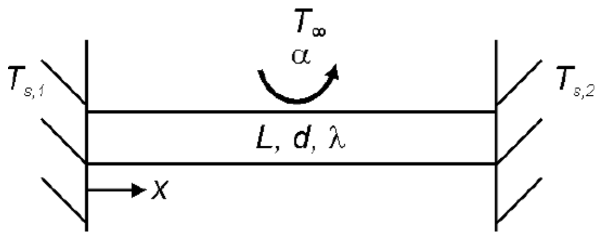
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Thermodynamik II – Musterlösung Rechenübung 8

Aufgabe 1

a)



Annahmen:

(a) stationärer Zustand

(b) 1-dimensionale Wärmeleitung (x-Richtg.)

(c) $\lambda = konst., \alpha = konst.$

(d) keine Wärmequellen

(e) keine Wärmestrahlung

Stab wird als Rippe modelliert

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{dV}{dx}T\right] = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial T}{\partial x}\right) \underbrace{-\rho c \frac{\partial}{\partial x}(SuT)}_{\text{weil u = 0}} - \frac{dA}{dx}\alpha\left(T - T_\infty\right) + \dot{Q}'''_{Quellen}\frac{dV}{dx} - \dot{Q}''_{Strahl.}\frac{dA}{dx}$$

mit $dA = Pdx$, Umfang $P = \pi D$ und Querschnittsfläche S

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda S}\left(T - T_\infty\right) = 0$$

(*Alternative Herleitung: siehe Anhang am Ende der Aufgabe!*)
Setze Rippenparameter $m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda S}$ und Übertemperatur $\theta = T - T_\infty$:

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

Die allgemeine Lösung lautet für $m = konst.$:

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

Die Randbedingungen BC sind:

$$T(x=0) = 373\,K \qquad \theta(x=0) = \theta_b = T(0) - T_\infty = 100\,K \tag{1}$$
$$T(x=L) = 273\,K \qquad \theta(x=L) = T(L) - T_\infty = 0\,K \tag{2}$$

Lösen von BC 1: $\theta_b = C_1 + C_2$
Lösen von BC 2: $0 = C_1 \cdot e^{mL} + C_2 \cdot e^{-mL}$

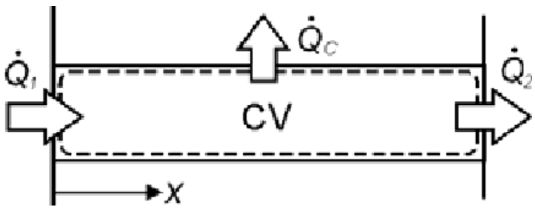
Auflösen:

$$C_2 = -C_1 e^{2mL}, \theta_b = C_1 - C_1 e^{2mL}$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{1-e^{2mL}} \text{ und } C_2 = \frac{-\theta_b}{1-e^{2mL}} \cdot e^{2mL}$$

einsetzen:

$$\theta(x) = \frac{\theta_b}{1-e^{2mL}} \cdot e^{mx} - \frac{\theta_b e^{2mL}}{1-e^{2mL}} \cdot e^{-mx}$$
$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{\theta_b}{1-e^{2mL}} \cdot \left(e^{mx} - e^{2mL-mx}\right)$$

Erstellen der Energiebilanz:



1. HS über das CV

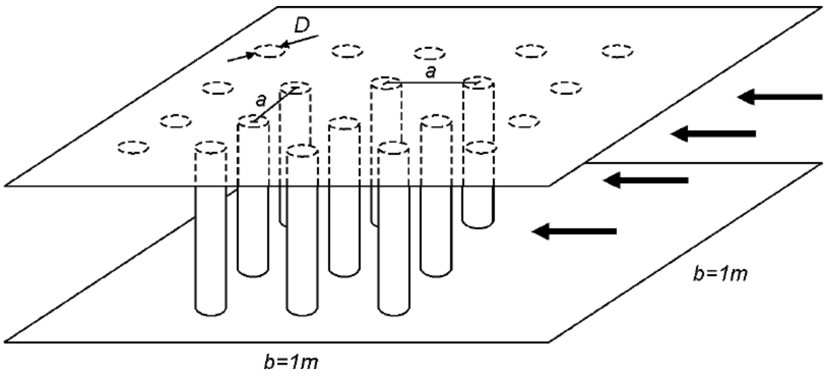
$$\dot{Q}_c = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2$$

Allgemein: $\dot{Q} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$, mit Querschnittsfläche S
Hier gilt:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(T(x)-T_\infty)}{dx} = \frac{dT}{dx} \Rightarrow \dot{Q} = -\lambda S \frac{d\theta}{dx}$$
$$\dot{Q}_c = -\lambda S \left(\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} - \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} \right)$$
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_b}{1-e^{2mL}} \cdot \left(me^{mx} + me^{2mL-mx}\right)$$
$$\dot{Q}_c = -\lambda S \frac{\theta_b}{1-e^{2mL}} \left(m\left(e^0 + e^{2mL}\right) - m\left(e^{mL} + e^{mL}\right)\right)$$
$$= -\frac{\lambda S \theta_b m}{1-e^{2mL}} \left(1 + e^{2mL} - 2e^{mL}\right)$$

$$m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda S} = \frac{4\alpha}{\lambda D} = \frac{4 \cdot 100\,W/(m^2 \cdot K)}{400\,W/(m \cdot K) \cdot 0.001\,m} = 1000\,m^{-2}$$
$$S = \frac{\pi}{4} D^2 = 7{,}854 \cdot 10^{-7}\,m^2$$
$$\dot{Q}_c = -\frac{400\,W/(m \cdot K) \cdot 7.854 \cdot 10^{-7}\,m^2 \cdot 100\,K \cdot \sqrt{1000\,m^{-2}}}{1-e^{2 \cdot \sqrt{1000\,m^{-2}} \cdot 0.025\,m}} \cdot$$
$$\left(1 + e^{2 \cdot \sqrt{1000\,m^{-2}} \cdot 0.025\,m} - 2e^{\sqrt{1000\,m^{-2}} \cdot 0.025\,m}\right)$$
$$\dot{Q}_c = 0.3734\,W$$

b)

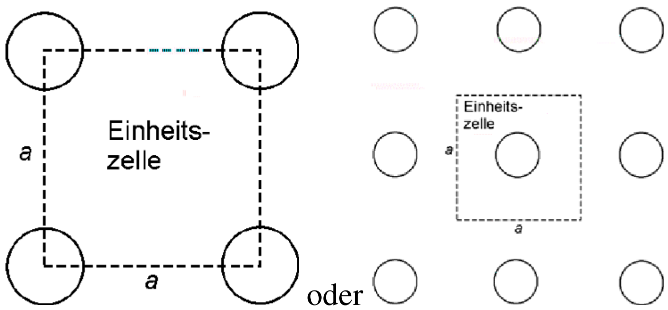


Annahmen:

- Fluidtemperatur ist konstant $T_\infty = 0\,°C$
- alle Wärmeübergangskoeffizienten sind konstant

Totaler Wärmeübergang:

$$\dot{Q}_{tot} = \underbrace{\dot{Q}_{Rippen}}_{\text{Konvektion Rippen}} + \underbrace{\dot{Q}_{W1}}_{\text{Konvektion Wand 1}} + \underbrace{\dot{Q}_{W2}}_{\text{Konvektion Wand 2}}$$



Wärmeübergangsbeitrag der Einheitszelle aufgrund der Konvektion um die Rippen: $\dot{Q}''_{Rippen} = \frac{\dot{Q}_c}{A_{EZ}}$, mit der Einheitszellenfläche $A_{EZ} = a^2$

$$\Rightarrow \dot{Q}''_{Rippen} = 23.34\,kW/m^2$$

Wärmeübergangsbeitrag der Einheitszelle aufgrund der Konvektion zur warmen Wand 1:

$$\dot{Q}''_{W1} = \frac{\dot{Q}_{W1}}{A_{EZ}} = \frac{\alpha_W A_W \left(T_{W1} - T_\infty\right)}{A_{EZ}}$$

mit der Einheitszellenfläche, die nicht von Rippen bedeckt ist $A_W = a^2 - \frac{\pi}{4}D^2 = 1.521 \cdot 10^{-5}\,m^2$ und der Wandtemperatur $T_{W1} = 373\,K$.

$$\Rightarrow \dot{Q}''_{W1} = \frac{40\,W/(m^2 \cdot K) \cdot 1.521 \cdot 10^{-5}\,m^2 \cdot (100\,K)}{(0.004\,m)^2} = 3.80\,kW/m^2$$

Wärmeübergangsbeitrag der Einheitszelle aufgrund der Konvektion zur kalten Wand 2: $\dot{Q}''_{W2} = \frac{\dot{Q}_{W2}}{A_{EZ}} = \frac{\alpha_W A_W (T_{W2} - T_\infty)}{A_{EZ}} = 0$, weil $T_{W2} = T_\infty$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{tot} = A_{tot} \left(\dot{Q}''_{Rippen} + \dot{Q}''_{W1} \right) = 1\, m^2 \left(23.34\, kW/m^2 + 3.80\, kW/m^2 \right)$$

$\dot{Q}_{tot} = 27.14\, kW$ d.h. die Rippen führen 86% der totalen Wärmemenge ab.

Alternativer Lösungsweg:

Anzahl Rippen: $n = \frac{A}{A_{EZ}} = \frac{1\, m^2}{(4\, mm)^2} = 62500$

$$\dot{Q}_{Rippen} = n \cdot \dot{Q}_c = 23337.5\, W$$

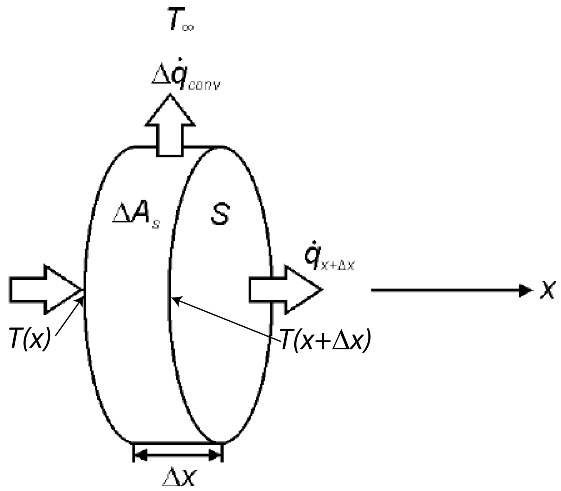
$$\dot{Q}_{W1,tot} = n \cdot \dot{Q}_{W1} = n \cdot \alpha_W \cdot A_W \cdot (T_{W1} - T_\infty) = 3802.5\, W$$

$$\dot{Q}_{W2,tot} = n \cdot \dot{Q}_{W2} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{Rippen} + \dot{Q}_{W1} + \dot{Q}_{W2} = 27.14\, kW$$

Anhang:

Herleitung der Rippengleichung



1. HS: $\dot{q}_x = \dot{q}_{x+\Delta x} + \Delta\dot{q}_{conv}$

$$\Delta\dot{q}_{conv} = \alpha \Delta A_s \left(\frac{T(x) + T(x+\Delta x)}{2} - T_\infty \right)$$

$\Delta A_s = P\Delta x$, mit dem Umfang P

$$\Rightarrow 0 = \dot{q}_{x+\Delta x} - \dot{q}_x + \alpha P \Delta x \left(\frac{T(x) + T(x+\Delta x)}{2} - T_\infty \right)$$

$$0 = \frac{\dot{q}_{x+\Delta x} - \dot{q}_x}{\Delta x} + \alpha P \left(\frac{T(x) + T(x+\Delta x)}{2} - T_\infty \right)$$

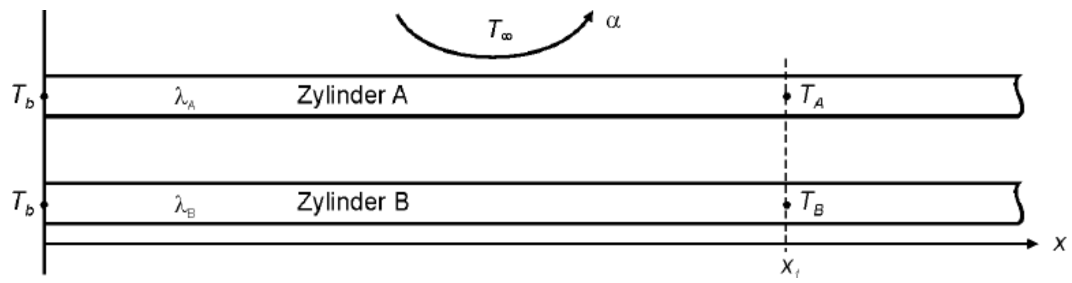
es gilt: $\lim\limits_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{\dot{q}_{x+\Delta x} - \dot{q}_x}{\Delta x} = \frac{d\dot{q}(x)}{dx}$ und $\lim\limits_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{T(x)+T(x+\Delta x)}{2} = T(x)$

$$0 = \frac{d\dot{q}(x)}{dx} + \alpha P \left(T(x) - T_\infty \right)$$

mit $\dot{q}(x) = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx}$ und $S = konst., \lambda = konst.$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda S} \left(T(x) - T_\infty \right) = 0$$

Aufgabe 2



Annahmen:

a) stationärer Zustand

b) 1-dimensionale Wärmeleitung (x-Richtung)

c) konstante Materialeigenschaften

d) keine Wärmestrahlung

e) keine Kontaktwiderstände

f) sehr lange Zylinder

Zylinder werden als Rippen modelliert:

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{dV}{dx} T \right]}_{=0} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \underbrace{\rho c \frac{\partial}{\partial x} (SuT)}_{\text{weil } u=0} - \frac{dA}{dx} \alpha (T - T_\infty) + \underbrace{\dot{Q}'''_{Quellen} \frac{dV}{dx}}_{=0} - \underbrace{\dot{Q}''_{Strahl.} \frac{dA}{dx}}_{=0}$$

mit $dA = P dx$, mit dem Umfang P

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda S}\,(T - T_\infty) = 0$$

Setze Rippenparameter $m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda S}$ und Übertemperatur $\theta = T - T_\infty$:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

Die allgemeine Lösung lautet für $m = konst.$:

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

Die Randbedingungen (BC; Boundary Condition) sind:

$$T(x = 0) = T_b \qquad \theta(x = 0) = \theta_b = T_b - T_\infty \tag{3}$$

$$T(x \Rightarrow \infty) = T_\infty \qquad \theta(x \Rightarrow \infty) = 0 \tag{4}$$

Lösen von Randbedingung 2: $\Rightarrow C_1 = 0$
Lösen von Randbedingung 1: $\Rightarrow C_2 = T_b - T_\infty$

$\Rightarrow \frac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty} = e^{-mx}$ oder $\ln\left(\frac{T(x)-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right) = -mx = -\sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}}x$

Zylinder A bei x_1: $\ln\left(\frac{T_A-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right) = -\sqrt{\frac{\alpha P_A}{\lambda_A S_A}}x_1$

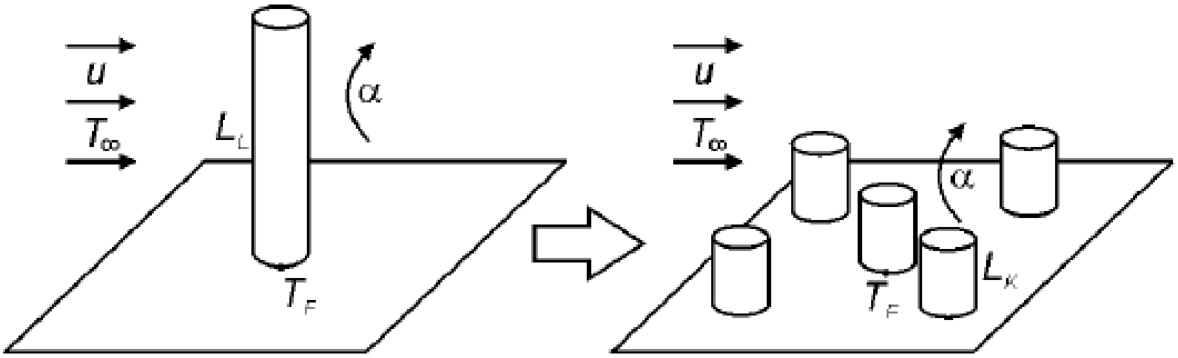
Zylinder B bei x_1: $\ln\left(\frac{T_B-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right) = -\sqrt{\frac{\alpha P_B}{\lambda_B S_B}}x_1$

mit $P_A = P_B$ und $S_A = S_B$: $\frac{\ln\left(\frac{T_A-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right)}{\ln\left(\frac{T_B-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right)} = \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}}$

$$\lambda_B = \lambda_A \cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{T_A-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right)}{\ln\left(\frac{T_B-T_\infty}{T_b-T_\infty}\right)}\right]^2 = 200\,W/m\cdot K \cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{75°C-25°C}{100°C-25°C}\right)}{\ln\left(\frac{60°C-25°C}{100°C-25°C}\right)}\right]^2 = 56.6\,W/m\cdot K$$

$$\lambda_B = 56.6\,W/m\cdot K$$

Aufgabe 3



Wärmeübertragungsleistung entspricht dem Wärmefluss durch den Rippenfuss.

Der Wärmefluss durch den Rippenfuss einer einzelnen Rippe mit adiabatem Kopf ist:

$$\dot{Q}_F = \lambda S \theta_F m \tanh(mL) = \frac{\pi}{4} D^2 \lambda (T_F - T_\infty) m \tanh(mL)$$

Rippenparameter $m = \left(\frac{\alpha P}{\lambda S}\right)^{1/2} = \left(\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda D}\right)^{1/2} = \left(\frac{4 \cdot 50\, W/m^2 \cdot K}{200\, W/m \cdot K \cdot 0.005\, m}\right)^{1/2} = 14.14\, m^{-1}$

Langer Stab: $\dot{Q}_{F,L} = \frac{\pi}{4} D^2 \lambda (T_F - T_\infty) m \tanh(mL_L)$

5 kurze Stäbe: $\dot{Q}_{F,K} = 5 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \lambda (T_F - T_\infty) m \tanh(mL_K)$

$$\frac{\dot{Q}_{F,K}}{\dot{Q}_{F,L}} = \frac{5 \tanh(mL_K)}{\tanh(mL_L)} = \frac{5 \cdot \tanh(14.14\, m^{-1} \cdot 0.03\, m)}{\tanh(14.14\, m^{-1} \cdot 0.15\, m)} = 2.06$$

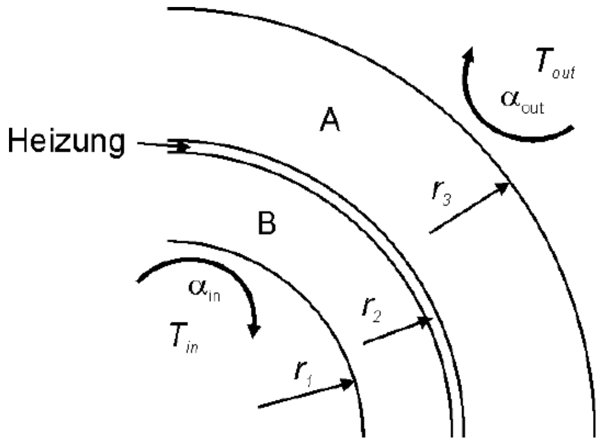
Die Wirkung wird etwa verdoppelt!

Alternative Berechnungsmethode: Rippenwirkungsgrad für Rippe mit adiabatem Kopf:
Langer Stab: $\eta_{R,L} = \frac{\tanh(mL_L)}{mL_L}$
Kurzer Stab: $\eta_{R,K} = \frac{\tanh(mL_K)}{mL_K}$

$$\frac{\eta_{R,K}}{\eta_{R,L}} = \frac{L_L \tanh(mL_K)}{L_K \tanh(mL_L)} = \frac{0.15\, m \cdot \tanh(14.14\, m^{-1} \cdot 0.03\, m)}{0.03\, m \cdot \tanh(14.14\, m^{-1} \cdot 0.15\, m)} = 2.0$$

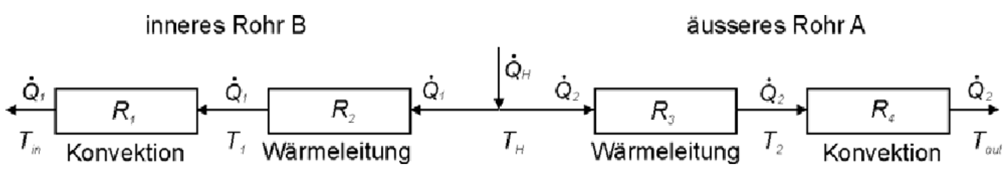
Aufgabe 4

a)



Annahmen:

- stationärer Zustand
- Heizung ist sehr dünn
- Temperatur der Heizung ist konstant
- 1-dimensionale Wärmeleitung (r-Richtg.)
- konstante Materialeigenschaften
- uniforme Wärmequellen
- keine Wärmestrahlung



Thermischer Widerstand aufgrund Wärmeleitung durch Rohrwand:$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{r_{out}}{r_{in}}\right)}{2\pi\lambda\ell}$ mit Rohrlänge ℓ und den Radien r_{out} und r_{in}

Thermischer Widerstand aufgrund Konvektion an Wand:$R_{th} = \frac{1}{A\alpha}$ mit Oberfläche A und Wärmeübergangskoeffizient α. Daraus folgt:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\ell\alpha_{in}r_1}, R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_B\ell}, R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_A\ell}, R_4 = \frac{1}{2\pi\ell\alpha_{out}r_3}$$

b) Serielle Anordnung von Widerständen: $R_{seriell} = \sum_i R_i$

$$\dot{Q}_1 \left(R_1 + R_2\right) = T_H - T_{in}$$
$$\dot{Q}_2 \left(R_3 + R_4\right) = T_H - T_{out}$$
$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \frac{T_H - T_{in}}{R_1 + R_2} + \frac{T_H - T_{out}}{R_3 + R_4}$$
$$\dot{Q}_H + \frac{T_{in}}{R_1 + R_2} + \frac{T_{out}}{R_3 + R_4} = T_H \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right)$$
$$T_H = \frac{\dot{Q}_H + \frac{T_{in}}{R_1+R_2} + \frac{T_{out}}{R_3+R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_4}} \Rightarrow$$
$$= \frac{\dot{Q}_H + \frac{T_{in}}{\frac{1}{2\pi\ell\alpha_{in}r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_B\ell}} + \frac{T_{out}}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_A\ell} + \frac{1}{2\pi\ell\alpha_{out}r_3}}}{\frac{1}{\frac{1}{2\pi\ell\alpha_{in}r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_B\ell}} + \frac{1}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_A\ell} + \frac{1}{2\pi\ell\alpha_{out}r_3}}}$$
$$= \frac{\frac{\dot{Q}_H}{2\pi\ell} + \frac{T_{in}\alpha_{in}r_1\lambda_B}{\lambda_B + \alpha_{in}r_1\ln(r_2/r_1)} + \frac{T_{out}\lambda_A\alpha_{out}r_3}{\alpha_{out}r_3\ln(r_3/r_2) + \lambda_A}}{\frac{\lambda_B\alpha_{in}r_1}{\lambda_B + \alpha_{in}r_1\ln(r_2/r_1)} + \frac{\lambda_A\alpha_{out}r_3}{\alpha_{out}r_3\ln(r_3/r_2) + \lambda_A}}$$