Allgemeine Formel für die Ableitung eines Integrals

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt\right)' = f(v(x),x)\cdot v'(x) - f(u(x),x)\cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t,x)dt$$

Ist $f(t,x) = f(t)$ (also $f_x = 0$):

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = f(v(x),x)\cdot v'(x) - f(u(x),x)\cdot u'(x)$$

Beispiel

$$I(x) = \int_{\sin(x)}^{e^x+x} \sin(t)dt = ?$$

Berechne $I'(x)$:

- **Mit der Formel:**
  $v(x) = e^x + x$ $\quad v'(x) = e^x + 1$ $\quad u(x) = \sin(x)$ $\quad u'(x) = \cos(x)$
  $f(t,x) = \sin(t)$ $\quad f_x = 0$

$$I'(x) = \left(\int_{\sin(x)}^{e^x+x} \sin(t)dt\right)' = \sin(e^x + x)\cdot(e^x+1) - \sin(\sin(x))\cdot\cos(x)$$

- **Mit der Berechnung des Integrals (nicht immer möglich!):**

$$I(x) = \int_{\sin(x)}^{e^x+x} \sin(t)dt = -\cos(e^x + x) - (-\cos(\sin(x)))$$

$$I'(x) = \sin(e^x + x)\cdot(e^x+1) - \sin(\sin(x))\cdot\cos(x)$$