Modelación de trayectorias de dispersión meteorológicas

Felipe Latorre Naranjo, Jorge Sepúlveda Ruz

***Abstract*— Inspirados en la tesis de Nurul Huda [1] se estudiará numéricametne la ecuación diferencial estocástica ”Random Flight Model” (RFM) en el eje vertical modificada con el lema de Ito y normalizando algunos parámetros con tal de tener una implementación sencilla.**

Considerando el contexto meteorológico de esta EDE se estudian 3 perfiles distintos, estos derivados estadísticamente de las corrientes atmosféricas en la capa límite de la atmósfera (ABL). Dichos modelos son ”inestable” que es cuando la superficie se calienta durante el día donde ocurre un efecto termal de corrientes convectivas; el segundo, ”estable”, que ocurre durante las noches y ocurre que el nivel de turbulencia decrece con la altura, el tercero ”neutral” que ocurre cuando la capa está nublada y con bastante viento.

Respecto a la ecuación esta depende de funciones elementales, estas son τ_w y σ_w, que son el tiempo de decorrelación lagrangiano y la desviación estandar del turbulente de velocidad, cumpliendo este que $\sigma_w^2 =< W_t^2 >=< W_0^2 >$, estas funciones cambian según el perfil a estudiar.

En este proyecto se estudiará el rendimiento de 4 esquemas de resolución de EDEs, refiérase a los de Euler, Milstein, HON-SKRII[1] y Leggraup[1], luego se devolverá el cambio de variables de Ito para obtener la velocidad y altura de estos y análizar el comportamiento de 10 partículas para cada modelo.

I. OBTENCIÓN DEL MODELO

Se estudiará la posición y velocidad de una partícula 3 dimensional $X_t = (x_t, y_t, z_t)$ y $V_t = (vx_t, vy_t, W_t)$ con $dX_t = V_t dt$ asumiendo turbulencia Gaussiana, como las variaciones horizontales son despreciables a nivel de la ABL. se considerará solo la altura Z, por lo que hay que implementar lo siguiente:

$$dW_t = a_w(Z_t, W_t, t)dt + b_w(Z_t, W_t, t)dB_t$$

$$dZ_t = W_t dt$$

Con $a_w(z, w, t) = -\frac{w}{t_w} + \sigma_w \cdot (\sigma_w)_z + \frac{w^2}{\sigma_w}(\sigma_w)_z$ y $b_w = (\frac{2\sigma_w^2}{\tau_w})^{1/2}$ funciones obtenidas por análisis estadísticos, luego de hacer el cambio de variable $\Omega_t = \frac{W_t}{\sigma_t}$ y considerando el perfil Gaussiano se obtiene el modelo final

$$d\Omega_t = \left(-\frac{\Omega_t}{\tau_w} + \frac{\partial \sigma_w}{\partial z}\right) dt + \left(\frac{2}{\tau_w}\right)^{\frac{1}{2}} dB_t, \Omega_0 \sim N(0, 1)$$

$$dZ_t = \Omega_t \sigma_w dt, Z_0 \sim N(z_0, \sigma_z^2)$$

Para analizar los modelos, se estudiarán 10 trayectorias con condiciones iniciales fijas $\Omega_0 = 0$,$z_t = 0$ y considerando omega y Z normalizados a [0,1] en una unidad de tiempo.

II. RESULTADOS

Se mostrarán 3 gráficos representativos del proyecto.

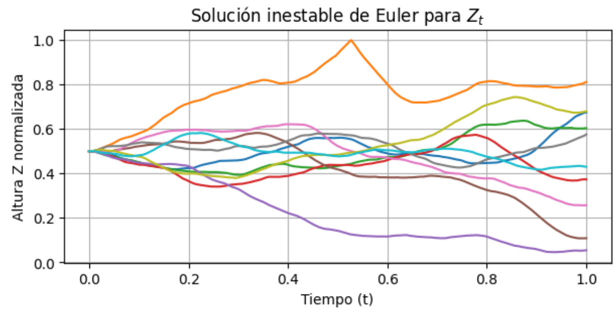

Fig. 1. Solución inestable de Euler

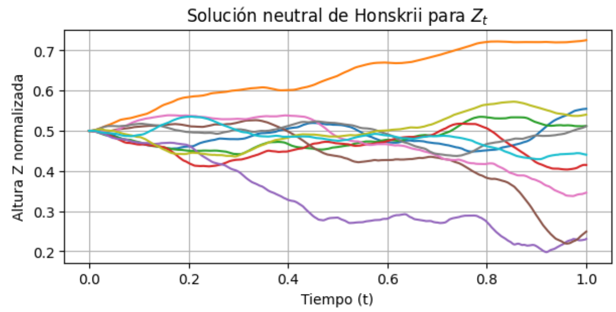

Fig. 2. Solución estable de Milstein

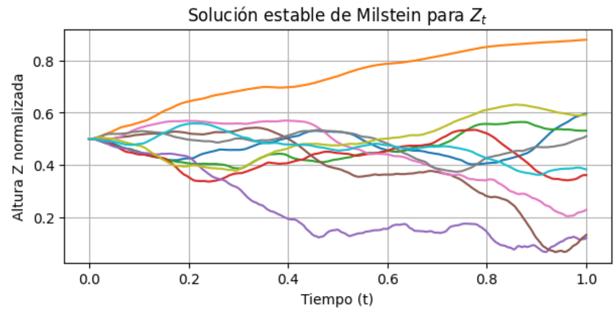

Fig. 3. Solución neutral de HON-SKRII

III. CONCLUSIONES

Los esquemas vistos se pudieron implementar correctamente dando resultados similares, sin embargo, el esquema de Leggraup muestra mal comportamiento en condiciones similares que los otros pues requiere de variaciones de tiempo mayor o igual al mínimo del parámetro τ. Se cumplió parcialmente el objetivo, pues no se implementó la forma de verificar que tan buenos resultaron los esquemas.

REFERENCES

[1] Nurul Huda, M. (2016). Stochastic trajectory modelling of atmospheric dispersion. University College London.