# Optimalidad asintótica de mercados de pruebas con influencia social

José Martinez, Rodrigo Montecinos

***Resumen*—El presente proyecto propone un modelo de optimalidad asintótica de mercados de prueba con influencia social, en el cual se aplicará a productos del mercado simulados. Para estó se usará simulated annealing en conjunto a métodos de Markov Chain Monte Carlo, obteniendo una maximización de las utilidades con respecto al ranking de los productos.**

## I. Formulación

Los mercados de prueba consiste en una dinamica entre consumidores y productores, en donde los primeros prueban un producto antes de decidir comprarlo o no. Dicho mercado está compuesto por $n$ productos, los cuales están caracterizados por dos valores:

1. Su atractivo $a_i$ que repesenta la inherente preferencia de probar el producto i;
2. Su calidad $q_i$ que representa la probabilidad condicional de comprar el producto $i$ dado que fue probado.

Cada consumidor prueba un producto y luego decide si comprarlo o no. Se observa que el orden en el que se presentan los productos influye en si el consumidor compra un producto. El orden de los productos, llamado ranking, es una permutación de $\{1, ..., n\}$ y cada posición $p$ se caracteriza en el orden por un valor $v_p > 0$, que consiste en la probabilidad de probar el producto en la posición $p$.

Lo anterior de puede modelar a través de una cadena de Markov. Se consideran el espacio de estado $E = \{1, ..., n\}$ y un tiempo discreto, en donde en cada unidad de tiempo $t$ un consumidor toma una decisión, ya sea probar un producto o comprarlo. Con lo anterior, sea $X_t$ la variable aleatoria que toma valores en $E$.

Si se considera la matriz $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$, donde $p_ij$ corresponde la probabilidad de que la decisión del consumidor cambie del producto $i$ al producto j, y el vector $\mu = (\mu_i)_{i\in E}$ que corresponde a la preferencia del primer consumidor por los productos, se tiene que la v.a. $(X_t)$ corresponde a una cadena de Markov con matriz de transición $P$ u distribución inicial $\mu$ [2].

Así, para $n$ pequeño, el conjunto de permutaciones $S_n$ puede llegar a ser muy grande, por lo tanto se utilizara Simulated Annealing para encontrar un ranking óptimo.

## II. Aplicación

Se aplicara lo anterior para el mercado de telefono celulares, el cual consta de 21 marcas, utilizando los datos para $P$ y $\mu$ que se encuentran en la fuente [3].

.

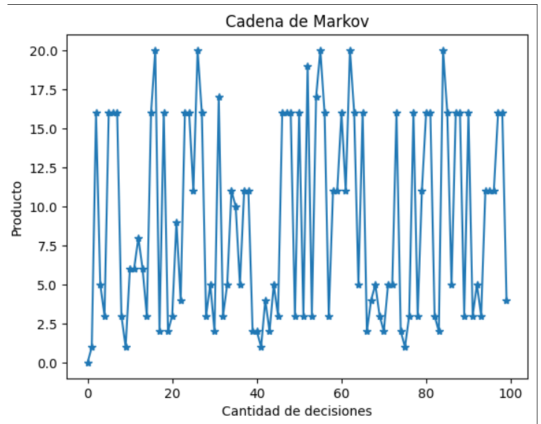


Figura 1. Gráfico correspondiente a la cadena de Markov antes mencionada.

Por otro lado, se quiere encontrar un ranking que maximice el número esperado de compras que está representado por la ecuación que se encuentra en [1]:

$$\boxed{P(\sigma, d^t) = \sum_{i=1}^{21} \frac{v_{\sigma_i} q_i (a_i + d_i^t)}{\sum_{j=1}^{21} v_{\sigma_j}(a_i + d_j^t)}} \quad (1)$$

donde $d^t$ es el vector que indica la cantidad de cada producto comprado.

## III. Resultados

Se logro obtener una cadena de Markov para la aplicación anterior con una cantidad de 100 decisiones, utilizando un algoritmo que se encuentra en [4].

Además, se logro observar que el valor óptimo de (1) depende fuertemente de la condición inicial y la temperatura inversa que se le entrega a Simulated Annealing, el cual puede variar en el intervalo $[4, 18]$

## Referencias

[1] A. Abeluik, G. Berbeglia, F. Maldonado, P, Van Hentenryck, *Asymptotic Optimality of Myopic Optimization in Trial-Offer Markets with Social Influence*, 2016.
[2] Ka Ching Chan, *Market share modelling and forecasting using Markov chains and alternative models.*, 2015.
[3] S. Mutiu, O. Dotun, *Application of Markov Chain in Forecasting: A Study of Customers' Brand Loyalty for Mobile Phones*, 2015.
[4] J. Fontbona, *Apunte simulación estocástica*, 2023