

**BSc - Sessionsprüfung****12. 08. 2010****Regelungstechnik II (151-0590-00)****Prof. L. Guzzella**

---

# Musterlösung

---

<b>Dauer der Prüfung:</b>	<b>120 Minuten</b>
<b>Anzahl der Aufgaben:</b>	<b>8 (unterschiedlich gewichtet, total 65 Punkte)</b>
<b>Bewertung:</b>	Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.
<b>Erlaubte Hilfsmittel:</b>	20 A4-Blätter (40 Seiten) Taschenrechner (zur Verfügung gestellt) Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben.
<b>Zur Beachtung:</b>	Alle Lösungen, ausser den Antworten bei Multiple-Choice Aufgaben, sind zu begründen. Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

---

**Aufgabe 1 (PID Regler [Pleines (Alberding)])****8 Punkte**

Legen Sie für die Strecke

$$P(s) = \frac{3}{(2s+1)(s+1)}$$

einen PID Regler so aus, dass die Kreisverstärkung  $L(s)$  die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , die Phasenreserve  $\phi = 70^\circ$ , und die Steigung  $\psi = 70^\circ$  aufweist (beides bei  $\omega = \omega_c$ ).

Die Strecke lässt sich als

$$P(\omega) = r_P(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi_P(\omega)}, \quad r_P(\omega) \in \mathbb{R}, \quad \varphi_P(\omega) \in \mathbb{R}$$

darstellen.

- a) (2 Punkte) Berechnen Sie  $r_P(\omega)$  und  $\varphi_P(\omega)$  analytisch.
- b) (2.5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen  $\frac{d}{d\omega} r_P(\omega)$  und  $\frac{d}{d\omega} \varphi_P(\omega)$  analytisch.
- c) (2 Punkte) Berechnen Sie die numerischen Werte  $r_P = r_P(\omega_c)$ ,  $\varphi_P = \varphi_P(\omega_c)$ ,  $r'_P = \frac{d}{d\omega} r_P(\omega) \Big|_{\omega=\omega_c}$  und  $\varphi'_P = \frac{d}{d\omega} \varphi_P(\omega) \Big|_{\omega=\omega_c}$  (auf drei gültige Stellen).
- d) (1.5 Punkte) Berechnen Sie die numerischen Werte der Parameter  $k_p$ ,  $T_d$  und  $T_i$  (auf drei gültige Stellen).

**Lösung 1**

a)

$$P(j\omega) = \frac{3}{(2j\omega+1)(j\omega+1)}$$

Der Betrag ist

$$r_P(\omega) = |P(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{4\omega^4+5\omega^2+1}} \quad .$$

Die Phase ist

$$\begin{aligned} \varphi_P(\omega) &= \arg\left(\frac{3}{(2j\omega+1)(j\omega+1)}\right) = \arg(3) + \arg\left(\frac{1}{2j\omega+1}\right) + \arg\left(\frac{1}{j\omega+1}\right) \\ &= -\arg(2j\omega+1) - \arg(j\omega+1) \quad . \end{aligned}$$

Da  $\text{Re}(2j\omega+1) > 0$  und  $\text{Re}(j\omega+1) > 0$  gilt weiter

$$\varphi_P(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\omega}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{1}\right) = -\arctan(2\omega) - \arctan(\omega) \quad .$$

Beachte: Bei anderer Vorgehensweise muss die Phase korrigiert werden. So ist  $P(j\omega)$  komplex-konjugiert erweitert:

$$P(j\omega) = \frac{3}{(2j\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{3}{1-2\omega^2+j3\omega} = \frac{3(1-2\omega^2-j3\omega)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} \quad .$$

Dann gilt für die Phase:

$$\varphi_P(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-3\omega}{1-2\omega^2}\right) & \text{if } \omega < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arctan\left(\frac{-3\omega}{1-2\omega^2}\right) - \pi & \text{if } \omega > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

je nach Vorzeichen des Imaginärteils.

- b) Die Ableitung des Betrags ist

$$\frac{d}{d\omega} r_P(\omega) = - \frac{15\omega + 24\omega^3}{(1 + 5\omega^2 + 4\omega^4)^{\frac{3}{2}}} .$$

Die Ableitung der Phase ist

$$\frac{d}{d\omega} \varphi_P(\omega) = - \frac{2}{1 + 4\omega^2} - \frac{1}{1 + \omega^2} = - \frac{3 + 6\omega^2}{1 + 5\omega^2 + 4\omega^4} .$$

Oder aber auch

$$\frac{d}{d\omega} \varphi_P(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-3\omega}{1-2\omega^2}\right)^2} \cdot \left( \frac{-3}{1-2\omega^2} - \frac{-3\omega(-4\omega)}{(1-2\omega^2)^2} \right) = - \frac{3 + 6\omega^2}{1 + 5\omega^2 + 4\omega^4} .$$

- c) Es ergibt sich  $r_P = 0.325$ ,  $\varphi_P = -2.43 \text{ rad} = -139^\circ$ ,  $r'_P = -0.283 \frac{\text{s}}{\text{rad}}$  und  $\varphi'_P = -0.318 \text{ s}$ . Beachte:  $\varphi_P$  muss zwischen  $0^\circ$  und  $-180^\circ$  liegen. Die Strecke besteht aus zwei Tiefpässen.
- d) Es ergibt sich  $k_p = 2.68$ ,  $T_d = 0.350 \text{ s}$  und  $T_i = 3.66 \text{ s}$ .

**Aufgabe 2 (Prädiktiver Regler [Elbert (Zentner)])****7 Punkte**

Eine Strecke  $P(s) = P_0(s) \cdot e^{-s\tau}$  wird mit einem Smith Kompensator prädiktiv geregelt. Abbildung 1 zeigt das Signalflussbild dieses prädiktiven Reglers.

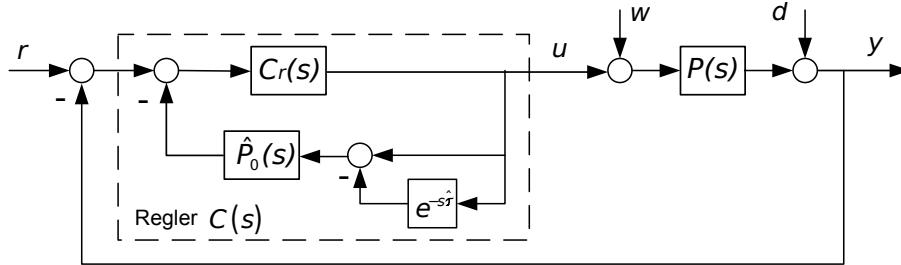


Abbildung 1: Smith Kompensator

- a) (3 Punkte) Geben Sie für den allgemeinen Fall ( $\hat{P}_0(s) \neq P_0(s)$  und  $\hat{\tau} \neq \tau$ , d.h. Regelstrecke und Modell stimmen nicht überein) folgende Übertragungsfunktionen an:
- Diejenige des Reglers  $C(s)$ ,
  - und diejenige des geschlossenen Regelsystems  $T(s)$ .
- b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der interne Regler  $C_r(s)$  ohne berücksichtigung der Totzeit ausgelegt werden kann, falls Strecke und Modell übereinstimmen ( $\hat{P}_0(s) = P_0(s)$  und  $\hat{\tau} = \tau$ ). Wählen Sie dazu die folgende Ziel-Übertragungsfunktion für das geschlossene Regelsystem:

$$T_{ref}(s) = T_{ref,0}(s) \cdot e^{-s\tau}$$

- c) (2 Punkte) Die Regelstrecke und die Ziel-Übertragungsfunktion des Regelsystems seien nun gegeben durch

$$P(s) = \frac{k}{s(bs+1)} \cdot e^{-s\tau}, \text{ und } T_{ref}(s) = \frac{1}{\sigma bs+1} \cdot e^{-s\tau}, \text{ wobei } k, b, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Geben Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden internen Reglers  $C_r(s)$  an. Um was für einen Regler handelt es sich?

## Lösung 2

- a) (3 Punkte) Der Regler wird aus dem Signalflussbild bestimmt:

$$C(s) = \frac{C_r}{1 + C_r \hat{P}_0 (1 - e^{-s\hat{\tau}})}$$

Die Kreisverstärkung ergibt sich aus:

$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{C_r P_0 \cdot e^{-s\tau}}{1 + C_r \hat{P}_0 (1 - e^{-s\hat{\tau}})}$$

Die Übertragungsfunktion des Regelsystems ist gleich der Komplementären Sensitivität, welche sich folgendermassen berechnet:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} \\ &= \frac{C_r P_0 \cdot e^{-s\tau}}{1 + C_r \hat{P}_0 (1 - e^{-s\hat{\tau}}) + C_r P_0 \cdot e^{-s\tau}} \\ &= \frac{C_r P_0 \cdot e^{-s\tau}}{1 + C_r \hat{P}_0 - C_r \hat{P}_0 \cdot e^{-s\hat{\tau}} + C_r P_0 \cdot e^{-s\tau}} \end{aligned}$$

- b) (2 Punkte) Ist ein perfektes Modell vorhanden, so ergibt sich folgendes Regelsystem:

$$T(s) = \frac{C_r P_0}{1 + C_r P_0} \cdot e^{-s\tau} = T_0 \cdot e^{-s\tau}$$

Der Regler  $C_r(s)$  ergibt sich somit aus  $T_0(s) = T_{ref,0}(s)$ :

$$C_r(s) = \frac{T_{ref,0}}{P_0 \cdot (1 - T_{ref,0})}.$$

- c) (2 Punkte) Der resultierende interne Regler entspricht einem PD-Regler mit  $\{k_p, T_d\} = \{\frac{1}{k\sigma b}, b\}$  und berechnet sich wie folgt:

$$C_r(s) = \frac{\frac{1}{\sigma bs+1}}{\frac{k}{s(bs+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma bs+1}\right)} = \frac{s(bs+1)}{k(\sigma bs+1-1)} = \frac{(bs+1)}{k\sigma b} = \frac{1}{k\sigma b}(1+bs) = k_p(1+T_d s)$$

**Aufgabe 3 (Diagonal Dominante Systeme [Guzzella (Shafai)]) 8 Punkte**

Bild 2 zeigt das zu analysierende  $2 \times 2$  MIMO-System. Von den vier SISO Übertragungsfunktionen  $P_{ij}(s)$  der Regelstrecke ist nichts bekannt, ausser dass  $P_{12}(s) = 0$  ist. Für die Regelung schlägt Ihnen Ihre Chefin einen “one-loop-at-the-time” Ansatz vor, wie er im Bild 2 bereits dargestellt ist.

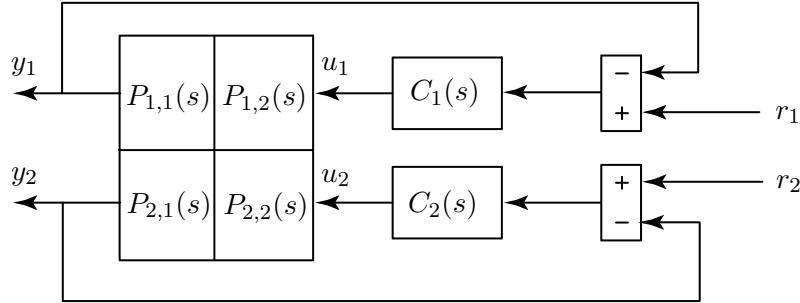


Abbildung 2: Blockdiagramm des zu analysierenden Systems.

- a) (3 Punkte) Der vorgeschlagene Ansatz für die Regelung ist tatsächlich sinnvoll. Geben Sie *quantitative* Argumente, welche diese Behauptung bestätigen.
- b) (2 Punkte) Nur ein Sollwert  $r_i$  beeinflusst *beide* Ausgänge  $y_i$  des im Bild 2 dargestellten geschlossenen Systems. Welcher Sollwert ist das? Eine *qualitative* Begründung ist ausreichend.
- c) (3 Punkte) Wie lautet diese Übertragungsfunktion  $r_i \rightarrow y_j$  für  $i \neq j$ ?

### Lösung 3

- a) Um diese Behauptung zu beweisen, ist es am einfachsten die RGA-Matrix zu berechnen. Das  $\{1, 1\}$ -Element dieser Matrix berechnet sich gemäss Skript zu

$$[RGA]_{11} = \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}}$$

und da  $P_{1,2} = 0$  ist erhält man

$$[RGA]_{11} = 1$$

Da für ein  $2 \times 2$  System immer gilt dass

$$[RGA]_{22} = [RGA]_{11}, \text{ und } [RGA]_{12} = [RGA]_{21} = 1 - [RGA]_{11}$$

findet man also dass die RGA-Matrix gleich der Identitätsmatrix ist. Dies entspricht aber einem perfekt diagonal dominanten System, welches sich problemlos mit dem “one-loop-at-the-time” Ansatz regeln lässt. Ihre Chefin hatte also, wieder einmal, recht.

- b) Der Ausgang  $y_1$  wird nicht über eine Kreuzkopplung von  $u_2$  beeinflusst da  $P_{1,2}(s) = 0$  ist. Deswegen kann auch das Signal  $r_2$ , welches das Signal  $u_2$  beeinflusst, nicht auf das Signal  $y_1$  wirken. Die Antwort lautet also: nur  $r_1$  wirkt auf beide Ausgänge, auf  $y_1$  direkt über den Regler  $C_1(s)$  und auf  $y_2$  indirekt über die Kreuzkopplung  $P_{21}(s)$ .

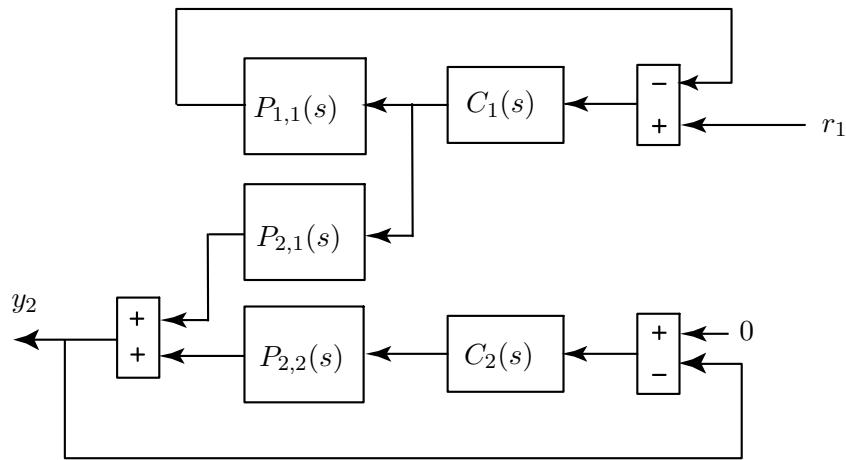


Abbildung 3: Blockdiagramm des reduzierten Systems.

- c) Der Zusammenhang  $r_1 \rightarrow y_2$  lässt sich leicht berechnen, wenn man das Blockdiagramm von Bild 2 umzeichnet wie es in Bild 3 dargestellt ist.  
 Mit diesem Bild kann man direkt die gesuchte Übertragungsfunktion herleiten

$$Y_2(s) = G(s) \cdot R_1(s)$$

mit

$$G(s) = \frac{1}{1 + P_{22}(s) \cdot C_2(s)} \cdot P_{21}(s) \cdot \frac{C_1(s)}{1 + P_{11}(s) \cdot C_1(s)}$$

**Aufgabe 4 (Robuste Regelgüte [Ebbesen (Elbert)])****6 Punkte**

Betrachten Sie das Regelsystem mit der nominellen Kreisverstärkung

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (1)$$

In Abbildung 4 ist das Nyquist-Diagramm von  $L(j\omega)$  dargestellt. Die Unsicherheit des Systems ist modelliert mit

$$W_2(s) = \frac{s}{s+1}. \quad (2)$$

Messungen haben gezeigt, dass die Spezifikationen für die Stabilität und Güte des Regelsystems im ganzen Frequenzbereich  $\omega \in [0, \infty]$  erfüllt wären, wenn die Stabilität und Güte des Regelsystems nur für  $\omega = 1$  rad/s erfüllt wäre.

- a) (2 Punkte) Wenden Sie das **Nyquist-Theorem für Robustheit** an, um herauszufinden, ob das mit  $L(s)$  und  $W_2(s)$  charakterisierte unsichere Regelsystem bei  $\omega = 1$  rad/s die Bedingung für eine robuste Stabilität erfüllt.

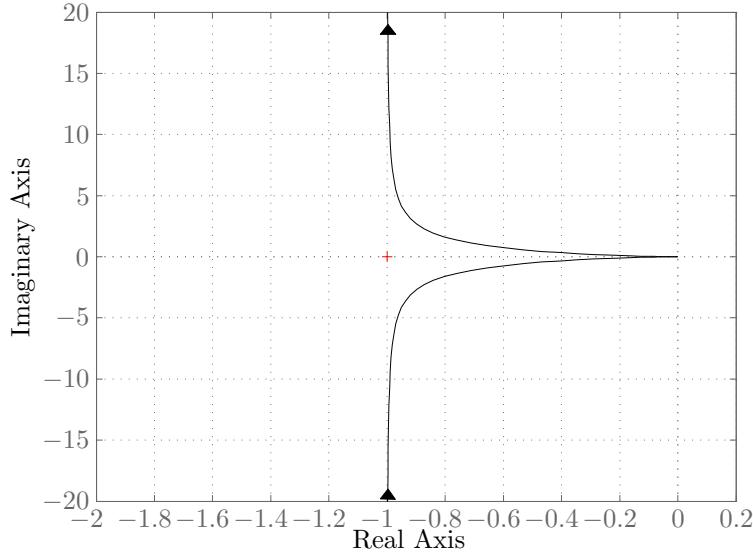


Abbildung 4: Das Nyquist-Diagramm der nominellen Kreisverstärkung  $L(j\omega)$ .

- b) (4 Punkte) Die Empfindlichkeit des Systems  $S(s)$  wird begrenzt durch

$$W_1(s) = \frac{s+1}{4s}. \quad (3)$$

Spezifizieren Sie die Bedingungen für die *nominelle* und *robuste* Regelgüte, und bestimmen Sie, ob jede Bedingung für  $w = 1$  rad/s erfüllt ist.

## Lösung 4

- a) (2 Punkte) **Robust Nyquist Theorem:** an uncertain closed-loop system is asymptotically stable if the nominal closed-loop system is asymptotically stable and if the following condition is satisfied

$$|W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty]. \quad (4)$$

The nominal open-loop system has two poles: one pole with negative real part, i.e.,  $-1$ , and one pole in the origin. Furthermore, the loop gain  $L(j\omega)$  makes one half encirclement counter-clockwise around the point  $-1$ . Thus, according to the Nyquist theorem for nominal stability, the nominal closed-loop system is asymptotically stable.

Now, for  $\omega = 1$  rad/s, the left-hand side of Eq. 4 evaluates to

$$|W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| = \left| \frac{1}{(j\omega + 1)^2} \right| = \frac{1}{2} \quad (5)$$

and right-hand side of Eq. 4 evaluates to

$$|1 + L(j\omega)| = \left| 1 + \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Thus, the condition of Eq. 4 is satisfied and robust stability is confirmed for  $\omega = 1$  rad/s.

- b) (4 Punkte) The condition for nominal performance is

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|. \quad (7)$$

The norm of the sensitivity bound at  $\omega = 1$  rad/s is

$$|W_1(j\omega)| = \left| \frac{j\omega + 1}{4j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{8}}. \quad (8)$$

Thus, nominal performance is met since  $\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Now, the condition for robust performance is

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (9)$$

This condition is, however, *not* met since  $1/\sqrt{8} + 1/2 > 1/\sqrt{2}$ .

Based on our measurements we conclude that the findings at  $\omega = 1$  rad/s hold true for all  $\omega \in [0, \infty]$ . Fig. 5 shows  $L(j\omega)$  in the Nyquist plane including  $|W_1(j\omega)|$  and  $|W_2(j\omega)|$  for  $\omega = 1$  rad/s.

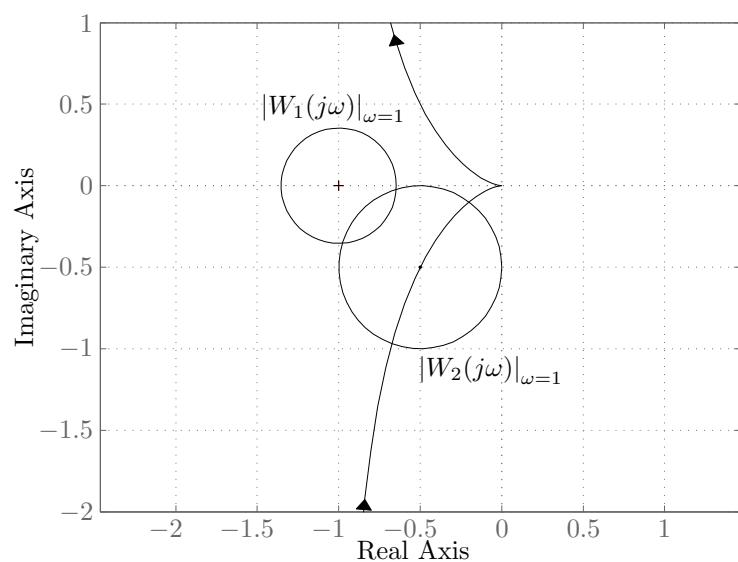


Abbildung 5: The nominal open-loop system  $L(j\omega)$ .

**Aufgabe 5 (LQG/LTR [Elbert (Zentner)])****10 Punkte**

Gegeben sei eine Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Sie möchten einen Zustands-Beobachter für das System auslegen. Der Beobachter soll aus den Messungen  $y(t)$  und den Stellsignalen  $u(t)$  die Zustandsvariablen der Strecke durch  $\hat{x}(t) \approx x(t)$  abschätzen.

- a) (2 Punkte) Welche Dimension hat die Beobachterverstärkungsmatrix  $L$ ? Zeichnen Sie das detaillierte Signalflussbild des Beobachters.
- b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix des Beobachters  $L$  für  $q = 1$  (Hinweis: in MATLAB würden Sie schreiben  $L=(lqr(A',C',B*B',q))'$  ;)
- c) (3 Punkte) Sie haben schon eine Zustandsrückführungsmatrix  $K = [1, 1]$  für das obige System ausgelegt. Geben Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden LQG-Reglers  $C(s)$  an. Benutzen Sie  $L = [\sqrt{2}, 1]^T$ .
- d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Dynamik des Beobachtungsfehlers  $\bar{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  durch folgende Differenzialgleichungen gegeben ist, falls  $L = [\sqrt{2}, 1]^T$ , und  $K = [1, 1]$ :

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = -\sqrt{2}\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = -\bar{x}_1(t)$$

## Lösung 5

- a) (2 Punkte) Die Beobachterverstärkungsmatrix  $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$  hat die Dimensionen  $2 \times 1$ . Das Signalflussbild des Zustandsbeobachters ist in Fig.(6) dargestellt.

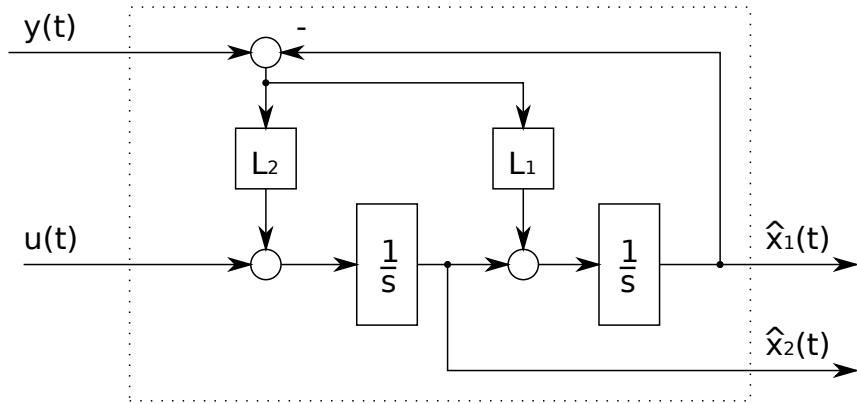


Abbildung 6: Signalflussbild des Zustands-Beobachters

- b) (3 Punkte) Die Systemmatrizen sind:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Für den Zustands-Beobachter muss die folgende Riccati-Gleichung gelöst werden:

$$0 = \frac{1}{q} \Psi C^T C \Psi - \Psi A^T - A \Psi - B B^T,$$

wobei die Matrix  $\Psi$  symmetrisch und positiv definit ist. Deshalb,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \\ \psi_1\psi_2 & \psi_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\psi_2 & \psi_3 \\ \psi_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

woraus  $\psi_1$  und  $\psi_1$  gefunden werden können:

$$\begin{cases} \psi_2^2 - 1 = 0 \rightarrow \psi_2 = \pm 1 \rightarrow \psi_2 = 1 \\ \psi_1^2 - 2\psi_2 = 0 \rightarrow \psi_1 = \pm\sqrt{2} \rightarrow \psi_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Die Transponierte der Beobachter-Verstärkungsmatrix ist:

$$L^T = \frac{1}{q} C \Psi = [\psi_1 \quad \psi_2] = [\sqrt{2} \quad 1] .$$

- c) (3 Punkte) Zusammen mit der Zustandsrückführung  $u(t) = -K\hat{x}(t)$  und  $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$  ergibt sich aus der Dynamik des Beobachters:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t)$$

Die Übertragungsfunktion des Reglers ist gegeben durch die Reihenschaltung der Übertragungsfunktionen von Beobachter und Zustandsrückführung:

$$C(s) = K(sI - (A - BK - LC))^{-1}L$$

Die Matrix  $(A - BK - LC)$  ist

$$(A - BK - LC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Inverse  $(sI - (A - BK - LC))^{-1}$  ergibt sich als:

$$(sI - (A - BK - LC))^{-1} = \frac{1}{(s + \sqrt{2})(s + 1) + 2} \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ -2 & s + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt die Übertragungsfunktion des Reglers

$$C(s) = \frac{1}{(s + \sqrt{2})(s + 1) + 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1 & 1 \\ -2 & s + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \frac{(1 + \sqrt{2})s + 1}{(s + \sqrt{2})(s + 1) + 2} = \frac{(1 + \sqrt{2})s + 1}{s^2 + (1 + \sqrt{2})s + (2 + \sqrt{2})} = \frac{2.414s + 1}{s^2 + 2.414s + 3.414}$$

- d) (2 Punkte) Die Dynamik des Beobachters ist gegeben durch

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))$$

Die Dynamik des Beobachtungsfehlers ist also

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))] \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC) \cdot \bar{x}(t) \end{aligned}$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{x}(t)$$

und somit:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = -\sqrt{2}\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = -\bar{x}_1(t)$$

**Aufgabe 6 (Multiple Choice [Alberding, Pleines, Ebbensen, Zentner])** 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

- a) Für eine Regelstrecke, deren Bodediagramm in Abb. 7 dargestellt ist, lauten die mit dem Åström-Hägglund Verfahren bestimmten Parameter für einen PID Regler mit  $\mu = 0.5$  wie folgt:  $k_p = 0.45$ ,  $T_i = 0.55$ ,  $T_d = 0.14$ ,  $\alpha = 0.25$ .

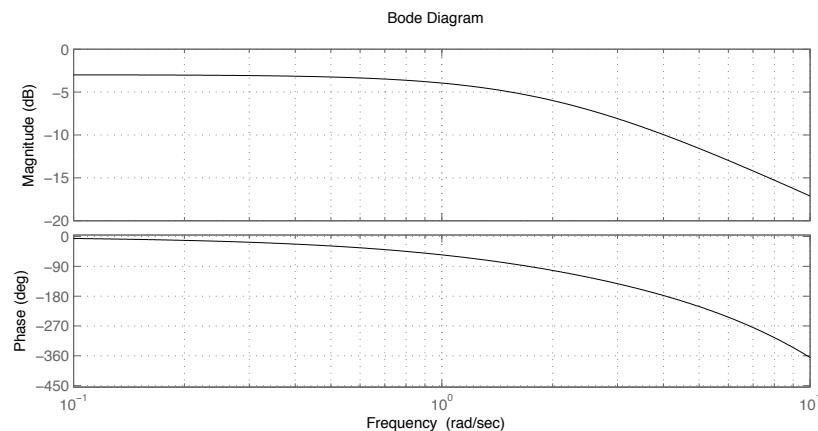


Abbildung 7: Bode Diagramm

- Richtig.
  - Falsch.
- b) Die Åström-Hägglund Regeln eignen sich für die Auslegung eines Reglers für die Strecke  $P(s) = \frac{2}{(3s+1)(0.01s+1)} \cdot e^{-0.4s}$ .
- Richtig.
  - Falsch.
- c) Es soll ein LQR entworfen werden. Gegeben seien das lineare zeitinvariante System im Zustandsraum  $(A, B, C, D)$  und die Gewichtsmatrizen  $Q = \bar{C}^T \bar{C}$  und  $R$ . Es ist garantiert, dass die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung eine positiv definite Lösung besitzt, wenn das System  $(A, B, C, D)$  vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist.
- Richtig.
  - Falsch.
- d) Sie finden für die Übertragungsmatrix  $P(s)$  eines Mehrgrößensystems sowohl einen Pol als auch eine Nullstelle bei  $s = 2$ . Daraus lässt sich schliessen, dass die interne Beschreibung  $(A, B, C, D)$  des Ein-/Ausgangsverhaltens  $P(s)$  nicht-steuerbare oder nicht-beobachtbare Zustände besitzt.
- Richtig.

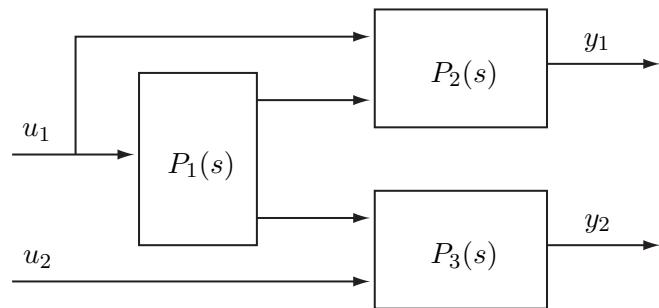
Falsch.

e) Für die Matrix  $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  gilt  $\sigma_{min}\{K\} = 1$ .

Richtig.

Falsch.

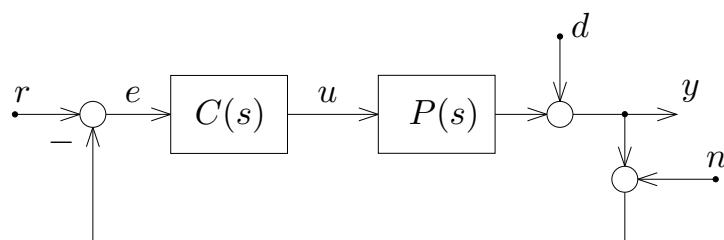
f) Das unten abgebildete MIMO System ist mit 2 SISO Reglern gut regelbar.



Richtig.

Falsch.

g) Der Amplitudengang der Übertragung des Messrauschen auf den Ausgang  $n \rightarrow y$  ist gleich dem Amplitudengangs der Übertragung des Referenzsignals auf den Ausgang  $r \rightarrow y$ , d.h.  $|\frac{y}{n}| = |\frac{y}{r}|$ .



Richtig.

Falsch.

h) Stabilität ist eine notwendige Bedingung für robuste Regelgüte.

Richtig.

Falsch.

## Lösung 6

a) Falsch. Aus dem Bodediagramm lässt sich folgendes ablesen: Die statische Verstärkung beträgt  $|P(0)| = -3 \text{ dB} = 0.708$ ; Kritische Verstärkung  $k_{\text{krit}} = 10 \text{ dB} = 3.16$ .

Daraus folgt  $\kappa = (|P(0)| \cdot k_{\text{krit}})^{-1} = 7 \text{ dB} = 0.44$ . Sowie  $k_p = 0.72 e^{-1.6\kappa+1.2\kappa^2} 3.16 = 1.42 \neq 0.45$ .

- b) Richtig.  $\frac{0.4}{0.4+3} < 0.3$ , die Totzeit ist nicht zu gross. Durch die Totzeit wird die Strecke bei hinreichender Verstärkung instabil. Der Pol bei  $-100$  kann bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.
- c) Falsch. Nicht  $(A, C)$  muss vollständig beobachtbar sein, sondern  $(A, \bar{C})$ ,  $Q = \bar{C}^T \bar{C}$ .
- d) Falsch. Eine Pol-/Nullstellenkürzung impliziert zwar nicht-steuerbare oder nicht-beobachtbare Zustände, jedoch müssen bei einem Mehrgrößensystem für eine solche Kürzung sowohl Frequenz als auch Richtung übereinstimmen. Über die Richtung wurde keine Aussage getroffen, somit ist die Schlussfolgerung nicht zulässig.
- e) Falsch. Die Matrix hat nicht vollen Rang und es gibt Vektoren  $x \neq 0$  für die gilt  $K \cdot x = 0$ . Dementsprechend gilt für den minimalen Singularwert  $\sigma_{min} = 0$ .
- f) Richtig. Der Eingang  $u_2$  hat nur auf den Ausgang  $y_2$  einen Einfluss. Das System hat also eine Dreiecksstruktur und deswegen ist die RGA-Matrix die Einheitsmatrix. Daraus folgt, dass es möglich ist das System mit 2 SISO Reglern zu regeln.
- g) Richtig.  $\frac{y}{r} = \frac{PC}{1+PC} = T \Rightarrow \left| \frac{y}{r} \right| = |T|$  und  $\frac{y}{n} = -\frac{PC}{1+PC} = -T \Rightarrow \left| \frac{y}{n} \right| = |T|$ . Dies ist jedoch üblicherweise kein Problem, da das Messrauschen bei höheren Frequenzen liegt als das Referenzsignal. Trotzdem sollte sichergestellt werden, dass  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} T = 0$ , damit hochfrequentes Rauschen unterdrückt wird.
- h) Falsch. Robuste Regelgüte bedeutet nur, dass sich die Kreise  $|W_1(j\omega)|$  und  $|W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)|$  bei keiner Frequenz überschneiden. Die Stabilität hängt mit der Anzahl der Umdrehungen von  $L(j\omega)$  um den Punkt  $-1$  ab.

**Aufgabe 7 (Systemanalyse [Alberding (Pleines)])****8 Punkte**

Die Fahrdynamik eines Kraftfahrzeugs sei vereinfacht durch folgendes lineare zeitinvariante Mehrgrößensystem beschrieben:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_L \\ F_R \end{bmatrix},$$

wobei  $v$  [m/s] die Fahrzeuggeschwindigkeit,  $\beta$  [rad] den Schwimmwinkel und  $\dot{\psi}$  [rad/s] die Gierrate bezeichnet (vgl. Abb. 8). Als Eingänge werden die Längskräfte [kN] (durch Antrieb und Bremsen) der linken Reifen  $F_L = F_1 + F_3$  und die der rechten Reifen  $F_R = F_2 + F_4$  berücksichtigt. Es sei vereinfachend angenommen, dass diese beliebig, aber endlich vorgegeben werden können. Fahrzeuggeschwindigkeit und Gierrate werden kontinuierlich gemessen und als Ausgänge betrachtet. Die zugehörige Übertragungsmatrix lautet

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + 0.01} & \frac{1}{s + 0.01} \\ \frac{s + 4}{s + 4} & \frac{s + 4}{s + 4} \\ -\frac{3(s^2 + 8s + 18)}{3(s^2 + 8s + 18)} & \frac{3(s^2 + 8s + 18)}{3(s^2 + 8s + 18)} \end{bmatrix}.$$

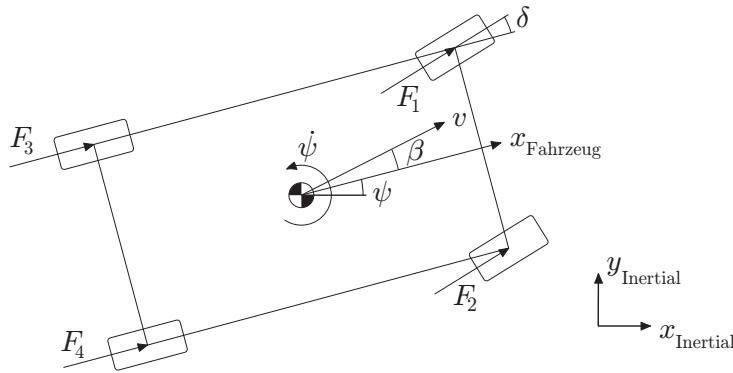


Abbildung 8: Variablen des Fahrzeugmodells.

- (2 Punkte) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und deren Vielfachheit.
- (2 Punkte) Kann aus den Messungen der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Gierrate sowie bekannten Reifenlängskräften auch auf den Schwimmwinkel geschlossen werden?
- (1 Punkt) Kann man auf der Grundlage des gegebenen Modells die Gierbewegung des Fahrzeugs durch unterschiedlich starkes Bremsen der linken und rechten Reifen destabilisieren (im Sinne von  $\dot{\psi} \rightarrow \infty$ )?
- (3 Punkte) Für alternativ gewählte Eingänge<sup>1</sup> lautet die Eingangsmatrix

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Als Ausgänge werden nach wie vor Fahrzeuggeschwindigkeit und Gierrate betrachtet. Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix des sich ergebenden Systems.

<sup>1</sup>Wenn anstelle rechts und links unterschiedlicher Reifenlängskräfte der Lenkwinkel  $\delta$  [rad] und eine bei allen Reifen einheitliche Reifenlängskraft  $F$  [kN],  $F_i = F \forall i = 1..4$ , als Eingänge berücksichtigt werden.

## Lösung 7

### a) (2 Punkte)

Die Pole sind die Wurzeln des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren der Übertragungsmatrix.

Minoren 1. Ordnung sind:

$$\frac{1}{s + 0.01}, \quad \pm \frac{s + 4}{3(s^2 + 8s + 18)},$$

Minor 2. Ordnung ist:

$$\frac{2(s + 4)}{3(s + 0.01)(s^2 + 8s + 18)}.$$

Das Pol-Polynom ergibt sich zu  $3(s + 0.01)(s^2 + 8s + 18)$ , woraus die Pole des Systems und deren Vielfachheit folgen:

$$\pi_1 = -0.01 \text{ (einfach)}, \quad \pi_{2,3} = -4 \pm \sqrt{2}j \text{ (einfach)}.$$

Die Nullstellen sind die Wurzeln des grössten gemeinsamen Teilers der Zähler der Minoren höchster Ordnung, nachdem diese auf das Pol-Polynom als gemeinsamen Nenner normiert wurden.

Es gibt nur einen Minor 2. Ordnung, welcher bereits auf das Pol-Polynom normiert ist. Somit hat das System eine einzelne Nullstelle bei der Wurzel des Zählers  $2(s + 4)$ :

$$\zeta_1 = -4 \text{ (einfach)}.$$

### b) (2 Punkte)

Um mithilfe kontinuierlicher Messungen von Ein- und Ausgang eines Systems dessen Zustand rekonstruieren zu können, muss das System vollständig beobachtbar sein.

Die in a) ermittelte Anzahl der Pole entspricht der Ordnung des Zustandsraummodells, somit hat das System minimale Ordnung und ist sowohl vollständig steuerbar als auch vollständig beobachtbar.

Alternativ kann die Beobachtbarkeitsmatrix aufgestellt werden. Fahrzeuggeschwindigkeit und Gierrate werden als Ausgänge betrachtet, folglich lautet die Ausgangsmatrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und es ergibt sich die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 14 \end{bmatrix}.$$

Diese besitzt vollen Rang, das System ist vollständig beobachtbar.

Da man anhand der Blockdiagonalform der Systemmatrix sehen kann, dass die Fahrzeuggeschwindigkeit von Schwimmwinkel und Gierrate entkoppelt ist, ist von Seiten der Fahrzeuggeschwindigkeit kein Beitrag zur Beobachtung des Schwimmwinkels zu erwarten. Somit

kann man sich zur Vereinfachung der Berechnung darauf konzentrieren, die Beobachtbarkeit des Teilsystems

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zu zeigen. Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

hat vollen Rang, d.h. der Schwimmwinkel kann allein mithilfe der Gierrate rekonstruiert werden.

- c) (1 Punkt) Die Eingänge sind laut Aufgabentext endlich, somit kann ein gegen unendlich strebender Ausgang nur auftreten falls das System BIBO-instabil ist. Sämtliche in b) berechneten Pole liegen in der linken Halbebene, folglich ist das System BIBO-stabil.
- d) (3 Punkte) Die Übertragungsmatrix eines Mehrgrößensystems lässt sich analog zur Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems berechnen. Im vorliegenden Fall wird die Berechnung durch die Blockdiagonalform der Systemmatrix vereinfacht – die Inverse einer Blockdiagonalmatrix setzt sich aus den Inversen der einzelnen Blöcken zusammen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot \tilde{B} + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & s + 4 & 1 \\ 0 & -2 & s + 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s + 0.01} & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & \frac{2}{s^2 + 8s + 18} & \frac{s + 4}{s^2 + 8s + 18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{s + 0.01} \\ \frac{25s + 104}{s^2 + 8s + 18} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 8 (MIMO-Systeme, Singularwerte [Zentner (Elbert)]) 10 Punkte**

- a) (3 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den drei Subsystemen  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  und  $P_3(s)$ . Es hat die Eingänge  $u_1$  und  $u_2$  und die Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$ .

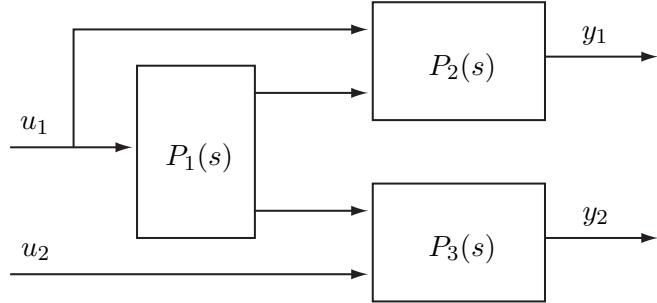


Abbildung 9: Blockdiagramm des in a) zu analysierenden Systems.

Die Subsysteme  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  und  $P_3(s)$  haben folgende Übertragungsmatrizen:

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{s+3} \\ \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s+4}{s-5} \end{bmatrix} \quad P_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+5} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix  $P(s)$  des gesamten Systems.

- b) (4 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den drei Subsystemen  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  und  $P_3(s)$ . Es hat die Eingänge  $u_1$  und  $u_2$  und die Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$ .

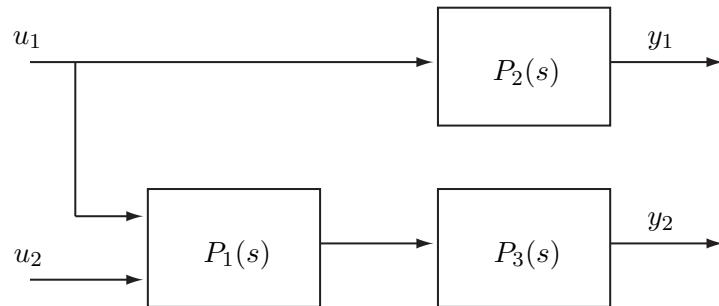


Abbildung 10: Blockdiagramm des in b) zu analysierenden Systems.

Die Subsysteme  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  und  $P_3(s)$  haben folgende Übertragungsmatrizen:

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad P_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+3} \end{bmatrix}$$

Zeichnen Sie ein detailliertes Signalflossbild und leiten Sie daraus eine Zustandsraumdarstellung der Systemgleichungen ab.

c) (3 Punkte) Gegeben sei folgende Übertragungsmatrix  $G(s)$ :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{s+1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Singularwerte von  $G(s)$  bei der Frequenz  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

### Lösung 8

#### Lösung 8

a) (3 Punkte)

Die beiden Ausgänge  $y_1$  und  $y_2$  werden folgendermassen berechnet:

$$\begin{aligned} y_1 &= P_2^{11} \cdot u_1 + P_2^{12} \cdot P_1^{11} \cdot u_1 \\ y_2 &= P_3^{11} \cdot P_1^{21} \cdot u_1 + P_3^{12} \cdot u_2 \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} P_2^{11} + P_2^{12} \cdot P_1^{11} & 0 \\ P_3^{11} \cdot P_1^{21} & P_3^{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} + \frac{s+4}{s-5} \cdot \frac{s-5}{s+3} & 0 \\ \frac{s+2}{s+5} \cdot \frac{1}{s+4} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s+3} & 0 \\ \frac{s+2}{(s+5)(s+4)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) (4 Punkte)

Abbildung 11 zeigt ein detailliertes Signalflussbild des Systems. Die Zustandsraumdarstellung kann direkt abgelesen werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u \end{aligned}$$

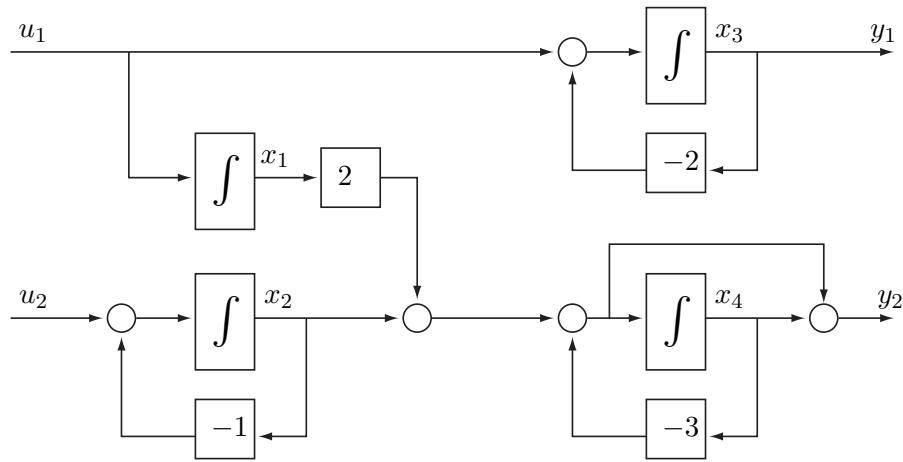


Abbildung 11: Detailliertes Signalflussbild des in b) zu analysierenden Systems.

- c) (3 Punkte) Die Übertragungsmatrix  $G(s)$  hat bei der Frequenz  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  folgenden Wert:

$$G(j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j+3} & \frac{j+1}{j+3} \\ \frac{j+1}{j+3} & \frac{1}{j+3} \end{bmatrix}$$

Die Singularwerte einer Matrix  $G$  berechnen sich zu  $\sigma_i\{G\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{G}^T G\}}$ .  
Berechnen der Hessematrix  $H = \bar{G}^T G$ :

$$H = \bar{G}^T(j)G(j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{-j+3} & \frac{-j+1}{-j+3} \\ \frac{-j+1}{-j+3} & \frac{1}{-j+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{j+3} & \frac{j+1}{j+3} \\ \frac{j+1}{j+3} & \frac{1}{j+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von  $H$  können mit  $\det(\lambda I - H) \stackrel{!}{=} 0$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - H) &= \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \lambda - \frac{3}{10} \end{bmatrix} \right) \\ &= \left( \lambda - \frac{3}{10} \right)^2 - \left( -\frac{2}{10} \right)^2 \\ &= \lambda^2 - \frac{6}{10} \lambda + \frac{5}{100} = \left( \lambda - \frac{1}{10} \right) \left( \lambda - \frac{5}{10} \right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{10}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

und

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 0.3162$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$$