



Trabajo Dirigido en Matemática Fundamental

Licenciatura en Matemáticas

Curso 2012-2013

Coloración en Grafos

Alumna: María Rosa Murga Díaz

Director: Daniel Sadornil Renedo

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Índice general

Introducción	5
1. Algunos conceptos sobre grafos	9
2. Número cromático de un grafo	17
3. Coloración de grafos planos	27
4. Cliques y conjuntos independientes	33
5. Polinomio cromático	43
6. Coloración en aristas	55
Bibliografía	63

Introducción

En sus comienzos, la teoría de grafos se ocupaba principalmente de pasatiempos y rompecabezas, por lo que no parecía tener mucha relevancia, desde un punto de vista matemático. Sin embargo, los avances en las matemáticas y, especialmente, en sus aplicaciones han impulsado en gran medida la teoría de grafos. La teoría de grafos es una teoría que sorprende por su sencillez inicial, por su versatilidad, así como por su capacidad para resolver problemas de lo más variado. Es precisamente su sencillez lo que hace que pueda utilizarse para crear modelos en temas tan dispares, como las telecomunicaciones, Internet, la teoría de la información, la química, la física, el estudio de probabilidades, en temas de planificación, en el estudio de las redes sociales, en juegos recreativos, en redes neuronales, en programación, etc.

El nacimiento de la teoría de grafos tuvo lugar en el año 1736 de la mano del célebre matemático Leonhard Euler ([11]) al resolver el famoso problema de los puentes de Königsberg. Este problema consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel, que comunican la ciudad de Königsberg, de manera que se recorran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Este resultado también se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría.

El término “grafo” fue introducido por J. J. Sylvester en 1878 ([23]) en un artículo en el que estudia la relación entre el álgebra y los diagramas moleculares. Sylvester fue alumno de A. De Morgan, al igual que Francis Guthrie, quién planteó la conjetura de los cuatro colores. En el año 1852 Francis le comentó el tema a su hermano Frederick, que a su vez se lo planteó a De Morgan, que, aunque no supo responderle, se encargó de difundir el asunto entre otros matemáticos. En 1878 Arthur Cayley ([8]) lo presenta formalmente a la *London Mathematical Society* y así, el problema quedaba abierto con el enunciado siguiente:

“Dada cualquier división de un mapa plano en regiones, éste puede ser coloreado, únicamente con cuatro colores, de manera que regiones con frontera común tengan colores distintos.”

Apenas un año después, un abogado de Londres, Arthur B. Kempe ([16]), publicó un artículo en el que se proponía una demostración de que cuatro colores eran suficientes para colorear un mapa plano. La solución de Kempe se dio por buena durante once años. En 1890 P. J. Heawood ([14]) encontró un fallo en el argumento de Kempe, pero esto le sirvió para demostrar el teorema de los cinco colores.

El teorema de los cuatro colores fue probado en 1976 por Kenneth Appel ¹ y Wolfgang Haken ([1], [2]). Este fue el primer gran teorema que se demostró con un ordenador. El enfoque que Appel y Haken dieron al teorema comenzó al demostrar que existe un conjunto de 1.936 mapas, cada uno de los cuales no puede ser parte de un contraejemplo de tamaño más pequeño que el

¹Desafortunadamente, Kenneth Appel ha fallecido a los 80 años de edad el pasado 19 de Abril de 2013.

teorema de los cuatro colores. Appel y Haken utilizaron un ordenador para confirmar que cada uno de estos mapas tenía esta propiedad. Además, cualquier mapa (independientemente de si se trata de un contraejemplo o no) debe tener una porción que se parece a uno de estos 1936 mapas. Appel y Haken llegaron a la conclusión de que no existen contraejemplos más pequeños, ya que cualquiera debe contener uno de estos 1936 mapas. Esta contradicción significa que no hay contraejemplos y que, por tanto, el teorema es cierto.

El teorema de los cuatro colores se considera el primer resultado de la coloración de grafos. Para resolverlo se identifica cada mapa con un grafo simple de manera que a cada país le corresponde un vértice y existirá una arista que una dos vértices si sus correspondientes países tienen una frontera común. Entonces, tendremos que asignar un color a cada vértice de manera que dos vértices adyacentes no pueden llevar el mismo color, que es lo que se llamará coloración en vértices de un grafo.

Este problema engloba además otras situaciones similares como, por ejemplo, la distribución de las conferencias de un congreso de manera que dos conferencias que puedan ser de interés para una misma persona no se realicen al mismo tiempo. El almacenamiento de productos químicos donde hay determinados productos que son incompatibles entre sí, y por tanto se deben almacenar de manera independiente. O como distribuir las especies de animales en un zoológico teniendo en cuenta que hay especies que no pueden cohabitar en el mismo espacio.

Todos estos problemas y muchos más se pueden resolver mediante la coloración de un grafo de la misma manera que se colorea un mapa. Por eso es interesante estudiar cuál va a ser el mínimo número de colores necesarios para colorear un grafo, pues esto nos proporcionará información, por ejemplo, sobre cuál va a ser el mínimo número de días que tiene que durar el congreso.

Además de saber con cuántos colores se puede colorear un grafo, también nos preguntamos de cuantas formas posibles se puede colorear con un cierto número de colores k . Este valor viene determinado por el polinomio cromático del grafo, que es un polinomio en k . En el año 1912, G. D. Birkhoff ([6]) introdujo la noción de polinomio cromático en conexión con el problema de coloreado de mapas con la esperanza de que el estudio de los ceros de esta función pudiese ayudarle a demostrar el teorema de los cuatro colores.

Otro tipo de coloración de grafos es el coloreado de aristas, que consiste en colorear todas las aristas de un grafo de tal forma que dos aristas incidentes en el mismo vértice no pueden ser coloreadas con el mismo color. El primer documento que trata sobre el problema de la coloración en aristas fue escrito por P. Guthrie Tait ([24]) en el año 1880 y también surge a partir de teorema de los cuatro colores.

Una de las metas esenciales de este trabajo ha sido crear un trabajo autocontenido, donde todas aquellas definiciones, nociones o resultados que se usaran hubieran sido previamente detalladas. Esto se ha conseguido en gran parte, exceptuando el uso de algunos resultados que no se han demostrado o bien por su elevada dificultad o bien porque se trataba de resultados de otro campo de las matemáticas.

En el primer capítulo se da un breve resumen de las definiciones más básicas de la teoría de grafos y los resultados relacionados con ellas. Describiremos también, las familias de grafos más conocidas como los lineales, ciclos, completos o bipartitos.

En el capítulo 2 se estudiará el problema de la coloración en vértices de los grafos y la definición de número cromático. Veremos varias acotaciones del número cromático de un grafo relacionadas con su número de vértices, con su grado máximo o con su número de aristas. Demostraremos que el número cromático de todo grafo es menor o igual que su grado máximo más uno. En particular, si el grafo es conexo y no regular se tiene que el número cromático

es menor o igual que su grado máximo. Por otra parte, existen ciertos grafos no regulares que también verifican esta desigualdad que son aquellos que no son ni completos ni ciclos impares. Este último teorema se conoce como teorema de Brooks ([7]) y es uno de los principales teoremas que se probarán en este capítulo.

El capítulo 3 trata sobre grafos planos. En él se dará la definición de grafo plano y los conceptos básicos relacionados con la planaridad como las caras, aristas, dual de un grafo plano, etc. Probaremos el famoso teorema de Euler que afirma que todo grafo conexo con C caras, A aristas y V vértices verifica que $V - A + C = 2$ y usando este resultado demostraremos el teorema de los cinco colores comentado anteriormente.

En el cuarto capítulo definiremos lo que son los cliques y los conjuntos independientes de un grafo. Estudiaremos la relación existente entre estos conceptos y el número cromático. En este capítulo estudiaremos problemas extremales y definiremos dos familias particulares de grafos que son los grafos de Mycielski ([21]) y los grafos de Turán ([25]). Por último, en este capítulo se tratarán los grafos perfectos.

En el capítulo 5 veremos el polinomio cromático de un grafo, que determina el número de coloraciones distintas que se pueden hacer de un grafo con k colores. Definiremos dicho polinomio y veremos algunas de sus propiedades y las de sus coeficientes. En este capítulo también veremos cuál es el polinomio cromático de algunas familias de grafos. Demostraremos algunos teoremas que nos ayudarán a calcular el polinomio cromático de un grafo cualquiera reduciéndolo, mediante las operaciones de grafos, a alguno de los grafos de los cuales conocemos su polinomio cromático.

Por último, en el capítulo 6 nos dedicaremos a estudiar la coloración en aristas y el índice cromático. Demostraremos el teorema de Vizing ([26]) que afirma que solamente hay dos tipos de grafos clasificados según su índice cromático: aquellos grafos cuyo índice cromático coincide con su grado máximo y aquellos grafos en los que es una unidad mayor que su grado máximo. También veremos cuál es el índice cromático de los grafos completos K_n y los grafos ciclo C_n .

Capítulo 1

Algunos conceptos sobre grafos

Vamos a hacer una pequeña introducción a la teoría de grafos explicando las nociones básicas y fijando la notación que usaremos a lo largo del trabajo. Los resultados aquí expuestos pueden encontrarse en cualquier texto de teoría de grafos (por ejemplo, [9, 27]), pero que aquí incluimos para que el trabajo sea autocontenido.

Definición 1.1. Un *grafo* es una terna $G = (V, A, \varphi)$ donde $V = V(G)$ es una colección finita y no vacía de puntos a los que llamaremos *vértices* de G ; $A = A(G)$ es una colección finita de líneas que llamaremos *aristas* de G y que unen elementos de V ; y φ es una aplicación $\varphi : A \rightarrow V \times V$ que a cada elemento a de A le asocia dos elementos v_1 y v_2 de V de manera que a une los vértices v_1 y v_2 y habitualmente se denota por v_1v_2 . Se dice que los vértices v_1 y v_2 son los *extremos* de la arista a o, lo que es lo mismo, que la arista a es *incidente* en v_1 y v_2 , o simplemente que los vértices v_1 y v_2 son *adyacentes*.

En la definición anterior el conjunto de vértices es finito pero no tiene por qué ser siempre así. A lo largo de este trabajo siempre consideraremos grafos finitos.

La manera más habitual de representar un grafo G es dibujar un punto por cada vértice de V y si existe una arista entre dos de los vértices de V dibujar una línea que una esos dos puntos. Por ejemplo, una representación del grafo $G = (V, A, \varphi)$ donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_5, v_2v_5\}$ sería la que aparece en la figura 1.1.

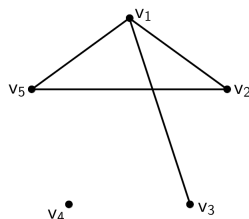


Figura 1.1

Aunque esta sea una manera muy natural de representar grafos no se debe confundir un grafo con su dibujo, puesto que un mismo grafo puede tener varias representaciones diferentes. Dos grafos son *iguales* cuando tienen el mismo conjunto de vértices y el mismo conjunto de aristas, aunque sus representaciones sean diferentes.

Definición 1.2. Un *isomorfismo* entre dos grafos G y H es una biyección entre sus conjuntos de vértices $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ tal que uv es un arista de G si y sólo si $\phi(u)\phi(v)$ es una arista de H . En caso de que exista tal isomorfismo se dice que G y H son *isomorfos* y se denota $G \cong H$.

El grafo de la figura 1.2 es isomorfo al grafo de la figura 1.1.

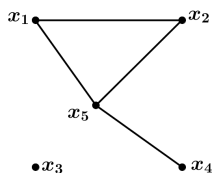


Figura 1.2

El hecho de que dos grafos tengan el mismo número de vértices y el mismo número de aristas no implica que ambos grafos sean isomorfos. Por ejemplo, en la figura 1.3 los dos grafos tienen cuatro vértices y cuatro aristas pero no son isomorfos.

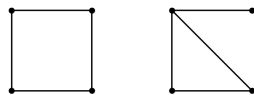


Figura 1.3: Grafos no isomorfos

Si los dos extremos de una arista son el mismo vértice, dicha arista se denomina *lazo* y si varias aristas a_1, \dots, a_k unen los mismos vértices, es decir, si la aplicación φ no es inyectiva y $\varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_k)$, se dice que las aristas a_1, \dots, a_k son *aristas múltiples*.

Definición 1.3. Se dice que un grafo G es un *grafo simple* si no tiene ni lazos ni aristas múltiples.

De hecho, todos los grafos que estudiaremos durante este trabajo serán grafos simples.

Es fácil ver que todo grafo simple de n vértices puede tener a lo sumo $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ aristas. Cada uno de los n vértices puede tener a lo sumo $n - 1$ vértices adyacentes, esto es, que en él incidan $n - 1$ aristas, pero si en cada uno de los vértices contamos las $n - 1$ aristas estaríamos contando dos veces cada una de ellas.

Definición 1.4. Un *subgrafo* de un grafo G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $A(H) \subseteq A(G)$ y todas las aristas de H tienen sus extremos en vértices de H con $\varphi(H) = \varphi(G) \upharpoonright_H$.

En la figura 1.4 podemos ver claramente que el grafo H es un subgrafo del grafo G .

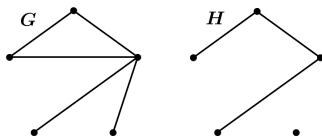


Figura 1.4: Subgrafo de un grafo

Cuando estudiemos la coloración de grafos habrá ocasiones en las que sea interesante estudiar los subgrafos de G alterados mínimamente, que difieren en un único vértice o una única arista. Para ello existen operaciones que se pueden hacer en los grafos de manera que el nuevo grafo resulta de eliminar, añadir, contraer o expandir un vértice o arista.

Dado un grafo G y un vértice v de G denotamos $G \setminus \{v\}$ al grafo obtenido de G al *eliminar el vértice* v y todas las aristas incidentes en él. El grafo G_1 de la figura 1.5 es el grafo $G \setminus \{v_1\}$ donde G es el grafo de la figura 1.1.

De la misma manera, dado un grafo G y una arista a de G se denota $G \setminus \{a\}$ al grafo obtenido a partir de G al *eliminar la arista* a . El grafo G_2 de la figura 1.5 es el resultado de eliminar la arista v_1v_5 del grafo G .

También se puede modificar un grafo G añadiendo un vértice v o una arista a que una dos vértices ya existentes de G y se denotaría $G + v$ y $G + a$ respectivamente.

Otra operación que se puede hacer para modificar ligeramente un grafo G es *contraer una arista*. Esta operación consiste en eliminar una arista a e identificar sus extremos en un solo vértice como se muestra en el grafo G_3 de la figura 1.5, que es el resultado de contraer la arista v_2v_5 del grafo G de la figura 1.1.

Por último, dado un grafo G y uno de sus vértices v se puede obtener otro grafo que resulta de *expandir el vértice* v . El nuevo grafo resulta de añadir a G un nuevo vértice v' y unirle mediante aristas con v y con todos los vértices adyacentes a v . El grafo G_4 que se muestra en la figura 1.5 es el resultante de expandir el vértice v_1 en el grafo G de la figura 1.1.

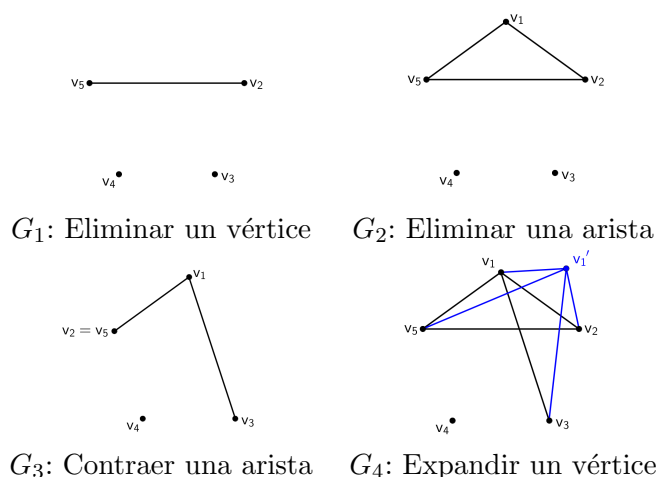


Figura 1.5: Operaciones en grafos

Si en vez de eliminar un único vértice eliminamos varios obtenemos lo que se llama un subgrafo inducido que se define como sigue.

Definición 1.5. Dado un grafo G y un subconjunto de vértices T de G , se define el *subgrafo de G inducido por T* como el grafo que resulta de eliminar el conjunto de vértices $T^c = V \setminus T$ y todas sus aristas adyacentes. Dicho de otra manera, es el subgrafo H de G cuyo conjunto de vértices es T y tal que dados dos vértices v_1 y v_2 de H hay una arista que los une en H si y solo si la hay en G . El subgrafo de G inducido por T se denota $G[T]$.

Por ejemplo, el subgrafo de la figura 1.6 es el subgrafo de G inducido por $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde G es el grafo de la figura 1.1.

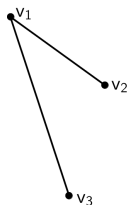


Figura 1.6: Subgrafo inducido

Definición 1.6. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es V y de aristas es A . Se define su *grafo complementario* o *complemento*, que se denota por G^c , como el grafo que tiene por conjunto de vértices V y que dados dos vértices v_1 y v_2 de G^c existe una arista que los une si y sólo si tal arista no existe en G .

El grafo de la figura 1.7 es el complementario del grafo G de la figura 1.1.

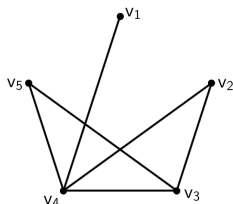


Figura 1.7: Grafo complementario

Definición 1.7. Un *recorrido* en un grafo G es una sucesión alternada de vértices y aristas de la forma $R = v_0 a_1 v_1 a_2 v_2 \dots a_k v_k$ donde a_i es la arista que tiene extremos v_{i-1}, v_i para $1 \leq i \leq k$. El recorrido R es de longitud k cuando tiene k aristas y $k + 1$ vértices. Se dice que v_0 y v_k son los extremos de R y, en particular, v_0 es el *origen* y v_k es el *final* del recorrido. Un recorrido se dice que es un *camino* cuando todas sus aristas son distintas.

En la definición anterior de camino, los vértices v_i pueden estar repetidos. En caso de que no haya ninguna repetición de vértices, salvo quizás el origen y el final, se dice que el camino es un *camino simple*. Cuando el origen y el final son el mismo vértice, el camino es un *camino cerrado*. Un camino simple cerrado y no trivial (que no sea un lazo) se denomina *ciclo*.

Una vez introducidas estas nociones estamos en disposición de hablar de conexión de grafos.

Definición 1.8. Dado un grafo G se dice que es *conexo* si dados dos vértices cualesquiera de G siempre existe un camino que les une.

Dados dos vértices v_1 y v_2 de G podemos definir la relación de equivalencia $v_1 \sim v_2$ si y sólo si existe un camino cuyos extremos son v_1 y v_2 . De manera natural, podemos definir las *componentes conexas* de un grafo G como los subgrafos de G inducidos por los conjuntos de vértices de las diferentes clases de equivalencia definidas anteriormente. Es claro que todo grafo se puede expresar como una unión disjunta de componentes conexas, pues una componente conexa puede tener un único vértice. Por ejemplo, los grafos de las figuras 1.6 y 1.7 que hemos

visto anteriormente son grafos conexos; el grafo de la figura 1.1 tiene dos componentes conexas y el grafo G_2 de la figura 1.5 tiene tres componentes conexas. El número de componentes conexas de un grafo G se denota $K(G)$ y está relacionado con el número de aristas y el número de vértices del grafo mediante la desigualdad $A(G) \geq V(G) - K(G)$.

Otra manera de caracterizar a un grafo es mediante la sucesión de sus grados.

Definición 1.9. Dado un grafo G y un vértice v se define el *grado del vértice* v como el número de aristas de G que inciden en v , teniendo en cuenta que los lazos se cuentan dos veces, y se denota por $d(v)$.

Es claro que el grado de un vértice no depende de la representación del grafo y se puede definir $\delta(G)$ como el grado mínimo del grafo G y $\Delta(G)$ como el grado máximo de G . La *sucesión de los grados de un grafo* no es más que la sucesión de los grados de todos sus vértices ordenados de manera creciente. Por ejemplo, la sucesión de los grados de la figura 1.1 sería $\{0, 1, 2, 2, 3\}$. No obstante, la sucesión de grados de un grafo no determina exclusivamente el grafo (salvo casos excepcionales). En relación a los grados de los vértices de un grafo podemos enunciar lo que se conoce como el lema del apretón de manos y que dice lo siguiente:

Teorema 1.1. *La suma de todos los grados de los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas del grafo, es decir:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|$$

Definición 1.10. Un grafo G se dice que es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado, o lo que es lo mismo, si $\delta(G) = \Delta(G)$.

Hay varios tipos de grafos que reciben nombres especiales y que se pueden clasificar según el número de vértices y aristas o según si cumplen o no ciertas propiedades.

Por ejemplo, si un grafo está formado por un único vértice y ninguna arista se conoce como *grafo trivial*. El grafo de n vértices y ninguna arista se llama *grafo nulo* y se denota N_n . A este grafo se le puede considerar con una unión disjunta de n grafos triviales.

Se llama *grafo lineal* L_n al grafo formado por n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $n - 1$ aristas $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ de manera que $\varphi(a_i) = (v_i, v_{i+1})$. Todos sus vértices tienen grado dos, salvo el primero y el último que tienen grado uno.

Anteriormente hemos hablado de los *ciclos*, que son caminos simples cerrados y no triviales. Los ciclos usualmente se denotan C_n y están formados por n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y n aristas $\{a_1, \dots, a_n\}$ de manera que $\varphi(a_i) = (v_i, v_{i+1})$ si $i < n$ y $\varphi(a_n) = (v_1, v_n)$. Los ciclos son grafos regulares, pues todos sus vértices tienen grado dos.

Otra familia de grafos muy parecida a la anterior es la de los *grafos rueda*, que se denota R_n . Estos grafos tienen n vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ y $2(n - 1)$ aristas $\{a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ tales que a_i se define como en los ciclos y $\varphi(b_j) = (v_0, v_j)$ para $j = 1, \dots, n - 1$. En este caso, el vértice v_0 tiene grado n y todos los demás vértices tienen grado tres.

Un grafo de n vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ que sea regular con todos sus vértices de grado $n - 1$, es decir, que cada vértice sea adyacente a todos los demás, se llama *grafo completo* y se denota K_n . En cuanto al número de aristas de K_n es $\binom{n}{2}$, que es el máximo número de aristas que puede tener un grafo simple con n vértices y por eso se llama completo. Si denotamos al conjunto de aristas $A = \{a_{ij}\}$ con $1 \leq i < j \leq n$, se tiene que $\varphi(a_{ij}) = (v_i, v_j)$.

Un grafo se dice que es *bipartito* si su conjunto de vértices admite una partición en dos conjuntos V_1, V_2 disjuntos tales que toda arista del grafo tiene un extremo en el conjunto V_1 y el otro extremo en el conjunto V_2 . Un *grafo bipartito completo* es un grafo bipartito tal que cada uno de los vértices de V_1 es adyacente con todos los de V_2 y viceversa. Si el conjunto V_1 tiene n vértices y el conjunto V_2 tiene m , el grafo bipartito completo cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ se denota $K_{n,m}$. El grafo $K_{n,m}$ tiene $n + m$ vértices $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ y nm aristas $A = \{a_{ij}\}$ con $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ de manera que $\varphi(a_{ij}) = (v_i, w_j)$. Estos grafos también pueden caracterizarse por el resultado siguiente.

Proposición 1.1. *Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos con un número impar de vértices.*

Demostración

Sea G un grafo bipartito cuyo conjunto de vértices es $V = V_1 \cup V_2$. Supongamos que G tiene un ciclo v_1, \dots, v_r con $v_1 = v_r$. Veamos que necesariamente r tiene que ser par. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que v_1 está en V_1 , por lo que v_2 está en V_2 , v_3 en V_1 y así sucesivamente. Esto es, que v_i pertenece a V_1 si y sólo si i es impar y pertenece a V_2 si y sólo si i es par. Como v_r debe pertenecer a V_1 porque $v_1 = v_r$, entonces r tiene que ser impar y el ciclo tiene un número par de vértices.

Recíprocamente, sea G un grafo sin ciclos con un número impar de vértices. Veamos que G es un grafo bipartito. Es claro que un grafo es bipartito si, y sólo si, lo es cada una de sus componentes conexas, por tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G es un grafo conexo. Consideramos un vértice v_1 de G y denotamos V_1 al conjunto de los vértices v_2 de G tales que el camino más corto $v_1 \dots v_2$ entre ellos tiene longitud par. Sea V_2 el conjunto de los vértices de G que no están en V_1 . Si consideramos esta partición de los vértices de G se tiene que $V = V_1 \cup V_2$ y que no hay ninguna arista que una vértices de V_1 con vértices de V_1 , ni vértices de V_2 con vértices de V_2 porque de ser así tendríamos un ciclo de longitud impar en G . \square

En la figura 1.8 se detallan algunos de ejemplos de grafos pertenecientes a cada una de las clases que acabamos de definir.

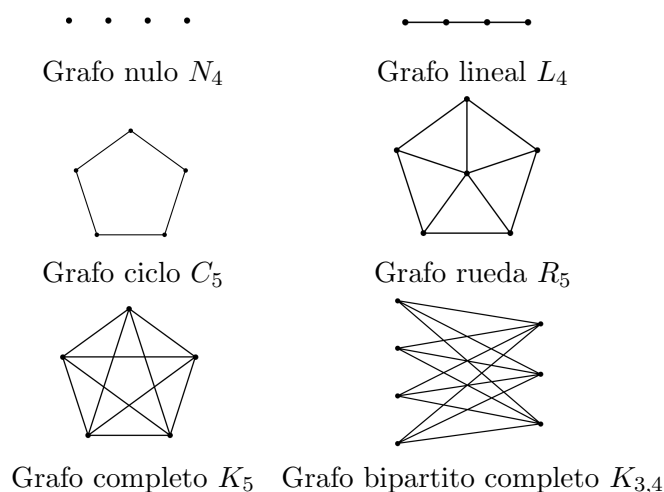


Figura 1.8: Ejemplos de grafos

El concepto de grafo bipartito se puede generalizar y se obtienen los *grafos multipartitos*. Se define un *grafo r-partito* con $r \geq 2$, si su conjunto de vértices admite una partición en r conjuntos V_1, \dots, V_r tal que todas sus aristas tienen los extremos en conjuntos diferentes, es decir, los vértices de un mismo conjunto no pueden ser adyacentes. Al igual que antes, si tenemos un grafo r-partito tal que dados dos vértices cualesquiera pertenecientes a subconjuntos V_i diferentes son adyacentes entonces se dice que el grafo es un *grafo r-partito completo*. Si denotamos por n_i al número de vértices del subconjunto V_i para $i = 1, \dots, r$, al grafo r-partito completo cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup \dots \cup V_r$ se le denota K_{n_1, \dots, n_r} . Si se tiene que $n_1 = \dots = n_r = s$ entonces la notación se puede abreviar y el grafo r-partito completo tal que sus r subconjuntos de vértices tienen exactamente s vértices se denota K_s^r . Por ejemplo, el grafo de la figura 1.9 es el grafo 3-partito completo $K_{2,3,3}$

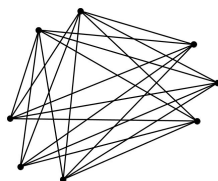


Figura 1.9: Grafo tripartito

La última de las familias de grafos que vamos a definir son los árboles. En teoría de grafos, se dice que un grafo es un *árbol* si es un grafo conexo sin ciclos. O lo que es lo mismo, un árbol es un grafo G tal que dados dos vértices cualesquiera de G existe un único camino que los une. Esta definición a simple vista no parece ser demasiado restrictiva, pero el número de aristas de un árbol determina su número de vértices y viceversa, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sea G un árbol con n vértices y m aristas. Entonces, se verifica que $n = m + 1$.*

Demostración.

Vamos a probarlo por inducción sobre n . Sea G un árbol con un vértice. Como G no tiene ciclos, en particular, tampoco tiene lazos y como solamente tiene un vértice no puede tener ninguna arista. Con lo que $m = 0$ y se verifica la igualdad. Supongamos ahora que la igualdad se cumple para todos los árboles con menos de n vértices y sea G un árbol con $n \geq 2$ vértices. Sea a una arista cualquiera de G cuyos extremos son u y v . Como G es un árbol, existe un único camino que une u con v y por tanto, en el grafo $G \setminus a$ no existe ningún camino de u a v . Esto quiere decir que $G \setminus a$ no es conexo y su número de componentes conexas es dos. Sean G_1 y G_2 las dos componentes conexas de G . G_1 y G_2 son subgrafos de G , que no tiene ciclos por ser un árbol y, en consecuencia, G_1 y G_2 tampoco tienen ciclos. Como ambos subgrafos son conexos sin ciclos podemos afirmar que son árboles y entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción obteniendo que $V(G_i) = A(G_i) + 1$ para $i = 1, 2$. De donde concluimos que

$$\begin{aligned} A(G) &= A(G \setminus a) + 1 = A(G_1) + A(G_2) + 1 = V(G_1) + V(G_2) - 1 = \\ &= V(G \setminus a) - 1 = V(G) - 1 \end{aligned}$$

cumpliendo la igualdad deseada. \square

Sin embargo, el hecho de que el número de vértices de un árbol determine su número de aristas no implica que todos los árboles con el mismo número de vértices sean isomorfos. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran dos árboles con cuatro vértices que no son isomorfos.



Figura 1.10: Árboles con cuatro vértices no isomorfos

En un árbol G , una *hoja* es un vértice de G de grado uno y un *vértice interno* es un vértice de grado por lo menos dos. En algunas ocasiones es conveniente distinguir uno de los vértices del grafo de manera especial, de manera que las aristas tengan una orientación natural hacia (o desde) dicho vértice. Este vértice se denomina *raíz del árbol* y un árbol en el que se ha señalado uno de sus vértices como raíz se llama *árbol con raíz*. Al elegir una raíz de un árbol G se impone una ordenación parcial de sus vértices de manera que un vértice v es menor que otro vértice u si y sólo si el único camino desde la raíz hasta u pasa por v . En un árbol con raíz, se denota el *padre* de un vértice al vértice adyacente a él en el camino que existe hacia la raíz. Todos los vértices salvo la raíz tienen un único padre. De manera análoga, un *hijo* de un vértice v es cualquiera de los vértices de los cuales v es padre. La figura siguiente muestra un ejemplo de un árbol con raíz donde el vértice v es la raíz.

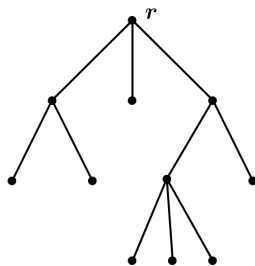


Figura 1.11: Árbol con raíz

Capítulo 2

Número cromático de un grafo

Tal como se ha comentado en la introducción, es interesante saber cómo se puede colorear un grafo y cuál es el mínimo número de colores necesarios para ello. Los primeros resultados acerca de la coloración de grafos tratan, casi exclusivamente, de colorear grafos planos de manera análoga al estudio del problema de los cuatro colores. La coloración de grafos se ha estudiado como un problema algorítmico desde principios del año 1970. En este capítulo mostraremos la coloración en vértices de un grafo. Para ello dispondremos de una paleta de colores $S = \{a, b, c, \dots\}$, a cuyos elementos nos referiremos como *colores*. Habitualmente nos referiremos a los colores como números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Definición 2.1. Sea G un grafo y S una paleta de colores. Una *coloración en vértices de G* con los colores de S es una correspondencia tal que a cada uno de los vértices de G se le asigna un color de S de manera que dos vértices adyacentes no pueden recibir el mismo color. Formalmente, una coloración de G con S colores es una aplicación $c : V \rightarrow S$ tal que $c(v) \neq c(w)$ si existe una arista de G que une v y w . El valor de $c(v)$ es el color que recibe el vértice v en la coloración c .

Por ejemplo, el grafo de la figura 1.1 se puede colorear con tres colores como se muestra en la siguiente figura

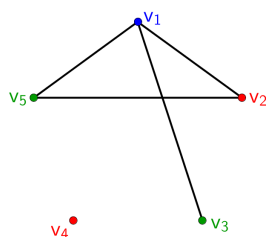


Figura 2.1: Ejemplo de coloración

Definición 2.2. Una coloración en vértices de un grafo G con k colores ($k \geq 1$) se llama *k-coloración* en vértices de G . Se dice que un grafo G es *k-coloreable* si existe una *k-coloración* en vértices de G .

De ahora en adelante, en este capítulo nos referiremos a una *k-coloración* en vértices de un grafo simplemente como *k-coloración* y cuando no sea necesario explicitar el número de colores simplemente como *coloración*.

Es claro que si un grafo G tiene un lazo en un vértice v no se puede colorear porque los extremos de una arista no pueden llevar el mismo color, por tanto, no podríamos asignarle ningún color a v . El hecho de que un grafo G tenga aristas múltiples no influye en la coloración, pues una coloración de G sería la misma que la que se puede hacer a G quitando las aristas múltiples. Entonces, podemos restringir el estudio de la coloración de grafos únicamente a la coloración de grafos simples. De ahora en adelante, todos los grafos a los que nos refiramos en este capítulo serán grafos simples.

Es claro que si G es un grafo con n vértices siempre se va a poder colorear con n colores asignando un color diferente a cada vértice. Por otra parte, también se considerará coloración si disponemos de $n + 1$ o más colores. Este hecho se verá más claramente en el capítulo correspondiente al polinomio cromático. El siguiente resultado es trivial teniendo en cuenta lo anterior.

Proposición 2.1. *Sea G un grafo con n vértices. Si G es k -coloreable, entonces G también es k' -coloreable para todo $k' \in \mathbb{N}$ tal que $k < k'$.*

A partir del resultado anterior, se deduce que si G no es k -coloreable entonces tampoco va a ser k' -coloreable para ningún $k' \in \mathbb{N}$ con $k' < k$.

Puesto que todo grafo G con n vértices admite siempre una n -coloración, se tiene que para cada grafo G existe un valor $k \in \mathbb{N}$ tal que G es k -coloreable pero no es $(k - 1)$ -coloreable. Podemos definir entonces el concepto de número cromático.

Definición 2.3. El *número cromático* de un grafo G se define como el mínimo valor $k \in \mathbb{N}$ tal que G es k -coloreable y se denota por $\chi(G)$. Si $k = \chi(G)$ se dice que el grafo G es k -cromático.

En los ejemplos descritos en la introducción, el número cromático del grafo asociado nos proporciona información sobre el mínimo número de días que tiene que durar el congreso, o el mínimo número de contenedores necesarios para almacenar los productos químicos y así poder optimizar recursos.

Una observación útil a la hora de calcular el número cromático es que nos podemos restringir al caso de los grafos conexos. Como no existen aristas que unan los vértices de dos componentes conexas, podemos colorear cada una de ellas de manera totalmente independiente.

Proposición 2.2. *Sea G un grafo que tiene r componentes conexas G_1, G_2, \dots, G_r cuyos números cromáticos son $\chi(G_1), \chi(G_2), \dots, \chi(G_r)$ respectivamente. Entonces el número cromático de G es*

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq r} \chi(G_i)$$

Demostración.

Sea G_{i_0} la componente conexa de G con mayor número cromático. Es claro que para colorear G se necesitan al menos $\chi(G_{i_0})$ colores porque $G_{i_0} \subset G$.

Recíprocamente, si conocemos el valor de $\chi(G_{i_0})$ podemos colorear todas las demás componentes conexas de G con ese número de colores porque $\chi(G_i) \leq \chi(G_{i_0})$ para todo i y por tanto también podemos colorear G con $\chi(G_{i_0})$ colores. \square

Es claro que un grafo G tiene número cromático $\chi(G) = 1$ si y sólo si es el grafo nulo, pues si tiene al menos una arista son necesario como mínimo dos colores para colorear a cada uno de su vértices. Por otro lado, los grafos con número cromático dos vienen determinados por el resultado siguiente.

Proposición 2.3. *Un grafo G tiene número cromático dos si y sólo si tiene aristas y es un grafo bipartito.*

Demostración.

Sea G un grafo cuyo número cromático es dos y sea c una coloración de G con dos colores que denotaremos 1 y 2. Lógicamente, G tiene al menos una arista. Sean V_1 y V_2 los conjuntos formados por todos los vértices de G que están coloreados en c con los colores 1 y 2 respectivamente. Es claro que V_1 y V_2 son dos conjuntos disjuntos que forman una partición del conjunto de vértices de G . Como c es una 2-coloración de G dada una arista cualquiera de G cada uno de sus extremos debe llevar un color diferente en c , esto es, que uno de ellos está en el conjunto V_1 y el otro en el conjunto V_2 . Por tanto G es un grafo bipartito.

Recíprocamente, si G es un grafo bipartito con aristas y V su conjunto de vértices, es claro que no se puede colorear con un único color. Por otro lado, sean V_1 y V_2 los conjuntos de la partición de V . Asignamos el color 1 a todos los vértices del conjunto V_1 y el color 2 a todos los del conjunto V_2 . Como no hay ninguna arista que una vértices de V_1 con vértices de V_1 , ni vértices de V_2 con vértices de V_2 , tenemos una 2-coloración de G . Luego, su número cromático es dos. \square

Se puede ver fácilmente que si G' es un subgrafo de G , cualquier coloración de G es también una coloración de G' porque en G' hay las mismas o menos aristas que en G y por tanto $\chi(G') \leq \chi(G)$. Esto nos proporciona una manera de acotar inferiormente el número cromático de G que consiste en calcular el número cromático de subgrafos de G cuyo número cromático sea conocido.

A continuación vamos a estudiar cuales son los números cromáticos de algunas de las familias de grafos presentadas en el capítulo 1. Para comprobar que un número k es el número cromático de un grafo G es necesario comprobar que, efectivamente, G se puede colorear con k colores y que no se puede colorear con menos de k .

Como se ha comentado anteriormente, los únicos grafos que tienen número cromático uno son los grafos nulos N_n y los únicos que tienen número cromático dos son los grafos bipartitos.

El grafo completo con n vértices, K_n tiene número cromático n porque, claramente, se puede colorear con n colores y dados dos vértices cualesquiera de K_n siempre existe una arista que los une. Entonces, es imposible colorearlo con menos de n colores.

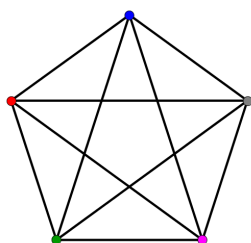


Figura 2.2: Coloración de K_5

Para estudiar el número cromático del grafo ciclo C_n tenemos que distinguir dos casos según la paridad de n . Supongamos que n es par. Veamos que el número cromático de C_n es dos, ya que todo grafo ciclo con un número par de vértices es un grafo bipartito. Para verlo, basta numerar sus vértices v_1, \dots, v_n de manera que v_i sea adyacente a v_{i-1} y a v_{i+1} para $1 < i < n$ y,

además, v_1 sea adyacente a v_n . Se considera como partición del conjunto de vértices de C_n los conjuntos V_1 y V_2 formados por todos los vértices v_i con i par y con i impar respectivamente.

Si n es impar, el número cromático de C_n es tres. En efecto, es claro que un ciclo con un número impar de vértices no es bipartito por la proposición 1.1 y por tanto su número cromático tiene que ser mayor o igual que tres. Veamos que C_n se puede colorear con, exactamente, tres colores. Para ello, numeramos los vértices de C_n de la misma manera que en el caso anterior y los coloreamos alternadamente con los colores 1 y 2. El vértice v_n no se puede colorear con el color 1 porque es adyacente al vértice v_1 , ni con el color 2 porque es adyacente al vértice v_{n-1} (que es de color 2 porque n es impar). Esto se puede apreciar en el ejemplo del grafo C_5 en la figura 2.3. De esta manera, se tiene una 3-coloración de C_n y, por tanto, su número cromático es tres.

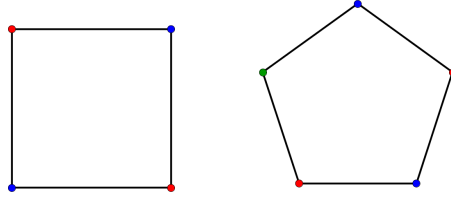


Figura 2.3: Coloración de C_4 y C_5

El número cromático de un árbol es dos, ya que un árbol es un grafo bipartito. Como un árbol no tiene ciclos por definición, en particular, no tiene ciclos con un número impar de vértices y por la proposición 1.1 se tiene que un árbol es un grafo bipartito.

Ya hemos visto que el número cromático de un grafo se puede acotar inferiormente considerando los números cromáticos de sus subgrafos. A continuación, vamos a ver distintas acotaciones superiores del número cromático de un grafo.

Es claro que el número cromático depende en gran medida del número de aristas incidentes en cada vértice. El siguiente resultado muestra una cota superior teniendo en cuenta esa observación.

Teorema 2.1. *Sea G un grafo y Δ su grado máximo. Entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

Demostración.

Veamos que G puede colorearse con $\Delta + 1$ colores demostrándolo por inducción sobre el número de vértices de G . Si G posee un único vértice, es claro que $\Delta = 0$ (pues no posee aristas), por tanto, para colorear G bastará con un único color y el resultado es cierto. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier grafo con n vértices y veamos que también se verifica para un grafo con $n + 1$ vértices.

Sea G un grafo con $n + 1$ vértices y sea v un vértice de G . Consideramos el grafo $G' = G \setminus \{v\}$ que tiene n vértices. Para todo vértice w de G' , su grado en G' es menor o igual que su grado en G , pues G' tiene las mismas aristas incidentes en w que las que tiene en G , salvo quizás, la arista vw . Por tanto $\Delta(G')$ es menor o igual que Δ . Por hipótesis de inducción, se tiene que el número cromático de G' es menor o igual que $\Delta + 1$. Es decir, que existe una coloración c de G' con a lo sumo $\Delta + 1$ colores.

A partir de esta coloración c podemos obtener una coloración de G únicamente asignando un color al vértice v . Como el grado de v es menor o igual que Δ , dicho vértice tiene a lo sumo Δ

vértices adyacentes en G . Por tanto, en la coloración c hay a lo sumo Δ colores que no podemos usar para colorear v . Basta asignar a v un color que no sea ninguno de éstos. De esta forma ya tenemos una coloración de G con a lo sumo $\Delta + 1$ colores. \square

Este teorema proporciona una cota del número cromático que no en todos los grafos es una buena acotación. Por ejemplo, para un grafo completo de n vértices se tiene que su número cromático es n y su grado máximo Δ es igual a $n - 1$. Por lo que, en este caso, la cota

$$\chi(G) = n \leq \Delta + 1 \leq (n - 1) + 1 = n$$

es una muy buena acotación. Pero, si por ejemplo tomamos el grafo bipartito $K_{1,n}$, su número cromático es 2 y su grado máximo es $n - 1$. Por lo que para valores muy grandes de n la cota

$$\chi(G) = 2 \leq \Delta + 1 \leq (n - 1) + 1 = n$$

es una muy mala acotación porque difiere mucho del valor del número cromático.

No se conoce un método general para colorear un grafo arbitrario, pues es un proceso muy complejo. Sin embargo, existen varios algoritmos para colorear grafos. Dichos algoritmos no tienen por qué utilizar el mínimo número de colores posibles. Uno de estos algoritmos se conoce como *algoritmo voraz*, que describimos a continuación.

En primer lugar, se ordenan los vértices de G en una lista v_1, v_2, \dots, v_n teniendo en cuenta que el algoritmo proporcionará una coloración u otra dependiendo de cuál sea esta ordenación. Una vez que están ordenados y tenemos la paleta de colores $S = \{1, 2, \dots, n\}$ se procede de la siguiente manera:

- 1º Se asigna el color 1 al vértice v_1 .
- 2º Si v_2 es un vértice adyacente a v_1 se le asigna el color 2 y si no lo es se le asigna el color 1.
- 3º Para cada v_i con $i = 3, 4, \dots, n$ se elige el primero de los colores de la paleta que no haya sido usado para ninguno de sus vértices adyacentes ya coloreados. Es decir, el vértice v_i lleva el color j donde j es el menor entero tal que ninguno de los vecinos de v_i de la lista de vértices v_1, \dots, v_{i-1} tiene el color j .

En la figura 2.4 se muestra un ejemplo de coloración de un grafo bipartito con ocho vértices.

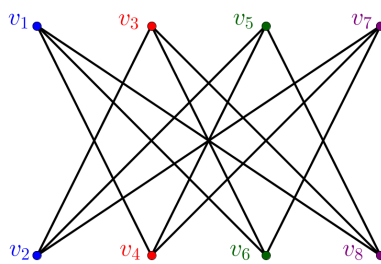


Figura 2.4: Ejemplo algoritmo voraz

La coloración obtenida mediante el algoritmo voraz utiliza cuatro colores, pero hemos visto que todo grafo bipartito se puede colorear solamente con dos. En cada caso, se realiza la mejor

elección pero sin tener en cuenta lo que ocurra después. Para colorear un vértice v_i solo se tiene en cuenta los colores asignados en los vértices v_j con $j < i$ pero no nos preocupamos de qué colores llevarán los vértices v_j cuando $j > i$. Por tanto, en general, este algoritmo no va a proporcionar una coloración óptima de G , aunque sí existe una ordenación de los vértices de G tal que, al aplicar este algoritmo, se obtiene una coloración de G con $\chi(G)$ colores. Es claro que existen $n!$ posibles formas de ordenar el conjunto de vértices V , por tanto, no es fácil saber cuál o cuáles van a ser las ordenaciones óptimas. En algunos casos esta ordenación óptima se consigue haciendo que los primeros vértices sean los de grado más alto y los últimos vértices los de grado más bajo. Ahora vamos a aplicar el algoritmo voraz al mismo grafo que antes, pero con la siguiente ordenación de sus vértices: $v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, v_4, v_6, v_8$. En la figura 2.5 se puede ver una coloración del grafo anterior con solo dos colores, que es el número cromático del grafo.

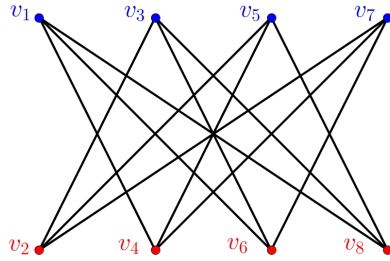


Figura 2.5: Ejemplo algoritmo voraz

Aplicando este algoritmo se puede probar que la cota dada en el teorema 2.1 puede mejorarse bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.2. *Sea G un grafo conexo y no regular. Entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta$$

Demostración.

Como G es un grafo no regular, no existe un entero positivo k de forma que todos los vértices del grafo tienen grado k . Luego, existe un vértice v_n tal que su grado es estrictamente menor que el grado máximo del grafo. Vamos a ordenar los vértices de G para luego proceder a colorear G mediante el algoritmo voraz.

Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{n-r}$ los vértices de G adyacentes a v_n . Como el grado de v_n es menor que Δ se tiene que r es menor que Δ . Colocamos tras v_{n-r} los vértices adyacentes a v_{n-1} sin contar a v_n , después los vértices adyacentes a v_{n-2} y así sucesivamente hasta llegar a los vértices de v_{n-r} . Al acabar con este vértice, seguimos añadiendo vértices adyacentes al último vértice que no hayamos considerado y repetimos este proceso. Como G es conexo podemos asegurar que todos los vértices de G van a estar en la lista. Se tiene la lista de vértices siguiente:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-r}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$$

Por hipótesis, todos los vértices del grafo tienen a lo sumo Δ vértices adyacentes. Salvo el vértice v_n todos los vértices v_i tienen algún vértice adyacente “después de él” y, por tanto, existen a lo sumo $\Delta - 1$ vértices adyacentes “antes que él”. Por la elección hecha del vértice v_n , dicho vértice tiene a lo sumo $\Delta - 1$ vértices adyacentes.

Con esta ordenación y mediante el algoritmo voraz podemos colorear G con Δ colores y en consecuencia

$$\chi(G) \leq \Delta$$

□

No obstante, existen grafos regulares donde la desigualdad del teorema anterior también se cumple. Por ejemplo, en el ciclo C_4 el grado máximo y el número cromático coinciden. El siguiente teorema es una generalización del anterior donde se determinan todos los grafos en los que el número cromático es, a lo sumo, su grado máximo. Aunque se podría haber restringido la demostración a grafos regulares, incluimos aquí, su versión completa pues alguna de las herramientas mostradas serán también utilizadas en el teorema de los cinco colores (Teorema 3.3).

Teorema 2.3 (Teorema de Brooks). *Sea G un grafo conexo que no es un grafo completo (K_n) ni un ciclo impar (C_{2n+1}). Entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$*

Demostración.

Por simplicidad, probaremos el resultado de forma independiente en los casos en los que el grado máximo de G es menor o igual que 2. Si $\Delta = 0$ entonces el grafo G es el grafo K_1 (pues debe ser conexo) que no está dentro de las hipótesis del teorema.

Claramente, si el grado máximo de G es 1, como G es conexo, no tiene vértices aislados y todos sus vértices tienen grado igual a uno. El único grafo conexo con estas características es K_2 (que no verifica las hipótesis).

Supongamos que el grado máximo de G es dos. Si todos los vértices son del mismo grado, entonces G es un ciclo. Por hipótesis, G tiene un número par de vértices y, como hemos visto anteriormente, tenemos que $\chi(G) = 2 = \Delta$. Si existe al menos un vértice de G de grado uno, entonces $G = L_n$ para algún n y se tiene que $\chi(L_n) = 2 = \Delta$.

Sea ahora G un grafo tal que Δ es mayor o igual que tres. Es fácil ver que G tiene al menos cuatro vértices (pues no existen en G aristas múltiples ni ciclos). Demostraremos el resultado por inducción en el número de vértices n del grafo. Si G tiene cuatro vértices, es claro que $\Delta = 3$. Entonces existe al menos un vértice de este grado. Por hipótesis, G no es completo y, en consecuencia, existe al menos un vértice de grado menor que Δ . Además, por el mismo motivo, G no puede tener tres vértices de grado tres. Distingamos entonces los siguientes casos dependiendo de la secuencia de grados y para cada uno de estos casos probaremos que $\chi(G) \leq \Delta$.

- a) La secuencia de grados es $\{2, 2, 3, 3\}$. En este caso, G se puede colorear con tres colores de la forma siguiente: asignando un color diferente a los dos vértices de grado tres y el tercer color para los dos vértices de grado dos (ver figura 2.6 a)). Con esta coloración, $\chi(G) \leq 3 = \Delta$.
- b) La secuencia de los grados es $\{1, 2, 2, 3\}$. Si G es un grafo con esta secuencia de grados, es claro que los vértices de grado dos son entre sí adyacentes. Asignando un color diferente para cada uno de estos vértices, un tercer color al vértice de grado 3 y al vértice de grado uno cualquiera de los colores de los vértices de grado dos. Se tiene entonces una 3-coloración de G con lo que $\chi(G) \leq 3 = \Delta$ (ver figura 2.6 b)).

- c) La secuencia de grados es $\{1, 1, 1, 3\}$. Asignando un color al vértice de grado tres y otro distinto al resto de los vértices, el grafo se puede colorear con dos colores y se satisface el teorema pues $2 = \chi(G) \leq \Delta = 3$ (ver figura 2.6 c)).

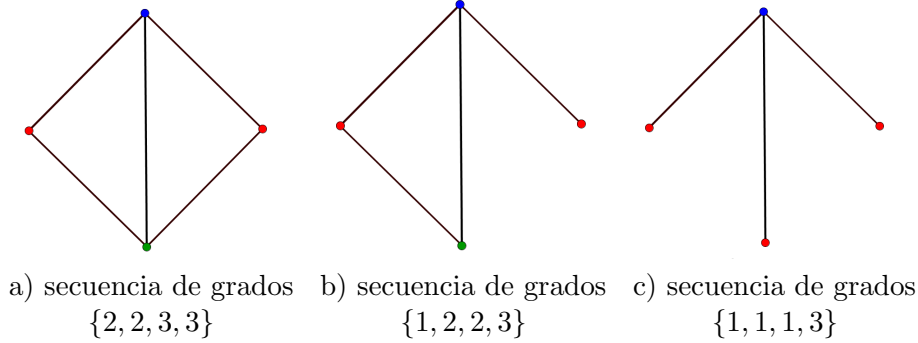


Figura 2.6: Caso $\Delta = 3$

Probaremos ahora que si el teorema es cierto para un grafo con $n - 1$ vértices, entonces también lo es para un grafo de n vértices. Sea G un grafo de n vértices y supongamos que el número cromático de G es mayor que su grado máximo, es decir:

$$\chi(G) > \Delta \quad (2.1)$$

Sea v un vértice cualquiera de G y sea el subgrafo $H = G \setminus \{v\}$. Por hipótesis de inducción, como H tiene un vértice menos que G , toda componente conexa H' de H verifica que $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta(H) \leq \Delta$ si H' no es completo ni un ciclo de orden impar. Si H' es completo su número cromático coincide con su número de vértices, digamos m , y su grado máximo es $m - 1$. Por construcción, existe un vértice x de H' adyacente a v en G , pues G es conexo. Entonces, el grado de x en G es $m - 1 + 1 = m$ y el grado máximo de G es al menos m . Por tanto, $\chi(H') \leq \Delta$. Por otra parte, en el caso en que H' es un ciclo impar, se tiene que su número cromático es tres. Como Δ es al menos tres, $\chi(H') \leq \Delta$.

En cualquier caso hemos visto que cada componente conexa de H , y en consecuencia H , se puede colorear con, a lo sumo, Δ colores. Por (2.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} &\text{En toda coloración de } H, \text{ los vértices adyacentes a} \\ &v \text{ tienen todos colores distintos y, además, } d_G(v) = \Delta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sea c una Δ -coloración cualquiera de H . Numerando los colores por los enteros $1, 2, \dots, \Delta$, sea v_i , $1 \leq i \leq \Delta$ el vértice adyacente a v que tiene color i en c . Para todo par de enteros i, j distintos, sea H_{ij}^c el subgrafo de H formado por todos los vértices de H coloreados con el color i o el color j en la coloración c . Si i es distinto de j , se tiene que

$$\text{Los vértices } v_i \text{ y } v_j \text{ están en la misma componente conexa } K_{ij}^c \text{ de } H_{ij}^c \quad (2.3)$$

En caso contrario, al intercambiar los colores i, j en la componente conexa de v_i , H_{ij}^c y no en la de v_j , se tendría que los vértices v_i y v_j pueden colorearse del mismo color lo que contradice (2.2).

Además,

$$K_{ij}^c \text{ es un camino entre } v_i \text{ y } v_j \quad (2.4)$$

Este hecho es equivalente a decir que v_i y v_j tienen grado uno en K_{ij}^c y el resto de vértices grado dos. De no ser así, o bien uno de los dos vértices v_i o v_j tiene al menos dos vértices adyacentes en K_{ij}^c , o bien existe un vértice v de K_{ij}^c (distinto de v_i y v_j) que tiene, al menos, tres vértices adyacentes en K_{ij}^c . En el primer caso, supongamos, sin pérdida de generalidad, que el vértice v_i es adyacente en K_{ij}^c a dos vértices. Estos vértices, en la coloración c , tienen color j (pues pertenecen a K_{ij}^c y son adyacentes a v_i , que tiene color i). Por otra parte, v_i es adyacente en H , a lo sumo, a $\Delta - 1$ vértices. Entonces, en cualquier coloración de H , los vértices adyacentes a v_i están coloreados con, a lo sumo, $\Delta - 2$ colores y se puede elegir uno de los dos colores restantes para el vértice v_i . Cambiando el color i tenemos una nueva coloración de H que contradice (2.2). En el segundo caso, sea u un vértice de K_{ij}^c distinto de v_i y v_j adyacente al menos a tres vértices en K_{ij}^c . Es claro que el grado de u en H es menor que el grado máximo de G . En la coloración c de H , los tres vértices adyacentes a u en K_{ij}^c tienen el mismo color, que es el contrario a u , por lo que, para los, a lo sumo, Δ vértices adyacentes a u se tienen a lo sumo $\Delta - 2$ colores y se podría cambiar el color a u . Pero si le cambiásemos el color a u , tendríamos que elegir otro color distinto de i y de j (el que tenía él y sus vecinos) y u no pertenecería a H_{ij}^c . De esta forma v_i y v_j no estarían en la misma componente conexa de H_{ij}^c lo que contradice (2.3).

Finalmente probaremos que

$$\text{Si } i, j, k \text{ son enteros distintos } K_{ij}^c \cap K_{ik}^c \text{ es el vértice } v_i \quad (2.5)$$

Supongamos que existe un vértice u distinto de v_i que pertenece a K_{ij}^c y a K_{ik}^c . Por definición de estos conjuntos, en la coloración c , u tiene asignado el color i . Además, por (2.4) el vértice u tiene dos vértices adyacentes de color j en K_{ij}^c y otros dos vértices adyacentes de color k en K_{ik}^c . Entonces, el conjunto de vértices adyacentes a u están coloreados con, a lo sumo, $\Delta - 2$ colores y es posible cambiar el color de u . Sin embargo, como u pertenece a K_{ij}^c , si se le cambia el color por uno diferente de i o j , dicho vértice no estaría en $K_{ij}^c \subset H_{ij}^c$ y, en consecuencia, los vértices v_i y v_j no pertenecerían a la misma componente conexa de H_{ij}^c , lo que contradice (2.3).

Una vez probadas estas afirmaciones, estamos en disposición de probar que la hipótesis hecha en (2.1) es falsa y el teorema quedará probado.

Sean i, j dos enteros distintos menores que Δ y sea u el único vértice adyacente a v_i en K_{ij}^c . Es claro que u está coloreado en c con el mismo color que v_j . Sea v_k un vértice de H con k distinto de i y de j . Sea c' una nueva coloración de H obtenida intercambiando los colores i y k en la componente K_{ik}^c .

Por (2.5), los colores de la componente $K_{ij}^c \setminus v_i$ no cambian en la coloración c' . En particular, el vértice u no cambia de color en c' y, como sigue siendo adyacente a v_i , se puede concluir que:

$$\text{El vértice } u \text{ debe estar en } K_{ij}^{c'} \quad (2.6)$$

Por otro lado, como los colores de $K_{ij}^c \setminus v_i$ no cambian en la coloración c' todos sus vértices tienen el color de v_i o de v_j en c . Pero en la coloración c' el color de v_i es el color de v_k y el color de v_j se mantiene igual. Entonces $K_{ij}^c \setminus v_i \subseteq K_{jk}^{c'}$, y, en particular, u está en $K_{jk}^{c'}$. Por (2.6), se tiene que u está en $K_{ij}^{c'} \cap K_{jk}^{c'}$ y por (2.5), tiene que ser $u = v_j$.

Recordemos que u es un vértice adyacente a v_i , por lo que existe una arista a que une v_i con v_j para todo i distinto de j . Por tanto, el subgrafo G' de G inducido por $\{v, v_1, v_2, \dots, v_\Delta\}$ es

un grafo completo. Como $d_{G'}(v) = \Delta = d_G(v)$ y $d_{G'}(v) = \Delta = d_G(v)$ los vértices de G' no son adyacentes a ningún otro vértice que no esté en G' . Esto quiere decir que G' es una componente conexa de G . Como G es conexo deben coincidir, lo cual contradice la hipótesis de que G no sea completo. \square

Las cotas anteriores, relativas al número cromático, relacionan éste con el grado máximo del grafo. Existen también otras cotas para el número cromático dependiendo del número de aristas del grafo como se muestra a continuación.

Teorema 2.4. *Todo grafo G con m aristas verifica que*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$$

Demostración.

Sea k el número cromático de G y sea c una coloración de G . Agrupando los vértices de G según el color que tienen asignado en la coloración c se tienen distribuidos los vértices de G en k conjuntos distintos.

Entre dos cualesquiera de esos subconjuntos debe haber, al menos, una arista, pues k es el número cromático de G . Por tanto, $m \geq \frac{k(k-1)}{2}$, de lo que se deduce que $k^2 - k - 2m \leq 0$. Esta desigualdad es cierta si k pertenece al intervalo $\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}\right]$ y se tiene la cota deseada. \square

Hasta ahora hemos visto varias acotaciones del número cromático todas ellas diferentes, pero en algunos casos coinciden. Por ejemplo, en el caso del grafo completo K_n (que tiene $\binom{n}{2}$ aristas, el máximo número de ellas posibles para un grafo de n vértices) la cota anterior coincide con el número de vértices y con la cota $\Delta(K_n) + 1$. En general, para los grafos de n de vértices que tienen menos de $\binom{n}{2}$ aristas, la acotación del número cromático por el número de vértices n , es peor que la acotación probada en el teorema anterior. En cuanto a la cota proporcionada por el teorema de Brooks, es claro que siempre es mejor que la acotación por el número de vértices. Al estudiar si la cota del teorema de Brooks es mejor o peor que la cota relacionada con las aristas que acabamos de ver no podemos sacar ninguna conclusión, pues depende del grafo que sea es mejor una cota o la otra. Por ejemplo, el caso del grafo lineal L_{11} tiene grado máximo dos y diez aristas, por lo que la cota del teorema anterior es cinco que es peor acotación del número cromático que la del teorema de Brooks. En cambio, si consideramos el grafo bipartito completo $K_{1,10}$, también tiene diez aristas pero su grado máximo es diez, por lo que la cota relacionada con las aristas es mejor que la proporcionada por el teorema de Brooks.

Capítulo 3

Coloración de grafos planos

Como ya se ha comentado anteriormente, el coloreado de grafo planos y, en particular, el teorema de los cuatro colores, se considera el origen de la coloración en la teoría de grafos. Recordemos que el enunciado del teorema de los cuatro colores dice lo siguiente:

“Dada cualquier división de un mapa plano en regiones, éste puede ser coloreado, únicamente con cuatro colores, de manera que regiones con frontera común tengan colores distintos.”

Para una interpretación correcta de este problema mediante la teoría de grafos, es necesario hacer algunas restricciones a los mapas políticos que se van a colorear. En primer lugar, todos los puntos del mapa que pertenecen a tres o más países deben ser ignorados, pues no se considera que sea una frontera común. En segundo lugar, para que el teorema sea cierto, todos los países del mapa deben ser regiones simplemente conexas. En los mapas políticos reales esto no siempre es cierto, pues muchos países tienen parte de su territorio dentro de otros países. Por ejemplo, Alaska pertenece a Estados Unidos aunque no sean regiones contiguas. Por último, habitualmente en los mapas políticos se utiliza un único color, distinto al de todos los países, para colorear todas las regiones de agua. En estos casos, es claro que se necesitan cuatro colores para colorear todos los países y un quinto color para colorear las zonas de agua.

Para aplicar la teoría de grafos a la interpretación de este teorema a todo mapa plano (que cumple las condiciones requeridas anteriormente) se le hace corresponder un grafo de la siguiente manera. Se coloca un vértice en un lugar arbitrario dentro de cada región o país, y se dibujan las aristas uniando los vértices de aquellas regiones que tienen una frontera común, como se puede ver en la figura 3.1. El grafo resultante es siempre un grafo plano, y todo grafo plano puede ser construido a partir de un mapa según esta construcción.

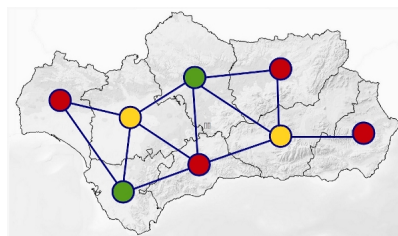


Figura 3.1: Grafo asociado a un mapa

De manera intuitiva se puede decir que la planaridad es la propiedad que tiene un objeto de poder ‘vivir’ en el plano, esto es, de poder incluirse dentro del mismo sin perder ninguna de sus propiedades. Una definición más formal, para un grafo, es la siguiente.

Definición 3.1. Un grafo G se dice que es un *grafo plano*, *planar* o que *tiene una representación en el plano* si puede ser representado en el plano (tal como se definió la representación de un grafo en el Capítulo 1) de manera que sus aristas se intersecan únicamente en los vértices del grafo. Esta representación gráfica de G se llama *representación planar de G* .

Todo grafo plano que se puede dibujar en el plano se puede dibujar sobre la esfera y viceversa. En la figura siguiente se muestra una de las posibles representaciones planares del grafo de la figura 1.1.

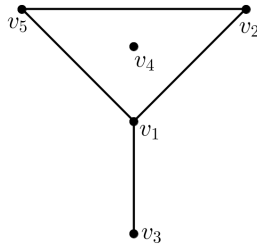


Figura 3.2: Ejemplo de un grafo plano

Las aristas de un grafo plano dividen el plano en un cierto número de regiones conectadas entre sí por las aristas. Más precisamente,

Definición 3.2. Sea G un grafo plano. El conjunto de todos los puntos de \mathbb{R}^2 que son vértices de G o pertenecen a aristas de G se llama *soporte de G* y se denota $sop(G)$. Se definen las *caras* del grafo G como las distintas componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus sop(G)$.

Todo grafo plano G (finito) posee exactamente una cara no acotada que se denomina *cara exterior*. El grafo del ejemplo anterior posee solamente dos caras, la cara exterior y el interior del ciclo $v_1 - v_2 - v_5$ (salvo el vértice v_4). Se denota $C(G)$ al conjunto de todas las caras del grafo G y simplemente C al número de caras de G , es decir, al cardinal de $C(G)$.

La frontera topológica de toda cara es un cierto número de vértices y aristas que forman un recorrido cerrado. Habitualmente, pero no siempre, la frontera de una cara es un ciclo. Dada una cara c de un grafo, se denota $l(c)$ al número de aristas de la frontera de c contadas con multiplicidad. En el ejemplo anterior, la frontera de la cara exterior es el recorrido $v_2 - v_5 - v_1 - v_3 - v_1 - v_2$ con $l(c) = 5$ y la frontera de la cara interior es el recorrido $v_2 - v_5 - v_1 - v_2$ (eliminando el vértice v_4) cuya longitud es 3.

A partir de un grafo plano G se puede construir otro grafo llamado dual de G de la siguiente manera.

Definición 3.3. Dado un grafo plano G , su grafo dual es otro grafo G^* que tiene un vértice por cada cara $c \in C(G)$. Dados dos vértices v_1 y v_2 de G^* hay una arista que los une si existe una arista en G que pertenece a la frontera de las dos caras c_1 y c_2 correspondientes a los vértices v_1 y v_2 respectivamente.

Por ejemplo, el dual del grafo de la figura 3.3 es el grafo siguiente

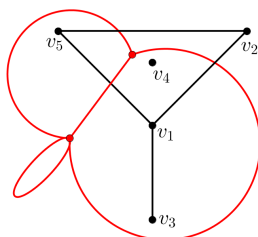


Figura 3.3: Ejemplo del dual de un grafo

Distintas representaciones planas del mismo grafo pueden dar lugar a grafos duales no isomorfos. Dado que el dual de un grafo depende de la representación planar del grafo, el dual de un grafo plano no es único, pues un mismo grafo plano puede tener grafos duales no isomorfos. En la figura 3.4 se muestran dos representaciones planas del mismo grafo de manera que dan lugar a dos grafos duales no isomorfos. El grafo dual de la izquierda tiene un vértice de grado seis (el correspondiente a la cara exterior), mientras que el grafo dual de la derecha tiene grado máximo cinco.

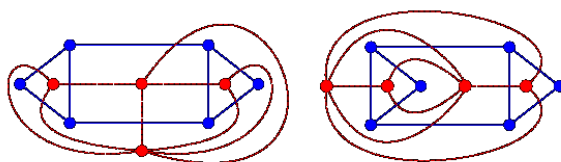


Figura 3.4: Grafos duales no isomorfos

A partir de la definición de grafo dual se siguen, de manera trivial, las siguientes propiedades:

- El conjunto de vértices de G^* es el conjunto de caras de G .
- El conjunto de aristas de G^* coincide con el conjunto de aristas de G .

Teorema 3.1. *Sea G es un grafo plano con A aristas. Entonces,*

$$2A = \sum_{c \in C(G)} l(c)$$

Demostración.

La longitud de las caras es, precisamente, el grado de los vértices del grafo dual. Como el número de aristas de un grafo y de su dual es el mismo, aplicando el lema del apretón de manos (lema 1.1) al grafo G^* se tiene que

$$2A = 2A^* = \sum_{v^* \in V(G^*)} d(v^*) = \sum_{c \in C(G)} l(c)$$

□

El número de vértices, aristas y caras de un grafo plano están relacionados entre sí mediante la conocida fórmula de Euler.

Teorema 3.2 (Teorema de Euler). *Sea G un grafo plano conexo con C caras, A aristas y V vértices entonces $V - A + C = 2$.*

Demostración.

Mostraremos el resultado por inducción en el número de aristas de G . Si G no tiene aristas; como G es conexo, necesariamente G tiene un único vértice y también una única cara. Se tiene entonces que

$$V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2$$

Supuesto cierto el resultado para un grafo plano de n vértices veamos que también se cumple para un grafo de $n + 1$ vértices. Sea G un grafo cualquiera de $n + 1$ vértices. Si G no tiene ciclos entonces es un árbol y por el lema 1.2 tiene n aristas. Además G posee una sola cara y se satisface que $V - A + C = n + 1 - n + 1 = 2$. Si por el contrario G tiene un ciclo, sea a una arista cualquiera de éste. El grafo $H = G \setminus \{a\}$ es un grafo plano conexo con n aristas. Por hipótesis de inducción se tiene que $V_H - A_H + C_H = 2$. Es fácil ver que el número de caras de G es igual al de H más uno, la cara que aparece al cerrar el ciclo por la arista a . Por tanto

$$V_G - A_G + C_G = V_H - (A_H + 1) + (C_H + 1) = 2$$

□

Resultados similares proporcionan cotas sobre el número de aristas de un grafo plano en relación al número de vértices, lo cual nos permite dar una condición necesaria para que un grafo simple sea plano.

Lema 3.1. *Sea G un grafo simple y plano con al menos tres vértices. El número de aristas de G satisface $A \leq 3V - 6$*

Demostración.

Sea G un grafo plano con al menos tres vértices. Cada cara de G está limitada por al menos tres aristas y, en consecuencia, se tiene que

$$\sum_{c \in C(G)} l(c) \geq 3C$$

Sustituyendo la cota anterior en el teorema 3.1 se tiene que $C \leq \frac{2A}{3}$ y reemplazando este valor en la fórmula de Euler (teorema 3.2) se obtiene el resultado. □

Como corolarios es fácil probar que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planos.

Corolario 3.1. *El grafo K_5 no es un grafo plano.*

Demostración.

Supongamos que K_5 es un grafo plano. Entonces por el lema 3.1 se tendría que $A(K_5) \leq 3V(K_5) - 6 = 9$. Por otro lado, como K_5 es completo tiene $\binom{5}{2} = 10$ aristas, llegando así a una contradicción. □

Corolario 3.2. *El grafo $K_{3,3}$ no es un grafo plano.*

Demostración.

Supongamos que $K_{3,3}$ es un grafo plano, esto es, que existe una representación plana de $K_{3,3}$. Como es un grafo bipartito simple no puede tener ciclos de longitud menor que cuatro. Entonces, la frontera de cada cara tiene que tener longitud al menos cuatro porque el recorrido que forma la frontera de una cara debe contener, al menos, un ciclo. Puesto que el grafo $K_{3,3}$ tiene 9 aristas, aplicando el teorema 3.1 se tiene que

$$18 = 2A = \sum_{c \in C(K_{3,3})} l(c) \geq \sum_{c \in C(K_{3,3})} 4 = 4C(K_{3,3})$$

y en consecuencia $C(K_{3,3}) \leq 9/2$. Como $C(K_{3,3})$ tiene que ser un número natural, $C(K_{3,3}) \leq 4$ y por la fórmula de Euler (teorema 3.2) $2 = V(K_{3,3}) - A(K_{3,3}) + C(K_{3,3}) \leq 6 - 9 + 4 = 1$, lo cual es una contradicción. \square

Es claro que si G es un grafo que contiene como subgrafo a K_5 o $K_{3,3}$ entonces no puede ser plano. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$ son los grafos básicos que permiten caracterizar a todos los grafos planos mediante el teorema de Kuratowski ([17]) que afirma que un grafo G es planar si y sólo si no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$ (un grafo H es una subdivisión del grafo G , si H se obtiene de G dividiendo las aristas de G vía vértices de grado dos).

Con los resultados anteriores estamos en disposición de demostrar el teorema de los cinco colores.

Teorema 3.3 (Teorema de los cinco colores). *Todo grafo plano es 5-coloreable.*

Demostración.

Vamos a probarlo por inducción sobre el número de vértices del grafo G . Si G es un grafo plano con, a lo sumo, cinco vértices es claro que G es 5-coloreable. Supuesto que un grafo plano G con $n - 1$ vértices se puede colorear con cinco colores veamos que también se puede un grafo con n vértices. Sea G un grafo plano $n \geq 6$ vértices y m aristas. Si $\delta(G)$ es el grado mínimo del grafo, del lema del apretón de manos (lema 1.1) se deduce que $\delta(G) \leq \frac{2m}{n}$. Aplicando el lema 3.1 se tiene que

$$\delta(G) \leq 6 - \frac{12}{n} < 6$$

Por tanto, en G existe un vértice v de grado a lo sumo cinco. Sea $H = G \setminus \{v\}$. Por hipótesis se inducción H es 5-coloreable. Sea c una coloración de H con cinco colores. Si el grado de v es menor estrictamente que cinco, entonces c usa a lo sumo cuatro colores para colorear a los vecinos de v en H . Entonces, para colorear G coloreamos v de un color distinto al de sus vecinos y el resto de los vértices como en H con lo que ya tendríamos una 5-coloración de G .

Supongamos que el grado de v es exactamente cinco y que G no admite una 5-coloración. Sean v_1, \dots, v_5 los vértices adyacentes a v ordenados según las agujas del reloj (en una representación plana de G) tales que el color de v_i es i . Es claro que estos vértices tienen colores distintos en dicha coloración c . En caso contrario, existiría en G una 5-coloración porque si sus cinco vecinos se coloreasen solamente con cuatro colores podríamos dar a G una 5-coloración como en el caso anterior.

Sea H_{ij}^c el subgrafo de H formado por los vértices coloreados de color i o de color j en la coloración c . De la misma manera que en la demostración del teorema de Brooks (teorema 2.3) se puede probar que v_i y v_j están en la misma componente conexa K_{ij}^c de H_{ij}^c .

Sea P_{ij}^c el camino de K_{ij}^c que une v_i y v_j y sea D el ciclo formado por este camino y las aristas vv_i y v_jv .

Tomando, por ejemplo, $(i, j) = (1, 3)$ entonces el ciclo D separa v_2 de v_4 y por el Teorema de la Curva de Jordan ¹ cualquier camino P_{24} que vaya de v_2 a v_4 debe cruzar D porque v_2 pertenece al interior de D y v_4 al exterior.

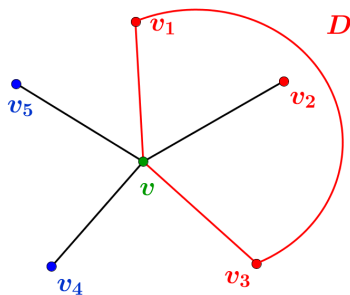


Figura 3.5

Como G es un grafo plano, D y P_{24} se tienen que cruzar en un vértice, lo cual es una contradicción porque ningún vértice de D es de color 2 o de color 4.

Con esto ya tenemos que G admite una 5-coloración. \square

Acabamos de probar que todo grafo plano se puede colorear con cinco colores, pero, como ya hemos comentado, Appel y Haken demostraron que ‘con cuatro colores bastan’.

¹Teorema de la curva de Jordan: Sea C una curva cerrada y simple en el plano euclídeo. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ no es conexo y consta exactamente de dos componentes conexas que tienen a C como frontera común.

Capítulo 4

Cliques y conjuntos independientes

Un clique es un subgrafo completo de un grafo y es uno de los conceptos básicos de la teoría de grafos que se utiliza en muchos otros problemas matemáticos y en construcciones de grafos. El estudio de subgrafos completos se remonta a la reformulación teórica de la teoría de grafos de Ramsey realizada por Erdős y Szekeres ([10]) en el año 1935. El término clique fue acuñado por Luce y Perry ([19]) en el año 1949 y proviene de una de sus acepciones en inglés, que define a un grupo de personas que comparten intereses en común. Al identificarlo con un grafo, las personas son cada uno de los vértices y los intereses en común son las aristas. Como todas las personas comparten un mismo interés, todos los vértices son adyacentes dos a dos, esto es, el grafo es completo.

Definición 4.1. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ se dice que es un *clique* si para cualquier par de vértices de S existe una arista en G que los une. En otras palabras, S es un clique si el subgrafo de G inducido por S es un grafo completo. Un *clique maximal* de G es un clique que no se puede extender incluyendo un nuevo vértice adyacente a todos los demás, esto es, un subgrafo completo de G que no es subgrafo propio de ningún otro subgrafo completo de G .

En muchas ocasiones, el clique maximal se denota simplemente clique.

Definición 4.2. Se define el *número de clique* de un grafo G como el máximo número de vértices de un clique de G y se denota por $\omega(G)$. El *clique máximo* de un grafo G es el clique de G que tiene el máximo número de vértices posible, es decir, que tiene $\omega(G)$ vértices.

El concepto de conjunto independiente es opuesto al de clique, en el sentido de que todo clique de un grafo G se corresponde con un conjunto independiente en el grafo complementario de G .

Definición 4.3. Un subconjunto de vértices de un grafo G se dice que es independiente si ninguno de sus vértices es adyacente a otro. Dicho de otra manera, es un subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que, dados dos vértices cualesquiera de S , no existe ninguna arista en G que los una. Un conjunto independiente de vértices de G es un conjunto independiente maximal si no es subconjunto propio de ningún otro conjunto independiente de G , o lo que es lo mismo, que al añadir cualquier otro vértice al conjunto éste deja de ser independiente.

Al igual que en el caso de los cliques, muchas veces al hablar de un conjunto independiente se refiere a un conjunto independiente maximal.

Definición 4.4. El número de independencia $\alpha(G)$ ¹ es el cardinal de un conjunto independiente maximal.

El siguiente resultado muestra la relación entre los números de clique y de independencia de un grafo y su complementario.

Proposición 4.1. Sea G un grafo y G^c su grafo complementario (definición 1.6). Se verifican las siguientes igualdades:

$$i) \omega(G) = \alpha(G^c)$$

$$ii) \omega(G^c) = \alpha(G)$$

Demostración.

i) Sea G un grafo y $\omega = \omega(G)$ su número de clique. Entonces, hay ω vértices en G (los vértices del máximo clique de G) que no van a tener ninguna arista que los una en G^c . Esto es, existe un conjunto independiente de ω vértices en G^c y por tanto, $\omega \leq \alpha(G^c)$.

Recíprocamente, si en G^c hay un subconjunto de $\alpha(G^c)$ vértices que no tienen ninguna arista que los une, en el grafo G , cada uno de esos vértices va a ser adyacente a todos los demás vértices del subconjunto. En otras palabras, en G va a existir un clique con $\alpha(G^c)$ vértices. En consecuencia, $\alpha(G^c) \leq \omega$.

ii) Basta aplicar el item *i)* al grafo G^c , con lo que se tendría $\omega(G^c) = \alpha((G^c)^c) = \alpha(G)$. \square

A continuación vamos a relacionar los números de clique y de independencia con el número cromático de un grafo.

Proposición 4.2. Sea G un grafo. Entonces, $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Demostración.

Si en G hay un subgrafo completo con $\omega(G)$ vértices, entonces para colorearlo son necesarios $\omega(G)$ colores y por tanto, para colorear G hacen falta, al menos, $\omega(G)$ colores (que es el número cromático del grafo completo con $\omega(G)$ vértices). Con lo que $\omega(G) \leq \chi(G)$ \square

Proposición 4.3. Sea G un grafo con n vértices. Entonces, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

Demostración.

Sea c una coloración de G con $\chi(G)$ colores. El conjunto formado por todos los vértices de G que tienen asignados un mismo color en c es un conjunto independiente en G . Como $\alpha(G)$ es el número de independencia, cada uno de estos conjuntos tiene, a lo sumo, $\alpha(G)$ vértices. En consecuencia, $n \leq \chi(G)\alpha(G)$ y se tiene la desigualdad del enunciado. \square

A continuación vamos a ver un ejemplo de una familia de grafos en la que el número cromático coincide con el número de clique. Para ello, vamos a definir lo que es un grafo de intervalos.

Definición 4.5. Sean I_1, \dots, I_k un número finito de intervalos de la recta real. El grafo de intervalos asociado a esos intervalos es un grafo con k vértices, uno por cada intervalo, de manera que los vértices v_i y v_j son adyacentes si y sólo si los intervalos I_i e I_j tienen intersección no vacía.

¹El número de independencia se denota α en contraposición al número de clique que se denota ω

Ejemplo 4.1. Vamos a construir el grafo de intervalos correspondiente a los siguientes intervalos de la recta real: $I_1 = (0, 2)$, $I_2 = (1, 4)$, $I_3 = (3, 5)$, $I_4 = (5, 6)$, $I_5 = (1, 6)$. Sean v_1, v_2, \dots, v_5 los vertices correspondientes a cada uno de los intervalos. Ahora, tenemos que estudiar las intersecciones de los intervalos. El intervalo I_1 interseca con los intervalos I_2 e I_5 . El intervalo I_2 también interseca con el intervalo I_3 y el I_5 . El intervalo I_3 interseca también al intervalo I_5 . Por último, el I_4 solamente interseca al I_5 . Entonces el grafo de intervalos correspondiente es el de la siguiente figura.

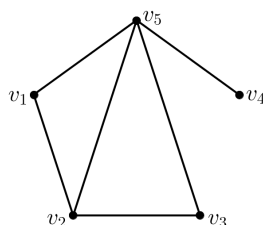


Figura 4.1: Grafo de intervalos

Proposición 4.4. Sea G un grafo de intervalos. Sea $\chi(G)$ su número cromático y $\omega(G)$ su número de clique. Entonces, $\chi(G) = \omega(G)$

Demostración.

Sean I_1, \dots, I_k los intervalos asociados a los vértices de G donde $I_i = (a_i, b_i)$. Ordenamos los vértices de G de acuerdo con el extremo izquierdo a_i de su correspondiente intervalo y aplicamos a G el algoritmo voraz visto en el capítulo 2 con esta ordenación. Se obtiene así una coloración c de G con los colores $1, \dots, t$ donde t es mayor o igual que $\chi(G)$.

Supongamos que el vértice $v_{i_0} \in V(G)$ recibe el color $\chi(G)$. Como v_{i_0} no recibe un color “más pequeño”, debe ser adyacente, al menos, a un vértice de cada color desde 1 hasta $t - 1$. Esto es, que su intervalo $I_{i_0} = (a_{i_0}, b_{i_0})$ interseca con, al menos, un intervalo de cada color anterior a él según nuestro orden. Como los vértices se han ordenado de acuerdo con el extremo izquierdo de cada intervalo, ésto quiere decir que a_{i_0} pertenece a intervalos con colores desde 1 hasta $t - 1$ y, por tanto, existe una arista que une todos esos vértices. Entonces, se tiene un t -clique formado por v_{i_0} y todos sus vértices adyacentes con colores desde 1 hasta t .

De esta forma se tiene que $\omega(G) \geq t \geq \chi(G)$ y por la proposición 4.2 se tiene la igualdad. \square

La desigualdad que hemos visto en la proposición 4.2 nos proporciona una cota inferior del número cromático. Pero, en ciertos grafos esta cota puede estar muy alejada del valor de χ . Existen grafos con un número cromático muy grande y un número de clique muy pequeño. A continuación vamos a ver una construcción de grafos que lo muestran.

Definición 4.6. Sea G un grafo simple con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Se define el *grafo de Mycielski* ([21]) asociado a G como otro grafo simple G' que contiene a G de la siguiente manera. Partimos del conjunto de vértices v_1, \dots, v_n , añadimos los vértices del conjunto $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y otro vértice w distinto de los anteriores. Las aristas de G' son: las aristas de G , las aristas que resultan de unir el vértice w con todos los vértices de U y unir cada vértice u_i con todos los vértices que son adyacentes con v_i .

Mediante esta construcción, el propio Mycielski definió la siguiente familia de grafos (que se denominan grafos de Mycielski) que se denotan M_i y se construyen a partir del grafo completo

$M_1 = K_1$. El siguiente grafo de la sucesión es $M_2 = K_2$ y para cada i mayor que dos el grafo M_i se construye aplicando la construcción de Mycielski al grafo M_{i-1} . El grafo M_4 habitualmente se denomina grafo de Grötzsch. La figura 4.2 muestra los grafos M_2, M_3 y M_4 .

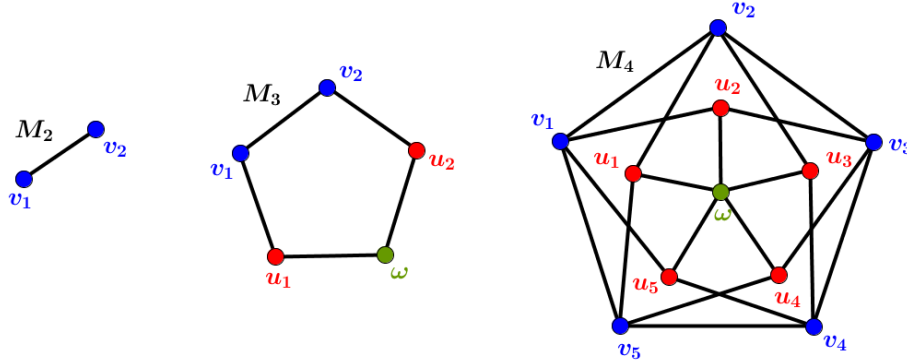


Figura 4.2: Grafos de Mycielski

Proposición 4.5. *El grafo G' construido mediante la construcción de Mycielski a partir de un grafo simple G cuyo número cromático es k tiene número cromático $k + 1$.*

Demostración.

Supongamos que el grafo G está coloreado con k colores, veamos que G' se puede colorear, como mínimo, con $k + 1$ colores. Cada vértice u_i tiene exactamente los mismo vértices adyacentes que v_i , por tanto, se puede colorear con el mismo color que v_i . Como el vértice w es adyacente a todos los u_i necesariamente tenemos que colorear w con un color distinto de los k colores con los que está coloreado G , obteniendo así una coloración de G' con $k + 1$ colores. \square

Los grafos construidos con la construcción de Mycielski verifican que si G es libre de triángulos, es decir, no tiene 3-cliques, entonces G' también es libre de triángulos. A partir de esto podemos demostrar que existen grafos libres de triángulos con número cromático arbitrariamente grande, que es lo que se conoce como teorema de Mycielski.

Teorema 4.1 (Teorema de Mycielski). *Para todo entero positivo k existe un grafo G sin 3-cliques cuyo número cromático es k .*

Demostración.

Vamos a demostrar que el grafo M_k no tiene 3-cliques y verifica que su número cromático es k por inducción en k . El caso $k = 1$ es trivial, porque $M_1 = K_1$ no tiene 3-cliques y tiene número cromático 1. Entonces, supuesto que es cierto para k veamos que es cierto para $k + 1$.

El subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_p\}$ de $V(M_{k+1})$ es un conjunto independiente porque no hay ninguna arista que una los vértices u_i entre sí. El vértice w no es adyacente a ninguno de los vértices de M_k por construcción y, en consecuencia, el vértice w no puede estar en ningún triángulo en M_{k+1} .

Entonces, en caso de que existiese algún triángulo en M_{k+1} sus vértices tienen que estar o bien en $V(M_k)$, o bien en U . Dependiendo de en cuál de estos subconjuntos estén los vértices vamos a distinguir los siguientes casos.

Los tres vértices no pueden estar en $V(M_k)$ porque en M_k no puede haber 3-cliques por hipótesis de inducción. Los tres vértices tampoco pueden estar todos en U porque hemos visto

que U es un conjunto independiente y, por el mismo motivo, no puede haber dos vértices en U y el tercer vértice en M_k . Entonces, el único 3-clique posible en M_{k+1} tiene dos vértices en $V(M_k)$ y otro en U . Este 3-clique sería de la forma $T = \{v_i, v_j, u_k\}$. Si T es realmente un 3-clique los tres vértices serían adyacentes y, por construcción, v_k sería adyacente a v_i y a v_j con lo que $\{v_i, v_j, v_k\}$ sería un 3-clique en M_k , lo cual no puede ser por hipótesis de inducción.

Ahora, veamos que el número cromático de M_{k+1} es $k + 1$. En primer lugar, veamos que M_{k+1} no se puede colorear con k colores. Supongamos que existe una coloración de M_{k+1} con k colores. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el vértice w es de color k y, por tanto, ningún vértice de U puede tener el color k . Luego, se puede colorear el conjunto U con $k - 1$ colores. Como cada vértice u_i tiene los mismos vértices adyacentes que v_i también podemos colorear M_k con $k - 1$ colores, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis de inducción $\chi(M_k) = k$.

A continuación vamos a describir una $k + 1$ coloración de M_{k+1} . Por hipótesis de inducción M_k es k -coloreable. Como M_k está contenido en M_{k+1} para colorearlo con $k + 1$ colores basta colorear los vértices de M_{k+1} que no están en M_k con, a lo sumo, $k + 1$ colores. Para ello, a cada vértice u_i le asignamos el mismo color que a v_i porque tienen los mismos vértices adyacentes y entonces se tiene que el conjunto U se puede colorear con k colores. Por último, al vértice w le asignamos un color diferente a esos k colores porque es adyacente a todos los u_i . Con esto, ya tenemos M_{k+1} coloreado con $k + 1$ colores y podemos concluir que $\chi(M_{k+1}) = k + 1$. \square

A continuación vamos a estudiar uno de los problemas extremales de la teoría de grafos. Esto consiste en estudiar los máximos (o mínimos) grafos que cumplen una determinada propiedad. La teoría de grafos extremales surge en 1941 cuando P. Turán ([25]) demostró su teorema para determinar cómo son los grafos de n vértices con el mayor número posible de aristas que no contienen ningún subgrafo completo de orden r , aunque un caso especial de este teorema fue formulado en 1907 por Mantel ([20]). El teorema de Turán define los grafos que tienen el máximo número de aristas de entre todos los grafos de n vértices que no poseen ningún $r + 1$ -clique.

Antes de definir los grafos de Turán vamos a probar un resultado que proporciona una cota inferior del número de aristas que tiene un grafo en relación con su número cromático.

Proposición 4.6. *Sea G un grafo cuyo número cromático es k . Entonces, G tiene, al menos, $\binom{k}{2}$ aristas. Se da la igualdad cuando G es un grafo formado por cliques y conjuntos independientes.*

Demostración.

Si tenemos una k -coloración de G , para cada par de colores i y j tiene que existir una arista que una un vértice coloreado de color i con uno de color j . De no producirse este hecho, podríamos colorear todos los vértices de color j con el color i y se tendría una $k - 1$ coloración de G , lo cual es absurdo.

Como tenemos $\binom{k}{2}$ maneras de elegir dos colores de entre los k posibles y existe, al menos, una arista por cada dos colores, y se tiene que hay, al menos, $\binom{k}{2}$ aristas. \square

Definición 4.7. El grafo de Turán $T_{n,r}$ es el grafo r -partito completo con n vértices tal que los tamaños de sus subconjuntos difieren en, a lo sumo, un vértice.

Esta definición es equivalente a decir que el grafo de Turán $T_{n,r}$ es precisamente el grafo bipartito completo $K_{\lceil n/r \rceil, \lceil n/r \rceil, \dots, \lceil n/r \rceil}$.

A continuación vamos a ver que todo grafo r -partito es r -coloreable y viceversa. Es claro que si G es un grafo r -partito podemos asignar un color a cada uno de los subconjuntos V_i que

forman la partición de V , pues no hay aristas que unan dos vértices del mismo conjunto V_i y con esto se tendría una r -coloración de G . Recíprocamente, si G admite una r -coloración podemos dividir el conjunto de sus vértices en r conjuntos independientes de manera que no haya vértices adyacentes en cada uno de esos conjuntos. Entonces, G es un grafo r -partito.

Observación 4.1. Si se tiene una k -coloración de un grafo G podemos añadir aristas a G sin incrementar su número cromático siempre que las aristas que añadamos no unan vértices del mismo color.

Lema 4.1. *El grafo de Turán $T_{n,r}$ es el grafo con mayor número de aristas de todos los grafos r -partitos con n vértices.*

Demostración.

Por la observación 4.1, para probar este teorema basta considerar los grafos r -partitos completos. Sea G un grafo r -partito completo cuyos subconjuntos de vértices difieren en más de un vértice. Sea V_i el subconjunto de la partición de mayor tamaño, i , y V_j el de menor tamaño, j . Ahora, movemos un vértice v de V_i al conjunto V_j . Las aristas que no contienen a v son las mismas que antes, pero v ha ganado $i - 1$ vértices adyacentes que son los de V_i y ha perdido $j - 1$ vértices adyacentes, que son los de V_j . Como $i > j$ y los conjuntos V_i y V_j difieren en más de un vértice, se tiene que $i - 1 > j$ y por lo tanto el número de aristas de G aumenta al cambiar el vértice v .

Podemos concluir que el número de aristas del grafo se maximiza cuando igualamos los tamaños de los subconjuntos, esto es, cuando consideramos el grafo de Turán $T_{n,r}$. \square

Teorema 4.2 (Teorema de Turán). *El grafo de Turán $T_{n,r}$ es el grafo con mayor número de aristas de todos los grafos con n vértices que no contengan $(r + 1)$ -cliques.*

Demostración.

El grafo de Turán $T_{n,r}$ es un grafo r -partito, esto es, r -coloreable. Entonces, su número cromático es menor o igual que r y por la proposición 4.2, $T_{n,r}$ no tiene $(r + 1)$ -cliques. Para probar este resultado basta probar que el grafo con mayor número de aristas que no tiene $(r + 1)$ -cliques es un grafo r -partito con n vértices, y aplicando el lema anterior se tiene que dicho grafo es el grafo de Turán $T_{n,r}$.

Para ello vamos a probar por inducción sobre r que si G es un grafo con n vértices sin $(r + 1)$ -cliques existe otro grafo H r -partito con el mismo conjunto de vértices que G y, al menos, tantas aristas como G . Lógicamente, el número de clique de este grafo H será menor que r , pues es r -partito.

En caso de que $r = 1$ tanto H como G no tienen aristas y el resultado es trivial. Supongamos que lo que queremos probar es cierto para todo r mayor que 1, veamos que también es cierto para $r + 1$. Sea G un grafo con n vértices y sin $(r + 1)$ -cliques con grado máximo Δ . Sea v un vértice de G de grado Δ y sea G' el subgrafo de G inducido por el conjunto de todos los vértices adyacentes de v . Como v es adyacente a todos los vértices de G' y hemos supuesto que G no tiene $(r + 1)$ -cliques podemos afirmar que G' no tiene r -cliques. En caso de existir un r -clique en G' , al añadir el vértice v a dicho clique se tendría un $(r + 1)$ -clique en G , lo cual es imposible. Aplicamos la hipótesis de inducción al grafo G' y se obtiene un grafo H' que es $(r - 1)$ -partito cuyo conjunto de vértices es el mismo que el de G' y su conjunto de aristas contiene al conjunto de aristas de G' .

Ahora, sea H el grafo resultante de unir todos los vértices de H' con todos los vértices del conjunto $S = V(G) \setminus V(G')$ (ver figura 4.3). Esto es, H es el grafo G menos todas las aristas que unen dos vértices de S y que contiene todas las aristas que unen vértices de G' con vértices de S (añadiéndolas en caso de que no estén en G).

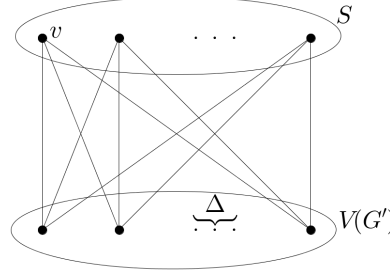


Figura 4.3: Construcción del grafo H

Como S es un conjunto independiente en H se tiene que H es un grafo r -partito.

Para concluir la demostración, solo falta probar que el número de aristas de H , $A(H)$, es mayor que el número de aristas de G , $A(G)$. Por construcción, se tiene que $A(H) = A(H') + \Delta(n - \Delta)$ y que

$$A(G) \leq A(G') + \sum_{v \in S} d_G(v) \quad (4.1)$$

Es claro que $d_G(v) \leq \Delta$ para todo vértice v de S y S tiene $n - \Delta$ vértices se tiene que

$$\sum d_G(v) \leq \Delta(n - \Delta) \quad (4.2)$$

A partir de 4.1 y aplicando 4.2 obtenemos que:

$$A(G) \leq A(G') + \sum_{v \in S} d_G(v) \leq A(G') + \Delta(n - \Delta) \leq A(H') + \Delta(n - \Delta) = A(H)$$

□

El enunciado anterior es equivalente a decir que si G es un grafo con n vértices y sin $r + 1$ -cliques, entonces el número de aristas de G es a lo sumo $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$.

Como caso especial del teorema de Turán tomando $r = 2$ se obtiene el teorema de Mantel ([20]) que afirma que el máximo número de aristas de un grafo con n vértices sin triángulos es $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. En otras palabras, se deben eliminar aproximadamente la mitad de las aristas de K_n para obtener un grafo sin triángulos.

Hemos visto que para cualquier grafo G , el número de clique proporciona una cota inferior para el número cromático. A continuación vamos a estudiar los grafos perfectos, que son aquellos grafos para los que dicha cota no sólo es exacta para G , sino que también lo es para todos sus subgrafos inducidos. La teoría de grafos perfectos fue desarrollada a partir de un resultado probado por T. Gallai ([12]) que afirma que el complementario de un grafo bipartito es perfecto.

El origen del término “perfecto” se debe a C. Berge ([5]) en el año 1963. Berge definió los grafos perfectos y conjeturó una caracterización de éstos que luego fue probada por Lóvasz ([18]) en el año 1972 y que actualmente se conoce como Teorema débil de los grafos perfectos.

Definición 4.8. Un grafo G se dice que es *perfecto* si para todo subgrafo H inducido de G el número cromático de H coincide con su número de clique.

A continuación vamos a ver algunas familias de grafos que son perfectos. Para ello vamos a definir lo que es una familia de grafos hereditaria.

Definición 4.9. Una familia de grafos \mathcal{G} se dice que es *hereditaria* si para todo grafo G de \mathcal{G} todo subgrafo inducido de G está en \mathcal{G} .

Para probar que los grafos de una determinada familia de grafos son perfectos basta probar que todo grafo perteneciente a dicha familia verifica que su número cromático coincide con su número de clique y que la familia es hereditaria. Pues entonces todo subgrafo inducido de un grafo de la familia también pertenecerá a la familia y verificará que su número cromático coincide con su número de clique.

Ejemplo 4.2 (Los grafos bipartitos). Sabemos que si G es un grafo bipartito con, al menos, una arista su número cromático es dos y su número de clique también es dos.

Si a un grafo bipartito le quitas un conjunto de vértices y sus correspondientes aristas el grafo resultante sigue siendo bipartito, es decir, que la familia de los grafos bipartitos es una familia hereditaria. Con esto podemos concluir que los grafos bipartitos no vacíos son perfectos.

Ejemplo 4.3 (Los grafos de intervalos). En la proposición 4.4 vimos que si G es un grafo de intervalos su número cromático coincide con su número de clique. Para ver que los grafos de intervalos son perfecto basta ver que forman una familia hereditaria.

Sea G un grafo de intervalos y sea V' un subconjunto de vértices de G . Veamos que el subgrafo de G inducido por V' es un grafo de intervalos.

Dados dos vértices cualesquiera de V' y sus correspondientes intervalos, si esos intervalos tienen intersección no vacía entonces en G existe una arista que los une y, por definición de grafo inducido, también existe en H . Por el contrario, si esos intervalos tienen intersección vacía entonces no existe en G ninguna arista que los une y, por tanto, tampoco existe en H . Con lo que se tiene que H también es un grafo de intervalos.

No obstante, existen familias de grafos no hereditarias que son grafos perfectos.

Ejemplo 4.4 (Los grafos rueda). Sea n un número natural impar. Veamos que el grafo rueda R_n es un grafo perfecto con número cromático tres. Para ello vamos a estudiar como son cada uno de los posibles subgrafos inducidos de R_n y a ver que en todos ellos se verifica que el número cromático coincide con el número de clique.

- Si consideramos el subgrafo inducido H que resulta de eliminar el vértice central v al grafo R_n se tiene que H es un ciclo de longitud par y, por tanto, su número cromático es dos y coincide con su número de clique.
- Si consideramos el subgrafo inducido H que resulta de eliminar uno o varios de los vértices del ciclo C_{n-1} , el grafo H está formado por una cierta cantidad de triángulos con un vértice común que es el vértice central v . En consecuencia, tanto su número cromático como su número de clique tienen que ser tres.
- Si consideramos el subgrafo inducido H que resulta de eliminar el vértice central y uno o varios vértices del ciclo se obtiene uno o varios grafos lineales. Es claro que el número cromático de H es dos y su número de clique también.

Por último, solamente falta ver que, efectivamente, el grafo rueda R_n con n impar verifica que su número cromático y su número de clique coinciden. Es claro que el número de clique del grafo R_n es tres, pues tiene $n - 1$ cliques de tres vértices, pero no puede tener ningún clique con cuatro vértices. Como el número cromático de un ciclo par C_n es dos, se tiene que para colorear R_n son necesarios al menos tres colores, dos de ellos para colorear los vértices del ciclo y un tercer color para el vértice central v .

Capítulo 5

Polinomio cromático

Como se ha comentado en la introducción, al estudiar la coloración de grafos no sólo es interesante saber cuándo un grafo G se puede colorear con k colores sino también de cuántas formas distintas se puede colorear usando los colores $\{1, 2, \dots, k\}$, y esta información nos la proporciona el polinomio cromático.

En el año 1912, cuando G. D. Birkhoff ([6]) estudiaba el teorema de los cuatro colores, introdujo la noción de polinomio cromático, sólo para grafos planos. Si $P_G(k)$ denota el número de coloraciones propias de G que se pueden hacer con k colores, Birkhoff quería probar que $P_G(k) > 0$ para todo grafo plano G . En el año 1932 Hasseler Whitney extendió el concepto de Birkhoff a grafos generales, no solamente planos.

Dado un grafo G y un entero k mayor o igual que uno se define

$$P_G(k) = \# \{ \text{coloraciones distintas de } G \text{ usando los colores de la colección } \{1, \dots, k\} \}$$

teniendo en cuenta que no es necesario usarlos todos y que dos coloraciones c_1, c_2 son distintas si existe un vértice v tal que $c_1(v) \neq c_2(v)$.

Proposición 5.1. *Sea G un grafo de n vértices y sean k, r enteros positivos con $k \geq r$. Sea $k_{(r)} = k(k-1) \cdots (k-r+1)$. Si $P_r(G)$ denota el número de particiones de V en r conjuntos independientes no vacíos, entonces $P_G(k) = \sum_{r=1}^n P_r(G) k_{(r)}$ es un polinomio en k de grado n .*

Demostración.

Si se usan exactamente r colores para colorear G , se tiene una partición de V en r conjuntos independientes no vacíos que son las clases de color. El número total de particiones posibles en r conjuntos es, por definición, $P_r(G)$.

Si tenemos k colores disponibles para colorear G hay, exactamente, $k_{(r)}$ formas de elegir el color que asignamos a cada una de las r clases. Todas las posibles coloraciones de G con k colores se obtienen de este modo, por lo que la fórmula $P_G(k) = \sum_{r=1}^n P_r(G) k_{(r)}$ es cierta.

Como $k_{(r)}$ es un polinomio en k y $P_r(G)$ es constante para cada r , entonces $P_G(k) = \sum_{r=1}^n P_r(G) k_{(r)}$ es un polinomio en k .

Como G tiene n vértices, existe una partición de V en, exactamente, n conjuntos independientes (uno por cada vértice) y no existe ninguna partición de V con más de n conjuntos. Además, $\text{grado}(k_{(r)}) > \text{grado}(k_{(r')})$ si $r > r'$, entonces el grado máximo de $P_G(k)$ coincide con el mayor r tal que $P_r(G) \neq 0$, que es cuando $r = n$ como acabamos de ver. \square

Definición 5.1. En polinomio de la proposición anterior recibe el nombre de *polinomio cromático de G* .

Las raíces del polinomio cromático dependen del número cromático. En efecto, si k es menor que el número cromático de G entonces G no se puede colorear con k colores y por tanto $P_G(k) = 0$. Recíprocamente, si $P_G(k) = 0$ quiere decir que no hay ninguna forma de colorear G con k colores y se tiene que el número cromático de G tiene que ser mayor que k . Si k es exactamente el número cromático de G claramente existe, al menos, una forma de colorearlo, o lo que es lo mismo, $P_G(k)$ es mayor o igual que uno.

Por otro lado, si de un cierto grafo G conocemos su polinomio cromático evaluado en k y queremos conocer su valor para otro entero $k' > k$, evidentemente, las coloraciones que teníamos con k colores seguimos teniéndolas que contar para k' colores, por lo que si $k < k'$ entonces $P_G(k') > P_G(k)$. En consecuencia, si conocemos la expresión del polinomio cromático de un grafo G podemos obtener el valor del número cromático como el menor entero k en el que $P_G(k)$ no se anula, o lo que es lo mismo, $\chi(G) = \alpha + 1$ donde α es la máxima raíz entera del polinomio cromático de G .

Como ya hemos comentado, las coloraciones de un grafo que tiene varias componentes conexas se hacen de manera independiente en cada una de ellas, pues no hay aristas que unan dos componentes conexas. De la misma manera que podemos conocer el número cromático de un grafo sabiendo el de todas sus componentes conexas, conociendo el polinomio cromático de cada una de las componentes conexas podemos conocer el polinomio cromático del grafo.

Proposición 5.2. Sea G es un grafo con r componentes conexas G_1, \dots, G_r . Entonces

$$P_G(k) = P_{G_1} \cdots P_{G_r}$$

A continuación vamos a estudiar el polinomio cromático de algunas de las familias de grafos definidas en el capítulo 1

1. Grafo lineal L_n :

Primero consideramos el grafo L_3 y estudiaremos cuántas coloraciones admite con k colores. Numeramos los vértices de L_3 de forma que v_1 tiene grado uno y v_i es adyacente a v_{i-1} para $i > 1$. Para v_1 tenemos k posibles colores, para el segundo vértice v_2 tenemos solamente $k - 1$ colores porque v_2 no puede llevar el mismo color que v_1 . Para v_3 también tenemos $k - 1$ posibilidades porque v_3 no puede llevar el mismo color que v_2 , pero sí el mismo que v_1 .

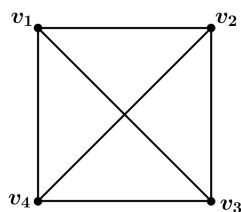
$$\text{Entonces, } P_{L_3} = k(k - 1)(k - 1) = k(k - 1)^2$$

De manera análoga, si consideramos el grafo L_n y, numerando los vértices como antes, tenemos que el vértice v_1 se puede colorear con k colores pero todos los demás vértices v_2, \dots, v_n solo pueden ser coloreados con $k - 1$ colores, porque cada vértice v_i no puede llevar el mismo color que el vértice anterior, v_{i-1} , para cada i mayor que uno. Por tanto, el polinomio cromático del grafo L_n es

$$P_{L_n}(k) = k(k - 1)^{n-1}$$

Se puede observar que el número cromático de un grafo lineal es dos como ya sabíamos.

2. Grafo completo K_n : Al igual que en el grafo lineal vamos a estudiar primero el caso K_4 y luego generalizamos a K_n .



Para colorear v_1 podemos usar cualquiera de los k colores posibles, para colorear v_2 solo podemos usar $k - 1$ porque v_1 y v_2 son adyacentes. Ahora, para colorear v_3 tenemos $k - 2$ posibilidades, porque v_3 es adyacente tanto a v_1 como a v_2 . Por último para colorear v_4 sólo tenemos disponibles $k - 3$ colores porque v_4 es adyacente a todos los demás. Entonces,

$$P_{K_4}(k) = k(k - 1)(k - 2)(k - 3)$$

Y, en general, para K_n tenemos, mediante un razonamiento análogo, que

$$P_{K_n}(k) = k(k - 1) \cdots (k - (n - 1)) = k(k - 1) \cdots (k - n + 1)$$

Observemos que el recuento de todas las posibles coloraciones de un grafo K_n con k colores también lo podemos hacer multiplicando $\binom{k}{n}n!$, que son las diferentes maneras de elegir n colores entre los k colores disponibles y multiplicados por $n!$, que son las diferentes formas que podemos asignar los k colores a los n vértices.

$$\begin{aligned} P_{K_n}(k) &= \binom{k}{n} n! = \frac{k!}{n!(k - n)!} n! = \frac{k!}{(k - n)!} = \\ &= \frac{k(k - 1) \cdots 1}{(k - n)(k - n + 1) \cdots 1} = k(k - 1) \cdots (k - n + 1) \end{aligned}$$

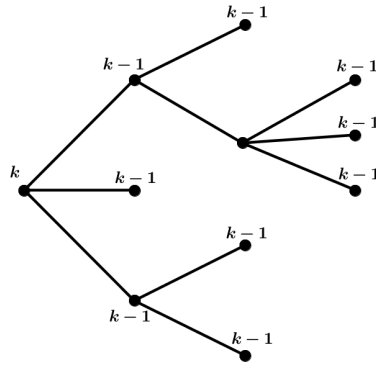
Es claro que si $k < n$ este producto es cero, lo cual tiene sentido ya que $\chi(K_n) = n$ y entonces K_n no tiene ninguna coloración con menos de n colores.

3. Árboles:

Veamos que si T es un árbol con n vértices entonces

$$P_T(k) = k(k - 1)^{n-1}$$

Elegimos un vértice v de T como la raíz del árbol y éste se puede colorear con k colores diferentes. Desde la raíz vamos coloreando los vértices de T como van creciendo de v de manera que, en cada paso, el único color que no podemos usar para colorear un vértice es el de su padre, pero todos los hijos pueden llevar un mismo color. Por lo que, en cada vértice de T distinto de la raíz podemos elegir $k - 1$ colores. La siguiente figura muestra efectivamente este hecho.



Entonces $P_T(k) = k(k-1)^n$

4. Grafo ciclo C_n : Vamos a estudiar de cuántas maneras se puede colorear C_4 con k colores. Sean v_1, \dots, v_4 sus vértices. Para el vértice v_1 tenemos k posibilidades, para v_2 tenemos $k-1$ posibilidades porque no podemos repetir el mismo color que en v_1 y para v_3 lo mismo. Es claro que el vértice v_4 no puede tener el mismo color que v_3 ni que v_1 , entonces si v_1 y v_3 tienen el mismo color tendríamos $k-1$ posibles colores para v_4 y si tienen distintos colores tendríamos $k-2$ posibilidades.

Como acabamos de ver, el proceso que hemos seguido para los tres primeros ejemplos no es aplicable al grafo C_4 . Es decir, no siempre vamos a poder calcular el polinomio cromático de un grafo analizando los posibles colores que podemos asignar a cada uno de los vértices. Por ello, vamos a ver un método para calcularlos que consiste en determinar el polinomio cromático de ese grafo modificado mínimamente.

Teorema 5.1. Sea G es un grafo simple y sea a una arista de G . Entonces

$$P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}$$

donde $G \setminus a$ es el grafo resultante de eliminar la arista a del grafo G y $G \cdot a$ denota al grafo que resulta de contraer la arista a de G e identificar sus extremos.

Demostración.

Toda k -coloración en vértices de G es también una k -coloración de $G \setminus a$. Recíprocamente, una k -coloración de $G \setminus a$ es una coloración de G si y sólo si los extremos de a (que denotamos u y v) tienen asignados colores diferentes. Entonces, podemos contar las k -coloraciones de G quitando a las coloraciones de $G \setminus a$ aquellas en las que u y v tienen el mismo color.

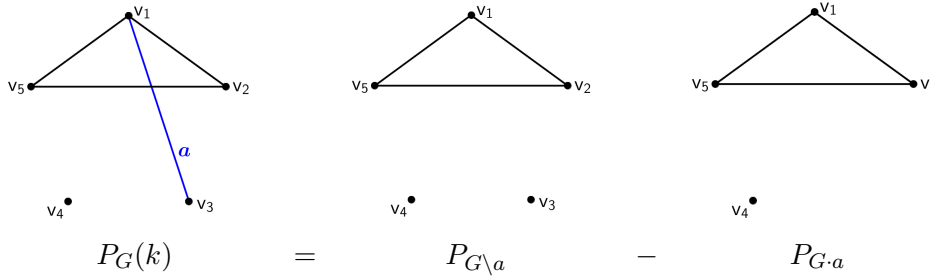
Las coloraciones de $G \setminus a$ en las cuales u y v tienen el mismo color se corresponden exactamente con las k -coloraciones de $G \cdot a$ en las que el color del vértice que resulta de contraer la arista a es el color de u y v . Entonces,

$$P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}(k)$$

□

A continuación vamos a mostrar algunos ejemplos de grafo en lo que calcularemos su polinomio cromático aplicando este teorema.

Ejemplo 5.1. Vamos a calcular el polinomio cromático del grafo de la figura 1.1 aplicando la proposición anterior con la arista v_1v_3 .

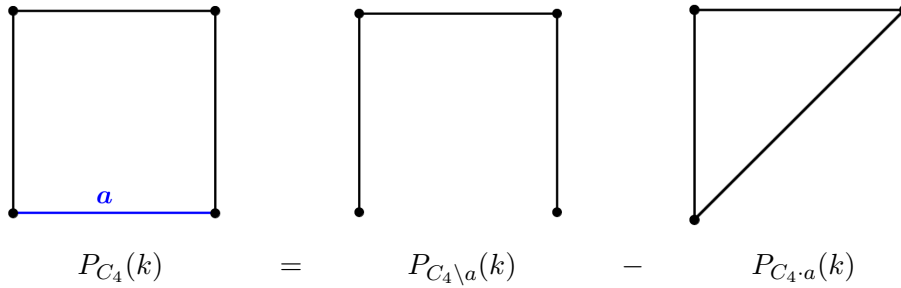


El grafo $G \setminus a$ está formado por tres componentes conexas que son un grafo K_3 y dos grafos K_1 ; y el grafo $G \cdot a$ está formado por dos componentes conexas que son un K_3 y un K_1 . Entonces,

$$P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}(k) = (P_{K_3}(k)P_{K_1}^2(k)) - (P_{K_3}(k)P_{K_1}(k)) = k^2(k-1)^2(k-2)$$

A partir de esto se ve, como era de esperar, que el número cromático de este grafo es 3.

Ejemplo 5.2. Ahora vamos a aplicar este método para calcular el polinomio cromático del grafo ciclo C_4 y luego estudiaremos el caso general C_n



Entonces el polinomio cromático del grafo C_4 es:

$$\begin{aligned} P_{C_4}(k) &= P_{C_4 \setminus a}(k) - P_{C_4 \cdot a}(k) = P_{L_4}(k) - P_{C_3}(k) \\ &= P_{L_4}(k) - P_{K_3}(k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3) \end{aligned}$$

De manera análoga, eliminando cualquier arista a del ciclo, tenemos que el polinomio cromático de C_n es:

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{C_n \setminus a}(k) - P_{C_n \cdot a}(k) = P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = \\ &= P_{L_n}(k) - (P_{L_{n-1}}(k) - P_{C_{n-2}}(k)) = \\ &= P_{L_n}(k) - P_{L_{n-1}}(k) + P_{L_{n-2}}(k) - P_{C_{n-3}}(k) = \dots = \\ &= \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{j+1} P_{L_{n-j}}(k) + (-1)^{n-3} P_{C_3}(k) \end{aligned}$$

Como conocemos el polinomio cromático de C_3 (que es el de K_3) y el de L_n para todo n ya conocemos el polinomio cromático de C_n para todo n . Pero ésta es una expresión muy compleja

que cuesta mucho calcular para n demasiado grandes, por lo que vamos a tratar de encontrar una expresión más sencilla.

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= P_{L_n}(k) - P_{C_{n-1}}(k) = k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = \\ &= (k-1+1)(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) = \\ &= (k-1)^n + (k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \end{aligned}$$

Así que, $P_{C_n}(k) - (k-1)^n = -(P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1})$ y si iteramos esta regla de recurrencia para el polinomio cromático obtenemos que

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) - (k-1)^n &= -(P_{C_{n-1}}(k) - (k-1)^{n-1}) = \\ &= (-1)^2(P_{C_{n-2}}(k) - (k-1)^{n-2}) = \dots = \\ &= (-1)^{n-3}(P_{C_3}(k) - (k-1)^3) \end{aligned}$$

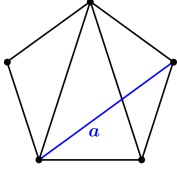
Como sabemos que el polinomio cromático de C_3 es $P_{C_3} = P_{K_3} = k(k-1)(k-2)$ se tiene que

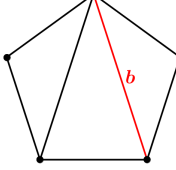
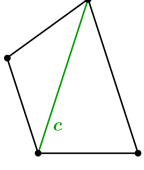
$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= (k-1)^n + (-1)^{n-3}(k(k-1)(k-2) - (k-1)^3) = \\ &= (k-1)^n + (-1)^{n-3}(-k+1) = (k-1)^n + (-1)^{n-2}(k-1) = \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \end{aligned}$$

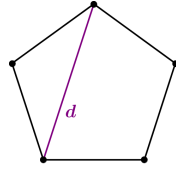
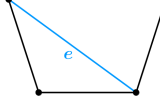
Comprobamos que, efectivamente, cuando n es par el número cromático de C_n es dos y $P_{C_n}(k)$ se anula en $k=2$ y, por el contrario, si n es impar su número cromático es tres y el polinomio $P_{C_n}(k)$ se anula en $k=3$.

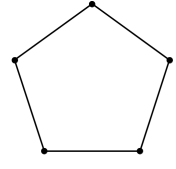
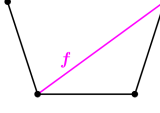
En el caso del grafo C_4 habíamos calculado mediante el teorema 5.1 que el polinomio cromático de C_4 es $k^2(k-1)^2(k-2)$ y si operamos esta expresión coincide con $(k-1)^4 + k - 1$ que es lo que acabamos de probar.

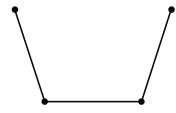
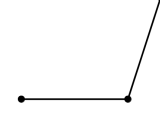
Ejemplo 5.3. Vamos a calcular el polinomio cromático del grafo de la figura siguiente usando el resultado del teorema 5.1. Realizamos este proceso gráficamente:



$$P_G(k) = P_{G \setminus \{a\}}(k) - P_{G \cdot a}(k) =$$



$$= (P_{(G \setminus \{a\}) \setminus \{b\}}(k) - P_{(G \setminus \{a\}) \cdot b}(k)) -$$



$$- (P_{(G \cdot a) \setminus \{c\}}(k) - P_{(G \cdot a) \cdot c}(k)) =$$



$$= (P_{((G \setminus \{a\}) \setminus \{b\}) \setminus \{d\}}(k) - P_{((G \setminus \{a\}) \setminus \{b\}) \cdot d}(k)) -$$



$$- (P_{((G \setminus \{a\}) \cdot b) \setminus \{e\}}(k) - P_{((G \setminus \{a\}) \cdot b) \cdot e}(k)) -$$

$$- (P_{C_4}(k) - P_{L_3}(k))$$

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= P_{C_5}(k) - 2(P_{L_4}(k) - P_{L_3}(k)) - (P_{C_4}(k) - P_{L_3}(k)) = \\
 &= P_{C_5}(k) - 2P_{L_4}(k) + 3P_{L_3}(k) - P_{C_4}(k) = \\
 &= ((k-1)^5 - (k-1)) - 2k(k-1)^3 + 3k(k-1)^2 - \\
 &= ((k-1)^4 + (k-1)) = k^5 - 8k^4 + 23k^3 - 28k^2 + 12k
 \end{aligned}$$

Como acabamos de ver, hay ocasiones en las que aplicar el teorema 5.1 para calcular el polinomio cromático puede resultar muy tedioso, especialmente en grafos a los que 'les faltan' pocas aristas para ser completos, como el del ejemplo 5.3. En estos casos es mejor aplicar el teorema 5.1 pero planteado de forma inversa.

Teorema 5.2. Sea G un grafo y x e y dos vértices no adyacentes de G . Entonces

$$P_G(k) = P_{G+xy}(k) + P_{G \cdot xy}(k)$$

donde $G+xy$ es el grafo resultante de añadir la arista xy al grafo G y $G \cdot xy$ es el grafo resultante de contraer la arista xy e identificar sus extremos.

Demostración.

Para probar este teorema basta aplicar el resultado del teorema 5.1 al grafo $G+xy$, con lo que se tiene que

$$P_{G+xy}(k) = P_{(G+xy) \setminus xy}(k) - P_{(G+xy) \cdot xy}(k) = P_G(k) - P_{G \cdot xy}(k)$$

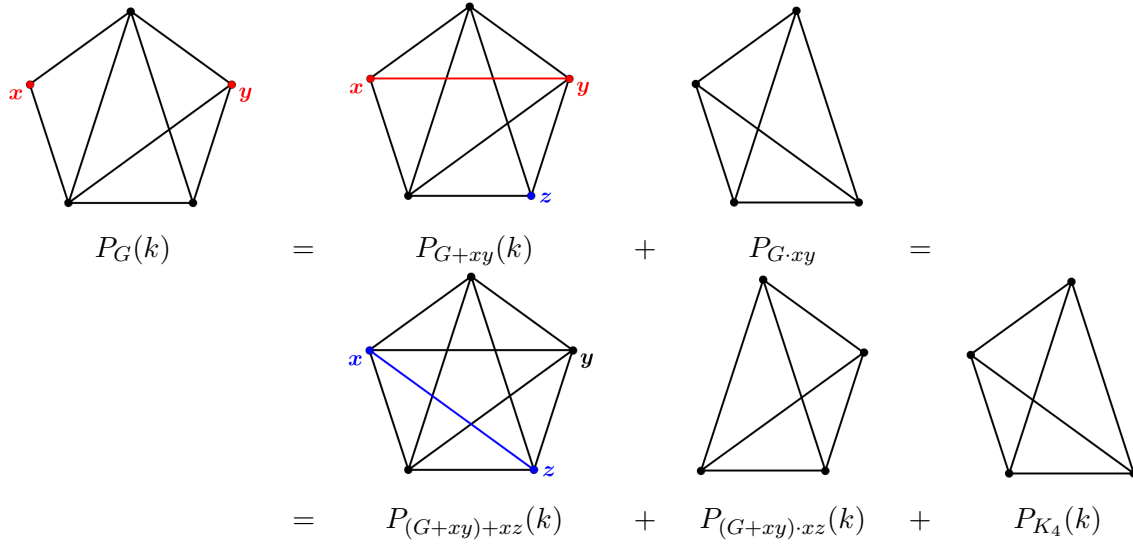
y, en consecuencia,

$$P_G(k) = P_{G+xy}(k) + P_{G \cdot xy}(k)$$

□

Una vez probado esto, vamos a aplicar este método para calcular el polinomio cromático del grafo del ejemplo 5.3 para comprobar que, efectivamente, es más sencillo.

Ejemplo 5.4.



$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{K_5}(k) + 2P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) + \\ &\quad + 2k(k-1)(k-2)(k-3) = k(k-1)(k-2)^2(k-3) \end{aligned}$$

Es fácil ver que si desarrollamos esta expresión coincide con la que obtuvimos en el ejemplo 5.3.

A continuación, vamos a ver otro resultado que nos permitirá calcular el polinomio cromático de un grafo dividiéndolo en dos subgrafos cuya intersección sea un grafo completo. En general, podremos aplicar este resultado a cualquier grafo porque una arista es un grafo completo K_2 y todo grafo no vacío se puede poner como unión de dos grafos cuya intersección sea una arista, pero dependiendo del grafo este proceso puede resultar más largo que los anteriores.

Teorema 5.3. Sea G un grafo y G_1, G_2 dos subgrafos de G tales que $G = G_1 \cup G_2$. Si $G_1 \cap G_2$ es un grafo completo, entonces

$$P_G(k) = \frac{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)}$$

Demostración.

Si $G = G_1$ (ó $G = G_2$) es fácil ver que se cumple el teorema. Vamos a probarlo por inducción sobre $n = |V| + |A|$. Cuando $n = 1$, tiene que ser $|V| = 1$ y $|A| = 0$ (no existe ningún grafo sin vértices y con una arista), en ese caso $G = G_1$ ó $G = G_2$ y el resultado es cierto.

Ahora supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que también es cierto para n . Podemos suponer que $V_1 \not\subseteq V_2$ porque de lo contrario, $G = G_2$ ya que $G = G_1 \cup G_2$.

Si $A_1 \subseteq A_2$ tiene que existir un vértice aislado v en V_1 porque todas las aristas de G_1 están en G_2 pero hay, al menos, un vértice de G_1 que no está en G_2 porque $V_1 \not\subseteq V_2$. Sean G' y G'_1 los grafos obtenidos al quitar el vértice v a los grafos G y G_1 respectivamente. Como v es un vértice aislado, G tiene al menos dos componentes conexas. Al igual que G , el grafo G' se puede poner como unión de los grafos G'_1 y G_2 con $G'_1 \cap G_2 = G_1 \cap G_2$ porque como v pertenece a G_1 pero no a G_2 entonces v no está en la intersección $G_1 \cap G_2$. Como G' tiene $n-1$ vértices podemos aplicar la hipótesis de inducción y se tiene que

$$P_{G'}(k) = \frac{P_{G'_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)}$$

Por otro lado, como consecuencia del teorema 5.2 se tiene que $P_G(k) = P_v(k) \cdot P_{G'}(k)$ y $P_{G_1}(k) = P_v(k) \cdot P_{G'_1}(k)$ y con esto se puede concluir que

$$P_G(k) = P_v(k) \cdot P_{G'}(k) = P_v(k) \cdot \frac{P_{G'_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)} = \frac{P_{G_1}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)}$$

Supongamos ahora que $A_1 \subsetneq A_2$, esto es, que existe una arista a con extremos x e y que está en A_1 pero no en A_2 . Los dos vértices x e y no pueden estar en V_2 porque de ser así ambos estarían en $G_1 \cap G_2$ y como éste es un subgrafo completo la arista a que los une debería estar en A_2 . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que x no está en V_2 .

Es fácil ver que

$$G \setminus a = (G_1 \setminus a) \cup G_2 \quad (5.1)$$

$$(G \setminus a) \cdot xy = ((G_1 \setminus a) \cdot xy) \cup G_2 \quad (5.2)$$

Como a no está en G_2 es claro que $G_1 \cap G_2 = (G_1 \setminus a) \cap G_2$ y como $G_1 \cap G_2$ es completo y ninguna arista de G_2 pasa por x , al contraer la arista a en el grafo G ni se añade ni se quita ninguna arista en $G_1 \cap G_2$, por lo que $(G_1 \setminus a) \cdot xy \cap G_2 = G_1 \cap G_2$.

Como $G \setminus a$ y $(G \setminus a) \cdot xy$ tienen menos aristas que G podemos aplicar la hipótesis de inducción y junto con el teorema 5.1 se tiene que

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{(G \setminus a) \cdot xy}(k) \\ &= \frac{P_{G_1 \setminus a}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)} - \frac{P_{(G_1 \setminus a) \cdot xy}(k) \cdot P_{G_2}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)} = \\ &= \frac{P_{G_2}(k) \cdot [P_{G_1 \setminus a}(k) - P_{(G_1 \setminus a) \cdot xy}(k)]}{P_{G_1 \cap G_2}(k)} = \frac{P_{G_2}(k) \cdot P_{G_1}(k)}{P_{G_1 \cap G_2}(k)} \end{aligned}$$

□

Ahora vamos a estudiar algunas de las propiedades de los coeficientes del polinomio cromático de un grafo $P_G(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \dots + \alpha_n k^n$.

Es claro que ningún grafo G se puede colorear con cero colores, es decir, que $P_G(0)$ tiene que ser cero para todo grafo G , o lo que es lo mismo, el término independiente del polinomio cromático de cualquier grafo G debe ser nulo. Si un grafo G tiene dos componentes conexas sabemos, por el teorema 5.2, que su polinomio cromático es el producto de los polinomios cromáticos de sus componentes. Como acabamos de ver, estos dos polinomios tienen término independiente no nulo, luego el término independiente de su producto también será cero, pero no sólo eso, la menor potencia de k que no tiene coeficiente nulo será k^2 ya que dos es el número de componentes conexas de G . Este resultado se puede generalizar a grafos con n componentes conexas.

Proposición 5.3. *Sea G un grafo con r componentes conexas G_1, \dots, G_r . Entonces el polinomio cromático de G es*

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) \cdots P_{G_r}(k) = \alpha_r k^r + \alpha_{r+1} k^{r+1} + \dots + \alpha_n k^n$$

Si G es un grafo con al menos una arista es imposible colorearlo con un único color, esto es $P_G(1)$ debe ser nulo, por lo tanto, la suma de todos los coeficientes del polinomio cromático de todo grafo G con, al menos, una arista es cero.

Proposición 5.4. *Sea G un grafo cuyo conjunto de aristas no es vacío. Entonces*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

En la siguiente proposición vamos a demostrar tres propiedades más que verifican los polinomios cromáticos.

Proposición 5.5. *Sea G un grafo con n vértices y m aristas y sea*

$$P_G(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i k^i$$

su polinomio cromático. Entonces,

- a) *El coeficiente del término de mayor grado α_n de $P_G(k)$ es uno.*
- b) *El siguiente coeficiente α_{n-1} de $P_G(k)$ es $-m$.*
- c) *Los coeficientes α_i de $P_G(k)$ se alternan en signo empezando por el de mayor grado que es positivo.*

Demostración.

- a) Vamos a probarlo por inducción sobre el número de aristas m . Es claro que si G no tiene aristas el polinomio cromático de G es k^n porque a cada uno de los n vértices se les puede asignar cualquiera de los k colores posibles. Supongamos que es cierto para $m-1$ veamos que también es cierto para m .

Por el teorema 5.1 sabemos que $P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}(k)$ donde $G \cdot a$ tiene $n-1$ vértices y $G \setminus a$ n . Como $G \setminus a$ tiene $m-1$ aristas podemos aplicar la hipótesis de inducción y se tiene que

$$P_G(k) = P_{G \setminus a}(k) - P_{G \cdot a}(k) = \sum_{i=1}^n \beta_i k^i - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i k^i = k^n + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \gamma_i) k^i$$

- b) De nuevo vamos a aplicar inducción sobre el número de aristas m de G . Para el caso en el que G tiene una sola arista y n vértices el polinomio cromático es $P_G(k) = k^{n-2}k(k-1) = k^n - k^{n-1}$ porque podemos asignar k colores a cada uno de los $n-2$ vértices aislados de G , k a uno de los dos extremos de la arista y $k-1$ al otro. Supongamos que el resultado es cierto para $m-1$, veamos que lo es para m .

Con un razonamiento análogo al anterior y usando la propiedad a) se tiene que

$$\begin{aligned} P_G(k) &= \sum_{i=1}^n \beta_i k^i - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i k^i = \left(k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i k^i \right) - \\ &\quad - \left(k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \gamma_i k^i \right) = k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} (\beta_i - \gamma_i) k^i \end{aligned}$$

- c) De nuevo vamos a aplicar inducción sobre el número de aristas m de G . Como hemos visto antes el polinomio cromático del grafo con n vértices y una arista es $k^n - k^{n-1}$ cuyos coeficientes se alternan en signo empezando por el de mayor grado que es positivo. Supongamos que es cierto para $m-1$ veamos que lo es para m .

En este caso vamos a aplicar la hipótesis de inducción a los grafos $G \setminus a$ y $G \cdot a$ que tienen, a lo sumo, $m-1$ aristas. Antes vamos a hacer un cambio de notación en los polinomios cromáticos, ahora $P_{G \setminus a}(k) = \sum_{i=0}^n \beta_i k^{n-i}$ y $P_{G \cdot a}(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i k^{n-1-i}$ por lo que aplicando la hipótesis de inducción queda:

$$\begin{aligned} P_G(k) &= \sum_{i=0}^n \beta_i k^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i k^{n-1-i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{\beta}_i k^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tilde{\gamma}_i k^{n-1-i} = \\ &= k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \tilde{\beta}_i k^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tilde{\gamma}_i k^{n-1-i} = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \tilde{\beta}_i k^{n-i} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \tilde{\gamma}_{i-1} k^{n-i} = k^n + \sum_{i=1}^n ((-1)^i \tilde{\beta}_i - (-1)^{i-1} \tilde{\gamma}_{i-1}) k^{n-i} = \\ &= k^n + \sum_{i=1}^n ((-1)^i \tilde{\beta}_i + (-1)^i \tilde{\gamma}_{i-1}) k^{n-i} = k^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i (\tilde{\beta}_i + \tilde{\gamma}_{i-1}) k^{n-i} \end{aligned}$$

Capítulo 6

Coloración en aristas

Otra forma de colorear grafos es coloreando sus aristas en lugar de colorear sus vértices y se define de manera análoga a la coloración en vértices.

Definición 6.1. Una *coloración en aristas* de un grafo G es una correspondencia tal que a cada arista de G se le asocia un color de manera que dos aristas incidentes en un mismo vértice no pueden tener el mismo color. Una coloración en aristas de un grafo G que usa k colores se llama *k-coloración* en aristas de G .

Por ejemplo, una coloración en aristas del grafo de la figura 1.1 es la siguiente:

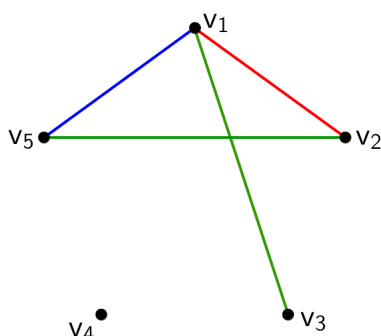


Figura 6.1: Ejemplo de coloración en aristas

Definición 6.2. Se define el *número cromático en aristas* o *índice cromático* de un grafo G como el entero k más pequeño tal que G es k -coloreable en aristas. El índice cromático del grafo G se denota $\chi'(G)$.

En el grafo de la figura 6.1, su índice cromático es tres porque, como hemos visto, se puede colorear con solamente tres colores pero no se puede colorear con menos porque en el vértice v_1 inciden tres aristas.

Tal como hemos observado en el ejemplo anterior, es claro que el índice cromático de un grafo G es siempre mayor o igual que su grado máximo. Si Δ es el grado máximo de G entonces existe, al menos, un vértice v en G cuyo grado es Δ , esto es, que en v inciden Δ aristas y por lo tanto se necesita un color diferente para colorear cada una de ellas. En particular, si G es un grafo bipartito se tiene la igualdad.

Proposición 6.1. *Sea G un grafo bipartito y Δ su grado máximo. Entonces, $\chi'(G) = \Delta$.*

Demostración.

Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre el número de aristas m de G . Es claro que si G tiene cero aristas su grado máximo es cero y su índice cromático también. Supongamos que la igualdad $\Delta = \chi'(G)$ es cierta para todo grafo G bipartito con $m \geq 1$ aristas. Veamos que también es cierta para un grafo G bipartito con $m + 1$ aristas.

Dada una arista xy de G , sea el grafo $H = G \setminus xy$ y c una coloración de H con $\Delta(H)$ colores, que sabemos que existe por hipótesis de inducción. Si en la coloración c , α es un color, nos referiremos a las aristas de H coloreadas con el color α como α -aristas.

Como el grado máximo de G es Δ , en cada vértice de G inciden, a lo sumo, Δ aristas y, en consecuencia, se tiene que en los vértices x e y de H inciden a lo sumo $\Delta - 1$ aristas. Entonces hay dos colores α y β de la colección $\{1, 2, \dots, \Delta\}$ tales que en x no incide ninguna α -arista y en y no incide ninguna β -arista. Si estos colores α y β son el mismo, la arista xy de G se podría colorear con ese color y entonces ya tendríamos una Δ -coloración en aristas de G . Podemos suponer que α es distinto de β y que en x incide una β -arista.

Ahora, vamos a extender esta arista a un recorrido maximal W con origen en x cuyas aristas están coloreadas por α y β alternativamente. Es claro que W existe y que es un camino, pues no contiene dos veces el mismo vértice, en caso de que exista un vértice v_0 en W que aparezca dos veces, W sería de la forma $W = a_0v_1a_1v_1a_2v_0a_3 \cdots a_kv_0a_{k+1} \cdots$. Esto quiere decir que en el vértice v_0 inciden cuatro aristas a_2, a_3, a_k, a_{k+1} que están coloreadas únicamente con los colores α y β lo cual es absurdo porque c es una coloración en aristas.

Por otra parte, W no puede contener al vértice y . De ser así, el camino podría acabar en y con una α -arista (como hemos supuesto que en x incide una β -arista, entonces en y tiene que incidir una α -arista). Por tanto, W tendría una longitud par, si empieza en una arista de color α y termina en una β -arista, hay el mismo número de aristas de color α que de color β , con lo que W tiene un número par de aristas. Luego, $W + xy$ sería un ciclo impar en G , lo cual no puede ser porque G es bipartito.

Vamos a asignar una nueva coloración a W intercambiando los colores α y β . Como W es maximal y ni en x inciden α -aristas ni en y inciden β -aristas, al intercambiar los colores α y β en todo H se tiene que todas las aristas de H siguen teniendo colores diferentes. Se obtiene así una nueva coloración en aristas c' de H con Δ colores en la que ni en el vértice y ni en el vértice x inciden β -aristas. Podemos entonces extender la coloración c' de H a una coloración en G coloreando la arista xy con el color β y se tiene así una coloración en aristas de G con Δ colores. \square

Hemos visto que el grado máximo de un grafo G es una cota inferior para su índice cromático. A continuación, vamos a ver que el grado máximo más uno es una cota superior.

Teorema 6.1 (Teorema de Vizing). *Sea G un grafo y Δ su grado máximo. Entonces su índice cromático $\chi'(G)$ verifica que $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.*

Demostración.

La primera de las desigualdades ya se ha probado anteriormente por lo que solo probaremos la segunda. Vamos a demostrarla por inducción sobre el número de aristas m de G . Es claro que si m es cero, el grado máximo es cero y el índice cromático también, por lo que, claramente, se cumple la desigualdad.

Sea G un grafo con m aristas y supongamos, por hipótesis de inducción, que todo grafo con menos de m aristas verifica la desigualdad que queremos probar. Entonces para toda arista $a = uv$ de G existe una coloración de $H = G \setminus a$ con $\Delta(H) + 1$ colores por hipótesis de inducción. Como $\Delta(H) \leq \Delta$, existe una $\Delta + 1$ coloración en aristas C de H , por lo que para dar una coloración en aristas de G con $\Delta + 1$ colores basta asignar a la arista a uno de esos $\Delta + 1$ colores. En dicha coloración C , dado un vértice x de H se usan a lo sumo $d(x) \leq \Delta$ colores para colorear sus aristas incidentes, entonces hay un color (al menos) c_i de la colección $\{1, \dots, \Delta + 1\}$ “que falta” en x .

Sea c_0 el color que falta en u y sea c_1 el color que falta en v . Si c_1 también falta en u podemos asignar el color c_1 a la arista a y ya tendríamos G coloreado con $\Delta + 1$ colores. Si c_1 no falta en u quiere decir que existe un arista incidente en u coloreada con el color c_1 a la que denotaremos uv_1 .

Sea c_2 el color que falta en v_1 . Si c_2 también falta en u podemos cambiar el color de uv_1 por c_2 y colorear uv con el color c_1 y ya habríamos acabado. Si c_2 no falta en u quiere decir que existe un arista incidente en u de color c_2 a la que llamaremos uv_2 .

De manera análoga, sea c_i el color que falta en v_{i-1} donde uv_{i-1} esta coloreada con el color c_{i-1} . Si c_i también falta en u podemos cambiar el color c_{i-1} de la arista uv_{i-1} por el color c_i y cambiar el color c_j de la arista uv_j por el de la arista uv_{j-1} para todo j con $1 \leq j \leq i-1$. Entonces podríamos colorear la arista a con el color c_1 (a este procedimiento le llamaremos “intercambiar los colores desde i ”) y ya habríamos acabado. Si el color c_i no falta en u denotamos uv_i a la arista coloreada con el color c_i y se procede de la misma manera para $i + 1$. El proceso de “intercambiar los colores desde i ” aparece en la siguiente figura.

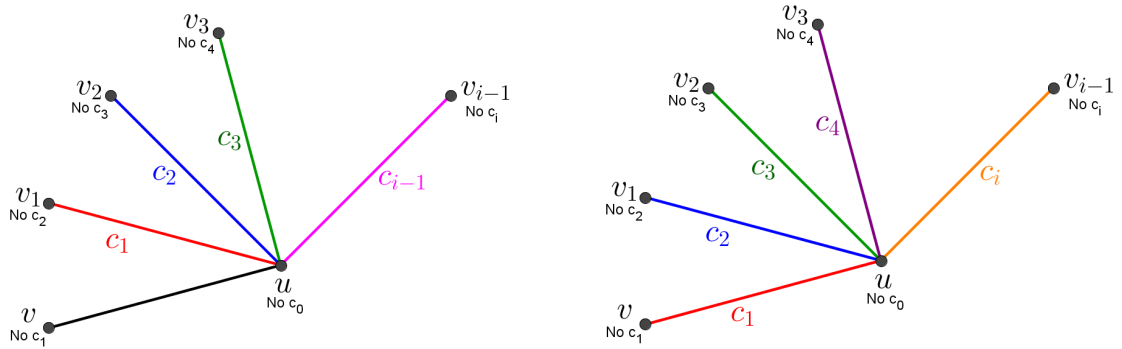


Figura 6.2: Intercambiar colores desde i

Como solo tenemos $\Delta + 1$ colores y en u falta c_0 es claro que uno de los colores c_i con $1 \leq i \leq \Delta$ se tiene que repetir porque de no ser así podríamos “intercambiar los colores desde $\Delta + 1$ ” y ya habríamos terminado. Sea l el índice más pequeño tal que el color c_k falta en v_l y es un color de la lista c_1, c_2, \dots, c_{l-1} . Por construcción, c_k también falta en v_{k-1} y es el color de la arista uv_k . Si el color c_0 también falta en v_l podemos colorear la arista uv_l con el color c_0 y al “intercambiar los colores desde l ” podríamos colorear la arista a con el color c_1 y ya habríamos acabado.

Entonces, podemos suponer que hay una arista incidente en v_l coloreada con el color c_0 y que al vértice v_l le falta el color c_k . Consideramos el recorrido maximal W que empieza en v_l con el color c_0 y cuyas aristas están coloreadas con los colores c_0 y c_k alternativamente. Por un

razonamiento análogo al de teorema 6.1 este recorrido es un camino y es único porque en cada vértice solo incide una arista de cada color.

A continuación vamos a considerar tres posibilidades: que el camino W contenga al vértice v_k , que contenga al vértice v_{k-1} o que no contenga a ninguno de los dos.

Supongamos que W contiene a v_k . Entonces W tiene que llegar a v_k con una arista de color c_0 , continua con la arista $v_k u$ que es de color c_k y termina en u porque a u le falta el color c_0 . Entonces, “intercambiando los colores desde k ” e intercambiando los colores c_0 y c_k a lo largo de todo el camino W podemos colorear la arista a con el color c_1 como muestra la figura 6.3 y ya habríamos acabado.

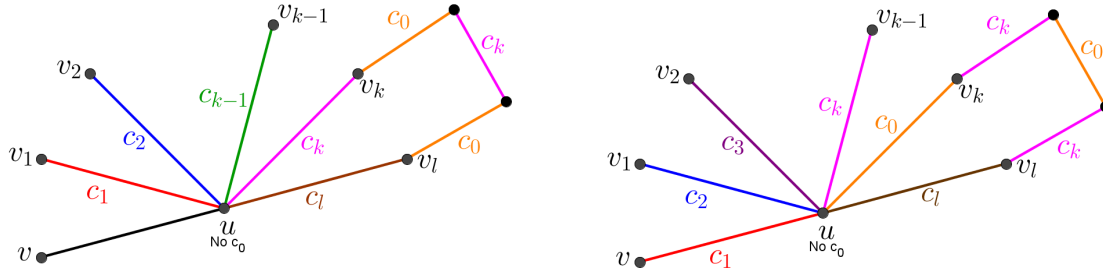


Figura 6.3

Supongamos ahora que W contiene a v_{k-1} . Entonces el camino W tiene que llegar a v_{k-1} con una arista de color c_0 y acabar ahí porque en v_{k-1} falta el color v_k . Si “intercambiamos los colores desde $k-1$, coloreamos la arista uv_{k-1} con el color c_0 e intercambiamos los colores c_0 y c_k a lo largo de todo el camino W podemos colorear la arista a con el color c_1 como muestra la figura 6.4 y se tendría una coloración en G .

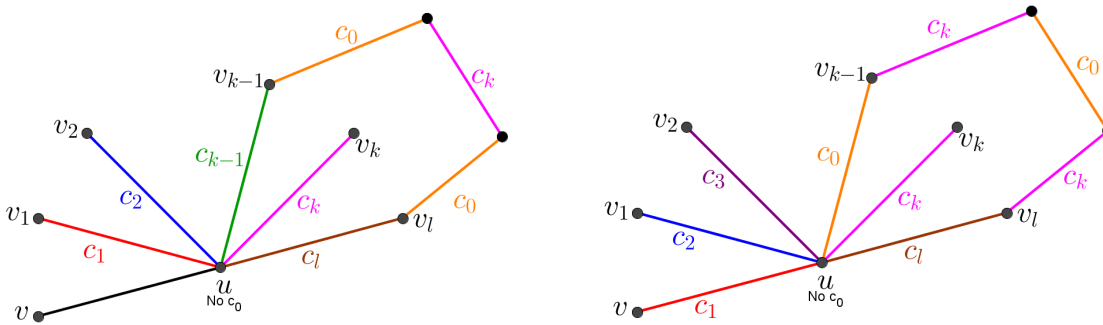


Figura 6.4

Finalmente, supongamos ahora que ni el vértice v_k ni el vértice v_{k-1} están en el camino W . Entonces W debe terminar en algún vértice distinto de u (porque en u falta el color c_0 y la única arista incidente en u de color c_k es uv_k), distinto de v_l (porque en v_l falta el color c_k) y distinto de v_k o v_{k-1} (que ya los hemos estudiado). Cambiando los colores c_0 y c_k entre sí a lo largo de todo el camino W , coloreando la arista uv_l con el color c_0 e “intercambiando los colores desde l ” podríamos colorear la arista a con el color c_1 como muestra la figura 6.5 y ya habríamos terminado (en la figura hemos supuesto que el camino W pasa por uno de los vértices anteriores, en particular v_2 , pero este hecho no es necesario).

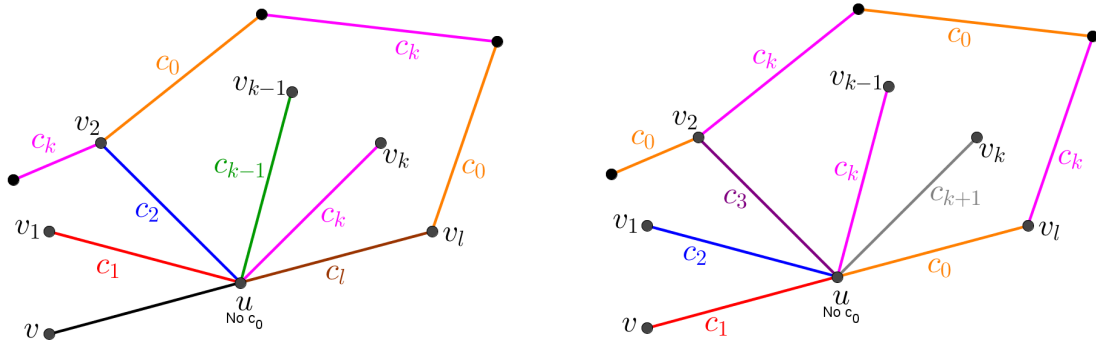


Figura 6.5

En cualquier caso hemos encontrado una $\Delta + 1$ coloración en aristas de G y en consecuencia queda probado el teorema. \square

Entonces el índice cromático de un grafo cualquiera solo puede tomar dos valores, o bien $\Delta(G)$ o bien $\Delta(G) + 1$. En consecuencia, podemos dividir los grafos en dos clases dependiendo de cuál sea su índice cromático. Aquellos grafos cuyo índice cromático sea Δ que pertenecen a la *clase 1* y los grafos cuyo índice cromático sea $\Delta + 1$ que pertenecen a la *clase 2*. Dado un grafo G saber si pertenece a la clase 1 o a la clase 2 es un problema difícil.

A continuación estudiaremos a cuál de las dos clases pertenecen los grafos completos K_n y los ciclos C_n . En ambos casos depende de la paridad de n por lo que estudiaremos por separado cuando n es par y cuando es impar.

Veamos que el índice cromático del grafo completo K_{2n} es $2n - 1$. Se ha probado con anterioridad que el índice cromático de un grafo es mayor que su grado máximo, que en este caso es $2n - 1$, con lo que $\chi'(K_{2n}) \geq 2n - 1$. Entonces, basta probar que $\chi'(K_{2n}) \leq 2n - 1$, o lo que es lo mismo, tenemos que encontrar una coloración en aristas de K_{2n} con $2n - 1$ colores, y por tanto de clase 1. Para ello elegimos un vértice v cualquiera de K_{2n} que usaremos como ‘pivote’ y numeramos el resto de los vértices desde 0 hasta $2n - 2$. Se coloca el vértice v y situamos el vértice v_0 a su izquierda. Distribuimos el resto de los vértices en dos columnas colocando los vértices v_1, v_2, v_3, \dots a la derecha, debajo del pivote y los vértices $v_{2n-2}, v_{2n-3}, \dots$ a la izquierda, debajo del v_0 (ver figura 6.6 para el caso del grafo K_{10}). Usaremos esta estructura para colorear el grafo.

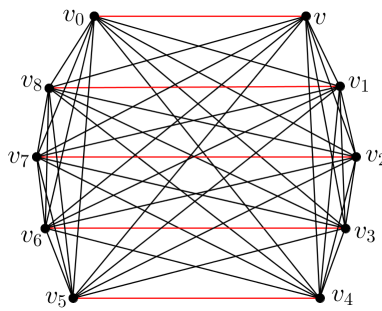


Figura 6.6

En esta configuración inicial coloreamos todas las aristas horizontales con el color 0, esto

es, coloreamos las aristas $v_0v, v_1v_{2n-2}, v_2v_{2n-3} \dots$ con el color 0. Ahora vamos a ‘girar’ el grafo. Mantenemos el pivote v en su posición y giramos todos los demás vértices en sentido contrario a las agujas del reloj. Ahora el vértice v está alineado horizontalmente con v_1 , el vértice v_0 está alineado con v_2 , v_{2n-1} con v_3 y así sucesivamente (ver figura 6.7). Coloreamos ahora todas las aristas horizontales con el color 1. Al usar colores distintos, es claro que puede ser parte de una coloración en aristas.

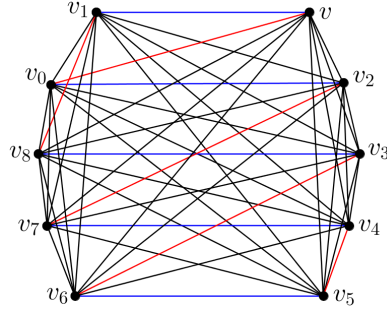


Figura 6.7

De nuevo giramos el grafo y nos queda el vértice v alineado horizontalmente con el vértice v_2 , v_1 alineado con v_3 , v_0 alineado con v_4 , $2n-2$ alineado con v_5 , etc. Ahora, coloreamos todas las aristas horizontales con el color 3 como muestra la figura 6.8.

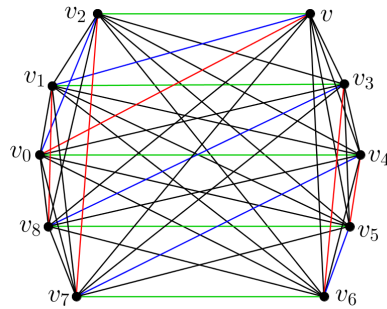


Figura 6.8

En cada giro del grafo seleccionamos un nuevo conjunto de aristas a colorear. Veamos cuántos giros son necesarios para colorear todas las aristas de K_{2n} . Cada vértice desde v_0 hasta v_{2n-2} tiene que llegar a estar alineado horizontalmente con v , pues el grafo es completo. Tenemos que hacer $2n-2$ giros y en consecuencia, usaremos $2n-1$ colores (uno por cada giro más el color inicial 0). Es claro que las aristas que ya están coloreadas no vuelven a estar en la horizontal en la que han sido coloreadas en menos de $2n-1$ giros. Este procedimiento nos proporciona una correcta coloración en aristas de K_{2n} con $2n-1$ colores.

Basándonos en lo anterior, veamos ahora que el índice cromático del grafo K_{2n-1} es exactamente $2n-1$, y en consecuencia, de clase 2. Para ello vamos a ver que es imposible colorearlo con menos de $2n-1$ colores. Esto es, $\chi'(K_{2n-1}) \geq 2n-1$. El grafo K_{2n-1} tiene exactamente $2n^2 - 3n + 1 = (2n-1)(n-1)$ aristas. Supongamos que K_{2n-1} admite una coloración en aristas c con $2n-2$ colores. Si existiesen n aristas con el mismo color, existirían $2n$ vértices incidentes a

aristas con el mismo color. Luego debería haber un vértice repetido y c no sería una coloración. Entonces, ninguno de los $2n - 2$ colores tiene asociadas más de $n - 1$ aristas en c . De esta forma, tenemos coloreados $(2n - 2)(n - 1)$ aristas y el grafo tiene $(2n-1)(n-1)$ aristas, lo cual es una contradicción.

Una coloración de K_{2n-1} puede realizarse de la siguiente manera. Si al grafo K_{2n-1} le añadimos un vértice y le hacemos adyacente a todos sus vértices obtenemos el grafo K_{2n} . Como hemos visto anteriormente, $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$. Sea c una coloración en aristas de K_{2n} con $2n - 1$ colores. Restringimos esta coloración al subgrafo K_{2n-1} y obtenemos una coloración en aristas de K_{2n-1} con $2n - 1$ colores.

A continuación vamos a hacer un estudio análogo del índice cromático del grafo ciclo C_n distinguiendo dos casos dependiendo de si n es par o impar.

Veamos que el índice cromático del grafo C_{2n} es 2 y por tanto, de clase 1. El grafo C_{2n} tiene $2n$ vértices, $2n$ aristas y su grado máximo es dos. Luego, $\chi'(C_{2n}) \geq 2$. Veamos que existe una coloración en aristas con dos colores. Asignamos el color 1 a cualquiera de las aristas de C_{2n} y vamos recorriendo el grafo coloreando las aristas con los colores 1 y 2 alternativamente. Como $2n$ es par y hemos empezado por el color 1, la arista a_{2n-1} también tiene color 1 y podemos colorear la arista a_{2n} con el color con el 2 obteniendo así una 2-coloración en aristas de C_{2n} . La figura 6.9 muestra una coloración del grafo ciclo C_6 con dos colores.

El índice cromático del grafo C_{2n-1} es tres, y entonces de clase dos. En este caso, como $2n - 1$ es impar si empezamos a colorear una arista a_1 de C_{2n-1} con el color 1 y vamos alternando los colores 1 y 2, cuando lleguemos a las arista a_{2n-2} la colorearemos con el color 2. Por tanto, la arista restante a_{2n-1} no la podemos colorear ni con el color 2 porque es adyacente a la arista a_{2n-2} , ni con el color 1 porque también es adyacente a la arista a_1 . Entonces, necesitamos un tercer color para colorear la arista a_{2n-1} . De esta manera tenemos una 3-coloración en aristas de C_{2n-1} y en consecuencia, $\chi'(C_{2n-1}) \leq 3$. Ahora, con un razonamiento similar al realizado en los grafos completos se tiene que no existe ninguna 2-coloración de C_{2n-1} . Con esto concluimos que el índice cromático del grafo ciclo C_{2n-1} es tres. En la figura 6.9 se puede observar un ejemplo de una 3-coloración del grafo ciclo C_5 .

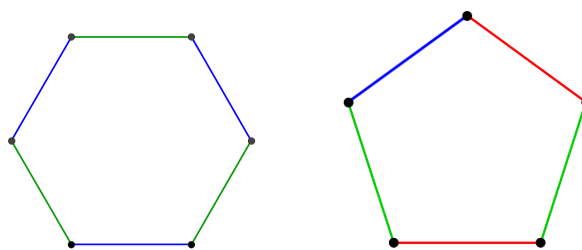


Figura 6.9: Grafos C_6 y C_5

Bibliografía

- [1] Appel K. y W. Haken. *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging*. Illinois J. Math. **21**, 429-490, 1977.
- [2] Appel K. y W. Haken. *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility*. Illinois J. Math. **21**, 491-567, 1977.
- [3] Araúz C. *Problemas y conjeturas de la teoría de grafos*. Trabajo Académicamente dirigido para la Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Barcelona, curso 2008/2009.
- [4] Armenta M. *Caracterizaciones fundamentales en teoría de gráficas: Teorema de Menger, Brooks, Euler, Dirac, Berge*. Tesis doctoral. Universidad de Sonora, 1996.
- [5] Berge C. *Perfect graphs*. Six Papers on Graph Theory, pages 1-21. Indian Statistical Institute, Calcutta, 1963.
- [6] Birkhoff G.D. *A determinant formula for the number of way of coloring map*. Ann. of Math. **14**, 42-46, 1912.
- [7] Brooks R.L. *On colouring the nodes of a network*. Proc. Cambridge Phil. Soc. **37**, 194-197, 1941.
- [8] Cayley A. *Open problem*. Proc. London Math Soc. **9**, 148, 1878.
- [9] Diestel R. *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2010.
- [10] Erdős P. y Szekeres G. *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Math. **2**, 463-470, 1935.
- [11] Euler L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol. **8**, 128-140, 1736.
- [12] Gallai T. *Maximum-minimum Sätze über Graphen*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **9**, 3-4, 395-434, 1958.
- [13] Gallardo P. *Apuntes de matemática discreta*. Universidad Autónoma de Madrid. 2010.
- [14] Heawood P.J. *Map colour theorem*. Quart. J. Pure Appl. Math. **24**, 332-338, 1890.
- [15] Jensen T.R. *Graph coloring problems*, Wiley Interscience, 1995.
- [16] Kempe A.B. *On the geographical problem of four colour*. Amer. J. Math. **2**, 193-200, 1879.

- [17] Kuratowski K. *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. 15, 271–283, 1930.
- [18] Lovász L. *A characterization of perfect graphs*. J. Combin. Theory Ser. B **13**, 95-98, 1972.
- [19] Luce R. D. y Perry A.D. *A method of matrix analysis of group structure*. Psychometrika. **14** (2), 95-116, 1949.
- [20] Mantel W. *Problem 28*, Wiskundige Opgaven, **10**, 60-61, 1907.
- [21] Mycielski J. *Sur le coloriage des graphes*. Colloq. Math. **3**, 161-162, 1955.
- [22] Sadornil D. Apuntes de matemática discreta. Universidad de Cantabria. Curso 2011/2012.
- [23] Sylvester J.J. *On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics, with three appendices*. Amer. J. Math. **1**, 64-125, 1878.
- [24] Tait P.G. *On the colouring of maps*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **10**, 501-503, 729, 1878-80.
- [25] Turán P. *On an extremal problem in graph theory*. Matematiko Fizicki Lapok **48**, 436-452, 1941.
- [26] Vizing V.G. *On a estimate of the chromatic class of a p-graph*. Metody Diskret. Analiz. **3**, 25-30, 1964.
- [27] West D. B. *Introduction to Graph Theory*, Pearson, 2002.