Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4402 – Simulación Estocástica: Teoría y Laboratorio

Movimiento Browniano y Ecuación del Calor

Maximiliano S. Beltrán - David Astudillo

Profesor: Joaquin Fontbona T.
Auxiliares: Camilo Carvajal Reyes; Arie Wortsman Z; Pablo Zúñiga Rodríguez-Peña

Ecuación de Calor

Se estudia la ecuación de calor como método para describir la evolución de la temperatura a lo largo del tiempo sobre una región, estimando una solución usando herramientas probabilistas dada una condición inicial.

Caso 1-dimensional

Considerando una barra infinita sobre el eje x en el plano $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Definiendo $u(t, x)$ como la temperatura de la barra a tiempo $t \geq 0$ y posición $x \in \mathbb{R}$, estudiamos la formulación donde u satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (1.1) \\ u(0, x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \quad\quad\quad (1.2) \end{cases} \tag{1}$$

con $f(x)$ denotando la temperatura inicial en posición $x \in \mathbb{R}$.

Notamos que la función de densidad de probabilidad de transición del movimiento Browniano Estándar 1-dimensional

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, t > 0, x, y \in \mathbb{R}$$

satisface la ecuación (1.1).

Llamamos a $p(t; x, y)$ una solución fundamental de nuestro problema

Afirmamos entonces, dadas ciertas condiciones de regularidad que

$$\hat{u}(t, x) \triangleq \mathbb{E}^x[f(B_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p(t; x, y) dy$$

con B_t denotando el Browniano Estándar a tiempo t satisface la formulación (1) para $t \geq 0$ definido sobre un intervalo que depende de condiciones sobre el crecimiento de $f(x)$.

Motivándonos en lo anterior, realizamos simulaciones para obtener soluciones aproximadas de la formulación (1) aplicando Monte Carlo, variando la condición (1.2).

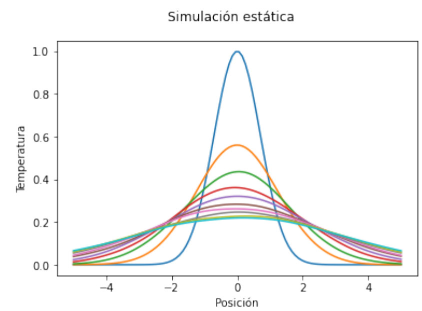
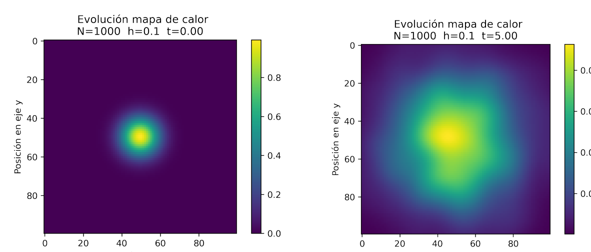


Figura 1: Simulacion con condición inicial $f(x) = e^{-x^2}$ para $x \in [-5, 5]$.

Caso 2-dimensional

Extendemos la resolución del problema a una formulación sobre el plano $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$, para condiciones iniciales de la forma $u(0, x, y) = f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ evaluando dos Brownianos independientes y se realizan simulaciones usando mapas de calor.



(a) Simulación a tiempo t_1 (b) Simulación a tiempo t_2

Figura 2: Simulación con condición inicial $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ con $t_1 < t_2$.

Referencias

[1] E. Luirard, A. Neuenkirch, *Brownian Motion and Partial Differential Equation*, pp. 4-19, 2017.

[2] Jiří Lebl, *Differential Equations for Engineers*, Oklahoma State University, pp. 215-224.

[3] Jean-François Le Gall, *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus* pp. 34. pp 185-187