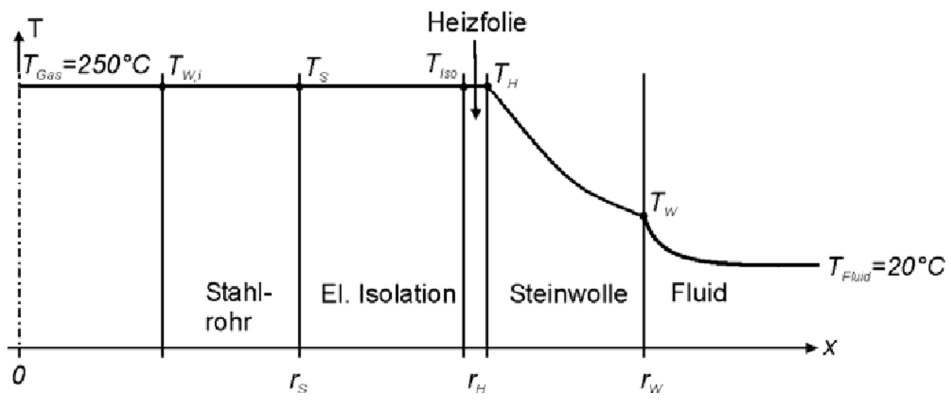
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

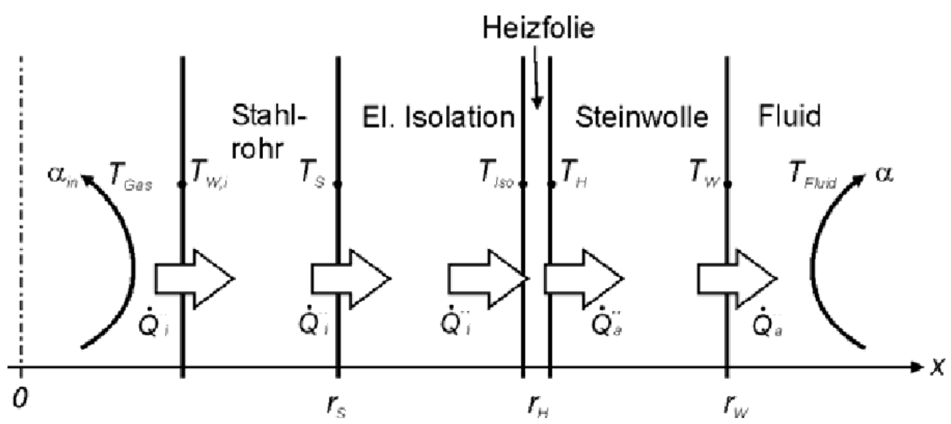
Thermodynamik II – Musterlösung Rechenübung 7

Aufgabe 1

a)



b)

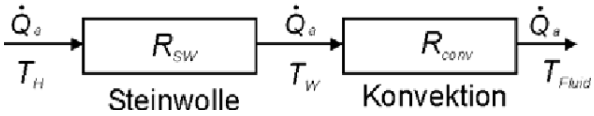


Annahme: Keine Quellen und Senken im System
Keine Erwärmung des Gases: $\dot{Q}_i = 0$
Konvektion Gas - Stahlrohr: $\dot{Q}_i = 0 = A_{in} \cdot \alpha_{in} \left(T_{Gas} - T_{W,i} \right) \Rightarrow T_{W,i} = T_{Gas}$

$$\Rightarrow T_{W,i} = T_{iso} = T_S = T_H = T_{Gas} = 250°C$$

Temperatur des Gases wird durch Heizung aufrecht erhalten.

Wärmefluss Heizfolie - Fluid:



$$R_{SW} = \frac{\ln\left(\frac{r_W}{r_H}\right)}{2\pi\lambda_{SW}\ell},\ R_{conv} = \frac{1}{2\pi\ell r_W \alpha}$$

Serielle Anordnung von Widerständen: $R_{seriell} = \sum_i R_i$

$$\dot{Q}_a\left(R_{SW} + R_{conv}\right) = T_H - T_{Fluid}$$
$$\dot{Q}_a = \frac{2\pi\ell(T_H - T_{Fluid})}{\frac{1}{r_W\alpha} + \frac{\ln(r_W/r_H)}{\lambda_{SW}}} = \frac{2\pi\cdot 3m\cdot(250°C - 20°C)}{\frac{1}{0.026\,m\cdot 12\,W/(m^2\cdot K)} + \frac{\ln(0.026\,m/0.006\,m)}{0.040\,W/(m\cdot K)}} = 108.8\,W$$

c)

$$\dot{Q}_a \cdot R_{conv} = T_W - T_{Fluid} \Rightarrow$$
$$T_W = T_{Fluid} + \frac{\dot{Q}_a}{2\pi\ell r_W\alpha} = 20°C + \frac{108.8\,W}{2\pi\cdot 3\,m\cdot 0.026\,m\cdot 12\,W/(m^2\cdot K)} = 38.5°C$$

oder

$$\dot{Q}_a \cdot R_{SW} = T_H - T_W \Rightarrow$$
$$T_W = T_H - \frac{\dot{Q}_a\cdot\ln(r_W/r_H)}{2\pi\lambda_{SW}\ell} = 250°C - \frac{108.8\,W\cdot\ln(0.026\,m/0.006\,m)}{2\pi\cdot 0.040\,W/(m\cdot K)\cdot 3\,m} = 38.5°C$$

Aufgabe 2

a) Wärmeleitungsgleichung mit innerer Wärmequelle:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{Q}'''}{\lambda} = -\frac{I_0 a}{\lambda}e^{-ax}$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{I_0}{\lambda}e^{-ax} + C_1$$

Allgemeine Lösung:

$$T(x) = -\frac{I_0}{\lambda a}e^{-ax} + C_1 x + C_2$$

Randbedingung 1:

$$T(0) = T_1 = C_2 - \frac{I_0}{\lambda a} \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}$$

Randbedingung 2:

$$T(d) = T_2 = -\frac{I_0}{\lambda a}e^{-ad} + C_1 d + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right]$$

Temperaturprofil:

$$T(x) = -\frac{I_0}{\lambda a}e^{-ax} + \frac{x}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right] + T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}$$

b)

$$\frac{dT}{dx} = \frac{I_0}{\lambda}e^{-ax} + \frac{1}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right]$$
$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{I_0}{\lambda} + \frac{1}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right] = 17.56\,K \cdot m^{-1} + 10\,m^{-1} \cdot (T_2 - T_1)$$
$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=d} = \frac{I_0}{\lambda}e^{-ad} + \frac{1}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right] = -17.27\,K \cdot m^{-1} + 10\,m^{-1} \cdot (T_2 - T_1)$$

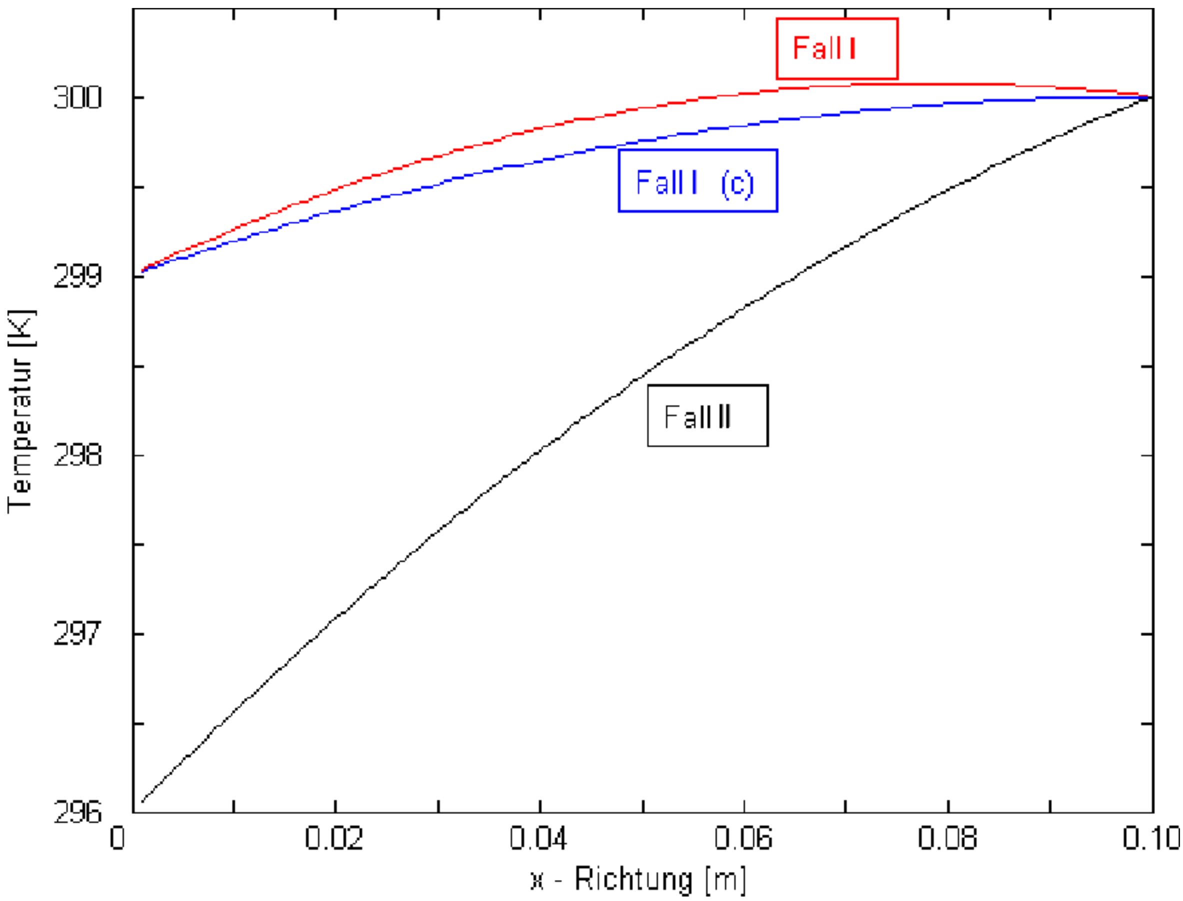
Fall I:
Oberkante: $\dot{Q}''_I(x = 0) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -24.58 - 14 = -38.58\,W/m^2$
Unterkante: $\dot{Q}''_I(x = d) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=d} = 24.18 - 14 = 10.18\,W/m^2$

Fall II:
Oberkante: $\dot{Q}''_{II}(x = 0) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -24.58 - 14 \cdot 4 = -80.58\,W/m^2$
Unterkante: $\dot{Q}''_{II}(x = d) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=d} = 24.18 - 14 \cdot 4 = -31.82\,W/m^2$

c)

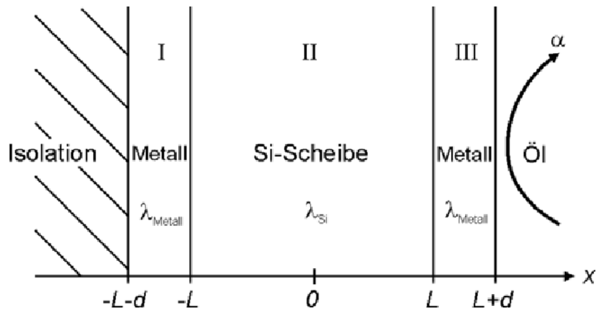
$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=d} = \frac{I_0}{\lambda}e^{-ad} + \frac{1}{d}\left[T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda a}\left(e^{-ad} - 1\right)\right] = 0$$

$$I_0 = \frac{\lambda a\,(T_1 - T_2)}{e^{-ad} \cdot (a \cdot d + 1) - 1} = 578.94\,W/m^2$$



Aufgabe 3

a)



Energieerhaltungsgleichung für die Wärmeleitung:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \bullet (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{Quellen}$$

Annahmen:

- Stationärer Zustand
- 1-dimensionale Wärmeleitung
- $\lambda = konst.$
- unendlich lange Platten
- keine Kontaktwiderstände zwischen den Platten

Annahme für Teile I & III:

- keine Quellen

Annahme für Teil II:

- Wärmequelle ist uniform ($\dot{Q}'''_{Quellen} = konst.$)

Teil I:

$$\frac{\partial^2 T_I}{\partial x^2} = 0, \Rightarrow T_I(x) = C_1 x + C_2$$

Teil II:

$$\frac{\partial^2 T_{II}}{\partial x^2} = \underbrace{-\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda_{Si}}}_{=konst.}, \Rightarrow T_{II}(x) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda_{Si}} x^2 + C_3 x + C_4$$

Teil III:

$$\frac{\partial^2 T_{III}}{\partial x^2} = 0, \Rightarrow T_{III}(x) = C_5 x + C_6$$

Randbedingungen (BC):

$$x = -L - d : \dot{Q}''_I = -\lambda_{Metall} \left. \frac{dT_I}{dx} \right|_{x=-L-d} = 0 \tag{1}$$
$$x = -L : T_I|_{x=-L} = T_{II}|_{x=-L} \tag{2}$$
$$x = -L : \dot{Q}''_I = -\lambda_{Metall} \left. \frac{dT_I}{dx} \right|_{x=-L} = \dot{Q}''_{II} = -\lambda_{Si} \left. \frac{dT_{II}}{dx} \right|_{x=-L} \tag{3}$$
$$x = +L : T_{II}|_{x=L} = T_{III}|_{x=L} \tag{4}$$
$$x = +L : \dot{Q}''_{II} = -\lambda_{Si} \left. \frac{dT_{II}}{dx} \right|_{x=L} = \dot{Q}''_{III} = -\lambda_{Metall} \left. \frac{dT_{III}}{dx} \right|_{x=L} \tag{5}$$
$$x = L + d : \dot{Q}''_{III} = -\lambda_{Metall} \left. \frac{dT_{III}}{dx} \right|_{x=L+d} = \dot{Q}''_{convection} \tag{6}$$

Lösen von Randbedingung (1):

$$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow T_I(x) = C_2$$

Lösen von Randbedingung (3):

$$\begin{aligned}
&\dot{Q}''_I\Big|_{x=-L} = 0 = -\lambda_{Si} \tfrac{dT_{II}}{dx}\Big|_{x=-L} \text{ damit:} \\
&0 = -\tfrac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda_{Si}} (-L) + C_3 \Rightarrow C_3 = -\tfrac{\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\lambda_{Si}} \\
&\Rightarrow T_{II}(x) = -\tfrac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda_{Si}} \left(\tfrac{x^2}{2} + Lx \right) + C_4
\end{aligned}$$

Lösen von Randbedingung (5):

$$\begin{aligned}
&-\lambda_{Si} \tfrac{dT_{II}}{dx}\Big|_{x=L} = \dot{Q}'''_{Quellen}(2L) = -\lambda_{Metall} \tfrac{dT_{III}}{dx}\Big|_{x=L} = -\lambda_{Metall} C_5 \Rightarrow \\
&C_5 = -\tfrac{2\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\lambda_{Metall}} \Rightarrow T_{III}(x) = -\tfrac{2\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\lambda_{Metall}} x + C_6
\end{aligned}$$

Lösen von Randbedingung (6):

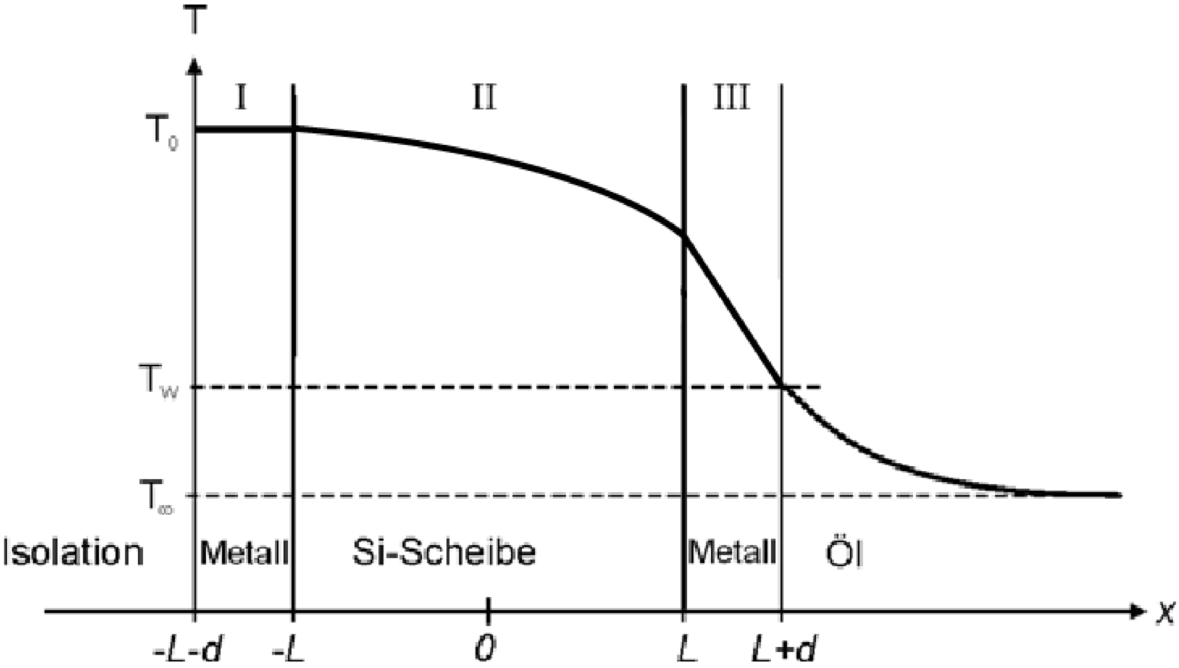
$$\begin{aligned}
&-\lambda_{Metall} \tfrac{dT_{III}}{dx}\Big|_{x=L+d} = 2\dot{Q}'''_{Quellen} L = \dot{Q}''_{convection} = \alpha \left(T_{wand} - T_\infty \right) \\
&\Rightarrow T_{wand} = T_{III}|_{x=L+d} = -\tfrac{2\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\lambda_{Metall}} (L + d) + C_6 = \tfrac{2\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\alpha} + T_\infty \\
&\Rightarrow C_6 = T_\infty + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{L+d}{\lambda_{Metall}} \right) \\
&\Rightarrow T_{III}(x) = T_\infty + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{L+d-x}{\lambda_{Metall}} \right)
\end{aligned}$$

Lösen von Randbedingung (4):

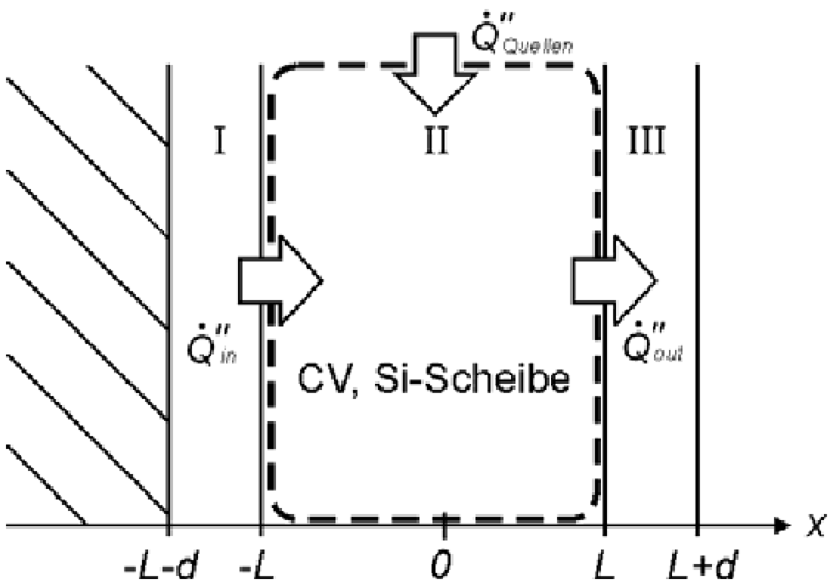
$$\begin{aligned}
&T_{II}|_{x=L} = -\tfrac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda_{Si}} \tfrac{3L^2}{2} + C_4 = T_{III}|_{x=L} = T_\infty + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{d}{\lambda_{Metall}} \right) \\
&\Rightarrow C_4 = T_\infty + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{d}{\lambda_{Metall}} + \tfrac{3L}{4\lambda_{Si}} \right) \\
&\Rightarrow T_{II}(x) = T_\infty - \tfrac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda_{Si}} \left(\tfrac{x^2}{2} + Lx - \tfrac{3}{2} L^2 \right) + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{d}{\lambda_{Metall}} \right)
\end{aligned}$$

Lösen von Randbedingung (2):

$$\begin{aligned}
&T_I|_{x=-L} = C_2 = T_{II}|_{x=-L} = T_\infty + \tfrac{2\dot{Q}'''_{Quellen} L^2}{\lambda_{Si}} + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{d}{\lambda_{Metall}} \right) \\
&\Rightarrow T_I = T_\infty + 2\dot{Q}'''_{Quellen} L \left(\tfrac{L}{\lambda_{Si}} + \tfrac{d}{\lambda_{Metall}} + \tfrac{1}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$



Bemerkung: Als weitere Bedingung könnte die Energieerhaltungsgleichung für die Siliziumscheibe aufgestellt werden:

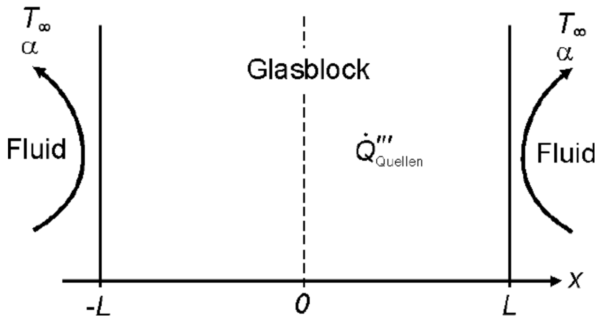


1. HS: $\dot{Q}''_{in} + \dot{Q}''_{Quellen} = \dot{Q}''_{out}$ mit: $\dot{Q}''_{in} = \dot{Q}''_{I}\Big|_{x=-L} = 0$

$$\dot{Q}''_{Quellen} = \int_{-L}^{L} \dot{Q}'''_{Quellen} dx = 2L\dot{Q}'''_{Quellen} \Rightarrow \dot{Q}''_{out} = \dot{Q}''_{II}\Big|_{x=L} = 2L\dot{Q}'''_{Quellen}$$

Diese Bedingung ist jedoch schon in den Randbedingungen (1) - (6) enthalten und deshalb nicht nötig.

Aufgabe 4



Annahmen:

- stationärer Zustand
- 1-dimensionale Wärmeleitung (x-Richtung)
- $\lambda = konst.$,$\alpha = konst.$
- uniforme Wärmequellen
- keine Wärmestrahlung

Energieerhaltungsgleichung für die Wärmeleitung im Glasblock:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + \dot{Q}'''_{Quellen}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{\lambda}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen (BC):

$$x = L : \dot{Q}'' = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \dot{Q}''_{Konvektion} = \alpha \left(T_W - T_\infty \right) \tag{7}$$

$$x = 0 : \dot{Q}'' = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \text{ (Symmetriebedingung)} \tag{8}$$

Lösen von BC (8):

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

Lösen von BC (7):

$$\dot{Q}'' = \dot{Q}'''_{Quellen} L = \alpha \left(T_W - T_\infty \right)$$

mit der Wandtemperatur $T_W = T(x = L) = -\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} L^2 + C_2 \Rightarrow$

$$\dot{Q}'''_{Quellen} L = \alpha \left(-\frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} L^2 + C_2 - T_\infty \right) \Rightarrow C_2 = T_\infty + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen} L}{\alpha} + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{2\lambda} L^2$$

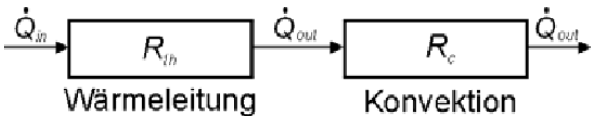
$$T(x) = T_\infty + \dot{Q}'''_{Quellen} \left(-\frac{x^2}{2\lambda} + \frac{L}{\alpha} + \frac{L^2}{2\lambda} \right)$$

Maximaltemperatur $T_{\max}$ bei $\frac{dT}{dx} = 0$: bei $x = 0$ (siehe BC 2)
$\dot{Q}'''_{Quellen} = \frac{T_{\max} - T_\infty}{\frac{L}{\alpha} + \frac{L^2}{2\lambda}}$

a) $\alpha = 500\, W/(m^2 \cdot K)$
$\Rightarrow \dot{Q}'''_{Quellen} = \frac{400°C - 20°C}{\frac{0.2\, m}{500\, W/(m^2 \cdot K)} + \frac{(0.2 m)^2}{2 \cdot 0.81\, W/(m \cdot K)}} = 15.14\, kW/m^3$

b) $\alpha = 15\, W/(m^2 \cdot K)$
$\Rightarrow \dot{Q}'''_{Quellen} = \frac{400°C - 20°C}{\frac{0.2\, m}{15\, W/(m^2 \cdot K)} + \frac{(0.2\, m)^2}{2 \cdot 0.81\, W/(m \cdot K)}} = 9.99\, kW/m^3$

c) Anwendung der Analogie zum elektrischen Strom auf dieses Problem:



Wärmeleitwiderstand: $R_{th} = \frac{L}{A\lambda}$
Konvektiver Widerstand: $R_c = \frac{1}{A\alpha}$
Biot-Zahl $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{\frac{L}{A\lambda}}{\frac{1}{A\alpha}} = \frac{\text{Wärmeleitwiderstand}}{\text{konvektiver Widerstand}}$
Fall a) $Bi_a = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{500\, W/(m^2 \cdot K) \cdot 0.2\, m}{0.81\, W/m \cdot K} = 123.5$
Fall b) $Bi_b = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{15\, W/(m^2 \cdot K) \cdot 0.2\, m}{0.81\, W/m \cdot K} = 3.7$

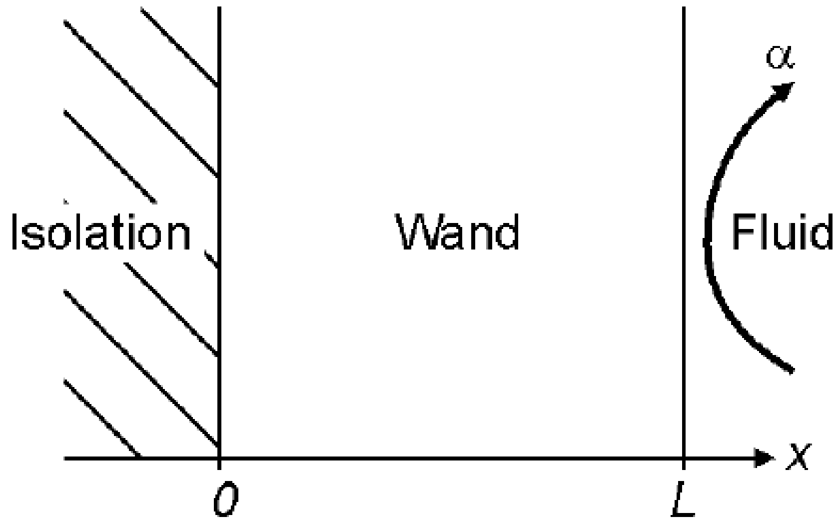
Diskussion Allgemein gilt:

$Bi \ll 1$: Wärmetransportwiderstand durch Konvektion überwiegt.
$Bi \approx 1$: Konvektiver Widerstand und Leitwiderstand haben gleiche Grössenordnung.
$Bi \gg 1$: Wärmetransportwiderstand durch Leitung überwiegt.

Fall a): Da $Bi \gg 1$, Wärmeleitwiderstand behindert grösstenteils den Wärmefluss vom Glasblock ins Wasser. Falls der Wärmefluss erhöht werden soll, macht es wenig Sinn, die Konvektion zu erhöhen. Vielmehr ist eine effizientere Wärmeleitung durch den Block anzustreben.
Fall b): Da $Bi \approx 1$, Sowohl Wärmeleitung als auch Konvektion haben einen entscheidenden Einfluss auf den Abtransport der Wärme. Falls der Wärmefluss erhöht werden soll, kann sowohl an der Konvektion als auch an der Wärmeleitung "gefeilt"werden.

Aufgabe 5

a)



Annahmen:

- instationärer Zustand
- 1-dimensionale Wärmeleitung
- $\lambda = konst.$
- keine Quellen
- ρ und c konstant, da homogenes Material

Energieerhaltungsgleichung für die Wärmeleitung:

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{instationär}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{=0} + \underbrace{\dot{Q}'''_{Quellen}}_{\text{keine Quellen}\Rightarrow 0}$$

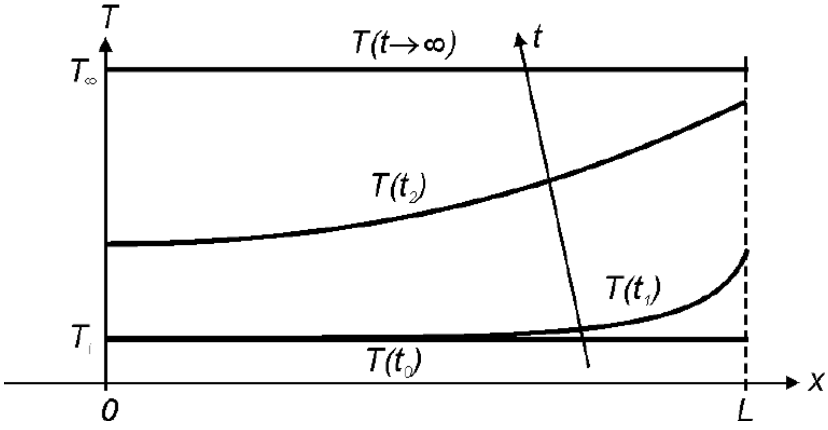
$$\Rightarrow \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ mit } a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Anfangsbedingung IC (Initial condition):
für $t \leq t_0$:

$$T(x) = T_i$$

Randbedingungen (BC; Boundary conditions): (für $t > t_0$)
für $x = 0$: $\dot{Q}''(x = 0) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$, (isoliert)
für $x = L$: $\dot{Q}''(x = L) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = \dot{Q}''_{convection} = \alpha\,(T(L,t) - T_\infty)$, (Konvektion)

b)

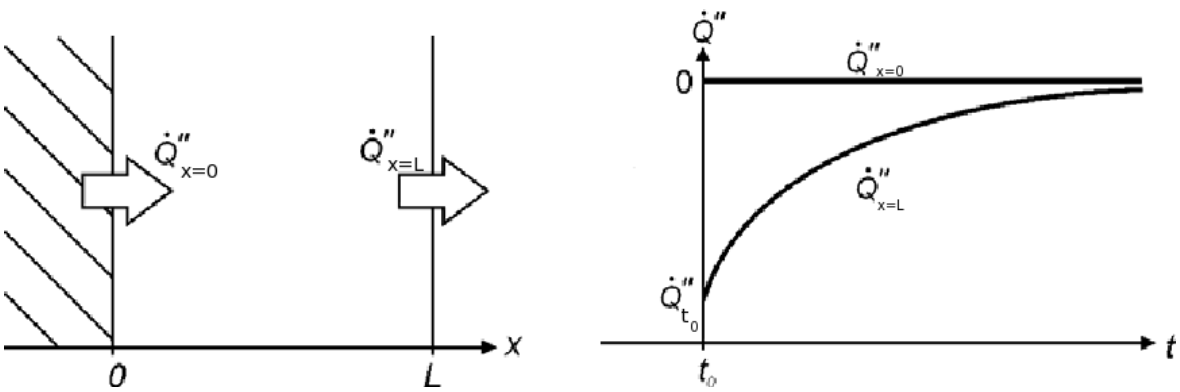


mit

$$t_0 < t_1 < t_2$$

Beachte: $\frac{dT}{dx}\big|_{x=0} = 0$, und $\frac{dT}{dx}\big|_{x=L} \searrow$, wenn $t \nearrow$
(Konvektiver Wärmefluss nimmt mit der Zeit ab, da der Temperaturunterschied zwischen der Wand und dem heizenden Fluid kleiner wird)

c)



Beachte: $\dot{Q}''_{x=0} = 0$ und $\dot{Q}''_{x=L} = \alpha\,(T(L{,}t) - T_\infty) \Rightarrow$
$\dot{Q}''_{x=L} < 0$, da $T(L{,}t) < T_\infty$ und $\dot{Q}''_{t_0} = \alpha\,(T_i - T_\infty)$

d) Spezifische innere Energie für $t = t_0$: $u_i = u_{ref} + cT_i$
Spezifische innere Energie für $t \Rightarrow \infty$: $u_\infty = u_{ref} + cT_\infty$
Zunahme der inneren Energie: $\Delta u = c\,(T_\infty - T_i)$