

Thermodynamik I – Lösung Rechenübung 6

Aufgabe 1

Annahmen:

- Ideales Gas
- Carnot-Prozess

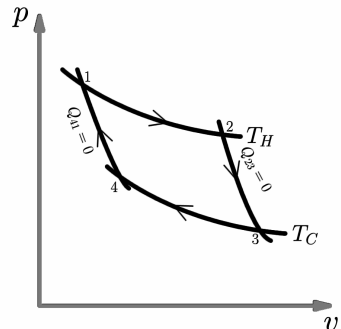
a)

$$T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{m \cdot R} = \frac{(7 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0.24 \text{ m}^3)}{(1.0 \text{ kg}) \left(\frac{8314 \text{ N} \cdot \text{m}}{28.97 \text{ kg} \cdot \text{K}} \right)} = 585.4 \text{ K}$$

da $T_H = T_1$ kann T_C mit dem Carnot-Wirkungsgrad berechnet werden:

$$T_C/T_H = 1 - \eta = 0.4 \Rightarrow$$

$$T_C = 234.16 \text{ K} = T_3 = T_4$$



Prozess 1 \Rightarrow 2: Aus Energiebilanz: $U_2 - U_1 = Q_{12} - W_{12}$.

Beim idealen Gas ist die innere Energie einzig eine Funktion der Temperatur. Da der Prozess isotherm ist, gilt $U_2 = U_1$.

Es folgt: $W_{12} = Q_{12} = 40 \text{ kJ}$

$$W_{12} = \int_1^2 p \cdot dV = \int_1^2 \frac{m \cdot R \cdot T_H}{V} \cdot dV = m \cdot R \cdot T_H \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{W_{12}}{m \cdot R \cdot T_H} = \frac{40000 \text{ J}}{(1.0 \text{ kg}) \left(\frac{8314 \text{ N} \cdot \text{m}}{28.97 \text{ kg} \cdot \text{K}} \right) (585.4 \text{ K})} \Rightarrow V_2 = 0.305 \text{ m}^3$$

Prozess 2 \Rightarrow 3:

$$\text{da } Q_{23} = 0 \Rightarrow W_{23} = m(u_2 - u_3)$$

$$\text{mit Daten aus A-22 folgt: } W_{23} = (1 \text{ kg})(423.7 - 167.0)(\text{kJ/kg}) = 256.7 \text{ kJ}$$

Prozess 3 \Rightarrow 4:

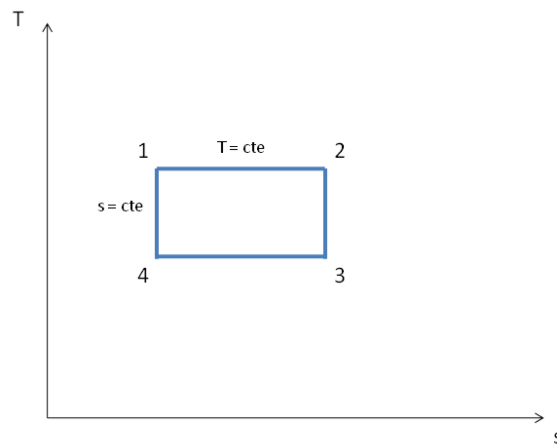
$$W_{34} = Q_{34}$$

Für reversible Prozesse gilt: $\frac{|Q_{34}|}{Q_{12}} = \frac{T_C}{T_H} \Rightarrow |Q_{34}| = 0.4 \cdot Q_{12} = 16 \text{ kJ}$ und somit:
 $Q_{34} = W_{34} = -16 \text{ kJ}$

Prozess 4 \Rightarrow 1: $Q_{41} = 0 \Rightarrow W_{41} = m(u_4 - u_1)$. Da $u_1 = u_2$ und $u_4 = u_3$ folgt für
 W_{41} : $W_{41} = -256.7 \text{ kJ}$

Aufgabe 2

a) T-s-Diagramm



b) Drücke und Volumina bei den verschiedenen Zuständen:

$$p_1 = 50 \text{ bar}$$

$$V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{p_1} = 0.0143 \text{ m}^3$$

$$p_2 = 10 \text{ bar}$$

$$V_2 = \frac{m \cdot R \cdot T_2}{p_2} = 0.0717 \text{ m}^3$$

$$p_3 = p_2 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 4.6 \text{ bar}$$

$$V_3 = \frac{m \cdot R \cdot T_3}{p_3} = 0.1253 \text{ m}^3$$

$$p_4 = p_1 \left(\frac{T_4}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 22.9 \text{ bar}$$

$$V_4 = \frac{m \cdot R \cdot T_4}{p_4} = 0.0251 \text{ m}^3$$

c) Geleistete Arbeit und Wärmeübergang bei jeder Zustandsänderung:

$$W_{12} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = m \cdot R \cdot T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 115.5 \text{ kJ}$$

$$Q_{12} = W_{12} = 115.5 \text{ kJ}$$

$$W_{23} = \frac{m \cdot R \cdot (T_3 - T_2)}{1 - n} = 35.9 \text{ kJ}$$

$$Q_{23} = 0$$

$$W_{34} = m \cdot R \cdot T_3 \cdot \ln \frac{p_3}{p_4} = -92.1 \text{ kJ}$$

$$Q_{34} = W_{34} = -92.1 \text{ kJ}$$

$$W_{41} = \frac{m \cdot R \cdot (T_1 - T_4)}{1 - n} = -35.9 \text{ kJ}$$

$$Q_{41} = 0$$

d) Nettoarbeit und zugefügte Wärme des Kreisprozesses:

$$W_{netto} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = 23.4 \text{ kJ}$$

$$Q_{zu} = Q_{12} = 115.5 \text{ kJ}$$

e) Thermischer Wirkungsgrad der Kreisprozesses:

$$\eta = \frac{W_{netto}}{Q_{zu}} = \frac{23.4 \text{ kJ}}{115.5 \text{ kJ}} = 1 - \frac{T_K}{T_H} = 20\%$$

f) Entropieänderung im Kreisprozess:

$$\Delta S_{KP} = 0$$

Aufgabe 3

a)

reversible Prozesse: $W_{P1} = Q_H - Q$ $W_{P2} = Q - Q_K$

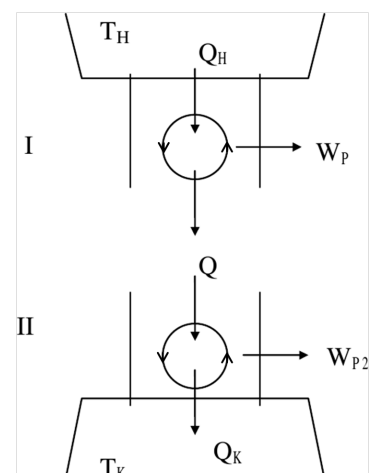
Es folgt:

$$\frac{Q}{Q_H} = \frac{T}{T_H} \quad \frac{Q_K}{Q} = \frac{T_K}{T}$$

$$Q_H - Q = Q - Q_K$$

$$\frac{T_H}{T} Q - Q = Q - \frac{T_K}{T} Q$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{T_H + T_K}{2}}}$$



$$\text{b) } \eta_I = 1 - \frac{T}{T_H} \quad \eta_{II} = 1 - \frac{T_K}{T} \quad \Rightarrow \underline{\underline{T = \sqrt{T_H T_K}}}$$

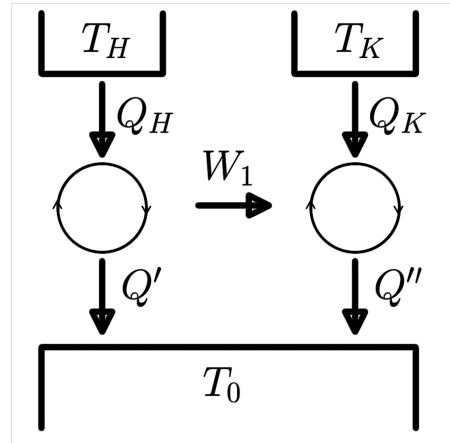
Aufgabe 4

1) Energiebilanz: Ganzes System:

$$Q_K + Q_H = Q' + Q''$$

2) Energiebilanz: Heisses System:

$$\begin{aligned} Q_H - Q' &= W_1 & Q' &= Q_H - W_1 \\ \eta_{WM} &= \frac{W_1}{Q_H} = \left(1 - \frac{T_0}{T_H}\right) \Rightarrow \\ W_1 &= \left(1 - \frac{T_0}{T_H}\right) \cdot Q_H \\ Q' &= Q_H - \left(1 - \frac{T_0}{T_H}\right) \cdot Q_H = \frac{T_0}{T_H} Q_H \end{aligned}$$



3) Energiebilanz: Kaltes System:

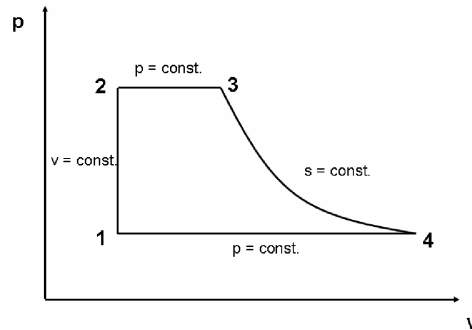
$$\begin{aligned} Q_K - Q'' &= -W_1 & Q'' &= Q_K + W_1 \\ \varepsilon_{KM} &= \frac{Q_K}{W_1} = \frac{1}{(T_0/T_K) - 1} \\ \Rightarrow W_1 &= Q_K \cdot \left(\frac{T_0}{T_K} - 1\right) \\ Q'' &= Q_K + Q_K \cdot \left(\frac{T_0}{T_K} - 1\right) = Q_K \frac{T_0}{T_K} \end{aligned}$$

2 und 3 in 1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} Q_K + Q_H &= \frac{T_0}{T_H} Q_H + Q_K \frac{T_0}{T_K} \\ Q_K \left(1 - \frac{T_0}{T_K}\right) &= Q_H \left(\frac{T_0}{T_H} - 1\right) \Rightarrow \\ \frac{Q_K}{Q_H} &= \frac{\frac{T_0}{T_H} - 1}{1 - \frac{T_0}{T_K}} = \frac{T_K \cdot T_0 - T_K \cdot T_H}{T_K \cdot T_H - T_0 \cdot T_H} = \frac{T_K [T_0 - T_H]}{T_H [T_K - T_0]} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a)



b) Zustand 1:

$$p_1 = 1 \text{ bar}, T_1 = 300 \text{ K}$$

$$\bar{u}_1 = 6939 \text{ kJ/kmol} \Rightarrow u_1 = \frac{6939 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}}{44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 157.705 \text{ kJ/kg}$$

$$u_2 = u_1 + q_{12} = 157.705 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 701.5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 859.205 \text{ kJ/kg}$$

$$\bar{u}_2 = u_2 \cdot 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 37805 \text{ kJ/kmol}$$

$$T_2 = 1072.1 \text{ K}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 3.574 \text{ bar}$$

$$T_3 = 2000 \text{ K}$$

$$\bar{u}_3 = 84185 \text{ kJ/kmol} \Rightarrow u_3 = \frac{84185 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}}{44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1913.3 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{23} = u_3 - u_2 + p_3 \cdot (v_3 - v_2)$$

$$= u_3 - u_2 + \frac{\bar{R}}{M} \cdot (T_3 - T_2) = 1913.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 859.2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + \frac{8.3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \cdot (2000 \text{ K} - 1072.1 \text{ K})$$

$$= 1229.4 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{in} = q_{12} + q_{23} = 701.5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 1229.42 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1930.9 \text{ kJ/kg}$$

c)

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\kappa-1/\kappa} = 2000 \text{ K} \cdot \left(\frac{1 \text{ bar}}{3.574 \text{ bar}} \right)^{0.1605/1.1605} = \underline{\underline{1677 \text{ K}}}$$

$$\bar{u}_4 = 67532.9 \text{ kJ/kmol} \Rightarrow u_4 = \frac{67532.9 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}}{44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1534.8 \text{ kJ/kg}$$

$$q_{out} = -q_{41} = -[u_1 - u_4 + p_4 \cdot (v_1 - v_4)]$$

$$= u_4 - u_1 + \frac{\bar{R}}{M} \cdot (T_4 - T_1) = 1534.8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 157.7 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + \frac{8.3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{0.044 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} \cdot (1677 \text{ K} - 300 \text{ K})$$

$$= 1637.3 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta = 1 - \frac{|q_{out}|}{|q_{in}|} = 1 - \frac{1637.3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}{1930.9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = \underline{\underline{15.2 \%}}$$