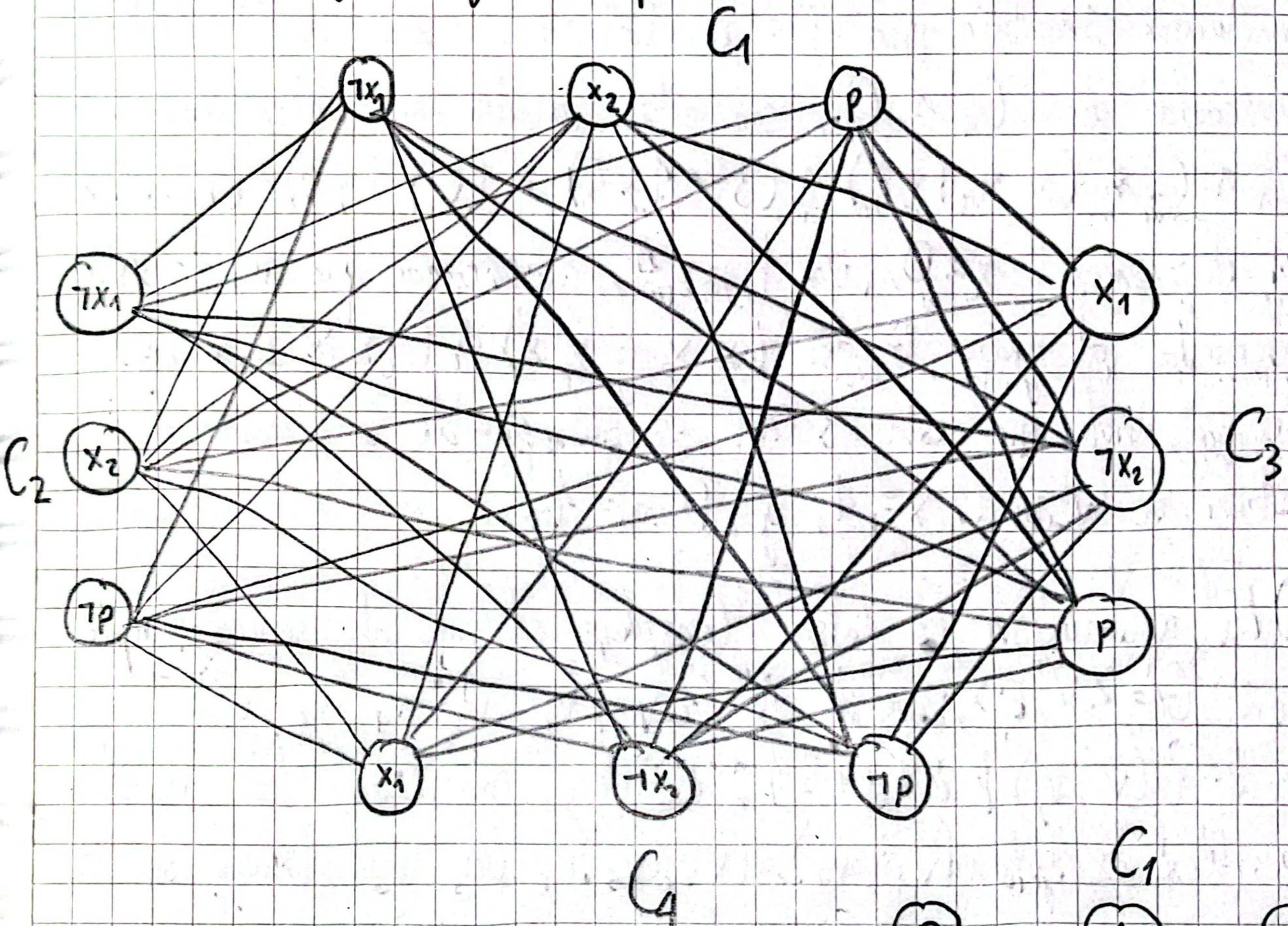
DD MM AAAA

Tarea 6 - DALGO

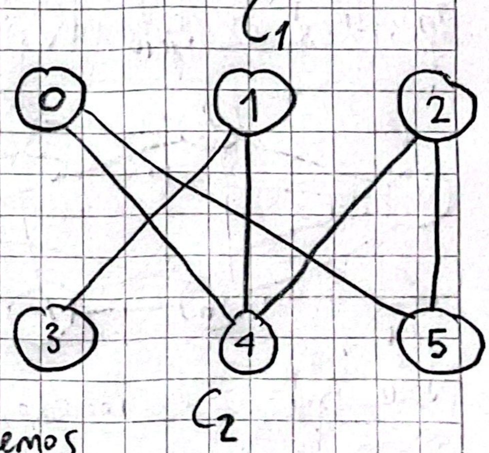
① 3-CNF Y CLIQUE

a) Tenemos el circuito NOT((x_1 XOR x_2)). Primero, note que el circuito (x_1 XOR x_2) equivale a la fórmula $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$. Ahora, al aplicarle el NOT a la fórmula, obtenemos que la fórmula equivalente al circuito completo es
$\neg[(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)] \equiv (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$ por leyes de DeMorgan. Entonces, NOT((x_1 XOR x_2)) $\equiv (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$.
Ahora, para convertir esta fórmula booleana, que es un 2-CNF, en un 3-CNF, debemos introducir una variable auxiliar p. Así, obtenemos el siguiente 3-CNF:
$(\neg x_1 \vee x_2 \vee p) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg p) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee p) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg p)$
Note que el valor de p no afecta ya que esta 3-CNF es equivalente a la 2-CNF anterior.
Ahora, debemos construir el grafo de la instancia asociada de CLIQUE equivalente a esta 3-CNF. Para esto, escribimos nuestra 3-CNF como $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$. Ahora, para cada $C_i = (r_1^i \vee r_2^i \vee r_3^i)$, añadimos tres vértices v_1^i, v_2^i, v_3^i a nuestro grafo G. Además, añadimos una arista a G entre v_s^i y v_t^j si se cumple que:
$i \neq j$ y r_s^i no es la negación de r_t^j. De esta manera,

obtenemos el siguiente grafo a partir de nuestra 3-CNF:



b) Primero, dibujemos el grafo G:



Note que, para hallar una 3-CNF cuyo grafo sea G, debemos hacer el proceso inverso al explicado en el apartado a). Para esto, tomemos $C_1 = (0 \vee 1 \vee 2)$ y $C_2 = (3 \vee 4 \vee 5)$. Note que esto satisface la primer condición para añadir una arista al construir el grafo a partir de la 3-CNF. Además, para que se satisfaga la segunda condición, podemos inferir las siguientes igualdades lógicas:

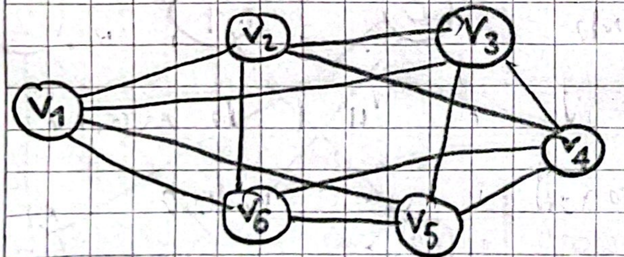
$0 = \neg 3$, $2 = \neg 3$, $1 = \neg 5$. De las primeras dos igualdades, concluimos también que $0 = 2$. Entonces, como la 3-CNF buscada es $C_1 \wedge C_2$, con estas igualdades, obtenemos:

$C_1 \wedge C_2 = (0 \vee 1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4 \vee 5) = (0 \vee 1 \vee 0) \wedge (\neg 0 \vee 4 \vee \neg 1)$.

Si definimos $x = 0$, $y = 1$, $z = 4$, obtenemos que la 3-CNF asociada al grafo G es: $(x \vee y \vee x) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg y)$

Además, note que esta 3-CNF es satisfacible si tomamos los valores de verdad $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

d) La afirmación es falsa. Considere el siguiente contraejemplo: Sea $G = \langle V, E \rangle$, donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E = \{(v_i, v_j) \mid i \neq j+3\}$, es decir, con todas las aristas posibles excepto (v_1, v_4), (v_2, v_5) y (v_3, v_6). Dibujo de G:



Supongamos que $v_1 = x$, $v_2 = y$, $v_3 = z$, $v_4 = \neg x$, $v_5 = \neg y$, $v_6 = \neg z$

Note que G es conexo, pero observe que G no puede contener un clique de tamaño 2 que contenga ambos x y $\neg x$, lo cual es necesario si queremos simular una cláusula tautológica como: $(x \vee \neg x \vee z)$. Entonces, G no puede representar una 3-CNF tautológica ∎

② Sea $G = \langle V, E \rangle$

a) "$\Rightarrow$": Supongamos que G tiene un clique $V' \subseteq V$ con $|V'| = K$. Sea $(u,v) \in \bar{E}$ alguna arista arbitraria. Entonces $(u,v) \notin E$, lo que implica que al menos uno entre u o v no pertenece a V', ya que cada par de vertices en V' está conectado por una arista en E. Como al menos uno entre u o $v \notin V' \Rightarrow$ al menos uno entre u o $v \in V \setminus V'$, lo que significa que la arista (u,v) está cubierta por $V \setminus V'$. Como (u,v) fue elegida arbitrariamente de $\bar{E}$, entonces cada arista en $\bar{E}$ está cubierta por $V \setminus V'$. Por lo tanto, el conjunto $V \setminus V'$, que tiene tamaño $n-K$, forma un vertex cover para $\bar{G}$. ■

"$\Leftarrow$": Supongamos que $\bar{G}$ tiene un vertex cover $V' \subseteq V$, donde $|V'| = n-K$. Entonces, para todo $u, v \in V$, si $(u,v) \in \bar{E}$, entonces $u \in V'$ ó $v \in V'$ ó ambas. Note que la contrapositiva de esta implicación es que para todo $u, v \in V$, si $u \notin V'$ y $v \notin V'$, entonces $(u,v) \notin \bar{E} \Rightarrow (u,v) \in E$. Esto es, por definición de clique, que $V \setminus V'$ es un clique, y su tamaño es K. ■

④ Queremos demostrar que HAMD $\leq_p$ TSPD.

Sea $G = \langle V, E \rangle$ una instancia del problema HAMD, que verifica si G es hamiltoniano o no. Vamos a construir una instancia del problema TSPD a partir de G. Para esto, definamos $G' = \langle V, E' \rangle$, donde $E' = \{(i,j) \mid i,j \in V,\ i \neq j\}$. Además, definamos una función de costo c de la siguiente manera:

$$c(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \in E \\ 1 & \text{si } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Note que, como G no es dirigido, no tiene auto-ciclos, por lo que $c(v,v) = 1\ \forall v \in V$. Así, definimos la instancia de TSPD como $\langle G', c, 0 \rangle$, donde TSPD verifica si G' tiene un traveling-salesman tour de costo máximo 0. Note que claramente podemos crear esta instancia de TSPD a partir de la instancia de HAMD en tiempo polinomial. Por lo tanto, solo falta demostrar que G tiene un ciclo hamiltoniano si y sólo si G' tiene un tour de costo máximo 0. Demostrémoslo:

"$\Rightarrow$": Supongamos que G tiene un ciclo hamiltoniano h. Cada arista en h pertenece a E, y por lo tanto su costo es 0 en G'. Por lo tanto, h es un tour en G' de costo 0.

"⇐": Supongamos que G' tiene un tour h' de costo máximo 0. Como los costos de las aristas en E' son 0 y 1, el costo del tour h' es exactamente 0 y cada arista en h' debe tener costo 0. Por lo tanto, h' solo tiene aristas en E. Entonces, h' es un ciclo hamiltoniano en G. ■