

Prüfung Herbst 04

Vierstündige Prüfung

Die Aufgaben werden alle gleich hoch bewertet. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Erlaubte Hilfsmittel: Selbstverfasste Zusammenfassung (max. 10 Blätter A4), Formelsammlung. **Kein Taschenrechner.**

Sämtliche Resultate müssen begründet werden.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.

1. Berechnen Sie den Trägheitsmoment $\Theta(a, b)$ des Würfels

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

bezüglich der zur x -Achse parallelen Achse, die durch $(0, a, b)$ geht. Die Dichte ϱ von Q sei konstant.

2. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfelds $\vec{v} = (z^2, x, xy)$ längs dem geraden Weg von $(0, 1, 0)$ nach $(1, -1, -1)$.
3. Man finde die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2x(y')^2 = 0,$$

mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 4$.

4. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 12y' - 8y = e^{2x}.$$

Bitte wenden!

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x^3 + xy$, $y(0) = 0$.

6. Man bestimme die Koeffizienten a_k der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(x-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

7. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = (3x+y, 2y, z+5)$ von innen nach aussen durch ∂T . T ist ein Tetraeder mit Eckpunkten $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(4, 4, 1)$, $(1, 1, 2)$.

8. Sei $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ und $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$. Man berechne

$$\int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

9. Man berechne die globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion

$$f(x, y) = e^{-x^2+x-y^2}$$

im Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

10. Man finde die Lösung $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{vmatrix} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y \end{vmatrix}$$

mit $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

Achtung: In der letzten Semesterwoche finden folgende Donnerstagsübungsstunden in einem anderen Raum statt (die Zeit bleibt gleich):

Gruppe **Me - Nie** bei Stephanie Gubler anstatt im ETZ G 91 neu im **ETF B 105**,
Gruppe **Scho - Ste** bei Mirjana Vukelja anstatt im ETZ F 91 neu im **LFW C 11**.