

Analysis I/II - Basisprüfungen 2014

Giovanni Moscato und Nicolas Lanzetti

Hilfreiches

°	0	30	45	60	90	180	270	T	Nullstellen
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	2π	$k\pi$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	2π	$\pi/2 + k\pi$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	π	$k\pi$

$f \dots$	sin	\sin^2	\sin^3	\sin^4	cos	\cos^2	\cos^3	\cos^4	sin cos	$\sin^2 \cos$	$\sin \cos^2$
0 bis $\pi/2$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0 bis π	2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	0	$\frac{2}{3}$
0 bis 2π	0	π	0	$\frac{3\pi}{4}$	0	π	0	$\frac{3\pi}{4}$	0	0	0

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \dots$$

$$I_1 = 1, I_3 = \frac{2}{3}, I_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}, \dots$$

Wichtige Integrale und Ableitungen (\rightarrow S. 75-78)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2$$

$$\int \cos^n(\alpha x) dx = \frac{\cos^{n-1}(\alpha x) \sin(\alpha x)}{\alpha n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(\alpha x) dx$$

$$\int \sin^n(\alpha x) dx = -\frac{\sin^{n-1}(\alpha x) \cos(\alpha x)}{\alpha n} - \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(\alpha x) dx$$

$$\int \tan^n(\alpha x) dx = \frac{\tan^{n-1}(\alpha x)}{\alpha n} - \int \tan^{n-2}(\alpha x) dx$$

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x) + \ln(f(x)) \cdot g'(x) \right)$$

Grossenordnung

$$b^x \gg e^x \gg a^x \gg x^k \gg x \ln(|x|) \gg x \gg x^{1/k} \gg \ln(|x|)$$

f ist für $x \rightarrow \infty$ von kleiner Grössenordnung als g wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \rightarrow \infty$$

Grenzwerte (\rightarrow S. 72)

$$\lim g(x)^{f(x)} = \exp(\lim(f(x) \cdot \ln(|g(x)|)))$$

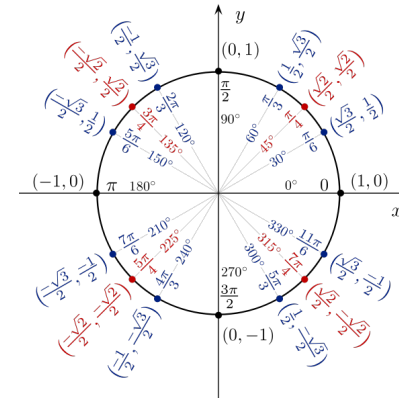
\rightarrow Substitution

Beispiel: $y = \frac{1}{x}$ oder $y = x - c$

Komplexe Zahlen (\rightarrow S. 17)

$$z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \text{cis}(\varphi)$$

$$\arg(z) = \angle(z) = \angle(x + iy) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ und } y < 0 \\ \text{unbestimmt} & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}$$



Funktionen

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist...

- **injektiv**, wenn $x_1 \neq x_2$ dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Graphisch: Jede Parallele zur x -Achse schneidet den Graphen von f in höchstens einem Punkt
- **surjektiv**, wenn $f(A) = B \Leftrightarrow$ Für jedes $b \in B$ gibt es mind. ein $a \in A$.
- **bijektiv**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. \Leftrightarrow Für jedes $b \in B$ gibt es genau ein $a \in A$.
- **gerade** falls $f(-x) = f(x)$
- **ungerade** falls $f(-x) = -f(x)$

Inverse Funktion f^{-1}

Existiert nur wenn f injektiv ist.

1. $y = f(x)$ nach x auslösen
2. x und y vertauschen.

Der Graph der inversen Funktion liegt symmetrisch bzgl. der Gerade $x = y$.

Asymptoten (\rightarrow S. 73)

Sei $g(x)$ Asymptote von $f(x)$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$
Es sei $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{x - 1} = x^2 + x - 2 + \frac{3}{x - 1}$. Dann ist $x^2 + x - 2$ eine quadratische Asymptote von $f(x)$.

Differentialrechnung (\rightarrow S. 75)

Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$T: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Lineare Ersatzfunktion für kleine ε :

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon \cdot f'(x_0)$$

Differential: $df = f'(x_0) \cdot dx$

Absolutefehler: $|\Delta f|$

Relative Fehler: $\frac{df}{f}$

Integralrechnung (\rightarrow S. 77)

Uneigentliche Integral:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

Integrationsmethode und Primitiven \rightarrow S. 77-81

Das Substitution: $f(x) = u(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$

Integral mit Parameter

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b f_x(t, x) dt$$

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t, x) dt \right)' = f(v(x), x) v'(x) - f(u(x), x) u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t, x) dt$$

Beispiel: $\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{y(t)}{t} dt = \left(\frac{y(x)}{x} \right) \cdot 1 - \left(\frac{y(1)}{1} \right) \cdot 0 + \int_1^x 0 dt = \frac{y(x)}{x}$

Mögliche Substitutionen

- $\int f(ax + b) dx, t = ax + b, dx = \frac{dt}{a}$
- $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx, g(x) = t, dx = \frac{dt}{g'(x)}$
- $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, x = a \sin(t), dx = a \cos(t)$
- $\int f(\sin(x), \cos(x)) dx, t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x)) dx, e^x = t, dx = \frac{dt}{t}, \sinh(x) = \frac{t^2 - 1}{2t}, \cosh(x) = \frac{t^2 + 1}{2t}$
- $\int f(x, \sqrt{ax + b}) dx, x = t^2 - \frac{b}{a}, dx = \frac{2t \cdot dt}{a}$
- $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, x = a \sinh(t), dx = a \cosh(t)$

Integrale von rationalen Funktionen

- $\int \frac{1}{x+b} dx = \log|x+b| + C$
- $\int \frac{1}{(x+b)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+b)^{n-1}} + C$ mit $n \geq 2$
- $\int \frac{x+b}{x^2+2bx+c} dx = \frac{1}{2} \log|x^2+2bx+c| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} + C$
($c - b^2 > 0 \iff x^2 + 2bx + c$ keine reellen Nullstellen hat)
- $\int \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} + C$ mit $n \geq 2$

- $I_n = \int \frac{1}{(x^2+2bx+c)^n} dx = ?$ ($c - b^2 > 0, n \geq 2$)
 $\rightarrow 2(n-1)(c-b^2)I_n = (2n-3)I_{n-1} + \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{n-1}}$

Partialbruchzerlegung

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$ in $\frac{A}{x-\lambda_1} + \frac{B}{x-\lambda_2} + \dots$, wobei λ_i die i -te Nullstelle von $q(x)$ ist ($\frac{Ax+B}{x^2+2bx+c}$ falls $x^2 + 2bx + c$ keine reelle Nullstellen hat).

Falls λ eine n -te Nullstelle von $q(x)$: $\frac{A}{(x-\lambda)} + \frac{B}{(x-\lambda)^2} + \dots + \frac{C}{(x-\lambda)^n}$

Gebietsintegral

$\iint_A 1 dA$ = Flächeninhalt von A

$\iint_A f(x, y) dA \equiv V$. des Prismas mit A als Boden und $f(x, y)$ als Deck

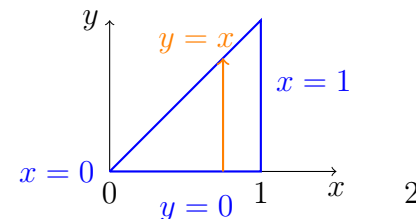
$\iiint_V 1 dV$ = Volumen von V

Beispiel Dreiecksfläche:

1. Integration links \rightarrow rechts

2. Integration unten \rightarrow oben

$$\iint_A dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{y=x} dy dx$$



Funktion von mehreren Variablen

Gradient: $\text{grad}(f(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z) = (f_x \ f_y \ f_z)^T$

Er zeigt immer in Richtung der maximalen Richtungsableitung

Richtungsableitung in Richtung \vec{e}

$$D_{\vec{e}} f(x, y, z) = \text{grad}(f(x, y, z)) \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$$

Integrabilitätsbedingung

$f_{xy} = f_{yx}$ (Satz von Schwarz)

Für $f_x(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$, $f_z = \psi(x, y, z)$, $f_z(x, y, z) = \chi(x, y, z)$

es gibt genau eine Lösung $f(x, y, z)$ falls $\varphi_y = \psi_x$, $\varphi_z = \chi_x$, $\psi_z = \chi_y$

Steigung einer Funktion zweier Variablen

$$m = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

Lineare Ersatzfunktion (2 Variablen)

$$(x_0, y_0) \rightarrow f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tangentialebene in (x_0, y_0, z_0)

Zwei Möglichkeiten:

- Lineare Ersatzfunktion

- Umformen in $f(x, y, z) = c$, $\text{grad}(f)$ als Normalvektor und (x_0, y_0, z_0) als Punkt. Dann gilt: $\text{grad}(f(x_0, y_0, z_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

Verallgemeinerte Kettenregel

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

Extremalstellen in 2 Variablen

- 1. $\text{grad}(f(x,y,z)) \stackrel{!}{=} \vec{0} \rightarrow$ Finde kritische Punkte (\rightarrow Analyse mit Hessesche Matrix)
- 2. Parametrisierung $r(t)$ der Rand des Gebiets $\Rightarrow \frac{d}{dt}f(r(t)) \stackrel{!}{=} 0$
- 3. Eckpunkte

$H_f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
 $H_f(P)$ positiv definit $\Leftrightarrow \text{EW} > 0 \Leftrightarrow P$ ist lok. Min.
 $H_f(P)$ negativ definit $\Leftrightarrow \text{EW} < 0 \Leftrightarrow P$ ist lok. Max.
 $H_f(P)$ indefinit $\Leftrightarrow \text{EW} \leq 0 \Leftrightarrow P$ ist Sattelpunkt.

Koordinatentransformationen

Gegeben \rightarrow	Kartesische	Zylindrische	Sphärische
Kartesische	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$ $y = \rho \cdot \sin(\varphi)$ $z = z$	$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ $z = r \cdot \cos(\theta)$
Zylindrische	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$	$\rho = r \cdot \sin(\theta)$ $\varphi = \varphi$ $z = r \cdot \cos(\theta)$
Sphärische	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$ $\varphi = \varphi$	$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$
Dabei $r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$			

Korrekturfaktoren:

- **Zylindrische** Koordinaten: $dx dy dz = \rho \cdot d\rho d\varphi dz$
- **Sphärische** Koordinaten: $dx dy dz = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr d\theta d\varphi$
- Allgemein \Rightarrow **Jacobi Matrix**

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \left| \det \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} \right|$
 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,q)} = \left| \det \begin{pmatrix} x_s & x_t & x_q \\ y_s & y_t & y_q \\ z_s & z_t & z_q \end{pmatrix} \right|$

Kurvenparametrisierung (\rightarrow S. 56)

Rotationsmatrix (\rightarrow S. 26):

$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
 $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
 $R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Paraboloid: Wird ein Paraboloid senkrecht zu seinen Achsen geschnitten gibt es als Schnittbild eine Ellipse bzw. eine Hyperbel

Elliptisch: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ Hyperbolisch: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$




Elliptisch: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v \cdot \cos(u) \\ b \cdot v \cdot \sin(u) \\ v^2 \end{pmatrix}$

Fläche/Ebene:

$z = f(x,y) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ $z = f(\rho,\varphi) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ f(\rho,\varphi) \end{pmatrix}$

Hyperboloid:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

 **Doppeltkegel:** $d = 0$  **Zweischalig:** $d = -1$  **Einschalig:** $d = 1$

$\vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} a\sqrt{d+s^2} \cos(t) \\ b\sqrt{d+s^2} \sin(t) \\ c \cdot s \end{pmatrix}$ s: Höhe $[-1, 1]$

Zylinder:

$\vec{r}(R,\varphi,z) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

Kugel:

$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ $\varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Ellipsoid:

$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} a \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ b \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ c \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Torus:

$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (a + b \cos(\vartheta)) \cos(\varphi) \\ (a + b \cos(\vartheta)) \sin(\varphi) \\ b \sin(\vartheta) \end{pmatrix};$$

$$e_z : f(x, y, z) = (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2$$

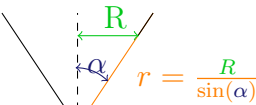
Dabei: $b = r$ - Radius Tube, $a = R$ - Abstand von Zentrum Tube bis Zentrum Torus, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$

Schraubenlinie:

$$\vec{r}(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), h\varphi)$$

Kreiskegel: Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit halben Öffnungswinkel α , Spitze im Ursprung, um z-Achse

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



Falls Spitze nicht im Ursprung:

$$r \cos(\alpha) \rightarrow h - r \cos(\alpha)$$

Zykloide:

c ist der Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt. a ist der Radius des Kreises (bei einer gewöhnlichen Zykloide gilt $c = a$).

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} at - c \cdot \sin(t) \\ a - c \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Epizykloide:

Ein Kreis mit Radius a rollt auf einem Kreis mit Radius b ab:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} (a + b) \cos(t) - a \cos((1 + \frac{b}{a})t) \\ (a + b) \sin(t) - a \sin((1 + \frac{b}{a})t) \end{pmatrix}$$

Wenn $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl ist, ist die Kurve nach einer Umdrehung geschlossen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Länge Epizykloide: } s = 8 \cdot m \cdot a \\ \text{Fläche Epizykloide: } A = m \cdot (m + 1) \cdot a^2 \cdot \pi \end{array} \right\} \text{für } m = 1 + \frac{b}{a}$$

Ist $b = a \rightarrow m = 2$: Kardioiden Ist $b = 2a \rightarrow m = 3$: Nephroide

Normaleneinheitsvektoren für Parametrisierung

Für Parametrisierungen: $\vec{m}(t)$ zur Kurve in $P = \vec{r}(t)$:

$$\vec{m}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \quad \text{nach innen} \quad \text{nach aussen: Vorzeichen tauschen}$$

$$\text{Tangente: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\text{Normale: } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittwinkel 2er Kurven in Polarkoordinaten: } \cos(\alpha) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|}$$

Evolute

Parameterdarstellung der Evolute der Kurve $\vec{r}(t)$:

$$O\vec{M}_t = \vec{r}(t) - \vec{n} = \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \vec{m}(t)$$

Mit Krümmung $\kappa(t)$ und Normaleneinheitsvektor $\vec{m}(t)$

Krümmung von Kurven

$$\kappa = \text{Krümmung} = \frac{1}{\text{Krümmungsradius}} = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \kappa > 0 \rightarrow \text{Linkskurve} \\ \kappa < 0 \rightarrow \text{Rechtskurve} \end{cases}$$

$$= \text{explizit: } \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

$$= \text{param.: } \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2)^{3/2}}$$

$$= \text{polar: } \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{((f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2)^{3/2}}$$

$$= \text{Kurven in } \mathbb{R}^3 : \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$\rho = \text{Krümmungsradius} = \frac{1}{\text{Krümmung}} = \frac{1}{\kappa}$$

Krümmungsmittelpunkt

$$x_M = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$y_M = y + \frac{(1 + y'^2)}{y''} = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Der geom. Ort aller Krümmungsmittelpunkte (x_M, y_M) nennt man Evolute
→ S.68/69:

$$= \vec{r}(t) + \frac{1}{|\kappa(t)|} \vec{m}(t) \quad (\vec{m}(t) \equiv \vec{n})$$

Bedeutung des Krümmungskreises: Der Krümmungskreis einer Kurve K im Punkt P ist derjenige Kreis, der in P die gleiche Tangentensteigung und die gleiche Krümmung wie die Kurve K hat. Es ist also der Kreis, welcher die Kurve im Punkt P am besten approximiert. Der Mittelpunkt liegt auf der Normalen zur Kurve K im Punkt P und zwar:

$$\begin{cases} \text{links von der Kurve, falls } \kappa > 0 \\ \text{rechts der Kurve, falls } \kappa < 0 \end{cases}$$

Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad y''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x} \cdot \dot{x}^2}$$

Tangente an einen Punkt (x_0, y_0)

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{x(t_0)}(x(t) - x(t_0)) = y(t)$$

$$\dot{y} = 0 \leftrightarrow \text{horizontale Tangente;} \quad \dot{x} = 0 \leftrightarrow \text{vertikale Tangente}$$

Kurve in Polarkoordinaten

$$\text{Beispiel: } r(\vartheta) = 3\vartheta \rightarrow \begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ y(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ r(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\vartheta \cos(\vartheta) \\ 3\vartheta \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ableitung/Steigung: } y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\vartheta) \sin(\vartheta) + r(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\dot{r}(\vartheta) \cos(\vartheta) - r(\vartheta) \sin(\vartheta)}$$

Tangentenvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y \quad \text{analog für } \mathbb{R}^3$$

$$\text{Tangenteneinheitsvektor: } \vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \quad \text{Tangentensteigung: } = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

\vec{T} liegt in Kurventangente, $\vec{T} \perp \vec{N}$ (\vec{N} : Normaleneinheitsvektor → Vektoranalysis)

Anwendung der Integralrechnung (→ S. 83)

Sektorfläche:

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$$

$$F_{pol} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (f(\varphi))^2 d\varphi$$

Sektorfläche (geschlossene Kurve): $F = \int_a^b \dot{x} \cdot y dt = - \int_a^b x \cdot \dot{y} dt$

Fläche zwischen Graph x-Achse:

$$F = \int_a^b f(x) dx$$

$$F = \int_a^b y(t) \cdot \dot{x}(t) dt \quad (\text{Parametrisierung})$$

Volumen eines Rotationskörpers:

$$\bullet \text{ Um } x\text{-Achse: } V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$\bullet \text{ Um } y\text{-Achse: } V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Masse:

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dV$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Flächenträgheitsmoment:

$$\bullet I_x = \iint_A y^2 dx dy$$

$$I_{xPol} = \iint_A r^2 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \mathbf{r} dr d\varphi$$

$$\bullet I_y = \iint_A x^2 dx dy$$

$$I_{yPol} = \iint_A r^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \mathbf{r} dr d\varphi$$

$$\bullet I_p = I_x + I_y = \iint_A (x^2 + y^2) dx dy \quad (\text{Polare Trägheitsmoment})$$

Massenträgheitsmoment (falls parallel einer Achse der System → Berechne bzgl. x/y/z):

$$\bullet J_z = \iiint_V \rho(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (\text{Analog für andere Achsen})$$

$$\bullet J_p = \iiint_V \rho(x, y, z) \cdot r^2 \cdot \mathbf{r} dr d\varphi dz$$

$$\bullet \theta_x = J_x = \frac{1}{2} \pi \rho \int_a^b (f(x))^4 dx \quad (\text{Rot. Kör. um } x)$$

Volumen Schwerpunkt:

$$\bullet x_S = \frac{1}{V} \iiint_V x \cdot dV \quad (\text{Analog für } y_S \text{ und } z_S)$$

$$\bullet x_S = \frac{1}{V} \iiint_V \cos(\varphi) \cdot r \cdot \mathbf{r} dr d\varphi dz \quad (\text{Für eine Rotationskörper um } x\text{-Achse. Analog für andere Achsen. Koordinaten transformation!})$$

Masse Schwerpunkt:

$$\bullet x_S = \frac{1}{m} \iiint_V \rho(x, y, z) \cdot x \cdot dV \quad (\text{Analog für } y_S \text{ und } z_S)$$

$$\bullet x_S = \frac{1}{m} \iiint_V \rho(x, y, z) \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \mathbf{r} dr d\varphi dz \quad (\text{Für eine Rotationskörper um } x\text{-Achse. Analog für andere Achsen. Koordinaten transformation!})$$

Satz von Steiner:

$$I_{zz} = I_S + md^2$$

I_S : Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt und d Abstand zwischen Achsen

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \quad (\text{Translation})$$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 J \quad (\text{Rotation})$$

Oberflächen:

$$\bullet \text{ Fläche parametrisiert in } u, v: O = \iint_B |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$$

$$\bullet \text{ Funktion: } O = \iint_B \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1} dx dy$$

- Rot. Körp. um x -Achse: $O = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$
- Rot. Körp. um x -Achse: $O = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- Polar \rightarrow Sektorfläche

Vektoranalysis

Operatoren

- $\text{grad}(f(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$
 - Länge \equiv Betrag der grössten Richtungsableitung
 - Steht senkrecht auf der Niveauläche von f
- $\text{div}(\vec{v}(x, y, z)) = \nabla \bullet \vec{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right)$
 - Falls $\text{div}(\vec{v}) = 0$
 - * \vec{v} ist **quellenfrei**
 - * Feldlinien besitzen keinen Anfangspunkt
 - * Für geschlossene Fläche $\Phi = 0$
 - Falls $\text{div}(\vec{v}) > 0$ \vec{v} besitzt **Quellen**
 - Falls $\text{div}(\vec{v}) < 0$ \vec{v} besitzt **Senken**
- $\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$
 - Falls $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$
 - * \vec{v} ist **konservativ**
 - * \vec{v} ist **wirbelfrei**
 - * Es existiere eine Funktion $f(x, y, z)$, so dass $\text{grad} f = \vec{v}$

Rechenregel

- $\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad}(g) + g \cdot \text{grad}(f)$
- $\text{div}(f \cdot \vec{v}) = f \cdot \text{div}(\vec{v}) + \text{grad}(f) \cdot \vec{v}$
- $\text{rot}(f \cdot \vec{v}) = f \cdot \text{rot}(\vec{v}) + (\text{grad}(f)) \times \vec{v}$
- $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \text{rot}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{u})$
- $\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$
- $\text{rot}(\text{grad}(f)) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{grad}(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} =: \Delta f$ (Laplace Operator)

Fluss

Fluss eines Vektorfeldes \vec{v} in richtung \vec{n} durch Fläche S .
 \vec{n} ist der **Normaleinheitsvektor** (\vec{n} **normieren!**)

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{v} \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) du dv$$

Satz von Gauss

Fluss durch die **gesamte** geschlossene Oberfläche eines Körpers **von innen nach aussen**:

$$\Phi = \iiint_V \text{div}(\vec{v}) dV$$

Arbeit

$$W = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

- Weg parametrisieren (**Richtung!** positiv Gegenuhr.) $\rightarrow \vec{r}(t)$
- $r(t)$ in \vec{v} einsetzen $\rightarrow \vec{v}(\vec{r}(t))$
- $W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$

Satz von Stokes

Arbeit von \vec{v} entlang Rand ∂S einer Fläche S

$$W = \iint_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \cdot dA$$

Der Satz von Stokes kann **nicht** angewendet werden, falls \vec{v} nicht auf die ganze Fläche definiert ist.

Potentialfelder

Falls $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ und $D(\vec{v})$ ist einfach zusammenhängend gibt es ein funktion f , so dass gilt $\text{grad}(f) = \vec{v}$

- $f = \int v_1 dx + \int v_2 dy + \int v_3 dz + C$ (Wenn ein summand mehrmals vorkommt nur einmal nehmen) heisst Potential
- $W(\gamma)$ mit γ von P_1 nach $P_2 \Rightarrow W = f(P_2) - f(P_1)$
- \vec{v} Konservativ $\Leftrightarrow \gamma$ geschlossen $\Rightarrow W(\gamma) = 0 \Leftrightarrow W(\gamma)$ ist unabhängig von Weg.

Feldlinien eines ebenen Vektorfeldes

$$y' = \frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}$$

Vektorfeld senkrecht auf einer Kurve $f(x, y)$ entspricht $\text{grad}(f(x, y))$

Differentialgleichung (\rightarrow S. 84)

Ordnung: höchste Ableitung, die in der Gleichung vorkommt

Homogene DGL: besitzt keine Störglieder, besteht nur aus Termen der gesuchten Funktion

Lineare DGL: gesuchte Funktion und ihrer Ableitung kommen nur Linearkombination vor

Konstante Koeffizienten: unabhängig von Funktion und ihren abhängigen Variablen

Resonant: rechte Seite oder Summand sind (Teil-)Lösung der homogenen DGL

Exakte DGL

Eine DGL vom Typ $g(x, y) + h(x, y) \cdot y'(x) = 0$ ist genau dann exakt, wenn $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}$ (Satz von Schwarz).

Die Lösung $u(x, y)$ erfüllt:

1. $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = g(x, y)$
2. $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = h(x, y)$

Orthogonaltrajektorien

Kurven, die alle Kurve einer gegebenen Schar orthogonal schneiden. Schar von OT entspricht Phasenporträt.

- DGL der Kurvenschar finden (durch Ableitung und Elimination von C durch Substitution)
- $y'_{OT} = -\frac{1}{f(x, y)}$ wobei $y'_{\text{Kurvenschar}} = f(x, y)$
- neue DGL $y'_{OT} = -\frac{1}{f(x, y)}$ lösen
- Trick: $y = x^C \rightarrow y' = C \cdot x^{C-1} \rightarrow x \cdot y' = C \cdot x^C = C \cdot y$

Beispiel: $Cx^2 + C = y \rightarrow Cx^2 + C - y = 0 \rightarrow 2Cx - y' = 0$. Aus der Kurvenschargleichung: $C = \frac{y}{x^2+1}$.

Einsetzen liefert: $2x \cdot \frac{y}{x^2+1} - y' = 0 \rightarrow y'_{\text{kurvenschar}} = \frac{2yx}{x^2+1}$

Envelope

Kurve, die tangent an alle Kurve einer gegebenen Schar ist.

- Kurvenschar als $f(x, y, C) = 0$ schreiben
- $f_C(x, y, C) = 0$ berechnen und nach C auflösen
- C in $f(x, y, C) = 0$ einsetzen und nach x oder y auflösen

Falls es nicht möglich ist, nach C aufzulösen, kann man versuchen, direkt das Gleichungssystem $\begin{cases} f_C(x, y, C) = 0 \\ f(x, y, C) = 0 \end{cases}$ in x und y zu lösen.

Niveulinien

Die Niveaulinien einer Funktion $g(x, y)$ sind die Lösung der folgenden DGL

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)}$$

(aus $\frac{d}{dx}g(x, y(x)) = g_x(x, y) + g_y(x, y) \cdot \dot{y} = 0$ weil $g(x, y) = C$)

Lineare DGL 1. Ordnung

DGL der Form

$$y' + a(x) \cdot y = g(x)$$

Die Lösung $y(x)$ ist die Summe der Lösung y_h der homogenen DGL $y' + a(x) \cdot y = 0$ und der Lösung y_p der inhomogenen DGL $y' + a(x) \cdot y = g(x)$ (Ansatz).

$$y_a = y_h + y_p$$

Separierbare DGL

Eine separierbare DGL hat die folgende Form

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

Die allgemeine Lösung y erfüllt

$$\int g(y) \cdot y' \cdot dx = \int f(x) dx \xrightarrow{dy=y'dx} \int g(y) dy = \int f(x) dx$$

Mit diesem Verfahren kann man homogene DGL sowie inhomogene und **nicht lineare** DGL lösen.

INTEGRATIONSKONSTANTEN NICHT VERGESSEN!

Mögliche Substitutionen

Zeil der Substitution: die DGL separierbar zu machen.

DGL	Substitutionansatz
$y'(x) = f(ax + b \cdot y(x) + c)$	$u(x) = a \cdot x + b \cdot y(x) + c$
$y'(x) = f(\frac{y}{x})$	$u(x) = \frac{y(x)}{x}$ bzw. $y(x) = x \cdot u(x)$
$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)y(x)^n$	$u(x) = y(x)^{1-n}$
$y''(x) = f(y'(x))$	$y' = \frac{dy}{dx} = u, y'' = \frac{du}{dy} \cdot u$
$y''(x) = f(y)$ oder $y''(x) = f(x, y'(x))$	$y'(x) = u(x), y''(x) = u'(x)$
$y''(x) = f(y(x), y'(x))$	$y' = u, y'' = \frac{du}{dy}u$

Ansätze für partikuläre Lösung y_p

- Variation der Konstante: $C \rightarrow C(x)$
 1. In der homogenen Lösung $C(x)$ durch C ersetzen
 2. Ableiten nach x
 3. Einsetzen in der DGL
 4. Der Term $C(x)$ muss verschwinden, bleibt nur $C'(x)$
 5. Auflösen nach $C'(x)$ und integrieren
 6. Gefundene $C(x)$ in der $y_h(x)$ einsetzen

- Ansatz der rechten Seite

Störfunktion $g(x)$	Ansatz für $y_p, A, B, \dots \in \mathbb{R}$
Konstante	Konstante $y_p = A$
Lineare Funktion	$y_p = Ax + B$
Quadratische Funktion	$y_p = Ax^2 + Bx + C$
$A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$A \cdot e^{B \cdot x}$	$y_p = C \cdot e^{b \cdot x}$

Immer **ganzen Ansatz** verwenden!

Lineare DGL n-ter Ordnung

Lineare DGL der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x)$$

Wie bei lineare DGL 1. Ordnung ist $y_{all} = y_h + y_p$.
Eine DGL n -ter Ordnung hat eine **eindeutige** Lösung, nur falls n Anfangsbedingungen gegeben sind. Sonst gibt es unendliche viele Lösungen.

Falls die DGL **homogen** ist, ist der Lösungsraum ein n -dimensional Vektorraum.

Lösung der homogenen DGL

Ansatz $y_h = e^{\lambda \cdot x} \Rightarrow$ Einsetzen in der DGL \Rightarrow charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0 = 0$$

1. Fall: $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n$ (reell): $y_1 = C_1e^{\lambda_1x}, \dots, y_n = C_ne^{\lambda_nx}$
2. Fall: $\lambda = \alpha$ ist ein k -fache Lösung von $p(\lambda)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \alpha$:
 $y_1 = C_1 \cdot e^{\alpha x}, \dots, y_r = C_r \cdot x^{r-1} \cdot e^{\alpha x}$
3. Fall $\lambda_{1/2} = a \pm ib$ ein paar konjugiert komplexe k -facher Nullstellen
 $y_1 = C_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx), \dots, y_k = C_k \cdot x^{k-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx)$
 $y_{k+1} = C_{k+1} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx), \dots, y_{2k} = C_{2k} \cdot x^{k-1}e^{ax} \sin(bx)$
cos und sin kommen immer **zusammen** vor!

Ansätze für die partikuläre Lösung (Variation der Konstanten)

- Lagrange für inhomogene DGL **zweiter** Ordnung

Sei $y_h = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ und $W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$,

$$C_1 = - \int \frac{q(x) \cdot y_2(x)}{W(x)} dx \qquad C_2 = \int \frac{q(x) \cdot y_1(x)}{W(x)} dx$$

- Ansatz für die rechte Seite: siehe Ansätze oben!
- für DGL **n-ter** Ordnung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \qquad W(x) = \det(A) \qquad W_i(x) = \det(A_1)$$

mit A_i von A gebildet wird, indem die i -ter Spalte mit $(0 \ 0 \ \dots \ q(x))^T$ auswechselt wird.

Eulersche DGL

Für Differentialgleichungen der Form $x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot x \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ oder der Form $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot \frac{y^{(n-1)}}{x} + \dots + a_1 \cdot \frac{y'}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{y}{x^n} = 0$ kann man den Ansatz

$$y_h = x^\alpha$$

benutzen $\Leftrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}, y'' = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2}, \dots$

Einsetzen \Rightarrow Indexpolynom:

1. Fall: α ist k -fache Nullstelle des Indexpolynoms:

$$y_1 = C_1 \cdot x^\alpha, y_2 = C_2 \cdot \ln|x| \cdot x^\alpha, \dots, y_k = C_n \cdot (\ln|x|)^{n-1} \cdot x^\alpha$$

2. Fall: Ist $\alpha = a \pm ib$ ein Paar konjugiert komplexe k -fache Nullstellen

$$y_1 = x^\alpha \cdot \cos(b \cdot \ln|x|), \dots, y_k = (\ln|x|)^{k-1} \cdot x^\alpha \cdot \cos(b \cdot \ln|x|)$$

$$y_{k+1} = x^\alpha \cdot \sin(b \cdot \ln|x|), \dots, y_{2k} = (\ln|x|)^{k-1} \cdot x^\alpha \cdot \sin(b \cdot \ln|x|)$$

Falls die DGL inhomogen ist, kann den Ansatz $y_p = A \cdot \ln(x)$ helfen.

Systeme von linearen DGL

DGL-System sind der Form

$$y' = A \cdot y + g(x) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y'_1 = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + g_1(x) \\ y'_2 = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + g_2(x) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Ordnung des Systems = Summe aller Ordnung einzelner DGL

1. Lösungsvariante

- Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnen (falls $\text{EW}_1 = \text{EW}_2$ siehe Lösungsvariante 2.)
- Aus Diagonalisierung kommt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\text{EV}_{\lambda_1} \cdot C_1 \cdot e^{\lambda_1 x}}_{\phi_1} + \underbrace{\text{EV}_{\lambda_2} \cdot C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}}_{\phi_2} + \dots$$

- Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \text{EV}_{\lambda_1} \cdot C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + \text{EV}_{\lambda_2} \cdot C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots$
- Fall $\lambda_1 = \lambda_2$: siehe Lösungsvariante 2

$$3. \text{ Fall } \lambda_{1/2} = a \pm ib : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \text{Re}(\phi_{1/2}) + \text{Im}(\phi_{1/2})$$

$$y_1 = e^{ax} \cdot (A \cdot \sin(b \cdot x) + B \cdot \cos(b \cdot x)), y_2 = \frac{1}{a_{12}} \cdot (y'_1 - a_{11} \cdot y_1)$$

2. Lösungsvariante (falls das System inhomogen ist)

Das System auf eine DGL höher Ordnung zurückführen:

$$\ddot{y}_1 - \text{spur}(A) \cdot \dot{y}_1 + \det(A) \cdot y_1 = 0$$

Die DGL lösen und die Lösung ins System einsetzen, um y_2 zu finden.

Falls das Systems inhomogen ist durch Ableiten und Einsetzen in eine inhomogene DGL erster Ordnung umwandeln.

Bei **nicht lineare** Systeme: erste Gleichung durch die Zweite dividieren (oder umgekehrt).

Phasenporträt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$$

bei Systeme der Form $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$ hilft, Aussehen über das System zu treffen, ohne das System zu lösen. Phasenporträt ist die Menge der Bahnen von Lösungen einer DGL.

- $\dot{x} > 0$: Trajektorie/Funktion geht in pos. Richtung der x -Achse
- $\dot{x} < 0$: Trajektorie/Funktion geht in neg. Richtung der x -Achse

Das Phasen porträt wird in ein $x - y$ Graph dargestellt (keine t -Achse!). Der wert von \dot{x} kann direkt aus dem System abgelesen werden.

Potenzreihen (\rightarrow S. 86)

Potenzreihen um den Entwicklungspunkt x_0 (bei DGL= 0) mit Koeffizienten a_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$

Folgen

Eine Folge $a(n) = f(n)$ ist...

beschränkt, falls $s_o \geq a_n \forall n, s_u \leq a_n \forall n$

monoton wachsend/fallend, falls $a_{n+1} \geq a_n \forall n$ (umgekehrt für fallend)

konvergent, falls sie monoton und beschränkt ist

Konvergenzradius (\rightarrow S. 88)

Konvergenzbereich $= x_0 \pm r$, wobei r der Konvergenzradius ist.

Taylorreihe (\rightarrow S. 89)

Die Taylorreihe ist eine, aber nicht die einzelne, Möglichkeit, um die Reihentwicklung einer Funktion zu finden.

Koeffizienten der Reihenentwicklung finden

1. Lässt sich die Funktion mit Hilfe bekannter Reihen umformen?
2. Lässt sich die Ableitung oder das Integral der Funktion mit Hilfe von Reihen darstellen?
3. Kann man die Funktion mit Hilfe von Partialbruchzerlegung trennen?
4. Lässt sich die Funktion als Produkt/Summe zweier bekannter Reihen darstellen?
5. Ist die Funktion ungerade? $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$
6. Beim Lösung von Bruch-Funktionen den Zähler auf die andere Seite packen

Potenzreihen für DGL

1. Ansatz: $y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots$
2. Ableitungen $y'(x), y''(x), \dots$ und in DGL einsetzen
3. Durch Koeffizientenvergleich $\rightarrow a_0, a_1, a_2, \dots$ bestimmen

Beispiel: $\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3+x} + C \right) \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(x/3)} + C = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3} \right)^n + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \cdot x^n + C \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$

Beispiel: Man finde eine Reihenentwicklung von $\int_0^x \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt$.

Es gilt: $\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 - \dots$ (1) und $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots$ (2).

$$\text{Es folgt: } \sqrt{1 + \cos^2(t)} \stackrel{1}{=} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots\right)^2} = \sqrt{1 + 1 - 2t^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots} \stackrel{2}{=} \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{4}t^2 + \dots\right).$$

$$\text{Dann gilt: } a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots = \int \sqrt{1 + \cos^2(t)} dt = \int_0^x \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{4}t^2 + \dots\right) dt = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 + \dots$$

$$\text{Somit } a_0 = a_2 = a_4 = 0, a_1 = \sqrt{2}, a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{12} \left(= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\right).$$