

Übung 5 - MIMO Einführung

1 MIMO Systeme

1.1 Systembeschreibung

1.1.1 Zustandsraumdarstellung

Ein lineares zeitinvariantes Multiple Input Multiple Output System mit m Eingangssignalen und p Ausgangssignalen wird durch folgende Zustandsraumsdarstellung beschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}\quad (1.1)$$

mit

$$x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}, y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (1.2)$$

Im Gegenteil zum SISO Systeme sind nun $u(t)$ und $y(t)$ Vektoren und nicht mehr Zahlen. Daraus folgt, dass B , C und D Matrizen (statt Vektoren/Zahlen) sind.

1.1.2 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines MIMO System lässt sich berechnen als

$$P(s) = C \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B + D. \quad (1.3)$$

Die Übertragungsfunktion ist eine $p \times m$ Matrix, deren Einträge rationale Funktionen sind:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & \dots & P_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p1}(s) & \dots & P_{pm}(s) \end{bmatrix}, \quad P_{ij}(s) = \frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}. \quad (1.4)$$

Dabei ist $P_{ij}(s)$ die Übertragungsfunktion von dem j -ten Input zu dem i -ten Output.

Bemerkung. Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist ($A \cdot B \neq B \cdot A$), muss man jetzt auf die Reihefolge aufgepasst werden. Die Kreiverstärkung ist z.B.

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) \neq C(s) \cdot P(s). \quad (1.5)$$

$T(s)$ und $S(s)$ können nicht mehr als

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (1.6)$$

berechnet werden, da die Matrixdivision nicht definiert ist. Es ergibt sich jedoch einen ähnlichen Ausdruck (Aufgabe 3 der Serie). Zusätzlich kann man zeigen, dass der fundamentale Zusammenhang

$$T(s) + S(s) = \mathbb{I} \quad (1.7)$$

gilt.

1.2 Systemanalyse

1.2.1 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität analysiert das Verhalten eines Systems in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes wenn $u(t) = 0$ (aus diesem Grund spielt hier MIMO/SISO keine Rolle). Man unterscheidet zwischen drei Fällen:

- Asymptotisch stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- (Grenz)stabil: $\|x(t)\| < \infty \forall t \geq 0$;
- Instabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$.

In diesem Fall ist $x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0$ und mit einer Transformation in der Eigenbasis der Matrix A kann man zeigen, dass die Stabilität anhand der Eigenwerte λ_i von A bestimmt werden kann:

- Asymptotisch stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$;
- (Grenz)stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i .

1.2.2 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem beliebigen Input u ein belieber Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.

Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = [B \ A \cdot B \ \dots \ A^{n-1} \cdot B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)} \quad (1.8)$$

vollen Rang n hat.

1.2.3 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} = [C^\top \ A^\top \cdot C^\top \ \dots \ (A^{n-1})^\top \cdot C^\top]^\top \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n} \quad (1.9)$$

vollen Rang n hat.

1.3 Pole und Nullstellen

Für das Finden von den Polen und Nullstellen eines MIMO Systems müssen die Minoren der Übetragsfunktionsmatrix $P(s)$ berücksichtigt werden.

Die Minoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sind die Determinante aller quadratischen Submatrizen. Der maximale Minor ist der Minor mit grösster Dimension. Daraus können Pole und Nullstellen wie folgt bestimmt werden:

Pole: Die Polen sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren von $P(s)$.

Nullstellen: Nullstellen sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers der Zähler der maximalen Minoren nach deren Normierung auf den gleichen Nenner (Polynom).

Bei MIMO Systemen sind Pole und Nullstellen einer Richtung zugeordnet. Eine Pole-Nullstelle Kürzung kann also nur stattfinden, wenn der Pol und die Nullstelle gleich sind und die gleiche Input-Output Richtung besitzen.

Die Richtungen $\delta_{\pi,i}^{\text{in,out}}$ eines Pols π_i sind so definiert, dass es gilt

$$P(s)|_{s=\pi_i} \cdot \delta_{\pi,i}^{\text{in}} = \infty \cdot \delta_{\pi,i}^{\text{out}}. \quad (1.10)$$

Analog, sind die Richtungen $\delta_{\xi,i}^{\text{in,out}}$ einer Nullstelle ξ_i so definiert, dass es gilt

$$P(s)|_{s=\xi_i} \cdot \delta_{\xi,i}^{\text{in}} = 0 \cdot \delta_{\xi,i}^{\text{out}}. \quad (1.11)$$

Die Richtungen können mit der Singularwertzerlegung (mehr dazu nächste Woche) der Matrix $P(s)$ berechnet werden.

Beispiel. Man berechne Minoren, Pole und Nullstellen folgender Übertragungsfunktion.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{(s+1)\cdot(s+3)}{s+2} \end{bmatrix}$$

- Minoren:
 - I-Ordnung: $\frac{s+2}{s+1}, \frac{(s+1)\cdot(s+3)}{s+2}, 0, 0;$
 - II-Ordnung: $s + 3.$
- Pole: Der kleinste gemeinsame Nenner aller Minoren ist

$$(s + 1) \cdot (s + 2).$$

Somit sind die Pole $\pi_i = \{-1, -2\}$.

- Nullstellen: Der Zähler des maximalen Minors normiert auf das Polynom ist

$$(s + 3) \Rightarrow \frac{(s + 3) \cdot (s + 2) \cdot (s + 1)}{(s + 2) \cdot (s + 1)}.$$

Somit sind die Nullstellen $\xi_i = \{-1, -2, -3\}$.

Beispiel. Man berechne Minoren, Pole und Nullstellen folgender Übertragungsfunktion.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \frac{2\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)} \\ 0 & \frac{s+3}{(s+1)^2} & \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}$$

- Minoren:
 - I-Ordnung: $\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2\cdot(s+1)}{(s+2)\cdot(s+3)}, 0, \frac{s+3}{(s+1)^2}, \frac{s+4}{s+1};$
 - II-Ordnung: $\frac{s+3}{(s+1)^3}, \frac{s+4}{(s+1)\cdot(s+2)} - \frac{2}{(s+2)\cdot(s+1)} = \frac{1}{s+1}, -\frac{s+4}{(s+1)^2}$
- Pole: Der kleinste gemeinsame Nenner aller Minoren ist

$$(s + 1)^3 \cdot (s + 2) \cdot (s + 3).$$

Somit sind die Pole $\pi_i = \{-1, -1, -1, -2, -3\}$.

- Nullstellen: Die Zähler des maximalen Minors normiert auf das Polynom sind

$$\begin{aligned} (s+3) &\Rightarrow \frac{(s+3)^2 \cdot (s+2)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}, \\ 1 &\Rightarrow \frac{(s+1)^2 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}, \\ -(s+4) &\Rightarrow -\frac{(s+4) \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}. \end{aligned}$$

Der grösste gemeinsame Teiler ist

$$(s+3) \cdot (s+2).$$

Somit sind die Nullstellen $\xi_i = \{-2, -3\}$.

1.4 Nyquist Theorem für MIMO Systeme

Das Nyquist Theorem kann auch auf MIMO Systeme erweitert werden. Der geschlossene Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, falls es gilt

$$n_c = n_+ + \frac{1}{2} \cdot n_0, \quad (1.12)$$

wobei:

- n_c : Umdrehungen um den Ursprung von

$$N(i \cdot \omega) = \det(\mathbb{I} + P(i \cdot \omega) \cdot C(i \cdot \omega)); \quad (1.13)$$

- n_+ : Anzahl instabile Pole;

- n_0 : Anzahl grenzstabile Pole.