Lösung Herbst 04

Bemerkung: Hier wird nur die Lösung der Aufgaben angegeben, nicht aber der ganze Lösungsweg.

1. Lösung : $\varrho \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y-a)^2 + (z-b)^2 dxdydz = \varrho(\frac{2}{3} - (a+b) + a^2 + b^2)$.

2. Lösung : $r(t) = (t, 1-2t, -t)$, $t \in [0,1]$. $A = \int_0^1 (t^2, t, t-2t^2)^t \cdot (1, -2, -1)^t dt = -\frac{1}{2}$.

3. Lösung : Sei $u = y'$. Dann $u' + 2xu^2 = 0$, also $\frac{1}{u} = x^2 + C$, d.h. $y' = \frac{1}{x^2+C}$. Nach $y'(0) = 4$, folgt $C = \frac{1}{4}$. Also $y(x) = 2\arctan(2x) + C'$. Nach $y(0) = 1$, folgt $C' = 1$. Also $y(x) = 2\arctan(2x) + 1$.

4. Lösung : Char. Pol.: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, also $\lambda = 1, 2+2i, 2-2i$.
Der Ansatz $y_p = ae^{2x}$ liefert die partikuläre Lösung: $y_p = \frac{1}{4}e^{2x}$.
Also: $y = Ae^x + e^{2x}(B\cos(2x) + C\sin(2x)) + \frac{1}{4}e^{2x}$.

5. Lösung : Wir betrachten $y' = xy$. Separieren und integrieren liefert $y_h = Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Aus einem Polynomansatz erhalten wir die partikuäre Lösung: $y_p = -2 - x^2$. Also $y = -2 - x^2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$. Nach $y(0) = 0$, folgt $y = -2 - x^2 + 2e^{\frac{x^2}{2}}$.

6. Lösung : $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{3-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^{k+2}(k+1)x^k$.
Anderer Lösungsweg:

$$f(0) = \frac{1}{(-3)^2} = a_0$$

$$f'(0) = \frac{-2}{(-3)^3} = a_1$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{n+2}3^{n+2}} = n!a_n$$

liefert dasselbe.

Bitte wenden!

7. Lösung : Wir verwenden den Satz von Gauss mit $\mathrm{div}\vec{v} = 6$ und dass das Volumen $V(T)$ des Tetraeders bekannt ist ($V(T)$ ist gleich Grundfläche mal Höhe geteilt durch 3, d.h. $V(T) = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Also,

$$\int\int_{\partial T} \vec{v} \cdot \vec{n}\ dO = \int\int\int_T \mathrm{div}\vec{v}\ dV = 6V(T) = 3.$$

8. Lösung : Kugelkoord.: $\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \cos^2(\phi)}{r^2} r^2 \sin(\phi)\ d\phi d\vartheta dr = \frac{4}{9}\pi(\sqrt{2}^3 - 1)$.

9. Lösung : $f_x = (-2x+1)e^{-x^2+x-y^2}$, $f_y = (-2y)e^{-x^2+x-y^2}$.
Krit. Punkte (d.h. $f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$): $(\frac{1}{2}, 0)$.
Andere Extremalpunkte müssen auf dem Rand des Gebiets liegen. Betrachten wir nun die Funktionen $a(y) = f(0,y)$, $b(y) = f(1,y)$, $c(x) = f(x,-1)$ und $d(x) = f(x,1)$. Extremalpunkte von a sind $y = 0$ und möglicherweise Punkte des Randes, also $y = \pm 1$ (hier ist $x = 0$). b liefert die Kandidaten: $y = 0$, $y = \pm 1$ ($x = 1$). c liefert $x = 1/2$, $x = 0$ und $x = 1$ ($y = -1$), und d liefert $x = 1/2$, $x = 0$ und $x = 1$ ($y = 1$). Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir folgende globale Extrema: Glob. Max.: $e^{\frac{1}{4}}$ in $(\frac{1}{2}, 0)$.
Glob. Min.: e^{-1} in $(0,-1), (0,1), (1,-1), (1,1)$.

10. Lösung : Eigenwerte: $-1+2i$, $-1-2i$. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t)) \\ y(t) &= e^{-t}(b\cos(2t) - a\sin(2t). \end{aligned}$$

Nach Anfangsbed., $x = e^{-t}\sin(2t)$, $y = e^{-t}\cos(2t)$.