Zwischenprüfung Serie A

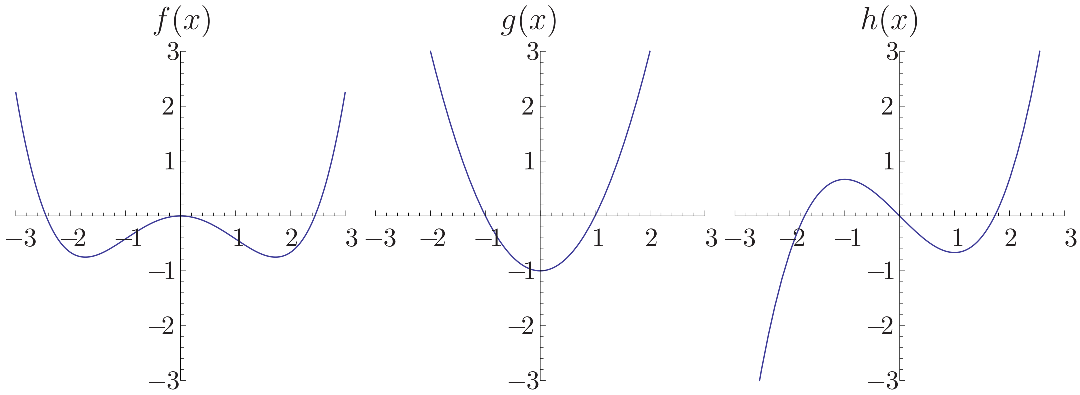
Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer: 105 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine
- Ihre Antworten tragen Sie auf dem **separaten Antwortblatt** an. Nur dieses wird abgegeben. Achten Sie darauf, dass Sie es sauber ausfüllen: Malen Sie die Felder aus, nicht nur ankreuzen. Im Zweifelsfall gilt eine Antwort als falsch. Schreiben Sie mit blauem oder schwarzem Kugelschreiber, benutzen Sie Tipp-Ex zum Korrigieren.
- Schreiben Sie **jetzt** Name, Vorname, Legi-Nummer und den oben vermerkten Prüfungstyp in Grossbuchstaben auf ihr Antwortblatt.
- Die Prüfung besteht aus 10 Multiple-Choice Aufgaben. Jede Frage hat vier bis sechs mögliche Antworten. Sie sollen die richtige(n) Antworten finden. Wenn Sie sich bei einer Frage nicht sicher sind, **raten Sie nicht**, da falsche Antworten Abzug geben.
- Es gibt wahr/falsch-Fragen, wo *mehrere Antworten* richtig sein können; und es gibt Rechenaufgaben, wo *genau eine Antwort* richtig ist.
  - Bei den **wahr/falsch-Fragen** geben Sie bei jeder Antwort an, ob sie richtig oder falsch ist. Jedes korrekt ausgemalte Feld ergibt einen (+1) Punkt, jedes falsche Feld einen Punkt Abzug (-1) und jede unbeantwortete Teilaufgabe ergibt null (0) Punkte. Wenn Sie beides (wahr und falsch) ausmalen, ergibt diese Teilaufgabe ebenso null (0) Punkte.
  - Bei den **Rechenaufgaben** ist *genau eine* von vier bis fünf Anworten richtig. Wenn Sie die richtige Antwort ausmalen, erhalten Sie vier (+4) Punkte. Wenn Sie eine falsche Antwort ausmalen, erhalten Sie einen Punkt Abzug (-1). Wenn Sie mehrere Antworten ausmalen, erhalten Sie null (0) Punkte für diese Aufgabe.
- Tragen Sie am Ende der Prüfung die Anzahl der von Ihnen ausgemalten Felder als Prüfsumme unten auf dem Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. [5 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Seien f, g, h drei Funktionen, deren Graphen wie folgt aussehen.



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) $f' = g$

b) $g' = f$

c) $h' = f$

d) $g' = h$

e) $h' = g$

---

2. [4 Punkte, nur eine Antwort möglich]

Sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

Dann ist deren Ableitung gegeben durch $f'(x) =$

a) $\dfrac{2\sqrt{x} + x}{4\sqrt{x^{3/2} + \sqrt{x}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x + x^{3/2}}}$

c) $\dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

d) $\dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x^{3/2}}}$

Siehe nächstes Blatt!

3. [4 Punkte, nur eine Antwort möglich]

Berechne das Integral $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) $1 + \dfrac{1}{e}$

b) $1 + \dfrac{1}{e^2}$

c) $1 - \dfrac{2}{e}$

d) $1 - \dfrac{2}{e^2}$

e) $1 - \dfrac{1}{e}$

---

4. [4 Punkte, nur eine Antwort möglich]

Betrachte die Spirale K, die durch

$$\vec{r}(t) = (e^{-\sqrt{2}t}\cos t, e^{-\sqrt{2}t}\sin t), \qquad 0 \leq t < \infty$$

parametrisiert ist. Was ist die Bogenlänge der ganzen Spirale?

a) $2\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

d) $3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2} + 3$

Hinweis: Die Bogenlänge einer parametrisierten Kurve ist gegeben durch $\displaystyle\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} |\dot{\vec{r}}(t)|\mathrm{d}t$.

Bitte wenden!

5. [6 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Betrachte die Ellipse K mit der folgenden Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sei k_{min} und k_{max} die minimale bzw. maximale Krümmung von K. Dann gilt:

a) $k_{\text{min}} = \frac{2}{9}$

b) $k_{\text{min}} = \frac{4}{5}$

c) $k_{\text{max}} = \frac{4}{3}$

d) $k_{\text{max}} = \frac{3}{4}$

e) Die Krümmung ist minimal im Punkt mit $t = \frac{\pi}{4}$.

f) Die Krümmung ist maximal im Punkt mit $t = 0$.

Hinweis: Die Krümmung für eine parametrisierte Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ist gegeben durch

$$k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

---

6. [4 Punkte, nur eine Antwort möglich]

Berechne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \cdot \int_1^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \cdot \arctan t}.$$

a) π

b) $\dfrac{\pi}{2}$

c) $\dfrac{2}{\pi}$

d) $\dfrac{4}{\pi}$

e) $\dfrac{16}{\pi^2}$

Hinweis: Benütze die Regel von Bernoulli-Hôpital.

Siehe nächstes Blatt!

7. [5 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Betrachte das uneigentliche Integral

$$I_\alpha = \int_{2015}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\alpha},$$

wobei $\alpha > 0$ eine Konstante ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Für $\alpha = 2$ ist $I_2 = \frac{1}{\log 2015}$.

b) Für jedes $\alpha > 1$ ist $I_\alpha = \infty$.

c) Für jedes $\alpha > 1$ konvergiert I_α zu einer endlichen reellen Zahl.

d) Für jedes $\alpha \leq 1$ ist $I_\alpha = \infty$.

e) Für jedes $\alpha \leq 1$ konvergiert I_α zu einer endlichen reellen Zahl.

Hinweis: Substitution!

---

8. [5 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig?

a) Es gibt eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3$.

b) Es gibt eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

c) Es gibt eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x$.

d) Die Funktion f hat kein globales Maximum.

e) Die Funktion f hat mindestens ein lokales Minimum.

Bitte wenden!

9. [4 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert auf dem Intervall $[a, b]$ und zweimal stetig differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig?

a) Ist $f'(a) = 0$ und f strikt konvex auf $[a, b]$, dann ist f strikt monoton steigend.

b) Ist $f'(a) < 0$ und f strikt konvex auf $[a, b]$, dann ist f strikt monoton fallend.

c) Ist $f''(a) = 0$ und f monoton steigend auf $[a, b]$, dann ist f konvex.

d) Es sei $f(a) = 0$ und $f(b) = 0$; und es gebe noch einen Punkt c mit $a < c < b$ mit $f(c) = 0$. Dann gibt es auch einen Punkt in $[a, b]$, wo die zweite Ableitung von f Null ist.

---

10. [4 Punkte, mehrere Antworten möglich]

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit stetiger zweiter Ableitung. Definiere ihr Produkt $h(x) := f(x) \cdot g(x)$. Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig?

a) Wenn f und g beide positiv und monoton steigend sind, dann ist auch h monoton steigend.

b) Wenn f negativ und monoton steigend ist, und g positiv und monoton fallend ist, dann ist h monoton steigend.

c) Sind f und g beide positiv und beide monoton steigend und beide konvex, dann ist auch h konvex.

d) Sind f und g beide monoton fallend, beide positiv, und beide konvex, dann ist h konkav.