

# Prüfung Herbst 04

## Vierstündige Prüfung

Die Aufgaben werden alle gleich hoch bewertet. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Erlaubte Hilfsmittel: Selbstverfasste Zusammenfassung (max. 10 Blätter A4), Formelsammlung. **Kein Taschenrechner.**

**Sämtliche Resultate müssen begründet werden.**

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.

1. Berechnen Sie den Trägheitsmoment  $\Theta(a, b)$  des Würfels

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

bezüglich der zur  $x$ -Achse parallelen Achse, die durch  $(0, a, b)$  geht. Die Dichte  $\varrho$  von  $Q$  sei konstant.

2. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfelds  $\vec{v} = (z^2, x, xy)$  längs dem geraden Weg von  $(0, 1, 0)$  nach  $(1, -1, -1)$ .

3. Man finde die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2x(y')^2 = 0,$$

mit  $y(0) = 1$  und  $y'(0) = 4$ .

4. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 12y' - 8y = e^{2x}.$$

**Bitte wenden!**

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem  $y' = x^3 + xy$ ,  $y(0) = 0$ .

6. Man bestimme die Koeffizienten  $a_k$  der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(x-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

7. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{v} = (3x + y, 2y, z + 5)$  von innen nach aussen durch  $\partial T$ .  $T$  ist ein Tetraeder mit Eckpunkten  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 2)$ ,  $(4, 4, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ .

8. Sei  $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$  und  $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Man berechne

$$\int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

9. Man berechne die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2 + x - y^2}$$

im Gebiet  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

10. Man finde die Lösung  $x : t \mapsto x(t)$ ,  $y : t \mapsto y(t)$  des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

mit  $x(0) = 0$  und  $y(0) = 1$ .

**Achtung:** In der letzten Semesterwoche finden folgende Donnerstagsübungsstunden in einem anderen Raum statt (die Zeit bleibt gleich):

Gruppe **Me - Nie** bei Stephanie Gubler anstatt im ETZ G 91 neu im **ETF B 105**,  
Gruppe **Scho - Ste** bei Mirjana Vukelja anstatt im ETZ F 91 neu im **LFW C 11**.