Tipps Serie 3

1. Definiere eine Funktion $F(x, y, z)$, so dass F eine Niveaufläche davon ist. Der Gradient von f steht immer senkrecht auf den Nivauflächen (Normalenvektor der Tangentialebene), das liefert die Gleichung der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) \\ f_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

(äq. zu $f_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$)

2. Richtungsableitung in Richtung der Normaleneinheitsvektor $\vec{e}$:

$$D_{\vec{e}} f = \vec{e} \cdot \mathrm{grad} f$$

Der Gradient von f steht immer senkrecht auf den Nivauflächen (Normalenvektor der Tangentialebene), das liefert die Gleichung der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) \\ f_y(x_0, y_0, z_0) \\ f_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

3. Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \longleftrightarrow \frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

Bei Teilaufgabe b): Benutze a)!

4. Tangentialebene an einer Kurve:

   - Gleichung der Tangentialebene (= Lineare Ersatzfunktion)

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

   - Gradient

5. Polarkoordinaten:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = z$$

Kettenregel:

$$f_x = f_\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = f_\rho \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f_\rho \cdot \frac{x}{\rho}$$

$$f_{xx} = \ldots \quad \text{(Produktregel!)}$$

Dann einsetzen in

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Bei Teilaufgabe c): Benutze b)!