Musterlösung zur Zwischenprüfung

1. Aus der Zeichnung lesen wir folgende Funktionswerte ab:

$$f(0) = 0; \qquad g(0) = -1, \qquad g(-1) = 0; \qquad g(1) = 0; \qquad h(0) = 0.$$

Ausserdem besitzen die Graphen der Funktionen in gewissen Punkten eine horizontale Tangente besitzen, daraus lesen wir deren Ableitungen

$$f'(0) = 0; \qquad g'(0) = 0; \qquad h'(1) = 0; \qquad h'(1) = 0$$

ab.

Es gilt also sicher nicht $f' = g$, weil $f'(0) = 0$ und $g(0) = -1$.
Es gilt sicher nicht $g' = f$, weil $g'(1) > 0$ und $f(1) < 0$.
Es gilt sicher nicht $h' = f$, weil $h'(1) = 0$, aber $f(1) < 0$.
Es gilt sicher nicht $g' = h$, weil $g'(1) > 0$, aber $h(1) < 0$.
Es verbleibt $h' = g$, und das stimmt tatsächlich. Die Funktion h ist ungerade, also muss h' gerade sein. Wir sehen, dass $h'(0) = -1$ ist, auch das stimmt. Auch der Verlauf stimmt überein: h', also die Steigung von h, ist zunächst sehr gross (bei -3), verschwindet dann bei -1 und wird negativ bis zum Wert -1 beim Nullpunkt. Das entspricht genau der linken Hälfte des Graphen von g – die andere Hälfte folgt durch Symmetrie.

Bemerkung: Die Funktionen zu den Graphen lauten $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2 - 1$ und $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Es gilt also $f' = h$ und $h' = g$, sonst gibt es keine Beziehungen mit Hilfe der ersten Ableitung.

2. Wir rechnen mit der Kettenregel und erweitern dann mit $2\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x^{3/2}}}.$$

3. Wir benützen partielle Integration: wir leiten $\ln x$ ab und x^{-2} integrieren wir.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x &= \int \ln x \cdot x^{-2} \mathrm{d}x = \ln x \cdot (-x^{-1}) - \int \frac{1}{x} \cdot (-x^{-1}) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - x^{-1}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wenn wir die Grenzen einsetzen, ergibt sich (mit $\ln e = 1$ und $\ln 1 = 0$) folgendes:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - x^{-1}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - e^{-1} - (-\tfrac{0}{1} - 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

4. Wir berechnen zuerst die Ableitung des Ortsvektors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) &= \left((-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}\cos t + e^{-\sqrt{2}t}(-\sin t), (-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}\sin t + e^{-\sqrt{2}t}\cos t\right)\\ &= \left(e^{-\sqrt{2}t}(-\sqrt{2}\cos t - \sin t), e^{-\sqrt{2}t}(-\sqrt{2}\sin t + \cos t)\right).\end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$$\begin{aligned}|\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{(e^{-\sqrt{2}t})^2(-\sqrt{2}\cos t - \sin t)^2 + (e^{-\sqrt{2}t})^2(-\sqrt{2}\sin t + \cos t)^2}\\ &= e^{-\sqrt{2}t}\sqrt{2\cos^2 t + 2\sqrt{2}\cos t\sin t + \sin^2 t + 2\sin^2 t - 2\sqrt{2}\sin t\cos t + \cos^2 t}\\ &= e^{-\sqrt{2}t}\sqrt{3\cos^2 t + 3\sin^2 t} = \sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{2}t},\end{aligned}$$

wobei wir uns an die bekannte Formel $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ erinnert haben.

Nun berechnen wir das (uneigentliche) Integral der Bogenlänge

$$\int_0^\infty |\dot{\vec{r}}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sqrt{3}e^{-\sqrt{2}t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Dabei benutzen wir, dass $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$, wie aus der Vorlesung bekannt.

5. Wir setzen $(x(t), y(t)) = \vec{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t)$ und berechnen die beiden Ableitungen

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (-3\sin t, 2\cos t); \qquad (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-3\cos t, -2\sin t).$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Formel für die Krümmung

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{(-2\sin t)(-3\sin t) - (2\cos t)(-3\cos t)}{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}\\ &= \frac{6\sin^2 t + 6\cos^2 t}{\left(5\sin^2 t + (4\sin^2 t + 4\cos^2 t)\right)^{3/2}} = \frac{6}{(5\sin^2 t + 4)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder benutzt, dass $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Nun sollen wir das Maximum und Minimum von $k(t)$ finden. Der Kehrwert hat die gleichen Extrema, aber Maximum und Minimum sind vertauscht – ausserdem können

Siehe nächstes Blatt!

wir für die Suche positive Konstanten ignorieren und positive Potenzen auch. Wir suchen also nach den Extrema von $f(t) := \sin^2 t$. Wir leiten ab und setzen Null:

$$f'(t) = 2\sin t\cos t \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin t = 0 \text{ oder } \cos t = 0.$$

Es folgt also (im Intervall $[0, 2\pi]$), dass $t = 0$ oder $t = \pi$ oder $t = \frac{\pi}{2}$ oder $t = \frac{3\pi}{2}$. In die Krümmung eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
k(0) &= \frac{6}{(5\cdot 0^2 + 4^{3/2}} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4};\\
k(\tfrac{\pi}{2}) &= \frac{6}{(5\cdot 1^2 + 4)^{3/2}} = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9};\\
k(\pi) &= \frac{6}{5\cdot 0^2 + 4)^{3/2}} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4};\\
k(\tfrac{3\pi}{2}) &= \frac{6}{(5\cdot(-1)^2 + 4)^{3/2}} = \frac{6}{9^{3/2}} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Also ist die kleinste Krümmung $k_{\min} = \frac{2}{9}$ und wird bei $t = \frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{3\pi}{2}$ erreicht, aber nicht bei $t = \frac{\pi}{4}$. Die grösste Krümmung ist $k_{\max} = \frac{3}{4}$ und wird bei $t = 0$ und $t = \pi$ erreicht.

Bemerkung: Eigentlich müsste man auch den Rand des Intervalls $[0, 2\pi]$ betrachten, um alle Extrema zu finden. Da sich unsere Funktion f aber auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt (mit der gleichen Formel), und $\mathbb{R}$ keinen Rand hat, finden wir mit der obigen Vorgehensweise alle Extrema.

6. Wir schreiben den Grenzwert als

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^{x^2} (t\arctan t)^{-1}\mathrm{d}t}{\ln x} \tag{1}$$

und benützen, wie in der Aufgabe als Hinweis gegeben, die Regel von Bernoulli-Hôpital.

Wir leiten den Zähler von (1) nach x ab: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Ableitung des Integrals wieder die ursprüngliche Funktion. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\arctan t} = \left(\frac{1}{t\arctan t}\right)\Bigg|_{t=x^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2\arctan(x^2)}.$$

Wir leiten den Nenner von (1) nach x ab: Es ergibt sich $\ln' x = \frac{1}{x}$. Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^{x^2} (t\arctan t)^{-1}\mathrm{d}t}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2\arctan(x^2)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\arctan x^2} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

Bitte wenden!

Das zweitletzte Gleichheitszeichen folgt aus $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin t}{\cos t} = +\infty$.

Bemerkung: Wir müssen eigentlich noch die Vorbedingungen für Bernoulli-Hôpital prüfen! Es gilt sicher $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Ausserdem ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ und der Tangens ist monoton steigend[1]. Also ist der Arcustangens als Umkehrfunktion des Tangens monoton fallend. Folglich gilt für $t \geq 1$, dass $\arctan t \leq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Wir schlussfolgern $\frac{1}{\arctan t} \geq \frac{4}{\pi}$, also

$$\int_1^{x^2} (t\cdot\arctan t)^{-1}\mathrm{dt} \geq \int_1^{x^2} t^{-1}\mathrm{dt}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\cdot[\ln t]_1^{x^2} = \frac{4}{\pi}\ln x^2,$$

da $\ln 1 = 0$. Wir wissen aber dass $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$, also auch $\lim_{x\to\infty}\ln x^2 = \infty$. Damit gilt insgesamt

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^{x^2}(t\cdot\arctan t)^{-1}\mathrm{d}t = \infty,$$

also dürfen wir die Regel von Bernoulli-Hôpital anwenden (da sowohl Zähler als auch Nenner des Bruches (1) gegen unendlich divergieren).

7. Wir substituieren $y = \ln x$, d. h. $x = e^y$ und damit $\mathrm{d}x = e^y\mathrm{d}y$. Die Grenzen transformieren sich zu $x = 2015 \Rightarrow y = \ln(2015)$ und $x = \infty \Rightarrow \ln(\infty) = \infty$. Wegen $\ln x = \ln e^y = y$ folgt

$$I_\alpha = \int_{2015}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2015}^{\infty}\frac{e^y\mathrm{d}y}{e^y(y)^\alpha} = \int_{\ln 2015}^{\infty} y^{-\alpha}\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{1-\alpha}y^{1-\alpha}\right]_{\ln 2015}^{\infty}.$$

Dies konvergiert genau für $1-\alpha < 0$, also $\alpha > 1$, und zwar zu

$$I_\alpha = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha} - \frac{(\ln 2015)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{(\ln 2015)^{1-\alpha}}{\alpha-1}. \qquad (\alpha > 1)$$

Insbesondere ergibt sich für $\alpha = 2$, dass $I_2 = (\ln 2015)^{-1}$.

Für $\alpha < 1$ divergiert das Integral nach unendlich, da $\lim_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = \infty$ für solche α. Für $\alpha = 1$ erhalten wir ebenso

$$I_1 = \int_{\ln 2015}^{\infty} y^{-1}\mathrm{d}y = [\ln y]_{\ln 2015}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\ln t - \ln(\ln 2015) = \infty.$$

Bemerkung: Der $\log 2015$, der in der Aufgabe stand, bezeichnet natürlich ebenfalls den $\ln 2015$. Es tut mir Leid, wenn dadurch Verwirrung entstanden ist. Das war ein Versehen.

[1] Weil $\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} > 0$ ist für alle t im Definitionsbereich des Tangens.

Siehe nächstes Blatt!

8. Es folgt sofort aus dem Zwischenwertsatz (ZWS), dass die Funktion f jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ annimmt, insbesondere auch $y = 3$.

Es muss nicht immer eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ geben, die Funktion $f(x) := x+1$ ist ein Gegenbeispiel dafür.

Hingegen gilt auch für die Funktion $g(x) := f(x) + x$, dass $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Also können wir den ZWS auf g anwenden und finden, dass g jeden Wert in $\mathbb{R}$ annimmt. Insbesondere gibt es einen Punkt x mit $g(x) = 0$, das bedeutet aber $f(x) = -x$.

Wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ gibt es kein globales Minimum: Wäre $f(x) \geq C$ für irgendeine Konstante C, so würde natürlich $\lim_{x\to\infty} f(x) \geq C$ gelten, dies könnte also nicht minus unendlich sein.

Die Funktion f muss kein lokales Minimum haben: wieder ist $f(x) := x+1$ ein gutes Gegenbeispiel. Da $f'(x) = 1$ nie Null ist, hat diese Funktion keine Extrema, also auch kein (lokales oder globales) Minimum.

9. Ich empfehle sehr, die Situation zu zeichnen und dann sauber zu argumentieren.

Ist $f'(a) = 0$ und f strikt konvex auf $[a, b]$, so ist $f'' \geq 0$. Damit ist also f' monoton steigend, also gilt für alle $x \geq a$, dass $f'(x) \geq f'(a) = 0$, also $f' \geq 0$. Folglich ist auch f monoton steigend.
Wäre f nicht **strikt** monoton steigend, so gäbe es zwei Punkte $x < y$ im Intervall $[a, b]$ mit $f(x) = f(y)$. Mit dem Mittelwertsatz finden wir einen Punkt $c \in [x, y]$ mit $f'(c) = 0$. Nun haben wir aber ein Problem: Wo liegt $f(c)$? (Zeichnung!)
Wegen der strikten Konvexität von f darf die gerade Strecke zwischen $f(x)$ und $f(y)$ den Graphen von f nicht noch einmal treffen. Insbesondere muss $f(c)$ unterhalb dieser Linie liegen, also gilt $f(c) < f(x)$. Aber dann muss ja f zwischen x und c irgendwo[2] abfallen! Wir wissen aber schon sicher, dass f monoton steigend ist, und nun haben wir uns in einen Widerspruch verwickelt. Es gibt also gar kein solches c, wie wir angenommen haben. Es kann also auch keine solchen beiden Punkte x und y geben. Folglich muss f strikt monoton steigend sein. Puh!

Ist $f'(a) < 0$ und f strikt konvex auf $[a, b]$, dann muss f nicht strikt monoton fallend sein. Ein Gegenbeispiel ist $f(x) := x^2$ mit $[a, b] = [-1, 1]$: Dieses f ist natürlich weder monoton fallend noch steigend, jedoch gilt $f'(x) = 2x$ und $f'(-1) = -2 < 0$. Ausserdem ist $f''(x) = 2 > 0$, also ist f strikt konvex.

Ist $f''(a) = 0$ und f monoton steigend auf $[a, b]$, so muss f überhaupt nicht konvex sein. Ein einfaches Gegenbeispiel ist $f(x) = \sin x$ auf $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Wir haben

[2] Hier benötigen wir selbstverständlich noch einmal den Mittelwertsatz.

$f'(x) = \cos x$, was auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ positiv ist, und $f''(0) = -\sin(0) = 0$. Allerdings ist $f''(x) = -\sin(x)$ auf $(0, \frac{\pi}{2}]$ strikt negativ, also ist f strikt konkav, nicht konvex.

Ist $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ und $f(c) = 0$ mit $a < c < b$, so gibt es wegen dem Mittelwertsatz (MWS) zwei Stellen $x_0 \in [a, c]$, $x_1 \in [c, b]$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ (da die Steigung der Sekante zwischen $f(a)$ und $f(c)$ Null ist; ebenso für c und b). Eine nochmalige Anwendung des MWS ergibt uns einen Punkt $z \in [x_0, x_1]$, wo die zweite Ableitung $f''(z) = 0$ ist.

10. Wir betrachten die Vorzeichen der Ableitungen

$$h' = (fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \tag{2}$$

$$h'' = (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''. \tag{3}$$

Sind f und g beide positiv und monoton steigend, so ist $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f' \geq 0$, $g' \geq 0$, also auch $(fg)' \geq 0$ mit (2). Also ist das Produkt $h = f \cdot g$ monoton steigend.

Ist f negativ und monoton steigend, also $f \leq 0$ und $f' \geq 0$; und g positiv und monoton fallend, also $g \geq 0$ und $g' \leq 0$; so ist nach (2) $h' \geq 0$, also monoton steigend.

Sind f und g beide positiv und monoton steigend und konvex, so gilt $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f' \geq 0$, $g' \geq 0$ sowie $f'' \geq 0$, $g'' \geq 0$. Gemäss (3) gilt dann also auch $h'' \geq 0$; also ist h konvex.

Sind f und g beide positiv, monoton fallend und konvex, so gilt $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f' \leq 0$, $g' \leq 0$, sowie $f'' \geq 0$, $g'' \geq 0$. Gemäss (3) gilt dann $h'' \geq 0$, also muss h nicht konkav sein.
Ein konkretes Gegenbeispiel wäre $f(x) = g(x) := e^{-x}$. Diese Funktion ist natürlich positiv; es gilt $f'(x) = -e^{-x} < 0$, also ist sie monoton fallend. Wegen $f''(x) = e^{-x} > 0$ ist sie auch (strikt) konvex. Nun ist aber $h(x) = f(x) \cdot g(x) = e^{-2x}$ ebenso strikt konvex (da $h''(x) = 4e^{-2x} > 0$), insbesondere keinesfalls konkav.