



# Thermodynamik I - Übung 4

Nicolas Lanzetti

# Heutige Themen

- Zusammenfassung letzter Woche;
- Spezifische Wärmekapazitäten;
- Bestimmung der inneren Energie.

## Zusammenfassung letzter Woche

- Polytropen Zustandsänderung für ideale Gase:
- 

**Isobar**       $p = \text{konst.}$        $p \cdot v^0 = \text{konst.}$        $n = 0$

---

**Isotherm**       $T = \text{konst.}$        $R \cdot T = p \cdot v = \text{konst.}$        $n = 1$

---

**Isochor**       $v = \text{konst.}$        $\frac{v_1}{v_2} = 1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}$        $n = \infty$

---

**Adiabat**       $\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.}$

---

- Arbeit kann aus diesen Formeln hergeleitet werden ( $p(V) = \dots$ );
- Erinnerung: Für ideale Gase die innere Energie ist **nur** Funktion der Temperatur:  $u = u(T)$ .

# Spezifische Wärmekapazitäten

Im Allgemeinen gilt ( $h$ : Enthalpie, kommt nächste Woche)

$$u = u(v, T), \quad h = h(p, T). \quad (1)$$

Daraus folgt

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot dv + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT, \quad (2)$$

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT. \quad (3)$$

**Erinnerung (Verallgemeinerte Kettenregel):**

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot \frac{dv}{dt} + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot \frac{dT}{dt} \quad (4)$$

# Spezifische Wärmekapazitäten

Mit der Annahme konstantes Volumens ( $\mathrm{d}v = 0$ ) bekommt man

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot \mathrm{d}v + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot \mathrm{d}T \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot \mathrm{d}T \\ &= c_v \cdot \mathrm{d}T,\end{aligned}\tag{5}$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) \mathrm{d}T.\tag{6}$$

## Spezifische Wärmekapazitäten

Mit der Annahme konstantes Drucks ( $dp = 0$ ) bekommt man

$$\begin{aligned} dh &= \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_p \cdot dT, \end{aligned} \tag{7}$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT. \tag{8}$$

# Spezifische Wärmekapazitäten bei idealen Gasen

Bei idealen Gases haben wird gesehen

$$u = u(T), \quad (9)$$

d.h.

$$\begin{aligned} du &= \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right) \cdot dv + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_v \cdot dT, \end{aligned} \quad (10)$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta u = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT, \quad (11)$$

auch wenn das Volumen nicht konstant ist.

## Spezifische Wärmekapazitäten bei idealen Gasen

Bei idealen Gases haben wird gesehen

$$u = u(T), \quad h = h(T), \quad (12)$$

d.h.

$$\begin{aligned} dh &= \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right) \cdot dp + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot dT \\ &= c_p \cdot dT, \end{aligned} \quad (13)$$

oder mit der Integralformulierung

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT, \quad (14)$$

auch wenn der Druck nicht konstant ist.

## Bemerkungen zu den Wärmekapazitäten

- $c_p$  und  $c_v$  sind Funktion der Temperatur, d.h.

$$c_p = c_p(T), \quad c_v = c_v(T). \quad (15)$$

- $c_v$  und  $c_p$  sind auch (für verschiedene Temperaturen) tabelliert.
- Bei perfekten Gase sind  $c_p$  und  $c_v$  konstant (temperaturunabhängig).
- Falls man nicht mit idealen Gasen arbeitet, muss die Bedingung  $v = \text{konst.}$  respektiv  $p = \text{konst}$  erfüllt sein!
- Für ideale Gase gilt:

$$c_p = R + c_v, \quad R = \frac{R_0}{M}. \quad (16)$$

# Tabellen vs. Wärmekapazitäten

- Grundsätzlich: Falls möglich oder nichts anderes erwähnt wird in der Aufgabenstellung immer mit Tabellen arbeiten.
- Wann arbeitet man mit Wärmekapazitäten?
  - Verlangt in der Aufgabenstellung;
  - $c_v$  oder  $c_p$  gegeben;
  - Keine Tabelle für  $u$ .
- Wählt man  $c_p/c_v$  bei  $T_1$  oder bei  $T_2$ ?  
Approximation mit der mittleren Temperatur:

$$\bar{c}_v = c_v \left( \frac{T_1 + T_2}{2} \right). \quad (17)$$

## Tabellen - Achtung!

Wie gesagt ist  $u$  für einige ideale Gase tabelliert (von Tabelle A-22 bis A-28):

**Aufpassen auf die Einheiten:**  $\left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$

Dann ist

$$\Delta U = \frac{m}{M} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1), \quad (18)$$

mit  $\bar{u}$  molspezifische innere Energie (tabelliert).

## Beispiel

Man berechne die Änderung der inneren Energie für 1 kg Sauerstoff bei einer Temperaturerhöhung von  $T_1 = 400\text{ K}$  bis  $T_2 = 500\text{ K}$ ...

- mit der tabellierten inneren Energie;
- mit der Wärmekapazität.

Sauerstoff ( $O_2$ ) kann als ideales Gas betrachtet werden.

## Beispiel

- Mit Tabellen (A-1 und A-24):

$$\Delta U = m \cdot (u_2 - u_1) = \frac{m}{M} \cdot (\bar{u}(500) - \bar{u}(400)) = 69.69 \text{ kJ} \quad (19)$$

- Mit Wärmekapazitäten:

$$\Delta U = m \cdot \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \approx m \cdot c_v \left( \frac{T_1 + T_2}{2} \right) \cdot \Delta T \quad (20)$$

Mit Tabelle A-20:  $c_v(450 \text{ K}) = 0.696 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(450 \text{ K}) \cdot \Delta T = 69.60 \text{ kJ} \quad (21)$$

Fehler  $\approx 0.1\%$

## Beispiel

- Mit Wärmekapazitäten (ohne mittlere Temperatur):

Mit Tabelle A-20:  $c_v(400 \text{ K}) = 0.681 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(400 \text{ K}) \cdot \Delta T = 68.10 \text{ kJ} \quad (22)$$

Fehler  $\approx 2.2\%$

- Mit Wärmekapazitäten (ohne mittlere Temperatur):

Mit Tabelle A-20:  $c_v(500 \text{ K}) = 0.712 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

$$\Delta U = m \cdot c_v(500 \text{ K}) \cdot \Delta T = 70.12 \text{ kJ} \quad (23)$$

Fehler  $\approx 0.6\%$

# Fragen?