Übungsblatt Komplexe Zahlen

1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

a) $\dfrac{1}{1+\frac{2}{i+7}}$,

b) $e^{i(5\pi + i\ln 4)}$,

c) $e^{e^{-i\pi/3}}$,

d) $\dfrac{1}{1+e^{i\varphi}}$

Bei **d)** ist $\varphi \in \mathbb{R}$, aber $\varphi \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

2. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ dar:

a) $e^{2+\frac{i\pi}{2}}$

b) $\frac{3+2i}{1-i}$

c) $(-\pi - i\pi)^3$

d) $\frac{1}{x+iy}$, $\qquad x, y \in \mathbb{R}$

3. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ dar:

a) 1,

b) $-i$,

c) $1 - i\sqrt{3}$,

d) $e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$,

e) $\dfrac{2+2i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

4. Berechne die komplexe Zahl $(1-i)^{101}$.

5. Welche Punktmengen in der Gaussschen Zahlebene $\mathbb{C}$ werden durch die nachstehenden Bedingungen charakterisiert? Man zeichne bei jeder Teilaufgabe eine kleine Skizze und markiere die betreffende Menge mit Farbe.

a) $z + \overline{z} = 1$

b) $z - \overline{z} = 1$

c) $z \cdot \overline{z} = 1$

d) $|z - \overline{z}| < 1$

e) $|z - 1| < 1$

Bitte wenden!

6. **a)** Berechne alle vierten Wurzeln von -1 in $\mathbb{C}$.

b) Berechne alle dritten Wurzeln von $\sqrt{3} - i$.

c) Was geht hier schief?

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

7. **a)** Finden Sie eine Formel für $\cos(3\varphi)$ als Polynom in $\cos(\varphi)$.
Hinweis: $e^{3i\varphi} = (e^{i\varphi})^3$.

b)* Finden Sie eine Formel für $\sin(8\varphi)$ als Polynom in $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$.
Hinweis: Binomische Formel.

8. Beweisen Sie die folgenden (einfachen) Identitäten für $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

b) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re} z$ und $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im} z$

c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, ebenso für $z - w$

d) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

e) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$, falls $w \neq 0$.

f) $\overline{\overline{z}} = z$

g) Wenn $z = re^{i\varphi}$ ist in der Polarform, dann gilt $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.

h) $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-\varphi})$ und $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-\varphi})$

9. Beweisen Sie folgende Identitäten, für $z, w \in \mathbb{C}$ (etwas schwieriger).

a) $\overline{iz} = -i\bar{z}$

b) $(z + \bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2 = |2z|^2$

c) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$

d) $|w\bar{z} + \bar{w}z| \leq 2|wz|$