Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

**BSc - Sessionsprüfung** **26.1.2010**

# Regelungstechnik I (151-0591-00)

**Prof. L. Guzzella**

# Musterlösung

| | |
|---|---|
| **Dauer der Prüfung:** | **120 Minuten** |
| **Anzahl der Aufgaben:** | **8** (**unterschiedlich** gewichtet, total 68 Punkte) |
| **Bewertung:** | Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden.<br>Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben. |
| **Erlaubte Hilfsmittel:** | 20 A4-Blätter (**40 Seiten**)<br>Taschenrechner (**zur Verfügung gestellt**)<br>Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben. |
| **Zur Beachtung:** | Alle Lösungen, ausser die Antworten bei Multiple-Choice Aufgaben, sind zu begründen.<br>Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern. |

## Aufgabe 1 (Modellieren, Linearisieren) **10 Punkte**

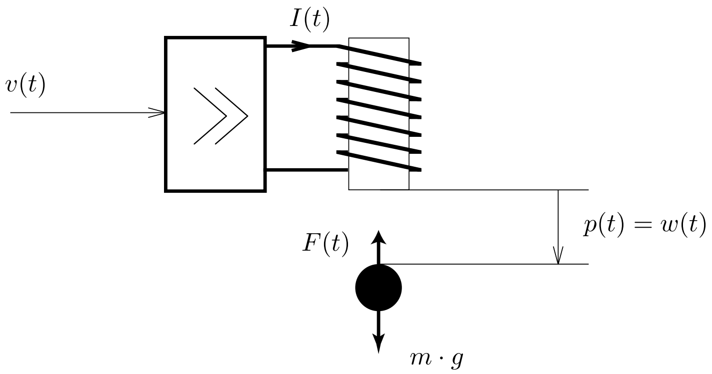
Das Bild unten zeigt das Prinzipschema des zu analysierenden Systems, welches aus einem raumfesten Elektromagnet und einer im Erdgravitationsfeld sich vertikal frei bewegenden ferromagnetischen Kugel mit Masse $m$ besteht. Der Strom $I(t)$ im Magnet erzeugt eine Maxwellkraft $F(t)$ auf die Kugel, welche sich gut approximieren lässt durch die Gleichung

$$F(t) = \beta \cdot \frac{I^2(t)}{p^2(t)}$$

wobei $\beta$ eine bekannte Konstante und $p(t)$ der gemessene Abstand der Kugel vom Elektromagnet ist. Der Strom $I(t)$ kann durch den Verstärker sehr schnell eingestellt werden, so dass die Vereinfachung $I(t) = \alpha \cdot v(t)$ erfüllt ist, wobei $v(t)$ das Steuersignal und $\alpha$ eine einstellbare Verstärkung ist. Der Einfachheit halber wird diese wie folgt gewählt

$$\alpha = \sqrt{\frac{m}{\beta}}$$

Die Messung der Position $p(t)$ kann ebenfalls als sehr schnell und fehlerfrei angenommen werden, so dass die Grösse $w(t) = p(t)$ als Ausgangssignal zur Verfügung steht.




**a)** (4 Punkte) Wie lauten die Differentialgleichungen, welche die vertikale Bewegung der Kugel beschreiben? Benutzen Sie $v(t)$ als Input und $w(t)$ als Output des Systems. Schreiben Sie die Gleichungen in der Standardform auf, d.h. als ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen *erster* Ordnung

$$\dot{z}(t) = f(z(t), v(t)), \quad w(t) = g(z(t), v(t)), \quad z(t) \in \Re^2, \quad v(t), w(t) \in \Re$$

**b)** (2 Punkte) Die Kugel soll in einem Abstand $p_e$ im Gleichgewicht gehalten werden. Wie gross müssen Sie das Eingangssignal $v$ wählen, damit dies erreicht wird? Welche Werte $z_{1e}$ und $z_{2e}$ haben in diesem Gleichgewicht die Zustandsgrössen $z_1$ und $z_2$? Wie gross ist der Gleichgewichtsoutput $w_e$?

**c)** (4 Punkte) Linearisieren Sie die Systemgleichungen um diesen Gleichgewichtspunkt (auf eine Normierung wird verzichtet). Stellen Sie die Systemgleichungen in der Standardform dar (Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen $\{A, b, c, d\}$).

## Lösung 1

**a)** Die folgende Differentialgleichung findet man direkt mit Newton

$$m\ddot{p}(t) = m\,g - F(t)$$

beziehungsweise mit den gemachten Annahmen

$$\ddot{p}(t) = g - \frac{\beta}{m} \cdot \frac{\frac{m}{\beta} \cdot v^2(t)}{p^2(t)} = g - \frac{v^2(t)}{p^2(t)}$$

Dies ist eine gewöhnliche nichtlineare Diffenerialgleichung *zweiter* Ordnung. Durch die folgende Wahl der Zustandsgrössen

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}$$

erhält man die Standardform erster Ordnung

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ \\ g - \dfrac{v^2(t)}{z_1^2(t)} \end{bmatrix}, \qquad w(t) = z_1(t) \tag{1}$$

**b)** Damit die Kugel bei der Position $p_e = z_{1e}$ im Gleichgewicht ist, müssen alle Ableitungen in der Gleichung (1) gleich 0 sein. Deswegen muss erstens das Inputsignal wie folgt gewählt werden

$$v_e = \sqrt{g} \cdot z_{1e} \tag{2}$$

Zweitens bleibt die Kugel nur dann im Gleichgewicht stehen, wenn ihre Geschwindigkeit gleich $z_{2e} = 0$ ist. Das Outputsignal erhält man direkt als $w_e = z_{1e} = p_e$.

**c)** Die Gleichungen (1) werden linearisiert indem man den folgenden Ansatz macht

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{1e} + \delta z_1(t) \\ z_2(t) &= z_{2e} + \delta z_2(t) \\ v(t) &= v_e + \delta v(t) \\ w(t) &= w_e + \delta w(t) \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ansatz in Gleichung (1) ein und benutzt man die Resultate der letzten Teilaufgabe so erhält man für die erste Differentialgleichung

$$\dot{z}_1(t) = \delta\dot{z}_1(t) = z_2(t) = z_{2e} + \delta z_2(t) = \delta z_2(t)$$

Analog für die zweite Differentialgeichung

$$\dot{z}_2(t) = \delta\dot{z}_2(t) = g - \frac{v^2(t)}{z_1^2(t)} = g - \frac{(v_e + \delta v(t))^2}{(z_{1e} + \delta z_1(t))^2}$$

Entwickelt man den letzten Term in eine Taylorreihe, so erhält man

$$\delta\dot{z}_2(t) = g - \frac{v_e^2}{z_{1e}^2} - 2\,\frac{v_e}{z_{1e}^2} \cdot \delta v(t) + 2\,\frac{v_e^2}{z_{1e}^3} \cdot \delta z_1(t) = -2\,\frac{g}{v_e} \cdot \delta v(t) + 2\,\frac{g}{z_{1e}} \cdot \delta z_1(t)$$

Die Vereinfachung zum letzten Term erhält man indem man die Gleichgewichtsbedingung (2) benutzt. Für die Messgleichung gelten die folgenden einfachen Zusammenhänge

$$w(t) = w_e + \delta w(t) = z_{1e} + \delta z_1(t) \quad \rightarrow \quad \delta w(t) = \delta z_1(t)$$

Mit diesen Resultaten folgt dann direkt die Zustandsraumdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\,\frac{g}{z_{1e}} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\,\frac{g}{v_e} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = [0]$$

Alternative Lösung mit Hilfe der Jacobi-Matrizen (die Ausgansfunktion wurde dabei mit $h$ bezeichnet, damit es keine Verwechselung mit der Erdbeschleunigung g gibt!):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}_{|z=z_e, v=v_e} \\
b &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{|z=z_e, v=v_e} \\
c &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial z_1} & \frac{\partial h}{\partial z_2} \end{bmatrix}_{|z=z_e, v=v_e} \\
d &= \frac{\partial h}{\partial v}_{|z=z_e, v=v_e}
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (1) können die Funktionen $f_1$, $f_2$ und $h$ wie folgt entnommen werden:

$$\begin{aligned}
f_1 &= z_2 \\
f_2 &= g - \frac{v^2}{z_1} \\
h &= z_1
\end{aligned}$$

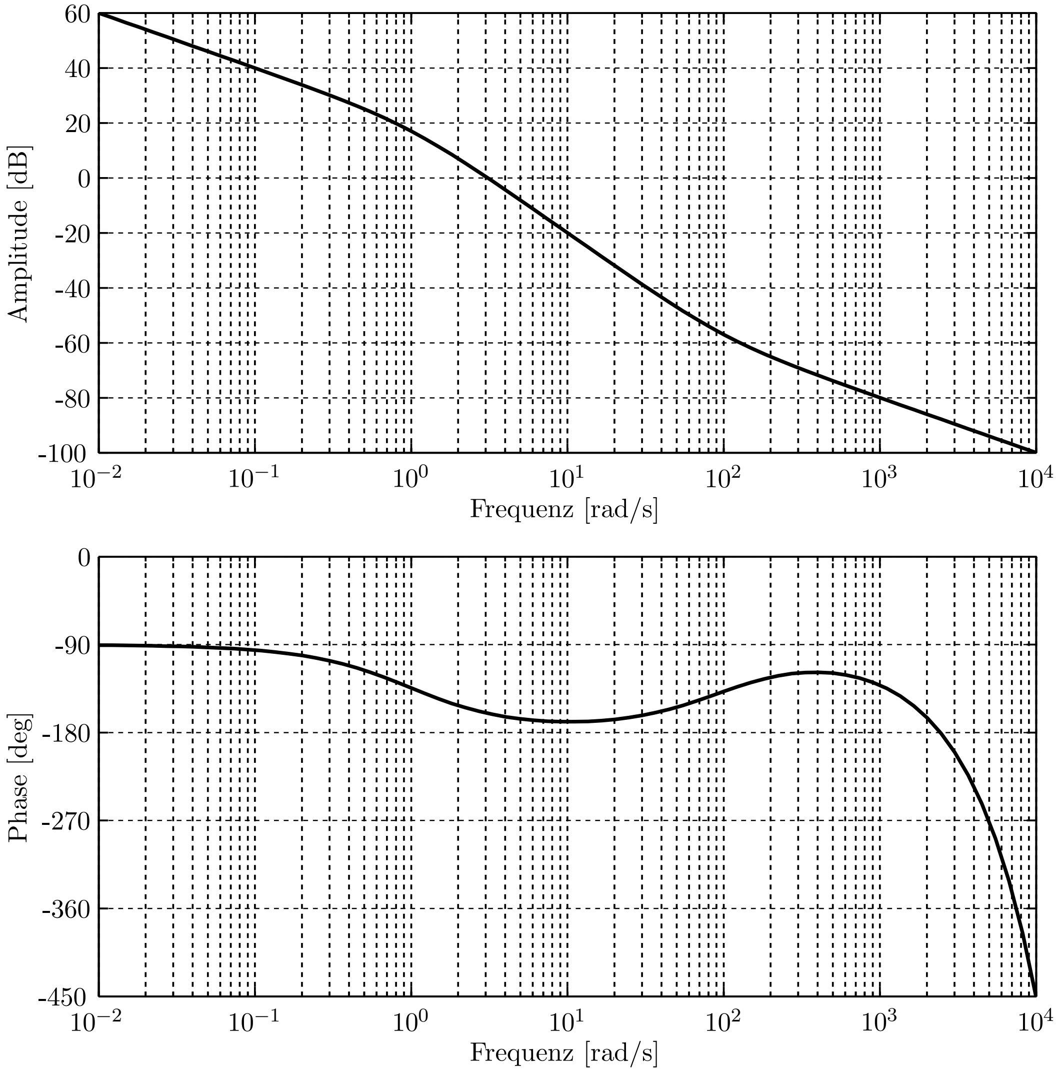
Damit erahlten wir für die Systemmatrizen des linearisierten Systems:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2v_e^2}{z_{1e}^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{z_{1e}} & 0 \end{bmatrix} \\
b &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2v_e}{z_{1e}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{v_e} \end{bmatrix} \\
c &= [1 \quad 0] \\
d &= 0
\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt für die Bestimmung von $A$ und $b$ der Zusammenhang in der Gleichung (2) verwendet.

## Aufgabe 2 (Bode-Diagramm) 9 Punkte

Für eine Regelstrecke, die eine Totzeit in Serie aufweist, wurde folgendes Bode-Diagramm gemessen:




**a)** (5 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ der vermessenen Strecke.

**b)** (2 Punkte) Die Strecke wird mit einem P-Regler stabilisiert, der einen Wertebereich für die Verstärkung von $k_p \in [0.5, 100]$ hat. Zeigen Sie anhand des Nyquistkriteriums, dass immer ein asymptotisch stabiles Regelsystem resultiert.

**c)** (2 Punkte) Welche Robustheitseigenschaften (Phasenreserve, Verstärkungsreserve) hat das System für eine Reglerverstärkung von $k_p = 1$.

## Lösung 2

**a)** (5 Punkte) Da das System ein integrierendes Verhalten (Phase bei tiefen Frequenzen -90° und Absinken der Amplitude von -20 dB/dek in Richtung höheren Frequenzen) aufweist, hat es einen offenen Integrator. Der Knick (-40 dB/dek, Phasensprung -90°) bei

1 rad/s lässt auf eine stabile Polstelle schliessen. Der Knick (-20 dB/dek, Phasensprung +90°) bei 100 rad/s lässt auf eine minimalphasige Nullstelle schliessen. Der Phasenverlust bei hohen Frequenzen bedeutet, dass die Strecke eine zusätzliche Totzeit hat. Die Übertragungsfunktion lässt sich also folgendermassen beschreiben

$$\Sigma(s) = k \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot (s/100 + 1) \cdot e^{-s \cdot T}.$$

Nun müssen noch die Konstante $k$ und die Totzeit $T$ bestimmt werden. Für die Bestimmung der Konstante $k$ wird folgende Grenzwertüberlegung gemacht.

$$\lim_{\omega \to 0} \Sigma(s) = \frac{k}{s}.$$

Bei $\omega = 0.01$ rad/s beträgt die Verstärkung approximativ 60 dB (1000). Gemäss Grenzwertüberlegung gilt

$$|\frac{1}{j \cdot 0.01}| = 100.$$

Daraus folgt

$$k = 10.$$

Alternative exakte Lösungsvariante:
Da die Totzeit den Betrag 1 hat gilt für den Betrag von $\Sigma(s)$ bei $\omega$

$$|\Sigma(j\omega)| = k \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+1} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{100} + 1}$$

daraus folgt

$$k = \frac{|\Sigma(j\omega)|}{\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+1} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{100} + 1}}.$$

Aus dem Bode-Diagramm wird zum Beispiel der Betrag bei $\omega = 10^{-2}$ herausgelesen

$$|\Sigma(j \cdot 10^-2)| = 60\,\text{dB} = 1000$$

und somit

$$k = 10.$$

Die zusätzliche Phasendrehung der Totzeit bei $10^4$ rad/s beträgt

$$-450 - (-90) = -360$$

Die Phase des Totzeitelementes entspricht

$$\angle(e^{-j\omega \cdot T}) = -\omega \cdot T,$$

daraus folgt

$$T = \frac{2\pi}{10^4}[s].$$

Alternativer exakter Lösungsweg:
Die Phase von $\Sigma(s)$ bei $\omega$

$$\angle(\Sigma(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(-\omega) + \tan^{-1}(\frac{\omega}{100}) - \omega \cdot T$$

daraus folgt

$$T = \frac{-\angle(\Sigma(j\omega)) - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(-\omega) + \tan^{-1}(\frac{\omega}{100})}{\omega}.$$

Aus dem Bode-Diagramm wird zum Beispiel die Phase bei $\omega = 10^4$ herausgelesen

$$\angle\Sigma(j \cdot 10^4) = -450°.$$

Daraus folgt für die Totzeit

$$T = \frac{2\pi}{10^4}[s].$$

Die Übertragungsfunktion ist also

$$\Sigma(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot (s/100 + 1) \cdot e^{-s \cdot \frac{2\pi}{10^4}}.$$

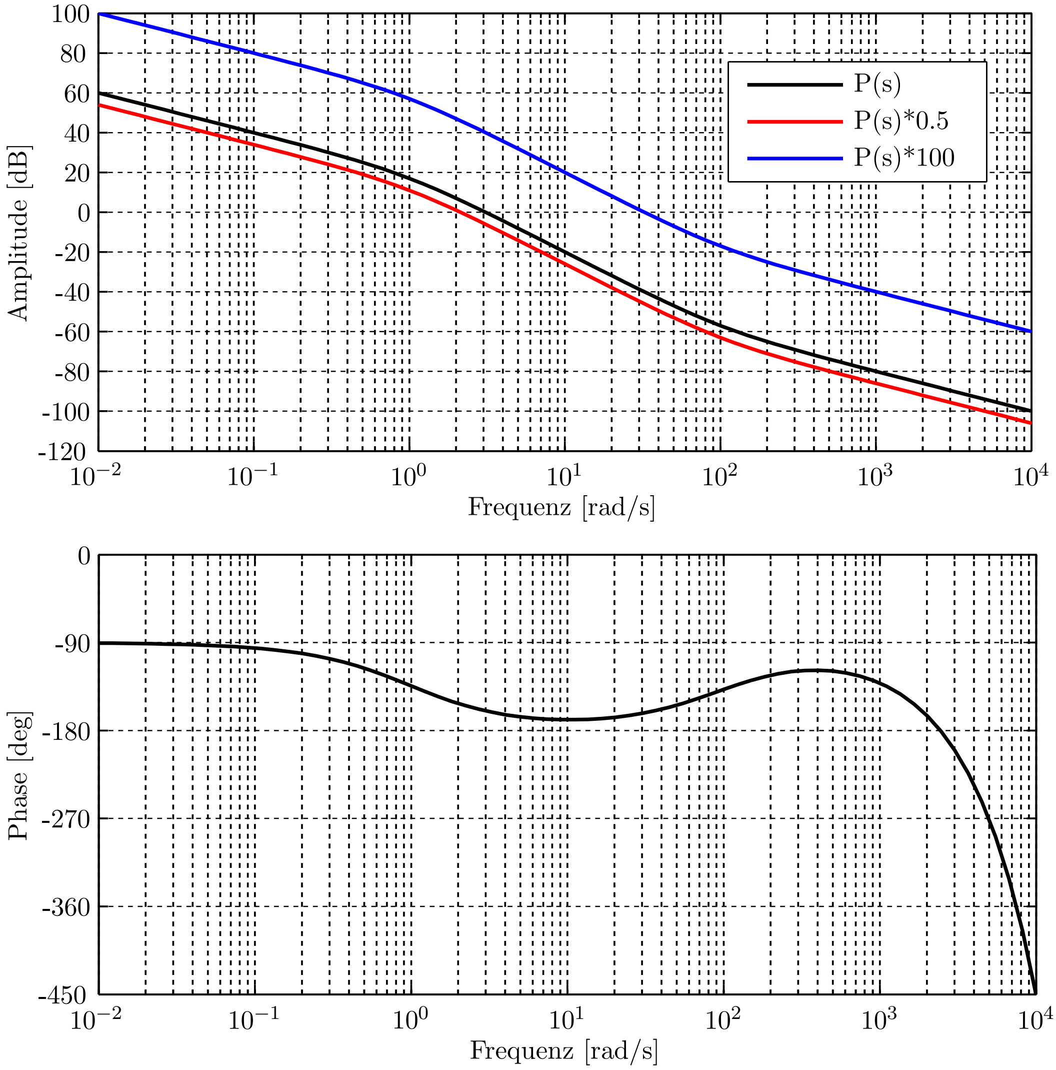
**b)** (2 Punkte) Da der Regler selbst keine instabilen oder grenzstabilen Pole hat, folgt für den offenen Regelkreis

$$n_+ = 0,\ n_0 = 1.$$

Laut dem Nyquist-Kriterium

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2} = 0.5,$$

muss der Nyquistpunkt 0.5 mal im Gegenuhrzeigersinn umrundet werden. Gemäss dem nachfolgenden Bode-Diagramm des offenen Regelkreises ist dies für alle $k_p$ im Wertebereich erfüllt, da für $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ der Nyquistpunkt jeweils ein halbes Mal umrundet wird.

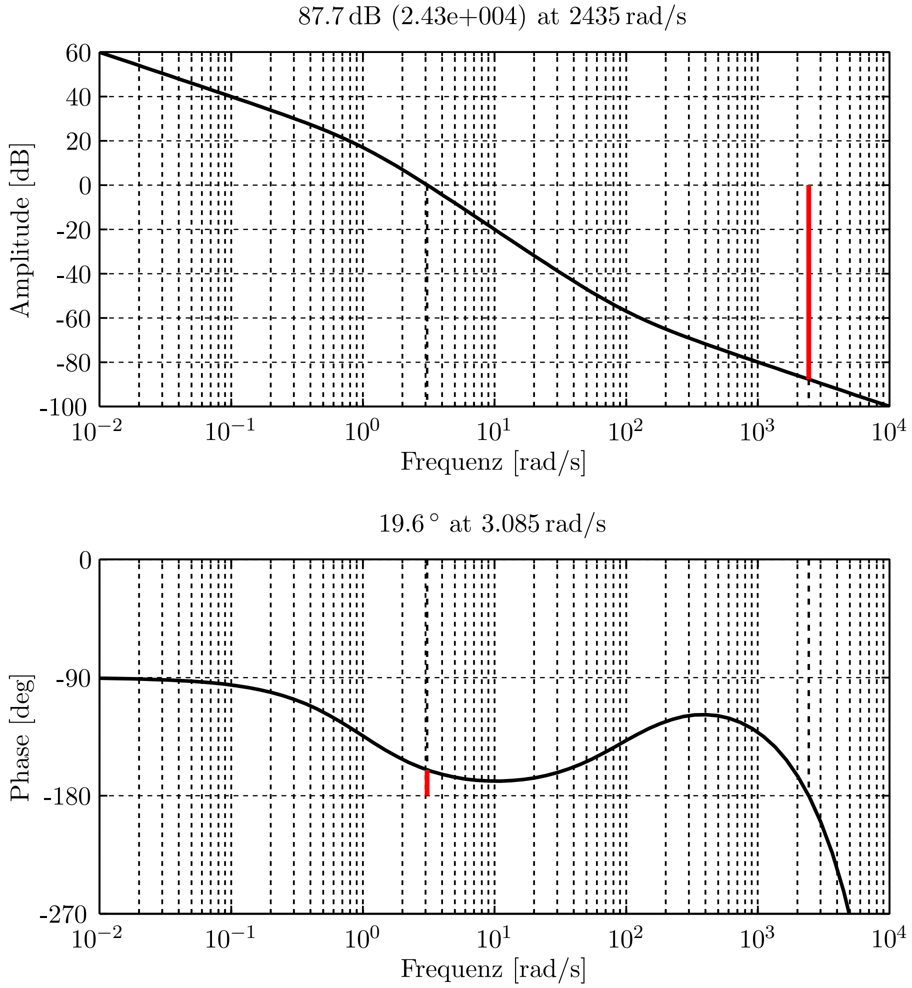


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Amplitude [dB]
P(s)
P(s)*0.5
P(s)*100
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
$10^{4}$
Frequenz [rad/s]
0
-90
-180
-270
-360
-450
Phase [deg]
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
$10^{2}$
$10^{3}$
$10^{4}$
Frequenz [rad/s]

**c)** (2 Punkte) Für den offenen Regelkreis gilt

$$L(s) = k_p \cdot P(s) = P(s).$$

Für die Robustheitsuntersuchung kann also direkt der gegebene Bode-Diagramm verwendet werden. Die Lösung ist auf dem nachfolgenden Bode-Diagramm ersichtlich.



## Aufgabe 3 (Reglerauslegung) 10 Punkte

Gegeben ist die folgende Strecke

$$P(s) = \frac{5-s}{(s+3)(s+1)}.$$

**Hinweis**: Die Teilaufgaben b.) - f.) sind unabhängig von der Lösung von a.)

**a)** (1 Punkt) Ihre Chefin möchte, dass Sie einen P-Regler für diese Strecke auslegen. Sie schlagen vor, die Verstärkung $k_p$ nach Ziegler/Nichols-Regeln auszulegen. Erklären Sie ihr warum Ziegler/Nichols hier angewendet werden kann.

**b)** (3 Punkte) Nach erfolgreicher Argumentation legen Sie los und bestimmen die kritische Verstärkung $k_p^*$ und die kritische Frequenz $\omega^*$.

**c)** (1 Punkt) Anschliessend bestimmen Sie daraus die Verstärkung $k_p$ nach der Methode von Ziegler/Nichols.

**d)** (3 Punkte) Sie präsentieren Ihrer Chefin den Regler. Ihre Chefin fragt Sie, ob Sie allfällige systembedingte Einschränkungen der Durchtrittsfrequenz mit einem Sicherheitsfaktor von 5 eingehalten haben, d.h. $5 \cdot \max\{\pi^+\} < \omega_c < 0.2 \cdot \min\{\zeta^+, 1/T\}$. Sie verlangt einen mathematischen Nachweis.

**e)** (1 Punkt) Da dies nicht der Fall ist, werden Sie aufgefordert, die maximale Verstärkung $k_{p,max}$ zu bestimmen, für welche die Einschränkungen (mit Sicherheitsfaktor 5) eingehalten werden.

**f)** (1 Punkt) Zum Schluss verlangt Ihre Chefin, dass Sie den stationären Nachlauffehler dieses P-Reglers bestimmen und fragt Sie, wie man diesen eliminieren könnte.

## Lösung 3

**a)** (1 Punkt) Damit ein $k_p^* < \infty$ bestimmt werden kann, muss die Kreisverstärkung $L(s)$ im Nyquist Diagramm die negative x-Achse schneiden.
Die beiden Pole bei $\pi_1 = 1$ und $\pi_2 = 3$ führen je zu einem Phasenverlust von 90°. Die nicht-minimalphasige Nullstelle führt zu einem weiteren Phasenverlust von 90°. Folglich schneidet $L(s)$ im Nyquist-Plot die negative x-Achse.
Dies kann auch mathematisch gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to\infty} \angle P(s) &= \lim_{\omega\to\infty} \left[\arctan\left(\frac{-\omega}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right) - \arctan(\omega)\right] \\
&= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{3\cdot\pi}{2}
\end{aligned}$$

**b)** (3 Punkte) Zur Bestimmung der kritischen Verstärkung $k_p^*$ und der kritischen Frequenz $\omega^*$ kann die folgende Beziehung verwendet werden:

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) = -1$$

Es folgt somit:

$$\begin{aligned} k_p^* \frac{5 - j\omega^*}{(j\omega^* + 1) \cdot (j\omega^* + 3)} &= -1 \\ 5 \cdot k_p^* - j\omega^* k_p^* &= (\omega^*)^2 - 3 - j\omega^* 4 \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich des Imaginärteils findet man $k_p^* = 4$.
Für den Vergleich des Realteils folgt:

$$\begin{aligned} (\omega^*)^2 - 3 &= 5 \cdot k_p^* \\ \omega^* &= \sqrt{23} \approx 4.8 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

**c)** (1 Punkt) Aus der Tabelle erhält man den Wert für einen P-Regler nach Ziegler/Nichols:

$$k_p = 0.5 \cdot k_p^* = 2$$

**d)** (3 Punkte) Aufgrund der nicht-minimalphasigen Nullstelle ist die Durchtrittsfrequenz begrenzt auf

$$\omega_{c,max} = \frac{\zeta^+}{5} = 1 \text{ rad/s}$$

Es gilt nun zu überprüfen, ob die Ungleichung $\omega_c < \omega_{c,max}$ erfüllt ist.

Die Durchtrittsfrequenz $\omega_c$ findet man durch Lösen der Gleichung $|L(j\omega_c)| = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{|k_p \cdot (5 - j\omega_c)|}{|3 - \omega_c^2 + 4 \cdot j\omega_c)|} &= 1 \\ k_p \sqrt{25 + \omega_c^2} &= \sqrt{(3 - \omega_c^2)^2 + 16\omega_c^2} \\ 100 + 4\omega_c^2 &= \omega_c^4 + 10\omega_c^2 + 9 \\ 0 &= \omega_c^4 + 6\omega_c^2 - 91 \end{aligned}$$

Auflösen der quadratischen Gleichung ergibt:

$$\omega_c^2 = -3 \pm 10 = \{-13, 7\}$$

Wir sind dabei nur an positiven realen Frequenzen interessiert. Es folgt somit

$$\omega_c = \sqrt{7} \approx 2.65 \text{ rad/s}.$$

Folglich ist die Ungleichung $\omega_c < \omega_{c,max}$ nicht erfüllt. Die Durchtrittsfrequenz ist zu hoch.

**e)** (1 Punkt) Durch Einsetzen von $\omega_c = 1$ rad/s in die obige Gleichung findet man:

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\sqrt{(3 - \omega_c^2)^2 + 16\omega_c^2}}{\sqrt{25 + \omega_c^2}} \\ k_p &= \sqrt{\frac{20}{26}} \approx 0.877 \end{aligned}$$

Es folgt somit $k_{p,max} \approx 0.877$.

**f)** (1 Punkt) Der stationäre Nachlauffehler eines Einheitssprungs kann anhand der folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} e_\infty = S(0) &= \frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} \\ &= \frac{3}{3 + 5 \cdot k_p} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} e_\infty = 1 - T(0) &= 1 - \frac{P(0) \cdot C(0)}{1 + P(0) \cdot C(0)} \\ &= \frac{3}{3 + 5 \cdot k_p} \end{aligned}$$

Für den stationären Nachlauffehler folgt $e_\infty = 0.405$.

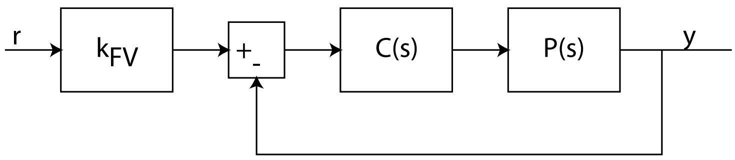
Es gibt zwei Möglichkeiten den stationären Nachlauffehler zu eliminieren:

1. Durch einen I-Anteil kann der stationäre Nachlauffehler eliminiert werden.

2. Durch einen proportinalen Vorfilter. Das resultierende Regelsystem ist in der untenstehenden Graphik abgebildet. Der Gain des Vorfilters $k_{VF}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} e_\infty &= 1 - k_{VF} \cdot T(0) = 0 \\ k_{VF} &= \frac{1}{T(0)} \\ &= \frac{3 + 5 \cdot k_p}{5 \cdot k_p} \\ k_{VF} &= 1.682. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist eher theoretischer Natur, da vorausgesetzt wird, dass das Modell die Strecke perfekt abbildet. Falls dies nicht der Fall ist, wird ein Regelfehler resultieren.



## Aufgabe 4 (Laplace Transformation) 5 Punkte

**a)** (2 Punkte)

Bilden Sie die Laplace-Transformierten folgender Zeitfunktionen. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

i) $x(t) = \frac{h(t)}{2\mathrm{j}} \cdot (e^{2\mathrm{j}t} - e^{-2\mathrm{j}t})$,

ii) $f(t) = \begin{cases} a & \text{für} \quad 0 \leq t < b \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \text{ oder } t \geq b \end{cases} \qquad a > 0, \ b > 0.$

**b)** (3 Punkte)

Gegeben sei ein System mit der folgenden Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{s-4}{(s+3)^2 \cdot (s+2)}$$

Bestimmen Sie die **Einheitssprung**antwort des Systems im Zeitbereich.

## Lösung 4

**a)** (2 Punkte)

i) Der Eulerschen Identität zufolge gilt:

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{h(t)}{2\mathrm{j}} \cdot (e^{2\mathrm{j}t} - e^{-2\mathrm{j}t})\right\} = \mathcal{L}\left\{h(t) \cdot \sin(2t)\right\} = \frac{2}{s^2+4}.$$

Auch eine direkte Transformation ohne den Sinus ist möglich:

$$\begin{aligned} X(s) =& \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{L}\left\{h(t) \cdot e^{2\mathrm{j}t}\right\} - \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{L}\left\{h(t) \cdot e^{-2\mathrm{j}t}\right\} \\ =& \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-2\mathrm{j}} - \frac{1}{s+2\mathrm{j}}\right) \\ =& \frac{2}{s^2+4}. \end{aligned}$$

ii) $f(t)$ lässt sich mithilfe der Heaviside-Funktion ausdrücken:

$$f(t) = a(h(t) - h(t-b)).$$

Mit dem Verschiebungssatz ergibt sich die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \frac{a}{s}(1 - e^{-b \cdot s}).$$

Alternativ führt auch die Definition der Laplace-Transformation zum Ziel:

$$\begin{aligned} F(s) =& \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^b a \cdot e^{-s \cdot t} dt \\ =& a\left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t}\right]_0^b = \frac{a}{s}(1 - e^{-b \cdot s}). \end{aligned}$$

**b)** (3 Punkte)

Die Systemantwort wird berechnet mit:

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s) \tag{3}$$

Mit dem Eingangssignal

$$U(s) = \frac{1}{s} \tag{4}$$

ergibt sich

$$Y(s) = \frac{s-4}{s(s+3)^2 \cdot (s+2)} \tag{5}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann man diese Formel in einfach transformierbare Terme zerlegen. Für $p$ Pole $\pi_i$ der Vielfachheit $\phi_i$ ist sie definiert durch:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s-\pi_i)^k} \qquad \rho_{i,k} \in \mathbb{C} \tag{6}$$

Die Residuen $\rho_{i,k}$ werden folgendermassen berechnet:

$$\rho_{i,k} = \lim_{s \to \pi_i} \frac{1}{(\phi_i - k)!} \left[ \frac{d^{(\phi_i - k)}}{ds^{(\phi_i - k)}} \left\{ Y(s) \cdot (s - \pi_i)^{\phi_i} \right\} \right] \tag{7}$$

Es gibt folgende Pole:

$$\pi_1 = 0 \qquad \pi_2 = -2 \qquad \pi_3 = -3 \tag{8}$$

mit den Vielfachheiten:

$$\phi_1 = 1 \qquad \phi_2 = 1 \qquad \phi_3 = 2 \tag{9}$$

Damit lassen sich die Residuen berechnen:

$$\rho_{1,1} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(1-1)!} \left[ \frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}} \left\{ \frac{(s-4)}{(s+3)^2 \cdot (s+2)} \right\} \right] = \lim_{s \to 0} \frac{(s-4)}{(s+3)^2 \cdot (s+2)} = -\frac{2}{9} \tag{10}$$

$$\rho_{2,1} = \lim_{s \to -2} \frac{1}{(1-1)!} \left[ \frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}} \left\{ \frac{(s-4)}{s \cdot (s+3)^2} \right\} \right] = \lim_{s \to -2} \frac{(s-4)}{s \cdot (s+3)^2} = 3 \tag{11}$$

$$\rho_{3,1} = \lim_{s \to -3} \frac{1}{(2-1)!} \left[ \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} \left\{ \frac{(s-4)}{s \cdot (s+2)} \right\} \right] \tag{12}$$

$$= \lim_{s \to -3} \frac{-s^2 + 8s + 8}{s^2 (s+2)^2} = -\frac{25}{9} \tag{13}$$

$$\rho_{3,2} = \lim_{s \to -3} \frac{1}{(2-2)!} \left[ \frac{d^{(2-2)}}{ds^{(2-2)}} \left\{ \frac{(s-4)}{s \cdot (s+2)} \right\} \right] = \lim_{s \to -3} \frac{(s-4)}{s \cdot (s+2)} = -\frac{7}{3} \tag{14}$$

Alternativ können die Residuen auch mittels einem Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Für die Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$Y(s) = -\frac{2}{9}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s+2} - \frac{25}{9}\frac{1}{s+3} - \frac{7}{3}\frac{1}{(s+3)^2} \tag{15}$$

Für die inverse Laplace-Transformation der einzelnen Terme gilt für $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\pi)^n}\right\} = h(t) \cdot \frac{t^{n-1} \cdot e^{\pi \cdot t}}{(n-1)!} \tag{16}$$

Wegen der Linearität der Laplace-Transformation (und ihrer Inversen) gilt für die Sprungantwort im Zeitbereich:

$$y(t) = h(t) \cdot \left(-\frac{2}{9} + 3e^{-2t} - \frac{25}{9}e^{-3t} - \frac{7}{3}t \cdot e^{-3t}\right) \tag{17}$$

## Aufgabe 5 (Erreichbare Regelgüte) **10 Punkte**

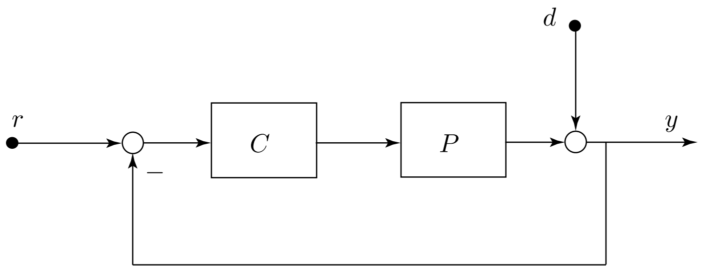
Die zu regelnde Strecke ist gegeben durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s-1}{s-2} \tag{18}$$

Als Regler ist ein einfacher P-Regler vorgesehen, dessen Übertragungsfunktion wie folgt lautet

$$C(s) = k_p, \qquad k_p \in \Re$$

Diese beiden Systeme $P(s)$ und $C(s)$ werden wie im folgenden Bild dargestellt in einem Regelkreis eingebunden.




**a)** (2 Punkte) Bestimmen Sie die Menge $\Omega \subset \Re$ aller Reglerverstärkungen $k_p$ welche einen asymptotisch stabilen geschlossenen Regelkreis gemäss obigem Bild ergibt.

**b)** (3 Punkte) Bestimmen Sie die Sensitivität $S(s)$ mit $Y(s) = S(s) \cdot D(s)$ (siehe Bild oben). Diskutieren Sie den Wert des Betrags $|S(j\,\omega)|$ bei sehr hohen ($\omega \to \infty$) und sehr tiefen ($\omega \to 0$) Frequenzen. Tip: berechnen Sie zuerst $|S(j\,\omega)|^2$.

**c)** (3 Punkte) Diskutieren Sie den Einfluss der Reglerverstärkungen $k_p \in \Omega$ auf $|S(j\,\omega)|$. Bestimmen Sie den minimalen Wert des Betrags der Sensitivität $|S(j\,\omega)|$ für alle zulässigen Werte von $k_p \in \Omega$ und für alle Frequenzen $\omega > 0$. Tip: Die Verläufe der Kurven $|S(j\,\omega)|$ sind monoton zu- oder abnehmend.

**d)** (2 Punkte) Diskutieren Sie dieses Resultat und begründen Sie, wieso nicht eine bessere Sensitivität erreichtbar ist.

## Lösung 5

**a)** Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren, ist es in diesem Fall am einfachsten, den einzigen Pol $\pi_{cl}$ des geschlossenen Regelkreises zu bestimmen. Dieser Pol ist die Lösung der Gleichung

$$1 + C(s) \cdot P(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s-2) + k_p \cdot (s-1) = (k_p+1) \cdot s - (k_p+2) = 0$$

das heisst

$$\pi_{cl} = \frac{k_p+2}{k_p+1}$$

Dieser Pol $\pi_{cl}$ ist nur im Intervall

$$\Omega = (-2, -1)$$

kleiner als 0, d.h. nur für diese Werte von $k_p$ ist der Regelkreis asymptotisch stabil.

**b)** Die Sensitivität $S(s)$ ist gegeben durch

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s) \cdot C(s)} = \frac{s - 2}{(k_p + 1) \cdot s - (k_p + 2)}$$

Der Frequenzgang $S(j\,\omega)$ lautet dann

$$S(j\,\omega) = \frac{j\,\omega - 2}{(k_p + 1) \cdot j\,\omega - (k_p + 2)}$$

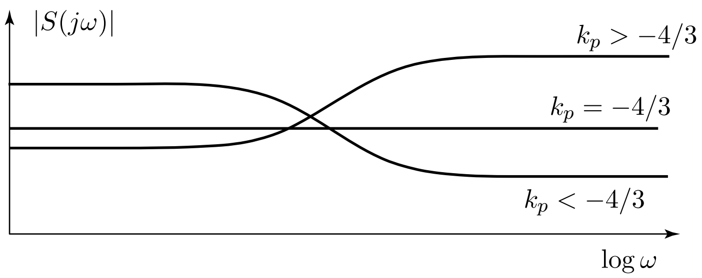
Dessen Betrag berechnet man mit Hilfe der Gleichung (benutzen Sie den Hinweis!)

$$|S(j\,\omega)|^2 = \frac{|j\,\omega - 2|^2}{|(k_p + 1) \cdot j\,\omega - (k_p + 2)|^2} = \frac{\omega^2 + 4}{(k_p + 1)^2 \cdot \omega^2 + (k_p + 2)^2} \tag{19}$$

Damit erhält man

$$|S(0)| = \frac{2}{|k_p + 2|}, \quad |S(j\,\infty)| = \frac{1}{|k_p + 1|} \tag{20}$$

**c)** Gemäss dem Hinweis sind die Betragsverläufe monoton zu- oder abnehmend. Es ist deshalb klar, dass diese Beträge ihre Extremwerte an den Grenzen $\omega = 0$ oder $\omega = \infty$ annehmen. Das Resultat (20) zeigt zudem, dass an diesen Grenzen der Betrag von $|S(j\,\omega)|$ auch monoton von $k_p$ abhängt. Im folgenden Bild sind zur Illustration die Betragsverläufe solcher Elemente dargestellt (Keine Prüfungsfrage: Den Grenzfall erhält man für $k_p = -4/3$, der Vollständigkeit halber auch im Bild dargestellt ist).




Deshalb sind nur die Folgende vier Fälle zu unterscheiden

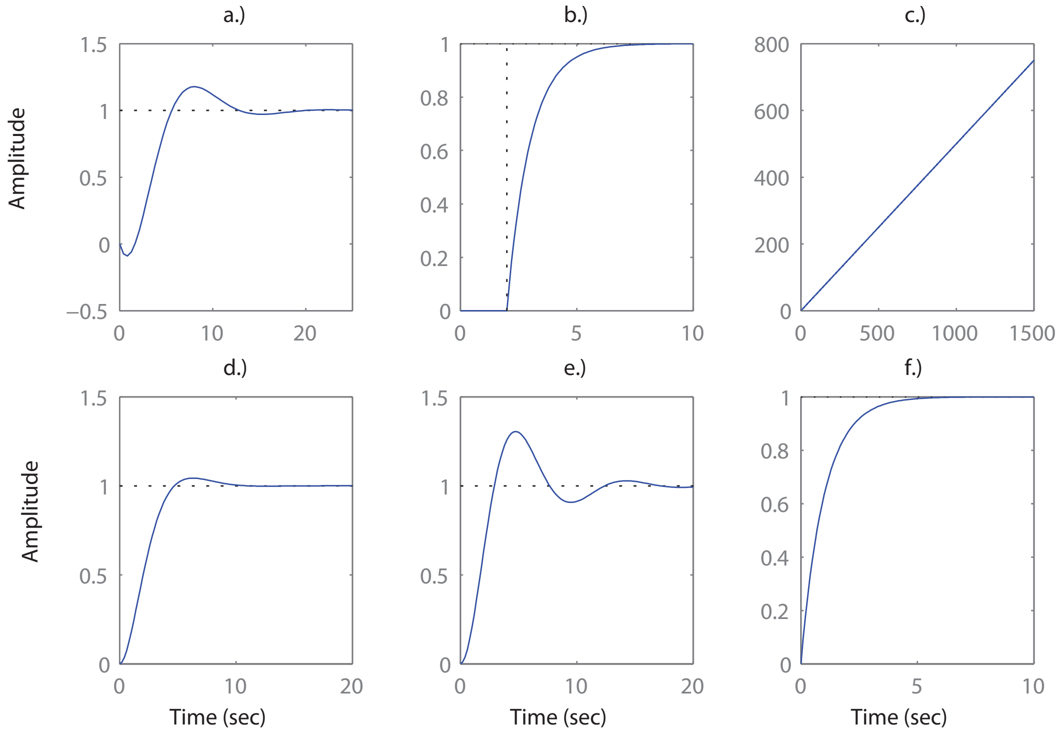
$$|S(0)|_{k_p \approx -1} \approx \frac{2}{1}, \quad |S(0)|_{k_p \approx -2} \approx \frac{2}{0}, \quad |S(j\infty)|_{k_p \approx -1} \approx \frac{1}{0}, \quad |S(j\infty)|_{k_p \approx -2} \approx \frac{1}{1}$$

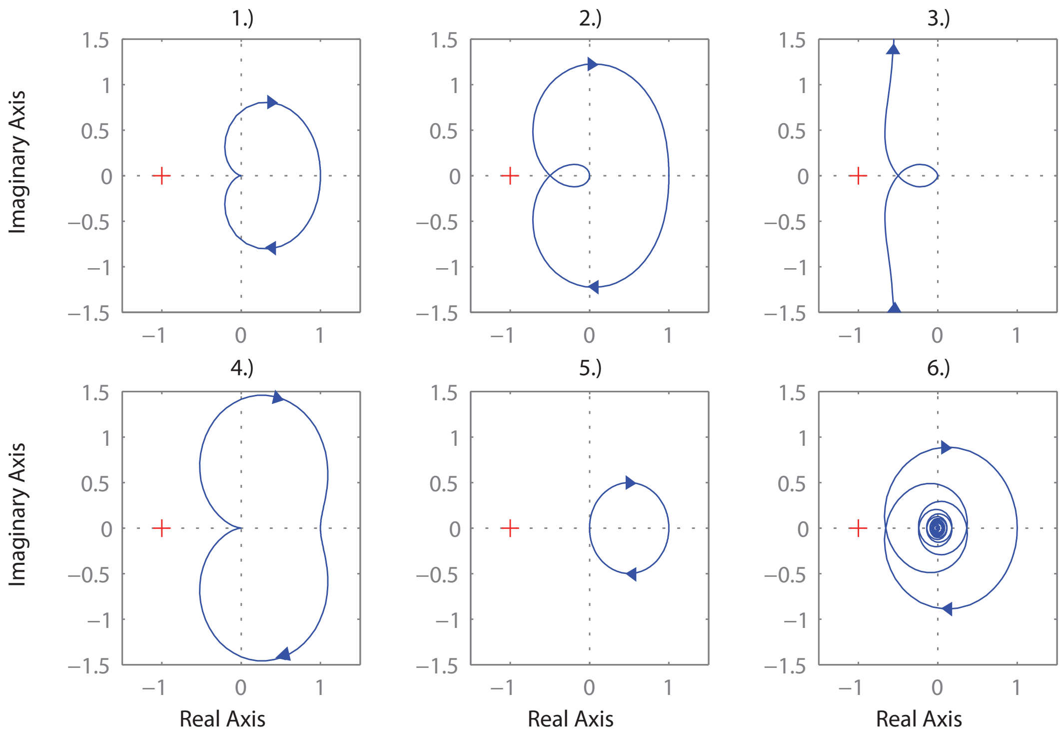
Offensichtlich ist die kleinste Sensitivität (die beste Störungsunterdrückung) $\approx 1$ und dieser Wert wird bei $\omega = \infty$ und $k_p \approx -2$ erreicht.

**d)** Das Ergebnis der letzten Teilaufgabe bedeuted, dass bei allen Frequenzen und bei allen möglichen Reglerverstärkungen die Störungen $d$ *nicht* unterdrückt werden können. Dieses unbefriedigende Resultat ist eine Konsequenz der Streckeneigenschaften. In der Tat hat die Strecke eine nicht-minimalphasige Nullstelle $\zeta_+ = 1$, welche langsamer als der instabile Pol $\pi_+ = 2$ ist. DieseAusgangslage ist regelungstechnisch gesehen eine der schwierigsten Situationen. Das Regelsystem kann in diesem Fall zwar stabilisiert werden, die Regelgüte bleibt aber beschränkt (dies gilt auch für aufwendigere Regler!).

## Aufgabe 6 (Nyquist-Diagramme) 8 Punkte

**a)** (5 Punkte) In der untenstehenden Abbildung sehen Sie die Sprungantworten des **offenen** Regelkreises von verschiedenen Regelsystemen. Darunter finden Sie die Nyquist-Diagramme der jeweiligen **offenen** Regelkreise. Ordnen Sie die Nyquist-Diagramme (*1-6*) den Sprungantworten (*a-f*) zu und begünden Sie Ihre Antwort kurz.



**b)** (3 Punkte) Gegeben seien folgende drei **offene** Regelkreise:

i)

$$L_1(s) = \frac{3}{(s+1)(s-2)}$$

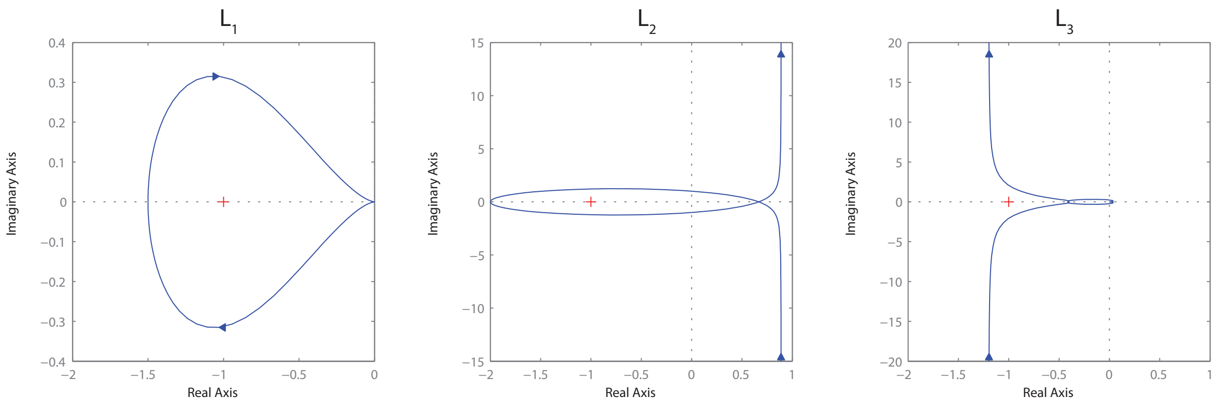
ii)

$$L_2(s) = \frac{2}{(3-s)} \cdot (1 + \frac{1}{s} + s)$$

iii)

$$L_3(s) = \frac{12}{s(s^2+s+10)} \cdot \frac{1+0.1s}{1+s}$$

In untenstehender Abbildung sind die Nyquist-Diagramme der jeweiligen **offenen** Regelkreise abgebildet. Nutzen Sie das Nyquist-Kriterium um die Stabilität der jeweiligen **geschlossenen** Regelkreise zu beurteilen.




## Lösung 6

**a)** (5 Punkte)

- Sprungantwort $a$ zeigt ein Unterschwingen (nichtminimalphasige Nullstelle) und schwingt (mindestens 2. Ordnung). Die Kreisverstärkung wird also für hohe Frequenzen eine Phase $\lim_{\omega\to\infty} \angle(\Sigma(j\omega)) \leq -270^{\circ}$ haben. Damit sind Diagramme 2,3 und 6 möglich. Die Sprungantwort zeigt aber weder integrierendes Verhalten, noch eine Totzeit. Das trifft nur für Diagramm *2* zu.
- Sprungantwort $b$ zeigt eine Totzeit. Im Nyquist-Diagramm zeigt diese sich durch einen Phasenabfall proportional zur Frequenz. Nur Diagramm *6* zeigt solches Verhalten.
- Sprungantwort $c$ steigt kontinuirlich mit der Zeit. Das deutet auf einen Integrator hin. Dieser zeigt sich im Nyquist-Diagramm durch $-90^{\circ}$ Phase und unendliche Verstärkung bei Frequenz $0\frac{rad}{s}$. Also Diagramm *3*.
- Sprungantwort $f$ zeigt das Verhalten eines Systems 1. Ordnung ohne Totzeit. Dazu passt nur Diagramm *5*.

- Die übrigen Sprungantworten zeigen das Verhalten eines Systems 2. Ordnung. Sie unterscheiden sich nur durch die Dämpfung. Sprungantwort $d$ ist stärker gedämpft und gehört somit zu Diagramm *1*.
- Zu der schwach gedämpften Sprungantwort $e$ passt Diagramm *4*.

**b)** (3 Punkte)

Ein System ist gemäss Nyquist-Kriterium asymptotisch stabil wenn gilt:

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2}$$

wobei $n_c$ die Anzahl Umdrehungen[1] der Nyquistkurve des offenen Regelkreises um den Punkt $(-1, 0)$, $n_+$ die Anzahl Pole von $L(s)$ in der offenen rechten Halbebene und $n_0$ die Anzahl Pole von $L(s)$, welche auf der imaginären Achse liegen, ist.

i) $n_c = -1$, $n_+ = 1$, $n_0 = 0$. Das geschlossene Regelsystem ist somit instabil.

ii) $n_c = 1.5$, $n_+ = 1$, $n_0 = 1$. Das geschlossene Regelsystem ist somit stabil.

iii) $n_c = 0.5$, $n_+ = 0$, $n_0 = 1$. Das geschlossene Regelsystem ist somit stabil.

[1] Wenn $\omega$ von $-\infty$ zu $\infty$ geht, werden Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn dabei positiv und jene im Uhrzeigersinn negativ gezählt

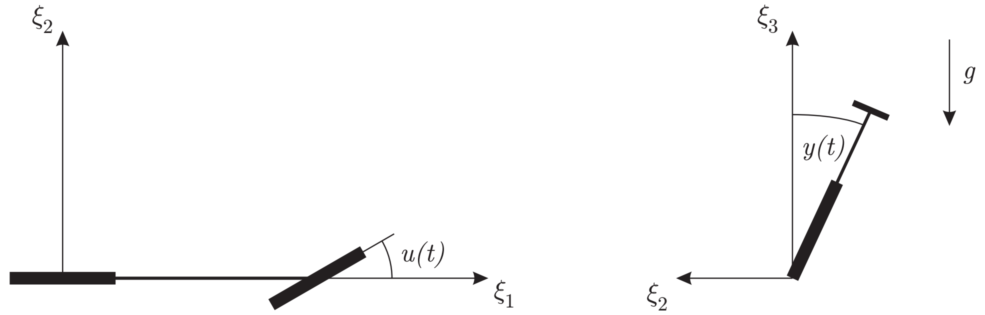
## Aufgabe 7 (Systemanalyse) 8 Punkte

Betrachtet wird das lineare zeitinvariante System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 50 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

welches vereinfacht die Dynamik des Wankwinkels $y(t)$ eines fahrenden Velos in Abhängigkeit des Lenkwinkels $u(t)$ beschreibt.




**a)** (1 Punkt)

Zeichnen Sie ein Signalflussbild des Systems.

**b)** (2 Punkte)

i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

ii) Geben Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion an. Ist das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems BIBO-stabil?

**c)** (1 Punkt)

Ist das System im Sinne von Lyapunov stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

**d)** (1 Punkt)

Ist das System vollständig steuerbar?

**e)** (1 Punkt)

Ist das System vollständig beobachtbar?

**f)** (2 Punkte)

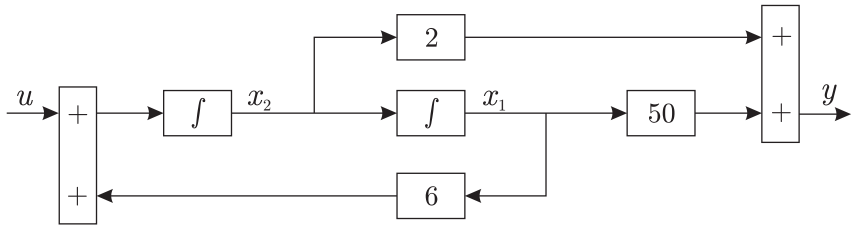
Ausgehend von dem genannten Modell und Ihren Ergebnissen der vorigen Teilaufgaben, diskutieren Sie,

i) ob der Fahrer das Velo allein durch Lenken am Umkippen hindern kann,

ii) ob ein solcher Eingriff hierzu überhaupt nötig ist.

## Lösung 7

**a)** (1 Punkt)




**b)** (2 Punkte)

i) Das System ist in Regelungsnormalform (controller canonical form)

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 1 \\ \hline b_0 & b_1 & 0 \end{array}\right]$$

gegeben, somit lässt sich die Übertragungsfunktion direkt ablesen:

$$\Sigma(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{2s + 50}{s^2 - 6}.$$

Alternativ ist natürlich auch eine Berechnung durch

$$\Sigma(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d = \frac{c \cdot \mathrm{Adj}(sI - A) \cdot b}{\det(sI - A)}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix} 50 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 \\ * & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 - 6} = \frac{2s + 50}{s^2 - 6}$$

möglich.

ii) Die Pole $\pi_i$ entsprechen den Wurzeln des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion:

$$\pi^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_{1,2} = \pm\sqrt{6}.$$

Die Nullstellen $\zeta_i$ sind die Wurzeln des Zählerpolynoms:

$$2\zeta + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta = -25.$$

Ein Pol liegt in der rechten Halbebene, somit ist das System *nicht* BIBO-stabil.

**c)** (1 Punkt)

In der in b) hergeleiteten Übertragungsfunktion treten keine Pol-/Nullstellenkürzungen auf, somit besitzt die gegebene Zustandsraumdarstellung minimale Ordnung und die Eigenwerte der Systemmatrix entsprechen den Polen der Übertragungsfunktion.

Alternativ können die Eigenwerte $\lambda_i$ der Systemmatrix $A$ direkt berechnet werden:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{spur}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 - 6 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}.$$

Ein Eigenwert liegt in der rechten Halbebene, somit ist das System im Sinne von Lyapunov instabil.

**d)** (1 Punkt)

Systeme in Regelungsnormalform sind immer vollständig steuerbar.

Des weiteren treten in der in b) hergeleiteten Übertragungsfunktion keine Pol-/Nullstellenkürzungen auf, womit die gegebene Zustandsraumdarstellung minimale Ordnung besitzt. Auch dies impliziert vollständige Steuerbarkeit.

Alternativ kann die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ aufgestellt werden:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} b & A \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese besitzt vollen Rang, somit ist das System vollständig steuerbar.

**e)** (1 Punkt)

In der in b) hergeleiteten Übertragungsfunktion treten keine Pol-/Nullstellenkürzungen auf, somit besitzt die gegebene Zustandsraumdarstellung minimale Ordnung und ist vollständig beobachtbar.

Alternativ lässt sich zeigen, dass die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 2 \\ 12 & 50 \end{bmatrix}$$

vollen Rang besitzt, das System ist vollständig beobachtbar.

**f)** (2 Punkte)

i) Das System ist vollständig steuerbar, d.h. es existiert zu jedem Zustand $x(0) = x_c$, $x_c \in \mathbb{R}^n$ ein Eingangssignal $u(x_c)$ (Lenkwinkel), welches den Zustand in endlicher Zeit $\tau$ in den Ursprung (die aufrechte Position des Velos) führt: $x(\tau) = 0$. Somit kann das Velo allein durch Lenken am Umkippen gehindert werden.

ii) Das System ist instabil, somit würde das Velo ohne eine stabilisierende Beeinflussung mithilfe einer Stellgrösse, welche wie die Lenkung ein vollständig stabilisierbares System ergibt, bei minimaler Auslenkung kippen.

**Anmerkung:** Natürlich sind neben dem gegebenen Beispiel der Beeinflussung des Lenkwinkels auch andere Möglichkeiten eines stabilisierenden Eingriffs denkbar, z.B. eine Gewichtsverlagerung durch den Fahrer oder konstruktive Rückkoppelungseffekte wie der Nachlauf der Vordergabel.

## Aufgabe 8 (Multiple-Choice) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben je einen Punkt Abzug[2]. Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

**a)** Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $\frac{3}{(s+12)\cdot(s+10)}$ wird mit einem P-Regler geregelt. Für grosse Reglerverstärkungen $k_p$ wird das Regelsystem instabil.

☐ Richtig ☐ Falsch

**b)** Eine Strecke wird mit einem P-Regler asymptotisch stabil geregelt. Da ein I-Anteil im Regler fehlt, bleibt immer ein stationärer Nachlauffehler im Führungsverhalten ($r \rightarrow y$), obwohl das System störungsfrei ist.

☐ Richtig ☐ Falsch

**c)** Falls für ein asymptotisch stabiles Regelsystem $\max_{\omega} |S(j\omega)| = 0.5$ gilt, hat dieses eine Verstärkungsreserve von mindestens 2.

☐ Richtig ☐ Falsch

**d)** Für folgende Übertragungsfunktion $\Sigma(s) = \frac{3}{(s^2+5s+6)}$ kann der asymptotische Wert der Einheitssprungantwort für $t \rightarrow \infty$ mit Hilfe des Endwertsatzes berechnet werden.

☐ Richtig ☐ Falsch

**e)** Mittels dem Bode-Diagramm eines asymptotisch stabilen Systems kann die eingeschwungene Antwort auf das periodische Eingangssignal $u(t) = 10 \cdot \sin(10 \cdot t + 5)$ berechnet werden?

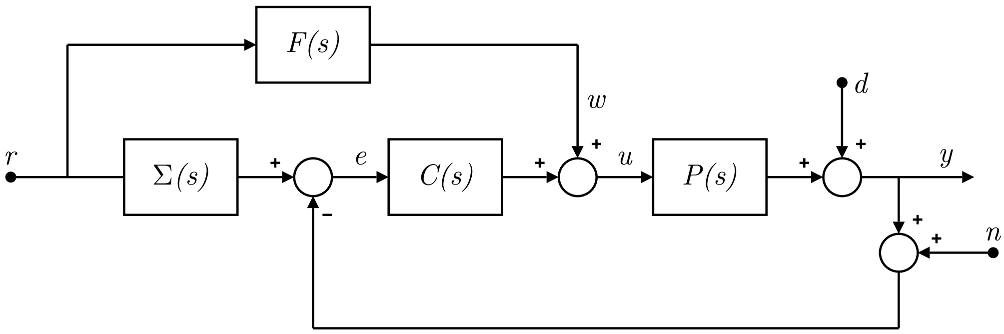
☐ Richtig ☐ Falsch

**f)** Eine asymptotisch stabile Strecke wird mittels eines PD-Reglers geregelt. Die Vorhaltzeit $T_d$ beträgt 0.5s. Angefangen bei $k_p = 0$ wird die Reglerverstärkung schrittweise erhöht, bis die kritische Verstärkung erreicht wird. Die Vorhaltzeit des D-Teil wird nun auf 0.6s erhöht. Das Regelsystem wird darauf instabil.

☐ Richtig ☐ Falsch

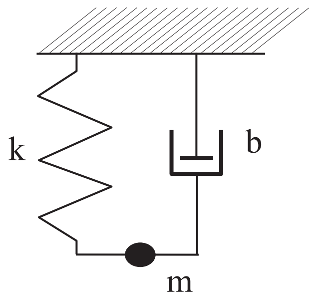
[2]Seien Sie also vorsichtig!

**g)** Gegeben ist unten abgebildetes Regelsystem mit Vorsteuerung und Vorfilter. Falls die Vorsteuerung $F(s) = \frac{\Sigma(s)}{P(s)}$ gewählt wird, resultiert für $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \Sigma(s)$.




☐ Richtig ☐ Falsch

**h)** Gegeben ist folgendes physikalische System:




Für eine regelungstechnische Beschreibung des Systems braucht es drei Zustandsvariablen, da es drei Speicher besitzt.

☐ Richtig ☐ Falsch

## Lösung 8

**a)** Falsch. Da es sich um ein System 2. Ordnung handelt, wird der Nyquistpunkt auch bei sehr hohen Verstärkungen nicht umrundet.

**b)** Falsch. Falls das System ein integrierendes Verhalten zeigt, bleibt kein stationärer Nachlauffehler.

**c)** Falsch. Die Aussage gilt für $\max_{\omega} |S(j\omega)| = 2$. In diesem Fall würde der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{S_m ax} = \frac{1}{2} = 0.5$ um den Nyquistpunkt nicht betreten. Der Kreis würde die reelle Achse bei -0.5 schneiden. Daraus würde eine Verstärkungsreserve von mindestens 2 resultieren.

**d)** Richtig, da es sich um eine stabile Übertragungsfunktion handelt, kann der Endwertsatz angewendet werden.

**e)** Richtig. Da die Anregungsfrequenz bekannt ist, kann sowohl die Verstärkung als auch die Phasenlage mittels dem Bode-Diagramm bestimmt werden.

**f)** Falsch. Eine Erhöhung der Vorhaltzeit bewirkt eine positive Phasendrehung. Daher wird das System wieder asymptotisch stabil.

**g)** Richtig. Da

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{R(s)} &= P(s)\left(\cdot\frac{1}{1+P(s)C(s)}\cdot F(s) + \frac{C(s)}{1+P(s)C(s)}\cdot\Sigma(s)\right)\\
&= \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}\cdot\frac{\Sigma(s)}{P(s)} + \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}\cdot\Sigma(s)\\
&= \frac{1}{1+P(s)C(s)}\cdot\Sigma(s) + \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}\cdot\Sigma(s)\\
&= \frac{1+P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}\cdot\Sigma(s) = \Sigma(s)
\end{aligned}$$

**h)** Falsch. Da $x$ sowohl die Speichervariable der Federenergie als auch der potentiellen Energie ist, reichen zwei Zustandsvariablen.