

Regelungstechnik I PVK

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Vorwort

Dieses Skript wurde unter Verwendung des Buches *Analysis and Synthesis of Single-Input-Single-Output Control System* von Prof. Lino Guzzella und des zu Verfügung gestellten Materials der Vorlesung Regelungstechnik I (HS 2014) verfasst.

Es dient der Möglichkeit, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen. Für ein tieferes Verständnis verweise ich jedoch auf das Studium des oben zitierten Buches.

Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: kleine Fehler können enthalten sein.

Deshalb bin ich dankbar, wenn mir Fehler gemeldet werden, so dass ich sie korrigieren kann. Für Verbesserungsvorschläge bin ich natürlich auch offen.

Ich möchte mich bei allen Personen, die mir bei der Erstellung dieses Skriptes geholfen haben, bedanken.

Ich wünsche euch viel Spass mit Regelungstechnik I und viel Erfolg bei der Prüfung!

24. September 2017

Nicolas Lanzetti, lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Regelungstechnik und Systeme	5
1.1 Definitionen	5
1.2 Eigenschaften von Systemen	5
1.3 Schaltung von Systemen	5
1.4 Weitere Größen	6
1.5 Ziele der Regelungstechnik	6
1.6 Aufgaben	7
2 Modellierung eines dynamischen Systems	10
2.1 Allgemeines Vorgehen für die Modellierung	10
2.2 Gleichgewicht	10
2.3 Normieren	11
2.4 Linearisierung	11
2.5 Zustandsraumdarstellung	12
2.6 Signalflussbild	12
2.7 Aufgaben	13
3 Analyse linearer Systeme	21
3.1 Allgemeine Lösung der Modellgleichung	21
3.2 Lyapunov Stabilität	21
3.3 Steuerbarkeit	21
3.4 Beobachtbarkeit	22
3.5 Stabilisierbarkeit	22
3.6 I/O-Beschreibung eines Systems	22
3.7 Aufgaben	23
4 Frequenzbereich	32
4.1 Laplace Transformation	32
4.1.1 Eigenschaften der Laplace Transformation	32
4.1.2 Laplace-Transformation von einigen Funktionen	32
4.2 Übertragungsfunktion	33
4.2.1 Zustandsraumdarstellung	33
4.2.2 I/O Darstellung	33
4.2.3 Eigenschaften der Übertragungsfunktion	33
4.2.4 Minimale Ordnung	33
4.3 Inverse Laplace Transformation	34
4.4 Pole und Nullstellen	34
4.4.1 Pole	34
4.4.2 Nullstellen	35
4.5 Bounded Input Bounded Output - BIBO	35
4.5.1 Vergleich BIBO-Lyapunov Stabilität	35
4.6 Aufgaben	36
5 Frequenzantworten	43
5.1 Nyquist-Diagramm	43
5.2 Bode-Diagramm	44
5.3 Eigenschaften von asymptotisch stabilen Systemen	44
5.4 Systemidentifikation mit Hilfe der Frequenzantwort	45
5.5 Unsicherheitsmodell	45
5.6 Aufgaben	46

6 Analyse von Feedback-Systemen	55
6.1 Definitionen	55
6.2 Nyquist Theorem	55
6.3 Robustheit	56
6.4 Robuste Stabilität	57
6.5 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis	57
6.6 Statischer Nachlauffehler	58
6.7 Zeitbereich Spezifikationen (System zweiter Ordnung)	59
6.8 Frequenzbereich Spezifikationen	60
6.8.1 Nominelle Regelgüte	60
6.8.2 Robuste Regelgüte	60
6.9 Aufgaben	61
7 Feedback Control Design	74
7.1 PID Regler	74
7.2 Ziegler-Nichols	74
7.3 Loop Shaping	75
7.4 Aufgaben	76
A Mathematik	85
A.1 Matrizen	85
A.1.1 Inverse Matrix	85
A.1.2 Eigenwertproblem	85
A.2 Komplexe Analysis	85
A.2.1 Rechenregel	85
B Mechanik	86
B.1 Dynamik und Kräfte	86
B.2 Arbeit und Leistung	86
C MATLAB	87
C.1 Allgemein	87
C.2 RT-Befehle	87
C.3 Plot und Diagramme	88

1 Regelungstechnik und Systeme

1.1 Definitionen

Signal: Ein Signal ist eine Funktion der Zeit. In dem in Abbildung 1 dargestellten Regelsystem sind z.B. u und y Signalen.

System: Ein System ist ein Operator, der Signale bearbeitet. Der Block Σ in Abbildung 1 ist z.B. ein System: Der Signal u wird in y transformiert.

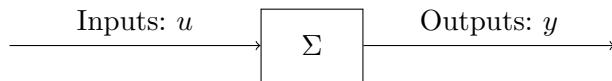


Abbildung 1: System Σ , mit Eingangssignal u und Ausgangssignal y .

1.2 Eigenschaften von Systemen

SISO/MIMO: SISO (Single Input Single Output) sind Systemen mit genau einem Eingangssignal und einem Ausgangssignal. Sonst heisst das System MIMO (Multiple Input Multiple Output).

Linear/Nichtlinear: Ein System Σ heisst linear, falls es gilt

$$\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2). \quad (1.1)$$

Sonst heisst das System nichtlinear.

Statisch/Dynamisch: In statischen Systemen hängt der Aussgangswert nur von dem aktuellen Eingang und nicht von der Vergangenheit wie in dynamischen Systemen ab. Somit werden statische Systeme durch Gleichungen und dynamische Systeme durch Differentialgleichungen beschrieben.

Zeitvariant/Zeitinvariant: Ändert sich das System mit der Zeit, dann ist es zeitvariant. Sonst wird es zeitinvariant genannt.

Ordnung des Systems: Die Ordnung des Systems entspricht der Anzahl Zustände (Pegelvariablen), die mit der Ordnung der höchsten Ableitung im System übereinstimmt.

1.3 Schaltung von Systemen

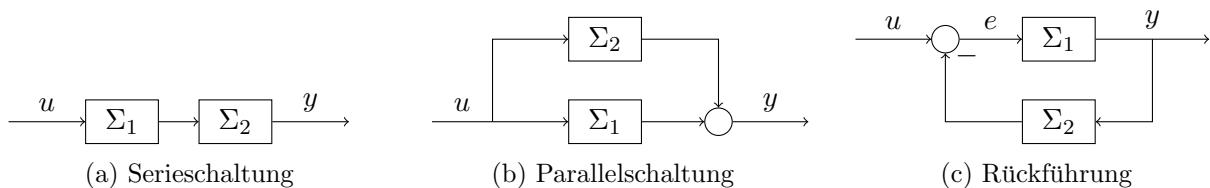


Abbildung 2: Schaltung von Systemen

Das gesamte System ist gegeben durch:

- Serieschaltung: $\Sigma_{\text{tot}} = \Sigma_2 \cdot \Sigma_1;$

- Parallelschaltung: $\Sigma_{\text{tot}} = \Sigma_2 + \Sigma_1;$
- Rückführung: $\Sigma_{\text{tot}} = (1 + \Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^{-1} \cdot \Sigma_1.$

Bemerkung. Hier wird es angenommen, dass die Systeme Σ_i einfache Verstärker (Gain) sind. Für lineare zeitinvariante Systeme wird das der Fall sein (Kapitel 4).

1.4 Weitere Größen

Störung: Eine Störung ist eine externe Beeinflussung auf der Strecke (“Plant”), z.B. Wind bei der Regelung der Geschwindigkeit eines Autos.

Rauschen: Rauschen ist eine externe Beeinflussung in der Messung einer physikalischen Grösse.

1.5 Ziele der Regelungstechnik

Die Hauptziele der Regelungstechnik sind:

- Folgeregelung (“Reference tracking”), z.B. Erhitzung eines Ofens auf eine bestimmte Temperatur.
- Strörungsunterdrückung (“Disturbance rejection”), z.B. Behaltung einer konstanten Temperatur in einem Ofen.
- Stabilisierung, z.B. Stabilisierung eines invertierten Pendels.

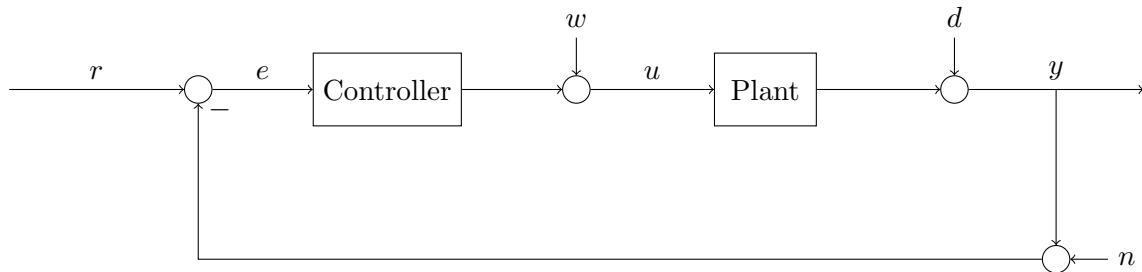


Abbildung 3: Signalflussbild eines Systems mit Rückführung (Feedback).

1.6 Aufgaben

1. Klassifizieren Sie (mit kurzer Begründung) die nachfolgenden Systeme gemäss den folgenden Kriterien: SISO/MIMO, zeitinvariant/zeitvariant, linear/nichtlinear, statisch/dynamisch, Ordnung des Systems. Die Variable $u(t)$ bezeichne die Eingangsgroesse(n), $y(t)$ die Ausgangsgroesse(n) und t die Zeit.

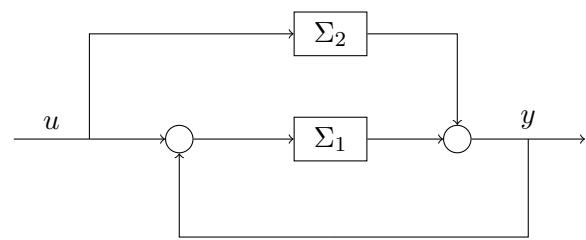
(a) $\frac{d}{dt}y(t) = a^2 \cdot y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot u(t), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = L \cdot \sin(u(t)), \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2.$

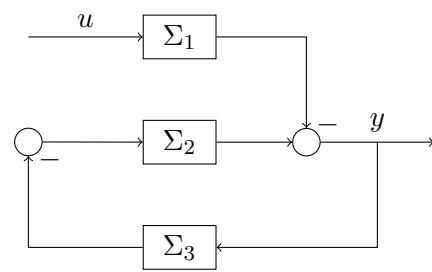
(c) $\frac{d}{dt}x(t) = t^2 \cdot x(t) + b \cdot u(t),$
 $y(t) = \cos(c) \cdot x(t) + d \cdot u(t), \quad x(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}.$

(d) $\frac{d}{dt}x(t) = M(t) \cdot x(t) + N \cdot u(t),$
 $y(t) = O \cdot x(t) + P \cdot u(t), \quad M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, N \in \mathbb{R}^{4 \times 2}, O \in \mathbb{R}^{5 \times 4}, P \in \mathbb{R}^{5 \times 2}.$

2. Finden Sie die Übertragungsfunktion $u \rightarrow y$ des folgenden Blockdiagramms.



3. Finden Sie die Übertragungsfunktion $u \rightarrow y$ des folgenden Blockdiagramms.



2 Modellierung eines dynamischen Systems

2.1 Allgemeines Vorgehen für die Modellierung

1. System und Systemgrenze identifizieren.
2. Reservoir und Pegelvariablen bestimmen (relevante Dynamik).
3. Algebraische Relationen der Flüsse in Abhängigkeit der Pegelvariablen formulieren.
4. Für alle Reservoir die entsprechende Differentialgleichung formulieren:

$$\frac{d}{dt}(\text{Inhalt}) = \sum \text{Einflüsse} - \sum \text{Ausflüsse}. \quad (2.1)$$

Bemerkung. Oft ist der Inhalt (Reservoir) eine Energie. Gleichung (2.1) ist somit:

$$\frac{d}{dt}E_{\text{tot}}(t) = P_+(t) - P_-(t),$$

wobei $P(t)$ eine Leistung ist (siehe Appendix B).

Bemerkung. Die Differentialgleichung kann auch direkt mit den Prinzipen der Physik (Mechanik, Themodynamik, Elektromagnetismus, ...) formuliert werden (siehe B).

Bemerkung. Für den Punkt 2 ist es wichtig zu erkennen, welche Variablen relevante Dynamik besitzen: Statische ("langsame") Variablen können als konstant approximiert werden, algebraische ("schnelle") Variablen können durch algebraische Funktionen ausgedrückt werden.

Als Resultat der Modellierung eines dynamischen Systems bekommt man eine sogenannte Zustandsraumdarstellung (Differentialgleichungssystem):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z(t) &= f(z(t), v(t)) \\ w(t) &= g(z(t), v(t)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei:

- $v(t) \in \mathbb{R}$: Input des Systems;
- $w(t) \in \mathbb{R}$: Output des Systems;
- $z(t) \in \mathbb{R}^n$: Vektor der Pegelvariablen (Zustand des Systems).

2.2 Gleichgewicht

Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn alle Zustandsvariablen sich nicht ändern. Also muss die Bedingung

$$\frac{d}{dt}z(t) = 0 \quad (2.3)$$

erfüllt sein. Aus (2.2) folgt:

$$f(z_e, v_e) = 0 \quad \text{und} \quad w_e = g(z_e, v_e). \quad (2.4)$$

Aus Gleichung (2.4) kann der Gleichgewichtszustand bestimmt werden.

2.3 Normieren

Ziel der Normierung ist, alle Systemvariablen dimensionslos und zu Größenordnung 1 zu transformieren. Dazu nimmt man an, dass das System in der Nähe eines Zustandes (z_0, v_0, w_0) arbeitet. Man führt die neuen $x(t), u(t), y(t)$ entsprechend ein:

$$z_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t), \quad v(t) = v_0 \cdot u(t), \quad w(t) = w_0 \cdot y(t). \quad (2.5)$$

Unter Einsetzen dieser neuen Größen in (2.2) bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= T^{-1} \cdot f(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = f_0(x(t), u(t)) \\ y(t) &= \frac{1}{w_0} \cdot g(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = g_0(x(t), u(t)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei

$$T = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0}), \quad z(t) = T \cdot x(t).$$

2.4 Linearisierung

Oft wird die Modellierung des Systems durch nichtlineare Gleichungen (f, g) beschrieben, mit denen man trotzdem nicht arbeiten kann. Deshalb muss man die gefundene Gleichungen mit Hilfe einer Taylor Entwicklung um einen Gleichgewichtspunkt linearisieren.

Man nimmt an, dass

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \delta y(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $|\delta(\dots)| \ll 1$.

Mit der Taylor Entwicklung (Vernachlässigung aller Term mit Ordnung 2 oder höher) bekommt man

$$f_0(x_e + \delta x(t), u_e + \delta u(t)) \approx \underbrace{f_0(x_e, u_e)}_{=0} + \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_e, u_e) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f_0}{\partial u}(x_e, u_e) \cdot \delta u(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei

$$A = \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} \Big|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} \Big|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.9)$$

$$b = \frac{\partial f_0}{\partial u}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (2.10)$$

$$c = \frac{\partial g_0}{\partial x}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_1} \Big|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_n} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad (2.11)$$

$$d = \frac{\partial g_0}{\partial u}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{0,1}}{\partial u} \Big|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}. \quad (2.12)$$

Bemerkung. Die Beschreibung eines Systems gemäß (2.8) zeigt die Abweichung aus der Gleichgewichtslage, der Einfachheit halber wird aber “ δ ” weggelassen.

2.5 Zustandsraumdarstellung

Die Darstellung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

eines linearen oder linearisierten Systems wird Zustandsraumdarstellung (State Space) genannt. Bei der Analyse eines Systems wird es immer mit dieser Darstellung gerechnet.

2.6 Signalflussbild

In Regelungstechnik können Systeme auch mit einem Signalflussbild dargestellt werden. Diese Darstellung wird benutzt, um das System in **Simulink** zu implementieren.

Bemerkung. Die Ordnung des Systems entspricht die Ordnung der Differentialgleichungssystem und, in dem Signalflussbild, die Anzahl Integratoren, die man benötigt, das System darzustellen.

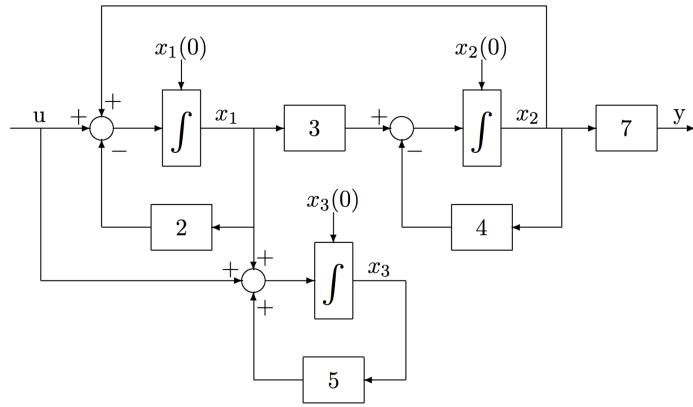
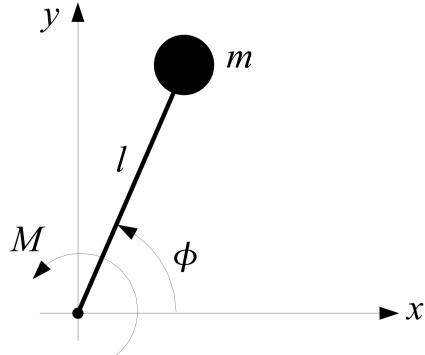


Abbildung 4: Beispiel eines Signalflussbildes.

2.7 Aufgaben

- Gegeben sei ein invertiertes Pendel gemäss Abbildung. Eine Punktmasse sei an einem als masselos und starr zu betrachtenden Stab befestigt. Der Stab sei im Koordinatenursprung drehbar gelagert. Der Winkel $\phi(t)$ soll über ein einstellbares Moment $M(t)$ geregelt werden.



Es gilt:

$$l = 0.5 \text{ m}, \quad m = 2 \text{ kg}, \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2, \quad k : \text{unbekannter Reibungskoeffizient.}$$

Die Dynamik des abgebildeten Systems sei durch die folgende Differentialgleichung ausreichend genau beschrieben:

$$M(t) = l^2 \cdot m \cdot \ddot{\phi}(t) + k \cdot \dot{\phi}(t) + m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\phi(t))$$

- Finden Sie für das System eine Zustandsraumdarstellung von der Form:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), v(t)), \quad w(t) = g(z(t), v(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad v(t), w(t) \in \mathbb{R}.$$

- Welches ist/sind die Gleichgewichtslage(n) des Systems? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Das Pendel soll um die Gleichgewichtslage bei $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ rad betrieben werden. Es ist mit typischen Winkelgeschwindigkeiten von $\dot{\phi}(t) \in [-7 \text{ rad/s}, +7 \text{ rad/s}]$ zu rechnen. Die maximale und die minimale Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}(t)$ sind $\pm 10 \text{ rad/s}$. Finden Sie eine geeignete Normierung für dieses System.
- Linearisieren Sie das normierte für kleine Auslenkungen um den Betriebspunkt aus Teilaufgabe c) und geben Sie die Systemmatrizen A, b, c, d der linearisierten Zustandsraumdarstellung an.

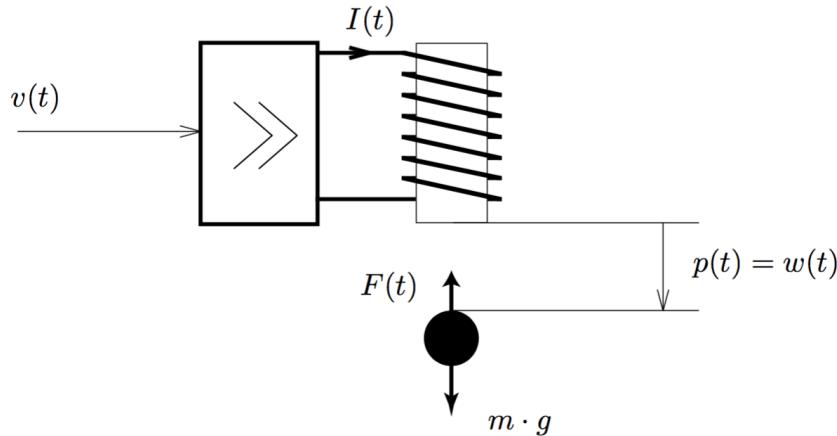
2. Das Bild unten zeigt das Prinzipschema des zu analysierenden Systems, welches aus einem raumfesten Elektromagnet und einer im Erdgravitationsfeld sich vertikal frei bewegenden ferromagnetischen Kugel mit Masse m besteht. Der Strom $I(t)$ im Magnet erzeugt eine Maxwellkraft $F(t)$ auf die Kugel, welche sich gut approximieren lässt durch die Gleichung

$$F(t) = \beta \cdot \frac{I^2(t)}{p^2(t)}$$

wobei β eine bekannte Konstante und $p(t)$ der gemessene Abstand der Kugel vom Elektromagnet ist. Der Strom $I(t)$ kann durch den Verstärker sehr schnell eingestellt werden, so dass die Vereinfachung $I(t) = \alpha \cdot v(t)$ erfüllt ist, wobei $v(t)$ das Steuersignal und α eine einstellbare Verstärkung ist. Der Einfachheit halber wird diese wie folgt gewählt

$$\alpha = \sqrt{\frac{m}{\beta}}.$$

Die Messung der Position $p(t)$ kann ebenfalls als sehr schnell und fehlerfrei angenommen werden, so dass die Grösse $w(t) = p(t)$ als Ausgangssignal zur Verfügung steht.



- (a) Wie lauten die Differentialgleichungen, welche die vertikale Bewegung der Kugel beschreiben? Benutzen Sie $v(t)$ als Input und $w(t)$ als Output des Systems. Schreiben Sie die Gleichungen in der Standardform auf, d.h. als ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{z}(t) = f(z(t), v(t)), \quad w(t) = g(z(t), v(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^2, \quad v(t), w(t) \in \mathbb{R}.$$

- (b) Die Kugel soll in einem Abstand p_e im Gleichgewicht gehalten werden. Wie gross müssen Sie das Eingangssignal v wählen, damit dies erreicht wird? Welche Werte z_{1e} und z_{2e} haben in diesem Gleichgewicht die Zustandsgrössen z_1 und z_2 ? Wie gross ist der Gleichgewichtsoutput w_e ?
- (c) Linearisieren Sie die Systemgleichungen um diesen Gleichgewichtspunkt (auf eine Normierung wird verzichtet). Stellen Sie die Systemgleichungen in der Standardform dar (Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen $\{A, b, c, d\}$).

3. Ein Ventilator erzeugt einen Luftmassenstrom $S(t)$, der von der Lüfterdrehzahl $\omega(t)$ abhängig ist:

$$S(t) = c_1 \cdot \sqrt{\omega(t)}.$$

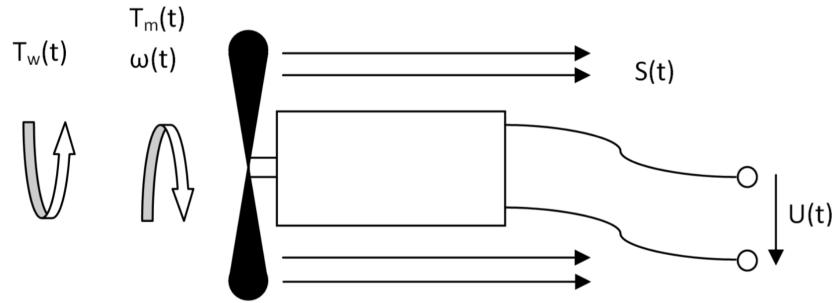
Das Widerstandsmoment $T_w(t)$ des Ventilators ist

$$T_w(t) = c_2 \cdot \omega(t)^2.$$

Der Ventilator wird von einem Elektromotor angetrieben, welcher ein Moment $T_m(t)$ erzeugt

$$T_m(t) = k_1 \cdot U(t) - k_1 \cdot k_2 \cdot \omega(t),$$

wobei $U(t)$ die Ankerspannung des Motors ist. Das System Lüfter-Motor habe eine Massenträgheit von Θ . Alle Reibungseffekte können vernachlässigt werden. Alle eingeführten Parameter ($c_1, c_2, k_1, k_2, \Theta$) sind konstant und positive reelle Zahlen ($\in \mathbb{R}^+$).



- (a) Die Ankerspannung $U(t)$ sei die Eingangsgröße des Systems, die Drehzahl $\omega(t)$ sei die Zustandsgröße des Systems und der Luftmassenstrom $S(t)$ sei die Ausgangsgröße des Systems. Leiten Sie die Systemgleichungen her. Das Resultat soll in folgender Form angegeben werden:

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = f(\omega(t), U(t)), \quad S(t) = g(\omega(t), U(t)).$$

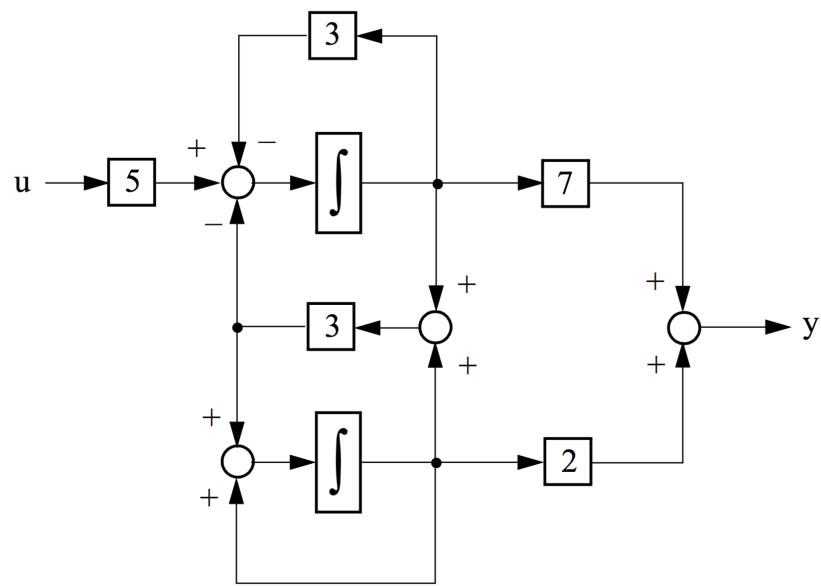
- (b) Bestimmen Sie die Drehzahl ω_e und die Ankerspannung U_e so, damit das System bei einem Luftmassenstrom von S_e im Gleichgewicht ist.
(c) Linearisieren Sie das System um den Gleichgewichtspunkt (U_e, ω_e, S_e) , auf eine vorgängige Normierung wird verzichtet. Verwenden Sie folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_e + \delta\omega(t) \\ U(t) &= U_e + \delta U(t) \\ S(t) &= S_e + \delta S(t)\end{aligned}$$

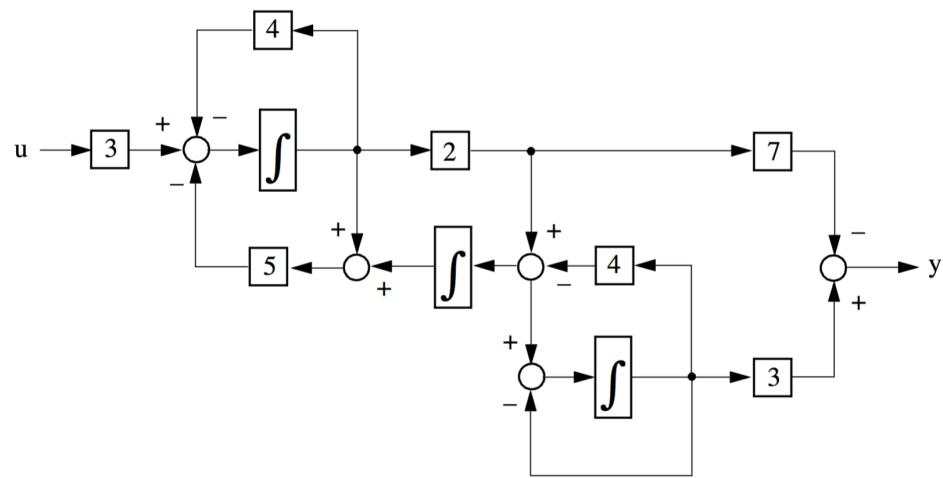
und geben Sie das Resultat in folgender Form an:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\omega(t) &= a \cdot \delta\omega(t) + b \cdot \delta U(t) \\ \delta S(t) &= c \cdot \delta\omega(t) + d \cdot \delta U(t).\end{aligned}$$

4. Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des folgenden Systems.



5. Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des folgenden Systems.



3 Analyse linearer Systeme

3.1 Allgemeine Lösung der Modellgleichung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0$$

besitzt die Lösung

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\varrho)} \cdot b \cdot u(\varrho) d\varrho,$$

wobei

$$e^{A \cdot t} = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^n}{n!}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \underbrace{\int_0^t c \cdot e^{A \cdot (t-\varrho)} \cdot b \cdot u(\varrho) d\varrho}_{\text{Faltung}} + d \cdot u(t). \quad (3.1)$$

3.2 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität analysiert das Verhalten eines Systems in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes wenn $u(t) = 0$. Man unterscheidet zwischen drei Fällen:

- Asymptotisch stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- (Grenz)stabil: $\|x(t)\| < \infty \forall t \geq 0$;
- Instabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$.

In diesem Fall ist $x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0$ und mit einer Transformation in der Eigenbasis der Matrix A kann man zeigen, dass die Stabilität anhand der Eigenwerte λ_i von A bestimmt werden kann:

- Asymptotisch stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$;
- (Grenz)stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i .

Satz. Wenn ein linearisiertes System asymptotisch stabil oder instabil ist, dann ist auch das nichtlineare System asymptotisch stabil oder instabil. Im Fall eines grenzstabilen Systems kann man trotzdem nichts über das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems sagen.

3.3 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem beliebigen Input u ein beliebiger Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.

Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = [b \ A \cdot b \ \dots \ A^{n-1} \cdot b] \quad (3.2)$$

vollen Rang hat.

Ein System heisst potentiell stabilisierbar, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Bemerkung. Manchmal spricht man auch von Erreichbarkeit. Die zwei Konzepte sind für lineare zeitinvariante Systeme äquivalent.

3.4 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

vollen Rang hat.

Ein System heisst detektierbar, falls alle nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

3.5 Stabilisierbarkeit

Ein instabiles System ist stabilisierbar, falls es potentiell stabilisierbar und detektierbar ist, d.h. alle nicht-steuerbare und/oder nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

3.6 I/O-Beschreibung eines Systems

Bis jetzt haben wir immer ein System durch eine Zustandsraumdarstellung (Space State Modell, siehe Gleichung (2.8)) beschrieben. Eine zweite Möglichkeit ist die Input/Output Beschreibung, mit der Input und Output direkt verbunden sind. Die typische Form einer solchen Beschreibung ist eine Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_0 \cdot u(t). \quad (3.4)$$

Die innnere Darstellung eines mit (3.4) beschriebenen Systems ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$c = [b_0 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0], \quad d = [0].$$

Bemerkung. Eine mit Gleichung (3.5) gefundene Zustandsraumdarstellung eines Systems ist immer vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar.

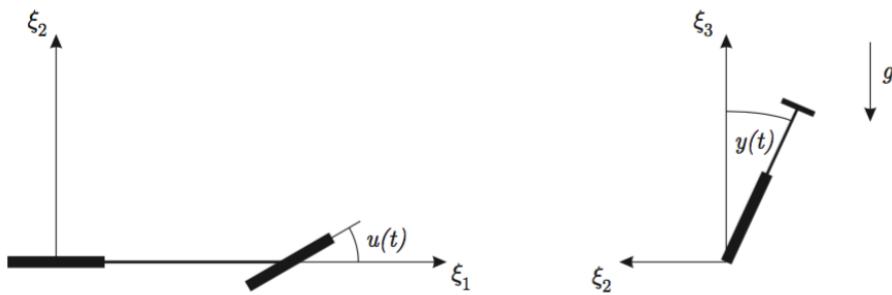
3.7 Aufgaben

1. Betrachtet wird das lineare zeitinvariante System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = [50 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

welches vereinfacht die Dynamik des Wankwinkels $y(t)$ eines fahrenden Velos in Abhängigkeit des Lenkwinkels $u(t)$ beschreibt.



- (a) Zeichnen Sie ein Signalflussbild des Systems.
- (b)
 - i. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.
 - ii. Geben Sie die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion an. Ist das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems BIBO-stabil?
- (c) Ist das System im Sinne von Lyapunov stabil, asymptotisch stabil oder instabil?
- (d) Ist das System vollständig steuerbar?
- (e) Ist das System vollständig beobachtbar?
- (f) Ausgehend von dem genannten Modell und Ihren Ergebnissen der vorigen Teilaufgaben, diskutieren Sie,
 - i. ob der Fahrer das Velo allein durch Lenken am Umkippen hindern kann,
 - ii. ob ein solcher Eingriff hierzu überhaupt nötig ist.

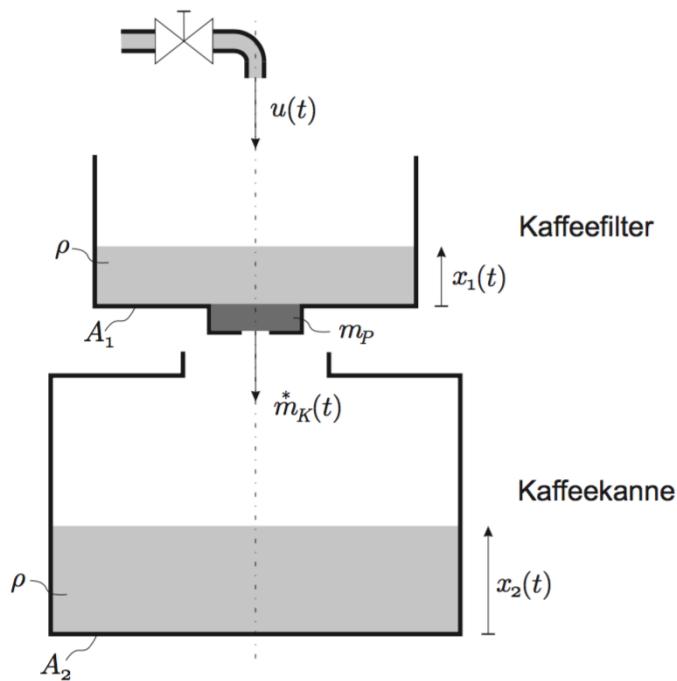
2. Betrachtet wird folgende Kaffeemaschine, bestehend aus Kaffefilter und Kaffeekanne. Die zugehörige Dynamik lässt sich vereinfacht durch

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\rho \cdot A_1 \cdot m_p} & 0 \\ \frac{\alpha}{\rho \cdot A_2 \cdot m_p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \cdot A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

beschreiben, wobei folgende Notation verwendet wurde:

- $x_1(t)$: Füllstandhöhe des Kaffefilters;
- $x_2(t)$: Füllstandhöhe der Kaffeekanne;
- $u(t)$: Massenstrom des einfließenden Wassers;
- m_p : Masse des eingefüllten Kaffepulvers;
- ρ : Dichte von Wasser und Kaffee;
- α : Kaffeedurchsatzparameter;
- A_1 : Grundfläche des Filters;
- A_2 : Grundfläche der Kanne.

- (a) Zeigen Sie mathematisch, dass das System nicht asymptotisch stabil ist. Was müsste nach erfolgreichem Lauf der Maschine mit dem Füllstand der Kanne passieren, wenn das System asymptotisch stabil wäre (ohne mathematische Begründung)?
- (b) Angenommen, der Füllstand der Kaffeekanne wird kontinuierlich gemessen. Außerdem ist das Eingangssignal (der zugeführte Wasserstrom) bekannt. Kann damit auf den Füllstand des Kaffefilters geschlossen werden (mathematische Begründung)?
- (c) Bei einer realen Kaffeemaschine kann eine volle Kaffeekanne allein durch Beeinflussung des zugeführten Wasserstroms nicht mehr geleert werden. Ihr Kollege behauptet nun, nach den Ergebnissen seiner Systemanalyse müsste dies jedoch möglich sein. Wie ist er vermutlich vorgegangen? Hat er sich verrechnet? Falls nicht: entdecken Sie bei ihm einen Denkfehler?



3. Gegeben ist eine Regelstrecke 4. Ordnung mit 3 Eingangsgrößen und 2 Ausgangsgrößen. Geben Sie die Dimensionen der Matrizen A, B, C und D der Zustandsraumdarstellung dieser Regelstrecke an. Füllen Sie dazu folgende Tabelle.

Matrix	Anzahl Zeilen	Anzahl Spalten
A		
B		
C		
D		

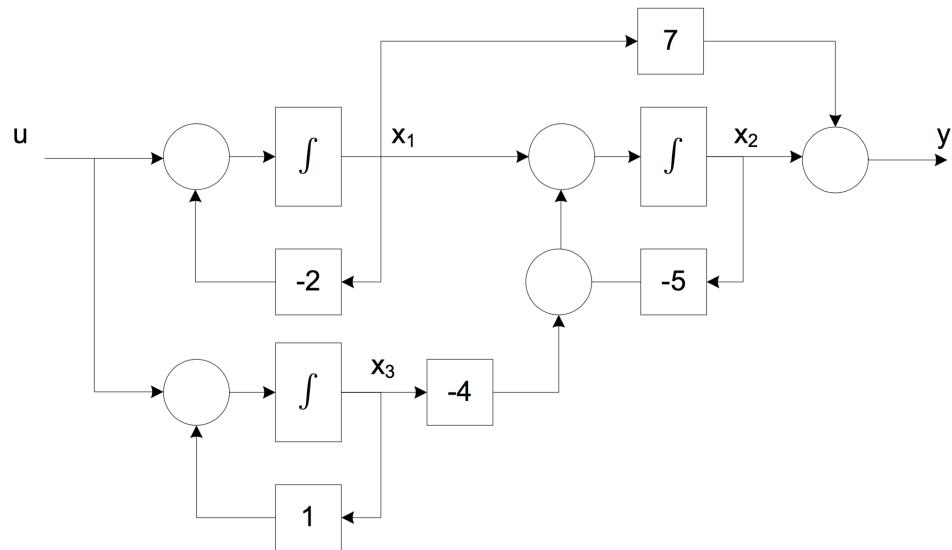
4. Gegeben sei ein lineares System als Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = [2 \ 0 \ 1].$$

- (a) Ist das gegebene System vollständig steuerbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!
- (b) Ist das gegebene System vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch!
- (c) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems! Ist es stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (d) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
- (e) Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ des Systems her! Berechnen Sie die Pole und Nullstellen!
- (f) Gegeben sei das detaillierte Signalflussbild eines anderen linearen dynamischen Systems mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ (folgendes Bild). Leiten Sie die Systemmatrizen A, b, c, d des gegebenen Systems her!



5. Man schreibe ein MATLAB Code, um die Teilaufgaben (a),(b),(c) und (e) der Aufgabe 4 in MATLAB zu lösen.

6. Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind.

- (a) $\{x_e = \frac{\pi}{3}, u_e = \frac{\pi}{6}\}$ ist eine Gleichgewichtslage des Systems

$$\dot{x} = -\cos(x) \cdot x + 2 \cdot \sin(u) \cdot u.$$

- (b) Die Differentialgleichung

$$\delta\dot{x} = -\frac{\pi}{2} \cdot \delta x + \frac{\pi}{2} \cdot \delta u$$

beschreibt das linearisierte System des nichtlinearen Systems

$$\dot{x} = -x^2 + \sin(2 \cdot x) \cdot u^2$$

um den Gleichgewichtspunkt $\{x_e = \frac{\pi}{4}, u_e = \frac{\pi}{4}\}$.

4 Frequenzbereich

4.1 Laplace Transformation

In diesen ersten drei Kapitel haben wir gesehen, dass dynamische Systeme durch Differentialgleichungen beschrieben werden können. Gleichung (3.1) ist ein mögliches aber ungünstiges Lösungsverfahren, die zu lösen. Deshalb benutzt man die Laplace Transformation, um die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umzuwandeln. Man sagt auch, dass mit der Laplace Transformation das Problem im Frequenzbereich (statt im Zeitbereich) gelöst wird.

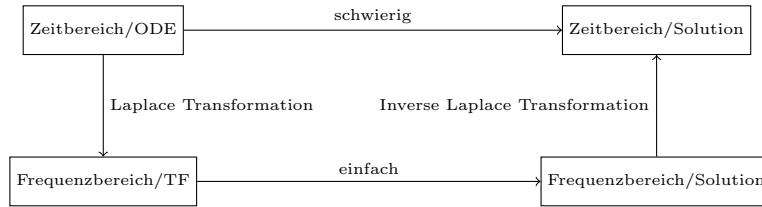


Abbildung 5: Zeitbereich und Frequenzbereich

Die Laplace Transformation ist definiert als

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt. \quad (4.1)$$

4.1.1 Eigenschaften der Laplace Transformation

Beschreibung	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
Linearität	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
Ähnlichkeit	$\frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(s \cdot a)$
Verzögerung (Totzeit)	$f(t - a)$	$e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$
Verschiebungssatz	$h(t - a) \cdot f(t - a)$	$F(s) \cdot e^{-a \cdot s}$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{a \cdot t}$	$F(s - a)$
Ableitung in t	$\frac{d}{dt} f(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
Integration in t	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Faltung in t	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Ableitung in s	$t \cdot f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Integration in s	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$	$\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$
Faltung in s	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s)$
Anfangswertstheorem	$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$
Endwertstheorem	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot F(s)$

4.1.2 Laplace-Transformation von einigen Funktionen

Beschreibung	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
Diracstoss	$\delta(t)$	1
Sprungfunktion	$h(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampe	$r(t) = h(t) \cdot t$	$\frac{1}{s^2}$
	$h(t) \cdot t^n \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
Sinus	$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cosinus	$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Sinus Hyperbolicus	$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
Cosinus Hyperbolicus	$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

4.2 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist definiert als

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (4.2)$$

4.2.1 Zustandsraumdarstellung

Mit der Laplace Transformation einer Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{aligned}$$

findet man, dass die Übertragungsfunktion durch

$$\Sigma(s) = c \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot b + d \quad (4.3)$$

gegeben ist.

4.2.2 I/O Darstellung

Mit der Laplace Transformation einer Input/Output Darstellung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_0 \cdot u(t).$$

findet man, dass die Übertragungsfunktion durch

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (4.4)$$

gegeben ist. Daraus kann man auch die Zustandsraumdarstellung einer gegebenen Übertragungsfunktion finden, indem man durch eine I/O Darstellung geht (siehe 3.6).

4.2.3 Eigenschaften der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist das Verhalten zwischen Output $Y(s)$ und Input $U(s)$. Da sie eine rationale Funktion ist kann sie als

$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - \zeta_i)}{\prod_{j=1}^m (s - \pi_j)} \quad (4.5)$$

geschrieben werden, wobei ζ_i die Nullstellen und π_i die Polen des Systems sind.

Wenn eine Nullstelle ζ_i und ein Pol π_j übereinstimmen, kann man die entsprechenden Faktoren wegkürzen. Ist eine solche Kürzung möglich, dann ist das System entweder nicht vollständig beobachtbar oder nicht vollständig steuerbar (oder beide).

Man sieht auch, dass die Pole π_j die Eigenwerte der Matrix A sind. Umgekehrt gilt aber im Allgemeinen nicht, weil eine Pol-Nullstelle Kürzung vorkommen könnte.

4.2.4 Minimale Ordnung

Die minimale Ordnung eines Systems ist definiert als

$$\min\{\text{rank}(\mathcal{O}), \text{rank}(\mathcal{R})\}. \quad (4.6)$$

Ein System ist also minimaler Ordnung, falls es sowohl vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist, d.h. wenn alle Pole π_i und alle Eigenwerte λ_i übereinstimmen (keine Kürzung). Ein System nicht-minimaler Ordnung kann mit folgenden Schritten in ein System minimaler Ordnung umgeformt werden:

1. Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ berechnen.
2. Pole-Nullstellen kürzen (nicht beobachtbare/steuerbare Anteile werden eliminiert).
3. System in Zustandsraumdarstellung bringen (durch eine I/O Darstellung).

4.3 Inverse Laplace Transformation

Aus der Definition (4.2) folgt, dass

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s), \quad (4.7)$$

d.h. mit der Übertragungsfunktion des Systems und der Laplace Transformation des Eingangssignals $u(t)$ kann man die Antwort des Systems im Frequenzbereich berechnen. Um diese in Zeitbereich zu bringen, brauchen wir die Inverse Laplace Transformation.

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung bekommt man

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k}, \quad (4.8)$$

wobei π_i bezeichnet den i -ten Pol, ϕ_i die zugehörige Vielfachheit. $\rho_{i,k}$ sind die sogenannten Residuen (Koeffizienten der Partialbruchzerlegung):

$$\rho_{i,k} = \lim_{s \rightarrow \pi_i} \frac{1}{(\phi_i - k)!} \cdot \left(\frac{d^{(\phi_i-k)}}{ds^{(\phi_i-k)}} \left(Y(s) \cdot (s - \pi_i)^{\phi_i} \right) \right). \quad (4.9)$$

Mit den Tabellen der Laplace Transformation findet man also, dass die gesuchte Antwort des Systems durch

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} \cdot h(t) \quad (4.10)$$

gegeben ist.

Bemerkung. Im Fall komplexe konjugierte Pole muss man die Faktoren $e^{\pi_i \cdot t}$ so kombinieren, dass sie zu $\sin(t)/\cos(t)$ vereinfachen. Alternativ, kann man auch die Partialbruchzerlegung so machen, dass keine komplexen Zahlen vorkommen, da auch die Inverse von $\frac{1}{s^2 \pm c^2}$ bekannt sind.

Bemerkung. Die Inverse Laplace Transformation $\sigma(t)$ einer Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ stimmt mit der Impulsantwort des Systems überein (da $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$). Da eine Multiplikation im Laplace Bereich einer Faltung im Zeit Bereich, kann man Gleichung (4.7) auch wie folgt interpretieren:

$$y(t) = \sigma(t) * u(t). \quad (4.11)$$

Diese Formel stimmt mit Gleichung (3.1) überein.

4.4 Pole und Nullstellen

4.4.1 Pole

Aus Gleichung (4.10) sieht man, dass Pole, die eine positive Realteil haben, zu einem instabilen System führen. Aus diesem Grund nennt man sie instabile Pole.

Die Pole sind auch für die Schwingungsfähigkeit verantwortlich: Komplexe konjugierte Pole sind die Ursache einer Schwingung (siehe Abbildung 6b).

4.4.2 Nullstellen

Nullstellen haben keinen Einfluss auf die Stabilität des Systems. Nullstelle mit einem positiven Realteil werden nichtminimalphasig genannt und sind Ursache eines wichtigen (unerwünschten) Verhaltens des Systems: Das System läuft, d.h. die Antwort geht zuerst in die falsche Richtung (siehe Abbildung 6a).

Nullstellen mit einem negativen Realteil werden dagegen als minimalphasig bezeichnet.

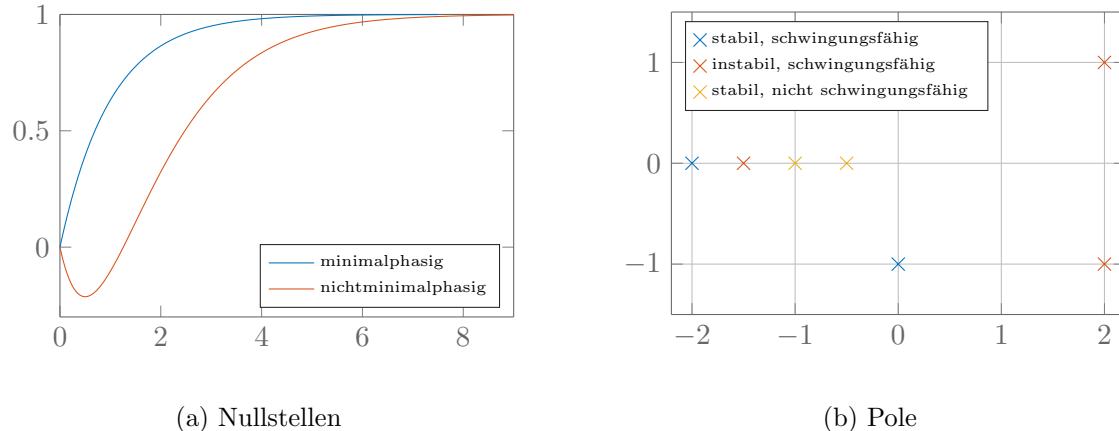


Abbildung 6: Nullstellen und Pole bestimmen das Verhalten des Systems.

4.5 Bounded Input Bounded Output - BIBO

Ein System heisst BIBO-stabil, falls allen begrenzten ($< \infty$) Inputs ein begrenzter Input ($< \infty$) entspricht.

Das ist erfüllt, falls gilt

$$\int_0^{\infty} |\sigma(t)| dt < \infty, \quad (4.12)$$

d.h. wenn das Integral des Betrags der Impulsantwort konvergiert. Das ist der Fall, wenn alle Pole π_i einen negativen Realteil haben.

4.5.1 Vergleich BIBO-Lyapunov Stabilität

Asymptotisch stabil	BIBO stabil
Grenzstabil	BIBO stabil/BIBO nicht stabil
Instabil	BIBO stabil/BIBO nicht stabil

Erklärung: Für Systeme nicht minimaler Ordnung sind die Eigenwerte und die Pole nicht gleich, d.h. instabile Eigenwerte können nicht als Pole vorkommen (Pole-Nullstellen Kürzung).

4.6 Aufgaben

1. (a) Bilden Sie die Laplace-Transformierten folgender Zeitfunktionen. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

i. $x(t) = \frac{h(t)}{2 \cdot j} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot t} - e^{-2 \cdot j \cdot t})$.

ii. $f(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq t < b \\ 0 & \text{für } t < 0 \text{ oder } t \geq b \end{cases}, \quad a, b > 0$.

- (b) Gegeben sei ein System mit der folgenden Übertragungsfunktion:

$$\Sigma(s) = \frac{s - 4}{(s + 3)^2 \cdot (s + 2)}.$$

Bestimmen Sie die Einheitssprungantwort des Systems im Zeitbereich.

2. Auf Abb. 1 sehen Sie die Sprungantwort eines Referenzsystems und verschiedener anderer Systeme. Auf Abb. 2 sehen Sie die zugehörigen Pole und Nullstellen der Systeme. Ordnen Sie die Sprungantworten ($a - e$) den Polen/Nullstellen (1 – 5) zu und begründen Sie Ihre Auswahl.

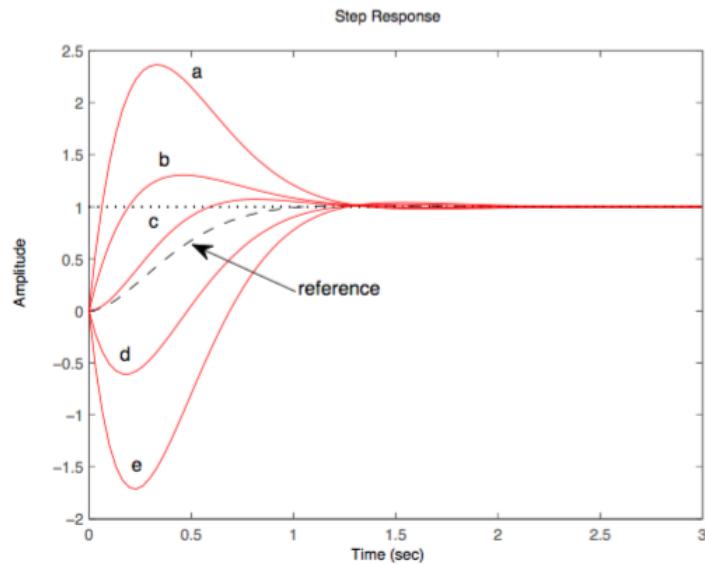


Abbildung 1: Sprungantworten

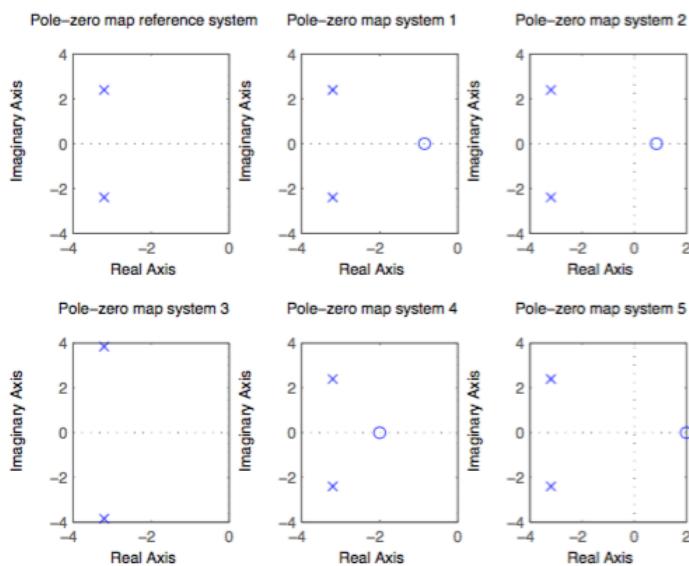


Abbildung 2: Pole (\times) und Nullstellen (\circ)

3. Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ sei gegeben:

$$\Sigma(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5 \cdot s + 6}.$$

Die Strecke wird mit dem folgenden Eingangssignal $u(t)$ angeregt:

$$u(t) = 4 \cdot \sin(3 \cdot t).$$

Berechnen Sie das resultierende Ausgangssignal $y(t)$ im Zeitbereich.

4. Ein lineares zeitinvariantes SISO-System wird mit dem Signal

$$u(t) = \sin(2 \cdot t)$$

angeregt. Die Systemantwort (in Zeitbereich) ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{4}{9} \cdot t \cdot e^{-t} + \frac{52}{405} \cdot e^{-t} + \frac{5}{2106} \cdot e^{-10 \cdot t} + \frac{1}{130} \cdot (-17 \cdot \cos(2 \cdot t) - 19 \cdot \sin(2 \cdot t)).$$

- (a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ des Systems.
- (b) Wie lautet der statische Verstärkungsfaktor des Systems?
- (c) Wie lauten die Pole des Systems?
- (d) Approximieren Sie die Anstiegszeit t_{90} des Systems indem Sie die nicht relevante Dynamik des Systems vernachlässigen.

Hinweis: Die Aufgabe darf mit MATLAB/Taschenrechner gelöst werden.

5. Wir betrachten ein System dritter Ordnung, das durch die drei skalaren Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2 \cdot x_1(t) + 3 \cdot x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 5 \cdot x_2(t) + 2 \cdot u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 3 \cdot x_3(t) + 3 \cdot u(t)\end{aligned}$$

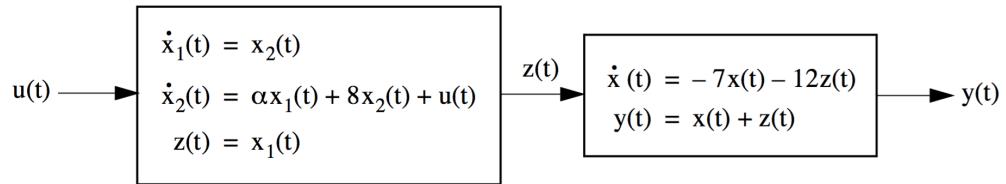
und durch die Ausgangsgleichung

$$y(t) = 7 \cdot x_1(t) - 3 \cdot x_2(t) + x_3(t)$$

beschrieben wird. Berechnen Sie die transiente Antwort des Systems für den Fall

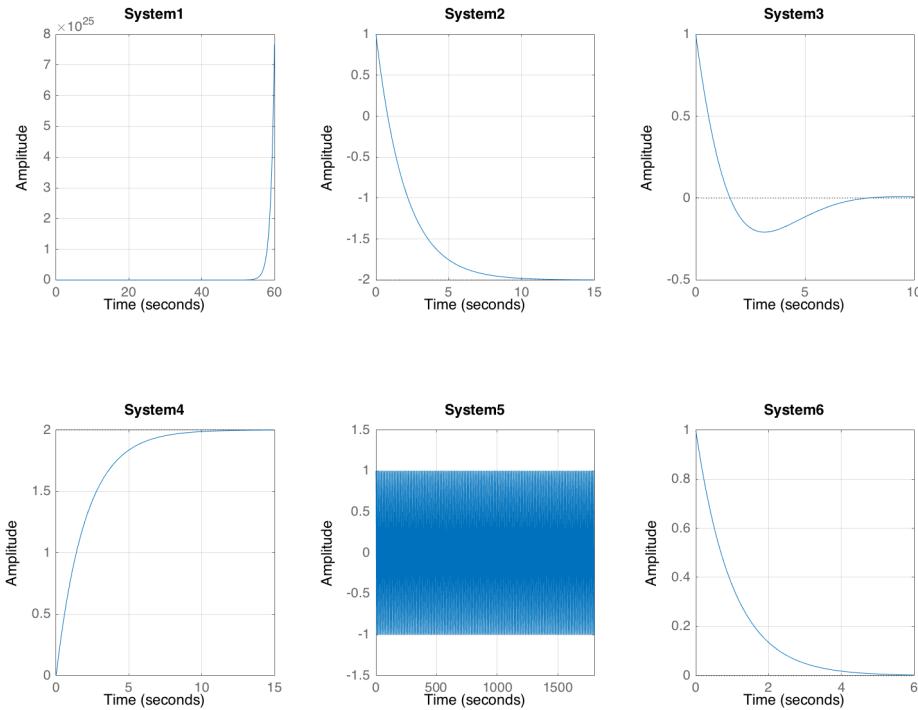
$$x(0) = [2 \quad -1 \quad 3]^T, \quad u(t) = 0 \text{ für } t \geq 0.$$

6. Wir betrachten das folgende System:



- (a) Für welchen Wert des Parameters α ist das System nicht vollständig steuerbar und/oder nicht vollständig beobachtbar?
- (b) Welche Ordnung hätte ein Zustandsraummodell minimaler Ordnung mit dem gleichen Input-Output-Verhalten wie das obige System?
- (c) Geben Sie ein Zustandsraummodell minimaler Ordnung an.

7. Folgendes Bildes zeigt die Impulsantwort von sechs linearen zeitinvarianten Systemen. Man bestimme jeweils, ob das System BIBO-stabil ist. Was kann man über die Lyapunov Stabilität schliessen?



5 Frequenzantworten

Wenn ein lineares, asymptotisch stabiles, zeitinvariantes System harmonisch angeregt wird, ist die entsprechende Antwort nach grösser Zeit wiederum durch eine harmonische Funktion gegeben, die die gleiche Frequenz ω aufweist.

Im Frequenzbereich bekommt man (mit Hilfe der Partialbruchzerlegung):

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} + \frac{\alpha \cdot s + \beta \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (5.1)$$

Mit der Inverse Laplace Transformation können wir jetzt die Antwort in Zeitbereich ausdrücken. Da das System asymptotisch stabil ist, ist der Realteil aller Pole negativ, also geht die Zeiltlösung gegen Null für grössere Zeit. Uns bleibt nur der Faktor

$$y_\infty(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \beta \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

wobei

$$m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Für die Berechnung der Parameter m und φ multipliziert man Gleichung (5.1) mit $s^2 + \omega^2$:

$$\Sigma(s) \cdot s = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k} \cdot (s^2 + \omega^2)}{(s - \pi_i)^k} + \alpha \cdot s + \beta \cdot \omega. \quad (5.2)$$

Mit $s \rightarrow j \cdot \omega$ erhält man eine Gleichung für α und β :

$$\Sigma(j \cdot \omega) = \alpha - j \cdot \beta. \quad (5.3)$$

Die Parameter α und β lassen sich daraus einfach berechnen. Die Lösung im Zeitbereich lauten somit

$$y_\infty(t) = |\Sigma(j \cdot \omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle(\Sigma(j \cdot \omega))). \quad (5.4)$$

5.1 Nyquist-Diagramm

Das Nyquist-Diagramm ist eine frequenzimplizite Darstellung der komplexen Zahl $\Sigma(j \cdot \omega)$ in der komplexen Ebene.

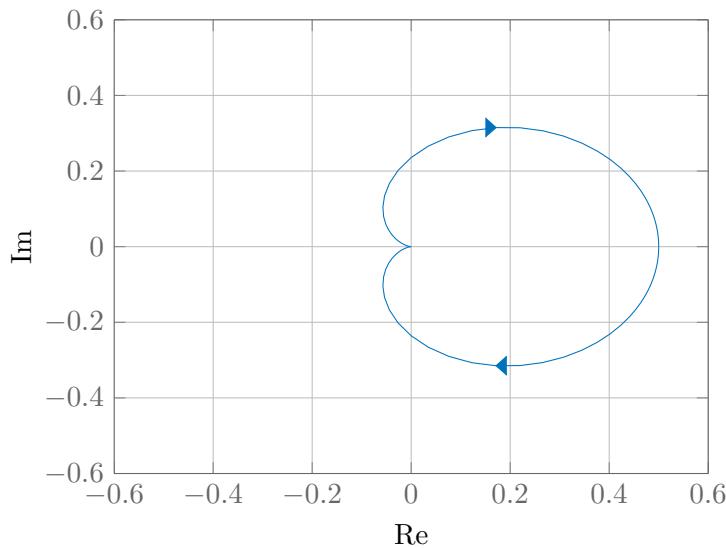


Abbildung 7: Beispiel eines Nyquist-Diagramms.

Bemerkung. Für das Zeichen einer Übertragungsfunktion können folgende Größen hilfreich sein:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Sigma(j \cdot \omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Sigma(j \cdot \omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle(\Sigma(j \cdot \omega)).$$

5.2 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine Frequenzexplizite Darstellung von $|\Sigma(j \cdot \omega)|$ und von $\angle(\Sigma(j \cdot \omega))$. Aus graphischen Grund benutzt man decibel (dB) für die Amplitude und Grade für die Phase:

$$X_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(X), \quad X = 10^{\frac{X_{\text{dB}}}{20}}. \quad (5.5)$$

Im Bode-Diagramm spielen Pole und Nullstellen eine wichtige Rolle:

- Pole verursachen einen Amplitudengradient von -20 dB/dec :

	stabil	instabil
Betrag	-20 dB/dec	-20 dB/dec
Phase	-90°	$+90^\circ$

- Nullstelle verursachen einen Amplitudengradient von $+20 \text{ dB/dec}$:

	minimalphasig	nichtminimalphasig
Betrag	$+20 \text{ dB/dec}$	$+20 \text{ dB/dec}$
Phase	90°	-90°

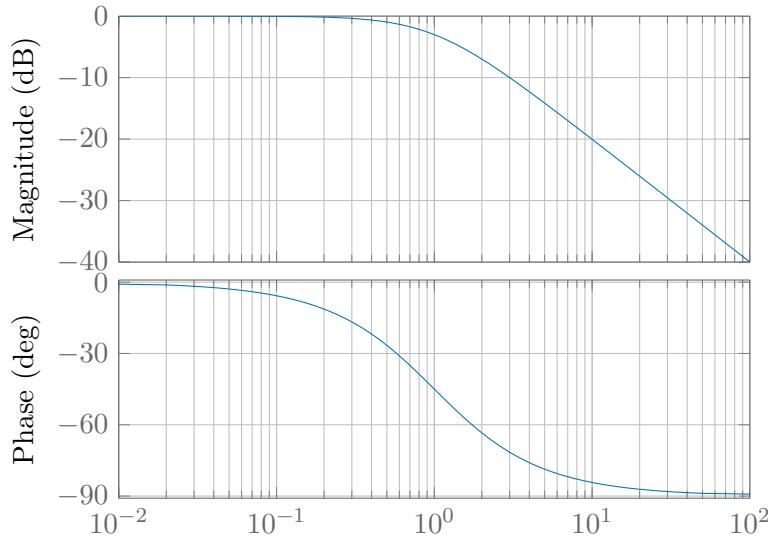


Abbildung 8: Beispiel eines Bode-Plots.

5.3 Eigenschaften von asymptotisch stabilen Systemen

Jede Übertragungsfunktion kann in folgender Form umgeschrieben werden:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-k-1} \cdot s^{n-k-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}. \quad (5.6)$$

Daraus definiert man:

- Der relative Grad ist definiert als

$$r = n - m. \quad (5.7)$$

Es gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial |\Sigma(j \cdot \omega)|_{\text{dB}}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \text{ dB/dec}. \quad (5.8)$$

- Der Typus k entspricht der Anzahl Integratoren im System. Es gilt:

$$\angle(\Sigma(0)) = \left(\text{sign} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - k \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (5.9)$$

5.4 Systemidentifikation mit Hilfe der Frequenzantwort

Mit Hilfe des Bode-Diagramms ist es möglich, die zugehörige Übertragungsfunktion zu erkennen. Dazu nimmt man an, dass es um eine Hintereinanderschaltung von Standardelementen (siehe Appendix) geht. Diese ist eine Multiplikation von Übertragungsfunktionen, die im Bode-Diagramm wegen der Decibel-Skala einer Summe entspricht.

Man geht also wie folgt vor:

1. System in Standardelemente aufteilen.
2. Charakteristische Größen dieser Elemente (τ, k, \dots) bestimmen.
3. Gefundene Übertragungsfunktionen multiplizieren.

Bemerkung. Die Bestimmung der Übertragungsfunktion ist nicht eindeutig.

5.5 Unsicherheitsmodell

Die Unsicherheit $W_2(s)$ eines Modells $\Sigma(s)$ ist so definiert, dass es $\Sigma_{\text{true}} \in \mathcal{S}$ gilt, wobei

$$\mathcal{S} = \{ \Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle(\Delta) \in [-\pi, \pi] \}. \quad (5.10)$$

Die Frequenz ω_2 ist die Frequenz, bei der die Unsicherheit 100% beträgt, d.h. es gilt

$$|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1 = 0 \text{ dB}. \quad (5.11)$$

5.6 Aufgaben

1. Gegeben sei die Strecke

$$P(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Man bestimme die Antwort des Systems nach unendlicher Zeit für die folgende Inputs:

- (a) $u(t) = 10 \cdot \cos(2 \cdot t);$
- (b) $u(t) = 4 \cdot \cos(2 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot t).$

Hinweis: Es gilt:

$$\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x).$$

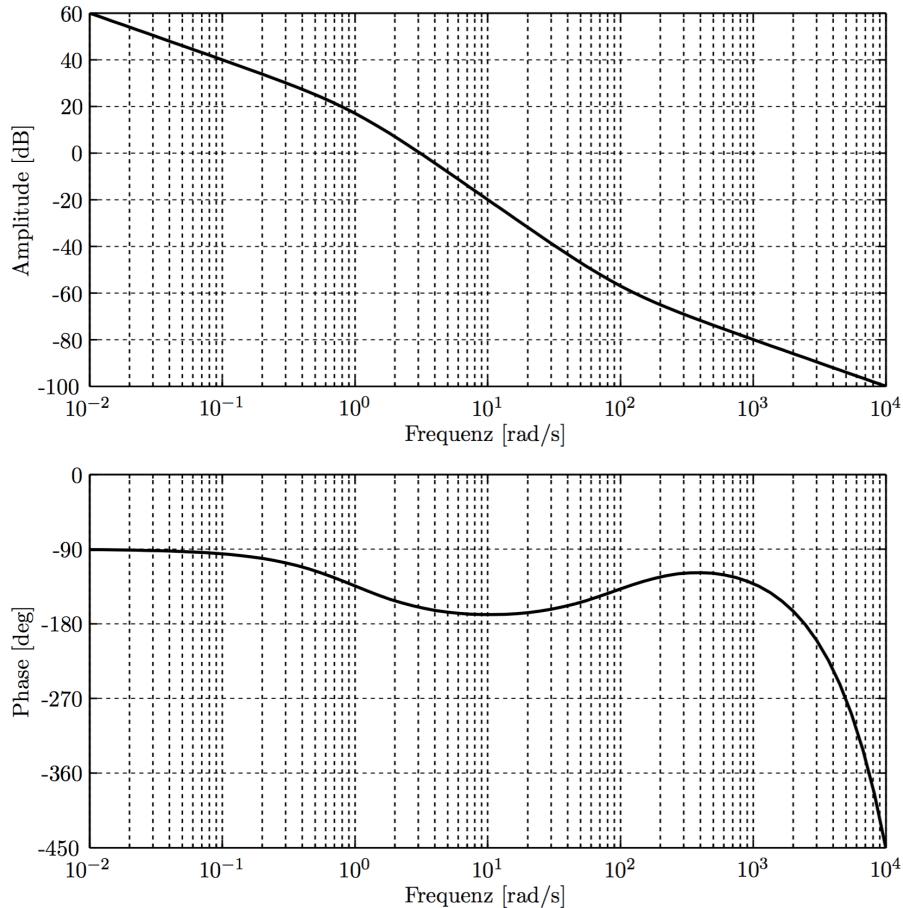
2. Gegeben sei die Strecke

$$P(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Man bestimme die Antwort des Systems nach unendlicher Zeit für die folgende Inputs:

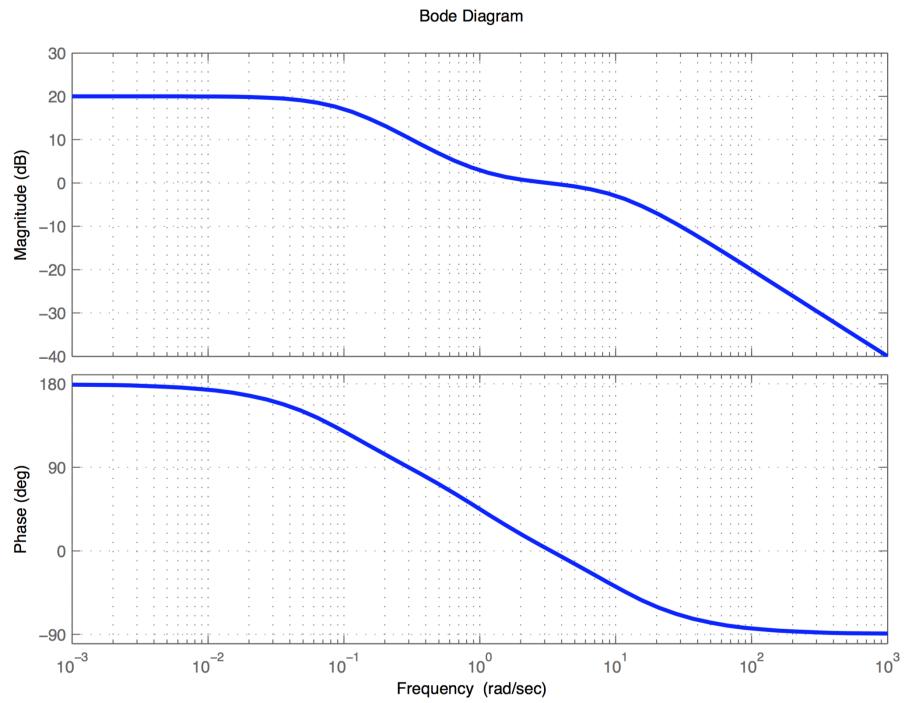
- (a) $u(t) = \cos(t) + 2 \cdot \sin(3 \cdot (t - \pi))$;
- (b) $u(t) = h(t)$.

3. Für eine Regelstrecke, die eine Totzeit in Serie aufweist, wurde folgendes Bode-Diagramm gemessen:



- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ der vermessenen Strecke.
- (b) Die Strecke wird mit einem P-Regler stabilisiert, der einen Wertebereich für die Verstärkung von $k_p \in [0.5, 100]$ hat. Zeigen Sie anhand des Nyquistkriteriums, dass immer ein asymptotisch stabiles Regelsystem resultiert.
- (c) Welche Robustheitseigenschaften (Phasenreserve, Verstärkungsreserve) hat das System für eine Reglerverstärkung von $k_p = 1$.

4. Für eine Regelstrecke wurde das folgende Bode-Diagramm gemessen:



- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ der vermessenen Strecke.
- Skizzieren Sie das Nyquist-Diagramm.

5. Das System $\Sigma(s)$ aus Aufgabe 3 wird nun mit folgenden Inputs angeregt:

- (a) $u(t) = 2 \cdot \cos(10 \cdot t);$
- (b) $u(t) = 2 \cdot \cos(0.1 \cdot t).$

Man bestimme die Antwort y_∞ des Systems.

Hinweis: Das Bode Diagramm und die Berechnungen aus der Aufgabe 3 dürfen verwendet werden.

6. Man zeichne das Nyquist-Diagramm und das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

$$\Sigma(s) = 10 \cdot \frac{0.1 \cdot s + 1}{(s + 1)^2}.$$

Man überprüfe dann das Ergebnis mit MATLAB.

7. Ordnen Sie die folgenden Kreisverstärkungen $L(s)$ den Nyquist-Diagrammen in folgender Abbildung zu und begründen Sie.

$$L_1(s) = \frac{3}{s+1}$$

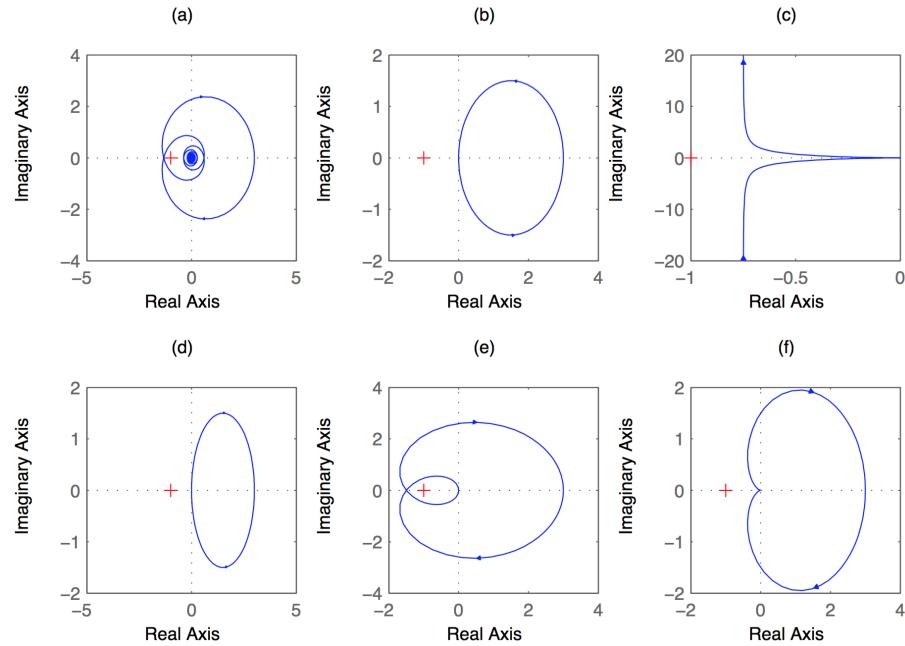
$$L_4(s) = \frac{3}{-s+1}$$

$$L_2(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$L_5(s) = \frac{3}{s+1} \cdot e^{-s}$$

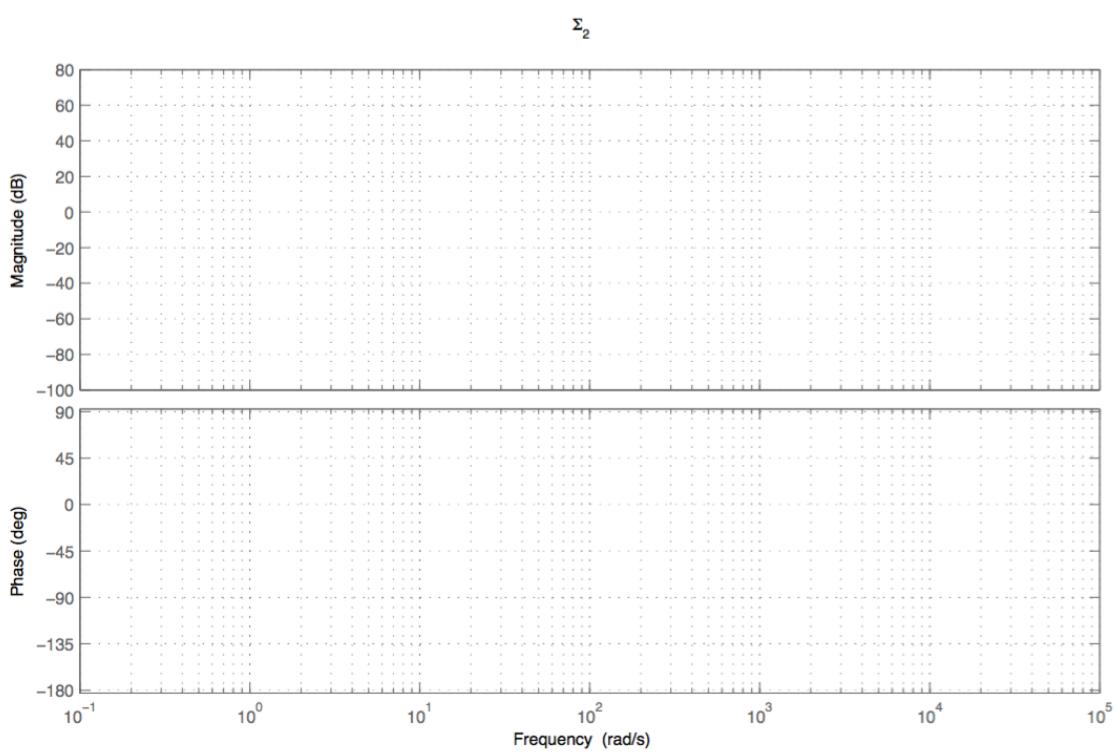
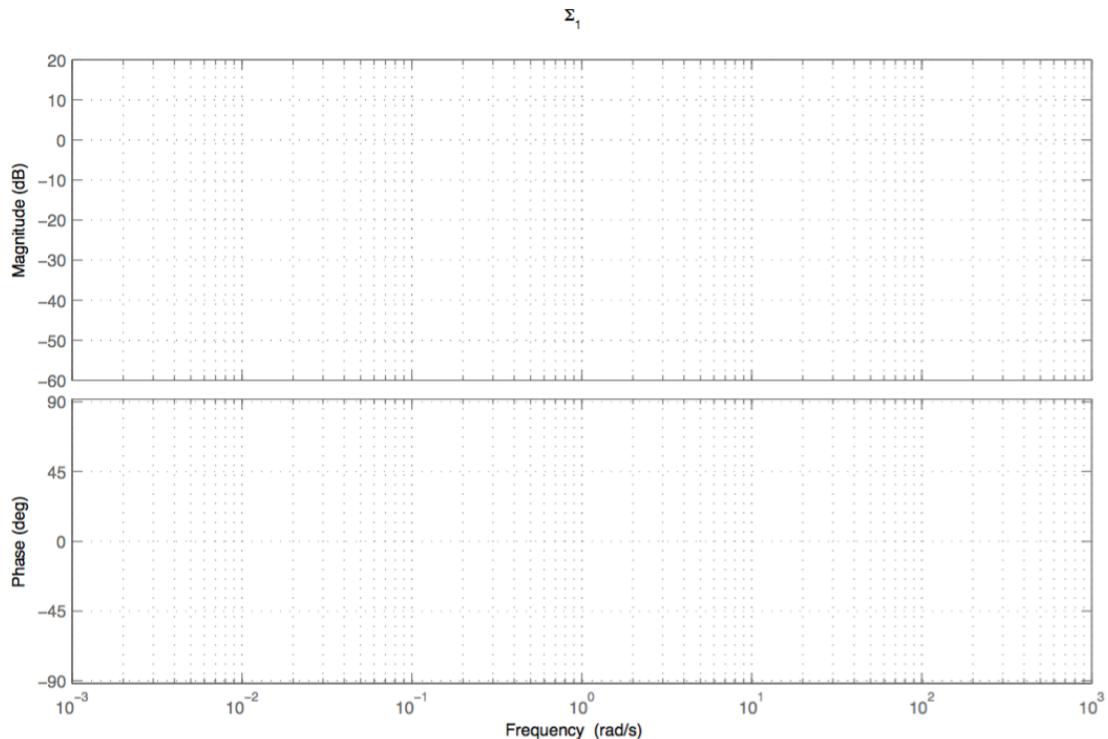
$$L_3(s) = \frac{3}{s \cdot (s+2)}$$

$$L_6(s) = \frac{-3 \cdot s + 3}{(s+1)^2}$$



8. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der folgenden Übertragungsfunktionen.

$$\Sigma_1(s) = \frac{100 \cdot s}{(10 \cdot s + 1) \cdot (s + 10)}, \quad \Sigma_2(s) = \frac{10 \cdot (s + 1000)}{s^2 + 10 \cdot s + 100}.$$



6 Analyse von Feedback-Systemen

6.1 Definitionen

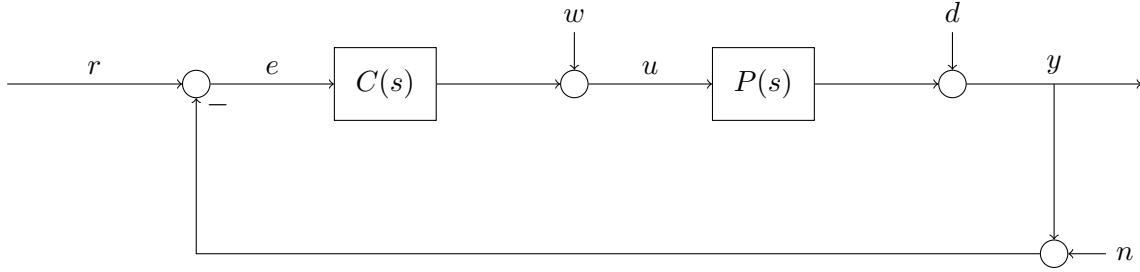


Abbildung 9: Signalflussbild eines Regelsystems mit Rückführung.

Die Kreisverstärkung ist definiert als

$$L(s) = P(s) \cdot C(s), \quad (6.1)$$

wobei $P(s)$ bezeichnet die Strecke (System) und $C(s)$ bezeichnet den Regler.
Daraus definiert man auch die Sensivität

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (6.2)$$

und die komplementäre Sensivität

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad (6.3)$$

die der Übertragungsfunktion von r nach y entspricht. Aus diesen Definitionen folgt:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (6.4)$$

Der Aussgangssignal des Systems $Y(s)$ ist gegeben durch

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s) + S(s) \cdot P(s) \cdot W(s). \quad (6.5)$$

Der Fehler $E(s)$ ist gegeben durch

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) - D(s) - N(s) - P(s) \cdot W(s)). \quad (6.6)$$

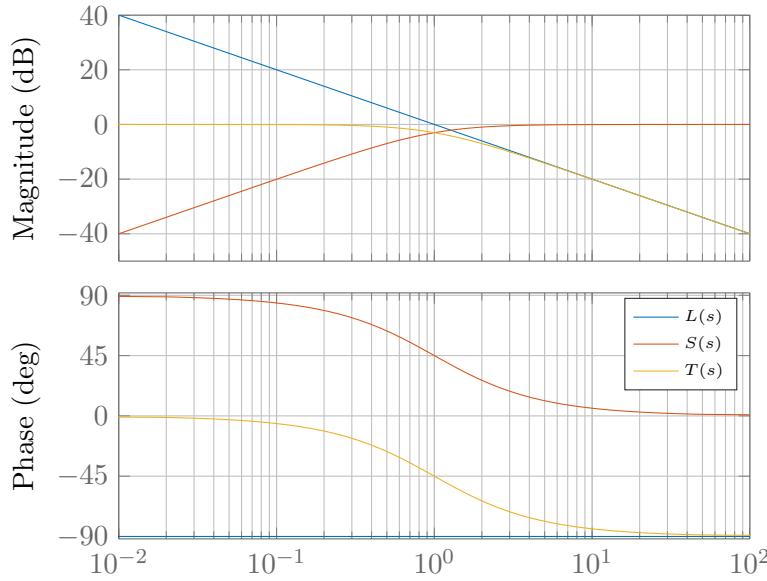
In diesen letzten zwei Definitionen $R(s), D(s), N(s), W(s)$ bezeichnen die Laplace Transformierungen der entsprechenden Signalen $r(t), d(t), n(t), w(t)$.

Zusätzlich definiert man die Durchtrittsfrequenz ω_c , für die gilt

$$|L(j \cdot \omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}. \quad (6.7)$$

6.2 Nyquist Theorem

Ein geschlossener Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil genau dann, wenn $L(s)$ das Nyquist Theorem erfüllt ist.

Abbildung 10: Typische Bode-Diagramme für $L(s), S(s), T(s)$.

Satz. $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn es

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2} \quad (6.8)$$

gilt, wobei:

- n_c : Anzahl positiver Umdrehungen von $L(s)$ (Gegenuhrzeigersinn) um den Punkt -1;
- n_+ : Anzahl instabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) > 0$;
- n_0 : Anzahl grenzstabiliger Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) = 0$.

6.3 Robustheit

Phasenreserve φ : Abstand von -180° , wenn $L(j\cdot\omega)$ in den Einheitskreis eingeht (also $\omega = \omega_c$):

$$\varphi = 180^\circ + \angle(L(j \cdot \omega_c)). \quad (6.9)$$

Verstärkungsreserve γ : Inverse des Betrags von $L(j \cdot \omega)$ wenn $\angle(L(j \cdot \omega)) = -\pi$. Die zugehörige Frequenz wird ω_γ oder ω^* genannt. Es gilt:

$$\text{Im}(L(j \cdot \omega_\gamma)) = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = |\text{Re}(j \cdot \omega_\gamma)|. \quad (6.10)$$

Minimum return Difference μ_{\min} : Minimaler Abstand von den Punkt -1:

$$\mu = \min_{\omega} |1 + L(j \cdot \omega)|. \quad (6.11)$$

Bemerkung. Der Vektor $1 + L(j \cdot \omega)$ entspricht dem Vektor, der vom Punkt -1 zu $l(j \cdot \omega)$ geht:

$$L(j \cdot \omega) = -1 + 1 + L(j \cdot \omega) \quad (6.12)$$

d.h.

$$[\text{Vektor Ursprung} - L(j \cdot \omega)] = [\text{Vektor Ursprung} - \text{Punkt } -1] + [\text{Vektor Punkt } -1 - L(j \cdot \omega)]. \quad (6.13)$$

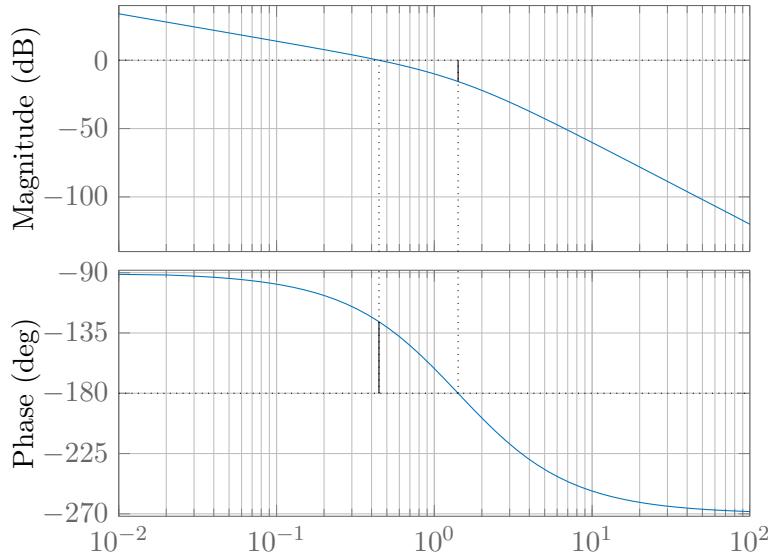


Abbildung 11: $\omega_c, \omega_\gamma, \varphi, \gamma$ können auch aus dem Bode-Diagramm gelesen werden.

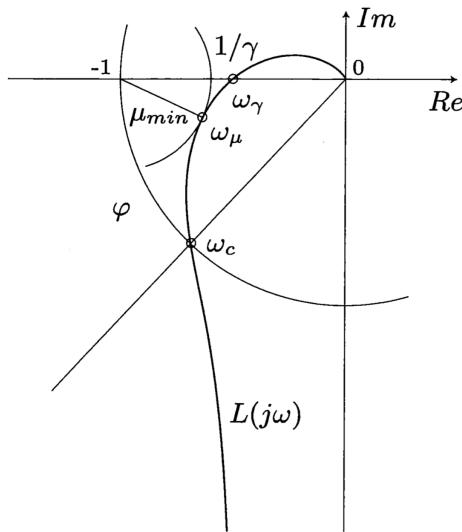


Abbildung 12: μ, φ, γ können auch aus dem Bode-Diagramm gelesen werden.

6.4 Robuste Stabilität

Mit dem Nyquist-Theorem (siehe 6.2) haben wir gesehen, wie man die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beurteilen kann. In der Praxis muss man aber noch berücksichtigen, dass das Modell $L(s)$ nicht perfekt ist. Also muss zusätzlich gelten:

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty]. \quad (6.14)$$

Anders gesagt, muss man garantieren, dass die reale Kreisverstärkung gleichviele Umdrehungen um den Punkt -1 wie unseres Modells $L(s)$ macht.

6.5 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis

Ziel der Regelungstechnik ist die Auslegung eines Reglers. Bevor man das macht, muss man zuerst überprüfen, ob man das System regeln lässt. Neben der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

(siehe 3.5) gibt es zusätzliche Bedingungen für die Durchtrittsfrequenz ω_c , die erfüllt werden müssen, um das System regeln zu können. Für die Durchtrittsfrequenz muss gelten:

$$\max(10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}) < \omega_c < \min(0.5 \cdot \omega_{\zeta^+}, 0.1 \cdot \omega_n, 0.5 \cdot \omega_{\text{delay}}, 0.2 \cdot \omega_2), \quad (6.15)$$

wobei:

- $\omega_{\pi^+} = \text{Re}(\pi^+)$: Dominanter (grösster mit $\text{Re}(\pi) > 0$) instabiler Pol;
- $\omega_{\zeta^+} = \text{Re}(\zeta^+)$: Dominante (kleinste mit $\text{Re}(\zeta) > 0$) nichtminimalphasige Nullstelle;
- ω_d : Maximale Störungsfrequenz im System;
- ω_n : Minimale Rauschenfrequenz im System;
- ω_2 : Frequenz mit 100% Unsicherheit ($|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1$),
- $\omega_{\text{delay}} = \frac{1}{T_{\text{delay}}}$: Grösste Totzeit im System.

Bemerkung. Die Faktoren in Gleichung (6.15) sind nur Faustregeln: Es gibt deshalb keine richtige oder falsche Angaben.

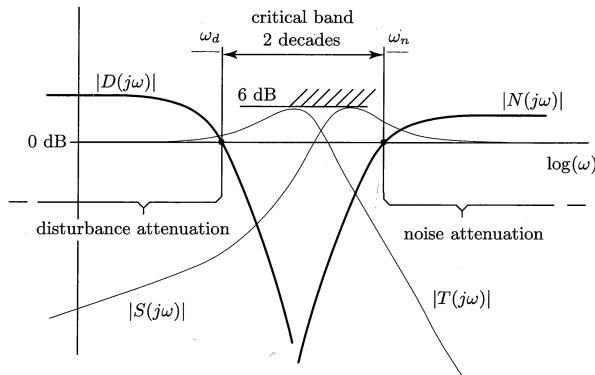


Abbildung 13: Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis.

6.6 Statischer Nachlauffehler

Der statische Fehler ist definiert als

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t). \quad (6.16)$$

Mit dem Endwerttheorem erhält man

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot E(s), \quad (6.17)$$

wobei $E(s)$ aus Gleichung (6.6) gelesen werden kann. Einige Spezialfälle:

- $r(t) = h(t)$:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)}. \quad (6.18)$$

- $n(t) = h(t)$ oder $d(t) = h(t)$:

$$e_\infty = - \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = -S(0) = -\frac{1}{1 + L(0)}. \quad (6.19)$$

- $w(t) = h(t)$:

$$e_\infty = - \lim_{s \rightarrow 0_+} s \cdot P(s) \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = -P(0) \cdot S(0) = -\frac{P(0)}{1 + L(0)}. \quad (6.20)$$

Bemerkung. Falls nicht explizit geschrieben, ist der statische Nachlauffehler für den Fall $r(t) = h(t)$ (Sprungantwort) gemeint.

Bemerkung. Aus Gleichung (6.18) sieht man, dass der statische Nachlauffehler verschwindet, wenn die Kreisverstärkung $L(s)$ mindestens einen offenen Integrator hat. Anders gesagt, muss $L(s)$ von Typ $k > 1$ sein.

6.7 Zeitbereich Spezifikationen (System zweiter Ordnung)

Für ein stabiles ($\text{Re}(\pi) < 0$) System zweiter Ordnung der Form

$$T(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad (6.21)$$

gelten folgende Näherungen:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90\%}}, \quad \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}. \quad (6.22)$$

$t_{90\%}$ und $\hat{\epsilon}$ können aus der Sprungantwort gelesen werden:

- $t_{90\%}$: Zeit beim Erreichen von $0.9 \cdot k$.
- $\hat{\epsilon}$: $k \cdot \hat{\epsilon}$ ist die Überschwingung.

Die Parameter von $T(s)$ können auch aus der Sprungantwort hergeleitet werden:

$$\delta = \frac{-\ln \hat{\epsilon}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90\%}}. \quad (6.23)$$

Der Parameter k entspricht dem Endwert der Sprungantwort ($k = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$).

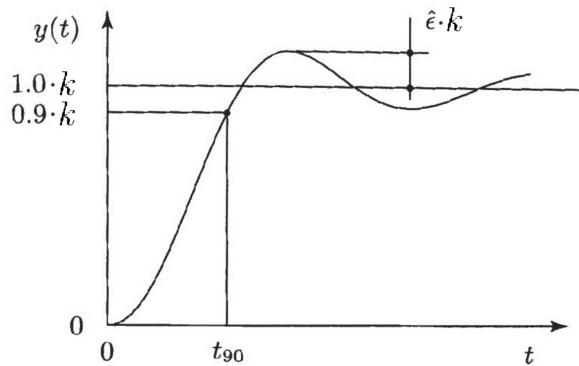


Abbildung 14: $t_{90\%}$ und $\hat{\epsilon}$.

6.8 Frequenzbereich Spezifikationen

6.8.1 Nominelle Regelgüte

$W_1(s)$ ist eine Schranke für die Sensitivität $S(s)$:

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| < 1, \quad (6.24)$$

Diese Ungleichung kann auch als

$$|S(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (6.25)$$

oder, unter Verwendung der Gleichung (6.2), als

$$|1 + L(j\omega)| > |W_1(j\omega)| \quad (6.26)$$

geschrieben werden.

6.8.2 Robuste Regelgüte

Die Bedingung der robusten Regelgüte ist erfüllt, falls es

$$|W_1(j\omega) \cdot S(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot T(j\omega)| < 1 \quad (6.27)$$

gilt, wobei:

- $W_1(s)$: Schranke für die Sensitivität (siehe 6.8.1).
- $W_2(s)$: Schranke für die komplementaren Sensitivität oder Unsicherheit (siehe 5.5).

Gleichung (6.27) kann auch als

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (6.28)$$

geschrieben werden.

Bemerkung. Die Funktionen $W_1(s)$ und $W_2(s)$ können aus den Spezifikationen des Systems bestimmt werden (z.B. kleine Sensitivität bei kleinen Frequenzen, um Störungen zu unterdrücken).

Bemerkung. Nominelle und robuste Regelgüte beurteilen nicht die Stabilität des Systems: Diese muss mit dem Nyquist Theorem (siehe 6.2) überprüft werden.

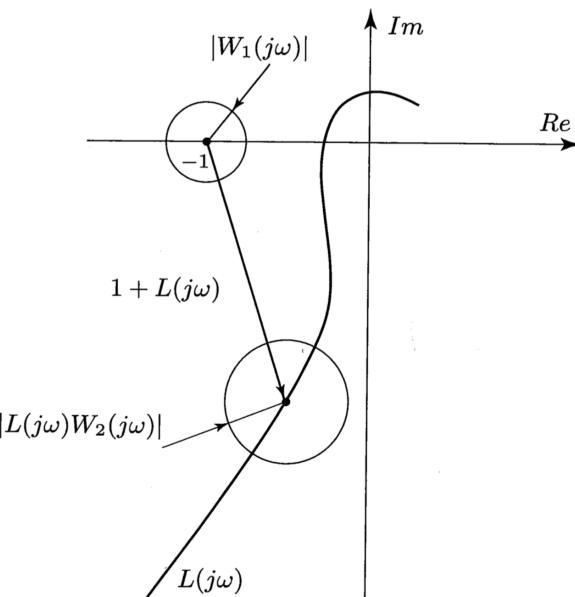
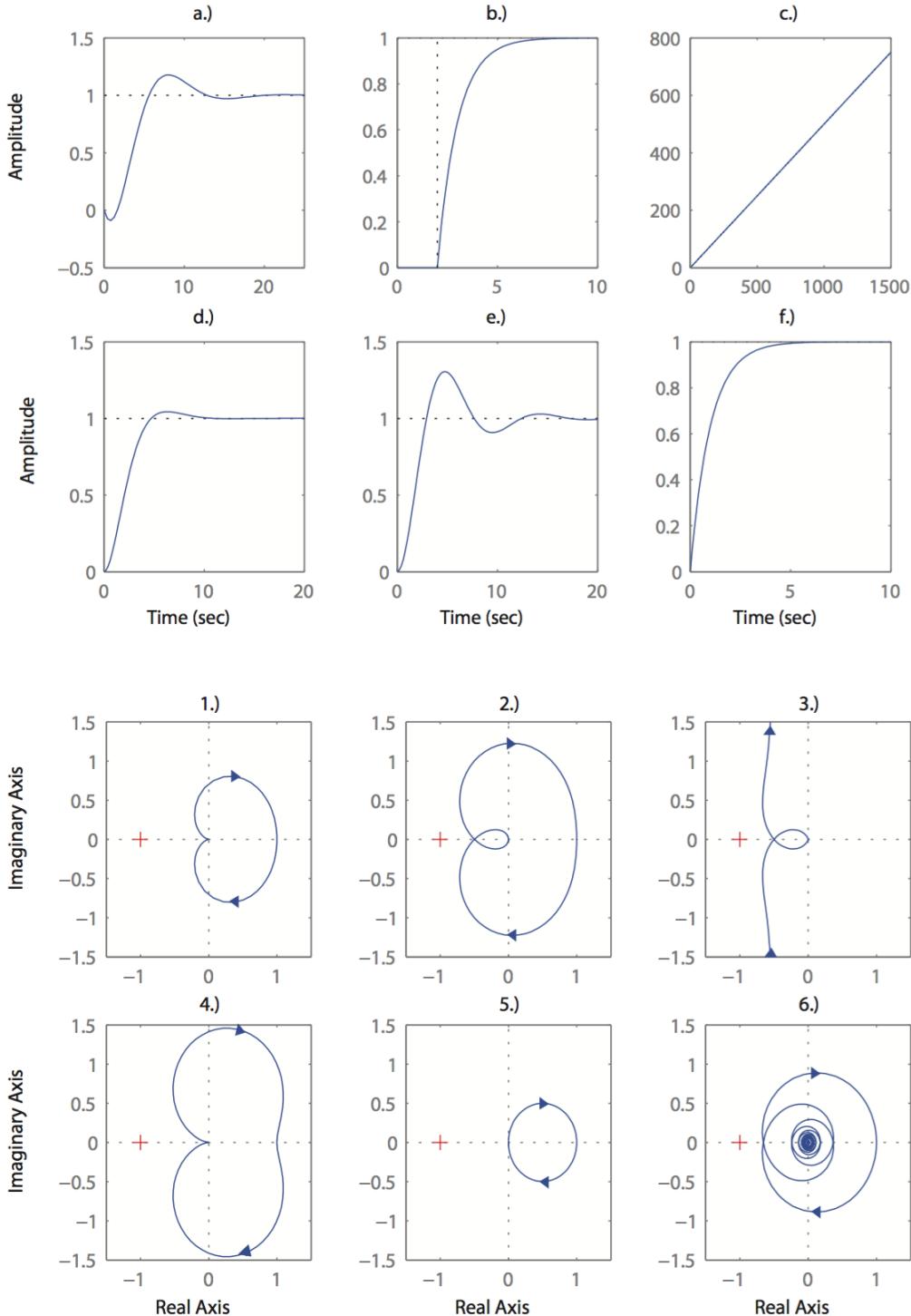


Abbildung 15: Graphische Darstellung der robusten Regelgüte.

6.9 Aufgaben

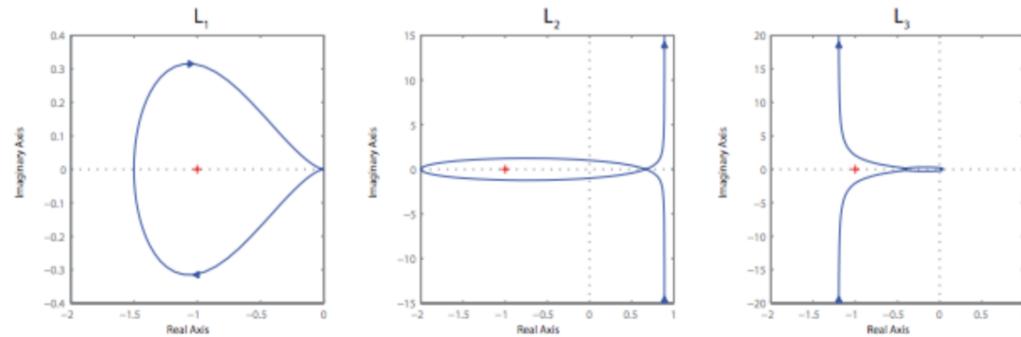
1. (a) In der untenstehenden Abbildung sehen Sie die Sprungantworten des offenen Regelkreises von verschiedenen Regelsystemen. Darunter finden Sie die Nyquist-Diagramme der jeweiligen offenen Regelkreise. Ordnen Sie die Nyquist-Diagramme (1 – 6) den Sprungantworten (a – f) zu und begründen Sie Ihre Antwort kurz.



(b) Gegeben seien folgende drei offene Regelkreise:

- i. $L_1(s) = \frac{3}{(s+1) \cdot (s-2)}$
- ii. $L_2(s) = \frac{2}{3-s} \cdot \left(1 + \frac{1}{s} + s\right)$
- iii. $L_3(s) = \frac{12}{s \cdot (s^2 + s + 10)} \cdot \frac{1 + 0.1 \cdot s}{1 + s}$

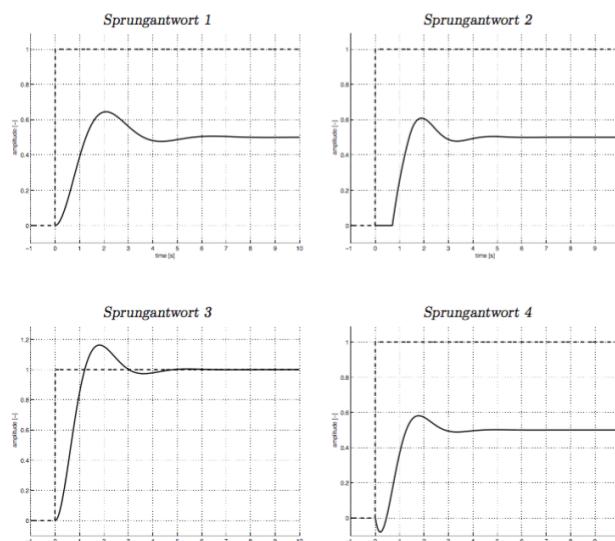
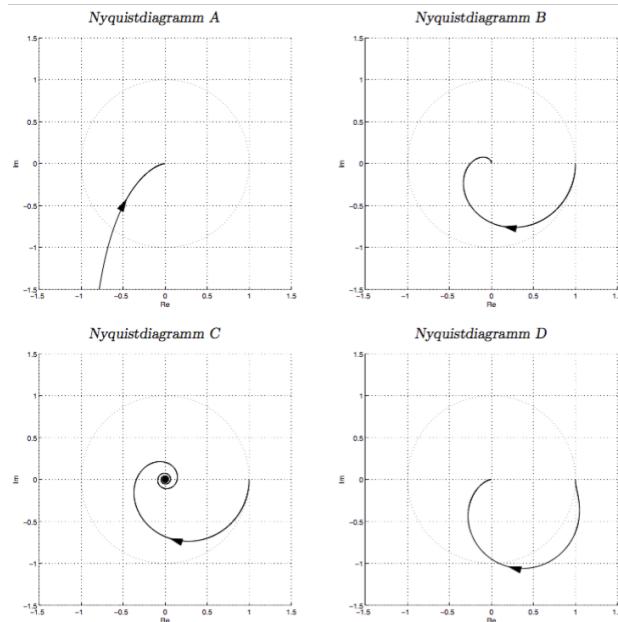
In untenstehender Abbildung sind die Nyquist-Diagramme der jeweiligen offenen Regelkreise abgebildet. Nutzen Sie das Nyquist-Kriterium um die Stabilität der jeweiligen geschlossenen Regelkreise zu beurteilen.



2. Gegeben sind 4 Übertragungsfunktionen offener Regelkreise ($L_1(s), L_2(s), L_3(s), L_4(s)$), die Nyquistdiagramme der offenen Regelkreise (Diagramm A, Diagramm B, Diagramm C, Diagramm D), sowie die Sprungantworten der geschlossenen Regelkreise (Sprungantwort 1, Sprungantwort 2, Sprungantwort 3, Sprungantwort 4).
 Ordnen sie jeder Übertragungsfunktion das entsprechende Nyquistdiagramm des offenen Regelkreises, sowie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises zu.

$$\begin{aligned}L_1(s) &= \frac{e^{-0.7 \cdot s}}{s + 1} & L_2(s) &= \frac{1.5 \cdot s + 1}{(s + 1) \cdot (s^2 + 1.4 \cdot s + 1)} \\L_3(s) &= \frac{1 - 0.3 \cdot s}{(0.6 \cdot s + 1)^2} & L_4(s) &= \frac{2}{s \cdot (0.5 \cdot s + 1)}\end{aligned}$$

Übertragungsfunktion	$L_1(s)$	$L_2(s)$	$L_3(s)$	$L_4(s)$
Nyquistdiagramm				
Sprungantwort				



3. Gegeben sei folgende Regelstrecke:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 1.5 \cdot x_2(t) + u(t - 0.01) \\ y(t) &= -4 \cdot x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}$$

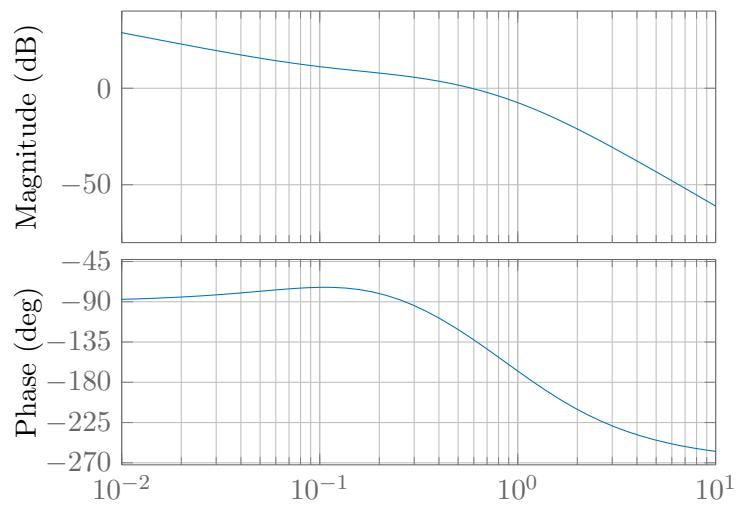
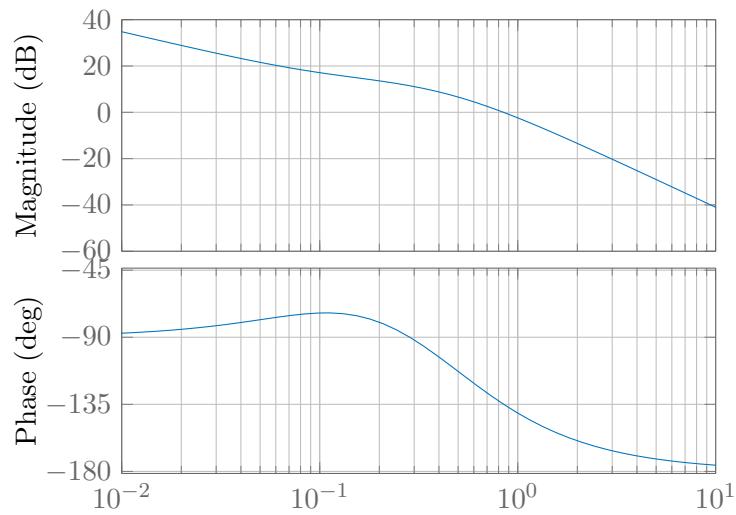
Störungen treten vor allem im Frequenzband 0 rad/s bis 0.1 rad/s auf. Das auftretende Rauschen ist sehr hochfrequent: $\omega_n = 6000$ rad/s. Die Übertragungsfunktion der Unsicherheits schranke $W_2(s)$ ist:

$$W_2(s) = \frac{s + 1}{10}.$$

Ein Regler soll so ausgelegt werden (nicht Teil dieser Aufgabe), dass alle Störungen $d(t)$ immer mindestens um einen Faktor 10 reduziert werden.

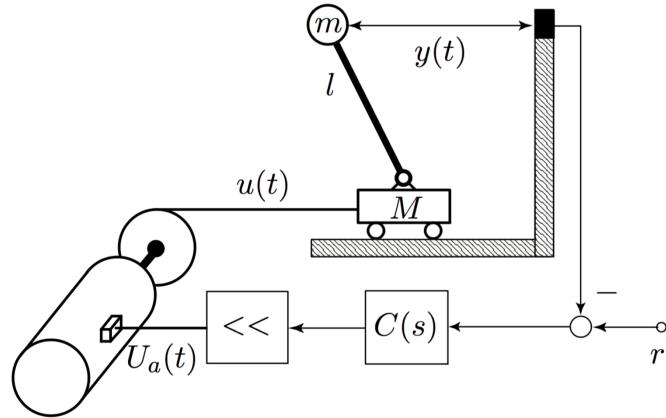
Existiert ein Regler $C(s)$ der diese Regelaufgabe erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort an hand der für diese Aufgabenstellung relevanten Frequenzen.

4. Bestimmen Sie Phasenreserve, Verstärkungsreserve (mit entsprechender Frequenz ω^*) und Druchtrittsfrequenz der im folgenden Abbildung dargestellten Systeme.



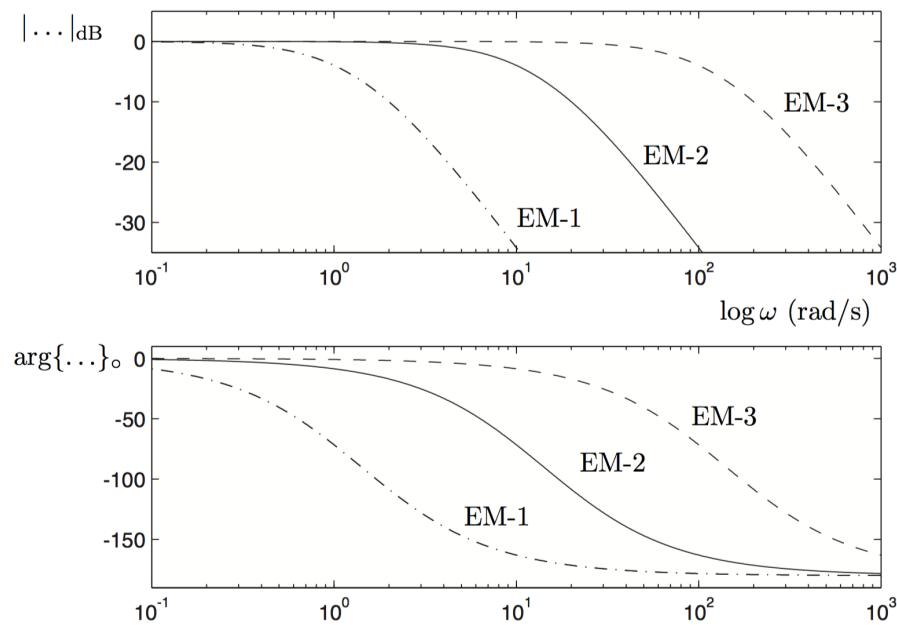
5. Die zu regelnde Strecke ist das im folgendem Bild dargestellte Pendel-Wagen-System. Aus der Vorlesung kennen Sie die Übertragungsfunktion der zu regelnden Strecke (der Eingang $u(t)$ ist die Kraft auf den Wagen, der Ausgang $y(t)$ ist die Position der Pendelspitze)

$$Y(s) = P(s) \cdot U(s), \quad P(s) = \frac{-g}{s^2 \cdot (l \cdot M \cdot s^2 - g \cdot (m + M))}.$$



Sie sind dafür verantwortlich, ein *möglichst kostengünstiges* Regelsystem zu entwerfen, welches das Pendel in seiner oberen Lage stabilisieren kann (die Auslegung des Reglers $C(s)$ ist nicht Teil dieser Aufgabe).

Der bereits gekaufte elektronische Verstärker (im Bild mit $<<$ bezeichnet) ist sehr schnell und kann deshalb als idealer Verstärker betrachtet werden. Für die Elektromotoren haben Sie drei Typen zur Auswahl. Die aus dem Katalog des Herstellers entnommenen Bode-Diagramme der Elektromotoren sind in folgendem Bild dargestellt (Eingang elektrische Spannung $U_a(t)$, Ausgang Kraft $u(t)$). Der Typ EM-1 kostet 1000 Fr., der Typ EM-2 kostet 2000 Fr. und der Typ EM-3 kostet 3000 Fr.



Die Parameter des Pendels entnehmen Sie aus den Konstruktionsunterlagen als

$$m = 3 \text{ kg}, \quad M = 1 \text{ kg}, \quad l = 0.1 \text{ m}$$

und für die Erdbeschleunigung gilt $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

Welcher der drei Elektromotoren wählen Sie aus? Begründen Sie Ihre Antwort mit quantitativen Argumenten!

6. Für die Strecke

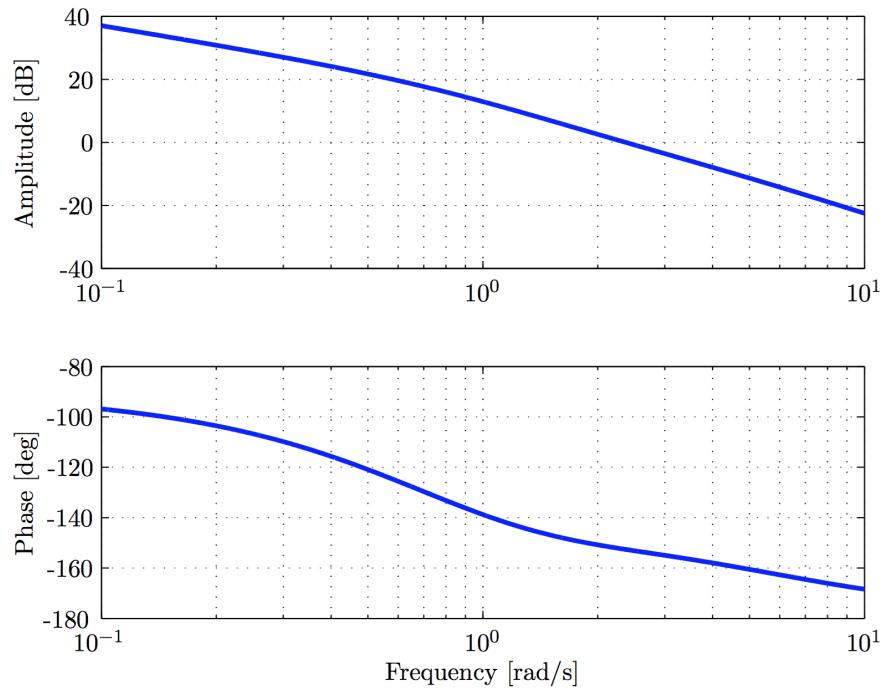
$$\Sigma(s) = \frac{2}{s^2 + s + 7}$$

wird folgender PD-Regler ausgelegt:

$$C(s) = 9 \cdot (1 + 0.5 \cdot s).$$

- (a) Berechnen Sie die Einheitssprungantwort des Regelsystems bei anfänglicher Ruhelage.
- (b) Bestimmen Sie den stationären Nachlauffehler dieses Regelsystems.

7. Von einem Regelsystem ist das Bode Diagramm des offenen Regelkreises $L(j\omega)$ gegeben (siehe Bild). Nehmen Sie an, das geschlossene Regelsystem verhalte sich annährend wie ein System 2. Ordnung.



- (a) Wie gross ist der statische Regelfehler (static error)?
- (b) Bestimmen Sie den maximalen Überschwinger (maximum overshoot) $\hat{\epsilon}$ und die Anstiegszeit (rise time) t_{90} des geschlossenen Regelsystems.
- (c) Die Verstärkung k_p des Reglers wird nun halbiert. Bestimmen Sie erneut $\hat{\epsilon}$ und t_{90} .
- (d) Skizzieren Sie die Sprunganwort des Regelsystems für beide Fälle.

8. Gegeben seien die folgende Strecke und Regler:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \frac{1}{s+1}, & P_2(s) &= \frac{1}{s \cdot (s+1)}, \\ C_1(s) &= 1 + \frac{1}{s} + s, & C_2(s) &= 1. \end{aligned}$$

Alle geschlossene Regelkreise

$$T_{ij}(s) = \frac{L_{ij}(s)}{1 + L_{ij}(s)} \quad \text{wobei } L_{ij}(s) = P_i(s) \cdot C_j(s) \quad \forall i, j = 1, 2$$

sind asymptotisch stabil.

- (a) Bestimmen Sie den statischen Regelfehler für alle vier geschlossene Regelkreise für den Fall $r(t) = h(t)$ und $d(t) = n(t) = w(t) = 0$.
- (b) Bestimmen Sie den statischen Regelfehler für alle vier geschlossene Regelkreise für den Fall $w(t) = h(t)$ und $d(t) = n(t) = r(t) = 0$.

9. Beurteilen Sie die Stabilität der geschlossenen Regelkreise mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums.

$$L_1(s) = \frac{5}{(s+2)^2}$$

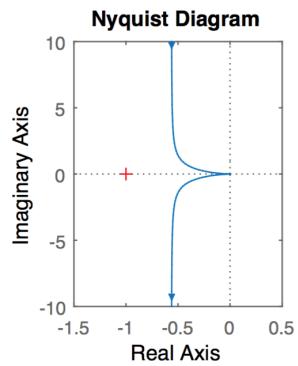
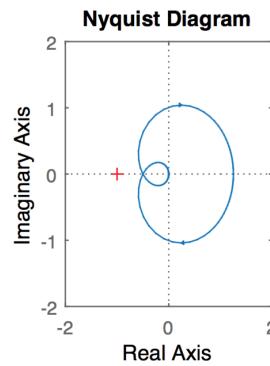
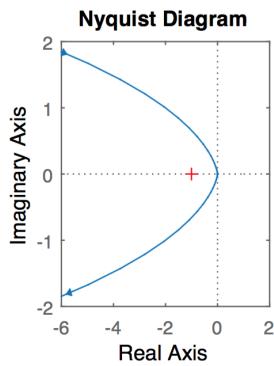
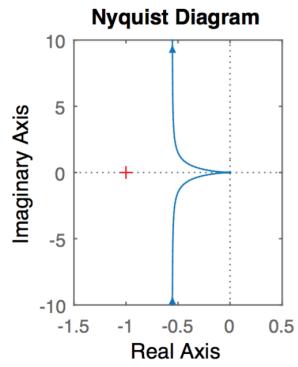
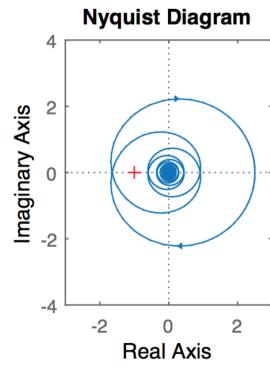
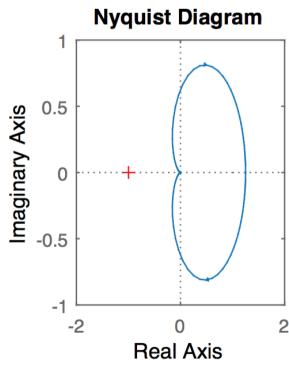
$$L_4(s) = \frac{5}{s^2 \cdot (s+2)}$$

$$L_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot e^{-s}$$

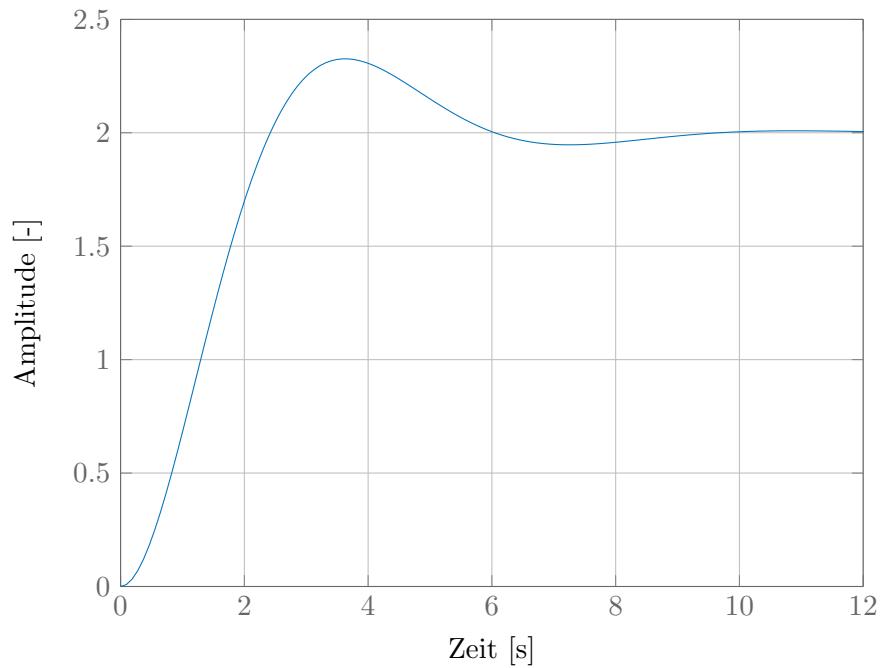
$$L_5(s) = \frac{-2 \cdot s + 5}{(s+2)^2}$$

$$L_3(s) = \frac{5}{s \cdot (s+3)}$$

$$L_6(s) = \frac{9}{s \cdot (s-4)}$$



10. Gegeben ist die Sprungantwort eines Regelsystems. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T(s)$ des Systems. Das System verhält sie annährend wie ein System 2. Ordnung.



7 Feedback Control Design

7.1 PID Regler

Der PID Regler besteht aus der Parallelschaltung aus einem P-Element, einem Integrator-Element und einem Differentiator-Element, wie in Abbildung 16 gezeigt. Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}. \quad (7.1)$$

In Zeit Bereich gilt:

$$u(t) = k_p \cdot \left(1 \cdot e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \right). \quad (7.2)$$

Bemerkung. Der letzte Term in Gleichung (7.1) ist der sogenannte Roll-Off Term. Ziel dieses Terms ist die Ausschaltung des Reglers bei hohen Frequenzen.

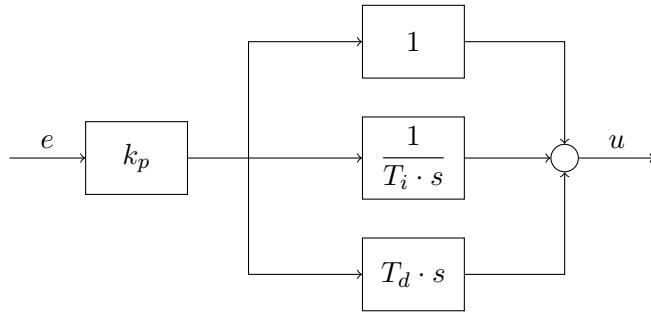


Abbildung 16: Blockdiagramm eines PID-Reglers.

7.2 Ziegler-Nichols

Mit dem Verfahren von Ziegler-Nichols nimmt man an, dass die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s} \quad (7.3)$$

approximiert werden kann. Die Reglerparameter können dann wie folgt bestimmt werden:

1. P-Regler mit Verstärkung $k_p^* = \gamma$ auslegen, so dass das Regelsystem grenzstabil ist, d.h.

$$L(j \cdot \omega^*) = k_p^* \cdot P(j \cdot \omega^*) = -1 + 0 \cdot j. \quad (7.4)$$

2. Aus (7.4) die kritische Periode T^* bestimmen. Es gilt:

$$T^* = \frac{2 \cdot \pi}{\omega^*}. \quad (7.5)$$

3. Reglerparameter gemäss folgender Tabelle einstellen (Roll-Off: $\tau = T_d/10$).

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.50 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

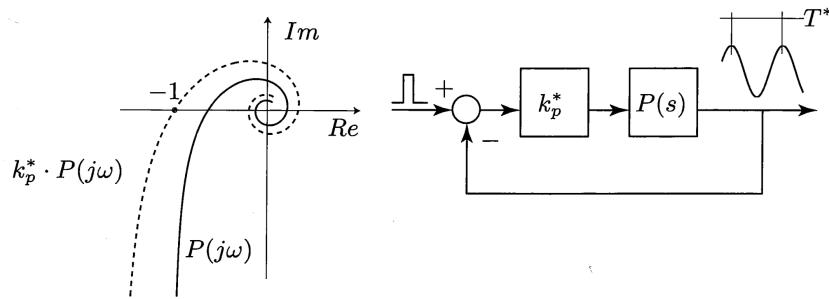


Abbildung 17: Das Verfahren von Ziegler-Nichols.

Bemerkung. Da k_p^* und T^* auch experimentell bestimmt werden können, kann der Regler auch ohne eine genaue Modellierung und Analyse der Strecke ausgelegt werden: Man stellt den Parameter des P-Regler so um, dass die Antwort des Systems schwiegend ist. Die Periode dieser Schwingung ist die kritische Periode T^* .

7.3 Loop Shaping

Mit dieser Methode versucht man die Robustheitseigenschaften des Systems durch Zuschalten von Lead- oder Lag-Elementen zu verbessern. Die Übertragungsfunktion des Elementes ist

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad (7.6)$$

wobei $\alpha, T \in \mathbb{R}^+$. Es gilt:

- $\alpha < 1$: Lead-Element: Phasenreserve wird erhöht, Betrag des Reglerkreises verkleinert.
- $\alpha > 1$: Lag-Element: Phasenreserve wird verkleinert, Betrag des Reglerkreises erhöht.

Die Parameter des Elementes berechnen sich als

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\varphi) \right)^2 = \frac{1 - \sin(\hat{\varphi})}{1 + \sin(\hat{\varphi})}, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}, \quad (7.7)$$

wobei $\hat{\omega}$ die Frequenz, bei der den Phasenanstieg geschehen soll, ist und $\hat{\varphi} = \varphi_{\text{neu}} - \varphi$ die (maximale) Phasendifferenz bezeichnet.

Im Allgemeinen geht man (iterativ) wie folgt vor:

1. PI(D) auslegen.
2. Lead-/Lag-Element zuschalten, um die Phasenreserve zu verändern. Die Durchtrittsfrequenz ω_c ändert sich auch.
3. Verstärkung k_p des Regler einstellen, um die Durchtrittsfrequenz anzupassen.

7.4 Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende Strecke

$$P(s) = \frac{5 - s}{(s + 3) \cdot (s + 1)}.$$

- (a) Ihre Chefin möchte, dass Sie einen P-Regler für diese Strecke auslegen. Sie schlagen vor, die Verstärkung k_p nach Ziegler/Nichols-Regeln auszulegen. Erklären Sie ihr warum Ziegler/Nichols hier angewendet werden kann.
- (b) Nach erfolgreicher Argumentation legen Sie los und bestimmen die kritische Verstärkung k_p^* und die kritische Frequenz ω^* .
- (c) Anschliessend bestimmen Sie daraus die Verstärkung k_p nach der Methode von Ziegler/Nichols.
- (d) Sie präsentieren Ihrer Chefin den Regler. Ihre Chefin fragt Sie, ob Sie allfällige systembedingte Einschränkungen der Durchtrittsfrequenz mit einem Sicherheitsfaktor von 5 eingehalten haben, d.h.

$$5 \cdot \max(\pi^+) < \omega_c < 0.2 \cdot \min(\zeta^+, 1/T).$$

Sie verlangt einen mathematischen Nachweis.

- (e) Da dies nicht der Fall ist, werden Sie aufgefordert, die maximale Verstärkung $k_{p,\max}$ zu bestimmen, für welche die Einschränkungen (mit Sicherheitsfaktor 5) eingehalten werden.
- (f) Zum Schluss verlangt Ihre Chefin, dass Sie den stationären Nachlauffehler dieses P-Reglers bestimmen und fragt Sie, wie man diesen eliminieren könnte.

2. Gegeben ist die folgende Strecke:

$$P(s) = \frac{1}{(s + 0.5) \cdot (s + 2)} \cdot e^{-T_d \cdot s}, \quad T_d = \frac{\pi}{8} \text{ s.}$$

- (a) Für diese Regelstrecke müssen Sie einen PI-Regler

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

auslegen. Es wird gefordert, dass das Regelsystem eine Durchtrittsfrequenz von 1 rad/s und eine Phasenreserve von 45° haben soll. Bestimmen Sie die beiden Parameter (k_p, k_i) des Reglers!

- (b) Es soll alternativ ein Regler mittels der Methode von Ziegler und Nichols ausgelegt werden. Hierzu müssen experimentell die kritische Verstärkung k^* sowie die kritische Periodendauer T^* bestimmt werden. Wie würden Sie vorgehen, um diese Größen experimentell zu bestimmen?
- (c) Aus Experimenten ergeben sich für die kritische Verstärkung k^* und die kritische Periodendauer T^* folgende Werte:

$$k^* = 7.36$$

$$T^* = 2.63 \text{ s.}$$

Bestimmen Sie die Reglerparameter k_p, T_i, T_d und τ eines PID-Reglers der Form

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}$$

mittels der Methode von Ziegler und Nichols!

- (d) Was ist bei der Spezifikation und Auslegung eines Reglers für eine Strecke mit Totzeit zu beachten?

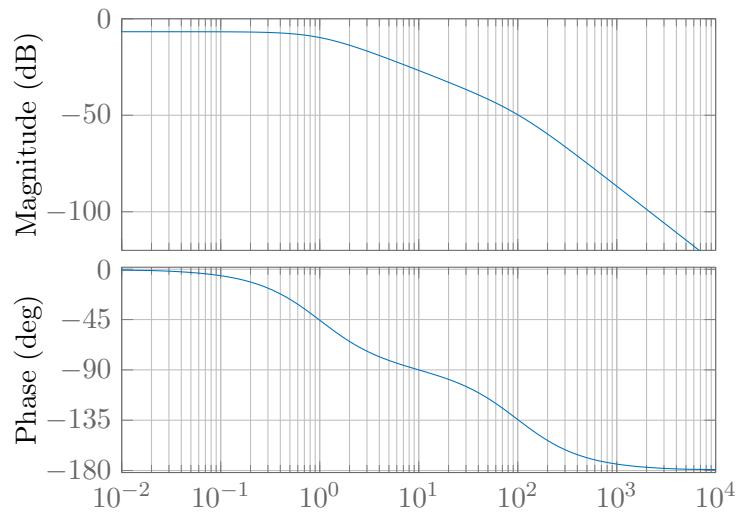
3. Für eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{10}{s} \cdot e^{-s/2}$$

soll ein PD-Regler entworfen werden. Ermitteln Sie die Parameter des Reglers mit dem Verfahren nach Ziegler/Nichols.

4. Folgende Abbildung zeigt das Bode-Diagramm einer BIBO-stabilen Reglerstrecke. Sie möchten für diese Reglerstrecke einen P-Regler auslegen. Die Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung soll so gross wie möglich sein, jedoch müssen Sie eine Phasenreserve von mindestens 45° garantieren.

- (a) Bestimmen Sie für welche $k_p \in \mathbb{R}$ das geschlossene Reglerkreis asymptotisch stabil ist.
- (b) Wie gross muss k_p gewählt werden?



5. Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind.

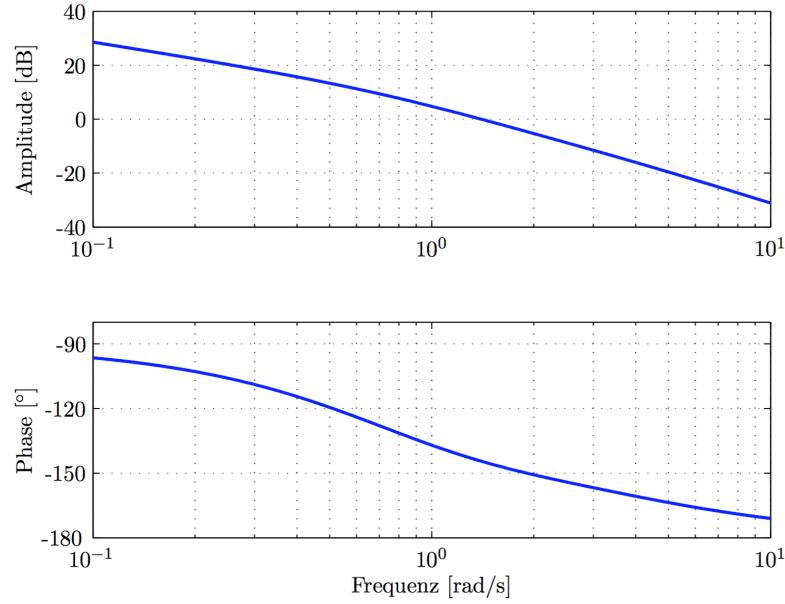
- (a) Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{3}{(s+1) \cdot (s+10)}$$

wird mit einem P-Regler geregelt. Für grosse Reglerverstärkungen k_p wird das Regelsystem instabil.

- (b) Eine Strecke wird mit einem P-Regler asymptotisch stabil geregelt. Da ein I-Anteil im Regler fehlt, bleibt immer ein stationärer Nachlauffehler im Führungsverhalten $r \rightarrow y$, obwohl das System störungsfrei ist.

6. Von einem Regelsystem mit einem PID-Regler ist das Bode Diagramm vom offenen Regelkreis $L(s)$ in folgendem Bild gegeben. Der geschlossene Regelkreis verhält sich ungefähr wie ein System zweiter Ordnung. Die Sprungantwort des Regelsystems ist wegen zu grossem Überschwingen noch nicht befriedigend. Der Überschwinger soll halbiert werden. Dazu soll der Regler mit einem Lead/Lag-Element erweitert werden. Um die Anstiegszeit, t_{90} nicht zu verändern, soll die Durchtrittsfrequenz gleich bleiben.



- (a) Berechnen Sie die notwendige Phasenreserve. Verwenden Sie dazu das gegebene Bode Diagramm vom offenen Regelkreis und die Anforderung an das maximale Überschwingen.
- (b) Um wie viel muss die Phase angehoben werden, und bei welcher Frequenz muss dieser Phasengewinn stattfinden?
- (c) Berechnen Sie aus diesen Anforderungen die Parameter α und T des Lead/Lag-Elementes

$$C_{\text{Lead}}(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}.$$

Beachten Sie vorerst nur die Phase der Kreisverstärkung und ignorieren Sie, dass das Lead/Lag-Element auch den Betrag der Kreisverstärkung beeinflusst.

- (d) Durch das Lead/Lag-Element hat sich der Betrag der Kreisverstärkung verändert und damit hat sich die Durchtrittsfrequenz verändert. Passen Sie die Reglerverstärkung k_p so an, dass die ursprüngliche Durchtrittsfrequenz wiederhergestellt wird:

$$k_{p,\text{neu}} = x \cdot k_p.$$

A Mathematik

A.1 Matrizen

A.1.1 Inverse Matrix

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ ist inverse Matrix A^{-1} so definiert, dass

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}. \quad (\text{A.1})$$

Im Allgemeinen lässt sich die Inverse mit der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A), \quad \{\text{adj}(A)\}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

berechnen. Spezialfälle:

- $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Eigenwertproblem

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Der Eigenraum \mathbf{v}_λ eines Eigenwertes λ ist dann gegeben durch

$$\text{kern}(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \Leftrightarrow (\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Komplexe Analysis

Für eine komplexe Zahl

$$z = a + j \cdot b = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad (\text{A.7})$$

gilt

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A.2.1 Rechenregel

Für drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 sei

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}. \quad (\text{A.9})$$

Dann gilt:

$$|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}, \quad \angle(z) = \angle(z_1) + \angle(z_2) - \angle(z_3). \quad (\text{A.10})$$

B Mechanik

B.1 Dynamik und Kräfte

Der Impulssatz (“Linear Momentum Principle”) besagt:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{F}. \quad (\text{B.1})$$

Der Spin-/Drallsatz (“Angular Momentum Principle”) besagt:

$$I_S \cdot \ddot{\theta} + m \cdot \mathbf{r}_{\text{OS}} \times \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{r}_{\text{OP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}, \quad (\text{B.2})$$

$$I_S \cdot \ddot{\theta} = \sum \mathbf{r}_{\text{SP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}. \quad (\text{B.3})$$

Die Federkraft einer Feder mit Federkonstante k ist gegeben durch

$$F = k \cdot x. \quad (\text{B.4})$$

Die Dämpferkraft eines Dämpfers mit Dämpferkonstante d ist gegeben durch

$$F = d \cdot \dot{x}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Arbeit und Leistung

Die Leistung einer Kraft ist:

$$P = F \cdot v. \quad (\text{B.6})$$

Die Leistung eines Drehmoment ist:

$$P = M \cdot \omega. \quad (\text{B.7})$$

Bemerkung. Hier wird es angenommen, dass die Kraft und Geschwindigkeit bzw. Moment und Winkelgeschwindigkeit die gleiche Richtung besitzen.

C MATLAB

C.1 Allgemein

Befehl	Beschreibung
<code>A(i,j)</code>	Eintrag von A in Position i (Zeile) und j (Spalte)
<code>abs(X)</code>	Betrag von allen Einträgen von X
<code>angle(X)</code>	Phase von allen Einträgen von X (in Bogenmass)
<code>X'</code>	Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>X.'</code>	Nicht Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>conj(X)</code>	Komplex konjugiert von allen Einträgen von X
<code>real(X)</code>	Realteil von allen Einträgen von X
<code>imag(X)</code>	Imaginärteil von allen Einträgen von X
<code>eig(A)</code>	Eigenwerte von A
<code>[V,D]=eig(A)</code>	Eigenwerte D (Diagonaleinträge), Eigenvektoren V (Spaltenvektoren)
<code>s=svd(A)</code>	Singularwerte der Matrix A
<code>[U,Sigma,V]=svd(A)</code>	Singular Values Decomposition der Matrix A
<code>rank(A)</code>	Rang der Matrix A
<code>det(A)</code>	Determinante der Matrix A
<code>inv(A)</code>	Inverse der Matrix A
<code>diag([a1,...,an])</code>	Diagonalmatrix mit a1,...,an als Diagonaleinträge
<code>zeros(x,y)</code>	Nullmatrix der Dimension x×y
<code>zeros(x)</code>	Nullmatrix der Dimension x×x
<code>eye(x,y)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x×y
<code>eye(x)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x×x
<code>ones(x,y)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x×y
<code>ones(x)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x×x
<code>max(A)</code>	Größtes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>min(A)</code>	Kleinstes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>sum(A)</code>	Summe der Elemente von A (A Matrix: Summe Zeile pro Zeile)
<code>dim=size(A)</code>	Dimension der Matrix A (<code>size=[#Zeilen #Spalten]</code>)
<code>dim=size(A,a)</code>	a=1: dim=#Zeilen, a=2: dim=#Spalten, sonst dim=1
<code>t=a:i:b</code>	<code>t=[a,a+1,a+2,...,b-i,b]</code> (Zeilenvektor)
<code>y=linspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 100 "linear-spaced" Punkte im Intervall [a,b]
<code>y=linspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "linear-spaced" Punkte im Intervall [a,b]
<code>y=logspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 50 "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a,10^b]
<code>y=logspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a,10^b]
<code>I=find(A)</code>	I: Indizes von den nichtnull Elementen von A
<code>disp(A)</code>	Print on screen von A (String: 'name')

C.2 RT-Befehle

Befehl	Beschreibung
<code>sys=ss(A,B,C,D)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D im Zeitbereich
<code>sys=ss(A,B,C,D,Ts)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D und Sampling Zeit Ts (zeitdiskret)
<code>sys=zpk(Z,P,K)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z, Pole P und Gain K
<code>sys=zpk(Z,P,K,Ts)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z, Pole P, Gain K und Sampling Zeit Ts
<code>sys=tf([bm ... b0],[an ... a0])</code>	Übertragungsfunktion mit bn in Zähler und an in Nenner
<code>P=tf(sys)</code>	Übertragungsfunktion von sys
<code>P.iodelay=...</code>	Fügt der Funktion P eine Totzeit hinzu.
<code>pole(sys)</code>	Pole eines Systems
<code>zero(sys)</code>	NST eines Systems
<code>[z,p,k]=zpkdata(sys)</code>	z: Nullstellen, p: Pole, k: statische Verstärkung
<code>ctrb(sys) oder ctrb(A,b)</code>	Steuerbarkeitsmatrix
<code>obsv(sys) oder obsv(A,c)</code>	Beobachtbarkeitsmatrix
<code>series(sys1,sys2)</code>	Serieschaltung von sys1 und sys2
<code>feedback(sys1,sys2)</code>	sys1 mit sys2 als (negative) Feedback
<code>[Gm,Pm,Wgm,Wpm]=margin(sys)</code>	Gm: Verstärkungsreserve, Pm: Phasenreserve, Wpm: Durchtrittsfrequenz
<code>[y,t]=step(sys,Tend)</code>	y: Sprungantwort von sys bis T, t: Zeit
<code>[y,t]=impulse(sys,Tend)</code>	y: Impulsantwort von sys bis Tend, t: Zeit
<code>y=lsim(sys,u,t)</code>	Simulation von sys mit dem Input u für die Zeit t
<code>sim('Simulink model',Tend)</code>	Simultion von Simulink Model' bis Tend
<code>p0=dcgain(sys)</code>	Statische Verstärkung ($P(0)$)
<code>K=lqr(A,B,Q,R)</code>	Verstärkungsmatrix K (Lösung des LQR-Problems)
<code>[X,L,K]=care(A,B,Q)</code>	X: Lösung der Riccati Gleichung, G: Verstärkungsmatrix
<code>Paug=augw(G,W1,W3,W2)</code>	Space State M. für \mathcal{H}_∞
<code>[K,C1,gamma]=hinfsyn(Paug)</code>	$\mathcal{H}_\infty : K$: Regler
<code>fr=evalfr(sys,f)</code>	sys in f evaluiert ($s = f$)
<code>sysd=c2d(sys,Ts,method)</code>	Diskretisierung von sys nach method mit Sampling Zeit Ts

C.3 Plot und Diagramme

Befehl	Beschreibung
<code>nyquist(sys)</code>	Nyquist-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>nyquist(sys,{a,b})</code>	Nyquist-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys)</code>	Bode-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys,{a,b})</code>	Bode-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys)</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys,{a,b})</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>rlocus(sys)</code>	Wurzelortskurven-Diagramm
<code>impulse(sys)</code>	Impulsantwort des Systems <code>sys</code>
<code>step(sys)</code>	Sprungantwort des Systems <code>sys</code>
<code>pzmap(sys)</code>	Pole-Nullstelle Map des Systems <code>sys</code>
<code>svd(sys)</code>	Singularwertverlauf des Systems <code>sys</code>
<code>plot(X,Y)</code>	Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>plot(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>stem(X,Y)</code>	Diskreter Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>stem(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Diskreter Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>xlabel('name')</code>	Name der x-Achse
<code>ylabel('name')</code>	Name der y-Achse
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>xlim([a b])</code>	Schranke für die x-Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>ylim([a b])</code>	Schranke für die y-Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>grid on</code>	Grid
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>legend('name1',..., 'namen')</code>	Legende
<code>subplot(m,n,p)</code>	Grid <code>m×n</code> , Plot in Position <code>p</code>
<code>semilogx(X,Y)</code>	Logarithmitic Plot mit y-Achse linear