su versión normal, pero usan una ruta más rápida (e.g. autopista). Esto reduce la cantidad de vehículos usados y los usuarios disminuyen considerablemente su tiempo de viaje. En el Metro de Santiago, las líneas 2, 4 y 5 cuentan con un servicio expreso en los períodos punta, en el que los trenes se detienen en forma intercalada (rutas verde y roja), tal como se muestra en la Figura 61:

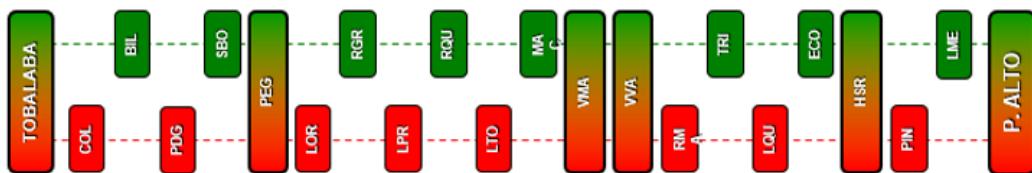


Figura 61: Servicio expreso Línea 4.

Al aplicar esta medida, se tienen usuarios beneficiados y perjudicados. La asignación de las estaciones a cada ruta y las que serán comunes debe ser tal que se perjudique a la menor cantidad posible de usuarios. La Tabla 17 reporta cada caso con la proporción de viajes de cada uno de ellos:

Tabla 17: Viajes en servicio expreso (Metro).

Tipo Pasajero	Tipo de Viaje	Efecto	% Viajes
Origen y Destino en la misma ruta	Sube al tipo de tren que se detiene en estación de destino (Colón a Los Presidentes, Ruta Roja)	Aumenta tiempo de espera promedio en el andén y disminuye el tiempo de viaje por aumento de la velocidad comercial.	90%
Origen y Destino en distintas rutas – con estación común	Toma el primer tren y se baja en estación común, luego sube al siguiente tren para abordar en su estación de destino (Colón a Grecia, el usuario debe bajarse en Plaza Egaña y tomar el siguiente tren)	Transbordo adicional en el mismo andén.	8%
Origen y Destino en distintas rutas – sin estación común	Toma el primer tren y se baja en la primera estación común luego de su destino, cambia de andén y toma tren a su destino (Príncipe de Gales a Simón Bolívar, el usuario debe seguir hasta Plaza Egaña, cambiar de andén y tomar tren a Simón Bolívar)	Transbordo adicional con cambio de andén.	2%

También se pueden **inyectar trenes o carros** vacíos para descongestionar las estaciones. Por ejemplo, en la Línea 1 se inyectan trenes vacíos provenientes de la línea 2 a la estación Los Héroes en la hora punta mañana. Lo mismo ocurre con buses: hay buses vacíos que se unen a la flota en los tramos con mayor demanda. La inyección de trenes se muestra en la Figura 62:

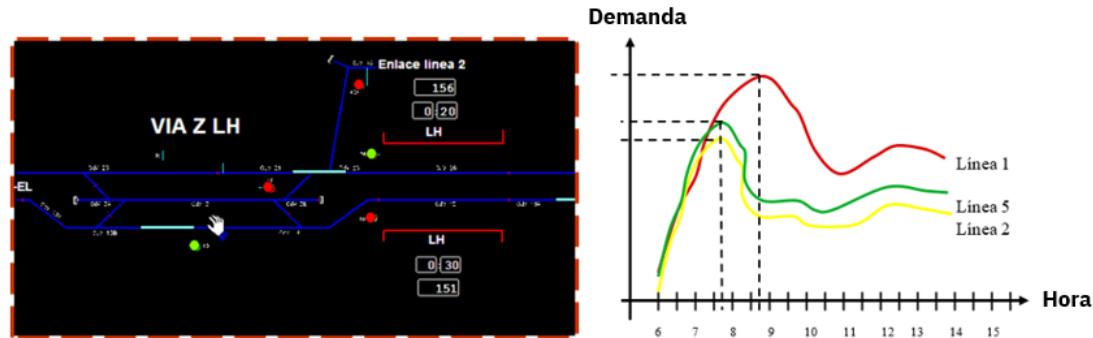


Figura 62: Inyección de trenes a la Línea 1 en estación Los Héroes (Izq.).
Esto es posible gracias al desfase de las horas punta entre líneas (Der.).

Otro método usado en el Metro es la **reserva de oferta**, que consiste en mantener vacíos algunos carros del tren para ser ocupados en estaciones con mayor demanda (Figura 63):

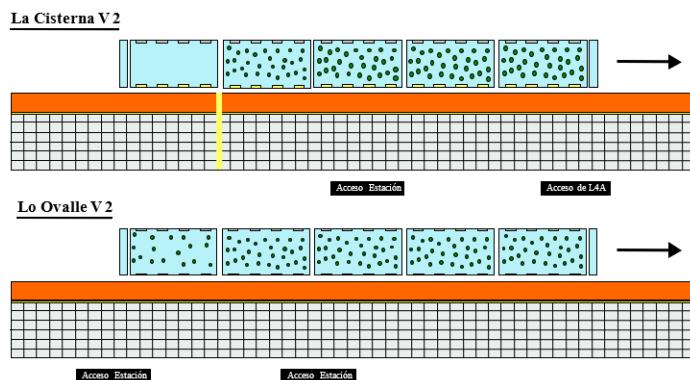
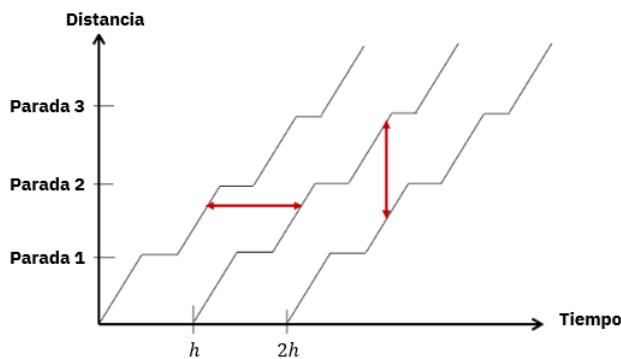


Figura 63: Reserva de Oferta en la Línea 2 de Metro.

Variabilidad del servicio a lo largo de la ruta

Otra forma de optimizar el servicio es mediante la gestión de los intervalos entre vehículos. La Figura 64 muestra la operación de un servicio perfectamente regular (intervalos constantes):

Figura 64: Operación de servicio perfectamente regular con intervalo h .

En el gráfico, cada línea negra representa la posición de un bus en el tiempo. Las pendientes representan la velocidad del bus, por lo que los segmentos horizontales representan las detenciones en los paraderos. Por supuesto, esta situación usualmente no se cumple en la realidad. A veces se ven intervalos muy irregulares, incluyendo casos de apelotonamiento, es decir, que un bus tarda tanto que los buses siguientes lo alcanzan, como se observa en la imagen de la Figura 65:



Figura 65: Apelotonamiento de buses.

La razón de esto no es por malicia de los choferes o incompetencia de los operadores. Se debe a que los intervalos regulares no son un equilibrio estable. Por ejemplo, imaginemos que en el sistema de la Figura 64 llega un número inesperadamente alto de usuarios a la parada 1, causando que el segundo bus tarde un poco más en irse. Entonces, sucede la situación descrita en la Figura 66:

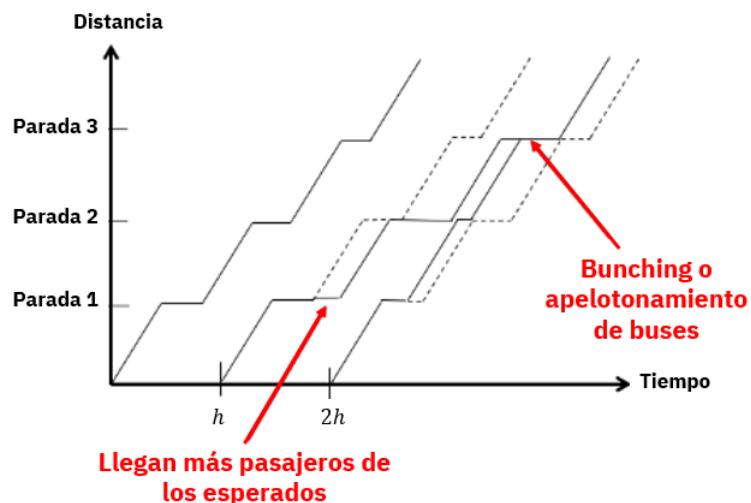
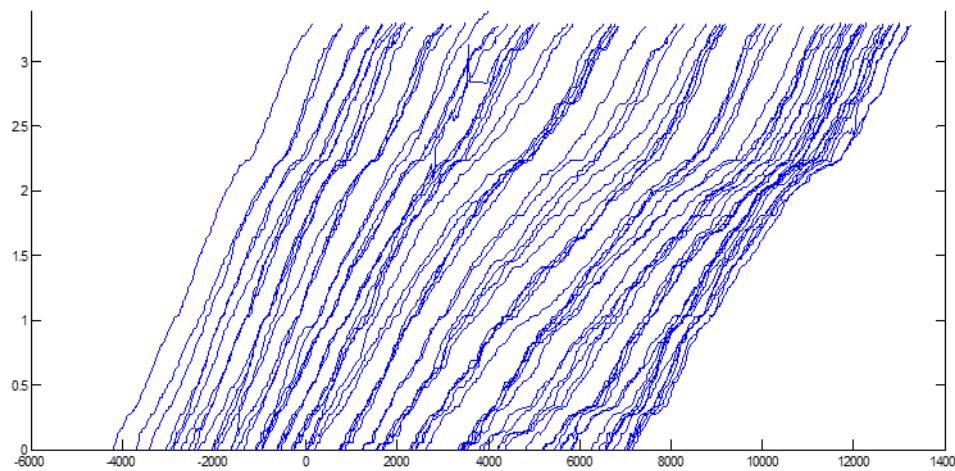


Figura 66: Apelotonamiento causado por una demora imprevista.

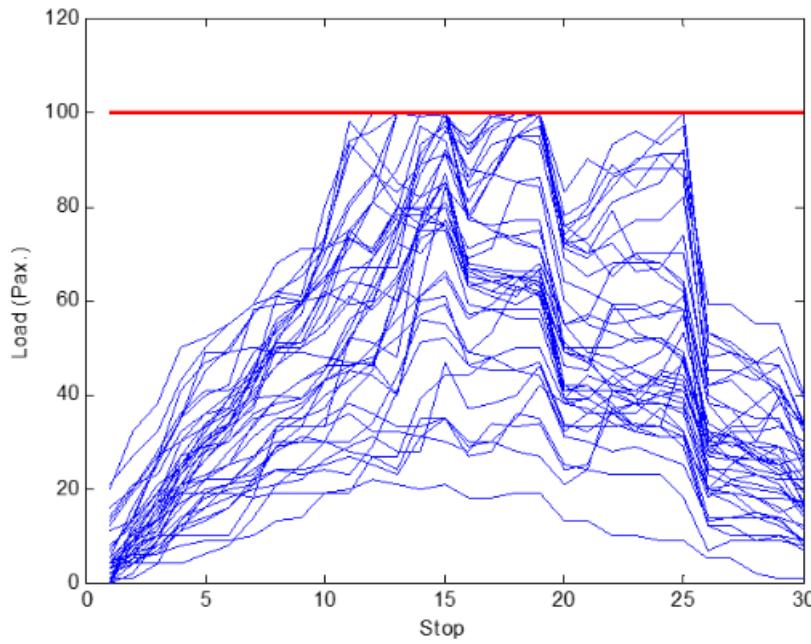
Como se ve en este caso, como el segundo bus se demora más, entonces el tercer bus se va de la parada 1 antes debido a que algunos de los pasajeros que este usualmente toma se fueron en el segundo bus. Esta demora tiene un efecto dominó en las siguientes paradas (como el segundo bus tarda más en llegar al paradero 2, va a haber más gente, así que también se demora más), a tal punto que el tercer bus alcanza al segundo bus en el tercer paradero. La página web <http://setosa.io/bus/> muestra este fenómeno de manera didáctica.

Este fenómeno no solo puede ser causado por un número alto de pasajeros, sino que en general por cualquier perturbación que altere los intervalos regulares, especialmente en los buses. Por ejemplo, accidentes de tránsito, cruces indebidos de vehículos o peatones, congestión o incluso un cambio de programación de un semáforo. La Figura 67 muestra un caso real de apelotonamiento en un recorrido de bus:

Figura 67: Caso de apelotonamiento en servicio 201. ^a

^a Fuente: (Delgado, 2010)

Lo anterior no impacta solamente en el tiempo de espera, sino que también en la experiencia de viaje de los usuarios. Cuando los buses van apelotonados, la carga de los buses puede variar drásticamente: algunos pueden ir vacíos, mientras que otros pueden ir llenos. La Figura 68 muestra un gráfico de esta situación:

Figura 68: Carga de pasajeros en buses en apelotonamiento. ^a

^a Fuente: (Delgado, 2010)

En la figura se observa que, para una misma parada, algunos buses van llenos y otros están

relativamente vacíos. Esto puede generar diferentes percepciones del servicio: el operador puede decir correctamente que, en promedio, los buses van medio llenos; mientras que los pasajeros van a decir que los buses van llenos, ya que la mayoría de los pasajeros toma un bus lleno.

Los siguientes factores afectan el deterioro de los intervalos de buses:

- Largo de la ruta: mientras más larga sea la ruta, es más probable que ocurra una perturbación en el recorrido.
- Tiempo marginal de subida y bajada de los buses: mientras más irregular sea el tiempo de subida y bajada, habrán más perturbaciones.
- Probabilidad de detenerse en una parada: en los servicios de buses, cada bus solo se detiene si una persona se va a subir o bajar del bus, si no se salta el paradero, lo que genera aleatoriedad. Esto no ocurre en los trenes subterráneos debido a que se detienen en todas las estaciones.
- Intervalo de diseño: cuando los intervalos son grandes (e.g. 30 minutos) es más fácil poder controlarlos. Por el contrario, mientras más pequeño sea el intervalo, mayor va a ser la probabilidad de tener una perturbación.
- Ciclo y heterogeneidad en la conducción: todos los conductores son diferentes y, en consecuencia, tienen distintas maneras de conducción, lo que introduce aleatoriedad.

Para controlar el apelotonamiento, se pueden adoptar las siguientes medidas:

- Controles en paradero
 - Retención estática (basada en itinerario): se usa un itinerario fijo para controlar la hora en la que el vehículo llega a una parada.
 - Retención dinámica: se recomiendan detenciones de los vehículos con información en el momento. Por ejemplo, se avisa a un conductor que permanezca 30 segundos más en el paradero, si es que va adelantado).
 - Ajuste de tiempo de subida/bajada: se puede hacer, por ejemplo, con zonas paga.
 - Descabezamiento: algunos vehículos se saltan paraderos con baja demanda para cubrir un paradero lleno.
 - Vuelta corta: un bus vacío "se da la vuelta antes" para apoyar a la sección más cargada.
 - Inyección de vehículos: se ingresan buses vacíos para cubrir los sectores problemáticos.
- Controles entre paraderos
 - Control de velocidad crucero: por ejemplo, en el Metro se puede cambiar la velocidad de los carros en los túneles.
 - Prioridad en intersecciones: esto permite que el bus aumenta su velocidad de crucero. Un ejemplo de ello son los semáforos de pistas solo buses.
 - Adelantamientos coordinados: en los pelotones, se puede hacer que se adelanten los buses vacíos para que tomen a los pasajeros afectados por el retraso de los buses llenos.

Todo lo anterior es más factible de implementar en los servicios con infraestructura aislada, por lo cual suele ser más fácil en el caso del Metro que en el de los servicios de buses.

3.2.5. Problemas Propuestos

Problema 1

Usted dispone de 90 vehículos idénticos e intercambiables, con una capacidad de carga de 30 [ton] en carga y 25 [m^3] en volumen, y que requieren mantenimiento durante un día, al menos una vez al mes (1 mes = 30 días). Se ha determinado que la función de tiempo de viaje de este tipo de vehículos es: $t_v(k) = (L/v_{max})^2$, Donde L es la distancia a recorrer (en [km]), v_{max} es la velocidad máxima permitida (en [km/hr]) y k es el tamaño de embarque (en [ton]).

Como parte del sistema de transporte planteado, dispone además de sistemas de carga que permiten poner cualquier producto sobre el vehículo a una tasa de 500 [kg/min], y de sistemas de descarga que operan a tasas de 800 [kg/min].

Se sabe que dos localidades, distantes 100 [km] una de otra, presentan un importante intercambio comercial. La localidad 1 genera materia prima, de densidad 2 [ton/ m^3], en tanto la localidad 2 genera productos elaborados, de densidad 0.8 [ton/ m^3]. Por condiciones de operación y de características de carga, el traslado de los productos elaborados se puede desarrollar a una velocidad máxima de 50 [km/hr], en tanto la materia prima no tiene requerimientos al respecto, aún cuando la velocidad máxima tolerada es de 100 [km/hr].

- Determine el volumen máximo de materia prima que podría movilizar, en las condiciones planteadas.
- Determine el volumen máximo de productos elaborados que podría movilizar, dado el sistema planteado.
- Determine la máxima capacidad de transporte simultáneo de materia prima y productos elaborados que podría ofrecer.
- Dibuje y explique la forma de la frontera de posibilidades de producción (combinaciones de transporte de materia prima y productos elaborados) de la firma de transporte.

Problema 2

Una empresa frutícola dispone de 20 camiones con capacidad de cargar 2 [ton] para el transporte de sus productos hasta un centro de consumo. Por razones de seguridad, existe permanentemente un 10 % de los camiones fuera de servicio. El tiempo de viaje entre el origen y el destino es de 1.2 [hr] en cada sentido. La tasa de carga y descarga son iguales y, en principio, desconocidas. Considerando que cada camión retorna sin carga hasta la planta y que no hay tiempo de posicionamiento:

- Grafeque la capacidad de transporte de la flota en función de la tasa de carga y de descarga.
- Si el número de sitios disponibles para descargar en la ciudad es de 3, determine la capacidad de transporte y la tasa de carga y descarga admisible en este caso.
- Si la planta duplica tanto la producción máxima, como la tasa de carga y descarga determinada en b), calcule el número de camiones extra y el número de sitios de descarga que necesita para satisfacer este servicio. ¿Cuál sería la frecuencia de los camiones?

Problema 3

Considere que para transportar petróleo desde un puerto a una refinería se disponen de 4 camiones con capacidad de 6 [m³] cada uno. Los camiones cargan el petróleo en el puerto y viajan con los camiones llenos hasta la refinería, lugar donde descargan el petróleo para volver vacíos al puerto. El tiempo de viaje entre el puerto y la refinería es de 1 [hr], mismo tiempo que demoran los camiones en volver desde la refinería al puerto. El puerto posee un único lugar de embarque, mientras que la refinería cuenta con un único sitio de desembarque del petróleo.

- (a) Determine el flujo máximo de petróleo, en [m³/hr], que es posible transportar en función de la capacidad de los terminales. Suponga que las capacidades de carga y descarga son las iguales.
- (b) Grafique esta relación para distintos valores de la capacidad de carga en terminales.
- (c) ¿Cuánto es el máximo flujo que se podría transportar si los terminales tuvieran una capacidad muy elevada?

Problema 4

El Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones contrató a su consultora para que proponga un diseño de un servicio de buses expreso tipo Metro desde Providencia hasta Grecia por el eje Macul-Los Leones. Este sistema operará con sistema de pago extra-vehicular. Los buses tienen capacidad para 85 pasajeros sentados y adicionalmente 65 pasajeros de pie. El tiempo de viaje entre tramos es de 2 [min]. Los procesos de subida y bajada tienen un rendimiento de 8 [pax/min] en la subida y 15 [pax/min] para la bajada. Se debe operar a un 85 % de capacidad en el tramo más cargado. La demanda por paradero (medida en [pax/min]) se detalla en la siguiente tabla:

Paradero	N-S		S-N	
	Suben	Bajan	Suben	Bajan
Providencia	30	0	0	50
Carlos Antúnez	45	28	12	21
Bilbao	40	35	35	10
Irarrázaval	5	4	28	8
Grecia	0	53	14	0

- (a) Calcule el tiempo de ciclo, la frecuencia y el tamaño de flota necesario.
- (b) Posteriormente, el Ministro le pide una estimación de los costos totales del sistema diseñado, incluyendo costos de operación y percepción de costos asociados a espera y viaje para los usuarios. ¿Qué información adicional requiere para realizar esta estimación?
- (c) Alguien le sugirió al Ministro usar buses más pequeños, con capacidad para 60 pasajeros sentados y 20 pasajeros de pie. ¿Cuál bus es mejor usar?

Datos adicionales:

- Valor Subjetivo del Tiempo en el vehículo = 20 [\$/min]
- Valor Subjetivo del Tiempo de espera en el paradero = 60 [\$/min]
- Costo de operación de bus/hora: $C_{op} = 100000 + 1000 * K$

Problema 5

Considere que sobre la red de la figura circula un solo recorrido de buses con una frecuencia de 30 [bus/hr]. Sobre cada arco de la red se indica el tiempo de viaje en ruta entre dos paradas consecutivas. La red consta de 5 paradas: la parada 3 corresponde a una zona paga, mientras que el resto de las paradas son paradas comunes. En las paradas comunes el proceso de subida y bajada de pasajeros se realiza por puertas separadas. En este caso a un individuo le toma 3.6 [s] subir al bus y 1.5 [s] en bajar. En la zona paga las operaciones de subida y bajada ocurren de forma secuencial: primero bajan los pasajeros del bus y luego suben los pasajeros esperando en la parada. Debido a que la validación de la tarjeta se hace con antelación y como las subidas y bajadas se pueden realizar por cualquier puerta, los tiempos marginales de subida y bajada se reducen a la mitad.



La tasa de llegada de pasajeros [pax/min] entre una parada de origen i cualquiera y una parada de destino j , se encuentra dada por la siguiente matriz (las filas representan los orígenes y las columnas los destinos).

O/D	1	2	3	4	5
1	-	2	3	2	4
2	-	-	1	0	2
3	-	-	-	2	5
4	-	-	-	-	2
5	-	-	-	-	-

- Determine en qué parada se produce la máxima carga de pasajeros e indique el valor. Grafique la carga de salida del bus en las diferentes paradas de la red.
- Indique la hora en que el bus se encuentra listo para salir de la parada 5 (una vez que terminó de subir y bajar pasajeros) si éste llega a la parada 1 a las 11 AM.
- Grafique la trayectoria del bus en un gráfico posición v/s tiempo. Suponga que las paradas se encuentran equiespaciadas. Sea lo más preciso posible en su dibujo.
- Calcule el tiempo de permanencia promedio de un usuario que viaja entre las paradas 2 y 5.
- Calcule la flota óptima necesaria para operar en la red, si usted sabe que el tiempo total que toma el viaje desde la parada 5 a la 1 (incluyendo tiempos de subida y bajada de pasajeros) es un 20 % mayor al tiempo total de viaje entre la parada 1 y 5. Suponga que en promedio un 15 % de los buses se encuentran periódicamente en mantenimiento y por tanto no pueden circular.

Problema 6

Realice una comparación entre bus y metro indicando las ventajas de cada uno de acuerdo a lo visto en clases.

Problema 7

Suponga que existe un servicio de trolebuses entre A y B con las siguientes características:

- Intensidad media de flujo de A a B: 200 [pax/min]
- Intensidad media de flujo de B a A: 100 [pax/min]
- Tiempo de viaje de A a B y de B a A: 15 [min] por sentido.
- Tiempo de posicionamiento en A y B: 1 [min]
- Factor de utilización de la flota de trolebuses: 0.8
- Factor de utilización de los sitios: 1
- Tasa de carga: 25 [pax/min]
- Tasa de Descarga: 50 [pax/min]
- Capacidad máxima de los trolebuses: 50 [pax]

- (a) Determine, suponiendo flota única, la frecuencia y la carga en ambos sentidos.
- (b) Suponiendo que existe una sola puerta para subir y bajar determine el número de vehículos, el tiempo muerto y los tiempos medios de espera en cada sitio.
- (c) Suponiendo que existe una puerta para subir y otra para bajar determine el número de vehículos, de sitios, el tiempo muerto y los tiempos medios de espera en cada sitio.
- (d) Suponga que hay un corte de luz de 15 minutos. ¿Qué largo tendría la cola formada en cada estación al cabo de los 15 minutos? ¿Cuánto duraría la cola formada bajo el supuesto de bajada secuencial? ¿Cuánto duraría en el caso de bajada simultánea?

Problema 8

En un sistema cíclico simple con y sin carga de retorno se pide:

- (a) Establezca una relación entre el tamaño de flota (B) y el tamaño de embarque (k), asumiendo conocidas la intensidad media de flujo y la tasa media de carga/descarga ($\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu^+} + \frac{1}{\mu^-} \right]$) y sabiendo que $t_{viaje} = t_o + \alpha k^n$ ($n > 1$, t en horas y k en toneladas)
- (b) Encuentre una expresión para la elasticidad de sustitución entre B y k . La elasticidad de Y respecto de X se define como $\varepsilon = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y}$. ¿Qué signo debería tener esta elasticidad? ¿Qué condición se debe verificar para que ello suceda?
- (c) Si la relación de costos entre B y k implica que aumentar el tamaño de embarque en una unidad es equivalente a adquirir cuatro unidades de B , encuentre la combinación óptima entre B y k para la siguiente situación.
 - Intensidad media de flujo: 80 [ton/hr].
 - Factor de utilización de la flota: 0.95
 - Tasa media de Carga/descarga. 5 [ton/hr].
 - $t_o = 25$ [min]
 - $\alpha = 0.05$
 - $n = 2$

Problema 9

Suponga que existe una línea de Metro que tiene tres estaciones y funciona en forma cíclica como se indica en la siguiente figura:



Donde la demanda (medida en [pax/min]) está dada por la siguiente matriz origen destino:

O/D	E1	E2	E3
E1	0	300	100
E2	300	0	100
E3	100	100	0

Por otra parte, se sabe que el tiempo de viaje (en [min]) entre estaciones sigue la siguiente función:

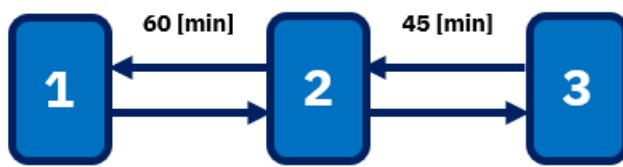
$$t_i = 10 + 2 \cdot \frac{k_i}{800}$$

donde k_i es la carga en el tramo i . Se sabe además que la tasa de subida y bajada es de 1000 [pax/min] y se realiza de forma simultánea, pero que, por seguridad, los trenes nunca se detendrán menos de 1 [min] en cada estación. Considere además que los vehículos tienen una capacidad de 800 [pax].

- (a) Determine el flujo de pasajeros por tramo (carga).
- (b) Determine la frecuencia, tiempo de ciclo y tamaño de flota considerando un servicio único.
- (c) Sugiera alguna forma de operar este servicio que requiera de una flota menor. ¿Qué factores debiera analizar para decidir si acaso es socialmente rentable implementar la forma de operación alternativa?
- (d) Suponga ahora que el suministro eléctrico se detiene y el Metro, operando con un servicio único, deja de operar por 5 minutos. ¿Qué cantidad de pasajeros se acumulará en cada estación hasta el momento en que se termine el corte de energía? Para simplificar los cálculos, suponga que la electricidad se corta justo cuando todos los trenes dejan la estación.
- (e) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que disipen todas las colas una vez que el suministro eléctrico haya sido restituido? Explique.
- (f) Un especialista propone la siguiente medida para hacer más robusto el sistema a interrupciones de servicio: diseñar la operación incluyendo un “tiempo muerto” de 1.5 minutos en que los trenes están detenidos vacíos en cada estación terminal (1 y 3). ¿De qué manera esta medida podría hacer más robusto el sistema? ¿Qué impacto tiene esa estrategia en la flota? ¿Cuánto tardaría, aproximadamente en disiparse la cola ocasionada por el corte de energía bajo este nuevo esquema de operación?

Problema 10

Considere que sobre la red de la figura circula un servicio de buses de acercamiento de trabajadores a una mina de cobre y otros servicios asociados. El punto 1 corresponde a la ciudad base donde residen los trabajadores de la mina, el punto 2 corresponde a un lugar donde los trabajadores se cambian de ropa y toman desayuno, y el punto 3 corresponde a la mina de cobre. Cada bus tiene capacidad para llevar 40 pasajeros. Sobre cada arco de la red de la figura se indica el tiempo de viaje en ruta entre dos paradas consecutivas. El proceso de subida y bajada de pasajeros se realiza de forma secuencial, pues los buses cuentan con una sola puerta. A un individuo le toma 4 segundos subir al bus y 2 segundos en bajar de éste. Cada vez que el bus vuelve a la ciudad (punto 1), debe detenerse sin servir pasajeros por 5 minutos para efecto de aseo y relevo de conductores.



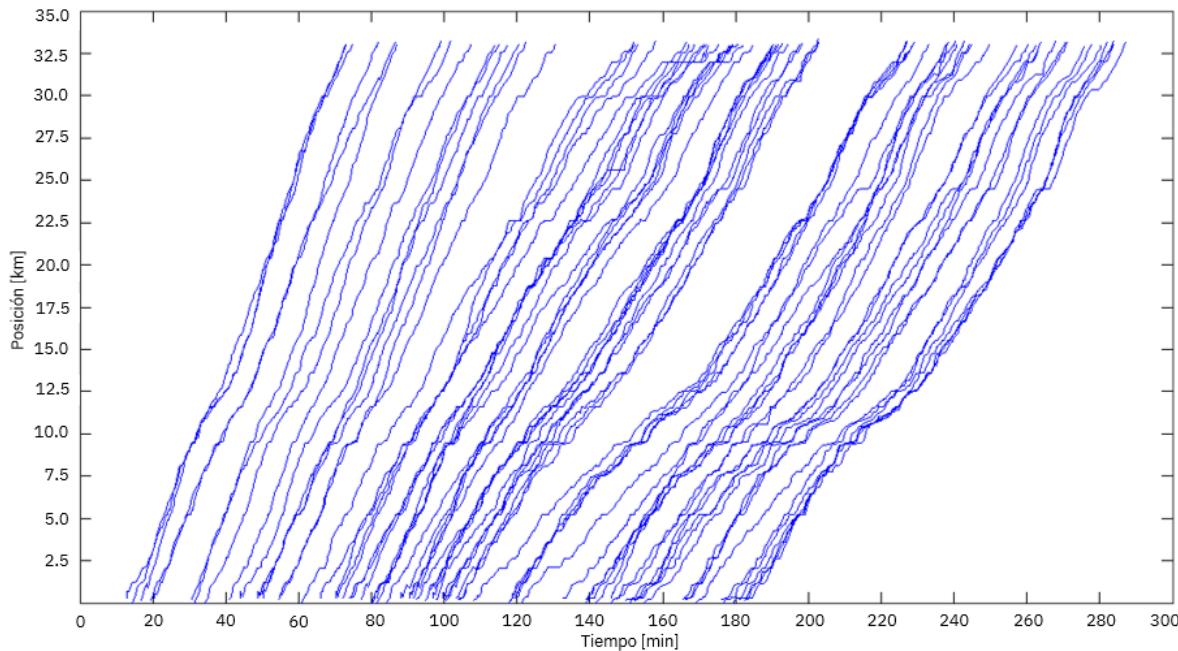
La demanda de pasajeros (medida en [pax/hr]) entre cada punto se encuentra dada por la matriz indicada en la siguiente Tabla.

O/D	1	2	3
Ciudad (1)	0	100	300
Casa de Cambio (2)	200	0	50
Mina (3)	120	80	0

- (a) Determine el arco de carga máxima del sistema.
- (b) Determine la frecuencia necesaria para operar el sistema.
- (c) Determine el tiempo de ciclo de un bus.
- (d) Determine el tiempo de permanencia promedio de un usuario que viaja entre la ciudad (1) y la mina (3) (sin bajarse en 2).
- (e) Diseñe un itinerario de buses que haga factible satisfacer la demanda del sistema. Suponga que entre 0-8 hrs y entre 11-24 hrs la demanda es igual a cero. En cambio, entre 8-11 la demanda es la señalada en la Tabla.
- (f) Determine la flota necesaria para proveer el itinerario diseñado en el punto anterior utilizando el método de bloques descrito en clase. Considere que el único terminal disponible es la ciudad (punto 1) y que no hay flota de reserva.
- (g) Compare la flota que se obtiene utilizando el método de bloques y la fórmula teórica para el sistema cíclico general ($B = f * t_c$). Comente.
- (h) Determine una tripulación que haga factible proveer este servicio de buses. Indique cómo determinaría una tripulación óptima que minimice el costo. Indique qué información necesitaría y cómo plantearía el problema de optimización respectivo.

Problema 11

La siguiente figura⁵ muestra la trayectoria de los buses de la línea 201 de ida. Respecto a esta figura responda las siguientes preguntas:



- Determine el instante aproximado en que comienza el horario punta del servicio de buses.
- Identifique en qué porción del corredor se observa una disminución de la velocidad operacional de los buses. Indique en el gráfico el km donde empieza esta disminución y donde termina.
- Encuentre el espaciamiento máximo entre dos buses. Indique su valor y ubíquelo en el gráfico.
- Indique en el gráfico el máximo tiempo de espera que podría sufrir un usuario.
- ¿Qué puede comentar sobre el despacho de los buses desde el terminal?

⁵ Fuente: (Delgado, 2010)

3.3. Teoría de la Circulación

Según (Fernández, 2010), la teoría de la circulación conforma las bases conceptuales del tránsito o tráfico, entendido como la circulación de personas a través de vehículos en el espacio público. Gracias a ésta teoría es posible comprender y modelar las externalidades de transporte, especialmente la congestión.

3.3.1. Definiciones básicas

Para la representación del movimiento de los vehículos se requieren dos tipos de observaciones: espacial y temporal. La **observación espacial** consiste en detenerse en un cierto instante para analizar lo que ocurre en el espacio: un ejemplo de ello sería tomar una fotografía a una calle para ver lo que ocurre en ese instante. Por otro lado, la **observación temporal** consiste en detenerse en un cierto punto y analizar lo que ocurre durante un período de tiempo en ese punto: esto sería equivalente a que un observador se pare en un punto de la calle y grabe un video.

La Figura 69 muestra un diagrama espacio-temporal, en el cual el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la distancia, por lo que el rectángulo representa un tramo de largo L durante un período T . Cada curva en el rectángulo muestra el movimiento de un vehículo, donde la pendiente representa la su velocidad. Además, en la figura se observan dos eventos: en el punto A un vehículo sobrepasa a otro que estaba más adelante, por lo que en este caso se tiene un adelantamiento; por otra parte, en el punto B el vehículo alcanza a otro y comienzan a moverse a la misma velocidad, por lo cual este evento corresponde a un alcance.

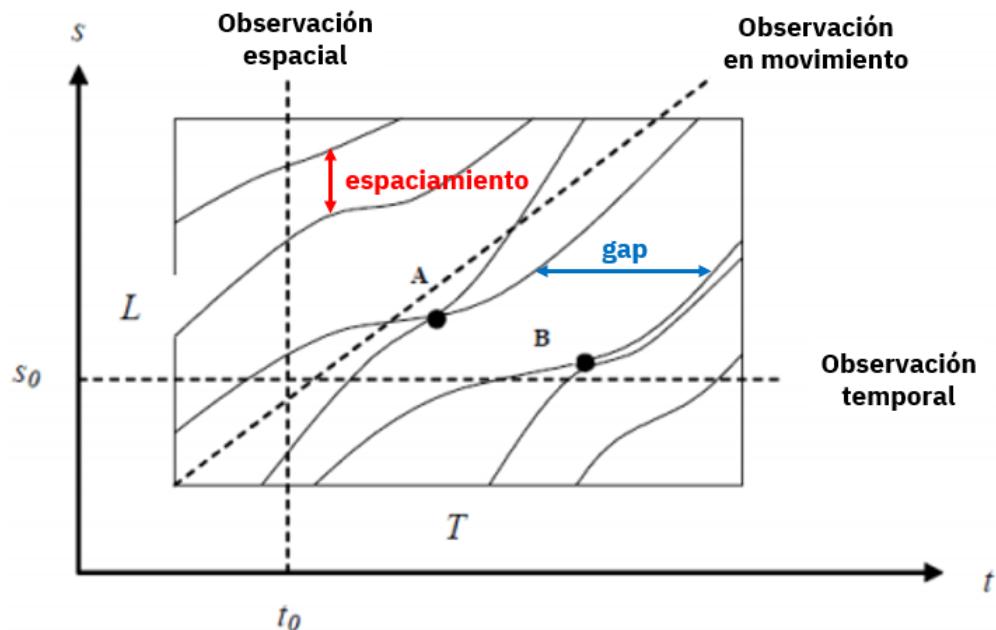


Figura 69: Diagrama espacio-temporal para la representación de movimientos de vehículos. Fuente: Curso CI6301 - Ingeniería de Tránsito (2018)

3.3.2. Características fundamentales del tráfico

Adicionalmente, a partir de las observaciones espaciales y temporales se pueden definir los siguientes conceptos:

- Observación Espacial:
 - **Espaciamiento:** Representa la distancia física entre dos vehículos en un instante de tiempo determinado.
 - **Densidad (k):** Para un instante de tiempo, es la cantidad de vehículos presentes en un tramo determinado. Comúnmente se mide en [veh/km]
 - **Velocidad media espacial (v_s):** Corresponde al promedio de las velocidades de los vehículos que se observan en un tramo.
- Observación Temporal:
 - **Gap:** Para un punto determinado (sección transversal) de una vía, es el lapso que transcurre entre que pasa un primer vehículo hasta que pasa un segundo por el mismo punto.
 - **Flujo (f):** Corresponde a la cantidad de vehículos que pasan por un cierto punto (sección transversal) durante una unidad de tiempo. Suele medirse en [veh/hr].
 - **Velocidad media temporal (v_t):** Corresponde al promedio ponderado de velocidades del flujo total que pasa por un determinado tramo.

Para dejar en claro la diferencia entre ambas velocidades, veamos el siguiente ejemplo: Consideremos la Figura 70, en dónde se tiene una autopista circular de largo 2 [km] por dónde circulan 3 vehículos: rojo, verde y azul. Cada vehículo tiene su velocidad característica: 100, 140 y 120 [km/hr] respectivamente.

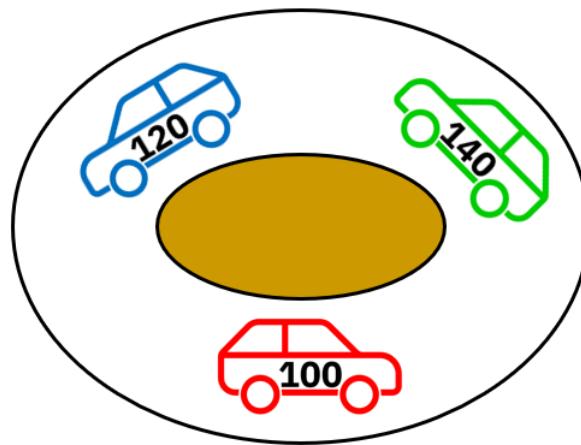


Figura 70: Autopista circular.

Como se mencionó anteriormente, la velocidad espacial es simplemente el promedio de las velocidades de los vehículos, por lo que si nos paramos en un punto de la autopista y vemos pasar los vehículos, se tendrá la siguiente velocidad espacial.

$$v_s = \frac{120 + 100 + 140}{3} = 120 \left[\frac{\text{km}}{\text{hr}} \right]$$

Por otro lado, para la velocidad temporal, se debe realizar un calculo algo más profundo: durante una hora el vehículo rojo pasará 50 veces por dónde está el observador, el vehículo verde pasará 70 veces y el vehículo azul lo hará 60 veces. En total, se observan 180 vehículos durante una hora. De esta manera, la velocidad temporal es la suma ponderada de la cantidad de veces que se ve pasar un vehículo con su velocidad, dividido en la cantidad de vehículos observados, es decir:

$$v_t = \frac{50 \cdot 100 + 70 \cdot 140 + 60 \cdot 120}{180} = 122 \left[\frac{\text{km}}{\text{hr}} \right]$$

En este ejemplo – y en general – se cumple que $v_t > v_s$. Esto se debe a que en una observación temporal es más probable observar los vehículos que circulan más rápido, en cambio, en una observación espacial se tienen tanto los vehículos rápidos como los que circulan más lento.

3.3.3. Relaciones entre las variables de tráfico

Ecuación fundamental del tráfico

La ecuación fundamental del tráfico permite vincular tres características fundamentales vistas en la sección anterior: flujo, densidad y velocidad media espacial. La importancia de esta ecuación radica en que permite relacionar la observación espacial con la observación temporal. La ecuación fundamental del tráfico está dada por la siguiente igualdad:

$$f = k \cdot v_s$$

En la Figura 70, se tienen 3 vehículos en un largo de 2 [km], por lo que la densidad k es de 1.5 [veh/km]. Además, como se calculó anteriormente la velocidad media espacial es de 120 [km/hr]. Por lo tanto, haciendo uso de la Ecuación fundamental del tráfico, se tiene que el flujo es de 180 [veh/hr], que coincide con lo discutido anteriormente en el ejemplo.

Relación velocidad-densidad: Modelo Greenshields

Con la ecuación fundamental del tráfico, es posible calcular el flujo a través de la densidad y la velocidad media espacial. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la velocidad no es un dato exógeno, si no que depende de las condiciones del tráfico, particularmente de la densidad en la vía. Dicho esto, nos interesa saber cómo se relacionan velocidad y densidad. Intuitivamente, se puede afirmar que la velocidad disminuye con la densidad: los vehículos suelen circular más lento cuando una calle está más congestionada.

Ahora surge una segunda pregunta: ¿cómo decrece la velocidad cuando la densidad aumenta? Empíricamente se han determinado distintos modelos, siendo el modelo de Greenshields uno de los mas utilizados debido a su simplicidad. El modelo de Greenshields establece que la velocidad decrece de forma lineal con la densidad:

$$v(k) = v_l \cdot \left(1 - \frac{k}{k_j} \right)$$

Dónde:

- Velocidad a flujo libre (v_l): Es la velocidad a la que circularía un vehículo cuando no hay más vehículos en la vía.
- Densidad de embotellamiento (k_j): Es la máxima densidad de la vía, es decir, cuando los vehículos no se pueden mover debido a la congestión.

Algunas observaciones con respecto al modelo son:

- Si la densidad es máxima ($k = k_j$) entonces la velocidad a la que andan los vehículos es nula.
- Si la densidad es mínima ($k = 0$) la velocidad que llevarán los vehículos es la de flujo libre.

Relación flujo-densidad

Haciendo reemplazo de la Ecuación fundamental del tráfico en el modelo de Greenshields, se obtiene una relación flujo-densidad.

$$f(k) = v_l \cdot k - \frac{v_l \cdot k^2}{k_j}$$

Como se observa, la relación entre flujo y densidad según este modelo es cuadrática. La Figura 71 muestra la parábola correspondiente a esta relación para $v_l = 70$ [km/hr] y $k_j = 100$ [veh/km].

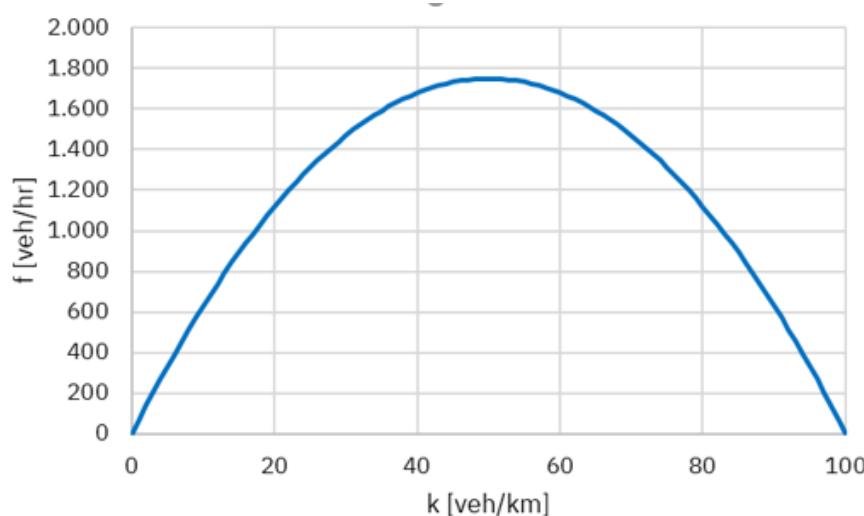


Figura 71: Relación entre flujo y densidad bajo el modelo Greenshields.

El flujo aumenta a tasas decrecientes a medida que aumenta la densidad. Cuando se alcanza el flujo máximo (1750 [km/hr] en este caso), se dice que la pista está a capacidad. Se puede demostrar que la pista está a capacidad cuando $k = k_j/2$. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 0 \implies v_l - 2 \cdot \frac{v_l}{k_j} \cdot k = 0 \implies 2 \cdot \frac{k}{k_j} = 1 \implies k = \frac{k_j}{2}$$

La razonabilidad detrás de esta relación es la siguiente: a medida que aumenta la densidad se tienen más vehículos en el tramo estudiado, por lo que naturalmente el flujo es mayor. Sin embargo, cuando se alcanza la capacidad de la pista, se produce congestión, lo cual reduce la velocidad y a su vez reduce el flujo. Este flujo se hace cero cuando se alcanza la velocidad de embotellamiento k_j , debido a que en este punto la velocidad se hace cero.

En (Gonzales, Chavis, Li, y Daganzo, 2011) se puede ver este comportamiento con mediciones reales (Figura 72):

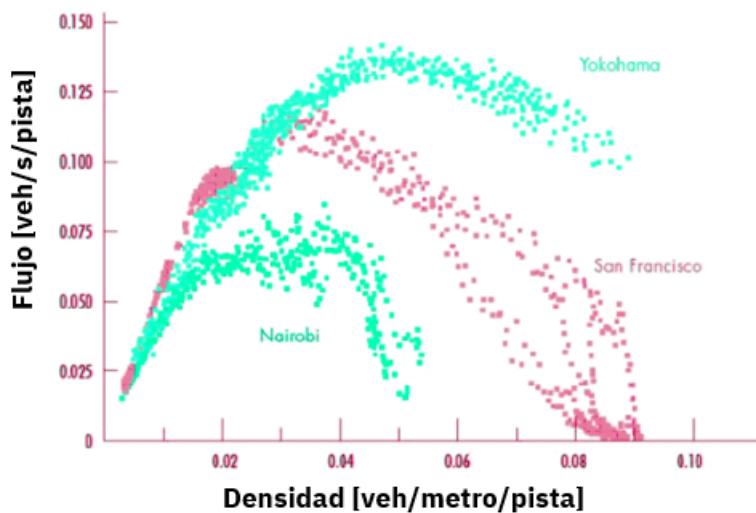


Figura 72: Relación flujo-densidad observada en tres ciudades. ^a

^a Fuente:(Gonzales y cols., 2011)

Relación velocidad-flujo

De forma similar al caso de la relación flujo-densidad, a partir de la ecuación fundamental del tráfico y el modelo Greenshields, se puede obtener una expresión para la velocidad en función del flujo. Esta expresión está dada por:

$$v(f) = \frac{v_l}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot f}{v_l \cdot k_j}} \right)$$

Del mismo modo, la Figura 66 muestra un gráfico de velocidad en función del flujo para $v_l = 70[\text{km/hr}]$ y $k_j = 100 [\text{veh/km}]$. En la figura, se observa que para un flujo nulo, se pueden tener dos velocidades: la velocidad a flujo libre, que corresponde a cuando no hay más vehículos ($k = 0$); o velocidad cero, que es la situación con máxima congestión ($k = k_j$). Si se avanza por la curva desde la parte superior, se puede ver que a medida que aumenta el flujo (debido a un aumento de la densidad) la velocidad empieza a disminuir hasta que se llega a la capacidad. Luego, la velocidad sigue disminuyendo, pero también lo hace el flujo debido a la congestión. A partir de este tramo, la velocidad continúa disminuyendo hasta llegar a la densidad de embotellamiento.

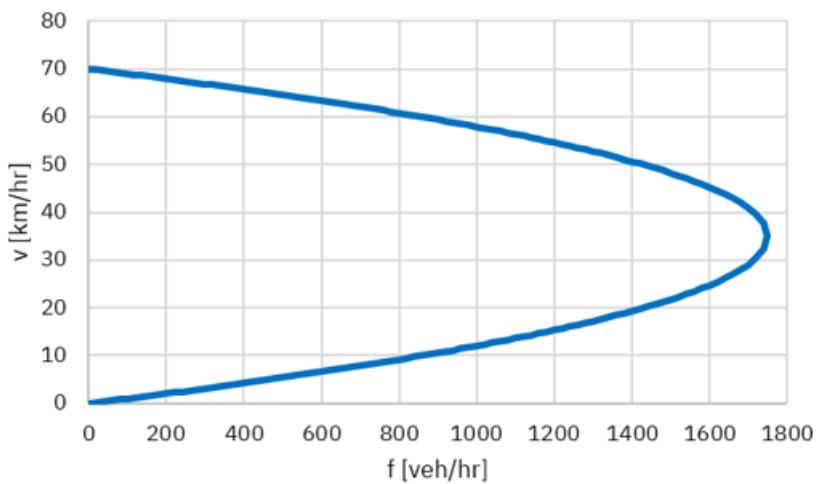


Figura 73: Velocidad en función del flujo bajo el modelo Greenshields.

3.3.4. Relación flujo-tiempo de viaje

Cuando no hay flujo de vehículos y la velocidad de circulación es la velocidad de flujo libre, el tiempo de viaje será el mínimo posible. Luego, al aumentar el flujo de vehículos, la velocidad comienza a disminuir provocando un aumento del tiempo de viaje. La variación es estable hasta llegar al flujo de capacidad: a partir de ahí no se puede determinar de forma precisa el tiempo (demonstrado empíricamente), dado a que aparece la congestión. En este caso, se dice que el tiempo de viaje es inestable. La Figura 74 muestra un gráfico tiempo vs flujo en que se describe lo mencionado anteriormente.

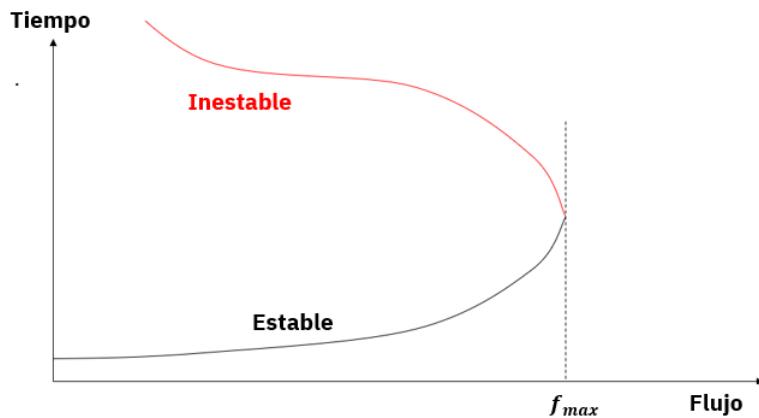


Figura 74: Tiempo de viaje (inestable) vs flujo.

Para solucionar este problema en términos de modelación, se decide aproximar el fenómeno real por una función que esté bien definida para los distintos niveles de flujos. Ésta función (monótonamente creciente) captura el comportamiento estable y se comporta crecientemente a partir del flujo de capacidad.

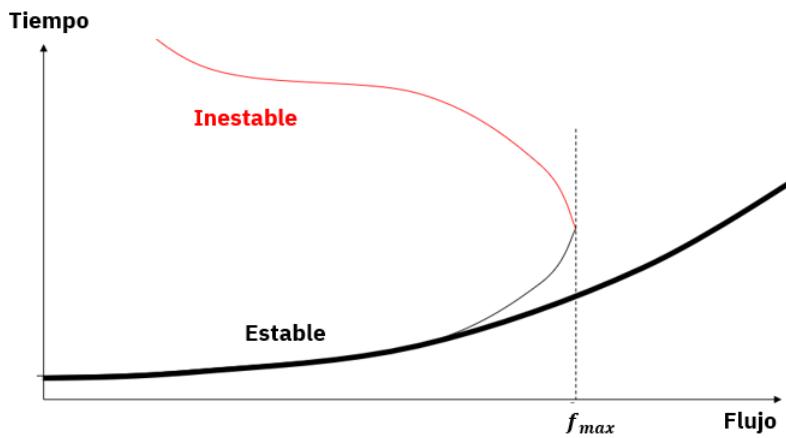


Figura 75: Tiempo de viaje (estable) vs flujo.

Gracias a este cambio en la función del tiempo de viaje, ahora se tienen las propiedades deseables de una función monótona creciente. La que más interesa en este caso es que es derivable con respecto al flujo.

3.3.5. Demoras en intersecciones

Existen dos tipos de intersecciones: Las semaforizadas y las intersecciones de prioridad. En esta sección, se revisará la modelación de los tiempos de espera en cada una de ellas, dado que representan la mayor demora en los tiempos de viaje.

Intersecciones semaforizadas

Como lo indica su nombre, una intersección semaforizada es aquella cuyos movimientos están regulados por un conjunto de semáforos. Una intersección semaforizada está determinada por fases, donde cada una le cede permisos de avanzar a un flujo específico durante un período denominado como tiempo de verde (V), mientras que el resto de los flujos permanece quieto a través de la luz roja. El tiempo que transcurre entre dos verdes para una misma fase (es decir, el tiempo de verde, de amarillo y de rojo para un flujo en particular), se conoce como tiempo de ciclo (C). Es importante notar que todas las fases pertenecientes a una misma intersección presentan el mismo tiempo de ciclo.

En la Figura 76 se presenta un ejemplo de intersección semaforizada de 4 fases junto con los tiempos de verde y el detalle del ciclo de cada una: la primera fase permite el movimiento de flujos en la dirección norte-sur, la segunda permite el movimiento de los flujos en dirección este-oeste, la tercera los virajes hacia la derecha y la última fase los virajes a la izquierda. La primera y segunda fase tiene un tiempo de verde de 23 segundos, la tercera de 13 segundos y la cuarta de 12 segundos. También se agrega una fase de peatones con un Verde de 17.5 segundos, dando como resultado un tiempo de ciclo de 104.5 segundos.

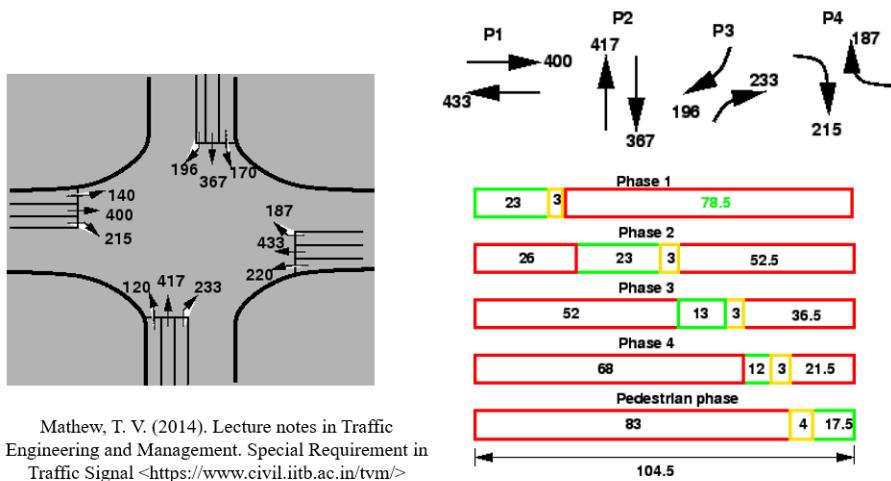


Figura 76: Intersección semaforizada de 4 fases.

Se espera que a medida que el tiempo de verde de alguna fase aumenta, los vehículos deberán esperar menos para salir de la intersección. Esto se debe a que (1) para un tiempo de ciclo dado, si se tiene un mayor tiempo de verde se tiene una reducción del tiempo de rojo; y (2) se permite descargar una mayor cantidad de vehículos y se generan colas más pequeñas. Ésta relación fue comprobada empíricamente y los resultados son los presentados en la Figura 77.

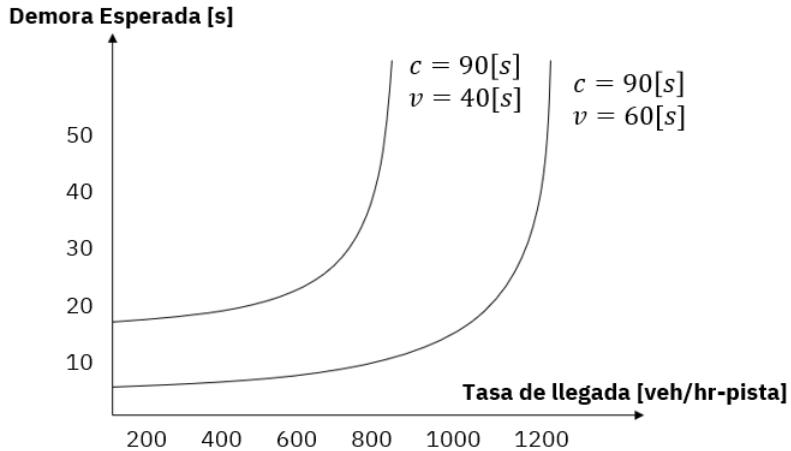


Figura 77: Curvas empíricas de los tiempos de demora en la intersección en función de la tasa de llegada.

A medida que aumenta la tasa de llegada de vehículos, mayor es la demora para cruzar la intersección, ya que se debe esperar más tiempo para que pasen los vehículos antecesores. Además, para una misma tasa de llegada tendrán una mayor demora los vehículos de la fase con tiempo de verde, aun cuando se tenga el mismo tiempo de ciclo. Otra observación que se puede realizar es que cuando la tasa de llegada es mínima, la demora esperada no es nula: esta demora mínima es la que tendría un vehículo en cruzar la intersección si es que llega en verde. Si el verde es mayor en un semáforo, la demora mínima es menor, ya que hay mayor probabilidad de llegar en verde al cruce.

Intersecciones de prioridad

Son aquellas intersecciones que están reguladas por una señalética “disco PARE” o “ceda el paso”. Cuando hay disco PARE, el conductor debe detenerse y esperar hasta que sea seguro que cruce. En un CEDA el paso, el conductor debe reducir la velocidad hasta que el cruce pueda realizarse (si llega y el cruce es seguro, se realiza sin disminuir la velocidad). Igualmente, se introduce el concepto de gap crítico, que indica el tiempo mínimo que se debe esperar en el cruce para poder pasarlo.

A diferencia de las intersecciones semaforizadas, el tiempo que debe esperar el vehículo para cruzar depende fuertemente del flujo que trae la vía principal, que es la vía que se quiere cruzar o a la que se quiere incorporar un vehículo. Es por esto que el tiempo de espera en la cola dependerá de 3 factores: tasa de llegada al cruce, flujo de la vía principal y por último el gap crítico que tiene que enfrentar el conductor. En el gráfico de la Figura 78 se observan curvas para distintos valores de estos tres factores, pero siempre la función del tiempo de demora dependerá de la tasa de llegada, los otros dos valores son tomados como datos.

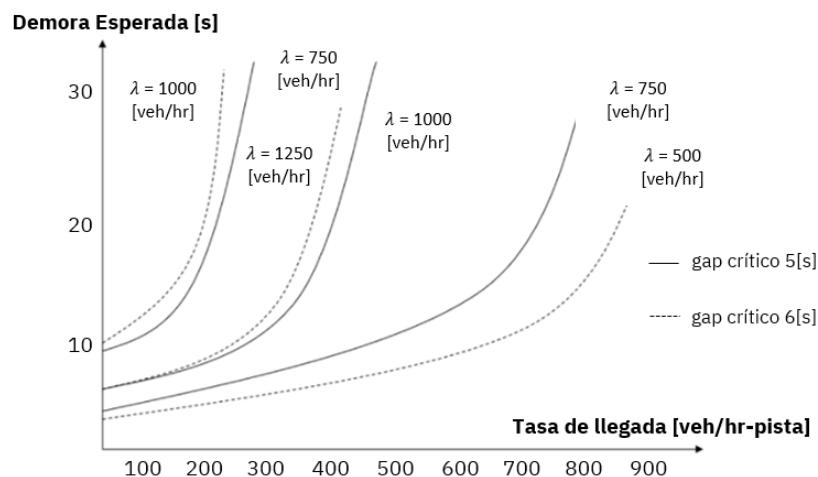


Figura 78: Demora en cola en función de la tasa de llegada en vía secundaria, para distintos valores de gap crítico y flujo en la vía principal (λ).

En la figura se observa que cuando el flujo en la vía principal crece más tiempo de demora se tendrá a flujos más bajos, por lo mismo, el tiempo mínimo de demora también es mayor. Por otro lado, si el gap crítico crece (para un mismo flujo λ) el tiempo de espera aumenta.

3.3.6. Representación de una Red de Transporte

¿Cómo se vincula lo visto en Teoría de la Circulación con el Modelo Clásico de Transporte? Consideremos un área de estudio sobre la cual se define una red de transporte (Figura ??). Los viajes realizados desde y hacia cada zona se concentran en un **centroide**; a su vez, los centroides se conectan a la red de transporte a través de **conectores**. Por su parte, la red de transporte está compuesta por **nodos** (representan lugares de interés y/o intersecciones) y **arcos** (tramos de vía que conectan nodos).

Los análisis realizados en la sección de teoría de la circulación son a nivel de arco aislado, por lo cual se pueden modelar los costos de cada arco a través de funciones flujo-demora. Esto permitirá eventualmente la construcción de un costo generalizado a nivel zonal mediante algún método de agregación. En la unidad de asignación a la red se abordará este tema con mayor detalle.

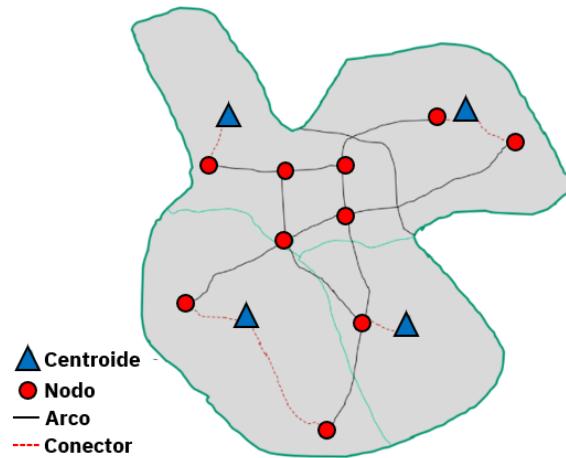


Figura 79: Representación gráfica de una red de transporte.

3.3.7. Costo Generalizado

Cuando un usuario viaja por un arco en específico se tiene un costo asociado, el cual incluye distintos componentes: tiempo, gasto en combustible, peaje, tarifas, etc. Es por esto que al costo en que se incurre por utilizar un arco de la red lo llamaremos **costo generalizado del arco**, ya que incluye todos los costos posibles.

Sin embargo, bajo nuestro modelo supondremos que los costos por viajar en un determinado arco corresponde principalmente al tiempo de viaje. Además, se supondrá que dependen solamente del flujo que existe en ese arco, es decir, $c_a = c_a(f_a)$. La validez de este supuesto puede ser discutida en los casos de intersecciones de prioridad, dónde también influye el flujo de otros arcos, pero por temas de simplificación lo tomaremos como un buen supuesto.

Algunas características deseables que deben tener las funciones de costo generalizado son:

- **Realistas:** Que representen correctamente lo que está ocurriendo en el arco.
- **No decrecientes:** A medida que aumenta el flujo en el arco, debiese aumentar el costo.
- **Continuas y Diferenciables.**
- **Costo constante para bajos niveles de flujo,** para modelar los casos sin congestión.

En esta formulación del modelo, si c_a es el costo del arco a , entonces, para un flujo dado λ , los λ vehículos por hora percibirán el mismo costo en ese arco, dado que es una función del flujo.

El costo puede ser representado de muchas maneras. Por ejemplo, la función usada por el *Bureau of Public Roads* (BPR) para calcular el costo es la siguiente:

$$c(f) = c_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{f}{Q} \right)^\beta \right)$$

en la que:

- c_0 : costo (tiempo) a flujo libre
- f : flujo en el arco
- Q : capacidad práctica ($\sim 75\%$ de la capacidad máxima)
- α, β : parámetros a calibrar

3.3.8. Externalidades

Como se dijo anteriormente, todos los usuarios que usan un arco perciben el mismo costo de uso c_a : el costo total de operación del arco va a ser igual a $c_a \cdot f_a$. Ahora, es razonable hacer la siguiente pregunta: ¿Cuánto costo extra causa el ingreso de un nuevo usuario al arco? Para responder veamos el siguiente ejemplo: En una autopista existe un flujo de 100 [veh/hr] y tienen un tiempo de viaje de 8 [min], luego, el ingreso de un nuevo usuario hace que el tiempo de viaje se eleve a 9 [min] (esto depende netamente de la función de costos). Por lo que vamos a tener dos escenarios.

- **Escenario 1:** 100 vehículos con un tiempo de demora de 8 [min].
- **Escenario 2:** 101 vehículos con un tiempo de demora de 9 [min].

Por lo tanto, se puede calcular el costo total del sistema para cada escenario, éste resulta de multiplicar la cantidad de usuarios por el tiempo que demora cada uno.

Tabla 18: Costos en cada escenario

	E1	E2
Vehículos	100	101
Tiempo medio [min]	8	9
Tiempo Total [min]	800	909

En la tabla, se observa que el ingreso de un usuario adicional al sistema implica un aumento del tiempo total en el sistema de 109 [min]. Sin embargo, este usuario adicional sólo percibe los 9 [min] que va a tardar en el sistema y no la demora adicional que genera en el resto de los usuarios.

Si este usuario debe elegir entre otra ruta en que solo vaya él pero demore más de 9 [min] (con 10 [min] basta) ¿Que ruta elegiría el usuario? Esta pregunta tiene 2 respuestas posibles: la respuesta egoísta es elegir la ruta en que se demorará menos, a pesar de que el costo social aumente debido el costo que le genera a los demás usuarios del sistema. La otra respuesta es la decisión que optimiza el

bienestar total de los usuarios del sistema, que es irse por la ruta en que se demorará más, pero que el costo adicional será solo el suyo y no el de los demás usuarios. El costo adicional generado a los demás usuarios dado el ingreso de un nuevo usuario al sistema es lo que se conoce como **externalidad**.

Este ejemplo motiva la inclusión del concepto de **costo marginal de un arco**, el cual se refiere a el costo adicional de agregar un nuevo usuario al sistema. El costo marginal de un arco a se denota por cmg_a y se define del siguiente modo:

$$cmg_a = \frac{\partial(c_a(f_a) \cdot f_a)}{\partial f_a} = c_a + \frac{\partial c_a}{\partial f_a} \cdot f_a$$

Al analizar la fórmula, nos damos cuenta que el costo marginal del arco está compuesto por dos factores: el primero (c_a) es el costo percibido en ese arco y el segundo ($\partial c_a / \partial f_a \cdot f_a$) es el aumento del costo medio en el resto de los usuarios cuando un usuario adicional ingresa al sistema, es decir, es el **costo de congestión**. Es importante tener en cuenta que este segundo término debe ser no negativo, dado que la función de costos es no decreciente en los flujos (el costo aumenta con el flujo).

A partir de lo anterior, se tiene que $cmg_a \geq c_a$. Esta relación se cumplirá estrictamente cuando existe congestión, es decir, cuando $\partial c_a / \partial f_a > 0$. Por otro lado, se tendrá la igualdad cuando no existe congestión, y se está en la parte plana de la curva de costos.

Para reducir el costo marginal del arco, se pueden realizar varias opciones de operación para aumentar la capacidad del arco:

- **Pistas de viraje:** aumentan la capacidad cerca de una intersección, y permite que los vehículos que no doblan no sean interrumpidos por los que si viran.
- **Autopistas Urbanas:** aumentan la capacidad en ejes estratégicos que permiten a los vehículos ingresar a zonas de la ciudad en menos tiempo (eliminando intersecciones con el uso de pasos superiores/inferiores). En el curso se verá porqué no es necesariamente la mejor solución.
- **Prioridad a Transporte público:** Se sabe de la Figura 4 (en el Capítulo 1) que los buses son más eficientes para cargar pasajeros que los autos. Por esto, se pueden realizar vías exclusivas o segregadas para los buses, para agilizar el tránsito de estos (y que no estorben el tránsito al cargar o descargar pasajeros).

3.4. Asignación a la Red

3.4.1. Introducción

La asignación a la red corresponde a la última etapa del Modelo Clásico de Transporte, donde se busca responder la pregunta: ¿Qué ruta de la red escogen las personas para llegar a su destino?. En esta etapa se usarán los conocimientos de teoría de la circulación y de las etapas anteriores (generación-atracción, distribución y partición modal) para llegar a un **equilibrio** entre oferta y demanda de transporte.

En esta sección se presentarán los conceptos fundamentales de asignación a redes de transporte privado con y sin congestión, utilizando como referencia principal el libro (Sheffi, 1985). Estos conceptos se profundizaran y extenderán (en particular a transporte público) en el curso *Redes de Transporte*.

Para este análisis, se requieren algunos conceptos mencionados anteriormente, en particular sobre la red de transporte. Recordemos que en este contexto, una red es una representación gráfica y matemática de una red vial compuesta por **arcos** y **nodos**. Los arcos suelen representar las calles y los nodos las intersecciones, pero en el caso de las redes de transporte público, los arcos también podrían representar combinaciones de servicios y los nodos paraderos o estaciones de transbordo.

Además, aquí surge el concepto de **ruta**, que es una secuencia de nodos y arcos que permiten unir un origen con un destino. Es importante señalar que las rutas no contienen un circuito, es decir, no puede contener un nodo y/o arco más de una vez.

Un ejemplo de red es el que se observa en la Figura 80, la cuál tiene 5 nodos y 7 arcos. Los arcos son unidireccionales, es decir, el flujo solamente puede ir en la dirección que indica el arco.

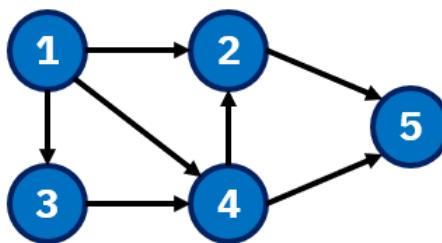


Figura 80: Representación de una red.

En la red de la figura, los desplazamientos pueden ser los siguientes: $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 5$, $3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2$ y $4 \rightarrow 5$. Cada uno de estos movimientos, es decir, cada arco tiene asociado un costo, en este caso dado por el tiempo de viaje.

Por otra parte, se tienen las siguientes rutas:

- Ruta a : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$

- Ruta *b*: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- Ruta *c*: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$
- Ruta *d*: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- Ruta *e*: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

La representación de las redes no es única y depende del nivel de detalle que se le quiera dar al análisis, por ejemplo, los nodos pueden ser intersecciones, como también pueden ser comunas si es que la Red que se representa es a mayor escala (por ejemplo, a nivel de ciudad). La Figura 81 muestra una intersección con un alto nivel de detalle:

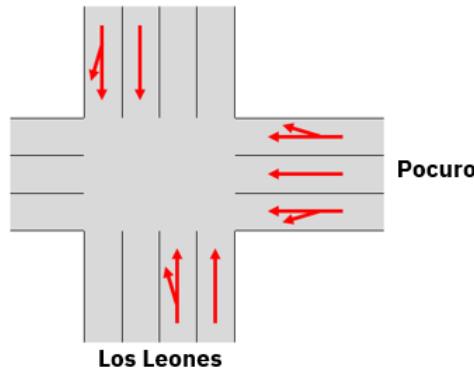


Figura 81: Representación de una intersección con pistas y movimientos.

Ahora comparemos un nodo que representa la intersección de la Figura 82 según sus arcos incidentes (que entran o salen de él), como se ve en la Figura 75:

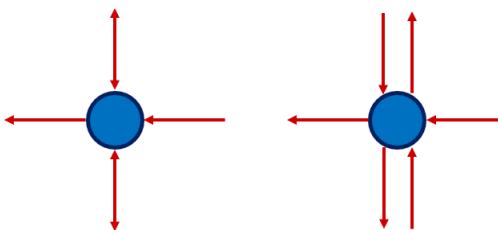


Figura 82: Distintas representaciones de el mismo segmento de una red.

En la representación de la izquierda los arcos que van en sentido vertical son bidireccionales, es decir, se puede ir en ambos sentidos por dichos arcos. Por otro lado, en la representación de la derecha también se puede ir en ambos sentidos pero es a través de dos arcos diferentes. Entonces, ¿cuál es la diferencia de las dos representaciones? La diferencia principal radica en que en la primera representación para usar ambas direcciones del arco se incurre en la misma función de demora, en cambio en la segunda representación, las demoras pueden ser distintas dependiendo del sentido. Se dice que la representación de la derecha es más desagregada que la de la izquierda.

Algunos supuestos que se asumen cuando se decide realizar una codificación de la Red más agregada son los siguientes:

- Todos los flujos que llegan por una rama determinada tienen igual demora.
- Todos los movimientos están permitidos y excluye costos por movimiento, es decir, todos los movimientos tienen igual costo (esto no necesariamente ocurre en la realidad).

Lo anterior sólo es aceptable en análisis estratégico para intersecciones poco importantes.

La Figura 83 muestra otra representación de la misma intersección pero de forma aún más detallada.

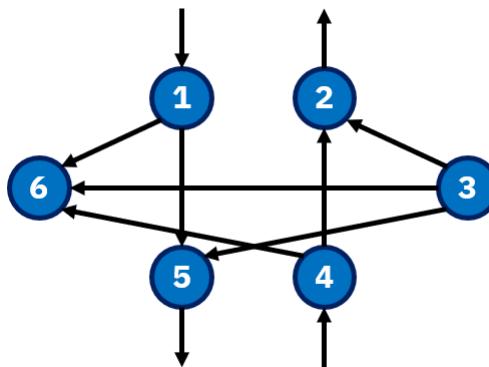


Figura 83: Representación en detalle de la intersección analizada.

Esta representación de la intersección es la más detallada posible, en dónde cada arco tiene sus distintos tiempos de demora y sus capacidades. Si algún movimiento en la intersección no estuviera permitido simplemente el arco que representa ese movimiento se quita y no forma parte de la red.

3.4.2. Equilibrio

El equilibrio en transporte tiene distintos niveles. Durante el curso se verá el más básico de ellos, pero en esta introducción se mencionarán los demás para aclarar sus principales diferencias.

- **Equilibrio en la red:** Para un par Origen-Destino dado (toda la Matriz es dada y fija para el modo que se está analizando) y para un modo de transporte en particular, este equilibrio se alcanza cuando todos los usuarios tienen su ruta escogida y no se cambian de ella dado que esto implicaría percibir un costo mayor para ellos u otros usuarios.
- **Equilibrio multimodal:** Se reconoce que los distintos modos de viaje interactúan en el sistema, y al tener distintas matrices Origen-Destino para cada modo se obtienen distintos equilibrios en la red con sus respectivos tiempos de viaje. Por lo tanto, los distintos tiempos de viaje afectarán la elección de los usuarios, reordenando la partición modal y obteniendo un nuevo equilibrio. Además, los distintos modos generan congestión en las rutas que comparten.
- **Equilibrio del sistema:** A largo plazo los equilibrios en la red pueden afectar la decisión de que modo utilizar (Equilibrio multimodal), pero también puede afectar el destino al que se dirige el usuario (si es que el tiempo de viaje es muy grande) o también puede afectar la frecuencia de servicio que ofrecen operadores. Este equilibrio es el más complejo y sintetiza todos las otras etapas del modelo de transporte.

En este curso solo se verá el primer equilibrio, debido a que es el más simple: se tendrán matrices Origen-Destino con demanda fija para el modo transporte privado. Además, otro supuesto que se tendrá en el modelo es que los costos generalizados serán principalmente los tiempos de viaje.

3.4.3. Notación y conceptos básicos

A continuación, se definen notaciones y conceptos básicos que serán útiles para resolver los problemas de asignación y equilibrio en la red. La Figura 84 muestra un ejemplo de una red.

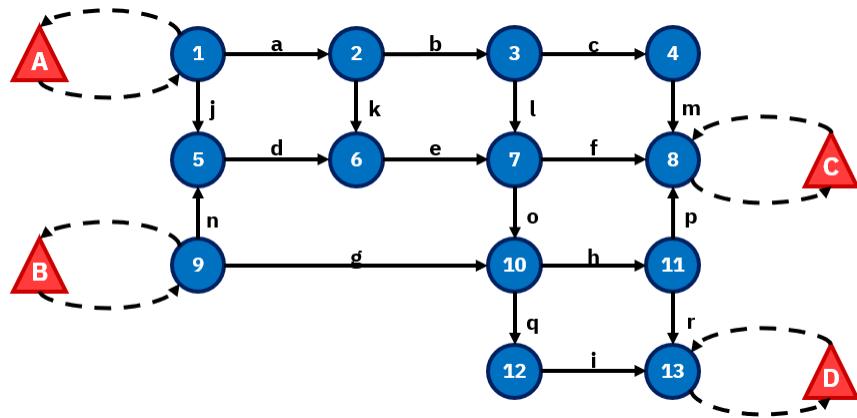


Figura 84: Ejemplo de red

En la red, A, B, C y D representan centroides: nodos de los cuales sale o entra flujo, es decir, son las zonas que forman parte de la matriz O-D. Por su parte, las letras minúsculas representan arcos y los números representan nodos de transferencia, los cuales solo sirven para trasladarse a través de la red. Por último, las líneas punteadas son conectores entre las zonas y el resto de la red.

Las rutas entre el par $A-C$ son las siguientes:

- Ruta 1: A , conector, a, b, c, m , conector, C .
- Ruta 2: A , conector, a, k, e, f , conector, C .
- Ruta 3: A , conector, a, b, l, f , conector, C .
- Ruta 4: A , conector, j, d, e, f , conector, C .
- Ruta 5: A , conector, a, k, e, o, h, p , conector, C .
- Ruta 6: A , conector, j, d, e, o, h, p , conector, C .

Para una red de transporte, se definen los siguientes conceptos:

- Flujo en ruta r (f_r): Flujo de vehículos que atraviesa toda la ruta r .
- Flujo en arco a (x_a): Flujo de vehículos que pasa por el arco a .
- O_i : Flujo de vehículos generado en el nodo i . Este valor lo entrega la Matriz O-D.
- D_j : Flujo de vehículos atraído por el nodo j . Este valor lo entrega la Matriz O-D.

- $A(i)$: Conjunto de nodos posteriores al nodo i , es decir, a los que se llega desde i mediante un arco.
- $B(i)$: Conjunto de nodos anteriores al nodo i , es decir, los que llegan a i mediante un arco.
- r^{ij} : Conjunto de rutas que unen el par de centroides (i, j) .

A continuación, se detallan algunas condiciones que deben satisfacer los elementos mencionados:

- Es sumamente importante entender la diferencia entre x_a y f_r . El flujo que se observa en un arco corresponde a la suma de los flujos de todas las rutas que utilizan ese arco, es decir:

$$x_a = \sum_r f_r \cdot \delta_{ar}$$

donde δ_{ar} es un factor de incidencia: vale 1 si el arco a pertenece a la ruta r y 0 en caso contrario.

Si se conocen todos los flujos en ruta, entonces se pueden conocer todos los flujos en arcos. Esto no sucede al revés, ya que pueden existir infinitas combinaciones de flujos en ruta que entreguen la misma configuración de flujos en arcos.

- Si el nodo i es de transferencia, entonces los flujos que entran deben ser igual a los que salen:

$$\sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \sum_{j \in B(i)} x_{ji}$$

- Para los centroides pertenecientes a la Matriz O-D, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\sum_{j \in A(i)} x_{ij} = O_i \quad \sum_{i \in B(j)} x_{ij} = D_j$$

- Para satisfacer la demanda resultante de la etapa de partición modal entre un par O-D (i, j) , la suma de los flujos en todas las rutas que van desde el nodo i hacia el nodo j debe ser igual a la demanda V_{ij} :

$$V_{ij} = \sum_{r^{ij}} f_r$$

3.4.4. Asignación con Demanda Fija

Dada la oferta del sistema $c_a(x_a)$ y la demanda V_{ij} , se busca determinar los flujos en arcos x_a^* . Esto permitirá conocer el costo de utilizar cada arco, así como también el costo total en el sistema. Además de los flujos en arcos, también interesa obtener los flujos en rutas f_r^* , para así poder determinar el costo de satisfacer un par O-D determinado a través de la ruta r , c_r^{ij} .

Algunos supuestos para determinar los flujos en arcos y flujos en ruta son los siguientes:

- Los individuos son razonables y al viajar eligen la ruta de menor costo.

- Los costos de los arcos y rutas están dados por el tiempo que tarda viajar en ellos.

En los problemas de asignación, los pares O-D no son separables, ya que los arcos pueden estar involucrados en rutas pertenecientes a distintos pares O-D. Esto implica que la solución de un par O-D puede afectar directamente a la solución de otro par.

Asignación Todo o Nada (TON)

Esta forma de resolución consiste en asignar todo el flujo a la ruta de menor costo para un determinado par O-D por lo que se debe determinar esta ruta para cada par O-D. Este problema se puede resolver con distintos algoritmos de asignación de rutas mínimas por ejemplo el algoritmo Dijkstra o D'esopo. Estos algoritmos de rutas mínimas tienen aplicaciones en distintas ramas de la ingeniería, por ejemplo, en computación, eléctrica e hidráulica.

Algoritmo Dijkstra

Este algoritmo es uno de los más famosos para encontrar rutas mínimas para un par O-D. La idea es explorar los caminos más cortos desde un nodo origen hacia los demás nodos de la red, hasta obtener el camino más corto desde el origen hacia el destino. Para su implementación, se asigna a cada nodo una etiqueta que contiene dos valores:

- $d(k)$: distancia mínima desde el nodo de origen al nodo k
- $\text{pred}(k)$: nodo que precede al nodo k

Los pasos a seguir para llevar a cabo el algoritmo son los siguientes:

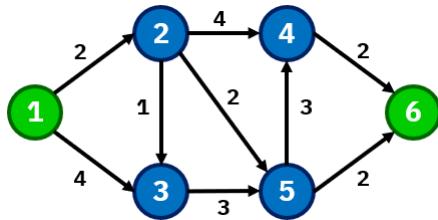
- Para inicializar el algoritmo, se asignan etiquetas a todos los nodos de la red con distancia mínima al origen $d(k) = \infty$ y nodo predecesor indefinido, a excepción del nodo origen, al cual se le asigna distancia 0. Además, se crea un conjunto Q que contiene todos los nodos de la red, exceptuando el nodo origen. También se establece el nodo origen como nodo actual i .
- Se actualizan las etiquetas de los nodos j a los que se puede llegar a partir del nodo actual i y están en Q . Las etiquetas de distancia se actualizan solamente si su valor es menor al de la etiqueta de distancia actual, es decir:

$$d(i) + c_{ij} < d(j) \implies d(j) = d(i) + c_{ij}$$

En tal caso, se define $\text{pred}(j) = i$.

- Se revisan las etiquetas de los nodos del conjunto Q y se elige el nodo con el valor mínimo de etiqueta de distancia. Dicho nodo se remueve de Q y se define como el nuevo nodo actual i .
- Si el conjunto Q está vacío, entonces se termina el algoritmo: para construir la ruta mínima, basta con ubicar el nodo destino y posteriormente identificar sucesivamente los nodos predecesores hasta llegar al nodo origen. Si aún quedan elementos en Q , se vuelve al paso 2.

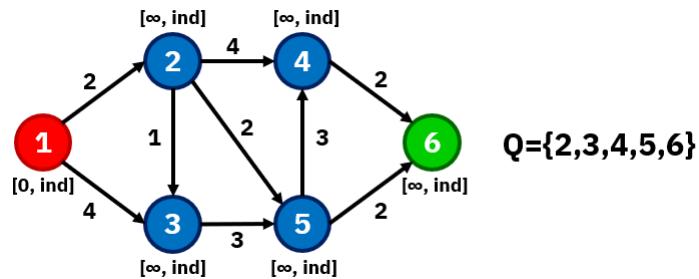
Para lograr un mejor entendimiento de este algoritmo, consideremos el ejemplo de la figura.



El objetivo es determinar la ruta mínima entre el nodo 1 (origen) y el nodo 6 (destino).

Inicialización:

Paso 1: Se comienza asignando las etiquetas a todos los nodos de la red, se asigna el nodo 1 como el nodo actual (en rojo) y se crea el conjunto Q con el resto de los nodos de la red:

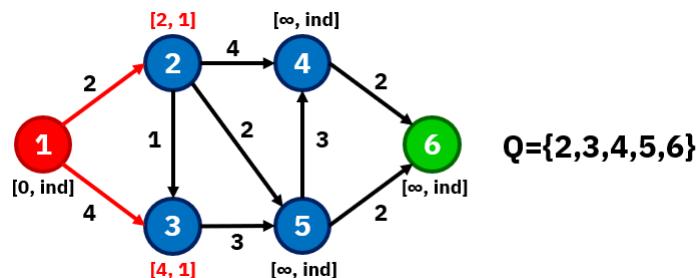


Iteración 1:

Paso 2: Se actualizan las etiquetas de los nodos posteriores a 1, es decir, los nodos 2 y 3:

$$d(2) = \infty > d(1) + c_{12} = 0 + 2 = 2 \implies d(2) = 2, \quad pred(2) = 1$$

$$d(3) = \infty > d(1) + c_{13} = 0 + 4 = 4 \implies d(3) = 4, \quad pred(3) = 1$$



Paso 3: Se elige el nodo con mínima etiqueta de distancia en Q , en este caso, aquel nodo es el nodo 2. Se elimina el nodo 2 del conjunto Q y se asigna como el nuevo nodo actual. De esta manera, se tiene $Q = \{3, 4, 5, 6\}$.

Paso 4: Como aún quedan elementos en Q , se vuelve al paso 2.

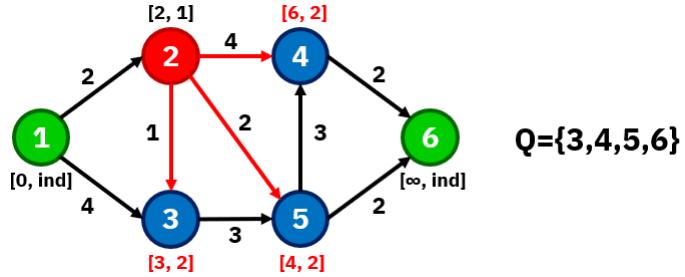
Iteración 2:

Paso 2: El nodo actual es el nodo 2, por lo que los nodos a actualizar son los nodos 3, 4 y 5.

$$d(3) = 4 > d(2) + c_{23} = 2 + 1 = 3 \implies d(3) = 3, \quad pred(3) = 2$$

$$d(4) = \infty > d(2) + c_{24} = 2 + 4 = 6 \implies d(4) = 6, \quad pred(4) = 2$$

$$d(5) = \infty > d(2) + c_{25} = 2 + 2 = 4 \implies d(5) = 4, \quad pred(5) = 2$$



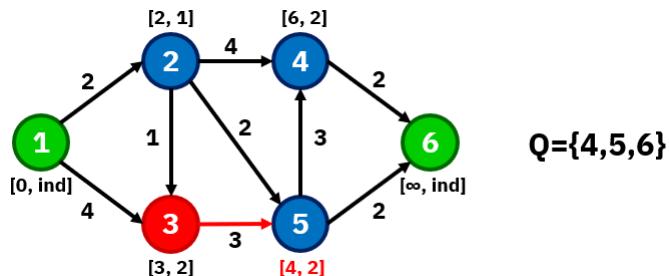
Paso 3: El nodo con valor mínimo de etiqueta de distancia es el nodo 3, por lo cual se elimina del conjunto Q y pasa a ser nuestro nuevo nodo actual. Con esto, se tiene $Q = \{4, 5, 6\}$

Paso 4: Aún quedan nodos en Q , por lo que se vuelve al paso 2.

Iteración 3:

Paso 2: El nodo 3 solamente tiene como nodo posterior al nodo 5, por lo que es el único nodo por actualizar en esta iteración. Notar que en este caso no se actualiza la etiqueta, en efecto:

$$d(5) = 4 < d(3) + c_{35} = 3 + 3 = 6 \implies d(5) = 4, \quad pred(5) = 2$$



Paso 3: Ahora el nodo con valor mínimo de etiqueta de distancia en el conjunto Q es el nodo 5, por lo que se retira de Q y se convierte en el nuevo nodo actual. Se tiene $Q = \{4\}$.

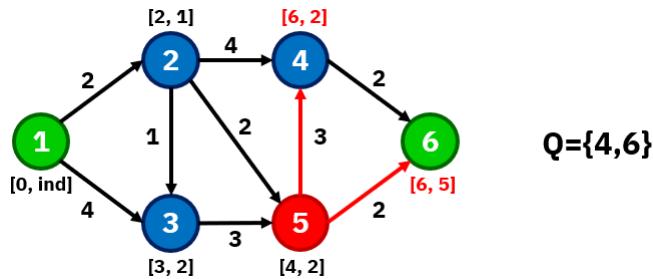
Paso 4: Aún quedan elementos en Q , por lo que se vuelve al paso 2.

Iteración 4:

Paso 2: Para el nodo actual 5, se tienen como nodos adyacentes los nodos 4 y 6. Se observa que el nodo 4 no se actualiza, debido a que la distancia para llegar ahí desde 5 es mayor a la etiqueta de distancia que posee actualmente.

$$d(4) = 6 < d(5) + c_{54} = 4 + 3 = 7 \implies d(4) = 6, \quad pred(4) = 2$$

$$d(6) = \infty > d(5) + c_{56} = 4 + 2 = 6 \implies d(6) = 6, \quad pred(6) = 5$$

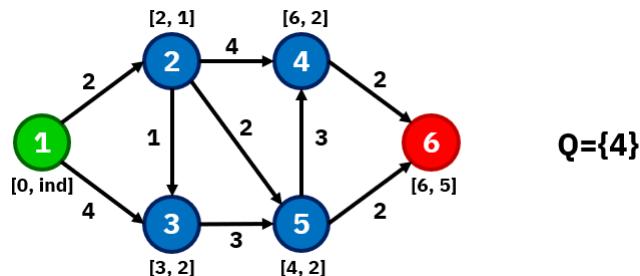


Paso 3: Ambos nodos que quedan en el conjunto Q poseen el mismo valor de etiqueta de distancia, por lo cual se puede extraer cualquiera de ellos. Para reducir el número de pasos, se extraerá el nodo 6 (se propone verificar el proceso al extraer el nodo 4). De esta manera, el nuevo nodo actual es el nodo 6 y queda $Q = \{6\}$

Paso 4: Aún queda un elemento, por lo que se continúa con una nueva iteración:

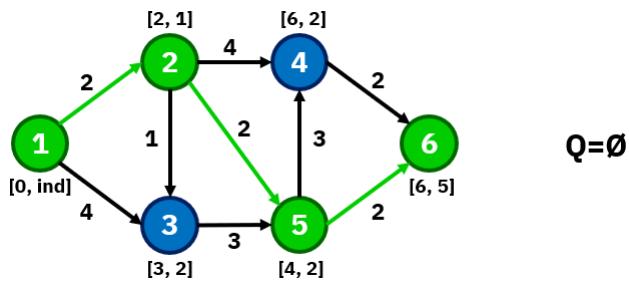
Iteración 5:

Paso 2: Dado que el nodo 6 es el nodo destino y no posee nodos posteriores, no se puede actualizar ninguna etiqueta.



Paso 3: Sólo queda el nodo 4 en Q , por lo que se elimina, pasando a ser el nuevo nodo actual (aunque en esta instancia ya es irrelevante).

Paso 4: No quedan elementos en Q , por lo que con esto el algoritmo ha finalizado. Para identificar la ruta mínima se comienza en el nodo destino, es decir, el nodo 6. Se identifica el predecesor de este nodo: nodo 5. Luego, se revisa el predecesor del nodo 5: nodo 2. A su vez, el predecesor del nodo 2 es el nodo 1, que es el nodo origen. De este modo, la ruta mínima está dada por la secuencia $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.



Para que el algoritmo Dijkstra se pueda implementar, todos los arcos deben tener costo positivo. Si existiera algún arco con costo negativo, la convergencia del algoritmo no está garantizada, ya que puede causar un loop infinito del algoritmo al tratar de minimizar el costo.

Para una red de n nodos, el algoritmo tiene un costo computacional de $O(n^2)$, siendo la operación más costosa para el computador el encontrar la etiqueta de distancia mínima. Sin embargo, mediante ciertas estructuras de datos se puede mejorar el algoritmo para que su costo sea $O(n)$, haciéndolo más eficiente.

Por último, este algoritmo puede extenderse al incluir más condiciones a los arcos, como por ejemplo capacidad máxima de los arcos. Esto se puede realizar agregando más etiquetas a los nodos.

3.4.5. Asignación con congestión

Hasta ahora, los costos de los arcos han sido constantes, es decir, independientemente del nivel del flujo en el arco, el costo sigue siendo el mismo. Este supuesto sugiere dos situaciones: las capacidades de los arcos son muy altas, o bien los niveles de flujo son bajos. Cuando existe congestión, lo natural es que el costo (tiempo de viaje) aumente con el flujo. A continuación, se extenderá el proceso de asignación para el caso con congestión, lo que hará que el problema sea más realista.

Para ello, consideremos la red de la Figura 85, donde se tiene un par O-D con demanda 10 [veh/hr]. Este par O-D tiene dos rutas, cada una compuesta por un único arco: la ruta 1 posee un costo fijo de 10 [min], mientras que la ruta 2 tiene un costo inicial de 5 [min] y aumenta a tasa de 2 [min] por unidad de flujo (en [veh/hr]).

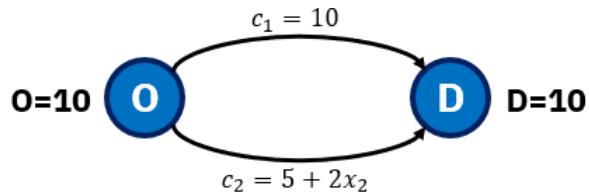


Figura 85: Red de ejemplo con dos rutas entre un par O-D.

El comportamiento racional de los usuarios hace que siempre se viaje por el arco de menor costo, por lo que cuando no hay flujo, la ruta 2 sería la elegida debido a su costo de 5 [min]. Supongamos

ahora que se asigna toda la demanda a ese arco, lo que da un costo de ruta de 25 [min] ¿Tiene sentido esto? La respuesta es que tiene sentido mientras la ruta 2 siga siendo la de costo mínimo.

Lo que ocurre es que al aumentar el flujo de la ruta 2, su costo aumenta y algunos usuarios se cambiarán a la ruta 1, dado que cada usuario va percibiendo costos diferentes al decidir cuál ruta elegir. Este proceso se dará hasta que el costo entre ambas rutas sea el mismo y ningún usuario tenga incentivos para cambiarse. En este caso, se da cuando por la ruta 1 viajen 7.5 [veh/hr] y en la ruta 2 se tenga un flujo de 2.5 [veh/hr].

3.4.6. Primer Principio de Wardrop

El primer principio de Wardrop (Wardrop y Whitehead, 1952) establece las condiciones para que exista **equilibrio en la red**. Esto se traduce en lo siguiente: “*En el equilibrio, todas las rutas que se utilicen (para un determinado par OD) tendrán costos iguales y mínimos, mientras que las rutas no utilizadas tendrán costos mayores o iguales a los utilizadas*”. El planteamiento central de este principio es que ningún usuario puede reducir unilateralmente sus costos mediante un cambio de ruta.

Si volvemos al ejemplo de la Figura 78 y modificamos el costo de la ruta 1 a 30, esta ruta quedaría sin utilizarse ya que se puede asignar toda la demanda a la ruta 2 cumpliendo con el principio de Wardrop. En este caso, el costo de la ruta 2 es 25 [min] (mínimo) y el costo de la ruta no utilizada es 30 [min] (mayor que las rutas utilizadas).

Este principio puede ser formulado como un teorema: Sea un conjunto de flujos en rutas F (que implica un flujo en arcos X) que constituye un estado de equilibrio de usuarios y supongamos que existe el siguiente ordenamiento $\{1, 2, \dots, r, r+1, \dots, s\}$ con respecto a los costos de estas rutas (en función de todos los flujos).

$$c_1(F) = c_2(F) = \dots = c_r(F) \leq c_p(F), (p = r+1, r+2, \dots, s)$$

Esto implica lo siguiente con respecto a los flujos:

$$f_p \geq 0, (p = 1, 2, 3, \dots, r)$$

$$f_p = 0, (p = r+1, r+2, \dots, s)$$

Por tanto, las condiciones que aseguran el equilibrio pueden expresarse como: Para todo par O-D (i, j) , sea P^{ij} el conjunto de rutas que une el par:

$$c_p = c^{ij*}, \forall p \in P^{ij} : f_p > 0$$

$$c_p \geq c^{ij*}, \forall p \in P^{ij} : f_p = 0$$

con c^{ij*} el costo observado en el equilibrio para el par (i, j) .

Análogamente, se pueden agrupar ambas ecuaciones en la siguiente fórmula:

$$f_p \cdot (c_p(F) - c^{ij*}) = 0$$

$$c_p(F) - c^{ij*} \geq 0$$

Si la ruta se usa ($f_p > 0$), entonces el costo de la ruta debe ser igual al costo en equilibrio del par. Por otro lado, si la ruta no es usada, $f_p = 0$ y la igualdad se cumple en ambos casos.

Por lo tanto, si volvemos al ejemplo de la Figura 78, al igualar los costos de ambas rutas se tiene que los flujos de equilibrio son: $(x_1, x_2) = (7.5, 2.5)$, de esta manera los usuarios no tienen incentivos para cambiarse, por lo que estamos en un equilibrio.

Flujos Negativos

Supongamos por un momento que ahora se tiene una demanda de 1 [veh/hr]. Al imponer la igualdad de costos entre rutas se tienen las siguientes ecuaciones:

$$c_1 = c_2$$

$$\implies 10 = 5 + 2 \cdot x_2$$

Por otro lado, los flujos en ruta para un par O-D deben sumar la demanda en dicho par O-D. Recordando que en este caso cada ruta está compuesta por un único arco, se tiene:

$$f_1 + f_2 = 1$$

$$\implies x_1 + x_2 = 1$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene como resultado $(x_1, x_2) = (-1.5, 2.5)$. Se observa que en la ruta 1 se obtuvo un flujo negativo: este resultado no tiene sentido físico, pero indica que aunque nadie utilice dicha ruta, sigue siendo más costosa que la ruta 2. Por lo tanto, para este nivel de demanda la ruta 1 no se utiliza, es decir, $x_1 = 0$. Luego, teniendo en consideración esta condición se calculan nuevamente los flujos en arco:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

$$c_1 = 10 \quad c_2 = 7$$

Costo Total del Sistema

Consideremos nuevamente el problema de la FIgura 78 con demanda de 10 [veh/hr]. Ahora veamos qué ocurre con los costos totales del sistema.

$$CT = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 = 10 \cdot 7.5 + 10 \cdot 2.5 = 100 \text{ [min]}$$

¿Puede ocurrir que con otra asignación el costo total del sistema sea menor? La respuesta es sí: no siempre la solución de equilibrio es la de menor costo total. Para mostrar esto, supongamos que

cambiamos los flujos de equilibrio a $(x_1, x_2) = (8, 2)$, en este caso los costos totales son:

$$CT = c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 = 10 \cdot 8 + 9 \cdot 2 = 98 \text{ [min]}$$

Como se mencionó anteriormente, esta asignación no corresponde a la de equilibrio, pero sí presenta un costo total menor, por lo que se puede afirmar que no siempre la asignación de equilibrio no es óptima socialmente hablando. Aún así, en la realidad la asignación que se tiene es la de equilibrio, dado que todas las decisiones de los usuarios son tomadas maximizando su beneficio personal.

En los problemas de transporte, resulta de especial interés la asignación que minimice el costo total del sistema. Esto motiva lo que se conoce como el segundo principio de Wardrop.

3.4.7. Segundo Principio de Wardrop

El segundo principio de Wardrop (Wardrop y Whitehead, 1952) presenta las condiciones para las cuales se encuentra la **asignación óptima del sistema**, es decir, la asignación de mínimo costo. Se dice que la estructura de flujos en arcos $\{x_a\}$ es óptima si el costo total asociado a ésta estructura es mínimo. El segundo principio de Wardrop plantea lo siguiente: “*Se obtiene la estructura de flujos óptima cuando los costos marginales de todas las rutas utilizadas (para un determinado par O-D) son iguales y mínimos, mientras que las rutas no utilizadas tendrán costos marginales mayores o iguales.*”

La gran diferencia con el primer principio de Wardrop es que los usuarios deben percibir el costo marginal en lugar de costos medios. Si no existe congestión, ambos principios son equivalentes.

Recordemos que el costo marginal se define como el costo adicional que genera un usuario extra al sistema. El costo marginal de un arco a viene dado por:

$$cmg_a = \frac{\partial(c_a \cdot f_a)}{\partial f_a} \implies cmg_a = c_a + \frac{\partial c_a}{\partial f_a} c_a$$

En la unidad de Teoría de la Circulación se discutió sobre la expresión obtenida para el costo marginal de un arco a : el primer término es el costo que percibe el usuario adicional, mientras que el segundo corresponde al costo extra que genera al resto de los usuarios del sistema.

El costo marginal de una ruta p es igual a la suma de los costos marginales de los arcos que componen dicha ruta, es decir:

$$cmg_p = \sum_a cmg_a \cdot \delta_{ap}$$

donde δ_{ap} es el factor de incidencia: vale 1 si el arco a pertenece a la ruta p y 0 si no.

Utilicemos nuevamente el ejemplo de la Figura 78. Calculemos la asignación que entrega el

óptimo social, teniendo en consideración que los costos marginales vienen dados por:

$$cmg_1 = 10 \quad cmg_2 = 5 + 4 \cdot x_2$$

Igualando los costos en las rutas, tenemos la siguiente asignación óptima $(x_1^*, x_2^*) = (8.75, 1.25)$. Luego, el costo mínimo del sistema es el siguiente:

$$CT = 10 \cdot 8.75 + (5 + 2 \cdot 1.25) \cdot 1.25 = 96.875$$

Por lo tanto, si se impusiera de alguna forma la asignación óptima se podría disminuir el costo total o “ahorrar” 3.125 [min] al sistema. Esta diferencia de costos se conoce como **“costo de la anarquía”**, que es el costo que se podría ahorrar el sistema si los usuarios no decidieran en base a su beneficio individual. En este caso:

$$CA = 100 - 96.875$$

3.4.8. Paradoja de Braess

En una red de transporte, existen casos en que al agregar un arco al sistema o al aumentar la capacidad de uno ya existente, los usuarios tarden más tiempo en viajar desde un origen a un destino. Del mismo modo, quitar un arco existente o reducir su capacidad puede mejorar la situación global. Esto se conoce como **paradoja de Braess**, en honor al matemático Dietrich Braess, quien fue el primero en postular esta afirmación. Para explicar esta paradoja, veamos un ejemplo:

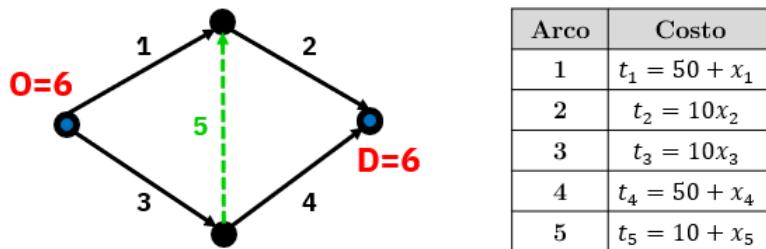


Figura 86: Ejemplo paradoja de Braess

Inicialmente la red tiene cuatro arcos. Se pueden identificar dos rutas: $1 \rightarrow 2$ y $3 \rightarrow 4$. Al ser un problema simétrico en términos de costo, se obtienen flujos iguales en ambas rutas. Luego, el vector de flujos en el equilibrio es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 3, 3)$, con un costo de 83 [min] por ruta y un costo total de 498 [min].

Veamos que sucede cuando se agrega el arco 5 (línea punteada en verde). Ahora se cuentan con tres rutas: $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 4$ y adicionalmente $3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$. Al calcular el equilibrio se tienen flujos iguales para las 3 rutas, dados $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 4, 4, 2, 2)$, generando que todos los tiempos de viaje en ruta sean iguales a 92 [min] y un costo total de 552 [min].

De esta manera, se observa que se han invertido recursos en construir una nueva ruta, pero el resultado de esta inversión es que todos los usuarios están peor que antes, es decir, los usuarios estarían mejor al dejar la red como estaba en un principio. La razón por la cual se produce esta paradoja es que los usuarios sólo buscan reducir su propio tiempo de viaje, sin pensar en el impacto que causan en el sistema.

3.4.9. Tarificación por congestión

Recordemos que en la mayoría de los casos — siempre que exista congestión — hay una diferencia entre el equilibrio de usuario (EU) y el óptimo del sistema (OS). Sabemos que OS minimiza el costo total, pero lo que se manifiesta naturalmente en la realidad es EU. A partir de esto, la pregunta que surge es ¿De qué manera lograr inducir que la asignación sea la del OS? Para ello, los usuarios deben percibir el costo marginal en lugar del costo medio al momento de usar las rutas. Como no se pueden cambiar los tiempos de viaje, la opción más utilizada es la de **tarificar los arcos**, es decir, cobrar una tarifa por su uso. De esta manera, la tarifa para cada arco viene dada por:

$$\$_i = VST(tmg_i(x_i^*) - tme_i(x_i^*))$$

donde x_i^* es el flujo en el arco i al resolver OS. Ambos tiempos se deben evaluar en este flujo, ya que es la asignación que se quiere inducir en el sistema. Además, esta diferencia se multiplica por el valor subjetivo del tiempo para traducir esta diferencia de tiempo a dinero.

Esta situación se ve frecuentemente en las autopistas, donde las tarifas se cobran para inducir ciertas asignaciones de viajes y no siempre para recaudar dinero. Esto hace que los usuarios internalicen las externalidades que generan al sistema dada su asignación EU y la congestión que generan.

Volvamos al ejemplo de la Figura 85. La Figura 87 muestra un gráfico de tiempos en función de los flujos en las dos rutas de la red, donde las curvas azules corresponden a los tiempos medios y las curvas rojas a los tiempos marginales. De izquierda a derecha aumenta el flujo de la ruta 1 y de derecha a izquierda aumenta el flujo de la ruta 2, siempre teniendo en consideración que ambos flujos deben sumar la Demanda del sistema.

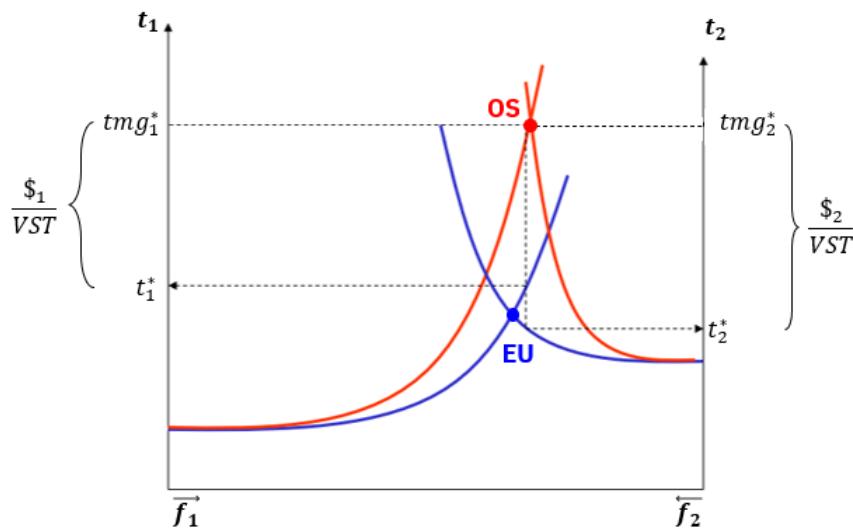


Figura 87: Funciones tiempo-flujo para la red de la Figura 85.

En la figura, EU se da en la intersección de ambas curvas azules, que es dónde se igualan los tiempos medios de cada ruta. Del mismo modo, OS se da en la intersección de las curvas rojas. Los tiempos medios evaluados en el flujo del óptimo social se muestran en el gráfico como t_1^* y como t_2^* para las rutas 1 y 2 respectivamente. Además, la diferencia entre el punto de equilibrio para OS y las curvas de tiempos medios para cada arco es igual a t_i/VST : esta medida representa la diferencia entre tiempo marginal y tiempo medio que debe ser cubierta a través de la tarifa en cada arco.

Si bien esta forma de tarificación se da en la realidad, tarificar cada arco con un pórtico o peaje es demasiado costoso de implementar. Una estrategia práctica de tarificación es la realizada en ciudades grandes como Londres, Singapur y Estocolmo. En el caso particular de Londres, se optó por tarificar la entrada al centro de la ciudad. Este cobro se realiza mediante cámaras y se realizaba posterior al ingreso a la zona demarcada. En la Figura 88 se muestra la zona a la cuál se tarificó su ingreso, como una forma de inducir el óptimo social en el sistema.



Figura 88: Sistema de tarificación en Londres ^a

^a Fuente. Wikimedia Commons

Algunas medidas sobre la implementación fueron:

- Implementación época de vacaciones, dónde el tráfico era un 10 % menor.
- Horario de cobro entre 7:00 AM y 6:30 PM, abarcando gran parte de la jornada laboral.
- Tarifa diaria de 5 libras (aprox. 8 dólares). Este cobro se realiza una vez por día a los vehículos que ingresan o se estacionan en la zona demarcada.
- Están exentos de pago: buses públicos, taxis, vehículos de emergencia y para personas en situación de discapacidad.
- Los residentes de la zona pagan un 10 % del total, y no incluye si los vehículos se estacionan en zonas residenciales.
- Modos de pago: internet, teléfono o presencial.
- Pago anticipado o 24 horas posteriores al ingreso.

Los resultados fueron que efectivamente disminuyó la congestión en la zona, acompañado de un fortalecimiento en el transporte público, dado que lo recaudado por la medida fue invertido en potenciar este modo de transporte.

Existen otras medidas que nos ayudan a percibir los costos marginales, por ejemplo se puede determinar un límite de vehículos que circulen en un día. También se pueden otorgar derechos de circulación para utilizar el automóvil ciertos días a la semana, limitando así los niveles de flujos en la Ciudad y un nivel de congestión óptimo. Si una persona quiere tener derechos durante más días a la semana, puede comprarlos a otra persona, manteniendo así los flujos.

Otra medida puede ser el realizar vías exclusivas para buses de transporte público, en donde exista fiscalización mediante cámaras. Este tipo de medidas es tanto o más eficiente socialmente que la tarificación por congestión. Además, tiene la ventaja de que no requiere la recaudación de

dinero como se mencionó en las medidas anteriores.

3.4.10. Algoritmo de Asignación Incremental

Este algoritmo nos permite encontrar EU y OS para distintos tipos de red, especialmente para las más complejas y no pueden ser resueltas con los métodos convencionales; aún así, este algoritmo es uno de los más simples que existen. El algoritmo consiste en dividir la demanda en porciones y luego ir asignando cada porción a la ruta de menor costo en cada iteración. La asignación de la porción se realiza mediante la asignación todo o nada: se asigna todo el flujo de la iteración a la ruta de costo mínimo, que puede ser escogida mediante el algoritmo Dijkstra.

Formalmente, el algoritmo es el siguiente:

1. Se inicializan todos los flujos en arcos en 0, es decir, $x_a = 0 \forall a$. Por lo tanto, los costos en arcos son $c_a(0)$. En esta etapa también se determinan las particiones de demanda $\{p_n\}$ que se irán asignando en cada iteración n . Se debe cumplir que: $\sum_n p_n = 1$
2. Se construye el árbol de mínimo costo para cada par O-D. Esto se puede realizar mediante el algoritmo Dijkstra, utilizando los costos actuales de cada arco.
3. Asignar $T_n = p_n \cdot T$, donde T es la demanda total entre cada par O-D. Esta asignación se realiza mediante la asignación todo o nada, obteniendo un vector de flujos en arcos $\{x_a^n\}$. Por lo tanto, el nuevo flujo es $x_a^n = x_a^{n-1} + x_a$
4. Se calculan los costos correspondientes a los nuevos flujos calculados en el paso anterior. De esta manera, se tiene $c_a^n = c_a(x_a^n)$.
5. Si se han asignado todas las porciones de T , se detiene el algoritmo, sino, volver al Paso 2.

La precisión de este algoritmo depende de que tan pequeña sea la partición elegida: mientras menores sean las particiones, más preciso será el método. El costo computacional que puede tener implementar este algoritmo depende netamente del tamaño de la red que se esté utilizando, pero si la red es suficientemente grande, el costo computacional puede crecer a gran velocidad.

Se deja propuesto realizar el ejercicio de la Figura 89, donde se sugiere dividir la demanda en 5 partes iguales para realizar el algoritmo.

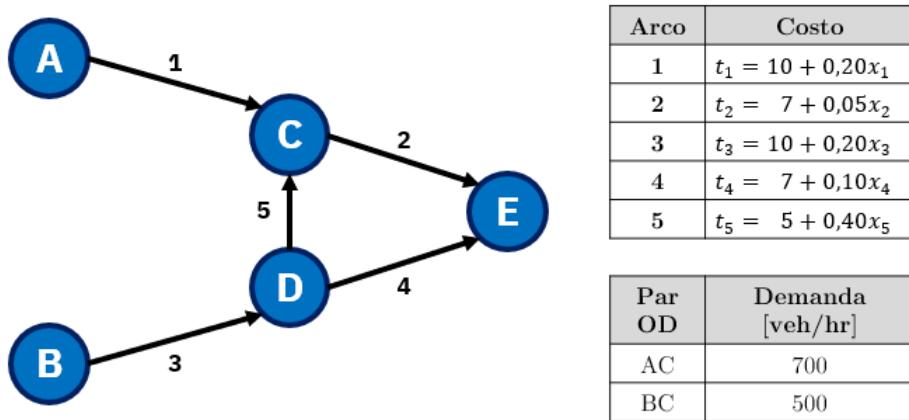


Figura 89: Red del ejercicio propuesto.

3.4.11. Problema de Optimización Equivalente (P.O.E.)

Alternativamente, el problema de asignación se puede resolver analíticamente resolviendo un problema de optimización, que resulta equivalente a las condiciones establecidas en el primer principio de Wardrop en el caso EU, o al segundo principio de Wardrop en el caso OS.

El problema de optimización equivalente se plantea gracias a lo que se denomina **transformada de Beckman**, lo que entrega la siguiente función objetivo que se busca minimizar:

$$Z = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(x) dx$$

Donde c_a representa el costo en el arco a y depende solamente del flujo en ese arco. Por lo tanto, las funciones de costo cumplen las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial c_a}{\partial x_a} \geq 0 \quad \frac{\partial c_a}{\partial x_b} = 0, \forall b \neq a$$

Además, el problema de optimización equivalente debe cumplir las siguientes restricciones:

$$V_{ij} = \sum_{r^{ij}} f_r$$

$$x_a = \sum_p \delta_{ap} \cdot f_p$$

Estas dos restricciones garantizan que la demanda total por par O-D se reparta en las rutas correspondientes y que los flujos en arcos sean la suma de los flujos en rutas que pasan por ellos. De esta manera, el problema de optimización equivalente (P.O.E.) es el siguiente:

$$\min Z = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & \sum_{p \in P^{ij}} f_p = V_{ij} \quad \forall (i, j) \\ & x_a = \sum_p f_p \cdot \delta_{ap} \quad \forall a \in A \\ & f_p \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este P.O.E. reproduce las condiciones del primer principio de Wardrop. Es decir, el vector de flujos en arcos F que resuelve este problema cumple con la siguiente condición:

$$f_p \cdot (c_p(F) - c^{ij*}) = 0$$

$$c_p(F) - c^{ij*} \geq 0$$

Esto implica que todas las rutas usadas (con flujo $f_p > 0$) que unen cada par ij , tienen el mismo costo ($c_p(F) = c^{ij*}$), y aquellas rutas no usadas ($f_p = 0$) tienen un flujo mayor o igual a c^{ij*} .

La demostración de este resultado (en este curso) sólo se hará de manera intuitiva, gráficamente. Más adelante, en el curso *Redes de Transporte* se resolverá formalmente éste y otros problemas de asignación a redes.

Para tener la intuición de por qué el P.O.E. resuelve el problema, notemos que la Transformada de Beckmann representa la suma de las áreas bajo las curvas de costos en función del flujo, es decir, se busca minimizar esta suma. Consideraremos la red de la Figura 78, pero con una demanda genérica V_{OD} : la representación de las curvas de costos también son genéricas como se ve en la Figura 90.

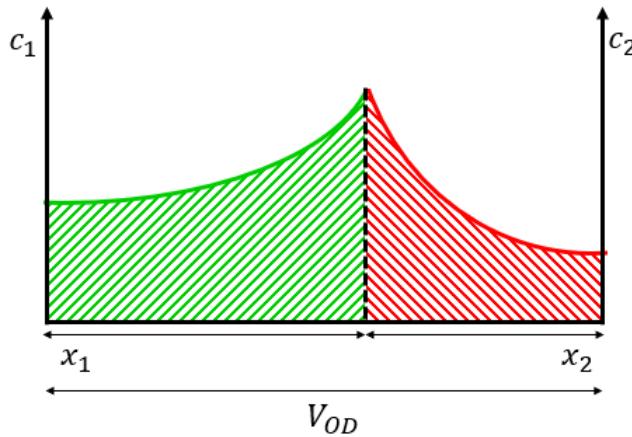


Figura 90: Curvas de costos para un par O-D con dos arcos (rutas).

Notemos que en un punto cualquiera donde se de una combinación de x_1 y x_2 , la suma de las áreas de los costos viene dada por como se ve en la Figura 83. ¿En qué punto esa área se minimiza? La respuesta es cuando ambos costos son iguales, ya que en ese punto no sobrará nada por sobre ninguna de las dos curvas. Así, gráficamente se tiene la demostración de que la solución del P.O.E reproduce el EU. La solución del problema es única cuando existe congestión en los arcos, y solamente funciona con flujos en arcos, no así con flujos en ruta.

Por otro lado, para calcular el Óptimo Social (OS), solo basta cambiar la función objetivo: se deben reemplazar los costos medios por costos marginales y todo el resto del P.O.E permanece igual. La demostración de la equivalencia es análoga. Queda propuesto demostrar que el P.O.E para el caso OS es equivalente a minimizar el costo total del sistema.

La demostración formal de que el problema de optimización equivalente (P.O.E.) detallado anteriormente tiene solución única a nivel de flujos en arcos y que se traduce en una asignación que cumple con el primer o segundo principio de wardrop se verá en el curso *Redes de Transporte*. El lector interesado puede adelantar los detalles revisando el muy buen libro del profesor Yossi Sheffi (Sheffi, 1985).

La formulación de P.O.E. indicado al principio de esta sección es infactible en una red densa real, como la de una ciudad grande como Santiago, porque sus restricciones implican enumerar todas las rutas disponibles en cada par O.D. Sin embargo, dado que el problema tiene solución única a nivel de flujos en arcos, y que esa solución debe cumplir con las restricciones de continuidad de flujo, se colige que se alcanzará la misma solución si se formula un P.O.E que tiene como función objetivo la transformada de Beckman y como restricciones las condiciones de continuidad de flujos. **Este es el P.O.E. que se resuelve en la práctica.**

$$\min Z = \sum_a \int_0^{x_a} c_a(x) dx$$

s.a.

$$\sum_{j \in A(i)} x_{ij} = \sum_{j \in B(i)} x_{ji} \text{ nodo } i \text{ transferencia}$$

$$\sum_{j \in A(i)} x_{ij} = O_i \quad \sum_{i \in B(j)} x_{ij} = D_j \text{ nodo } i \text{ centroide}$$

$$x_{ij} := x_a \geq 0$$

De esta manera, un P.O.E. que considere restricciones de continuidad de flujo tendrá una complejidad que aumenta con el número de nodos N , haciéndolo factible, a la vez que permite representar apropiadamente el equilibrio de usuarios o de sistema en el sistema, dando cuenta de todas las rutas disponibles en cada par OD y del comportamiento de los usuarios.

Finalmente, una mención a la manera en que los resultados del modelo de asignación se incorporan al modelo de partición modal (y luego distribución). Una componente principal del nivel de servicio que es relevante para la elección del modo auto, corresponde al tiempo de viaje que las personas experimentan en la situación de equilibrio. Dado eso, bajo el principio de Wardrop, todas las rutas usadas en cada par OD habrán alcanzado el mismo costo, y las no usadas tendrán un costo mayor. Luego, para determinar el tiempo de viaje de equilibrio (para usar en el modelo de partición modal) bastará con determinar la ruta mínima (e.g. usando Dijkstra) entre cada par OD usando la solución de equilibrio obtenida del P.O.E.

3.4.12. Demanda Variable

En los casos anteriores, la matriz de viajes era inelástica (fija). Ahora, se extenderá lo visto en las secciones anteriores al caso en dónde la demanda de un par O-D es elástica o variable. Esta variación depende principalmente del nivel de servicio (c_{ij}^*) de las rutas que unen ese par, por lo que ahora se tendrá una oferta (nivel de servicio) y una demanda. Por lo tanto, se debe encontrar el equilibrio en la red y simultáneamente un equilibrio en el mercado entre oferta y demanda.

Estos dos equilibrios se muestran gráficamente en la Figura 91. En ella, se presentan las curvas de tiempo de dos rutas para un mismo par O-D. La curva de costo de la ruta 1 tiene un menor costo fijo, pero crece más rápidamente, por lo cual para cierto nivel de flujo tiene un mayor costo que la ruta 2. La curva de oferta se construye sumando horizontalmente ambas curvas de flujo-demora.

La curva de oferta se forma así dado que en un principio cuando el flujo es pequeño, los usuarios viajarán por la ruta de menor costo fijo, que sería la ruta 1. A medida que crece el flujo esto sigue de la misma forma hasta que el tiempo en la ruta 1 es igual al tiempo de flujo libre en la ruta 2: aquí el flujo se comienza a repartir en ambas rutas, manteniendo los tiempos de viaje en ambas rutas iguales. Entonces, cuando ambas rutas se empiezan a usar, el flujo total para un determinado tiempo t es la suma de los flujos por ambas rutas, por lo que es intuitiva la suma horizontal de ambas curvas para formar una única curva de oferta. Debido a lo anterior, la tasa de crecimiento de la curva de oferta es mucho menor a la de ambas curvas separadas.

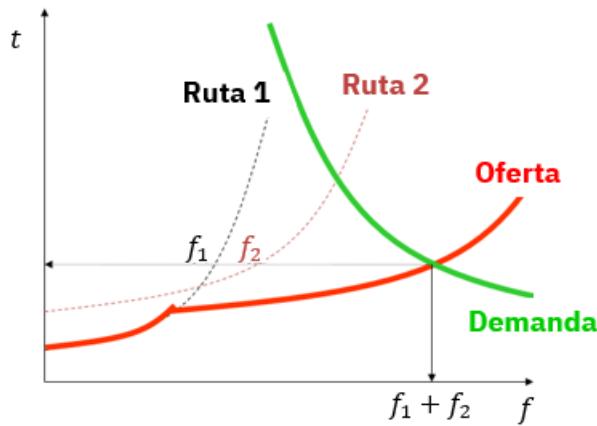


Figura 91: Oferta y demanda para una red

Por su parte, la curva de demanda es variable y depende del tiempo de viaje en las rutas para el par O-D. Notemos que el tiempo de viaje aumenta con el flujo y, por lo tanto, disminuye la demanda. Evidentemente, el equilibrio se da cuando las curvas de demanda y oferta se intersectan.

Para simplificar esta explicación usemos un ejemplo: consideremos la red de la Figura 82, con los mismos tiempos presentados, pero con una demanda variable en el par BC , dada por $f(x)$. Existe solo una ruta que satisface el par AC : 1-2, mientras que para el par BC existen dos: 3-4

(ruta a) y 3-5-2 (ruta b). Se tienen las siguientes relaciones entre flujos en arcos y flujos en ruta.

$$x_1 = 700 \quad x_2 = 700 + f_b \quad x_3 = f_a + f_b = T \quad x_4 = f_a \quad x_5 = f_b$$

donde T es la suma del flujo de las rutas a y b , es decir, la demanda del par BC .

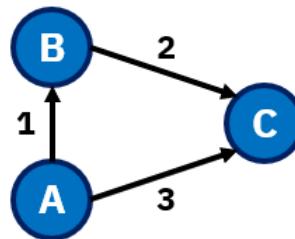
¿Qué ocurre si $T = 0$? En tal caso se tendría el siguiente vector de flujos $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (700, 700, 0, 0, 0)$, con tiempos para cada arco $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (150, 42, 10, 7, 5)$. Por lo tanto, cuando no existe demanda entre B y C se tiene que los tiempos de las rutas a y b son $(t_a, t_b) = (17, 57)$. Esto implica que a medida que aumenta la demanda en el par, el flujo se asignará en la ruta a dado su menor costo.

De esta manera, la curva de oferta está dada solamente por el costo de la ruta $b : t = 17 + 0.3 \cdot T$. El flujo se asignará a esta ruta hasta que su costo iguale el costo de la ruta a , es decir, cuando $t_a = t_b$; esto se da cuando $T = 400$. Cuando T supere este valor, el flujo se asignará a ambas rutas, manteniendo que sus costos sean iguales.

3.4.13. Problemas propuestos

Problema 1

Considere la siguiente red de transporte. Para una demanda de $AC = 100$ y $BC = 100$, y considerando que el VST es único e igual a 10 [\$/min], determine las tarifas que permitirían minimizar el consumo de tiempo en el sistema.



Los costos de los arcos son de la forma $t_i(x_i) = a_i + b_i x_i$. La siguiente tabla contiene los valores de cada función de costo.

Arco	Constante	Pendiente
1	30	1
2	10	1
3	30	1

Indicación: Antes de resolver de la forma usual, inspeccione las soluciones factibles.

Problema 2

Considere la siguiente matriz de adyacencia y su correspondiente matriz de costos:

Matriz de Adyacencia

Nodo	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1
4	1	1	1	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0

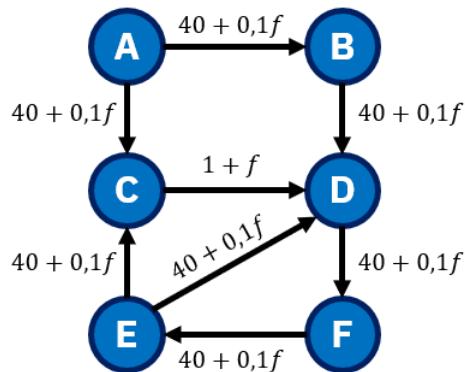
Matriz de Costos

Nodo	1	2	3	4	5	6
1	0	12	4	10	0	0
2	12	0	0	3	2	0
3	4	0	0	3	0	2
4	10	3	3	0	2	5
5	0	2	0	2	0	1
6	0	0	0	0	0	0

- (a) Dibuje la red resultante.
- (b) Aplique el algoritmo del Dijkstra para encontrar las rutas mínimas entre el nodo 1 y todos los demás nodos de la red. Al finalizar muestre gráficamente su respuesta.

Problema 3

En una comuna rural en la que se ha observado congestión, y cuya red se sintetiza en la figura, el alcalde ha propuesto cobrar en la principal arteria (arco CD) un peaje de \$500 a todo aquel que lo utilice. Suponga que le han pedido a usted, como analista de sistemas de transporte que analice la medida en términos sólo de los tiempos consumidos en la red. Indique cuál sería su opinión, y con qué resultados concretos (numéricos) la apoyaría. No es necesario que resuelva el problema de optimización equivalente o los sistemas de ecuaciones, sólo que los deje expresados con detalle.

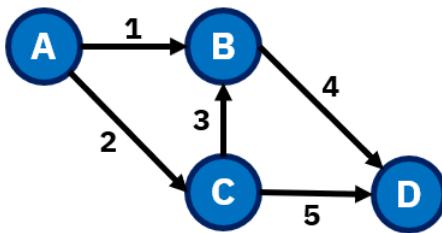


Información Adicional:

- VST=20 [\$/min]
- Demanda: A-F: 50 [veh/hr], E-D: 50 [veh/hr]
- La función que aparece en los arcos indica tiempo [min] en función del flujo.

Problema 4

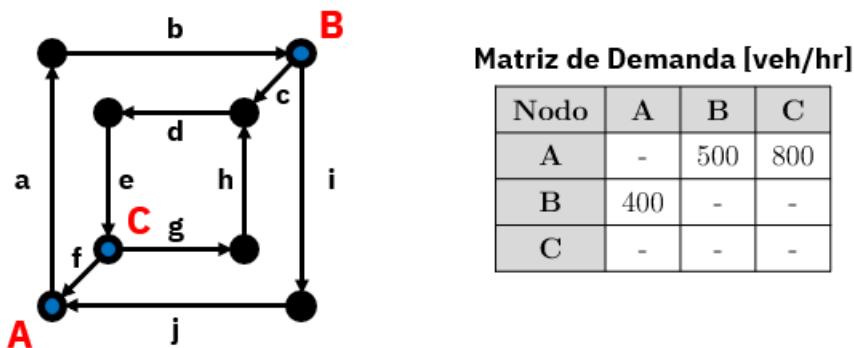
Considere la siguiente red:



- Descomponga la red en dos sub-redes ABC y CBD. Escriba las condiciones de equilibrio para las sub-redes y la red completa, considerando demandas entre todos los pares de nodos que se pueden unir con la red.
- Demuestre que para cualquier matriz de demanda entre nodos y cualquier función de costos en arcos, tales que todos los arcos están ocupados, basta que ambas sub-redes estén en equilibrio de Wardrop para que la red completa lo esté.
- Verifique si la demostración de b) es válida cuando la condición de ocupación del arco 3 no se cumple.

Problema 5

En la red de la figura, se ha decidido cobrar por el uso de las vías, de forma de hacer más eficiente el sistema. Un analista dice que cobrando sólo en el arco de acceso al anillo central, es posible lograr imponer el óptimo del sistema. Verifique numéricamente esa afirmación.



Considere $VST=20[\$/min]$ y las siguientes funciones tiempo [min] – flujo [veh/hr]:

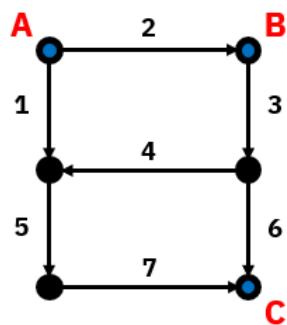
- Para arcos del anillo exterior: $t = 20 + 0,01 \cdot f$
- Para arcos del anillo interior: $t = 2 + 0,02 \cdot f$
- Para arcos diagonales: $t = 2 + 0,01 \cdot f$

Problema 6

Explique como aplicaría el método de asignación incremental para determinar el equilibrio en la red del problema anterior. Realice la primera iteración del algoritmo, indicando detalladamente cada paso, incluyendo los correspondientes al sub-algoritmo Dijkstra.

Problema 7

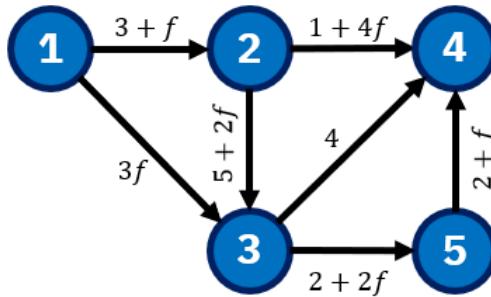
Para una demanda $V_{AC} = 1000$ [veh/hr] y $V_{BC} = 1000$ [veh/hr], determine la tarifa mínima por arco que permite que el sistema representado en la figura sea ocupado de forma tal que se minimice el consumo de recursos. Suponga que $VST = 82$ [\$/seg] y las funciones de costo medio por arco son lineales en el flujo respectivo [veh/hr] y se expresan en [s].



Arco	Constante	Pendiente
1	100	5
2	100	5
3	10	5
4	10	1
5	10	1
6	10	1
7	100	5

Problema 8

Considere la siguiente red dirigida que se presenta en la figura, donde se muestran las funciones de costo medio de los arcos en función de su flujo. Para la matriz de viajes, se tienen los siguientes flujos: $V_{15} = 100$ [veh/hr], $V_{14} = 400$ [veh/hr], $V_{34} = 700$ [veh/hr], y valores nulos para los pares O-D restantes.



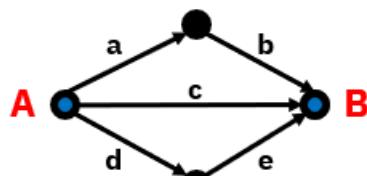
- Escriba explícitamente un problema de programación matemática que permita encontrar el equilibrio de usuarios para esta red y demandas. Explicite las variables de decisión, función objetivo y restricciones del problema.
- ¿Qué cambios haría al problema presentado en (a) para que la solución entregara el óptimo de sistema? Escriba sólo aquellos términos que cambien.

Problema 9

- (a) ¿Qué conclusión obtiene usted de la paradoja de Braess?
- (b) ¿Cuáles son los supuestos del principio de equilibrio de Wardrop?

Problema 10

Para la red de la figura:

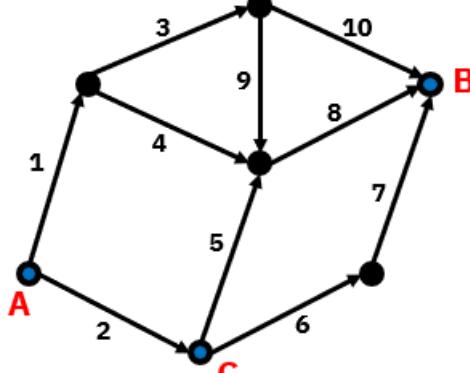


Arco	Constante	Pendiente
a	10	0,1
b	20	0,2
c	20	0,2
d	10	0,1
e	30	0,2

- (a) Encuentre el equilibrio del usuario para un flujo de A a B igual a 32 [veh/min].
- (b) Encuentra el flujo óptimo del sistema.
- (c) ¿Cuál es la tarifa que se debe cobrar en esta red para que óptimo del sistema se produzca en forma espontánea?

Problema 11

Para la red representada por la siguiente figura, encuentre la asignación de los usuarios a al red y calcule cuál es la cantidad máxima de tiempo que podría ahorrarse en el sistema si la asignación se hiciera de otra forma. Considere que las funciones de costo medio de los arcos son lineales y están descritas por los siguientes parámetros detallados a continuación. Suponga además que la matriz de viajes es $q_{AB} = 5000$ y $q_{AC} = 2000$.



Arco	Constante	Pendiente
1	10	0,02
2	20	100
3	20	0,01
4	5	0,01
5	10	100
6	10	0,2
7	60	0,5
8	50	0,03
9	10	0,05
10	5	0,2

4. Noción de Equilibrio en Sistemas de Transporte

4.1. Síntesis Modelo Clásico de Transporte

Para comenzar esta unidad, se hará una breve síntesis del modelo clásico de transporte de 4 (5) etapas estudiado durante este curso. Recordemos que este modelo está compuesto por las siguientes etapas:

- **Uso de Suelo:** Se determina la localización de hogares y firmas para la realización de diferentes actividades: residencia, trabajo, comercio, educación, etc.
- **Generación-Atracción:** Se estima la cantidad de viajes generados y atraídos en cada zona, a través de métodos como el factor de crecimiento, regresión lineal o análisis por categorías.
- **Distribución:** Se calcula la cantidad de viajes entre cada par O-D, formando una matriz de viajes. En esta etapa se utilizan los modelos de factor de crecimiento, gravitacional y maximización de la entropía.
- **Partición Modal:** Se calcula la cantidad de viajes realizados en los diferentes modos de transporte, mediante el uso de métodos como el Logit Multinomial.
- **Asignación a la Red:** Los viajes en un modo se asignan a las rutas disponibles para cada par O-D. Con esto, se obtiene el flujo en las vías.

La Figura 92 muestra las relaciones entre las etapas, de manera secuencial, hacia abajo:

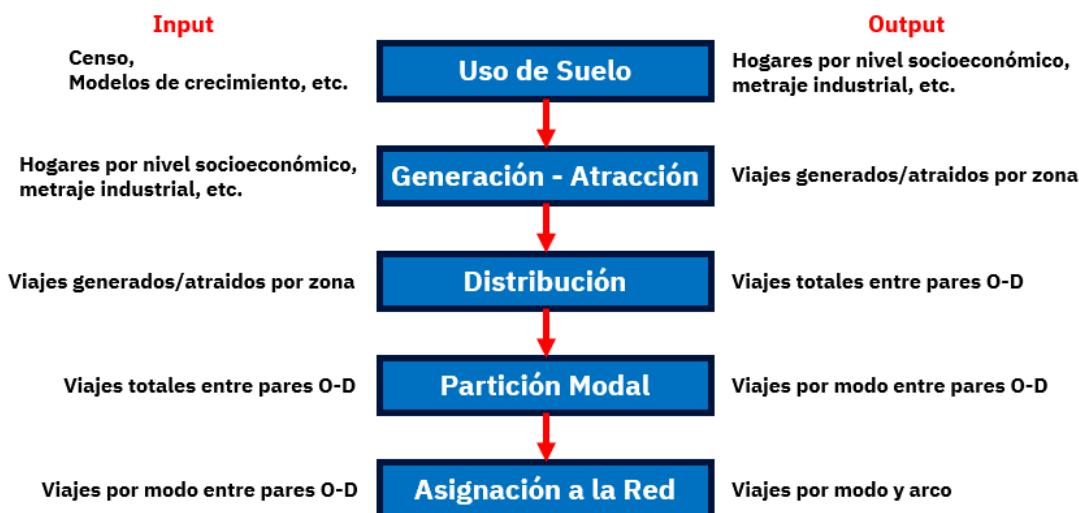


Figura 92: Relaciones entre las etapas del Modelo Clásico de Transporte (hacia abajo).

Es necesario recordar que en cada etapa hay parámetros que en un principio se asumen exógenos, pero que se calculan en las etapas siguientes. En general, el nivel de servicio que se usa en las etapas de distribución y partición modal se obtiene en la etapa de asignación. La figura 93 muestra en detalle estas relaciones:

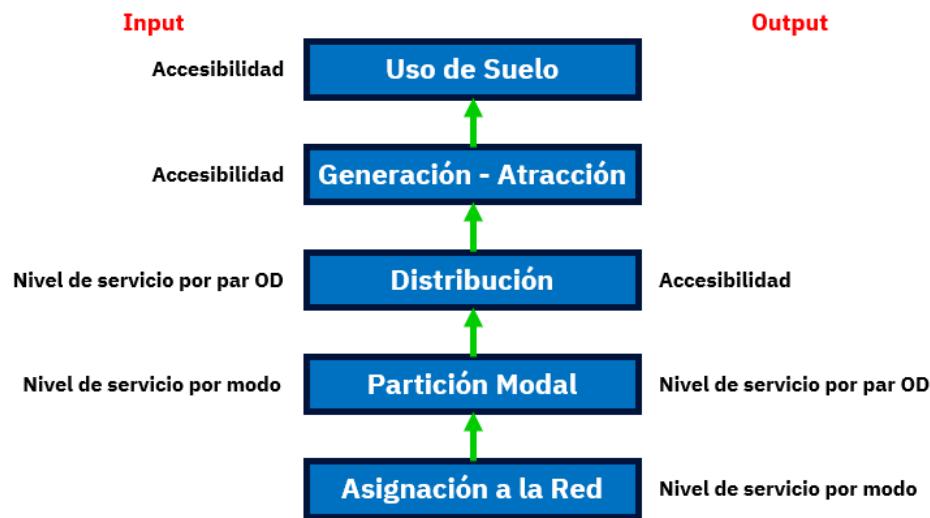


Figura 93: Relaciones entre las etapas (flujo arriba)

Los modelos más corrientes resuelven secuencialmente cada una de las etapas del modelo clásico de transporte, es decir, se resuelve una etapa completa antes de pasar a la siguiente. Este enfoque es adecuado si es que no hay congestión: si es que hay congestión importante, en general no se obtiene una solución de equilibrio de mercado usando el enfoque secuencial. Esto se debe a que los niveles de servicio considerados no son consistentes con los que se obtienen finalmente. Es posible realizar iteraciones del modelo (con los niveles de servicio obtenidos, se vuelve a hacer el modelo de distribución en adelante), pero la convergencia no está garantizada. Un modelo como ESTRAUS (Sectra, 2003) resuelve el equilibrio de manera simultánea, garantizando la consistencia entre etapas. La Figura 94 muestra el esquema de las formulaciones secuencial y simultánea.

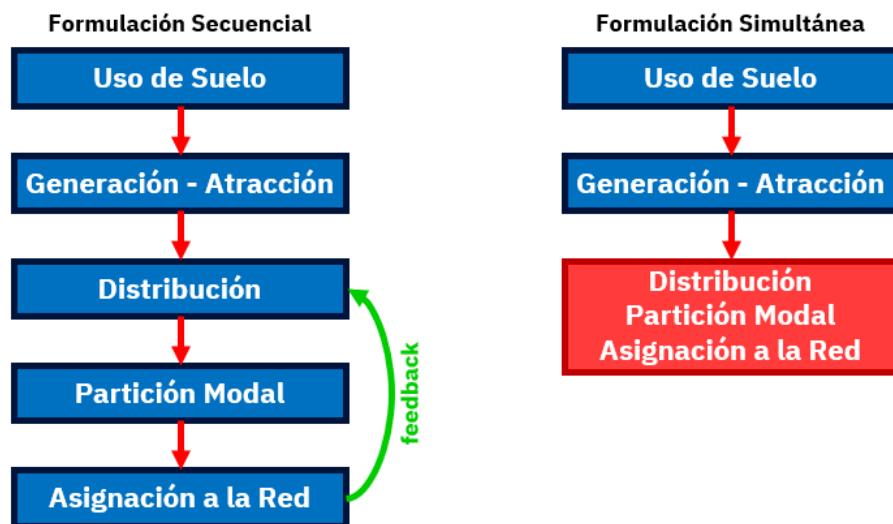


Figura 94: Formulación secuencial y simultánea del modelo de 4(5) etapas.

4.2. Equilibrio Multimodal: Paradoja de Down-Thomson

El equilibrio multimodal se analizará en el caso más básico, en el que existen 2 modos de transporte: transporte público (TP) y transporte privado (automóvil). Además, existe una red con solamente un arco, en dónde existe una demanda inelástica Y . La Figura 95 muestra un gráfico donde el eje X representa la demanda total, la cuál se divide en Y_{TP} e Y_{AUTO} , mientras que en los ejes verticales se muestra el costo unitario por usuario de utilizar cada modo.

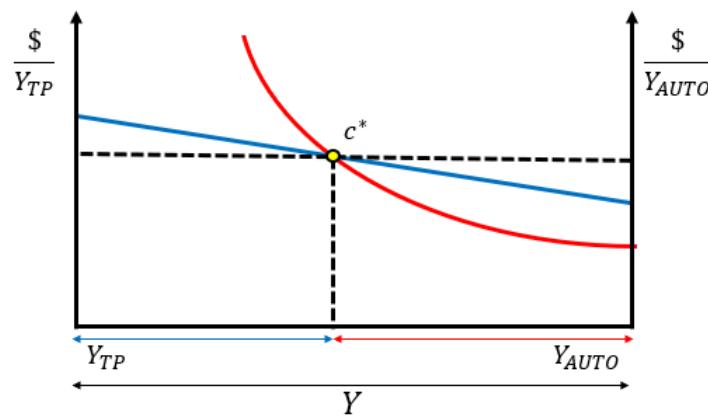


Figura 95: Relación entre la demanda por cada modo y su costo social (incluye costos de usuarios y de operadores) unitario por usuario.

La demanda por transporte privado sigue la curva vista en secciones anteriores. Por su parte, en el transporte público se espera un alto costo unitario cuando hay pocos usuarios, tanto para operadores como usuarios: si se decide invertir para mejorar el nivel de servicio el sistema es costoso por usuario, mientras que si se opta por reducir gastos de operación se tienen altos tiempos de espera. Sin embargo, el transporte público presenta economías de escala: a medida que aumentan los usuarios, el costo unitario disminuye. De esta manera, la curva de costos unitarios en transporte público presenta una pendiente negativa.

El equilibrio entre estas dos curvas indica cuantos usuarios viajan en transporte público y cuantos viajan en transporte privado, además del costo de equilibrio c^* . Este punto indica el óptimo social, dado que se tienen los mínimos costos totales entre ambos modos.

Consideremos una mejora en la infraestructura de transporte privado sin mejorar el transporte público, por ejemplo, la construcción de una autopista. ¿Qué ocurre con el equilibrio? La Figura 89 esquematiza esta situación. Como el costo de viajar en auto disminuye, la curva de transporte privado baja, desplazando el equilibrio a la izquierda: el flujo en transporte privado aumenta y el de transporte público disminuye. En esta situación, es más costoso viajar en ambos modos ($c_2^* > c_1^*$): en general, cuando se realizan proyectos que solo benefician al transporte privado, en el equilibrio de mediano-largo plazo, todos los usuarios aumentan sus costos de transporte, pasando a un punto de bienestar social menor. Este fenómeno se conoce como **Paradoja de Mogridge** o de Down-Thompson (Mogridge, Holden, Bird, y Terzis, 1987).

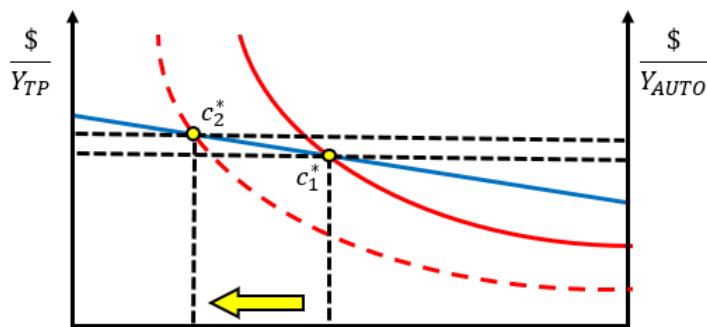


Figura 96: Nuevo equilibrio dada una mejora para transporte privado.

Este efecto se observa en Santiago, exceptuando por el detalle de que los usuarios de transporte público (en su mayoría) son **usuarios cautivos**, es decir, no pueden cambiarse a transporte privado aunque quisieran y están obligados a viajar en transporte público. Esto se debe mayoritariamente a que no tienen el poder adquisitivo como para cambiarse de modo de transporte.

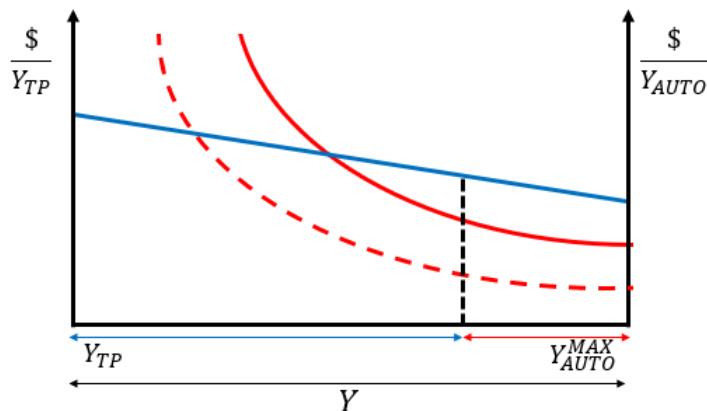


Figura 97: Equilibrio con usuarios cautivos de transporte público.

En este caso, existe una cantidad máxima de usuarios de transporte privado Y_{AUTO}^{MAX} , ya que no existe más gente con automóvil, por lo que es imposible que exista una mayor demanda. Sin embargo, en la Figura 90 se observa que el equilibrio entre transporte público y privado está a la izquierda de la demanda máxima, lo cuál no puede ocurrir ¿qué ocurre en la realidad? Los costos disminuyen fuertemente para los usuarios de transporte privado en comparación a los de transporte público. En el largo plazo, al aumentar el ingreso promedio en la ciudad, la tasa de motorización también aumenta y la demanda máxima por automóvil se desplaza hacia la izquierda. Lentamente, el equilibrio irá desplazándose hacia la izquierda y se tendrá la situación antes discutida en que todos los usuarios estaban peor antes de que empezara a aumentar la tasa de motorización.

Por el contrario, si se realiza una inversión para mejorar sólo la infraestructura de transporte público, la curva de costos de transporte público baja. Así, el nuevo equilibrio se desplaza hacia la derecha, aumentando la demanda en transporte público y disminuyendo la de transporte privado.

Además, los costos de ambos modos se reducen, disminuyendo el costo social total. Algunos ejemplos de inversión son: mejora de buses, aumento de pistas sólo bus, creación de líneas de metro, etc.

En Vancouver, se hizo un estudio sobre los costos sociales para el usuario en un tramo de 5 [km] considerando 4 modos de transporte; transporte público, automóvil, caminata y bicicleta.

La idea del estudio es mostrar cuáles modos son más eficientes socialmente. En el costo percibido por el usuario se concentran distintos tipos de costos, tales como costos de operación (bencina, seguro, etc), tiempo de viaje, riesgo de accidente, etc. En el caso de la bicicleta y caminata, el usuario también percibe ganancias, tales como salud y mayor expectativa de vida al hacer ejercicio.

Si se analiza el costo para la sociedad, también se toman en consideración distintos costos: emisiones, infraestructura utilizada, contaminación acústica y el riesgo de un accidente. Por otro lado, los distintos modos de transporte ofrecen un aporte a la sociedad, a través tarifas, peajes, impuestos, mantener la salud del sistema, y productividad al realizar ejercicio.

El costo social del transporte público es mucho menor que el del automóvil, sin embargo, el costo percibido es un poco mayor en el caso de los buses, por lo que existe una distorsión en el mercado. Esto implica que los usuarios prefieren utilizar automóvil dado que el costo percibido es menor.

Un estudio semejante se realizó en nuestro país, pero solo tomando en consideración las emisiones de CO_2 dependiendo del modo de transporte. Los resultados se muestran en la Figura 98.

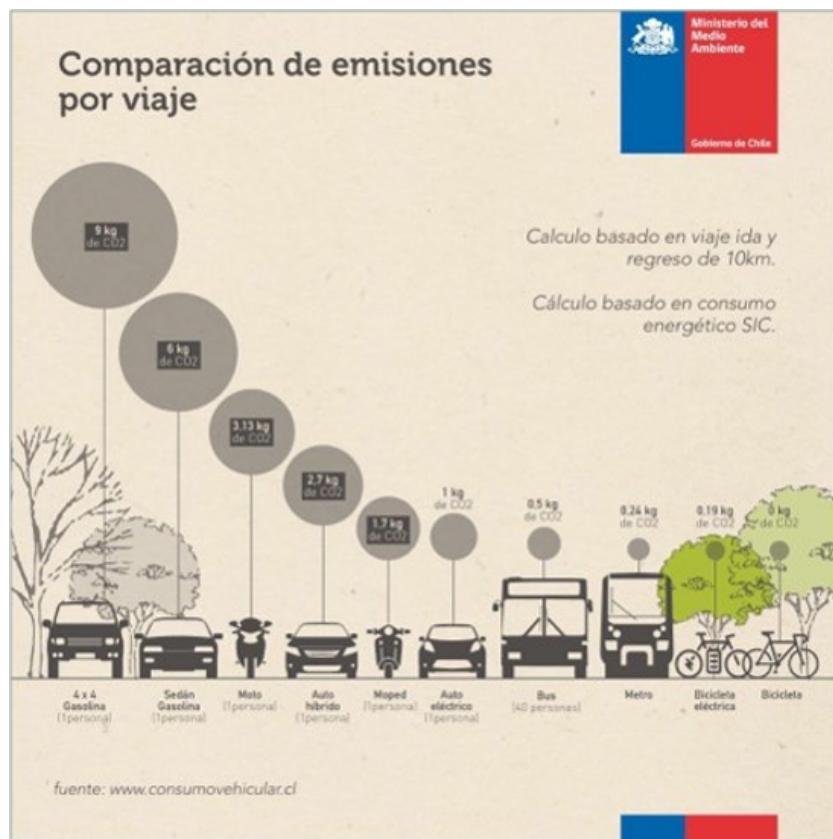


Figura 98: Emisiones por viaje en cada modo de transporte. ^a

^a Fuente: www.consumovehicular.cl

Se hace evidente la gran diferencia en emisiones entre los vehículos privados motorizados (camionetas, automóviles, motocicletas), con el transporte público: notemos que esta medida es para un mismo viaje pero realizada por persona. Esto deja en evidencia una vez más que las inversiones en infraestructura para transporte privado no son socialmente eficientes, y ese dinero podría invertirse en otras demandas sociales.

En la última Encuesta de Transporte Público (1997) se obtuvo que el 71 % de los usuarios de transporte público no tiene automóvil, el 24 % tiene un auto en el hogar, un 4 % tiene dos autos en el hogar, mientras que un 1 % tiene tres o más autos en el hogar. En la actualidad, la tasa de motorización va en aumento, disminuyendo el porcentaje de usuarios cautivos del transporte público, lo que ha provocado mayor congestión general, independiente del modo de transporte utilizado.

Dado el análisis anterior, nos interesa ver qué ocurre con la paradoja de Mogridge si se consideran los costos marginales en vez de costos medios. La Figura 99 muestra lo que ocurre al respecto, donde las líneas continuas representan los costos medios y las líneas punteadas los costos marginales. Dado que los costos medios del transporte público son decrecientes, la curva de costos marginales va por debajo de los costos medios; mientras que para el transporte privado la curva de costos

marginales va por encima.

El punto E corresponde al equilibrio para costos medios, mientras que el punto T corresponde al nuevo punto de equilibrio si se percibieran los costos marginales en vez de los costos medios. Este nuevo equilibrio implica que los costos para ambos modos de transporte es menor (por separado) y por lo tanto el costo total social es menor. Así mismo, más gente viajará en transporte público que en transporte privado.

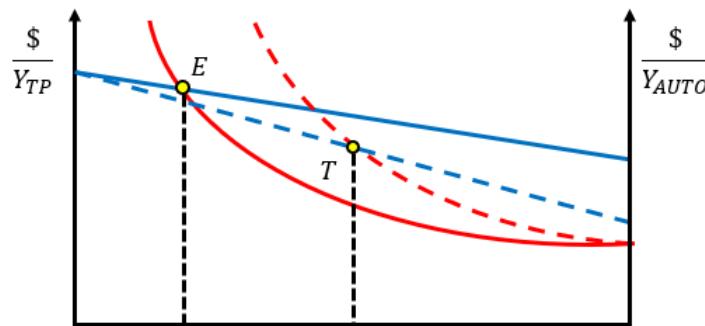


Figura 99: Paradoja de Mogridge con costos marginales.

Se deja como propuesto ver el impacto de las siguientes medidas de políticas públicas en transporte, de acuerdo a lo visto en la Paradoja de Mogridge.

- Vías exclusivas para buses de transporte público.
- Vías reversibles para automóviles.
- Restricciones vehiculares.

4.3. Mirada al sistema global

Al mirar el sistema de manera global, la visión tradicional indica que la capacidad no está creciendo al mismo ritmo que el crecimiento del uso de vehículos, por lo cual se tiene un déficit de infraestructura. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto: como se vio en la paradoja de Mogridge, realizar mejoras a la infraestructura para el transporte privado no es lo más adecuado, ya que la situación a la que se llega es peor a la actual. Es por ello que se necesita financiar incentivos para la utilización de otros medios de transporte, algunas de estas medidas son la priorización de los buses mediante publicidad o infraestructura, implementar trenes de superficie, construcción de ciclovías, ensanchamiento de veredas y aumentar las áreas peatonales.

Con estas medidas, no se busca aumentar la capacidad, sino que asignar los recursos disponibles al uso de modos de transporte más eficientes socialmente. Sin embargo, puede surgir la duda de si realmente es factible reducir la capacidad de las vías. Si se considerara que la demanda de automóviles es constante y se reduce la capacidad, la demanda se reasignará hacia otras rutas, causando más congestión y posterior caos. Dado que la demanda en la realidad no es constante, existen cambios de modo y sumado a la paradoja de Mogridge, la reasignación de viajes debiese ser un equilibrio que es más eficiente para todos los usuarios. Existe evidencia empírica en las que se han demolido autopistas, algunas ciudades en los que ha ocurrido son:

- Río de Janeiro - Brasil: En 2014, se demolieron autopistas para recuperar espacios urbanos y armonía con el paisaje. La Figura 100 muestra dicho proceso.
- Seúl - Corea del Sur: Se demolieron autopistas para recuperar un río, el cuál fue intervenido públicamente, formándolo en un espacio libre de impacto ambiental y muy concurrido y festejado por los habitantes. La Figura 101 muestra el antes y el después.
- San Francisco - EEUU: Un terremoto dañó una autopista aérea, decidiendo su demolición. La Figura 102 muestra el antes y después.



Figura 100: Demolición de una autopista sobre nivel en Río de Janeiro.



Figura 101: Parque Cheonggyecheon, luego de demoler la autopista.



Figura 102: Autopista antes del terremoto y el espacio recuperado después de la demolición, transformándolo en un espacio público.

En todos los casos se demostró que el impacto en el sistema de transporte fue casi nulo, sobre todo para los automovilistas, debido a su gran ineficiencia como modo de transporte. Las mejoras para la sociedad van acompañadas de un cambio de modo al transporte público y gracias a esto una mejora en el mismo.

4.4. Desarrollo sustentable

El desarrollo sustentable es aquel que permite “*satisfacer las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones de satisfacer sus necesidades*” (Comisión Brundtland de la ONU, 1987). En el caso del transporte la vinculación más directa tiene que ver con la congestión: al desarrollar una ciudad en la cuál el principal modo de transporte es el automóvil se consume toda la capacidad de la ciudad y se genera mayor contaminación, lo cuál dista mucho de la sustentabilidad que se quiere lograr. Otro tema relacionado con la sustentabilidad hace referencia a la dimensión económica: si se relaciona a la ciudad centrada en el automóvil, el alto costo en el desarrollo de autopistas se cubre con el pago de todos sus usuarios (por ejemplo, TAG). Por lo tanto, subsidiar modos que no son suficientemente eficientes no conlleva a un desarrollo sustentable.

Pero entonces ¿Qué se entiende como transporte sustentable? El transporte sustentable es aquel que permite que las necesidades de movilidad de los individuos y el transporte de carga sean satisfechas de forma acorde a la salud humana y de los ecosistemas, sin comprometer el derecho de las futuras generaciones a satisfacer sus propias necesidades. Así mismo, un sistema de transporte sustentable promueve el desarrollo social, el desarrollo económico, el crecimiento regional balanceado, y limita sus emisiones y residuos dentro de la capacidad del planeta para absorberlos.

Esto significa que el sistema de transporte se debe orientar a la no producción de emisiones, las cuales ponen en riesgo a las generaciones futuras. También significa que el sistema de transporte debe preservar el espacio público para que la ciudad siga funcionando. Tampoco se debe hipotecar la economía, en el sentido de que se estanque dada el nulo desarrollo que se le pueda dar al transporte en un futuro.

Hay que tener en cuenta que las inversiones en transporte son de un alto nivel financiero, por lo que se debe ser cuidadoso y responsable a la hora de no comprometer el desarrollo económico futuro, evitar generar deudas que opaquen los beneficios generados por la implementación del proyecto. Es por esto que el análisis de sustentabilidad en transporte incluye: el medio utilizado o intervenido (tierra, mar o aire) y la infraestructura (puertos, aeropuertos, vías camineras y férreas).

5. Carga

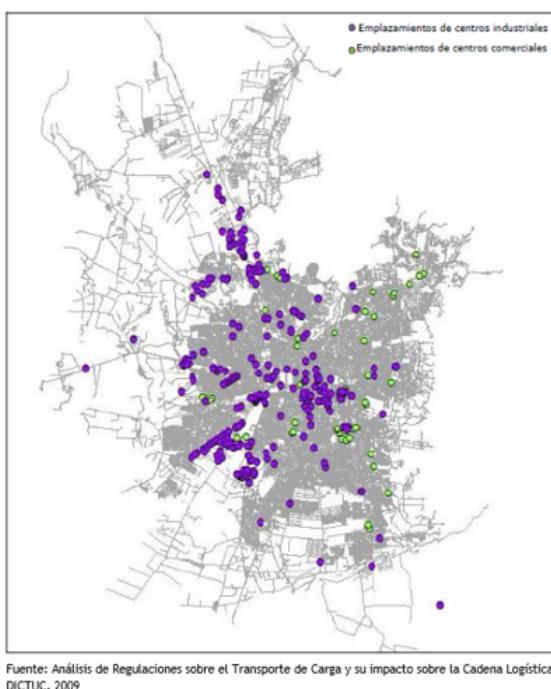
5.1. Introducción

Este curso se centra principalmente en el transporte de personas pero, por supuesto, la movilidad la carga es también un aspecto fundamental en el análisis de sistemas de transporte. Es el transporte de insumos y productos lo que hace factible el funcionamiento de la economía, en el amplio sentido de la palabra y, además, el transporte de carga tiene un impacto importante en la congestión y la emisión de gases de efecto invernadero. En esta sección veremos algunas definiciones fundamentales sobre el transporte de carga y delinearemos los aspectos principales de modelación de la demanda por carga. Todos estos aspectos se verán con mayor profundidad en el curso **Logística y Producción**.

5.2. Definiciones Básicas

Demanda por transporte de Carga es una demanda derivada que se relaciona con los volúmenes de bienes producidos y consumidos en diferentes mercados, tal como se explicaba en la Sección 2.2, cuando vimos el modelo de *Mercados Puntuales*.

En este caso la ubicación de productores y consumidores es critica, además de la relación entre insumos y productos en diferentes mercados. En la Figura 103 se muestra, por ejemplo, la ubicación de centros industriales y comerciales en la ciudad de Santiago, localizaciones que condicionan los flujos de carga que observamos a diario. En este curso no abordaremos el problema de localización de estos centros, pero se verá con cierta profundidad más adelante en el curso de *Logística y Producción*. En general, el flujo de carga que cambiará con la aparición de nuevas fuentes y usos de materiales, nuevas ubicaciones de productores y comercio y nuevos productos y transporte especializado.



Fuente: Análisis de Regulaciones sobre el Transporte de Carga y su impacto sobre la Cadena Logística, DICTUC, 2009

Figura 103: Emplazamiento Oferta y Demanda a por Carga en Santiago

Principales Tipos de Carga

Tal y como para el análisis del transporte de personas éstas se clasificaban por e.g., nivel de ingreso o motorización, en la carga se consideran se consideran habitualmente, al menos, cuatro tipo de carga: Granel, Mercadería General, Carga Especializada, y Paquetes Pequeños.

La carga de Granel considera típicamente Carbón, Petróleo, bencina, Minerales, Arena y Grava y carga agrícola. Este tipo de carga se caracteriza por ser de bajo costo y por ser transportada en grande cantidades, por lo que en este caso el costo de transporte representa la variable de decisión más importante. Los modos más relevantes en este caso son: servicios especiales de tren, camiones pesados, carguero y barcos especializados o tuberías.

Mercadería General Abarrotes de supermercado

Mercadería General Características Alto valor Mayor diversidad Muchos más despachadores y recibidores Costos logísticos tan importantes como costos de transporte Modos relevantes Tren servicio general Intermodal Truckload LTL (Less-than-Truckload)

Carga especializada Automóviles Químicos

Carga Especializada Características Grandes volúmenes pero pocos clientes Requerimientos especiales para reducir el riesgo de perdida y daño Alto valor (vale la pena tratamiento especial) Modos relevantes

Trenes especiales (múltiples niveles, carros tanque, carro de carga pesada) Camiones especializados (porta autos, camiones tanque, vans) Carga aérea

Paquetes pequeños

Paquetes Pequeños

Características Muy alto valor Costos logísticos son mas importantes que costos de transporte Despachos a negocios pequeños o consumidores Modos relevantes LTL (Less-than-Truckload) Servicios de paquetes pequeños Servicios expreso Carga aérea

Indicadores Econométricos

Modelo, tipo de elasticidad	Estimadores de Elasticidad	
	Tren	Camion
Particion modal agregada		
Precio	-0.25 a -0.35	-0.25 a -0.35
Tiempo de viaje	-0.3 a -0.7	-0.3 a -0.7
Modelo agregado de funcion de costo translog		
Precio	-0.37 a -1.16	-0.58 a -1.81
Modelo desagregado de eleccion modal		
Precio	-0.08 a -2.68	-0.04 a -2.97
Tiempo de viaje	-0.07 a -2.33	-0.15 a -0.69

(Levin, 1978) (Friedlaender y Spady, 1980) (Winston, 1981)

Valor de Tiempo (VT) de Carga

	Estimadores de Valor del Tiempo	
	Tren	Camión
(Como porcentaje del valor del envío)	6-21	8-18
Tiempo total de viaje (en días)		

(Winston, 1981)

El valor menor aplica a metales primarios. El valor mas alto aplica a productos perecibles

5.3. Modelamiento de la Oferta y Demanda de Carga

Marco Conceptual

Tal como en el caso de la modelación de viajes de personas existe el Modelo de Cuatro Etapas, en el caso de la modelación de carga existe un marco conceptual que permite representar y modelar la carga utilizando información que está disponible en la práctica. (Cascetta, 2013) describe una posible **Sistema de Modelación de Carga**, que se detalla en la Figura 104, en la que en color negro se detallan los datos disponibles y generados y, en color verde, se detallan las componentes del modelo.

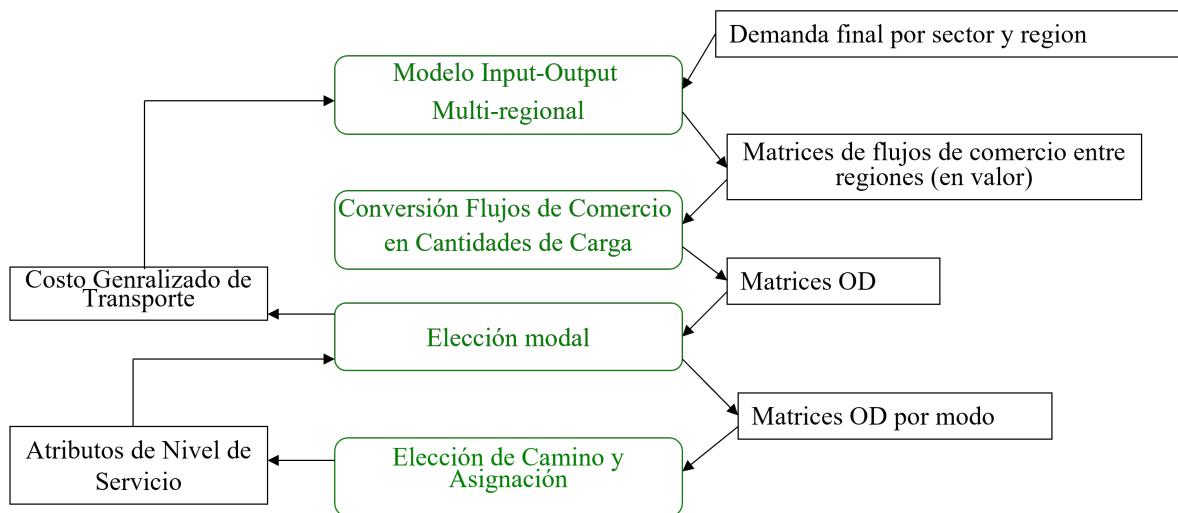


Figura 104: Sistema de Modelación de Carga (Cascetta, 2013)

En este caso, en vez de empezar el sistema de modelación de una encuesta origen destino como se hacía en el caso de viajes de personas, la información disponible a nivel agregado corresponde a la **Demandra Final por Sector y Región**. Esto se obtiene principalmente del Banco Central, institución registra estos gastos en su proceso de análisis de *cuentas nacionales*. Hay que destacar que esta información se refiere a gastos, es decir, está en pesos. Se debe destacar que, dada que naturaleza de los datos que originan este modelo es a nivel **regional**, el modelo solo puede utilizarse en ese ámbito, no dentro de una ciudad.

A nivel urbano, se hace algo equivalente, pero las matrices OD se pueden amar a partir de información de localización como la de la Figura 101, estimación de totales regionales y mediciones de flujos en terreno. En muchos casos, la modelación se reduce a construir una matriz de flujo por modo en base a datos observados, la que se proyecta con métodos como Furness , y luego se utiliza para restar capacidad en las redes de transporte privado

Esta información de demanda por sector y región es luego utilizada en un **Modelo Input-Output (Insumo producto) Multi-Regional**. El modelo de Input-Output o insumo-producto fue desarrollado por (Leontief, 1986). Este modelo analiza la interdependencia y realiza un balance de dinero entre las diferentes industrias de la economía, mostrando como el producto de una industria es el insumo de la otra. El modelo insumo producto utiliza información del costo generalizado de transporte, en el mismo sentido que se ocupaba en el modelo de distribución en el modelo clásico de cuatro etapas, haciendo más probable que los insumos y productos se intercambien entre industrias que están más cerca.

El resultado del modelo insumo producto, aplicado en este contexto, es una *matriz de flujo de comercio entre regiones*, expresada en términos de dinero. El paso siguiente corresponde a un modelo que transforma la matriz de flujos de comercio en cantidades de carga, principalmente, usando información de precios de cada producto involucrado. El resultado de este modelo es, entonces, una **matriz origen destino de cantidades de carga**, por ejemplo, toneladas de fruta que se mueve entre la región de O'Higgins y Santiago.

Luego, y de manera similar al modelo de cuatro etapas descrito en las secciones anteriores, la matriz origen destino se divide en matrices por modo, donde en este caso el modo no solo corresponde a alternativas como camión o tren, sino también, aspectos como tipo de embarque (TL o LTL), tipos de empaque, y otras opciones de consolidación y combinaciones.

Decisiones Logísticas

6. Evaluación Social de Proyectos de Transporte

6.1. Marco Regulatorio

Todo proyecto de inversión pública en Chile (por ejemplo, una nueva línea de metro o una carretera) debe demostrar en el Sistema Nacional de Inversiones (SNI) que es socialmente rentable. Esto significa simplemente probar que el dinero invertido, que costó tanto recolectar (por ejemplo el del 19 % del IVA a la leche y a los medicamentos), producirá en algún sector de la economía del país beneficios mayores a los costos involucrados.

Si bien la inversión pública alcanza a menos del 20 % de la inversión total del país, es indiscutible que la existencia de un SNI técnicamente competente y con relativa autonomía ha sido un pilar fundamental para el desarrollo de Chile en las últimas décadas, atravesando gobiernos de distintos colores. La razón es que, a diferencia de la inversión privada, botar la plata en un proyecto público no hace quebrar a quienes tomaron la decisión (al revés, usualmente lo beneficia), pero termina hipotecando el futuro del país. Sin el SNI, Chile estaría plagado de *monorrieles magnéticos* inconclusos⁶, mientras aún hay gente viviendo en la extrema pobreza.

El área de transporte es especialmente sensible a estos desafíos, debido a los altos costos de este tipo de proyectos, su rédito político, la complejidad que implica evaluarlos y el largo plazo de sus retornos. Un ejemplo dramático de este problema se sintetiza en la triste historia del expresidente peruano Alan García, quien forjó (y trágicamente concluyó) su carrera política relacionado con costosas obras públicas de transporte. Odebrecht es otro claro ejemplo que nos pasó muy cerca. El SNI es un ejemplo de la importancia de contar con una buena institucionalidad que permite abordar los desafíos del país de manera objetiva, hacer políticas públicas basadas en evidencia.

La evaluación social de proyectos es distinta (y a veces opuesta) a la evaluación privada, que solo se interesa en el beneficio económico de un agente. En el caso de la evaluación social lo que interesa es el impacto de los proyectos en la sociedad como un todo:

- Cuantos recursos ahorra (o invierte mejor) la sociedad en su conjunto.
- Cuánto aumenta el bienestar de la sociedad.

En Chile se evalúa socialmente bajo el marco del Sistema Nacional de Inversiones (SNI). A continuación se muestra una breve reseña histórica de esta entidad:

- **1958:** Primeras incursiones en escuelas de ingeniería.
- **60's:** Institucionalización incipiente de la evaluación de proyectos en el Ministerio de Hacienda.
- **1967:** Se crea ODEPLAN dependiente de CORFO.
- **Inicios de los 70:** ODEPLAN se independiza de CORFO y se da origen a un Sistema de Preinversión. La operación del sistema contempló la creación de la Oficina Central de Evaluación de Proyectos, de Oficinas Regionales y de Unidades de Proyectos en los Ministerios.
- **1990:** Ministerio de Planificación y Cooperación (MIDEPLAN).
- **2012:** Se implementa Ministerio de Desarrollo Social (MDS), continuador de Mideplan.

⁶ ver https://es.wikipedia.org/wiki/Marge_v_s._the_Monorail

La Figura 105 muestra el funcionamiento del SNI:

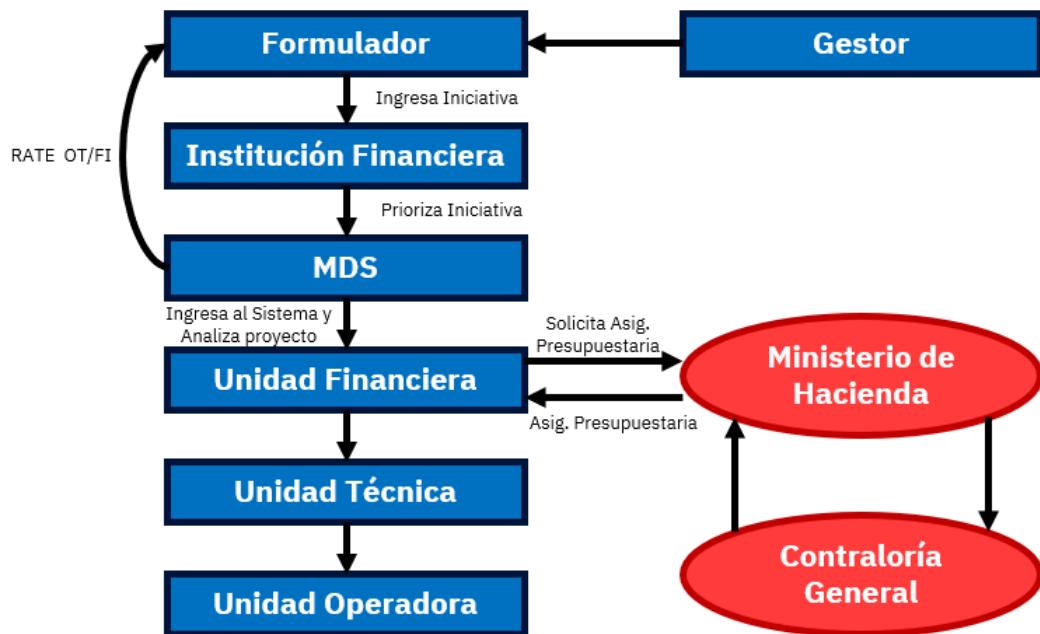


Figura 105: Sistema Nacional de Inversión Pública (SNI)

Un detalle muy importante sobre esta institucionalidad es que el organismo gestor y formulador de un proyecto debe ser diferente del aquél que evalúa la pertinencia del proyecto bajo análisis. Esto es necesario porque no se puede confiar en la imparcialidad de las unidades promotoras o ejecutoras de proyectos, como el MTT o el Ministerio de Obras Públicas (MOP) pues, para decirlo coloquialmente, todo mundo encuentra bonito a su hijo. Eso concluyen, entre otros, (Flyvbjerg, Holm, y Buhl, 2002) en su trabajo *Subestimación de costos en proyectos de obras públicas: ¿error o mentira?*, utilizando evidencia de 258 proyectos de transporte de Estados Unidos. La necesidad de que las agencias que promueven o ejecutan proyectos estén separadas de los departamentos que evalúan su financiamiento público, es la misma por la cual en el sistema de justicia el Ministerio Público (encargado de investigar) está separado de los jueces (que deben tomar una decisión objetiva en base a la evidencia presentada). Toda medida que tienda a fortalecer esta separación de intereses es crucial para el desarrollo del país.

Algunos ejemplos de proyectos de transporte que se pueden evaluar son:

- Construcción de autopistas
- Construcción de una línea de metro
- Medidas de prioridad a buses
- Tarificación por congestión
- Rediseño de intersecciones
- Mejoras peatonales
- Mejoras de seguridad vial

Los beneficios de un proyecto de transporte dependerán de qué es lo que se transportará. Cuando son personas, entonces se tendrá más tiempo libre, habrán más alternativas dónde trabajar, más potenciales interesados en trabajar, y menos accidentes, etc. Cuando son objetos, habrán mejores precios de insumos, mayores ventas y reducción de riesgos de inventario, entre otras cosas.

Ahora, es necesario asegurar de que no se cuente el mismo beneficio dos veces. Esto se puede hacer de las siguientes maneras:

- Uso de medidas económicas intuitivas, como el excedente marshalliano del consumidor.
- Uso de medidas económicas estrictas, como la variación equivalente y variación compensatoria.
- Definir que la demanda por transporte es una demanda derivada.

6.2. Beneficios de transporte usando enfoque de mercados puntuales

Recordemos primero el concepto de **Excedente Marshalliano** que se vió en el curso de Economía. La Figura 106 representa el equilibrio entre oferta y demanda inversa por cierto bien, representado en el punto E a precios p^* .

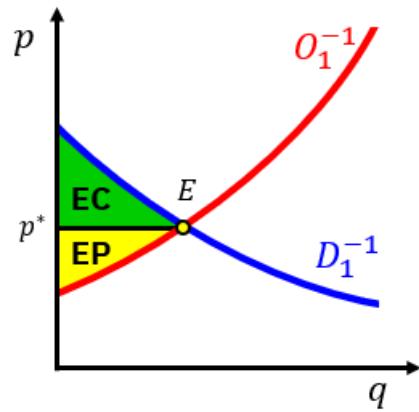


Figura 106: Excedentes de productor y consumidor

El excedente posee dos componentes: excedente del consumidor y excedente del productor. El **excedente del consumidor** viene de reconocer que la función de demanda corresponde a una curva de disposición a pagar por consumir el bien. Esto significa que si el precio de equilibrio es p^* , existen consumidores que adquirieron el producto a ese precio, pero estaban dispuestos a pagar un precio mayor por el bien, por lo que la diferencia entre dicha disposición a pagar y el precio p^* de equilibrio constituye un excedente o beneficio. El marco conceptual general de esta idea para medir el beneficio económico se atribuye a Marshall (Marshall, 1890). Sin embargo, en realidad el primero en establecer esta idea de beneficio fue el ingeniero civil francés Jules Dupuit en 1884, en el marco de la necesidad de evaluar el beneficio de obras públicas de transporte (Dupuit, 1995). También existe el concepto de **excedente del productor** (este sí solo fue planteado por Marshall),

que corresponde a la diferencia entre la curva de oferta (que se entiende como una disposición a "vender") y el precio de equilibrio p^* .

Gráficamente, el excedente es el área entre la curva de oferta o demanda – según corresponda – y el precio de equilibrio, como se muestra en la Figura 106.

En general, para evaluar el impacto del un proyecto que se traduce en un cambio en los precios de un bien, notamos que los consumidores y productores del mercado de dicho bien perciben un beneficio o un perjuicio por dicho cambio, los cuales se miden a través de **variaciones de excedente Marshalliano**.

Volvamos ahora al problema de medir los beneficios de proyectos de transporte en la práctica. Para ello consideremos nuevamente, el problema de la conexión de dos mercados inicialmente aislados, utilizado en la Sección 2.2 para derivar la función de demanda de transporte.

Recordemos que la conexión de los mercados aislados causó que el precio de equilibrio disminuyera en el mercado 1 (caro) y aumentara en el mercado 2 (barato) ¿Quienes ganan y quienes pierden con este cambio? Veamos que ocurre con los excedentes de los agentes en el mercado 1 (Figura 107) y mercado 2 (Figura 108)

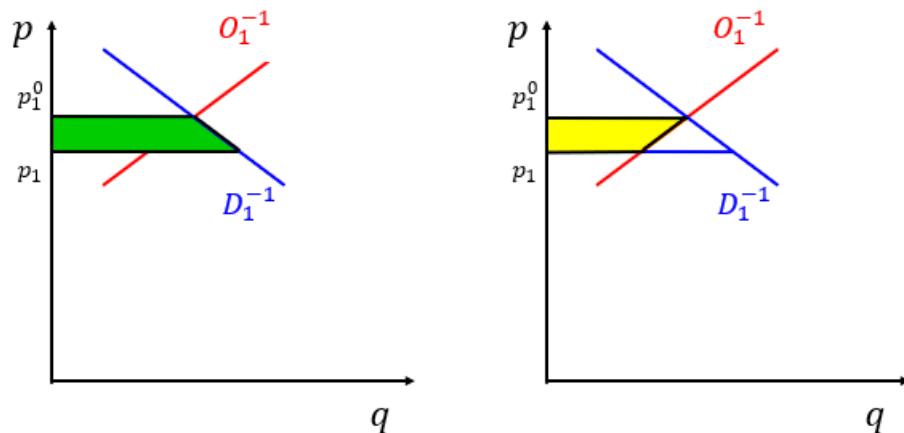


Figura 107: Variación de excedentes en mercado 1

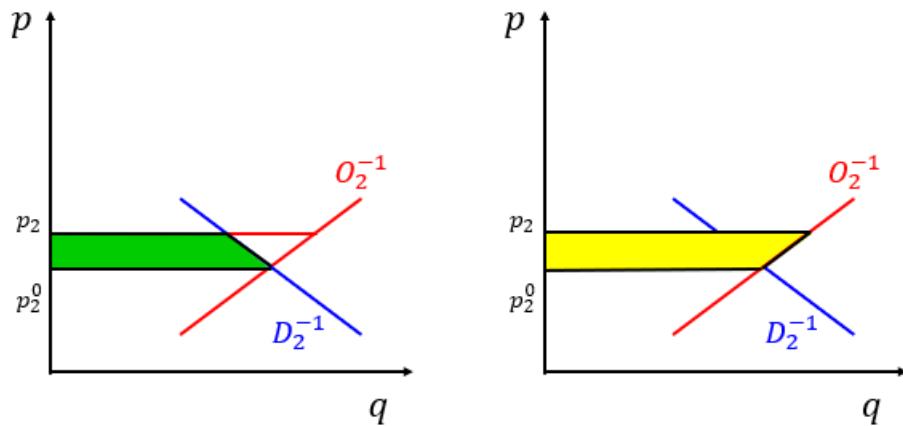


Figura 108: Variación de excedentes en mercado 2

Como se señaló anteriormente, en el mercado 1 se tiene una reducción del precio, por lo cual el excedente de los consumidores aumenta y el de los productores disminuye, es decir, los consumidores se ven beneficiados y los productores perjudicados. Del mismo modo, en el mercado 2 el precio aumenta, por lo que el excedente de los consumidores disminuye y el de los productores aumentan, es decir, en este mercado los consumidores son perjudicados y los productores son beneficiados.

Veamos que sucede en el mercado de transporte. El excedente de los usuarios en este mercado está dado por la siguiente expresión:

$$EU = \int_0^{q^*} p_t(q) dq - q^* t^*$$

donde que q^* es la demanda de transporte para un costo t^* , y t^* es el costo de transporte cuando los precios fijados en los mercados son p_1^* y p_2^* .

La Figura 109 muestra el área correspondiente a este excedente:

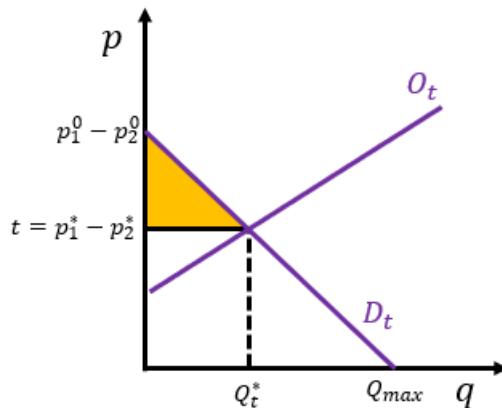


Figura 109: Excedente de usuarios en el gráfico de demanda de transporte.

Reemplazando el valor del costo de transporte y luego separando la integral por términos, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} EU &= \int_0^{q^*} ED_1^{-1}(q)dq - \int_0^{q^*} EO_2^{-1}(q)dq - q^*t^* \\ &= \left[\int_0^{q^*} ED_1^{-1}(q)dq - q^*p_1^* \right] - \left[\int_0^{q^*} EO_2^{-1}(q)dq - q^*p_2^* \right] \end{aligned}$$

Además, recordando que las integrales son las áreas debajo de la curva de una función y considerando la Figura 102, se puede reescribir la fórmula de la siguiente manera:

$$EU = \int_{p_1^*}^{p_1^0} ED_1(p_1)dp_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^*} EO_2(p_2)dp_2$$

Es decir, que el excedente de los usuarios equivale a las áreas demarcadas en la Figura 110:

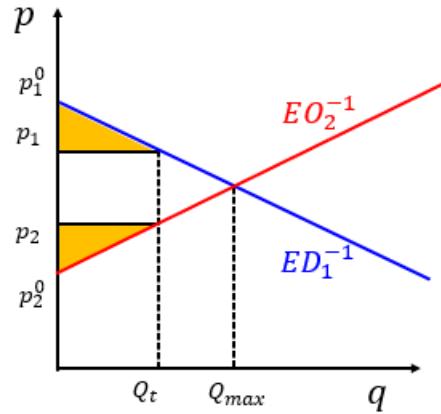


Figura 110: Excedente de usuarios en gráfico de exceso de oferta y demanda.

Recordando la definición de exceso de oferta y demanda, resulta:

$$\begin{aligned} EU &= \int_{p_1^*}^{p_1^0} D_1(p_1)dp_1 - \int_{p_1^*}^{p_1^0} O_1(p_1)dp_1 + \int_{p_2^0}^{p_2^*} O_2(p_2)dp_2 - \int_{p_2^0}^{p_2^*} D_2(p_2)dp_2 \\ &= \Delta EC_1 - \Delta EP_1 + \Delta EP_2 - \Delta EC_2 \end{aligned}$$

Gráficamente, el excedente de los usuarios equivale a la suma de las áreas que se indican en los gráficos de la Figura 111. A partir de este resultado, se puede afirmar que el excedente de los usuarios en el mercado de transporte sintetiza los beneficios netos en el mercado importador y exportador, por lo que no cuenta el mismo beneficio dos veces, que es justamente lo que se buscaba.

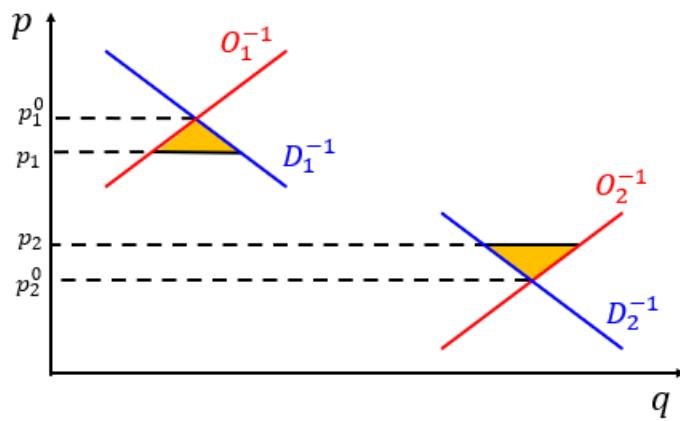


Figura 111: Excedente de los usuarios en gráfico de oferta y demanda.

Este resultado es muy importante porque indica que, para medir el beneficio total y real de un proyecto de transporte, basta con medir el impacto en el mercado de transporte, medir el cambio, e.g., en el tiempo de equilibrio y en la demanda. Esto dará cuenta de todos los beneficios que pudieran derivarse del proyecto, ya sea de personas beneficiadas que viajan al trabajo, o por ocio, entre cualquier par origen destino de la urbe. Más adelante, en el curso **Economía de Transporte** veremos con mucho más detalle las implicaciones de este resultado, además de mayores precisiones sobre cómo medir los beneficios con medidas más precisas que excedente Marshalliano, conocidas como la variación equivalente y la variación compensatoria.

Regla del Medio

La Regla del Medio es una aproximación geométrica de la variación del excedente del consumidor obtenido de un proyecto. Para mostrar en qué consiste, consideremos un proyecto que reduce el tiempo de viaje, mejorando la curva de oferta. La Figura 112 muestra gráficamente esta situación:

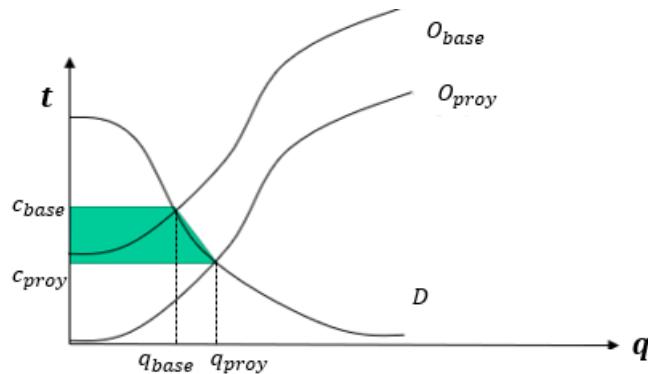


Figura 112: Regla del Medio.

La regla del medio permite calcular la variación del excedente del consumidor como el trapecio que se muestra en la figura, es decir:

$$\Delta EC \approx \frac{1}{2}(q_{proj} + q_{base})(c_{base} - c_{proj})$$

donde el primer término corresponde a los flujos totales promedio de la situación con y sin proyecto; mientras que el segundo término corresponde a la variación del costo total (medido en este caso como el tiempo de viaje).

Con algunos cambios menores, se puede asumir que el error causado al hacer esta aproximación es despreciable, a tal punto que se podría aproximar a 0.

Este resultado es importante porque significa que, por ejemplo, para evaluar el beneficio de un proyecto de transporte basta con aplicar un modelo de clásico de 4 etapas a la situación con y sin proyecto y comparar los equilibrios alcanzados en ambos casos.

6.3. Evaluación de Social de Proyectos de Transporte

Enfoque general

Para evaluar los beneficios sociales de los proyectos de transporte, se debe hacer lo siguiente:

1. Se debe usar un modelo para determinar la demanda y el equilibrio con y sin proyecto.
2. Se cuantifican ahorros de costos (tiempo) derivados del proyecto y valorarlos a precios sociales.
3. Se aplica la “regla del medio” para calcular el beneficio de usuarios en el mercado de transporte. Esto sintetiza los beneficios y costos de todos los mercados involucrados.
4. Finalmente, se descuentan los costos de inversión, operación y otros (accidentes, contaminación, etc.) considerando una “tasa de descuento”.

Los beneficios y costos del proyecto son evaluados en función de sus **precios sociales**, es decir, se usa el valor social del tiempo para traducir el tiempo ahorrado por la población como beneficios. Estos valores sociales pueden variar de caso a caso, por ejemplo, el precio social del cemento está corregido por distorsiones de mercado: puede haber un subsidio estatal, por lo que comprar cemento genera un gasto adicional del Estado al gasto privado y así, el costo social es mayor que el costo privado. El Estado calcula los valores sociales de los insumos y del tiempo año a año. Por ejemplo, en 2020 se considera un VST de 2.327 [\$/hr-pax]; en 2021 este valor es de 2.434 [\$/hr-pax].

También se consideran los beneficios causados por la reducción de accidentes: una persona que no muere en un accidente puede seguir trabajando y beneficiar a la sociedad. El valor social de la vida estadística se estima en 52.000 UF, es decir, el beneficio social de prevenir la muerte de alguien es de 52.000 UF.

¿Qué pasaría si se usara un VST diferenciado por nivel de ingreso en lugar de un VST único? El VST de las personas con mayor ingreso es mayor que el de las personas con menor ingreso, debido a que su tiempo “vale más” económicamente. Así, se priorizarían los proyectos que benefician a las personas de mayor ingreso, ya que en teoría es más rentable, lo que haría que estos proyectos sean regresivos. Por lo tanto, se usa un VST único para toda la población.

A continuación, se describirán los indicadores de rentabilidad, que son usados en la evaluación de proyectos para indicar si un proyecto es rentable o no. También se usa para comparar dos o más

proyectos de distinta duración, con distintos niveles de inversión, etc.

Valor Actual Neto (VAN)

Un proyecto puede tomar mucho tiempo entre su aprobación y su ejecución. Por ejemplo, pensemos en la construcción una línea de metro. Se invierten 5.000 millones de dólares en este proyecto en el año 0. La línea empieza a operar en el año 1, generando 1.000 millones de dólares en costos de operación, y 2.000 millones de dólares en beneficios. se pensaría que el proyecto es rentable a partir del año 5, pero esto es falso por dos razones.

La primera razón es la **inflación**, que es la pérdida de valor del dinero en el tiempo: \$1.000 pesos hoy no valen lo mismo que \$1.000 en 10 años más. La segunda razón es que existe un **costo de oportunidad de inversión**: si se pone el dinero en un banco, se ganará dinero basado en la tasa de interés del banco, por ejemplo, si se depositan los 5.000 millones en un banco, en 5 años se tendrán 5.200 millones. Por estas razones, cuando se desea comparar proyectos en diferentes años, los beneficios y costos deben ser corregidos.

Para ello, consideremos la línea de tiempo de la Figura 113:

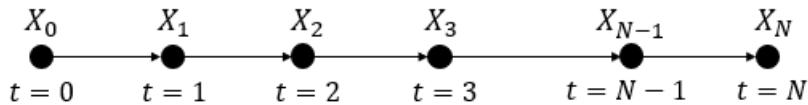


Figura 113: Línea de tiempo de un proyecto.

donde X_t es la ganancia en el período t (beneficios - costos). Para comparar el proyecto en diferentes períodos, se corrige el valor X_t definiendo el valor presente o valor actualizado:

$$\frac{X_t}{(1+i)^t}$$

en la que i es la tasa privada o social de descuento. A partir de esta definición, se define el valor actualizado neto (VAN) o valor presente Neto (VPN) como el valor presente de todos los flujos de dinero asociados a un proyecto. El VAN se calcula de la siguiente manera:

$$\sum_{t=0}^N \frac{X_t}{(1+i)^t}$$

donde N es la cantidad total de años estudiados. La Tabla ?? da un ejemplo de VAN:

Tabla 19: Ejemplo de VAN para tres proyectos

Proyecto	t=0	t=1	t=2	t=3	VAN (10%)
A	\$ -1.000	\$ 1.000	\$ 0	\$ 0	\$ -91
B	\$ -1.000	\$ 500	\$ 500	\$ 500	\$243
C	\$ -1.000	\$ 0	\$ 0	\$1.500	\$127

Se dice que el proyecto es rentable (es conveniente de realizar) si su $VAN > 0$. Si se debe elegir entre varios proyectos con VAN positivo, conviene elegir el de mayor VAN, a menos que los beneficios no cuantificables sean relevantes. En este caso, con la información disponible el proyecto más rentable es el proyecto B, ya que es aquel con mayor VAN. El proyecto C también podría ser elegido si se cuenta con información adicional, por su parte, el proyecto A no es conveniente debido a su valor de VAN negativo.

Tasa Interna de Retorno

Existen otros criterios para evaluar proyectos, basados en la tasa de descuento. La tasa interna de retorno (TIR) es aquella tasa de descuento que hace que el VAN del proyecto sea cero, es decir:

$$\sum_{t=0}^N \frac{X_t}{(1 + TIR)^t} = 0$$

Para analizar e interpretar la TIR, es necesario tener en consideración el tipo de proyecto en cuestión. Por ejemplo, en proyectos de inversión, se puede tener lo siguiente:

Tabla 20: Ejemplo de TIR para tres proyectos

Proyecto	t=0	t=1	TIR	VAN (10%)
A	\$ -1.000	\$1.200	20%	\$ 91
B	\$ -1.000	\$1.100	10%	\$0
C	\$ -1.000	\$1.000	0%	\$-91

A partir de esta tabla, se puede ver que TIR cumple con lo siguiente:

- Si $TIR >$ Tasa de Descuento $\rightarrow VAN > 0$
- Si $TIR =$ Tasa de Descuento $\rightarrow VAN = 0$
- Si $TIR <$ Tasa de Descuento $\rightarrow VAN < 0$

Esto se puede ver gráficamente:

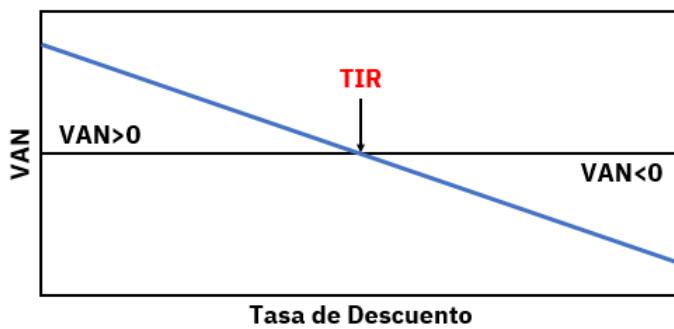


Figura 114: Relación TIR con VAN.

Para ver la robustez de los resultados de rentabilidad, es necesario hacer un análisis de sensibilidad de la evaluación, el cual consiste en la evaluación de los resultados ante un cambio de los factores del proyecto (como la tasa de descuento, por ejemplo). A veces es mejor elegir un proyecto con menor rentabilidad pero más robusto ante cambios en los factores, ya que hay menos posibilidades de que un hecho imprevisto afecte las ganancias. En la práctica, es posible hacer una simulación de supuestos sobre la distribución de factores, y así calcular el valor esperado de la ganancia.

En resumen:

- Los proyectos de transporte pueden ser de diversa índole y resultar en diversos beneficios.
- Enfoque de mercados puntuales refleja beneficios de un proyecto de transporte.
- Método de la regla del medio y ahorro de recursos no siempre son compatibles.
- Beneficio de accidentes pueden ser medidos de diferentes formas.
- Indicadores de rentabilidad ayudan a elegir entre diferentes tipos de proyectos

6.4. Problemas Propuestos

Problema 1

Considere dos localidades que producen y consumen arroz. Sus curvas de oferta y demanda están dadas por las siguientes funciones:

L1	Oferta	$p = 20 + q$
	Demanda	$p = 120 - 3q$
L2	Oferta	$q = p - 40$
	Demanda	$q = 200 - p$

Si ambas localidades tienen prohibida la importación de arroz, y decidieran levantar dicha prohibición:

- (a) Si existe una oferta por transporte donde la tarifa está dada por $t = q - 15$, ¿cuántos kilos de

arroz se consumirán en total? Especifique cuánto se consume, produce y se importa/exporta en cada localidad.

- (b) ¿Cuál sería el beneficio neto que dejaría a ambas localidades en conjunto el levantamiento de la prohibición? Desagregue los beneficios y pérdidas para los consumidores y productores en cada localidad.

Problema 2

Entre dos ciudades (A y B) inicialmente sin conexión directa se construirá una vía expresa, los productores de un determinado bien que se comercializa competitivamente en ambos mercados desean conocer cuál será el impacto de esta obra sobre el mercado del bien (precios de venta y cantidades consumidas y producidas en cada ciudad). Para ello han contratado los servicios de un especialista que ha recopilado la siguiente información:

- En la ciudad A, se estima que para los siguientes precios, las cantidades consumidas y producidas del bien serán las siguientes:

Precio [\$]	250	350
Consumo [uni]	300	100
Producción [uni]	100	300

- En la ciudad B, la demanda es inelástica con un nivel de consumo actual de 100 unidades a un precio de \$400.
- En A y B la tecnología de producción es similar, con rendimientos marginales iguales.
- Un estudio de mercado ha estimado que la elasticidad $E_{p,d} = \frac{\partial D}{\partial t} \frac{t}{D}$ por transporte en el equilibrio es de $-1/3$.
- Por simplicidad todas las funciones se suponen lineales.

Con la información proporcionada:

- (a) Encuentre las cantidades consumidas y producidas en cada ciudad en la situación sin proyecto. Además, esquematice dichos equilibrios de mercado gráficamente.
- (b) Encuentre las cantidades consumidas, producidas y transportadas en cada ciudad para la situación con proyecto. Además, esquematice el equilibrio de mercado gráficamente.
- (c) Estudie gráfica y analíticamente lo que puede ocurrir (sobre todos los agentes involucrados) en la situación con proyecto, en los siguientes casos:
 - Una nueva tecnología reduce los costos de producción en la ciudad importadora
 - Producto de un deterioro económico, el nivel de ingreso de los habitantes de la ciudad exportadora se reduce.
 - La ciudad importadora se ve afectada por un gran terremoto.

Problema 3

En relación a lo visto en la clase de Evaluación de Proyectos conteste:

- (a) Explique en qué consiste la paradoja de Down-Thomson o Mogridge. Para su respuesta apóyese en un gráfico.
- (b) ¿Por qué es necesario realizar análisis de sensibilidad al hacer una evaluación de proyectos?

Problema 4

Para la evaluación social de proyectos se discutieron tres indicadores de rentabilidad, VAN, TIR y razón beneficio-costo.

- (a) Explique en qué consiste cada uno de ellos de manera conceptual y que condición debe cumplir cada uno para que un proyecto sea rentable.
- (b) Muestre mediante un ejemplo que el VAN es más consistente para medir rentabilidad que la razón B/C. Para ello considere el siguiente flujo de caja de un proyecto. La tasa social de descuento es de un 10%.

Año	0	1	2
Costos	80	600	900
Beneficios	50	560	1.000

Problema 5

Considere dos mercados inicialmente aislados por una montaña. Dadas las siguientes curvas de oferta y demanda anuales (q en [ton/año]) de un bien que se produce y consume en ambos mercados:

M1	Oferta	$q = 10 + 5p_1$
	Demanda	$q = 100 - p_1$
M2	Oferta	$q = 2p_2$
	Demanda	$q = 30 - p_2$

- (a) Encuentre la curva de demanda por transporte de dicho bien entre ambos mercados.
- (b) Suponga que se construye un túnel entre ambos mercados, de forma tal que la curva de oferta de transporte corresponde $t = 1/8q_t$. Determine la cantidad consumida y producida en cada mercado y la cantidad transportada.
- (c) ¿Cuál sería el beneficio social neto anual en M_1 y M_2 asociado a la construcción del túnel? Compare los resultados usando la “regla del medio” y el “enfoque de ahorro de recursos”. ¿Quiénes ganan y quienes pierden en cada mercado con la construcción del túnel? Comente.
- (d) Suponga que la curva de oferta de transporte corresponde a una curva de demoras, la cual está ponderada por el valor del tiempo de las mercancías transadas. ¿Sería necesario considerar como beneficio, en este caso, el excedente de los productores en el mercado de transporte? ¿Cómo cambiaría su respuesta si la curva de oferta de transporte correspondiese a la curva de costos marginales de empresas de camiones que proveen el servicio de transporte?

(e) ¿Cómo determinaría si acaso la construcción del túnel es socialmente rentable?

Problema 6

Sean $p_i^D = a_i - b_i q_i$ y $p_i^O = c_i + d_i q_i$ las respectivas funciones de demanda y oferta de un bien cualquiera x en las regiones R_i ($i = 1, 2$).

- Suponiendo que las regiones están aisladas encuentre el equilibrio económico en cada mercado. Encuentre también la función de demanda por transporte del bien x .
- Si la oferta por transporte es $t = \alpha + \beta q$, con t la tarifa y q la cantidad transportada, defina t^* y q^* en el equilibrio, así como los precios p_i^* en cada mercado. Calcule la pérdida/ganancia en el consumo y en la producción en cada mercado, e indique qué agentes (consumidores y oferentes) mejoran y quienes empeoran y en cuánto.
- Suponga que la función de demanda p_i^d depende del ingreso de la población, tal que $a_i = \gamma I_i$, con γ idéntico en ambos mercados. Identifique los valores de γ críticos (basta identificar un factor de variación porcentual de γ), es decir aquellos que definen si existe transporte del bien x y la dirección de éste.

Nota: Suponga que los parámetros son $\alpha = 1$, $\beta = 0,2$ y

Coef.	Región 1	Región 2
a	25	50
b	1	1
c	1,2	1
d	2	2

Problema 7

Suponga la existencia de tres mercados inicialmente aislados, en que se produce y consume el mismo bien. Las curvas de oferta y demanda están bien representadas por los siguientes modelos:

Mercado	Oferta	Demanda
M1	$q = 1400 + 40p$	$q = 3100 - 28p$
M2	$q = 800 + 20p$	$q = 6400 - 40p$
M3	$q = -1200 + 36p$	$q = 4200 - 28p$

Suponiendo que se ofrece un servicio de transporte subsidiado, con las tarifas entregadas en la matriz adjunta, Encuentre la situación de equilibrio, indicando las cantidades producidas y consumidas en cada uno de los mercados y las cantidades transferidas entre mercados.

Mercado	M1	M2	M3
M1	-	25	35
M2	20	-	30
M3	28	25	-

Referencias

- Basiago, A. D. (1998). Economic, social, and environmental sustainability in development theory and urban planning practice. *Environmentalist*, 19(2), 145–161.
- Berkson, J. (1953). A statistically precise and relatively simple method of estimating the bio-assay with quantal response, based on the logistic function. *Journal of the American Statistical Association*, 48(263), 565–599.
- Cascetta, E. (2013). *Transportation systems engineering: theory and methods* (Vol. 49). Springer Science & Business Media.
- Delgado, F. (2010). Control en tiempo real de buses en un corredor, basado en retención de buses y dosificación de pasajeros. tesis de doctorado pontificia universidad católica de chile.
- Dupuit, J. (1995). De la mesure de l'utilité des travaux publics (1844). *Revue française d'économie*, 10(2), 55–94.
- Edwards, A. W., y Cavalli-Sforza, L. L. (1965). A method for cluster analysis. *Biometrics*, 362–375.
- Fernández, R. (2010). *Elementos de la teoría del tráfico vehicular*. Universidad de los Andes.
- Flyvbjerg, B., Holm, M. S., y Buhl, S. (2002). Underestimating costs in public works projects: Error or lie? *Journal of the American planning association*, 68(3), 279–295.
- Friedlaender, A. F., y Spady, R. H. (1980). A derived demand function for freight transportation. *The Review of Economics and Statistics*, 432–441.
- Gonzales, E., Chavis, C., Li, Y., y Daganzo, C. F. (2011). *Multimodal transport in nairobi, kenya: Insights and recommendations with a macroscopic evidence-based model* (Inf. Téc.).
- Guevara, C. A., y Thomas, A. (2007). Multiple classification analysis in trip production models. *Transport Policy*, 14(6), 514–522.
- Guevara, C. A., Tirachini, A., Hurtubia, R., y Dekker, T. (2020). Correcting for endogeneity due to omitted crowding in public transport choice using the multiple indicator solution (mis) method. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 137, 472–484.
- Hotelling, H. (1929). Stability in competition. *Economic Journal*, 39(4), 57.
- Jara-Díaz, S. (2007). *Transport economic theory*. Emerald.
- Leontief, W. (1986). *Input-output economics*. Oxford University Press.
- Levin, R. C. (1978). Allocation in surface freight transportation: does rate regulation matter? *The Bell Journal of Economics*, 18–45.
- Manheim, M. L. (1979). *Fundamentals of Transportation Systems Analysis. Volume I: Basic Concepts* (Vol. 1).
- Marshall, A. (1890). Principles of economics, 8th edn (1920). London, Mcmillan.

- Martínez, F. (2018). *Microeconomic modeling in urban science*. Academic Press.
- Martínez, F., y Donoso, P. (2010). The mussa ii land use auction equilibrium model. En *Residential location choice* (pp. 99–113). Springer.
- McFadden, D. (1974). Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. En *P. zarembka, ed.,frontiers in econometrics* (p. 105–142). Academic Press, New York.
- Mogridge, M. J. H., Holden, D., Bird, J., y Terzis, G. (1987). The downs/thomson paradox and the transportation planning process. *International Journal of Transport Economics/Rivista internazionale di economia dei trasporti*, 283–311.
- Ortúzar, J. d. D., y Willumsen, L. G. (2011). *Modelling Transport*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd. Descargado de <http://doi.wiley.com/10.1002/9781119993308> doi: 10.1002/9781119993308
- Robillard, P., y Stewart, N. F. (1974). Iterative numerical methods for trip distribution problems. *Transportation Research*, 8(6), 575–582.
- Sectra. (2003). *Estraus: Manual del usuario, versión 4.3*. Descargado de <http://www.sectra.gob.cl/metodologias/estraus.htm>
- Sectra-PUC. (2008). *Encuest origen destino 2006* (Inf. Téc.).
- Sectra-UAH. (2014). *Encuest origen destino 2012* (Inf. Téc.).
- Sheffi, Y. (1985). *Urban transportation networks* (Vol. 6). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Wardrop, J. G., y Whitehead, J. I. (1952). Correspondence. some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1(5), 767–768.
- Wilson, A. G. (1969). The use of entropy maximising models, in the theory of trip distribution, mode split and route split. *Journal of transport economics and policy*, 108–126.
- Winston, C. (1981). A disaggregate model of the demand for intercity freight transportation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 981–1006.