Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Thermodynamik II – Musterlösung Rechenübung 9

Aufgabe 1

Der Wärmetransfer des Festkörpers und diejenige des finiten Fluidvolumens sind über den konvektiven Wärmeübergang, der von A und α abhängt, gekoppelt.
Für ein solches System kann die instationäre Wärmeleitungsgleichung wie folgt ergänzt werden (statt schlicht T_∞ als konstant anzunehmen):

$$(mc)_1 \frac{dT_1}{dt} = -\alpha A (T_1 - T_2) \tag{1}$$

$$(mc)_2 \frac{dT_2}{dt} = -\alpha A (T_2 - T_1) \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$T_1(0) = T_{1,0} \text{ und } T_2(0) = T_{2,0}$$

Addiert man Gl. 1 mit Gl. 2 erhält man:

$$(mc)_1 \frac{dT_1}{dt} + (mc)_2 \frac{dT_2}{dt} = 0 \tag{3}$$

und löst man Gl. 1 nach T_2 auf erhält man:

$$T_2 = \frac{(mc)_1}{\alpha A} \frac{dT_1}{dt} + T_1 \tag{4}$$

Indem man Gl. 4 in Gl. 3 einsetzt erhält man:

$$\frac{d^2 T_1}{dt^2} + n \frac{dT_1}{dt} = 0 \tag{5}$$

und $n = \alpha A \left[\frac{1}{(mc)_1} + \frac{1}{(mc)_2} \right]$.
Die allgemeine Lösung von 5 ist:

$$T_1 = C_1 + C_2 \exp(-nt) \tag{6}$$

und für T_2 durch die Kombination von Gl. 1 und 6:

$$T_2 = C_1 + C_2 \left[1 - n \frac{(mc)_1}{\alpha A} \right] \exp(-nt) \tag{7}$$

Die Unbekannten C_1 und C_2 können mit den Anfangsbedingungen berechnet werden:

$$C_2 = \frac{\alpha A}{n(mc)_1} (T_{1,0} - T_{2,0}) \tag{8}$$

$$C_1 = T_{1,0} - C_2 = T_{2,0} - C_2 \left[1 - \frac{n(mc)_1}{\alpha A}\right] \tag{9}$$

Nach einigem Umformen erhält man aus Gl. 6 und 7:

$$T_1 = T_{1,0} - \frac{T_{1,0} - T_{2,0}}{1 + (mc)_1/(mc)_2} \left(1 - e^{-nt}\right) \tag{10}$$

$$T_2 = T_{2,0} + \frac{T_{1,0} - T_{2,0}}{1 + (mc)_2/(mc)_1} \left(1 - e^{-nt}\right) \tag{11}$$

Die Gleichungen 10 und 11 können überprüft werden indem man testet ob sie den 1. Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Dabei kann man das System Festkörper und Fluid als ein isoliertes System betrachten:

$$(mc)_1 dT_1 + (mc)_2 dT_2 = 0$$

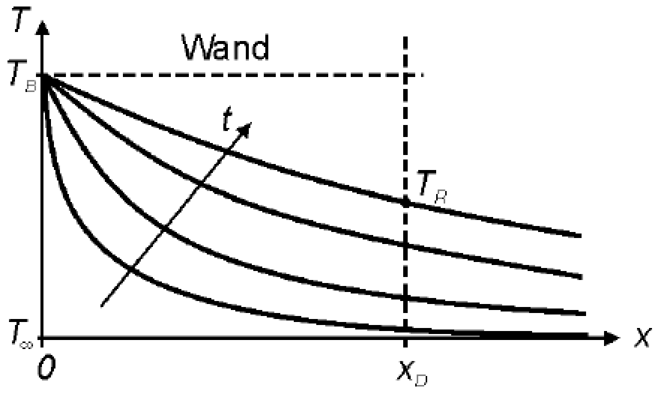
$$(mc)_1 T_1 + (mc)_2 T_2 = \underbrace{(mc)_1 T_{1,0} + (mc)_2 T_{2,0}}_{konst.} \tag{12}$$

Gl. 12 erhält man wenn man man Gl. 10 mit $(mc)_1$ und Gl. 11 mit $(mc)_2$ multipliziert und sie anschliessend seitenweise miteinander addiert.
Die Endtemperatur des Tanks im thermodynamischen Gleichgewicht erhält man wenn man für Gl. 10 und 11 $t \to \infty$ wandern lässt:

$$\lim_{t\to\infty} T_1(t) = \frac{(mc)_1}{(mc)_1 + (mc)_2} T_{1,0} + \frac{(mc)_2}{(mc)_1 + (mc)_2} T_{2,0} = \lim_{t\to\infty} T_2(t)$$

Aufgabe 2

Die Mauer wird als halbunendliche Wand modelliert:



Diffusionslänge: $x_D = \sqrt{a t_D}$ mit $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

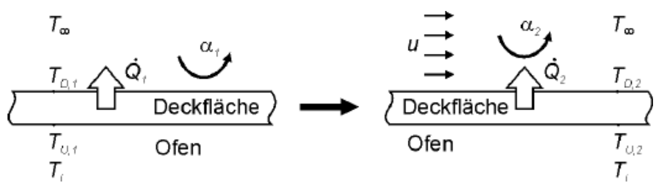
Die Diffusionslänge bezeichnet die Stelle, wo abhängig von der Materialgrösse a nach der Zeit t_D die Störung einen Wert von 48% der gesamten an der Oberfläche angebrachten Störung erreicht:

Hier bedeutet dies: $T_R(t = t_D) - T_\infty = 0.48 \cdot (T_B - T_\infty)$

Für qualitative Abschätzungen bezeichnet x_D den Ort, wo die Störung signifikant geworden ist.

$$t_D = \frac{x_D^2}{a} = \frac{x_D^2 \rho c}{\lambda} = \frac{(0.3\,m)^2 \cdot 600\,kg/m^3 \cdot 1100\,J/kgK}{0.18\,W/mK} = 330000\,s$$

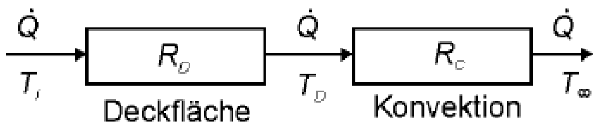
Aufgabe 3



Annahmen:

- stationärer Zustand
- 1-dimensionaler Wärmefluss
- konstante Materialeigenschaften
- keine Wärmestrahlung
- Ofentemperatur T_i ist gleich der Temperatur der unteren Deckfläche T_U

Analogie Elektrischer Strom:



mit $R_C = \frac{1}{A\alpha}$

ohne Ventilator:

$$\dot{Q}_1 = \frac{T_i - T_{D,1}}{R_{D,1}} \Rightarrow R_{D,1} = \frac{T_i - T_{D,1}}{\dot{Q}_1} = \frac{150°C - 47°C}{40\,W} = 2.575\,K/W$$

mit Ventilator:

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_i - T_\infty}{R_{D,2} + R_{C,2}}$$

Weil $R_{D,1} = R_{D,2} \Rightarrow \dot{Q}_2 = \frac{T_i - T_\infty}{R_{D,1} + R_{C,2}}$

$$R_{C,2} = \frac{1}{L^2 \alpha_2}$$

Ermitteln des Wärmeübergangskoeffizienten α_2:
Reynoldszahl: $Re_{L,2} = \frac{uL}{\nu} = \frac{20\,m/s \cdot 0.5\,m}{15.89 \cdot 10^{-6}\,m^2/s} = 6.3 \cdot 10^5$

Die Strömung über die ebene Platte ist im Bereich des Übergangs von laminarer zu turbulenter Strömung, denn der Übergangsbereich liegt bei: $Re_{L,krit} \cong 3 \cdot 10^5 ... 3 \cdot 10^6$

Nusseltzahl für die Übergangsregion:

$$Nu_{L,2} = \left(0.037\, Re_{L,2}^{4/5} - A\right) \mathrm{Pr}^{1/3}$$

mit

$$A = 0.037 Re_{L,krit}^{4/5} - 0.664 Re_{L,krit}^{1/2}$$

Annahme: $Re_{L,krit} = 5 \cdot 10^5$

$$A = 0.037 \left(5 \cdot 10^5\right)^{4/5} - 0.664 \left(5 \cdot 10^5\right)^{1/2} = 871.3$$

$$\Rightarrow Nu_{L,2} = \left(0.037 \left(6.3 \cdot 10^5\right)^{4/5} - 871.3\right) 0.707^{1/3} = 660.9 = \frac{\alpha_2 L}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{Nu_{L,2} \lambda}{L} = \frac{660.9 \cdot 0.0263\,W/m \cdot K}{0.5\,m} = 34.8\,W/m^2 \cdot K$$

$$R_{C,2} = \frac{1}{(0.5\,m)^2 \cdot 34.8\,W/m \cdot K} = 0.115\,K/W$$

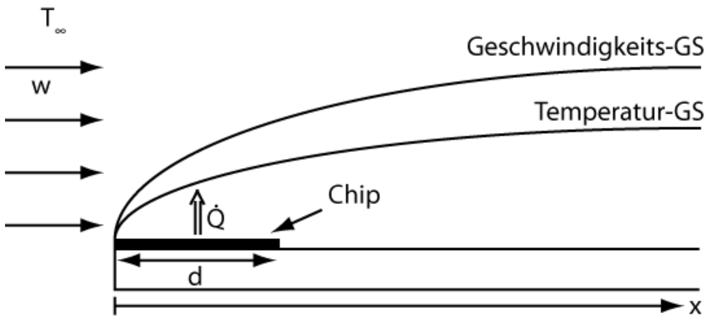
$$\dot{Q}_2 = \frac{T_i - T_\infty}{R_{D,2} + R_{C,2}} = \frac{150°C - 17°C}{2.575\,K/W + 0.115\,K/W} = 49.4\,W$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_i - T_{D,2}}{R_{D,2}} \qquad T_{D,2} = T_i - \dot{Q}_2 R_{D,2} = 150°C - 49.4\,W \cdot 2.575\,K/W = 22.7°C$$

alternative Berechnungsart von $T_{D,2}$:

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_{D,2} - T_\infty}{R_{C,2}} \qquad T_{D,2} = T_\infty + \dot{Q}_2 R_{C,2} = 17°C + 49.4\,W \cdot 0.115\,K/W = 22.7°C$$

Aufgabe 4



Annahmen:

a) stationärer Zustand

b) Wärmeübergang nur durch Konvektion

c) Temperatur des Chips ist konstant

Gemäss Korrelation gilt für die lokale Nusselt Zahl:

$$Nu_x = \frac{\alpha(x)x}{\lambda} = 0.332 \cdot Re_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 0.332 \left(\frac{w \cdot x}{\nu}\right)^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3} \quad (13)$$

$$= 0.332 \left(\frac{w}{\nu}\right)^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3} x^{1/2} = C_1 \cdot x^{1/2} \quad (14)$$

Der gemittelte Wärmeüberganskoeffizient über den Chip beträgt:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{d}\int_0^d \alpha(x) \cdot dx = \frac{1}{d}\int_0^d \frac{Nu(x) \cdot \lambda}{x} \cdot dx \quad (15)$$

$$= \frac{C_1 \cdot \lambda}{d}\int_0^d \frac{x^{1/2}}{x} \cdot dx = 2 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot C_1 \cdot d^{1/2} \quad (16)$$

$$= 2 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot Nu_d = 2 \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot 0.332 \cdot Re_d^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} = 2 \cdot \alpha(d) \quad (17)$$

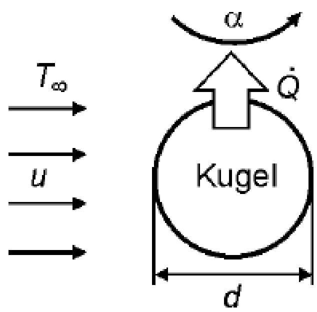
$$= 2 \cdot \frac{26.5 \cdot 10^{-3}\,W/(m \cdot K)}{0.004\,m} \cdot 0.332 \cdot \left(\frac{10\,m/s \cdot 0.004\,m}{16.19 \cdot 10^{-6}\,m^2/s}\right)^{1/2} 0.707^{1/3} = 196.26\,W/(m^2 \cdot K) \quad (18)$$

Wärmeübergang: $\dot{Q} = A\bar{\alpha} \cdot (T_{Chip} - T_\infty)$

$$T_{Chip} = T_\infty + \frac{\dot{Q}}{A\bar{\alpha}} = 25°C + \frac{30 \cdot 10^{-3}\,W}{(0.004\,m)^2 \cdot 196.26\,W/(m \cdot K)} = 34.6°C$$

Aufgabe 5

a)



Biot-Zahl: $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$

Aluminium-Kugel: $Bi_{Alu} = \frac{\alpha L}{\lambda_{Alu}} = \frac{125\,W/m \cdot K \cdot 0.05\,m}{200\,W/m \cdot K} = 0.031$

Stahl-Kugel: $Bi_{Stahl} = \frac{\alpha L}{\lambda_S} = \frac{125\,W/m \cdot K \cdot 0.05\,m}{60\,W/m \cdot K} = 0.10$

Allgemein gilt:

$Bi \ll 1$:Wärmeleitwiderstand durch Konvektion überwiegt.
$Bi \approx 1$:Konvektiver Wärmeübergang und Leitwiderstand haben gleiche Grössenordnung.
$Bi \gg 1$:Wärmewiderstand aufgrund Leitung überwiegt konvektiven Wärmeüberganswiderstand.

Die Annahme einer mittleren Temperatur für die Kugel bedeutet, dass der Wärmeleitwiderstand in der Kugel drin vernachlässigt wird, und dies ist nur für den Fall von$Bi \ll 1$ gültig. Für die Aluminiumkugel stimmt das gut, und für die Stahlkugel ist es ein Grenzfall, den man noch tolerieren kann.

b) 1. HS.: $\frac{dU}{dt} = -\dot{Q}_{conv} \Rightarrow \rho c V \frac{dT}{dt} = -\alpha A \left(T - T_\infty\right)$

Substitution: $\theta = T - T_\infty$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\alpha A}{\rho c V} \cdot \theta$$

Allgemeine Lösung: $\theta = C \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ mit $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha A}{\rho c V}$ und $\frac{A}{V} = \frac{6}{d}$

Anfangsbedingung:

$$\theta(t = 0) = T(t = 0) - T_\infty = T_i - T_\infty \Rightarrow C = T_i - T_\infty$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Aluminium-Kugel: $\tau_{Alu} = \frac{\rho_{Alu} c_{Alu} d}{6\alpha} = \frac{2700\,kg/m^3 \cdot 900\,J/kgK \cdot 0.05\,m}{6 \cdot 125\,W/m^2\,K} = 162\,s$

$$T_{Alu} = T_\infty + (T_i - T_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau_{Alu}}\right)$$

Stahl-Kugel: $\tau_S = \frac{\rho_S c_S d}{6\alpha} = \frac{7850\,kg/m^3 \cdot 500\,J/kgK \cdot 0.05\,m}{6 \cdot 125\,W/m^2\,K} = 261.7\,s$

$$T_S = T_\infty + (T_i - T_\infty)\exp\left(-\frac{t}{\tau_S}\right)$$

$$T_S - T_{Alu} = (T_i - T_\infty) \cdot \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_S}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{Alu}}\right)\right)$$

$$T_S - T_{Alu} = 130\,K \cdot \left(\exp\left(-\frac{60\,s}{261.7\,s}\right) - \exp\left(-\frac{60\,s}{162\,s}\right)\right) = 13.6\,K$$

c)

$$T_S - T_{Alu} = \Delta T = (T_i - T_\infty) \cdot \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_S}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{Alu}}\right)\right)$$

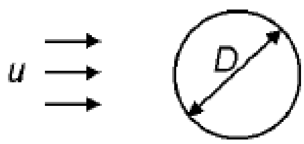
$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = (T_i - T_\infty) \cdot \left(-\frac{1}{\tau_S}\exp\left(-\frac{t}{\tau_S}\right) + \frac{1}{\tau_{Alu}}\exp\left(-\frac{t}{\tau_{Alu}}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\tau_{Alu}}{\tau_S} = \frac{\exp(-t_{\max}/\tau_{Alu})}{\exp(-t_{\max}/\tau_S)} = \exp\left(\frac{t_{\max}}{\tau_S} - \frac{t_{\max}}{\tau_{Alu}}\right)$$

$$t_{\max} = \frac{\ln(\tau_{Alu}/\tau_S)}{1/\tau_S - 1/\tau_{Alu}} = \frac{\ln(162\,s/261.7\,s)}{1/261.7\,s - 1/162\,s} = 203.9\,s$$

$$\Delta T_{\max} = 130\,K \cdot \left(\exp\left(-\frac{203.9\,s}{261.7\,s}\right) - \exp\left(-\frac{203.9\,s}{162\,s}\right)\right) = 22.7\,K$$

Aufgabe 6

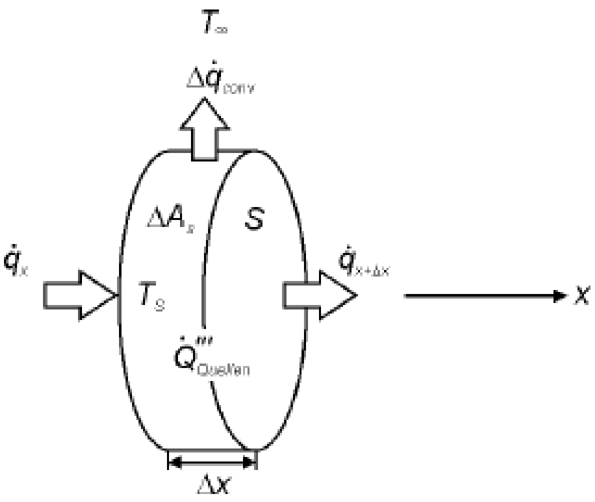


Annahmen:

- stationärer Zustand
- Drahttemperatur ist konstant
- $\alpha = konst.$
- langer Draht

- $40 < Re_D < 1000$
- keine Wärmestrahlung

a) Kontrollvolumen:



Es gilt: $\dot{q}_x = \dot{q}_{x+\Delta x} = 0$ (konstante Drahttemperatur)
1. HS: $\Delta V \cdot \dot{Q}'''_{Quellen} = \Delta\dot{q}_{conv}$

$$\Rightarrow S \cdot \Delta x \cdot \dot{Q}'''_{Quellen} = \Delta x \cdot P \cdot \alpha \left(T_S - T_\infty\right)$$

Joule'sche Wärme: $\Delta\dot{Q} = I^2 R_{el} = I^2 \frac{\rho_{el}\Delta x}{S}$ $\qquad \dot{Q}'''_{Quellen} = \frac{\Delta\dot{Q}}{\Delta V} = I^2 \frac{\rho_{el}}{S^2}$
$\Rightarrow I^2 \frac{\rho_{el}}{S} = P \cdot \alpha \left(T_S - T_\infty\right)$ mit $S = \frac{\pi}{4} D^2$ und $P = \pi D$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \left(\frac{D^3}{\rho_{el}} \left(T_S - T_\infty\right)\right)^{1/2} \alpha^{1/2} \tag{19}$$

Bestimmung von α:

$$Nu_D = C Re_D^m \mathrm{Pr}^n \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}\left(T_S\right)}\right)^{1/4} = 0.51 \cdot \left(\frac{uD}{\nu}\right)^{0,5} \mathrm{Pr}^{0.37} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}\left(T_S\right)}\right)^{0.25} = \frac{\alpha D}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.51 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{u}{D\nu}\right)^{0.5} \mathrm{Pr}^{0.37} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}\left(T_S\right)}\right)^{0.25}$$

Einsetzen in (19):

$$\Rightarrow I(u) = \frac{\pi}{2} \left(0.51 \cdot \frac{\lambda D^{2.5}}{\rho_{el}\nu^{0.5}} \left(T_S - T_\infty\right) \cdot \mathrm{Pr}^{0.37} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}\left(T_S\right)}\right)^{0.25}\right)^{0.5} u^{0.25}$$

$I(u) = a u^{0.25}$, mit $a = \frac{\pi}{2} \left(0.51 \cdot \frac{\lambda D^{2.5}}{\rho_{el}\nu^{0.5}} \left(T_S - T_\infty\right) \cdot \mathrm{Pr}^{0.37} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}\left(T_S\right)}\right)^{0.25}\right)^{0.5} = konst.$

Taylorreihenentwicklung:

$$I(u + \Delta u) = I(u) + \frac{\partial I(u)}{\partial u}\Delta u + \mathcal{O}(\Delta u^2)$$

$\mathcal{O}(\Delta u^2)$ beschreibt einen Fehlerterm der GrössenordnungΔu^2

$$\Delta I = I(u + \Delta u) - I(u) = \frac{\partial I(u)}{\partial u}\Delta u + \mathcal{O}(\Delta u^2) \approx \frac{\partial I(u)}{\partial u}\Delta u = 0.25au^{-0.75} \cdot \Delta u$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta I}{I} = \frac{0.25au^{-0.75} \cdot \Delta u}{I} = \frac{0.25au^{-0.75} \cdot \Delta u}{au^{0.25}} = 0.25\frac{\Delta u}{u}$$

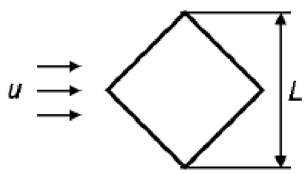
$$\frac{\Delta u}{u} = 4\frac{\Delta I}{I}$$

Der elektrische Strom ist nicht sehr sensitiv gegenüber der Luftgeschwindigkeit: ändert z.B. die Geschwindigkeit ihren Wert um 4%, dann ändert der (messbare) elektrische Strom nur um 1%.

b) $\Pr(T = 77°C) = 0.700$ (aus Literatur)

$I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{0.51 \cdot 0.0263\, W/m \cdot K \cdot (0.0005\, m)^{2.5}}{17.1 \cdot 10^{-5}\, \Omega m \cdot (15.89 \cdot 10^{-6}\, m^2/s)^{0.5}} (77-27)^\circ\, C \cdot 0.707^{0.37} \left(\frac{0.707}{0.700}\right)^{0.25}\right)^{0.5} (10\, m/s)^{0.25}$
$= 0.195\, A$

Aufgabe 7



a) 1. Balken mit $u_1 = 20\, m/s$:

$$Nu_1 = \frac{\alpha_1 L}{\lambda} = C Re_1^m \Pr^n = C\left(\frac{u_1 L}{\nu}\right)^m \Pr^n$$

2. Balken mit $u_2 = 15\, m/s$:

$$Nu_2 = \frac{\alpha_2 L}{\lambda} = C Re_2^m \Pr^n = C\left(\frac{u_2 L}{\nu}\right)^m \Pr^n$$

$$\frac{Nu_1}{Nu_2} = \frac{\frac{\alpha_1 L}{\lambda}}{\frac{\alpha_2 L}{\lambda}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{C\left(\frac{u_1 L}{\nu}\right)^m \Pr^n}{C\left(\frac{u_2 L}{\nu}\right)^m \Pr^n} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^m$$

$$\Rightarrow m = \frac{\ln(\alpha_1/\alpha_2)}{\ln(u_1/u_2)} = 0.7757$$

3. dicker Balken mit $u_3 = 15\,m/s$

$$Nu_3 = \frac{\alpha_3 L_3}{\lambda} = C Re_3^m \mathrm{Pr}^n = C\left(\frac{u_3 L}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n$$

$$\frac{Nu_1}{Nu_3} = \frac{\frac{\alpha_1 L}{\lambda}}{\frac{\alpha_3 L_3}{\lambda}} = \frac{\alpha_1 L}{\alpha_3 L_3} = \frac{C\left(\frac{u_1 L}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n}{C\left(\frac{u_3 L_3}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n} = \left(\frac{u_1 L}{u_3 L_3}\right)^m$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \left(\frac{u_1}{u_3}\right)^m \cdot \left(\frac{L}{L_3}\right)^{m-1}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \left(\frac{u_3}{u_1}\right)^m \cdot \left(\frac{L_3}{L}\right)^{m-1} = 50\,W/m^2\cdot K \cdot \left(\frac{15\,m/s}{20\,m/s}\right)^{0.7757} \cdot \left(\frac{1\,m}{0.5\,m}\right)^{0.7757-1}$$

$$= 34.2\,W/m^2\cdot K$$

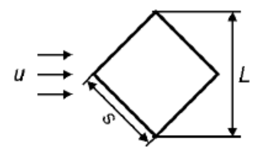
b) 4. dicker Balken mit $u_4 = 30\,m/s$

$$Nu_4 = \frac{\alpha_4 L_3}{\lambda} = C Re_4^m \mathrm{Pr}^n = C\left(\frac{u_4 L_3}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n$$

$$\frac{Nu_3}{Nu_4} = \frac{\frac{\alpha_3 L_3}{\lambda}}{\frac{\alpha_4 L_3}{\lambda}} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{C\left(\frac{u_3 L_3}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n}{C\left(\frac{u_4 L_3}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n} = \left(\frac{u_3}{u_4}\right)^m$$

$$\alpha_4 = \alpha_3\left(\frac{u_4}{u_3}\right)^m = 34.2\,W/m^2\cdot K \cdot \left(\frac{30\,m/s}{15\,m/s}\right)^{0.7757} = 58.6\,W/m^2\cdot K$$

c)



$$s = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Index S: Bezugsgrösse ist die Seitenlänge

$$Nu_{S,1} = \frac{\alpha_1 s}{\lambda} = C_S Re_{S,1}^{m_S} \mathrm{Pr}^{n_S} = C_S\left(\frac{u_1 s}{\nu}\right)^{m_S} \mathrm{Pr}^{n_S}$$

$$\frac{Nu_{S,1}}{Nu_{S,2}} = \frac{\frac{\alpha_1 s}{\lambda}}{\frac{\alpha_2 s}{\lambda}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{C_S\left(\frac{u_1 s}{\nu}\right)^{m_S} \mathrm{Pr}^{n_S}}{C_S\left(\frac{u_2 s}{\nu}\right)^{m_S} \mathrm{Pr}^{n_S}} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{m_S} \Rightarrow m_S = m$$

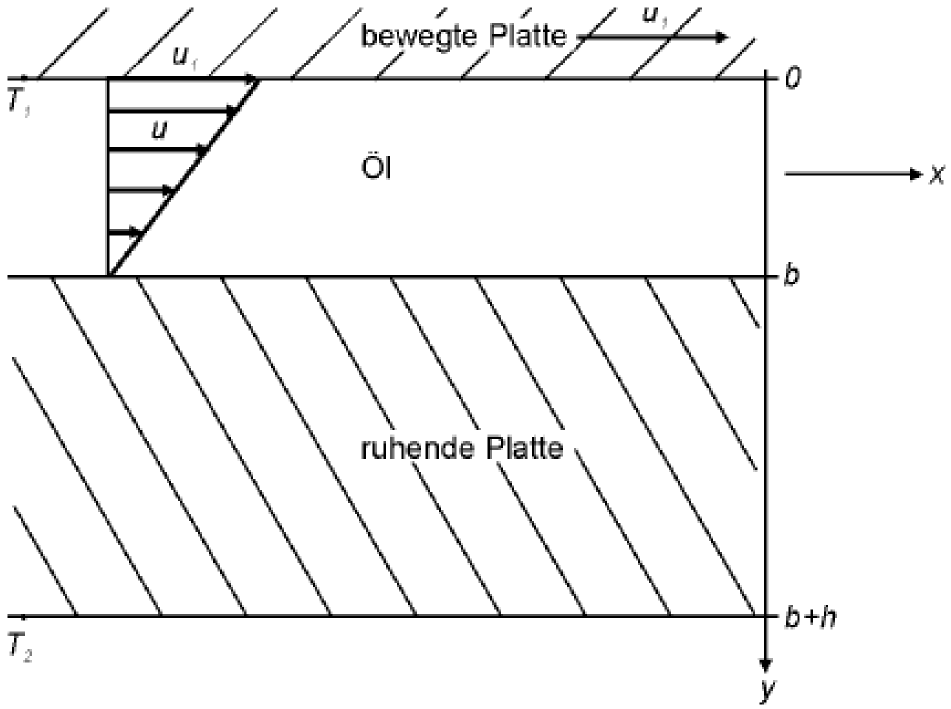
$$\mathrm{Pr} \neq f(L) \neq f(s) \Rightarrow n_S = n$$

$$\frac{Nu_1}{Nu_{S,1}} = \frac{\frac{\alpha_1 L}{\lambda}}{\frac{\alpha_1 s}{\lambda}} = \frac{L}{s} = \frac{C\left(\frac{u_1 L}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n}{C_S\left(\frac{u_1 s}{\nu}\right)^m \mathrm{Pr}^n} = \frac{C}{C_S}\left(\frac{L}{s}\right)^m \Rightarrow C_S = C\left(\frac{L}{s}\right)^{m-1} = C\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{m-1}$$

Falls eine andere charakteristische Länge gewählt wird, ändert das Resultat nicht, da es nur vom Parameter m abhängt, der sich nicht ändert.

Der Parameter C ändert sich jedoch, wenn die Bezugsgrösse gewechselt wird. Dieser hat aber keinen Einfluss auf die Resultate, die bei a) gesucht sind.

Aufgabe 8



Annahmen:

a) Öl ist ein Newton'sches Fluid und inkompressibel

b) no-slip Randbedingungen für Öl

c) konstante Materialeigenschaften

d) stationärer Zustand

e) voll entwickeltes Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld des Öls: $\frac{\partial \ldots}{\partial x} = 0$

f) kein Einfluss der Gravitation

a) Geschwindigkeitsfeld: $(0 \leq y \leq b)$ Kontinuitätsgleichung (2-dim., inkompressibel):
$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $v = C$ mit der Randbedingung: $v(y=0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v = 0$
Impulserhaltung in x-Richtung (2-dimensional, inkompressibel):

$$\rho \left(u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v}_{=0} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \underbrace{\rho g_x}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Allgemeine Lösung: $u(y) = C_1 y + C_2$

Randbedingungen:
$u(y=0) = u_1 \Rightarrow C_2 = u_1$
$u(y=b) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{u_1}{b}$

$$u(y) = u_1 \left(-\frac{y}{b} + 1 \right)$$

Temperaturfeld:$(0 \leq y \leq b + h)$
Ruhende Platte: Energieerhaltung:

$$\underbrace{\rho_p c_p \frac{\partial T_p}{\partial t}}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial x} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial y} \right) + \underbrace{\dot{Q}'''_{Quellen}}_{=0}$$

$$0 = \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2}$$

Allgemeine Lösung: $T_p(y) = C_3 y + C_4$ für $b < y \leq b + h$
Randbedingung: $T_p(y = b + h) = T_2 \Rightarrow T_2 = C_3 (b + h) + C_4$
Öl: Energieerhaltung (2-dim., inkompressibel, keine Quellen):

$$\rho_{\text{Öl}} c_{\text{Öl}} \left(u \underbrace{\frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v}_{=0} \frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial y} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{\text{Öl}} \frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial x} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\text{Öl}} \frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial y} \right) + \mu_{\text{Öl}} \cdot \Phi + \underbrace{\dot{Q}'''_{Quellen}}_{=0}$$

mit dem Wärmedissipationsterm: $\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=0} \right)^2 - 4 \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_{\text{Öl}} \frac{\partial^2 T_{\text{Öl}}}{\partial y^2} + \mu_{\text{Öl}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Aus dem Geschwindigkeitsfeld folgt: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u_1}{b}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T_{\text{Öl}}}{\partial y^2} = -\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{\lambda_{\text{Öl}} b^2}$$

Allgemeine Lösung: $T_{\text{Öl}}(y) = -\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{2\lambda_{\text{Öl}} b^2} y^2 + C_5 y + C_6$ für $0 < y \leq b$

Randbedingung: $T_{\text{Öl}}(y=0) = T_1 \qquad C_6 = T_1$

Kopplung der ruhenden Platte mit dem Öl:

$$T_p(y=b) = T_{\text{Öl}}(y=b) \Rightarrow C_3 b + C_4 = -\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{2\lambda_{\text{Öl}} b^2} b^2 + C_5 b + T_1 \tag{20}$$

$$\dot{q}''_p(y=b) = \dot{q}''_{\text{Öl}}(y=b) - \lambda_p \left.\frac{\partial T_p}{\partial y}\right|_{y=b} = -\lambda_{\text{Öl}} \left.\frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial y}\right|_{y=b} \Rightarrow -\lambda_p C_3 = \frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{b^2} b - \lambda_{\text{Öl}} C_5 \tag{21}$$

3 Unbekannte: C_3,C_4 undC_5

3 Gleichungen: $T_2 = C_3 (b+h) + C_4 C_3 b + C_4 = -\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{2\lambda_{\text{Öl}}} + C_5 b + T_1 - \lambda_p C_3 = \frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{b} - \lambda_{\text{Öl}} C_5$

Auflösen: $C_3 = ... = \frac{2\lambda_{\text{Öl}}(T_1 - T_2) + u_1^2 \mu_{\text{Öl}}}{-2(h\lambda_{\text{Öl}} + b\lambda_p)}$

$$C_4 = ... = \frac{2\lambda_{\text{Öl}} T_1 (b+h) + 2T_2 b (\lambda_p - \lambda_{\text{Öl}}) + \mu_{\text{Öl}} u_1^2 (b+h)}{2(h\lambda_{\text{Öl}} + b\lambda_p)}$$

$$C_5 = ... = \frac{2b\lambda_{\text{Öl}} \lambda_p (T_2 - T_1) + u_1^2 \mu_{\text{Öl}} (2h\lambda_{\text{Öl}} + b\lambda_p)}{2b\lambda_{\text{Öl}} (h\lambda_{\text{Öl}} + b\lambda_p)}$$

$$C_6 = T_1$$

Numerisch:

$$C_3 = \frac{2 \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot (10°C - 50°C) + (5\, m/s)^2 \cdot 0.081\, Pa \cdot s}{-2 \cdot (0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)} = 1.477\, K/m$$

$$C_4 = \frac{2 \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot 283\, K (0.01\, m + 0.3\, m) + 2 \cdot 323\, K \cdot 0.01\, m (384\, W/m \cdot K - 0.169\, W/m \cdot K)}{2 \cdot (0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)} + \frac{0.081\, Pa \cdot s \cdot (5\, m/s)^2 \cdot (0.01\, m + 0.3\, m)}{2 \cdot (0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)} = 322.542\, K$$

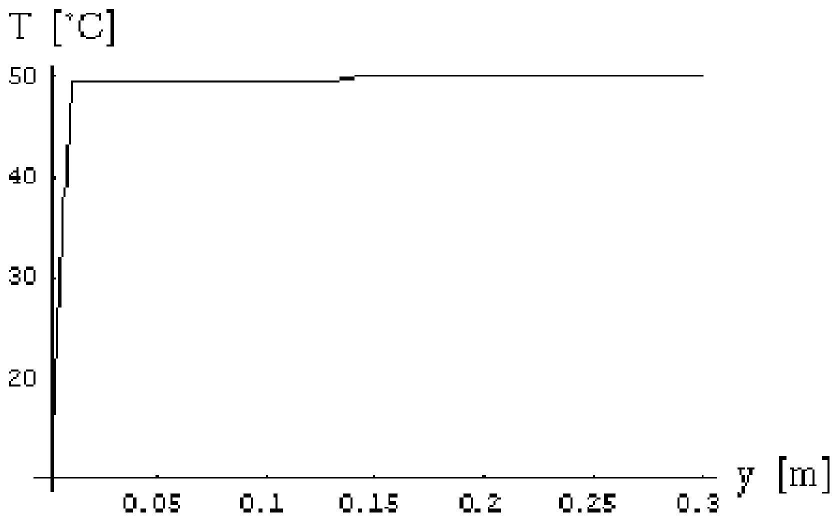
$$C_5 = \frac{2 \cdot 0.01\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot 384\, W/m \cdot K \cdot (323\, K - 283\, K)}{2 \cdot 0.01\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot (0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)} + \frac{(5\, m/s)^2 \cdot 0.081\, Pa \cdot s \cdot (2 \cdot 0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)}{2 \cdot 0.01\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot (0.3\, m \cdot 0.169\, W/m \cdot K + 0.01\, m \cdot 384\, W/m \cdot K)} = 4554.8\, K/m$$

$$C_6 = 283\, K$$

$$\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{2\lambda_{\text{Öl}} b^2} = \frac{0.081\, Pa \cdot s \cdot (5\, m/s)^2}{2 \cdot 0.169\, W/m \cdot K \cdot (0.01\, m)^2} = 59911\, K/m^2$$

$$T_p(y) = 1.477\, K/m \cdot y + 322.542\, K$$

$$T_{\text{Öl}}(y) = -59911\, K/m^2 \cdot y^2 + 4554.8\, K/m \cdot y + 283\, K$$



b) Wärmestromdichte:

$$\dot{Q}''(y=b) = -\lambda_p \left.\frac{\partial T_p}{\partial y}\right|_{y=b} = -\lambda_{\text{Öl}} \left.\frac{\partial T_{\text{Öl}}}{\partial y}\right|_{y=b}$$

i) Analyse der Platte:

$$\dot{Q}''(y=b) = -\lambda_p \cdot C_3 = -384\,W/m \cdot K \cdot 1.477\,K/m = -567.2\,W/m^2$$

ii) Analyse der Ölschicht:

$$\begin{aligned}\dot{Q}''(y=b) &= -\lambda_{\text{Öl}} \cdot \left(-\frac{\mu_{\text{Öl}} u_1^2}{\lambda_{\text{Öl}} b^2} b + C_5\right) \\ &= 0.169\,W/m \cdot K \cdot \left(\frac{0.081\,Pa \cdot s \cdot (5\,m/s)^2}{0.169\,W/m \cdot K \cdot (0.01\,m)^2} 0.01\,m - 4554.8\,K/m\right) \\ &= -567.2\,W/m^2\end{aligned}$$