

Regelungstechnik II PVK

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Vorwort

Dieses Skript wurde unter Verwendung des Buches *Analysis and Synthesis of Single-Input-Single-Output Control System* von Prof. Lino Guzzella und des zu Verfügung gestellten Materials der Vorlesung Regelungstechnik II (FS 2016) verfasst.

Es dient der Möglichkeit, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen. Für ein tieferes Verständnis verweise ich jedoch auf das Studium des oben zitierten Buches.

Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: kleine Fehler können enthalten sein.

Deshalb bin ich dankbar, wenn mir Fehler gemeldet werden, so dass ich sie korrigieren kann. Für Verbesserungsvorschläge bin ich natürlich auch offen.

Ich möchte mich bei allen Personen, die mir bei der Erstellung dieses Skriptes geholfen haben, bedanken.

Ich wünsche euch viel Spass mit Regelungstechnik II und viel Erfolg bei der Prüfung!

24. September 2017

Nicolas Lanzetti, lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung Regelungstechnik I	6
1.1 Modellierung und Übertragungsfunktion	6
1.2 Analyse linearer Systeme	6
1.2.1 Lyapunov Stabilität	6
1.2.2 Steuerbarkeit	6
1.2.3 Beobachtbarkeit	6
1.3 Analyse von Feedback-Systemen	7
1.4 Nyquist Theorem	7
1.4.1 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis	8
1.5 Aufgaben	9
2 SISO Reglersynthese	10
2.1 Loop Shaping	10
2.1.1 Streckeninvertierung	10
2.1.2 Loop Shaping für nichtminimalphasige Systeme	10
2.1.3 Loop Shaping für instabile Systeme	10
2.1.4 Realisierbarkeit	11
2.2 Kaskadierte Regelung	11
2.2.1 Struktur des kaskadierten Regelkreises	11
2.2.2 Schneller Regelkreis	11
2.2.3 Langsamer Regelkreis	12
2.2.4 Geschwindigkeit einer Strecke	12
2.3 Prädiktive Regelung	12
2.3.1 Struktur	12
2.3.2 Analyse	13
2.4 Robustheit	14
2.4.1 Robuste Stabilität	14
2.4.2 Nominelle Regelgüte	14
2.4.3 Robuste Regelgüte	14
2.5 Aufgaben	16
3 Realisierung und Implementierung von Reglern	23
3.1 PID-Realisierung	23
3.2 Feed Forward	23
3.3 Anti-Reset Windup	24
3.4 Digitale Regelung	25
3.4.1 Grundlagen	25
3.4.2 Zustandsraumdarstellung	26
3.4.3 Stabilität	26
3.4.4 Aliasing	26
3.4.5 Anti-Aliasing Filter	26
3.4.6 Regleremulation	27
3.4.7 Stabilität	27
3.5 Aufgaben	29
4 MIMO Systeme	36
4.1 Systembeschreibung	36
4.1.1 Zustandsraumdarstellung	36
4.1.2 Übertragungsfunktion	36
4.2 Systemanalyse	37

4.2.1	Lyapunov Stabilität	37
4.2.2	Steuerbarkeit	37
4.2.3	Beobachtbarkeit	37
4.3	Pole und Nullstellen	37
4.4	Nyquist Theorem für MIMO Systeme	39
4.5	Relative Gain Array (RGA)	39
4.6	Aufgaben	41
5	Frequenzantworten von MIMO-Systemen	50
5.1	Singulärwertzerlegung	50
5.1.1	Einführung	50
5.1.2	Singulärwertzerlegung	50
5.1.3	Beispiel	51
5.2	Frequenzantworten	52
5.2.1	Maximale und minimale Verstärkung	53
5.2.2	Robustheit und Störungsunterdrückung	54
5.3	Aufgaben	55
6	MIMO Reglersynthese	59
6.1	Der lineare quadratische Regulator (LQR)	59
6.1.1	Formulierung	59
6.1.2	Methode	60
6.1.3	Frequenzbereich	60
6.1.4	Eigenschaften	60
6.2	LQRI	61
6.2.1	Formulierung	61
6.2.2	Methode	62
6.3	LQG	62
6.3.1	Beobachter	62
6.3.2	LQG Regler	63
6.3.3	Methode	64
6.4	LQGI	65
6.4.1	Methode	65
6.5	Numerische Optimierung	66
6.6	MPC	66
6.7	LTR	67
6.7.1	β Methode	67
6.7.2	LQG/LQR für $m \geq p$	68
6.7.3	LQG/LQR für $p \geq m$	69
6.8	Aufgaben	70
A	Mathematik	83
A.1	Matrizen	83
A.1.1	Inverse Matrix	83
A.1.2	Eigenwertproblem	83
A.2	Komplexe Analysis	83
A.2.1	Rechenregel	83
B	Mechanik	84
B.1	Dynamik und Kräfte	84
B.2	Arbeit und Leistung	84

C MATLAB	85
C.1 Allgemein	85
C.2 RT-Befehle	85
C.3 Plot und Diagramme	86

1 Wiederholung Regelungstechnik I

1.1 Modellierung und Übertragungsfunktion

Die Modellierung, Normierung und Linearisierung¹ einer Regelstrecke liefern eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Die Übertragungsfunktion kann dann wie folgt berechnet werden:

$$P(s) = c \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot b + d.\tag{1.2}$$

Im Allgemeinen lässt sich die Übertragungsfunktion eines Systems als rationale Funktion der Form

$$P(s) = b_m \cdot \frac{(s - \xi_1) \cdot \dots \cdot (s - \xi_m)}{(s - \pi_1) \cdot \dots \cdot (s - \pi_n)}\tag{1.3}$$

schreiben, wobei π_i die Pole und ζ_i die Nullstellen des Systems bezeichnen. Diese spielen eine entscheidende Rolle für das Verhalten des Systems.

1.2 Analyse linearer Systeme

1.2.1 Lyapunov Stabilität

Die Stabilität eines Systems lässt sich anhand der Eigenwerte der Matrix A bestimmen:

- Asymptotisch stabil: $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$;
- (Grenz)stabil: $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i .

1.2.2 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem beliebigen Input u ein belieber Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.

Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = [b \ A \cdot b \ \dots \ A^{n-1} \cdot b]\tag{1.4}$$

vollen Rang hat.

1.2.3 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}\tag{1.5}$$

vollen Rang hat.

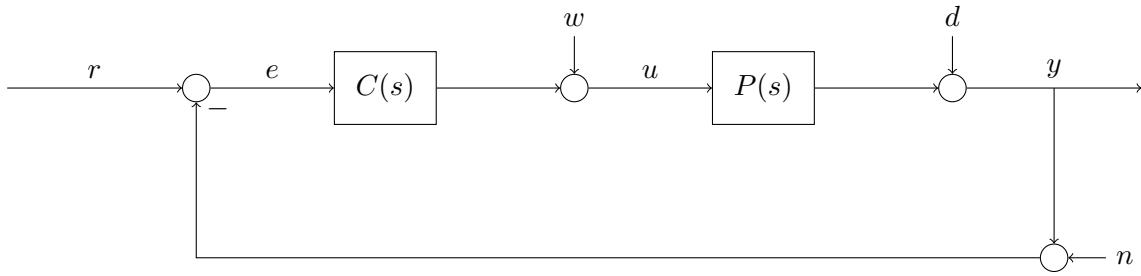


Abbildung 1: Signalflussbild eines Regelsystems mit Rückführung.

1.3 Analyse von Feedback-Systemen

Die Kreisverstärkung ist definiert als

$$L(s) = P(s) \cdot C(s), \quad (1.6)$$

wobei $P(s)$ bezeichnet die Strecke (System) und $C(s)$ bezeichnet den Regler.

Daraus definiert man auch die Sensivität

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (1.7)$$

und die komplementäre Sensivität

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad (1.8)$$

die der Übertragungsfunktion von r nach y entspricht. Aus diesen Definitionen folgt:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (1.9)$$

Der Ausgangssignal des Systems $Y(s)$ ist gegeben durch

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s) + S(s) \cdot P(s) \cdot W(s). \quad (1.10)$$

Der Fehler $E(s)$ ist gegeben durch

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) - D(s) - N(s) - P(s) \cdot W(s)). \quad (1.11)$$

In diesen letzten zwei Definitionen $R(s), D(s), N(s), W(s)$ bezeichnen die Laplace Transformationen der entsprechenden Signalen $r(t), d(t), n(t), w(t)$.

Zusätzlich definiert man die Durchtrittsfrequenz ω_c , für die gilt

$$|L(j \cdot \omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}. \quad (1.12)$$

1.4 Nyquist Theorem

Ein geschlossener Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn es

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2} \quad (1.13)$$

gilt, wobei:

¹Siehe Skript Regelungstechnik I.

- n_c : Anzahl positiver Umdrehungen von $L(s)$ (Gegenuhrzeigersinn) um den Punkt -1;
- n_+ : Anzahl instabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) > 0$;
- n_0 : Anzahl grenzstabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) = 0$.

Neben der Stabilität braucht man auch eine gewisse Robustheit. Diese wird durch den kritischen Abstand μ_{\min} , die Phasenreserve φ und die Verstärkungsreserve γ beschrieben. Diese Größen sind im Bode Diagramm und im Nyquist Diagramm ersichtlich.

1.4.1 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis

Ziel der Regelungstechnik ist die Auslegung eines Reglers. Bevor man das macht, muss man zuerst überprüfen, ob sich das System regeln lässt. Neben der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gibt es zusätzliche Bedingungen für die Durchtrittsfrequenz ω_c , die erfüllt werden müssen, um das System regeln zu können. Für die Durchtrittsfrequenz muss gelten:

$$\max(10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi+}) < \omega_c < \min(0.5 \cdot \omega_{\zeta+}, 0.1 \cdot \omega_n, 0.5 \cdot \omega_{\text{delay}}, 0.2 \cdot \omega_2), \quad (1.14)$$

wobei:

- $\omega_{\pi+} = \text{Re}(\pi^+)$: Dominanter (größter mit $\text{Re}(\pi) > 0$) instabiler Pol;
- $\omega_{\zeta+} = \text{Re}(\zeta^+)$: Dominante (kleinste mit $\text{Re}(\zeta) > 0$) nichtminimalphasige Nullstelle;
- ω_d : Maximale Störungsfrequenz im System;
- ω_n : Minimale Rauschenfrequenz im System;
- ω_2 : Frequenz mit 100% Unsicherheit ($|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1$);
- $\omega_{\text{delay}} = \frac{1}{T_{\text{delay}}}$: Größte Totzeit im System.

1.5 Aufgaben

1. Regelungstechnik I Prüfung nochmals lösen.

2 SISO Reglersynthese

2.1 Loop Shaping

2.1.1 Streckeninvertierung

Mit diesem kann man die Kreisverstärkung beliebig wählen, so dass sie alle Spezifikationen erfüllt. Der Regler berechnet sich dann als

$$C(s) = \frac{L(s)}{P(s)}. \quad (2.1)$$

Dieses Vorgehen ist nicht geeignet für instabile oder/und nichtminimalphasige Strecken, da sie respektiv zu nichtminimalphasige oder/und instabile Regler führen.

2.1.2 Loop Shaping für nichtminimalphasige Systeme

Die Reglerauslegung fängt mit einem PI Regler an

$$C(s) = k_p \cdot \frac{T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s}. \quad (2.2)$$

Die Parameter k_p und T_i können so eingestellt werden, dass die Kreisverstärkung $L(s)$ die gegebene Spezifikationen (siehe z.B. 1.4.1) erfüllt. Bessere Robusttheiteigenschaften erreicht man durch Zuschaltung von Lead/Lag Elementen der Form

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad (2.3)$$

wobei $\alpha, T \in \mathbb{R}^+$. Es gilt:

- $\alpha < 1$: Lead-Element: Phasenreserve wird erhöht, Betrag des Reglerkreises erhöht.
- $\alpha > 1$: Lag-Element: Phasenreserve wird verkleinert, Betrag des Reglerkreises verkleinert.

Die Parameter des Elementes berechnen sich als

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\varphi) \right)^2 = \frac{1 - \sin(\hat{\varphi})}{1 + \sin(\hat{\varphi})}, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}, \quad (2.4)$$

wobei $\hat{\omega}$ die Frequenz, bei der den Phasenanstieg geschehen soll, ist und $\hat{\varphi} = \varphi_{\text{neu}} - \varphi$ die (maximale) Phasendifferenz bezeichnet.

Im Allgemeinen geht man (iterativ) wie folgt vor:

1. PI(D) auslegen.
2. Lead-/Lag-Element zuschalten, um die Phasenreserve zu verändern. Die Durchtrittsfrequenz ω_c ändert sich auch.
3. Verstärkung k_p des Regler einstellen, um die Durchtrittsfrequenz anzupassen.

2.1.3 Loop Shaping für instabile Systeme

Alle Systeme müssen das Nyquist Theorem erfüllen. Wenn man mit instabilen Systemen arbeitet, ist also die Anzahl Umdrehungen n_c ungleich Null. Der Regler muss also so ausgelegt werden, dass es $n_c = n_+ + n_0/2$ gilt. Hilfreich bei der Reglerauslegung: Nullstellen verursachen einen Phasengewinn von 90° und Pole² einen Phasenverlust von -90° .

²Hier wird es angenommen, dass alle Pole stabil sind und alle Nullstellen minimalphasig sind. Instabile Pole und nichtminimalphasige Nullstellen sollten bei Reglern vermieden werden.

2.1.4 Realisierbarkeit

Nach der Auslegung eines Reglers, muss man diesen implementieren und realisieren können. Dazu muss darauf aufpassen, dass die Anzahl Pole gleich oder grösser als die Anzahl Nullstellen ist. Wenn das nicht der Fall ist, können Pole bei hohen Frequenzen hinzugefügt werden, so dass sie das Verhalten des Systems bei der Durchtrittsfrequenz nicht beeinflussen. Aus diesem Grund schaltet man zum Beispiel den sogenannten Roll-Off Term zum PID Regler

$$C(s) = k_p \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)}_{\text{PID Regler}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}}_{\text{Roll-Off}} \quad (2.5)$$

zu.

2.2 Kaskadierte Regelung

2.2.1 Struktur des kaskadierten Regelkreises

Bis jetzt haben wir immer nur mit SISO Systeme gearbeitet. Es gibt aber auch Regelkreise, bei denen wir zusätzliche Informationen erhalten, die man benutzen kann, um einen besseren Regelkreis zu bauen. Solche Systeme nennt man auch SIMO³ und können, wenn einige Voraussetzungen erfüllt sind, mit dem kaskadierten Regler geregelt werden. Die Struktur ist in Abbildung 2 dargestellt.

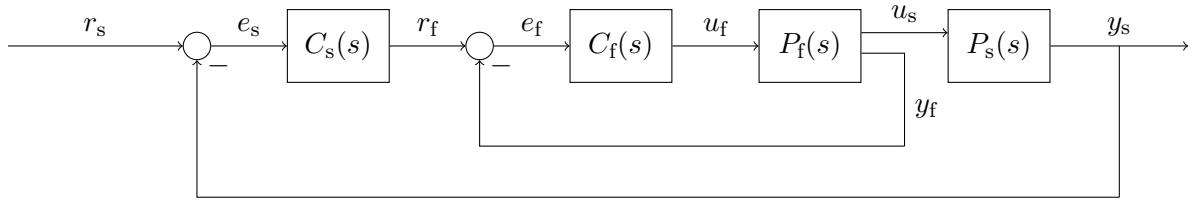


Abbildung 2: Struktur des kaskadierten Regelkreises.

Diese Konfiguration ist besonders geeignet wenn die Subsysteme deutlich unterschiedliche Antwortgeschwindigkeiten besitzen. Die Grundidee ist einen Regler $C_f(s)$ für den schnellen inneren Regelkreis und einen Regler $C_s(s)$ für den langsamem äusseren Regelkreis auszulegen.

Bemerkung. Der Regelkreis kann auch wie folgt dargestellt werden. Die sind aber nur Spezialfälle der in Abbildung 2 gezeigten Struktur.

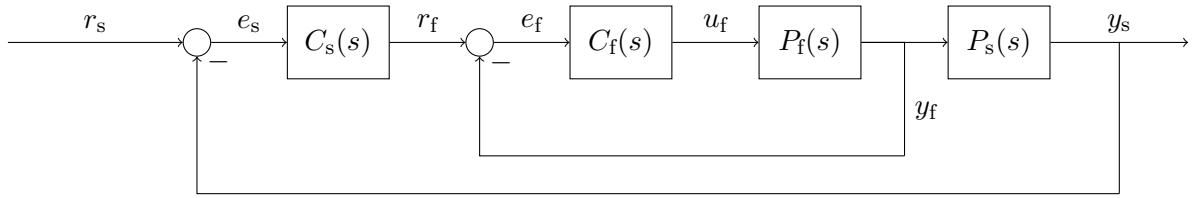


Abbildung 3: Struktur des kaskadierten Regelkreises (mit $u_s = y_f$).

2.2.2 Schneller Regelkreis

Der schnelle Regler $C_f(s)$ wird (z.B. nach Ziegler Nichols) ohne Berücksichtigung des langsamem Regelkreises ausgelegt. Oft geht es um einen P(D) Regler (ohne Integralteil, um die Bandbreite voll auszunutzen).

³Single Input Multiple Output.

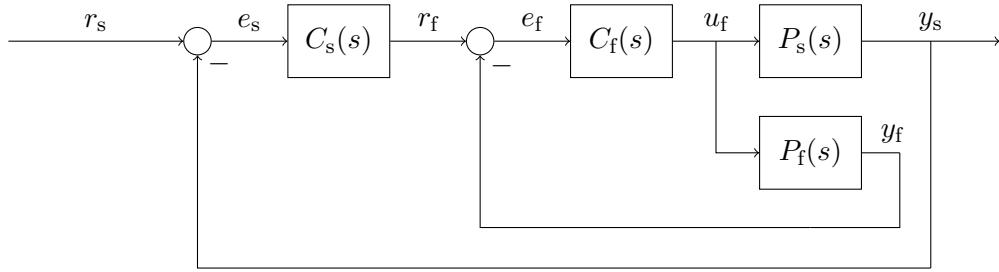


Abbildung 4: Struktur des kaskadierten Regelkreises.

2.2.3 Langsamer Regelkreis

Der langsame Regler $C_s(s)$ wird (z.B. nach Ziegler Nichols) mit geschlossenem inneren Regelkreis ausgelegt. Oft geht es um einen PI(D) Regler, um keinen statischen Nachlauffehler aufzuweisen.

Bemerkung. Diese Struktur kann auch für Systeme bestehend aus mehreren Kreisen (mit entsprechenden verfügbaren Signalen) verallgemeinert werden.

2.2.4 Geschwindigkeit einer Strecke

Die Geschwindigkeit einer Strecke kann anhand der Pole (und der Totzeiten) geschätzt werden: Die Dynamik ist gegeben von dem betragsmässigen kleinsten Pol. Das kann mit der Gleichung für die Berechnung der Inverse Laplace Transformation einer Funktion $Y(s)$ gezeigt werden:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} \cdot h(t). \quad (2.6)$$

Beispiel. Gegeben seien zwei Regelstrecke zweiter Ordnung $P_1(s)$ und $P_2(s)$. Die Pole π_1 und π_2 sind in folgenden Tabellen zusammengefasst. Man bestimme $P_s(s)$ und $P_f(s)$.

	System	π_1	π_2		System	π_1	π_2	
1.	$P_1(s)$	-1	-100		2.	$P_1(s)$	-10	-100
	$P_2(s)$	-10	-50			$P_2(s)$	-10	-20

1. $P_1(s)$ hat den kleinsten Pol im System, d.h. $P_s(s) = P_1(s)$ und $P_f(s) = P_2(s)$.
2. Da der kleinste Pol gleich für beide Systeme ist, kann man nicht zwischen schnelles und langsames System unterscheiden. In diesem Fall ist die kaskadierte Regelung nicht geeignet.

2.3 Prädiktive Regelung

2.3.1 Struktur

Systeme, die grössere Totzeiten aufweisen, sind mit PID Regler schwierig zu regeln. Das Ziel von prädiktiven Reglern ist die Totzeit zu kompensieren. Die allgemeine Struktur ist in Abbildung 5 und in Abbildung 6 dargestellt⁴.

Das Anwenden von prädiktiven Regelkreisen ist für Regelstrecke mit

$$\frac{T}{\tau + T} > 0.3 \quad (2.7)$$

empfohlen, wobei T die Totzeit und τ die Zeitkonstante des Systems bezeichnen.

⁴Es ist wichtig zu erkennen, dass die zwei Abbildungen den gleichen Regelkreis zeigen.

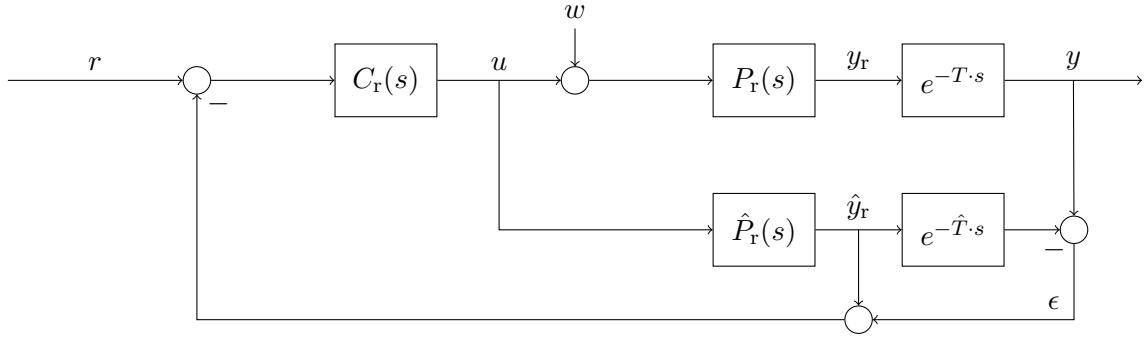


Abbildung 5: Struktur des Smith Prädiktors.

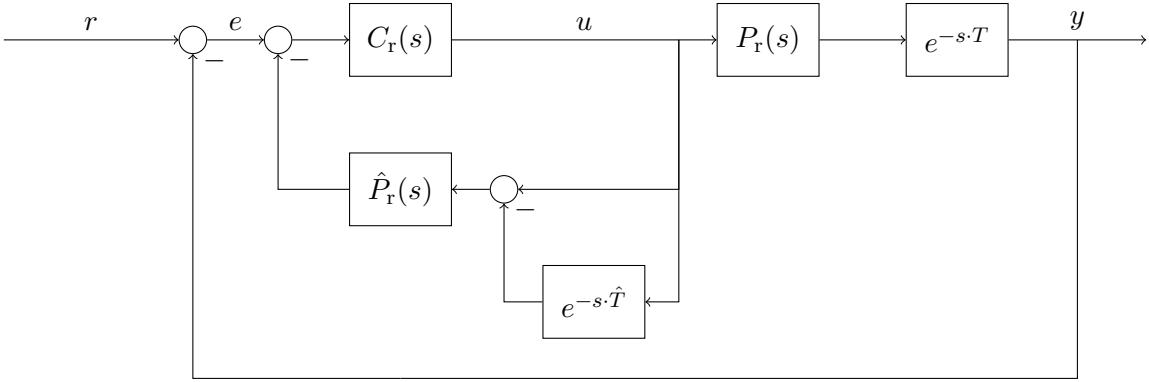


Abbildung 6: Struktur des Smith Prädiktors.

2.3.2 Analyse

Die Strecke $P(s)$ ist die Übertragungsfunktion von u nach y , d.h.

$$P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}. \quad (2.8)$$

Der Regler $C(s)$ einer Regelstrecke ist die Übertragungsfunktion von e nach u . Hier gilt es:

$$u = C_r(s) \cdot (e - \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot \hat{T}}) \cdot u). \quad (2.9)$$

Auflösen nach u liefert

$$u = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot \hat{T}})} \cdot e, \quad (2.10)$$

d.h. die Übertragungsfunktion des Reglers ist

$$C(s) = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot \hat{T}})}. \quad (2.11)$$

Die Kreisverstärkung ist also

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) = \frac{C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}}{1 + C_r(s) \cdot \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot \hat{T}})}. \quad (2.12)$$

Bemerkung. Eine genaue Schätzung des Modells ist unbedingt notwendig. Im nominalen Fall gilt es:

$$\hat{P}_r(s) = P_r(s), \quad \hat{T} = T, \quad (2.13)$$

wobei $P_r(s)$ die reale Übertragungsfunktion und T die reale Totzeit der Strecke sind. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
 T(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} \\
 &= \frac{\frac{C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot T})}}{1 + \frac{C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot T})}} \\
 &= \frac{C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot (1 - e^{-s \cdot T}) + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot e^{-s \cdot T}} \\
 &= \frac{C_r(s) \cdot P_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s)} \cdot e^{-s \cdot T} \\
 &= T_{\text{ref}}(s) \cdot e^{-s \cdot T},
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

d.h. die Strecke $P(s)$ und die komplementäre Sensitivität $T(s)$ die gleiche Totzeit aufweisen.

2.4 Robustheit

2.4.1 Robuste Stabilität

Mit dem Nyquist-Theorem haben wir gesehen, wie man die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beurteilen kann. In der Praxis muss man aber noch berücksichtigen, dass das Modell $L(s)$ nicht perfekt ist. Also muss zusätzlich gelten:

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty], \tag{2.15}$$

oder

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot T(j \cdot \omega)| < 1. \tag{2.16}$$

Anders gesagt, muss man garantieren, dass die reale Kreisverstärkung gleichviele Umdrehungen um den Punkt -1 wie unseres Modells $L(s)$ macht.

2.4.2 Nominelle Regelgüte

$W_1(s)$ ist eine Schranke für die Sensitivität $S(s)$:

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| < 1, \tag{2.17}$$

Diese Ungleichung kann auch als

$$|S(j \cdot \omega)| < |W_1^{-1}(j \cdot \omega)| \tag{2.18}$$

oder als

$$|1 + L(j \cdot \omega)| > |W_1(j \cdot \omega)| \tag{2.19}$$

geschrieben werden.

2.4.3 Robuste Regelgüte

Die Bedingung der robusten Regelgüte ist erfüllt, falls es

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| + |W_2(j \cdot \omega) \cdot T(j \cdot \omega)| < 1 \tag{2.20}$$

gilt, wobei:

- $W_1(s)$: Schranke für die Sensitivität.

- $W_2(s)$: Schranke für die komplementaren Sensitivität oder Unsicherheit.

Gleichung (2.20) kann auch als

$$|W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) \cdot L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad (2.21)$$

geschrieben werden.

Bemerkung. Die Funktionen $W_1(s)$ und $W_2(s)$ können aus den Spezifikationen des Systems bestimmt werden (z.B. kleine Sensitivität bei kleinen Frequenzen, um Störungen zu unterdrücken).

Bemerkung. Nominelle und robuste Regelgüte beurteilen nicht die Stabilität des Systems: Diese muss mit dem Nyquist Theorem überprüft werden.

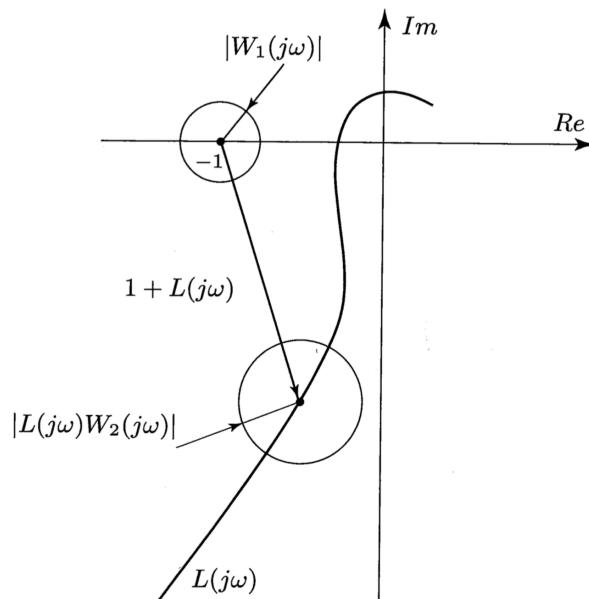
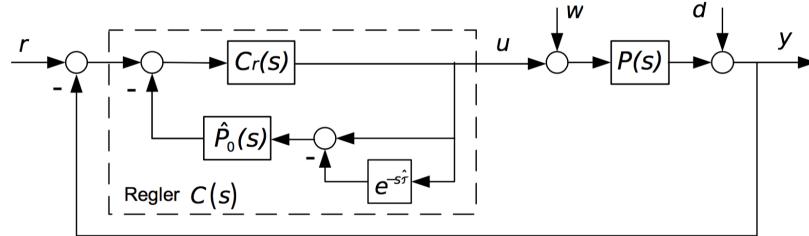


Abbildung 7: Graphische Darstellung der robusten Regelgüte.

2.5 Aufgaben

1. Eine Strecke $P(s) = P_0(s) \cdot e^{-s \cdot T}$ wird mit einem Smith Kompensator prädiktiv geregelt. Folgende Abbildung zeigt das Signalflussbild dieses prädiktiven Reglers.



- (a) Geben Sie für den allgemeinen Fall ($\hat{P}(s) \neq P(s)$ und $\hat{\tau} \neq \tau$, d.h. Regelstrecke und Modell stimmen nicht überein) die Übertragungsfunktion des Reglers $C(s)$ und des geschlossenen Regelkreises $T(s)$.
- (b) Zeigen Sie, dass der interne Regler $C_r(s)$ ohne Berücksichtigung der Totzeit ausgelegt werden kann, falls Strecke und Modell übereinstimmen ($\hat{P}(s) = P(s)$ und $\hat{\tau} = \tau$). Wählen Sie dazu die folgende Ziel-Übertragungsfunktion für das geschlossene Regelkreis:

$$T_{\text{ref}}(s) = T_{\text{ref},0} \cdot e^{-s \cdot \tau}.$$

- (c) Die Regelstrecke und die Ziel-Übertragungsfunktion des Regelsystems seien nun gegeben durch

$$P(s) = \frac{k}{s \cdot (b \cdot s + 1)} \cdot e^{-s \cdot \tau}, \quad T_{\text{ref}}(s) = \frac{1}{\sigma \cdot b \cdot s + 1} \cdot e^{-s \cdot \tau}, \quad \text{mit } k, b, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

Geben Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden internen Reglers $C_r(s)$ an. Um was für einen Regler handelt es sich?

2. Eine Regelstrecke $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}$ wird mit einem Smith Predictor geregelt. Das Signalflussbild des geschlossenen Regelkreises ist in Aufgabe 1 dargestellt. Sie haben bei der Aufgabe 1 gezeigt, dass im nominalen Fall der Regler $C_r(s)$ kann ohne Berücksichtigung der Totzeit ausgelegt werden.

- (a) $T_r(s)$ soll sich wie ein Tiefpass erster Ordnung mit einer Eckfrequenz von a verhalten. Die Verstärkung von $T_r(s)$ bei tiefen Frequenzen soll dabei so gewählt werden, dass kein statischer Nachlauffehler auftritt. Geben Sie die gewünschte Übertragungsfunktion $T_r(s)$ an, die diese Eigenschaften erfüllt.
- (b) Die Regelstrecke wurde von Ihrem Kollegen modelliert. Allerdings hat er nur die Zustandsraumbeschreibung hergeleitet. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \\ y(t) &= \hat{y}(t - \tau).\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s \cdot \tau}$.

- (c) Berechnen Sie mit den Resultaten für $T_r(s)$ und $P_r(s)$ die Übertragungsfunktion des internen Reglers $C_r(s)$.

3. Betrachten Sie das System des Wassertanks in folgender Abbildung. Ihre Aufgabe ist es, einen Regler für dieses System zu entwerfen. Die Ventilstellung u soll so eingestellt werden, dass die Temperatur des Wasserausflusses T_w auf einen bestimmten Sollwert $T_{w,soll}$ geregelt wird. Neben der Wassertemperatur können Sie auch den Dampfmassenstrom \dot{m}_D messen. Demzufolge erkennen Sie, dass eine Kaskaden-Regelung eingesetzt werden kann. Die gewählte Reglerstruktur ist ebenfalls in folgender Abbildung dargestellt.

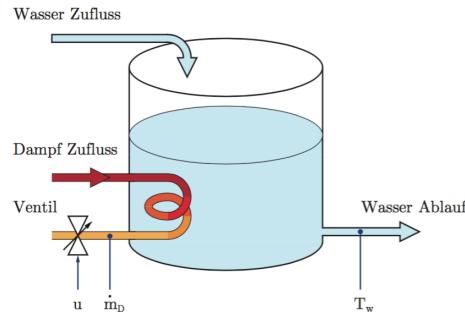
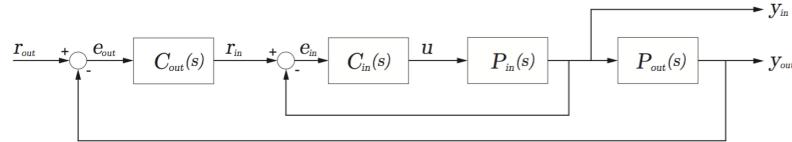


Abbildung 1: Erwärmen des Wassers im Wassertank.



- Welche Größen des Systems entsprechen den Signalen r_{out} , y_{out} , r_{in} und y_{in} ?
- Leiten Sie die Übertragungsfunktion des äusseren geschlossenen Regelkreises $T_{r_{out} \rightarrow y_{out}}$ als Funktion des inneren geschlossenen Regelkreises $T_{r_{in} \rightarrow y_{in}}$ her.

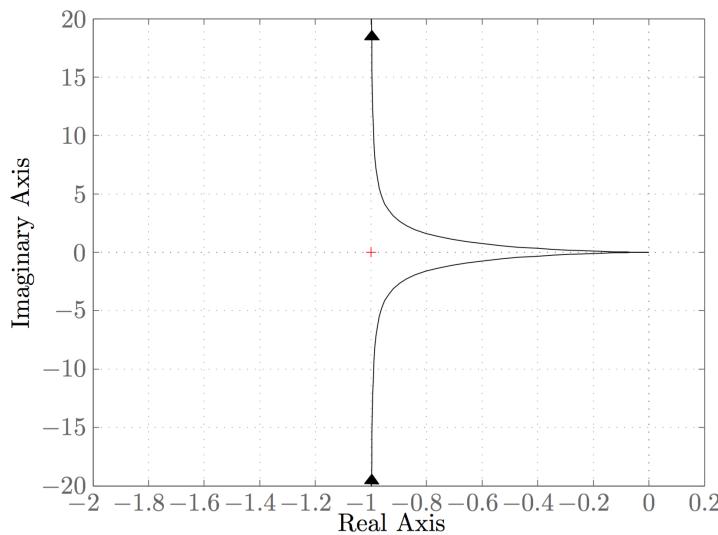
4. Betrachten Sie das Regelsystem mit der nominellen Kreisverstärkung

$$L(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 1)}.$$

In folgender Abbildung ist das Nyquist-Diagramm von $L(j\omega)$ dargestellt. Die Unsicherheit ist modelliert mit

$$W_2(s) = \frac{s}{s + 1}.$$

Messungen haben gezeigt, dass die Spezifikationen für die Stabilität und Güte des Regelsystems im ganzen Frequenzbereich $\omega \in [0, \infty)$ erfüllt wären, wenn die Stabilität und Güte des Regelsystems nur für $\omega = 1 \text{ rad/s}$ erfüllt wäre.



- (a) Wenden Sie das Nyquist-Theorem für Robustheit an, um herauszufinden, ob das mit $L(s)$ und $W_2(s)$ charakterisierte unsichere Regelsystem bei $\omega = 1 \text{ rad/s}$ die Bedingung für eine robuste Stabilität erfüllt.
- (b) Die Empfindlichkeit des Systems $S(s)$ wird begrenzt durch

$$W_1(s) = \frac{s + 1}{4 \cdot s}.$$

Spezifizieren Sie die Bedingungen für die nominelle und robuste Regelgüte, und bestimmen Sie, ob jede Bedingung für $\omega = 1 \text{ rad/s}$ erfüllt ist.

3 Realisierung und Implementierung von Reglern

3.1 PID-Realisierung

Das Folgeverhalten eines PID-Reglers durch die Einführung von setpoint weights (a , b und c) verbessert werden kann.

1. **P:** Sollwertgewichtung a , oft $0 < a < 1$;
2. **I:** Sollwertgewichtung b , oft $b = 1$ (sodass $e_\infty \rightarrow 0$);
3. **D:** Sollwertgewichtung c , oft $c = 0$ (kein Überschwingen).

Matematisch ergibt sich:

$$U(s) = k_p \cdot (a \cdot R(s) - Y(s)) + \frac{k_p}{T_i \cdot s} \cdot (b \cdot R(s) - Y(s)) + k_p \cdot T_d \cdot s \cdot (c \cdot R(s) - Y(s)). \quad (3.1)$$

Die Kreisverstärkung wird jedoch durch das Einführen von diesen Parameter nicht beeinflusst, darum bleiben die Stabilitätseigenschaften erhalten.

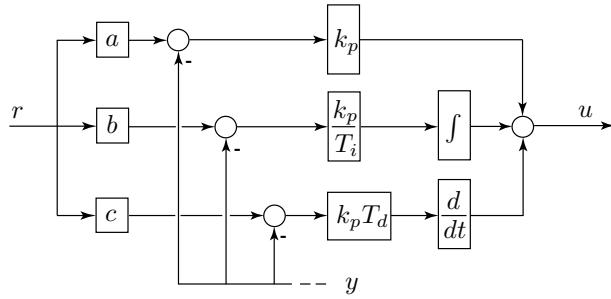


Abbildung 8: PID-Realisierung.

3.2 Feed Forward

Das Einführen eines Feed-Forward erhöht die Geschwindigkeit des Systems, da r direkt einen Einfluss auf u hat. Der Feed-Forward kann statisch (ein Gain) oder dynamisch sein, je nach den Anforderungen des Systems. Die Vorsteuerung hat keinen Einfluss auf die Stabilitätseigenschaften des geschlossenen Regelkreises.

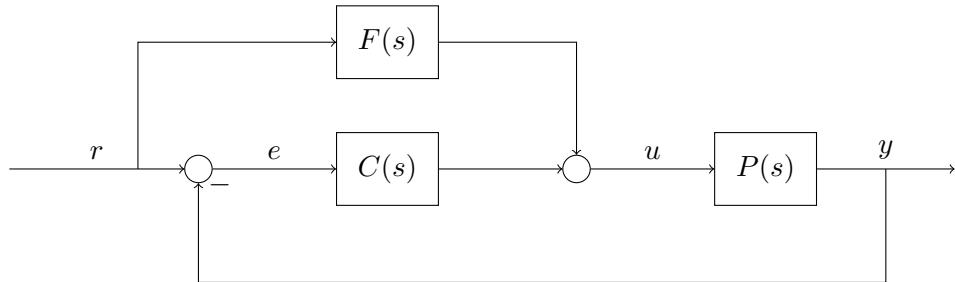


Abbildung 9: Regelkreis mit Feed Forward.

3.3 Anti-Reset Windup

Viele physikalische Signale können nicht beliebige Werte annehmen, d.h. dass sie begrenzt sind. Beispiele davon sind das maximale Drehmoment eines Motors ($|T| \leq T_{\max}$) und Öffnungsfläche eines Ventils ($0 \leq A \leq A_{\max}$). Wenn diese Begrenzungen relevant für das System sind, muss der Regelkreis entsprechend angepasst werden.

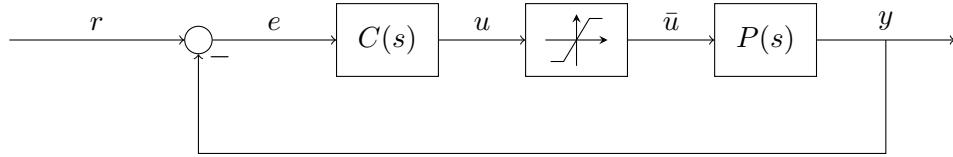


Abbildung 10: Sättigung eines Systems.

Die kritischste Situation kommt bei integrierenden Regeln vor und kann mithilfe eines Anti-Reset Windups verbessert werden. Ziel dieses Komponenten ist das “Leeren” des Integrators. Qualitativ kann man sich die Situation so vorstellen: Da der Fehler gross ist, integriert der Regler weiter (aber die $u(t)$ wird aufgrund der Sättigung nicht grösser). Um den Integrator zu leeren, d.h.

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx 0, \quad (3.2)$$

braucht man dann für eine grosse Zeit einen negativen Fehler. Das ist Ursache eines grössten (unerwünschten) Überschwingers. Mit dem Anti-Reset Windup wird das Integrator (schneller) geleert, d.h. das Verhalten des Systems wird besser.

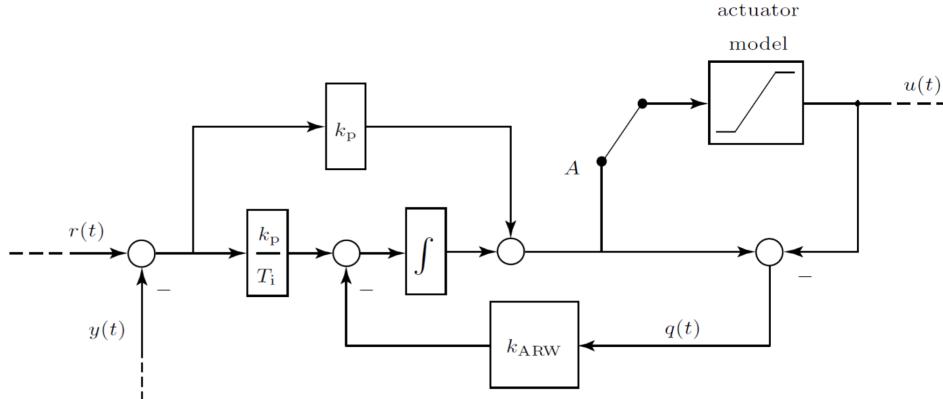


Abbildung 11: Struktur des Anti-Reset Windups.

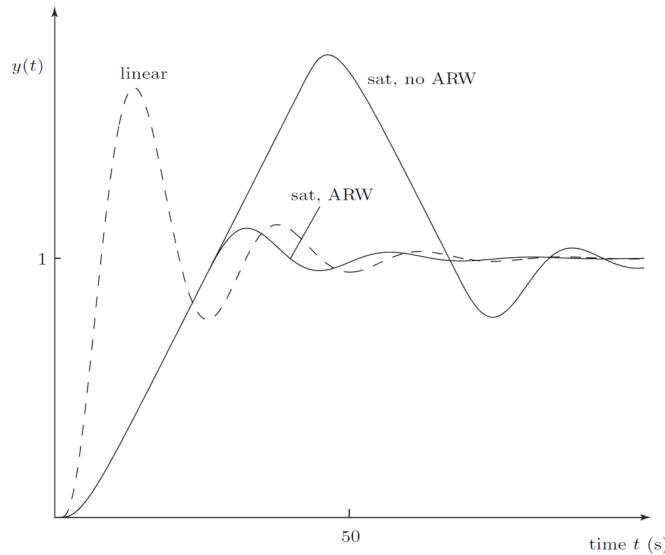


Abbildung 12: Effekte des Anti-Reset Windups.

3.4 Digitale Regelung

3.4.1 Grundlagen

Zeitkontinuierliche Signale werden durch eine Funktion $x(t)$ dargestellt. Zeitdiskrete Signale werden durch die Folge $x[n] = x(n \cdot T_s)$ beschrieben, wobei T_s die Abtastzeit ist. Die Abtastfrequenz f_s ist $\frac{1}{T_s}$.

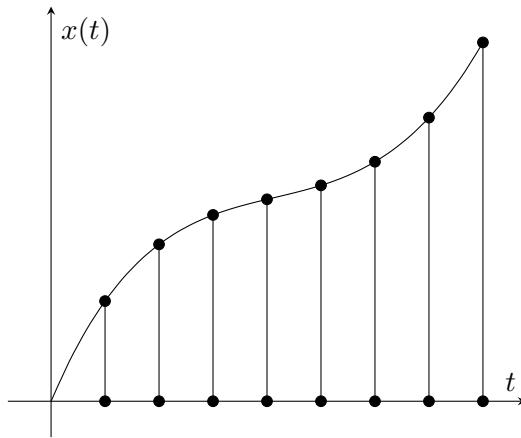


Abbildung 13: Zeitdiskrete und Zeitkontinuierliche Darstellung eines Signals.

Vorteile der diskreten Regelung

- Einfachere Berechnungen.
- Implementierung von komplexen Algorithmen möglich.

Nachteile der diskreten Regelung

- Es fügt eine Totzeit ins System ein ($\approx \exp(-s \cdot T_s/2)$).
- Informationen zwischen $x[n]$ und $x[n + 1]$ gehen verloren.

3.4.2 Zustandsraumdarstellung

Zeitdiskrete System werden durch folgende Zustandsraumdarstellung beschrieben:

$$x[n+1] = A \cdot x[n] + b \cdot u[n], \quad (3.3)$$

$$y[n] = c \cdot x[n] + d \cdot u[n]. \quad (3.4)$$

3.4.3 Stabilität

Ein zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte in dem Einheitskreis liegen, d.h.

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall i. \quad (3.5)$$

3.4.4 Aliasing

Wenn die Abtastfrequenz eines Signals zu klein ist, verliert man “zu viele” Informationen über das Signal. Ab einer gewissen Frequenz kann ein Signal dann nicht mehr eindeutig rekonstruiert werden. Nehmen wir an, das Signal

$$x_1(t) = \cos(\omega \cdot t) \quad (3.6)$$

sei gegeben. Die Diskretisierung mit Abtastzeit T_s liefert

$$x_1[n] = \cos(\omega \cdot T_s \cdot n) = \cos(\Omega \cdot n), \quad \Omega = \omega \cdot T_s. \quad (3.7)$$

Sei nun ein zweites Signal

$$x_2(t) = \cos((\omega + 2\pi/T_s) \cdot t) \quad (3.8)$$

mit Frequenz $\omega_2 = \omega + \frac{2\pi}{T_s}$ gegeben. Die entsprechende Diskretisierung ist

$$x_2[n] = \cos((\omega + 2\pi/T_s) \cdot T_s \cdot n) = \cos(\omega \cdot T_s \cdot n + 2\pi \cdot n) = \cos(\omega \cdot T_s \cdot n) = x_1[n]. \quad (3.9)$$

Obwohl die zwei Signale nicht die gleiche Frequenz aufweisen, haben sie die gleiche diskrete Darstellung. Aus diesem Grund müssen alle Frequenzen in einem gewissen Intervall liegen, so dass dieses Phänomen, das Aliasing genannt wird, nicht vorkommt. Insbesondere muss es gelten

$$|\omega| < \frac{\pi}{T_s} \quad (3.10)$$

oder

$$f < \frac{1}{2 \cdot T_s} \Leftrightarrow f_s > 2 \cdot f_{\max}. \quad (3.11)$$

Die im System maximal erlaubte Frequenz $f = \frac{1}{2 \cdot T_s}$ wird auch als Nyquist Frequenz bezeichnet. In der Praxis, benutzt man oft einen Faktor 10, d.h.

$$f < \frac{1}{10 \cdot T_s} \Leftrightarrow f_s > 10 \cdot f_{\max}. \quad (3.12)$$

Für Regelsysteme muss die Durchtrittsfrequenz ω_c folgende Faustregel:

$$f_s \geq 10 \cdot \frac{\omega_c}{2\pi}. \quad (3.13)$$

Die unerwünschten Frequenzen können mit einem AAF gedämpft werden.

3.4.5 Anti-Aliasing Filter

Durch das Zuschaltung von einem Anti-Aliasing Filter kann Aliasing vermieden werden, um hohe Frequenzen zu eliminieren. Der resultierende Regelkreis ist in Abbildung 14 dargestellt.

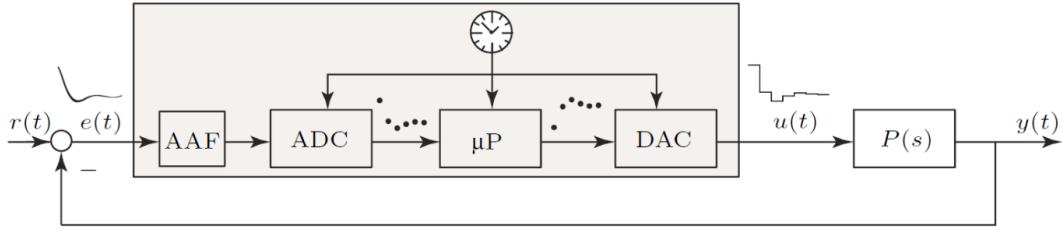


Abbildung 14: Regelkreis mit Anti-Aliasing Filter.

3.4.6 Regleremulation

Zeitdiskrete Reglern können durch Einführen der Variable z beschrieben werden. Es gilt:

$$y(t + T_s) = y[n + 1] \Leftrightarrow z \cdot Y(z) \quad (3.14)$$

$$y(t + T_s) \Leftrightarrow Y(s) \cdot e^{s \cdot T_s} \quad (3.15)$$

Daraus folgen die folgende Konversionen. In der Praxis wird am meisten the Tustin Transformation angewendet, aber es gibt Fälle, bei denen andere Transformationen bessere Verhalten aufweisen.

Exakt	$s = \frac{1}{T_s} \cdot \ln(z)$	$z = e^{s \cdot T_s}$
Euler forward	$s = \frac{z - 1}{T_s}$	$z = s \cdot T_s + 1$
Euler backward	$s = \frac{z - 1}{z \cdot T_s}$	$z = \frac{1}{1 - s \cdot T_s}$
Tustin	$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}$	$z = \frac{1 + s \cdot T_s / 2}{1 - s \cdot T_s / 2}$

Die drei Approximationen können auch mit der Taylor-Entwicklung⁵ motiviert werden:

- Forward Euler:

$$z = e^{s \cdot T_s} \approx 1 + s \cdot T_s. \quad (3.16)$$

- Backward Euler:

$$z = e^{s \cdot T_s} = \frac{1}{e^{-s \cdot T_s}} \approx \frac{1}{1 - s \cdot T_s}. \quad (3.17)$$

- Tustin:

$$z = \frac{e^{s \cdot T_s / 2}}{e^{-s \cdot T_s / 2}} \approx \frac{1 + s \cdot T_s / 2}{1 - s \cdot T_s / 2}. \quad (3.18)$$

Die Inverse Transformationen $s = f(z)$ können dann direkt aus diesen Gleichungen berechnet werden.

3.4.7 Stabilität

Werden die Stabilitätseigenschaften bei der Emulation verloren? Zeitkontinuirliche Systeme sind stabil wenn alle Pole einen negativen Realteil besitzen und zeitdiskrete System sind stabil wenn alle Pole in dem Einheitskreis liegen. Bei Euler Backward and Tustin werden die Stabilitätseigenschaften gleich; bei Forward Euler ist es dagegen möglich, dass stabile System durch die Emulation instabil werden (siehe Abbildung 15).

⁵Zur Erinnerung: $e^x \approx 1 + x$.

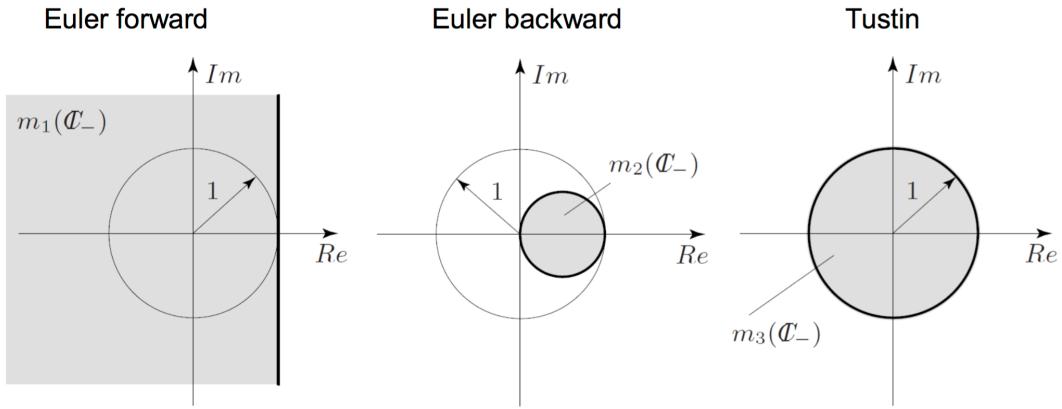


Abbildung 15: Pole mapping.

Beispiel. Die Stabilitätseigenschaften des Systems bleiben unverändert, falls stabile zeitkontinuirliche Pole zu stabilen zeitdiskreten Polen gemappt werden. Bei Tustin ist

$$z = \frac{1 + s \cdot T_s/2}{1 - s \cdot T_s/2} = \frac{1 + (x + i \cdot y) \cdot T_s/2}{1 - (x + i \cdot y) \cdot T_s/2} = \frac{1 + x \cdot T_s/2 + i \cdot y \cdot T_s/2}{1 - x \cdot T_s/2 - i \cdot y \cdot T_s/2}. \quad (3.19)$$

Der Betrag von z ist

$$|z| = \sqrt{\frac{(1 + x \cdot T_s/2)^2 + y^2 \cdot (T_s/2)^2}{(1 - x \cdot T_s/2)^2 + y^2 \cdot (T_s/2)^2}}. \quad (3.20)$$

Da das zeitkontinuirliche System stabil ist, muss x kleiner als 0 sein. Da $x < 0$ gilt es

$$(1 + x \cdot T_s/2)^2 + y^2 \cdot (T_s/2)^2 < (1 - x \cdot T_s/2)^2 + y^2 \cdot (T_s/2)^2, \quad (3.21)$$

d.h. $|z| < 1$. Das zeitdiskrete System ist darum stabil.

3.5 Aufgaben

1. Das System

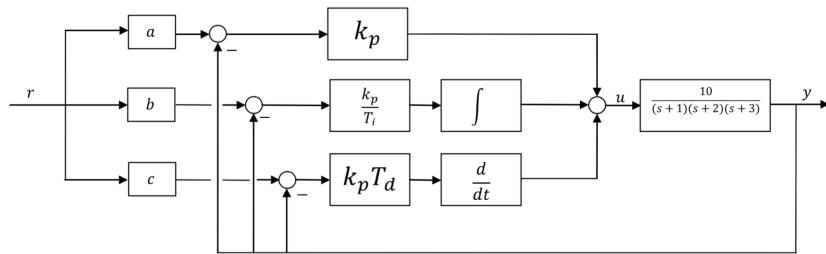
$$P(s) = \frac{10}{(s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}$$

soll mit einem PID-Regler geregelt werden.

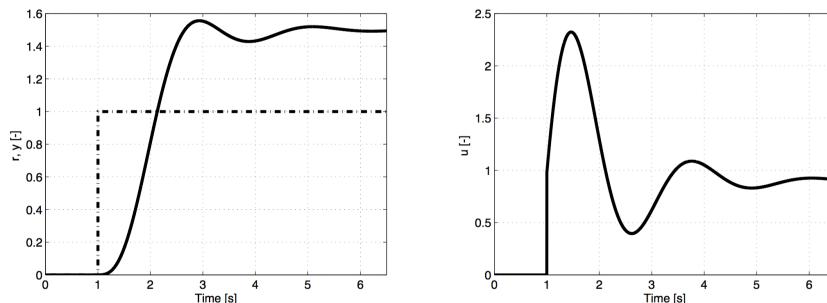
- (a) Berechnen Sie folgende Werte, die notwendig sind um die Reglerparameter zu berechnen:

- i. die kritische Zeitkonstante T^* ;
- ii. die kritische Verstärkung k_p^* ;
- iii. die statische Verstärkung der Strecke.

- (b) Untenstehende Abbildung zeigt das Signalflussbild des Gesamtsystems. Berechnen Sie analytisch (d.h. als Formel) die Übertragungsfunktion von r nach y .



- (c) Aufgrund der Resultate in Teilaufgabe a) wurden die Parameter $k_p = 3.73$, $T_i = 0.99$, $T_d = 0.25$ und $a = 0.26$ bestimmt. Das Bild unten zeigt die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises. Aus der Vorlesung wissen Sie, was sinnvolle Werte für die Parameter b und c sind. Wurden diese im vorliegenden Fall korrekt gewählt?



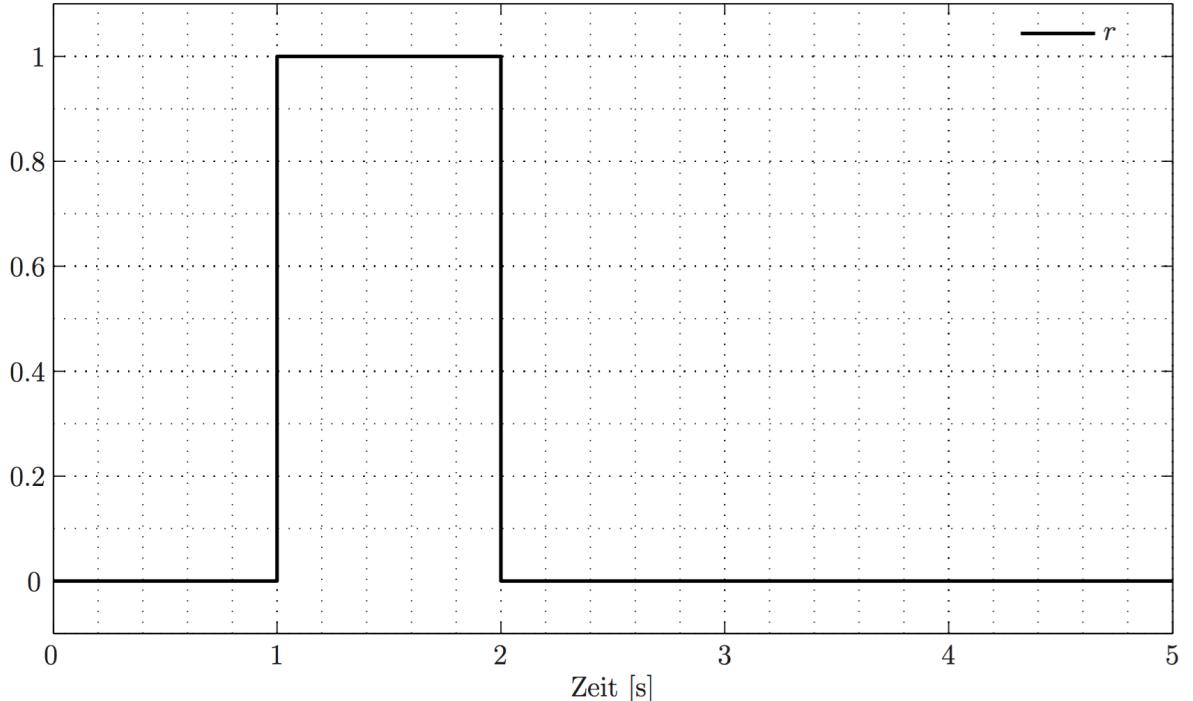
2. Die Regelstrecke $P(s) = e^{-s}$ wird mit dem PI-Regler

$$C(s) = 0.2 + \frac{1}{2 \cdot s}$$

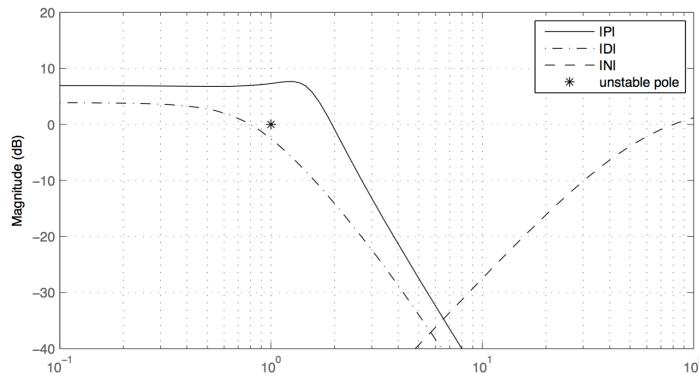
geregelt. Die Strecke weise zudem die folgende Stellgrößenbeschränkung auf:

$$u_b(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } u(t) \geq 0.1 \\ u(t) & \text{für } |u(t)| < 0.1 \\ -0.1 & \text{für } u(t) \leq -0.1. \end{cases}$$

- (a) Die Sollgrösse r aus dem folgenden Diagramm wird nun ins Regelsystem eingespiesen. Zeichnen Sie die daraus resultierenden Stellgrößen u , u_b und die Ausgangsgrösse y ins selbe Diagramm und beschriften Sie die entscheidenden Stellen mit den entsprechenden Zahlenwerten.
- (b) Welche Problematik tritt auf und wie kann diese behoben werden? Zeichnen Sie das komplette Regelsystem mit der entsprechenden Gegenmassnahme.



3. Eine instabile Strecke soll mit einem Regler stabilisiert werden. Der Regler läuft dabei auf einem Mikroprozessor welcher eine Abtastzeit von $T = 0.3$ s aufweist. Die Frequenzbänder von der Strecke (P), der Störung (D) sowie von dem Messrauschen (N) sind in folgender Abbildung gegeben.



- (a) Skizzieren Sie das Signalflussbild des geschlossenen, diskreten Regelsystems. Beinhalten sollte es folgende Bestandteile:

ADC	Analog-to-Digital Converter
AAF	Anti-Aliasing Filter
DAC	Digital-to-Analog Converter
Plant	Strecke
μP	Mikroprozessor

- (b) Benutzen Sie die Abbildung um abschätzen zu können ob eine Reglerauslegung mittels Emulation für die Strecke P sinnvoll ist. Bestimmen Sie dafür zuerst die gewünschte Durchtrittsfrequenz des entsprechenden kontinuierlichen Reglers und schätzen dann ab, ob diese Spezifikation durch einen emulierten Regler erreicht werden kann.
(c) Ist die Verwendung eines Anti-Aliasing Filters für das vorliegende System zwingend?

4. Für eine zeitkontinuirliche Strecke wurde der Regler

$$C(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{s + \alpha},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Berechnen Sie den Regler $C(z)$ mit der Euler Backward Diskretisierung. Die Abtastzeit sei T .
- (b) Für welche Werte von α ist der in a) berechnete Regler asymptotisch stabil?
- (c) Unter welcher Bedingung für α sind der zeitkontinuirliche und der zeitdiskrete Regler asymptotisch stabil? Das Diskretisierungsverfahren sei wiederum Backward Euler.

5. (a) Markieren Sie alle Signale die ohne Aliasing abgetastet werden können. Die Abtastzeit beträgt 1 s.

- $x(t) = \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$
- $x(t) = \cos(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
- $x(t) = 2 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
- $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t)$
- $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t + \pi)$
- $x(t) = 2 \cdot \cos(0.2 \cdot \pi t + \pi)$
- $x(t) = \cos(\pi \cdot t)$
- $x(t) = \cos(\pi \cdot t + \pi)$
- $x(t) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot t + \pi)$
- $x(t) = \cos(0.2 \cdot \pi \cdot t) + \cos(4 \cdot \pi \cdot t)$
- $x(t) = \sin(0.2 \cdot \pi \cdot t) + \sin(0.4 \cdot \pi \cdot t)$
- $x(t) = \sum_{i=1}^{100} \cos(2 \cdot \pi / (i+1) \cdot t)$
- $x(t) = \sum_{i=1}^{100} \cos(2 \cdot \pi / (i+2) \cdot t)$

(b) Das Signal

$$x(t) = 2 \cdot \cos(20 \cdot \pi \cdot t + \pi) + \cos(40 \cdot \pi \cdot t) + \cos(30 \cdot \pi \cdot t)$$

wird mit die Abtastfrequenz f_s abgetastet. Was ist die minimale Abtastfrequenz, mit der kein Aliasing auftritt?

6. Gegeben sei das folgende zeitdiskrete System:

$$x[n+1] = A \cdot x[n] + B \cdot u[n].$$

(a) Für welche Wahl von A und B ist das System asymptotisch stabil?

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} -0.1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} -0.1 & -2 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(b) Die Matrix B spielt keine Rolle für die Stabilität des Systems?

- Wahr.
- Wahr, aber nur $\|A\|_2 < \sqrt{2}$.
- Falsch.

4 MIMO Systeme

4.1 Systembeschreibung

4.1.1 Zustandsraumdarstellung

Ein lineares zeitinvariantes Multiple Input Multiple Output System mit m Eingangssignalen und p Ausgangssignalen wird durch folgende Zustandsraumsdarstellung beschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

mit

$$x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}, y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (4.2)$$

Im Gegenteil zu SISO Systemen sind nun $u(t)$ und $y(t)$ Vektoren und nicht mehr Zahlen. Daraus folgt, dass B , C und D Matrizen (statt Vektoren/Zahlen) sind.

4.1.2 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines MIMO Systems lässt sich berechnen als

$$P(s) = C \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B + D. \quad (4.3)$$

Die Übertragungsfunktion ist eine $p \times m$ Matrix, deren Einträge rationale Funktionen sind:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & \cdots & P_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p1}(s) & \cdots & P_{pm}(s) \end{bmatrix}, \quad P_{ij}(s) = \frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}. \quad (4.4)$$

Dabei ist $P_{ij}(s)$ die Übertragungsfunktion von dem j -ten Input zu dem i -ten Output.

Bemerkung. Da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist ($A \cdot B \neq B \cdot A$), muss man jetzt auf die Reihenfolge aufpassen. Die Kreiverstärkung ist z.B.

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) \neq C(s) \cdot P(s). \quad (4.5)$$

$T(s)$ und $S(s)$ können nicht mehr als

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (4.6)$$

berechnet werden, da die Matrixdivision nicht definiert ist. Es ergibt sich jedoch einen ähnlichen Ausdruck:

$$T = (\mathbb{I} + P \cdot C)^{-1} \cdot P \cdot C, \quad (4.7)$$

$$S = (\mathbb{I} + P \cdot C)^{-1}. \quad (4.8)$$

Wiederum ist

$$\begin{aligned}T(s) + S(s) &= (\mathbb{I} + P \cdot C)^{-1} \cdot P \cdot C + (\mathbb{I} + P \cdot C)^{-1} \\ &= (\mathbb{I} + P \cdot C)^{-1} \cdot (\mathbb{I} + P \cdot C) \\ &= \mathbb{I}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

4.2 Systemanalyse

4.2.1 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität analysiert das Verhalten eines Systems in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes wenn $u(t) = 0$ (aus diesem Grund spielt hier MIMO/SISO keine Rolle). Man unterscheidet zwischen drei Fällen:

- Asymptotisch stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- (Grenz)stabil: $\|x(t)\| < \infty \forall t \geq 0$;
- Instabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$.

In diesem Fall ist $x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0$ und mit einer Transformation in der Eigenbasis der Matrix A kann man zeigen, dass die Stabilität anhand der Eigenwerte λ_i von A bestimmt werden kann:

- Asymptotisch stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$;
- (Grenz)stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i .

4.2.2 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem beliebigen Input u ein beliebiger Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.

Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = [B \ A \cdot B \ \dots \ A^{n-1} \cdot B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)} \quad (4.10)$$

vollen Rang n hat.

4.2.3 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} = [C^\top \ A^\top \cdot C^\top \ \dots \ (A^{n-1})^\top \cdot C^\top]^\top \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n} \quad (4.11)$$

vollen Rang n hat.

4.3 Pole und Nullstellen

Für das Finden von den Polen und Nullstellen eines MIMO Systems müssen die Minoren der Übetragsfunktionsmatrix $P(s)$ berücksichtigt werden.

Die Minoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sind die Determinante aller quadratischen Submatrizen. Der maximale Minor ist der Minor mit grösster Dimension. Daraus können Pole und Nullstellen wie folgt bestimmt werden:

Pole: Die Polen sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren von $P(s)$.

Nullstellen: Nullstellen sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers des Zählers der maximalen Minoren nach deren Normierung auf den gleichen Nenner (Polynom).

Bei MIMO Systemen sind Pole und Nullstellen einer Richtung zugeordnet. Eine Pole-Nullstelle Kürzung kann also nur stattfinden, wenn der Pol und die Nullstelle gleich sind und die gleiche Input-Output Richtung besitzen.

Die Richtungen $\delta_{\pi,i}^{\text{in,out}}$ eines Pols π_i sind so definiert, dass es gilt

$$P(s)|_{s=\pi_i} \cdot \delta_{\pi,i}^{\text{in}} = \infty \cdot \delta_{\pi,i}^{\text{out}}. \quad (4.12)$$

Analog, sind die Richtungen $\delta_{\xi,i}^{\text{in,out}}$ einer Nullstelle ξ_i so definiert, dass es gilt

$$P(s)|_{s=\xi_i} \cdot \delta_{\xi,i}^{\text{in}} = 0 \cdot \delta_{\xi,i}^{\text{out}}. \quad (4.13)$$

Die Richtungen können mit der Singularwertzerlegung (mehr dazu nächste Woche) der Matrix $P(s)$ berechnet werden.

Beispiel. Man berechne Minoren, Pole und Nullstellen folgender Übertragungsfunktion:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{(s+1)\cdot(s+3)}{s+2} \end{bmatrix}.$$

- Minoren:
 - I-Ordnung: $\frac{s+2}{s+1}, \frac{(s+1)\cdot(s+3)}{s+2}, 0, 0;$
 - II-Ordnung: $s + 3.$

- Pole: Der kleinste gemeinsame Nenner aller Minoren ist

$$(s + 1) \cdot (s + 2).$$

Somit sind die Pole $\pi_i = \{-1, -2\}$.

- Nullstellen: Der Zähler des maximalen Minors normiert auf das Polynom ist

$$(s + 3) \Rightarrow \frac{(s + 3) \cdot (s + 2) \cdot (s + 1)}{(s + 2) \cdot (s + 1)}.$$

Somit sind die Nullstellen $\xi_i = \{-1, -2, -3\}$.

Beispiel. Man berechne Minoren, Pole und Nullstellen folgender Übertragungsfunktion:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \frac{2 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot (s+3)} \\ 0 & \frac{s+3}{(s+1)^2} & \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}.$$

- Minoren:
 - I-Ordnung: $\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2 \cdot (s+1)}{(s+2) \cdot (s+3)}, 0, \frac{s+3}{(s+1)^2}, \frac{s+4}{s+1};$
 - II-Ordnung: $\frac{s+3}{(s+1)^3}, \frac{s+4}{(s+1) \cdot (s+2)} - \frac{2}{(s+2) \cdot (s+1)} = \frac{1}{s+1}, \frac{s+4}{(s+1)^2}$

- Pole: Der kleinste gemeinsame Nenner aller Minoren ist

$$(s + 1)^3 \cdot (s + 2) \cdot (s + 3).$$

Somit sind die Pole $\pi_i = \{-1, -1, -1, -2, -3\}$.

- Nullstellen: Die Zähler des maximalen Minors normiert auf das Polynom sind

$$\begin{aligned} (s+3) &\Rightarrow \frac{(s+3)^2 \cdot (s+2)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}, \\ 1 &\Rightarrow \frac{(s+1)^2 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}, \\ (s+4) &\Rightarrow -\frac{(s+4) \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot (s+3)}{(s+1)^3 \cdot (s+2) \cdot (s+3)}. \end{aligned}$$

Der grösste gemeinsame Teiler ist

$$(s+3) \cdot (s+2).$$

Somit sind die Nullstellen $\xi_i = \{-2, -3\}$.

4.4 Nyquist Theorem für MIMO Systeme

Das Nyquist Theorem kann auch auf MIMO Systeme erweitert werden. Der geschlossene Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, falls es gilt

$$n_c = n_+ + \frac{1}{2} \cdot n_0, \quad (4.14)$$

wobei:

- n_c : Umdrehungen um den Ursprung von

$$N(j \cdot \omega) = \det(\mathbb{I} + P(j \cdot \omega) \cdot C(j \cdot \omega)); \quad (4.15)$$

- n_+ : Anzahl instabile Pole;

- n_0 : Anzahl grenzstabile Pole.

4.5 Relative Gain Array (RGA)

Die RGA-Matrix zeigt die Beziehung zwischen den verschiedenen Kanäle, d.h. sie sagt "wie SISO" ein System ist. Die RGA-Matrix ist frequenzabhängig und lässt sich berechnen als

$$\text{RGA}(s) = P(s) \times P(s)^{-\top}, \quad P(s)^{-\top} = (P(s)^\top)^{-1}, \quad (4.16)$$

wobei $A \times A$ ist "element-wise" Multiplikation ($A.*A$ in Matlab) ist. Für 2×2 System kann die RGA-Matrix so interpretiert werden:

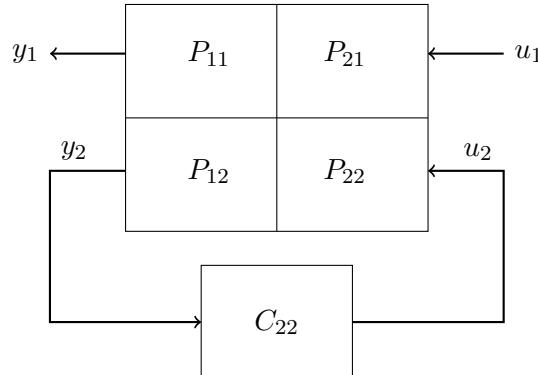


Abbildung 16: Herleitung der RGA-Matrix für den 2×2 Fall.

Für den Output y_1 gilt

$$y_1 = P_{11} \cdot u_1 + P_{12} \cdot u_2. \quad (4.17)$$

Der Input u_2 lässt sich berechnen mit

$$y_2 = P_{21} \cdot u_1 + P_{22} \cdot u_2 = P_{21} \cdot u_1 + P_{22} \cdot C_{22} \cdot y_2 \quad (4.18)$$

und lautet

$$u_2 = C_{22} \cdot y_2 = C_{22} \cdot \frac{P_{21}}{1 - P_{22} \cdot C_{22}}. \quad (4.19)$$

Der Output y_1 ist somit

$$y_1 = \left(P_{11} + \frac{P_{12} \cdot C_{22} \cdot P_{21}}{1 - P_{22} \cdot C_{22}} \right) \cdot u_1. \quad (4.20)$$

Fall (a): Mit $C_{22} \approx 0$ ist

$$y_1 = P_{11} \cdot u_1. \quad (4.21)$$

Fall (b): Mit $P_{22} \cdot C_{22} \gg 1$ ist

$$y_1 = \frac{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}}{P_{22}} \cdot u_1. \quad (4.22)$$

Ähnliche Ausdrücke resultieren auch durch Einfügen der Regler C_{11} , C_{12} und C_{21} . Die RGA Einträge lassen sich dann berechnen als

$$[\text{RGA}]_{11} = \frac{(a)}{(b)} = \frac{P_{11} \cdot P_{22}}{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}} = [\text{RGA}]_{22} \quad (4.23)$$

$$[\text{RGA}]_{12} = -\frac{P_{12} \cdot P_{21}}{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}} = [\text{RGA}]_{21} \quad (4.24)$$

Falls die RGA-Matrix bei den relevanten Frequenzen des Systems ($\omega_c \pm$ eine Dekade) die Struktur der Identitätsmatrix hat, d.h.

$$\text{RGA}(s) \approx \mathbb{I}, \quad (4.25)$$

können die Kreuzkopplungen vernachlässigt werden und das System kann mit SISO-Reglern (“One Loop at the time”) geregelt werden. Falls das nicht der Fall ist, spielen die Kreuzkopplungen eine entscheidende Rolle für das Verhalten des Systems und dürfen somit nicht vernachlässigt werden. Das Auslegen eines MIMO-Reglers ist also notwendig.

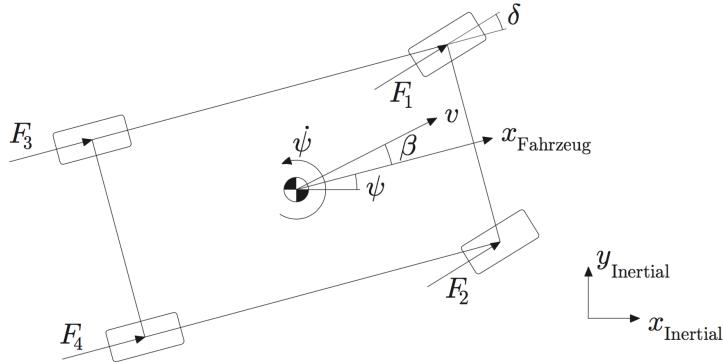
4.6 Aufgaben

1. Die Fahrodynamik eines Kraftfahrzeugs sei vereinfacht durch folgendes lineare zeitinvariante Mehrgrößensystem beschrieben:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_L \\ F_R \end{bmatrix},$$

wobei v [m/s] die Fahrzeuggeschwindigkeit, β [rad] den Schwimmwinkel und $\dot{\psi}$ [rad/s] die Gierrate bezeichnet. Als Eingänge werden die Längskräfte [kN] (durch Antrieb und Bremsen) der linken Reifen $F_L = F_1 + F_3$ und die der rechten Reifen $F_R = F_2 + F_4$ berücksichtigt. Es sei vereinfachend angenommen, dass diese beliebig, aber endlich vorgegeben werden können. Fahrzeuggeschwindigkeit und Gierrate werden kontinuierlich gemessen und als Ausgänge betrachtet. Die zugehörige Übertragungsmatrix lautet

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+0.01} & \frac{1}{s+4} \\ -\frac{s+4}{3 \cdot (s^2 + 8 \cdot s + 18)} & \frac{s+0.01}{3 \cdot (s^2 + 8 \cdot s + 18)} \end{bmatrix}.$$



- (a) Berechnen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und deren Vielfachheit.
- (b) Kann aus den Messungen der Fahrzeuggeschwindigkeit und der Gierrate sowie bekannten Reifenlängskräften auch auf den Schwimmwinkel geschlossen werden?
- (c) Kann man auf der Grundlage des gegebenen Modells die Gierbewegung des Fahrzeugs durch unterschiedlich starkes Bremsen der linken und rechten Reifen destabilisieren (im Sinne von $\dot{\psi} \rightarrow \infty$)?
- (d) Für alternativ gewählte Eingänge⁶ lautet die Eingangsmatrix

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Als Ausgänge werden nach wie vor Fahrzeuggeschwindigkeit und Gierrate betrachtet. Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix des sich ergebenden Systems.

⁶Wenn anstelle rechts und links unterschiedlicher Reifenlängskräfte der Lenkwinkel δ [rad] und eine bei allen Reifen einheitliche Reifenlängskraft F [kN], $F_i = F \forall i = 1, \dots, 4$, als Eingänge berücksichtigt werden.

2. Gegeben sei das System

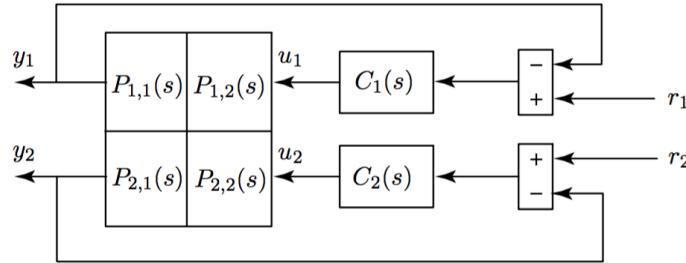
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)\end{aligned}$$

mit der zugehörigen Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-6 \cdot s+9} & 0 \\ \frac{-1}{s^2-6 \cdot s+9} & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Ist das System im Sinne von Lyapunov stabil, asymptotisch stabil oder instabil?
- (b) Ist das System vollständig steuerbar? Ist das System vollständig beobachtbar?
- (c) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und deren Vielfachheit.
- (d) Tritt eine Pol-Nullstellenkürzung auf? Welche der vorigen Teilaufgaben müssen Sie gelöst haben, um diese Frage in jedem Fall ohne weitere Rechnung beantworten zu können?
- (e) Das Zustandsraummodell sei in Matlab durch \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} definiert. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der die Übertragungsmatrix bestimmt.

3. Folgende Abbildung zeigt das zu analysierende 2×2 MIMO-System. Von den vier SISO Übertragungsfunktionen $P_{ij}(s)$ der Regelstrecke ist nichts bekannt, ausser dass $P_{12}(s) = 0$ ist. Für die Regelung schlägt Ihnen Ihre Chefin einen “one-loop-at-the-time” Ansatz vor, wie er im folgenden Abbildung bereits dargestellt ist.



- (a) Der vorgeschlagene Ansatz für die Regelung ist tatsächlich sinnvoll. Geben Sie quantitative Argumente, welche diese Behauptung bestätigen.
- (b) Nur ein Sollwert r_i beeinflusst beide Ausgänge y_i des im Abbildung dargestellten geschlossenen Systems. Welcher Sollwert ist das? Eine qualitative Begründung ist ausreichend.
- (c) Wie lautet diese Übertragungsfunktion $r_i \rightarrow y_j$ für $i \neq j$?

4. An Ihrem ersten Arbeitstag in der Firma SCS Inc. erhalten Sie die Aufgabe zu beurteilen, ob für ein MIMO-System mit der Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \alpha \\ \frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

ein “echter” MIMO-Entwurf notwendig ist oder die Regelungsaufgabe auch zufriedenstellend mit zwei voneinander unabhängigen SISO-Regelkreisen (“one-loop-at-the-time”) gelöst werden kann.

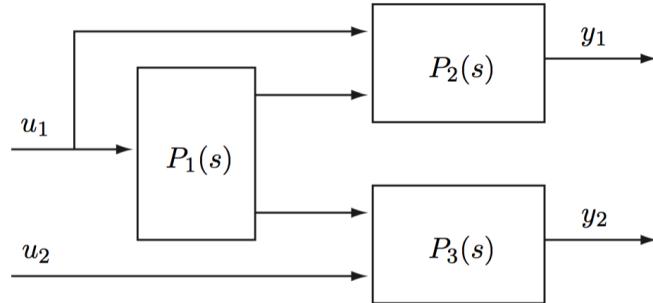
- (a) Bestimmen Sie die frequenzabhängige Matrix der Relative-Gain Array $\text{RGA}(s)$ in Funktion von α . Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der RGA-Matrix, damit Sie $\text{RGA}(s)$ möglichst effizient bestimmen können!
- (b) Für welchen Wert von α können Sie die Regelungsaufgabe für alle Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ mit dem Ansatz “one-loop-at-the-time” lösen?

Nun erhalten Sie die Zusatzinformation, dass $\alpha = 1$ ist.

- (c) Verwenden Sie die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu beurteilen, ob das Regelsystem für das Frequenzband von $\omega \in [0, 0.1] \text{ rad/s}$ mit dem “one-loop-at-the-time” Ansatz entworfen werden kann.
- (d) Verwenden Sie ebenfalls die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu zeigen, dass das Regelsystem für den Frequenzbereich $\omega \in [10, \infty) \text{ rad/s}$ mit dem “one-loop-at-the-time” Ansatz entworfen werden kann. Geben Sie an, welche Paarung der Ein- und Ausgangsgrößen für die Regelung ausgewählt werden muss.

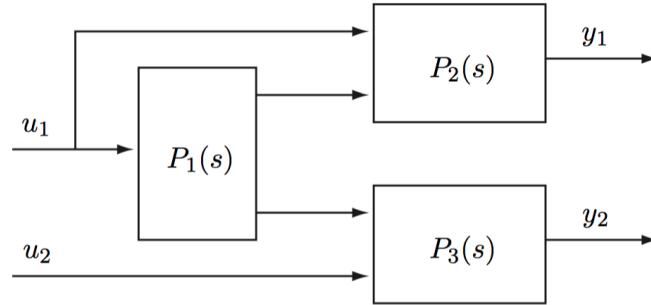
5. Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind.

- (a) Das unten abgebildete MIMO System ist mit 2 SISO Reglern gut regelbar.



- (b) Sie finden für die Übertragungsmatrix $P(s)$ eines Mehrgrößensystems sowohl einen Pol als auch eine Nullstelle bei $s = 2$. Daraus lässt sich schliessen, dass die interne Beschreibung (A, B, C, D) des Ein-/Ausgangsverhaltens $P(s)$ nicht-steuerbare oder nicht-beobachtbare Zustände besitzt.
- (c) Stabilität ist eine notwendige Bedingung für robuste Regelgüte.

6. Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den drei Subsystemen $P_1(s)$, $P_2(s)$ und $P_3(s)$. Es hat die Eingänge u_1 und u_2 und die Ausgänge y_1 und y_2 .

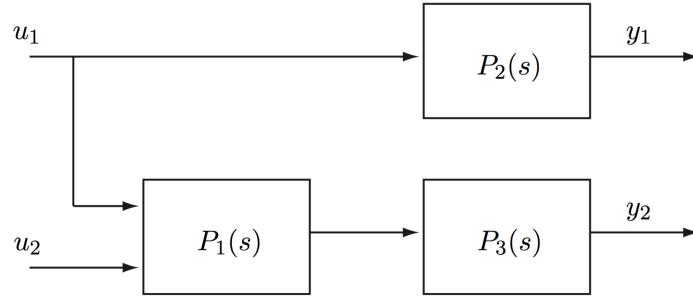


Die Subsysteme $P_1(s)$, $P_2(s)$ und $P_3(s)$ haben folgende Übertragungsmatrizen:

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{s+3} \\ \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}, \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{s+4}{s-5} \end{bmatrix}, \quad P_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+5} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $P(s)$ des gesamten Systems.

7. Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den drei Subsystemen $P_1(s)$, $P_2(s)$ und $P_3(s)$. Es hat die Eingänge u_1 und u_2 und die Ausgänge y_1 und y_2 .



Die Subsysteme $P_1(s)$, $P_2(s)$ und $P_3(s)$ haben folgende Übertragungsmatrizen:

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ s & s+1 \end{bmatrix}, \quad P_2(s) = \frac{1}{s+2}, \quad P_3(s) = \frac{s+1}{s+3}$$

Zeichnen Sie ein detailliertes Signalflussbild und leiten Sie daraus eine Zustandsraumdarstellung der Systemgleichungen ab.

5 Frequenzantworten von MIMO-Systemen

5.1 Singulärwertzerlegung

5.1.1 Einführung

Die induzierte Norm⁷ $\|M\|$ einer Matrix einer linearer Abbildung $y = M \cdot u$ ist

$$\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1} \|y\|. \quad (5.1)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|M\|^2 &= \max_{\|u\|=1} y^* \cdot y = \max_{\|u\|=1} (M \cdot u)^* \cdot (M \cdot u) = \max_{\|u\|=1} u^* \cdot M^* \cdot M \cdot u \\ &= \max_i \lambda(M^* \cdot M) = \max_i \sigma_i^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

wobei σ_i die Singularwerte der Matrix M sind⁸. Die Singularwerte sind also die Wurzel der Eigenwerte von $M^* \cdot M$, d.h.

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \lambda_i : \text{Eigenwerte von } M^* \cdot M. \quad (5.3)$$

Es gilt also

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M). \quad (5.4)$$

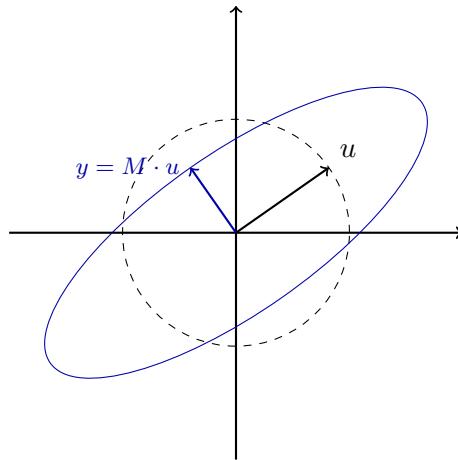


Abbildung 17: Illustration von den Singularwerten.

5.1.2 Singulärwertzerlegung

Ziel der Singularwertzerlegung ist eine Matrix M in folgender Form zu schreiben:

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^* \quad \text{mit} \quad M \in \mathbb{C}^{p \times m}, U \in \mathbb{C}^{p \times p}, V \in \mathbb{C}^{m \times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

wobei

- Σ : Singularwerte von M auf der Diagonalen, ansonsten Null;

⁷Für den Kurs RT2 benutzt man immer die 2-Norm, d.h. $\|A\| = \|A\|_2$.

⁸ A^* ist äquivalent zu $(\text{conj}(A))^T$, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist $A^* = A^T$.

- V : Die Spalten von V sind die Eigenvektoren der jeweiligen Singularwerte (Eigenvektoren von $A^* \cdot A$);
- U : Spalten von U sind die Richtung der Abbildungen der in V^* enthaltenen Eigenvektoren (Eigenvektoren von $A \cdot A^*$).

Motivation für die Berechnung von Σ , U und V ⁹:

$$M^* \cdot M = (U \cdot \Sigma \cdot V^*)^* \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^*) = V \cdot \Sigma^* \cdot U^* \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^* = V \cdot \Sigma^* \cdot \Sigma \cdot V^*, \quad (5.5)$$

$$M \cdot M^* = (U \cdot \Sigma \cdot V^*) \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^*)^* = U \cdot \Sigma \cdot V^* \cdot V \cdot \Sigma \cdot U^* = U \cdot \Sigma^* \cdot \Sigma \cdot U^*, \quad (5.6)$$

Daraus folgt

$$(M^* \cdot M) \cdot V = V \cdot \Sigma^* \cdot \Sigma, \quad (M \cdot M^*) \cdot U = U \cdot \Sigma^* \cdot \Sigma. \quad (5.7)$$

wobei die Symmetrie von $A^* \cdot A$ verwendet¹⁰ wurde, d.h. $U^{-1} = U^*$ und $V^{-1} = V^*$ (orthogonale Matrizen).

Bemerkung. Da die Matrix $M^* \cdot M$ symmetrisch und positiv semidefinit ist, sind die Singularwerte immer reelle Zahlen. Die Matrizen U und V können dagegen komplex sein.

Bemerkung. Der Matlab Befehl für die Singularwertzerlegung ist `[U,S,V] = svd(A)`. Beachte, dass $A^\top = A'$ = `transpose(A)` und $A^* = A' = conj(transpose(A))$ zwei unterschiedliche Befehle sind. Die sind nur für reellen Matrizen äquivalent.

5.1.3 Beispiel

Sei $u = [\cos(x) \ sin(x)]^\top$, mit $\|u\| = 1$. Die Matrix M ist gegeben als

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Multiplikation von M und u ergibt

$$y = M \cdot u = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(x) \\ \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Der Betrag von y ist gegeben als

$$\|y\|^2 = 4 \cdot \cos^2(x) + \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x), \quad (5.10)$$

mit Maximum¹¹

$$\frac{d\|y\|^2}{dx} = -8 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_{\max} = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}. \quad (5.11)$$

Durch Einsetzen von x_{\max} in (5.10) bekommt man:

$$\|y\|_{\max} = 2, \quad \|y\|_{\min} = \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Die Singularwerte der Matrix M sind die Wurzel der Eigenwerte der Matrix $M^* \cdot M$:

$$M^* \cdot M = M^\top \cdot M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_i = \left\{ 4, \frac{1}{4} \right\} \Rightarrow \sigma_i = \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\}. \quad (5.13)$$

⁹Siehe hier. Das Berechnen von U und V ist jedoch **nicht** prüfungsrelevant.

¹⁰Beweis der Symmetrie: $(A^* \cdot A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^* \cdot A$.

¹¹Die x , die $\|y\|$ maximiert muss auch $\|y\|^2$ maximieren. Deshalb sucht man nach dem Maximum von $\|y\|^2$, da man nicht mit Wurzeln rechnen muss.

Man sieht also, dass $\|y\| \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. Die Matrix U hat die Eigenvektoren von $M \cdot M^\top$ als Spaltenvektoren und die Matrix V hat die Eigenvektoren von $M^\top \cdot M$ als Spaltenvektoren. Da $M \cdot M^\top = M^\top \cdot M$ (Zufall) sind die zwei Matrizen gleich. Man kann zeigen, dass die Singularwertzerlegung ist gegeben durch

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Man sieht, dass die maximale ‘‘Verstärkung’’ passiert bei $v = V(:, 1)$ und hat Richtung $u = U(:, 1)$, der Vektor u wird genau 2-mal länger (σ_{\max}). Die minimale ‘‘Verstärkung’’ passiert bei $v = V(:, 2)$ und hat Richtung $u = U(:, 2)$, der Vektor u wird genau 0.5-mal länger (σ_{\min}).

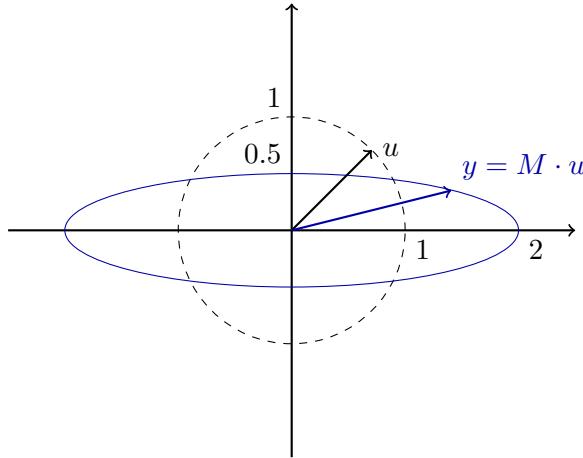


Abbildung 18: Illustration von der Singularwertzerlegung.

5.2 Frequenzantworten

Wird ein SISO System mit einem harmonischen Signal

$$u(t) = \cos(\omega \cdot t) \cdot h(t) \quad (5.15)$$

angeregt, ist die entsprechende Antwort nach grösser Zeit wiederum durch eine harmonische Funktion gegeben, die die gleiche Frequenz ω aufweist:

$$y_\infty(t) = |P(j \cdot \omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle(P(j \cdot \omega))). \quad (5.16)$$

Jetzt wollen wir die Theorie zu MIMO Systemen erweitern. Unter der Annahme $p = m$, d.h. gleich viele Input wie Output, kann man schreiben

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \vdots \\ \mu_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_m) \end{bmatrix} \cdot h(t) \quad \text{und} \quad y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_1) \\ \vdots \\ \nu_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_m) \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Mit der Laplace Transformation bekommt man

$$U(s) = e^{\Phi \cdot s/\omega} \cdot \mu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad Y(s) = e^{\Psi \cdot s/\omega} \cdot \nu \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad (5.18)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \mu &= [\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_m]^\top, \\ \Psi &= \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}, & \nu &= [\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_m]^\top. \end{aligned}$$

Mit

$$Y(s) = P(s) \cdot U(s) \quad (5.19)$$

folgt

$$e^{j\cdot\Psi} \cdot \nu = P(j \cdot \omega) \cdot e^{j\cdot\Phi} \cdot \mu. \quad (5.20)$$

Die Norm $\|\cdot\|$ der Matrix $P(j \cdot \omega)$ ist deshalb¹²

$$\|P(j \cdot \omega)\| = \max_{e^{j\cdot\Phi} \cdot \mu \neq 0} \frac{\|e^{j\cdot\Psi} \cdot \nu\|}{\|e^{j\cdot\Phi} \cdot \mu\|} = \max_{\|e^{j\cdot\Phi} \cdot \mu\|=1} \|e^{j\cdot\Psi} \cdot \nu\|, \quad (5.21)$$

Mit

$$\|e^{j\cdot\Psi} \cdot \nu\| = \|\nu\| \quad \text{und} \quad \|e^{j\cdot\Phi} \cdot \mu\| = \|\mu\| \quad (5.22)$$

wird Gleichung (5.21) zu

$$\|P(j \cdot \omega)\| = \max_{\mu \neq 0} \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} = \max_{\|\mu\|=1} \|\nu\|, \quad (5.23)$$

Aus der Theorie über Singularwerte wissen wir, dass

$$\sigma_{\min}(P(j \cdot \omega)) \leq \|\nu\| \leq \sigma_{\max}(P(j \cdot \omega)). \quad (5.24)$$

Für den Fall $\|u\| \neq 1$ wird

$$\sigma_{\min}(P(j \cdot \omega)) \leq \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{\max}(P(j \cdot \omega)), \quad (5.25)$$

wobei σ_i die Singularwerte der Matrix $P(j \cdot \omega)$ sind (oder Eigenwerte von $P^* \cdot P$).

Es ist wichtig zu erkennen, dass Gleichungen (5.24) und (5.25) nur "worst case" sind, d.h. man hat keine allgemeine Gleichung $\nu = f(\mu)$. Zusätzlich können über den Phasenverlauf keine einfache und kohärente Aussage gemacht werden.

5.2.1 Maximale und minimale Verstärkung

Gegeben die Singularwertzerlegung $P(j \cdot \omega) = U \cdot \Sigma \cdot V^*$ bei einer bestimmten Frequenz ω wird die maximale/minimale Verstärkung durch Anregung in Richtung Spaltenvektoren von V . Die Antwort des Systems wird dann in Richtung U sein.

Beispiel. Betrachte ein System mit $m = 2$ Input und $p = 3$ Output. Gegeben ist die Singularwertzerlegung. Gegeben ist die Singularwertzerlegung bei $\omega = 5 \text{ rad/s}$:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 0.4167 & 0 \\ 0 & 0.2631 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ V &= \begin{bmatrix} 0.2908 & 0.9568 \\ 0.9443 - 0.1542 \cdot j & -0.2870 + 0.0469 \cdot j \end{bmatrix}, \\ U &= \begin{bmatrix} -0.0496 - 0.1680 \cdot j & 0.1767 - 0.6831 \cdot j & -0.6621 - 0.1820 \cdot j \\ 0.0146 - 0.9159 \cdot j & -0.1059 + 0.3510 \cdot j & -0.1624 + 0.0122 \cdot j \\ 0.0349 - 0.3593 \cdot j & 0.1360 - 0.5910 \cdot j & 0.6782 + 0.2048 \cdot j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

¹²Die induzierte Norm $\|M\|$ einer Matrix einer linearer Abbildung $y = M \cdot u$ ist

$$\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|y\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1} \|y\|.$$

Für den Singularwert $\sigma_{\max} = 0.4167$ sind die “Eigenvektoren” $V(:, 1)$ und $U(:, 1)$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.2908 \\ 0.9443 - 0.1542 \cdot j \end{bmatrix}, \quad |V_1| = \begin{bmatrix} 0.2908 \\ 0.9568 \end{bmatrix}, \quad \angle(V_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1618 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.0496 - 0.1680 \cdot j \\ 0.0146 - 0.9159 \cdot j \\ 0.0349 - 0.3593 \cdot j \end{bmatrix}, \quad |U_1| = \begin{bmatrix} 0.1752 \\ 0.9160 \\ 0.3609 \end{bmatrix}, \quad \angle(U_1) = \begin{bmatrix} -1.8581 \\ -1.5548 \\ -1.4741 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Die maximale Verstärkung erreicht man also mit

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.2908 \cdot \cos(5 \cdot t) \\ 0.9568 \cdot \cos(5 \cdot t - 0.1618) \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Die entsprechende Antwort des Systems ist also

$$y(t) = \sigma_{\max} \cdot \begin{bmatrix} 0.1752 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.8581) \\ 0.9160 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.5548) \\ 0.3609 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.4741) \end{bmatrix} = 0.4167 \cdot \begin{bmatrix} 0.1752 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.8581) \\ 0.9160 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.5548) \\ 0.3609 \cdot \cos(5 \cdot t - 1.4741) \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Da die drei Signale $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ nicht in Phase sind, wird die maximale Verstärkung nie erreicht. Man kann zeigen, dass

$$\max_t \|y(t)\| \approx 0.4160 < 0.4167 = \sigma_{\max}. \quad (5.31)$$

Der Grund dieser Abweichung steht in der Phasenverschiebung zwischen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$. Die gleiche Analyse kann man auch für den kleinsten Singularwert σ_{\min} machen.

5.2.2 Robustheit und Störungsunterdrückung

Definiere die Matrix Norm $\|\cdot\|_\infty$ als

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega (\max_i (\sigma_i(G(i \cdot \omega))). \quad (5.32)$$

	SISO	MIMO
Robustheit	$\mu = \min_\omega (1 + L(j \cdot \omega))$	$\mu = \min_\omega (\sigma_{\min}(\mathbb{I} + L(j \cdot \omega)))$
Rauschenverstärkung	$\ S\ _\infty = \max_\omega (S(j \cdot \omega))$	$\ S\ _\infty = \max_\omega (\sigma_{\max}(S(j \cdot \omega)))$

5.3 Aufgaben

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = [j \ 1].$$

Berechnen Sie die Singularwerte von A und B .

2. Gegeben sei folgende Übertragungsmatrix $G(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{s+1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Singularwerte von $G(s)$ bei der Frequenz $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

3. Ein 2×2 linerer zeitinvariantes MIMO System mit der Übertragungsfunktionsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{s^2+1}{s+10} & \frac{1}{s^2+2} \end{bmatrix}$$

wird mit dem Signal

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \mu_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

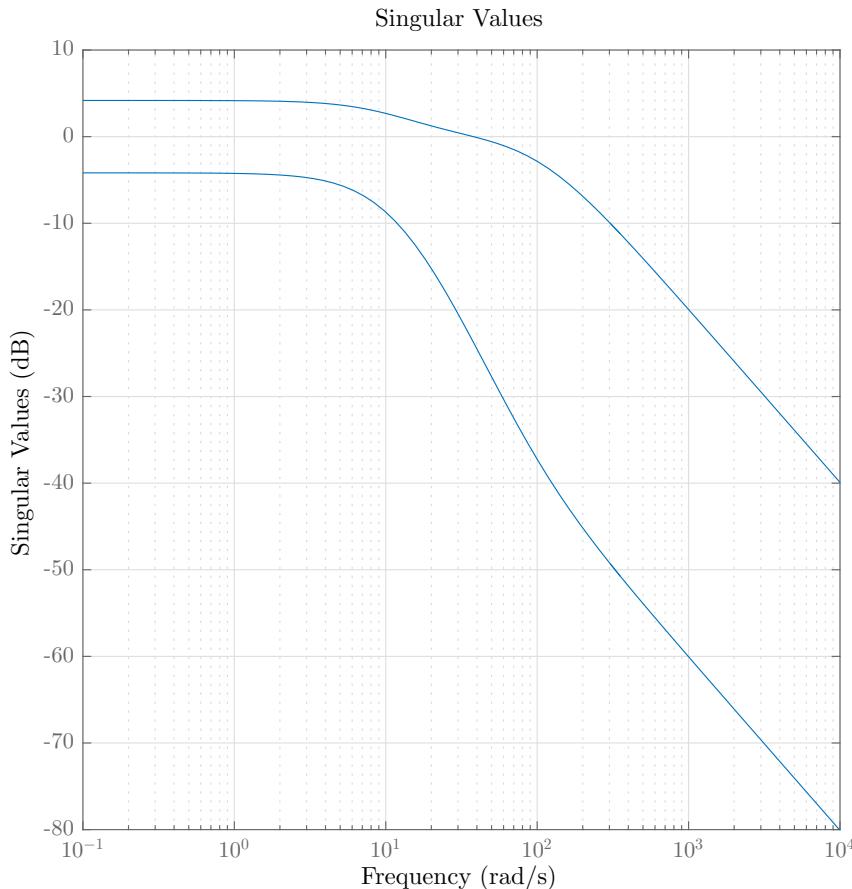
angeregt. Aufgrund eines Defekts bei Ihrem Signalgenerator sind die Konstanten μ_i und φ_i nicht bekannt. Ihr Kolleg hat schon einige Messungen durchgeführt und hat gefunden, dass die Anregungsfrequenz ω genau 1 rad/s beträgt. Zusätzlich wissen Sie, dass wegen einer beschränkten Anregungsleistung der Betrag des Verstärkungsvektor μ kleiner als 10 ist, d.h. $\sqrt{\mu_1 + \mu_2} \leq 10$. Um Rauscheneinflüsse zu unterdrücken arbeiten Sie immer bei der maximalen Leistung und können Sie deshalb annehmen, dass es $\sqrt{\mu_1 + \mu_2} = 10$ gilt. Kreuzen Sie alle mögliche Antworten (nach unendlicher Zeit) des Systems.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \sin(t + 0.114) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 19 \cdot \cos(t + 0.114) \\ \cos(t + 1.124) \end{bmatrix}$ |
| <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \sin(t + 0.114) \\ \cos(2 \cdot t) \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 5 \cdot \cos(t + 0.114) \\ 5 \cdot \cos(t) \end{bmatrix}$ |
| <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} \sin(t + 0.542) \\ \sin(t + 0.459) \end{bmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 10 \cdot \sin(t + 2.114) \\ 11 \cdot \sin(t + 1.234) \end{bmatrix}$ |

4. Ein 3×2 linereres zeitinvariantes MIMO System wird mit dem Input

$$u(t) = \begin{bmatrix} 3 \cdot \sin(30 \cdot t) \\ 4 \cdot \cos(30 \cdot t) \end{bmatrix}$$

angeregt. Leider haben Sie Ihr Computer nicht dabei und kennen Sie deshalb nicht die Übertragungsfunktion des Systems. Zum Glück haben Sie auf Ihrem Handy folgendes Matlab Plot, das mit dem Matlab-Befehl `sigma` generiert wurde. Kreuzen Sie alle mögliche Antworten (nach unendlicher Zeit) des Systems.



$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 0.5 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 0.5 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 3 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1.000) \end{bmatrix}$

$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.243) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.142) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.252) \end{bmatrix}$

$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot \sin(30 \cdot t + 0.114) \\ 0.1 \cdot \cos(30 \cdot t) \\ 0.1 \cdot \cos(30 \cdot t + 1.000) \end{bmatrix}$

$y_\infty(t) = \begin{bmatrix} 3 \cdot \cos(30 \cdot t + 0.523) \\ \cos(30 \cdot t) \cdot \sin(30 \cdot t) \\ 2 \cdot \cos(30 \cdot t + 1) \end{bmatrix}$

6 MIMO Reglersynthese

6.1 Der lineare quadratische Regulator (LQR)

6.1.1 Formulierung

Gegeben sei die Strecke

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (6.1)$$

und gesucht ist ein Regler der Form

$$u(t) = f(x(t), t), \quad (6.2)$$

der $x(t)$ asymptotisch zu Null (mit $x(0) \neq 0$) bringt, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (6.3)$$

Beim LQR Problem will man das Kriterium

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (\underbrace{x^T \cdot Q \cdot x}_{\text{Fehler}} + \underbrace{u^T \cdot R \cdot u}_{\text{eingesetzte En.}}) dt, \quad (6.4)$$

minimieren, wobei

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad R \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (6.5)$$

zwei symmetrische Matrizen sind. Die Matrix R muss positiv definit sein, die Matrix Q positiv semidefinit. Die Lösung¹³ $u(t) = f(x(t), t)$ (die (6.4) minimiert) ist gegeben durch

$$u(t) = -K \cdot x(t), \quad \text{mit} \quad K = R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi, \quad (6.6)$$

wobei Φ ist die Lösung der Riccati Gleichung

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q = 0. \quad (6.7)$$

Bemerkung. Für den SISO Fall ist (6.4)

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (q \cdot x^2 + r \cdot u^2) dt. \quad (6.8)$$

Bemerkung. Der gefundene Regler K ist optimal, d.h. ist Lösung eines Optimisierungsproblems. Das impliziert jedoch nicht, dass es um den besten Regler geht.

Beispiel. Für das Kriterium

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 10 \cdot x_2^2 + 2 \cdot u_1^2 + 3 \cdot u_2^2) dt \quad (6.9)$$

sind die Matrix R und Q gegeben durch

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

¹³Hier wird es angenommen, dass den Zustandsvektor $x(t)$ verfügbar ist. Das ist im Allgemeinen nicht der Fall, darum muss einen sogenannten Beobachter implementiert werden (mehr in einige Wochen).

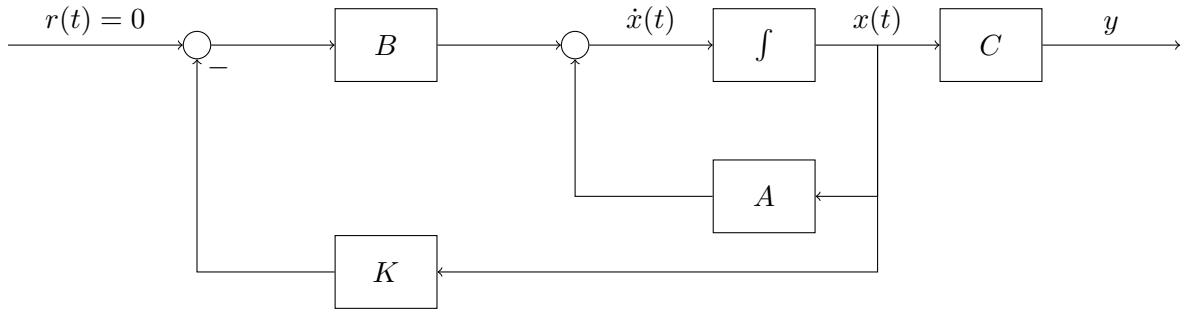


Abbildung 19: LQR Problem: Der geschlossene Regelkreis.

6.1.2 Methode

1. Wähle die Matrizen R und $Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}$. Eine *mögliche* Wahl ist $R = r \cdot \mathbb{I}_{m \times m}$ und $\bar{C} = C$.
2. Finde die symmetrische positiv definite Lösung Φ der Riccati Gleichung

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0. \quad (6.11)$$

3. Berechne die Matrix K mit

$$K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi. \quad (6.12)$$

Matlab Befehl: `K = lqr(A,B,Q,R)`.

Bemerkung. Die Matrix Φ existiert falls:

- $\{A, B\}$ vollständig steuerbar;
- $\{A, \bar{C}\}$ vollständig beobachtbar.

Es ist jedoch möglich, dass Φ existiert, auch wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind (“sufficient but not necessary”).

6.1.3 Frequenzbereich

In Frequenzbereich ergeben sich folgende Ausdrücke für die Kreisverstärkung und die komplementäre Sensitivität (siehe Abbildung 19):

$$\begin{aligned} L_{\text{LQR}}(s) &= K \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B, \\ T_{\text{LQR}}(s) &= C \cdot (s \cdot I - (A - B \cdot K))^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

6.1.4 Eigenschaften

1. Die Matrix $A - B \cdot K$ ist asymptotisch stabil. Beachte, dass

$$\frac{d}{dt}x(t) = (A - B \cdot K) \cdot x(t). \quad (6.13)$$

Darum ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

2. Minimal return difference (mit $R = r \cdot \mathbb{I}$):

$$\mu_{\text{LQR}} = \min_{\omega} \{\sigma_{\min}(\mathbb{I} + L_{\text{LQR}})\} \geq 1. \quad (6.14)$$

3. Closed loop Verhalten:

$$\max_{\omega} \{\sigma_{\max}(S(j \cdot \omega))\} \leq 1, \quad (6.15)$$

$$\max_{\omega} \{\sigma_{\max}(T(j \cdot \omega))\} \leq 2. \quad (6.16)$$

6.2 LQRI

6.2.1 Formulierung

LQRI ist eine Erweiterung eines LQR Problems, die Folgeregelung erlaubt. Ein zusätzliches Integrator in der Strecke vermeidet einen statischen Nachlauffehler.

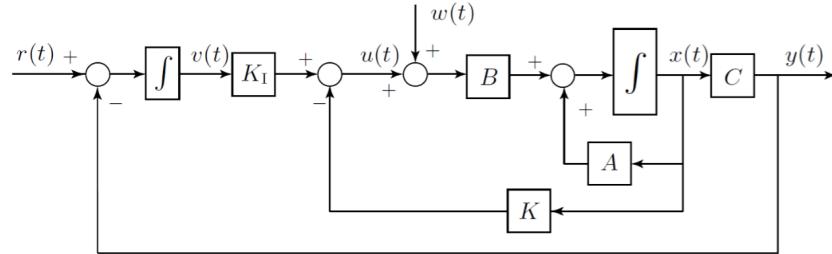


Abbildung 20: Struktur des LQRI.

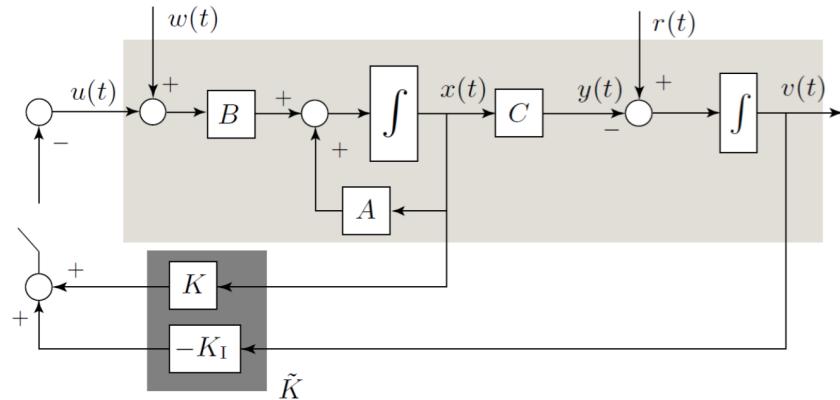


Abbildung 21: Struktur des LQRI.

Anhand Abbildung 21 kann das Problem als LQR betrachten. Durch einführen der Zustandsvariable

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} \quad (6.17)$$

bekommt man folgende Dynamik

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_u \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t), \quad (6.18)$$

wobei

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Durch Lösen des LQR Problems mit \tilde{A} , \tilde{B}_u und den Gewichtungsmatrizen

$$\tilde{Q} = \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma^2 \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = R. \quad (6.20)$$

Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\tilde{K} = [K \quad -K_I], \quad (6.21)$$

wobei $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $K_I \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Der Minus in K_I kommt aus der Tatsache, dass in Abbildung 20 $v(t)$ nicht negativ zurückgeführt wird.

Bemerkung. Die Matrix R ändert nicht, da sie ein Gewicht für den Input $u(t)$ ist und der Input unveränderte Dimensionen (im Vergleich zu dem LQR) hat.

6.2.2 Methode

- Definiere das neue System

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B}_u \cdot u(t) + \tilde{B}_r \cdot r(t), \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

mit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

- Wähle die Gewichtungsmatrizen

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & \gamma \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \tilde{C}^\top \cdot \tilde{C} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \gamma^2 \cdot \mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = R. \quad (6.24)$$

Der Regler ist dann

$$\tilde{K} = [K \quad -K_I]. \quad (6.25)$$

- Finde \tilde{K} durch Lösen ein standard LQR-Problem mit $\{\tilde{A}, \tilde{B}_u, \tilde{Q}, \tilde{R}\}$ statt $\{A, B, Q, R\}$.

Matlab Befehl: `K_tilde = lqr(A_tilde, B_u_tilde, C_tilde'*C_tilde, r*eye(m,m))`.

6.3 LQG

Im LQR Problem wurde es angenommen, dass alle Zustände des Systems verfügbar waren. In meisten praktischen Situationen das ist trotzdem nicht der Fall, darum muss ein Beobachter implementiert werden.

6.3.1 Beobachter

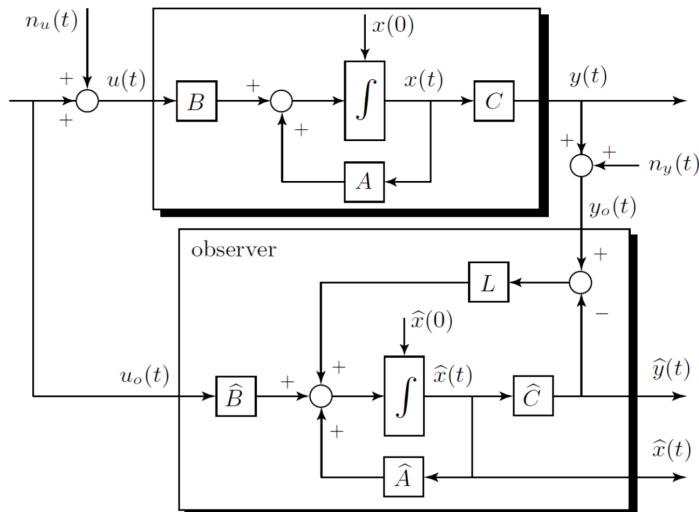


Abbildung 22: Struktur eines Zustandsbeobachters.

LQR	LQG
$[A - B \cdot K]$	$[(A - L \cdot C)^\top] = [(A^\top - C^\top \cdot L^\top)]$
A	A^\top
B	C^\top
$Q = \bar{C}^\top \cdot \bar{C}$	$\bar{B} \cdot \bar{B}^\top$
$R = r \cdot \mathbb{I}$	$q \cdot \mathbb{I}$

Tabelle 1: LQG und LQR.

Definiere den Fehler als

$$\bar{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (6.26)$$

wobei $x(t)$ ist der Zustand des Systems und $\hat{x}(t)$ der Zustand des Beobachters. Die Dynamik des Fehlers wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) &= \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} \hat{x}(t) \\ &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - (\hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + L \cdot (C \cdot x(t) - \hat{C} \cdot \hat{x}(t))) \\ &= A \cdot \bar{x}(t) - L \cdot C \cdot \bar{x}(t) \\ &= (A - L \cdot C) \cdot \bar{x}(t), \end{aligned} \quad (6.27)$$

d.h. \bar{x} konvergiert falls $A - L \cdot C$ asymptotisch stabil ist. Das Problem kann als LQR betrachtet werden, da LQR garantiert, dass die Eigenwerte von $A - B \cdot K$ eine negativen Realteil besitzen. Darum¹⁴

$$(A - L \cdot C)^\top = A^\top - C^\top \cdot L^\top, \quad (6.28)$$

ist äquivalent zu

$$A - B \cdot K. \quad (6.29)$$

Die Matrix L^\top kann also durch Lösen des LQR Problems mit $\{A^\top, C^\top, \bar{B}^\top\}$. Das Ergebnis ist in Tabelle 1 zusammengefasst.

Die Matrix L ist gegeben durch

$$L^\top = \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi, \quad (6.30)$$

wobei Φ ist die Lösung der Riccati Gleichung

$$\frac{1}{q} \cdot \Psi \cdot C^\top \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^\top - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^\top = 0. \quad (6.31)$$

Das kann durch “Substitution” der Matrizen in die Lösung des LQR

$$K = R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi, \quad (6.32)$$

wobei Φ ist die Lösung der Riccati Gleichung

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0. \quad (6.33)$$

6.3.2 LQG Regler

Der LQG Regler ist die Kombination zwischen LQR und Beobachter. Man benutzt den Regler K (Lösung von LQR) und den Signal $\hat{x}(t)$ aus dem Beobachter, d.h.

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t). \quad (6.34)$$

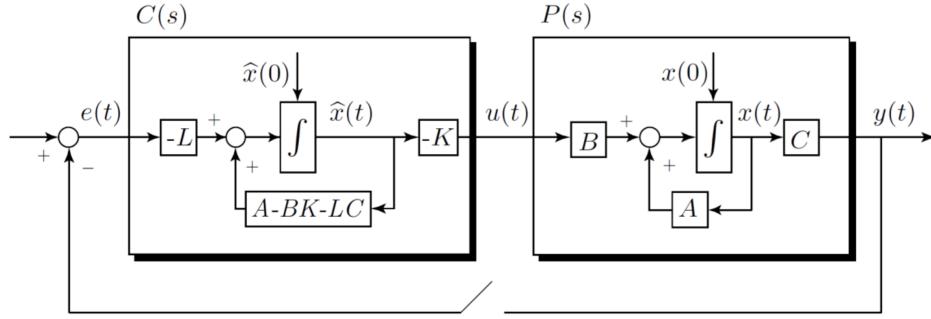


Abbildung 23: Struktur eines Zustandsbeobachter.

Somit können Systeme, von welchen den Zustand $x(t)$ nicht bekannt ist, mit LQR geregelt werden.

Führe die Zustandsvariable

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

bekommt man folgende Open-loop Dynamik

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \tilde{A}_{ol} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B} \cdot e(t), \quad (6.36)$$

mit

$$\tilde{A}_{ol} = \begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ 0 & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \ 0]. \quad (6.37)$$

Die Closed-loop Dynamik ist beschrieben durch

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \tilde{A}_{cl} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B} \cdot e(t), \quad (6.38)$$

mit

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} A & -B \cdot K \\ L \cdot C & A - B \cdot K - L \cdot C \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

In Frequenzbereich bekommt man

$$L_{LQG}(s) = P(s) \cdot C(s) = \underbrace{C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B}_{P(s)} \cdot \underbrace{K \cdot (s \cdot I - (A - B \cdot K - L \cdot C))^{-1} \cdot L}_{C(s)}, \quad (6.40)$$

$$T_{LQG}(s) = L_{LQG}(s) \cdot (\mathbb{I} + L_{LQG}(s))^{-1}. \quad (6.41)$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Eigenwerte von A_{cl} sind gegeben durch die Eigenwerte von $A - B \cdot K$ und $A - L \cdot C$. Dieses nennt man auch Separationsprinzip.

Bemerkung. Stabilität und Robustheit des Systems müssen “a posteriori” überprüft werden, d.h. alle Garantie die wir für LQR hatten sind verloren.

6.3.3 Methode

1. Finde K : lös ein standard LQR-Problem mit $\{A, B, Q = \bar{C}^\top \cdot C, R\}$;
2. Finde L : lös ein standard LQR-Problem mit $\{A^\top, C^\top, Q = \bar{B} \cdot \bar{B}^\top, R = q \cdot \mathbb{I}\}$.

Matlab Befehle:

`K = lqr(A,B,C_tilde'*C_tilde,r*eye(m,m)), L = lqr(A',C',B_bar*B_bar',q*eye(p,p))'`.

¹⁴Die Eigenwerte von M zu den Eigenwerten von M^\top .

Bemerkung. Es muss gelten:

- $\{A, C\}$ vollständig beobachtbar;
- $\{A, \bar{B}\}$ vollständig steuerbar.

6.4 LQGI

Eine möglich Erweiterung des LQG Reglers ist der LQGI Regler. Hier wird ein Integralteil ins LQG System hinzugefügt. Man muss also K , K_I und L bestimmen.

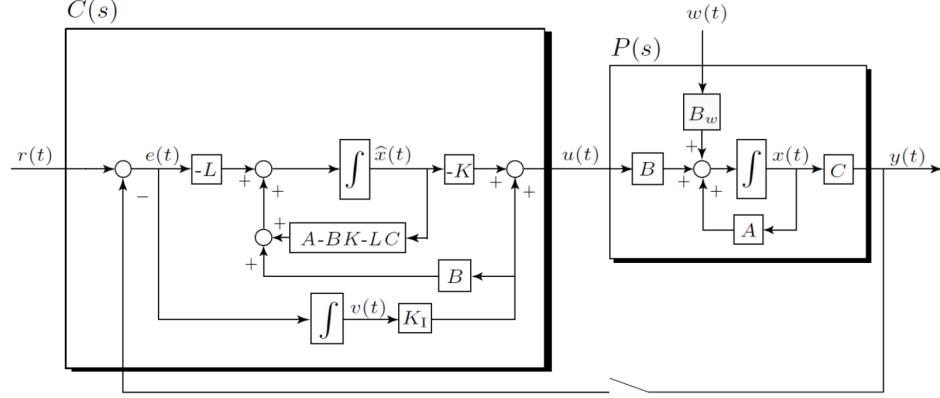


Abbildung 24: Struktur des LQGI Reglers.

6.4.1 Methode

1. Finde K und K_I : löse ein standard LQR-Problem mit $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{R}\}$ (siehe LQRI);
2. Finde L : löse ein standard LQR-Problem mit $\{A^\top, C^\top, Q = \bar{B} \cdot \bar{B}^\top, R = q \cdot \mathbb{I}\}$.

Das resultierende System ist gegeben durch:

- Open Loop:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_u \cdot K & B_u \cdot K_I \\ 0 & A - B_u \cdot K - L \cdot C & B_u \cdot K_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ I \end{bmatrix} \cdot e \\ y &= [C \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ v \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

- Closed Loop:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_u \cdot K & B_u \cdot K_I \\ L \cdot C & A - B_u \cdot K - L \cdot C & B_u \cdot K_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ B_u \\ I \end{bmatrix} \cdot r. \quad (6.43)$$

6.5 Numerische Optimierung

Der optimale Input $u^*(t \in [0, T])$ wird numerisch für das ganze “planning window” offline berechnet und als feedforward Signal benutzt, d.h. $u_{ff} = u^*(t)$. Die numerische Optimierung ist möglich, da die das “planning window” eine beschränkte Länge T hat.

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J_T(x_0, u(t)) &= \min_{u(t)} \underbrace{\int_0^T l(x(t), u(t)) dt}_{\text{Stage cost}} + \underbrace{m(x(T))}_{\text{Terminal cost}} \\ \text{s.t. } &\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ &x(0) = x_0, \\ &x(t) \in \mathcal{X}, u(t) \in \mathcal{U}, \\ &x(T) \in \mathcal{X}_f, \end{aligned} \quad (6.44)$$

wobei

- $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$: Modell des Systems;
- $x(0) = x_0$: Anfangsbedingung;
- $x(t) \in \mathcal{X}, u(t) \in \mathcal{U}$: “state and input constraint sets”;
- $x(T) \in \mathcal{X}_f$: “terminal state constraint set”.

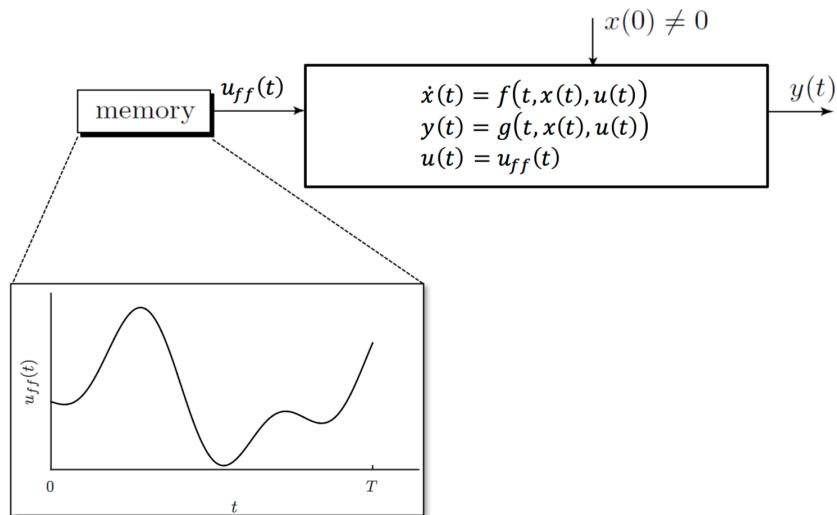


Abbildung 25: Numerische Optimierung.

6.6 MPC

Mit Model Predictive Control löst man in jedem Zeitintervall die numerische Lösung des Optimierungsproblems, so dass ein Feedback ins System eingeführt wird. Alle Δt folgendes Vorgehen wird wiederholt:

1. Messe/Estimate aktuellen Zustand:

$$x(t) = z. \quad (6.45)$$

2. Finde den optimalen¹⁵ Input für die ganze “planning window” T :

$$u^*([0, T]) = \arg \min_{u([0, T])} J_T(z, u([0, T])), \quad (6.46)$$

mit den in (6.44) eigenföhrten Modell und Constraints.

3. Implementiere nur den ersten Teil $u^*([0, \Delta t])$.

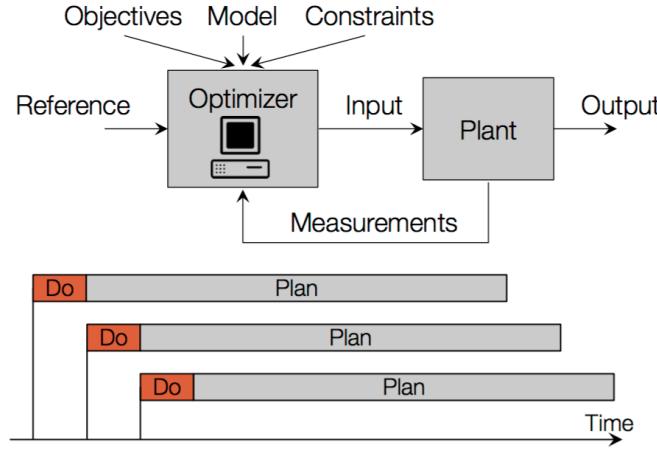


Abbildung 26: MPC.

Als Vorteil von MPC kann man mit allen Modellen arbeiten (nichtlinear, Totzeiten,...) und das Gütekriterium (objective function) kann auch frei gewählt werden (quadratischer Fehler, absoluter Fehler, maximaler Fehler, economic cost,...). Die Nachteile sind die nichtgarantierte Stabilität (die muss überprüft werden), die benötigte Genauigkeit des Modells, “computationally demanding” und “feasibility”.

6.7 LTR

Ziel von LTR ist die Robustheit des Systems zu verbessern, vor allem wenn ein Beobachter implementiert ist. In einer solchen Situation gibt es keine Garantie von Robustheit des Systems. Die Grundidee ist einen LQR oder einen Beobachter auszulegen, mit dem ein “gutes” System bekommt, und danach ein LQG mit Tuning Parameter aufzustellen. Der Parameter muss so gewählt werden, dass man das System nah zu dem “guten” System bringt.

6.7.1 β Methode

Um eine bessere Robustheit zu bekommen, verwendet man oft die β Methode.

- LQR: Berechne K mit

$$\frac{1}{r \cdot \beta} \cdot \Phi \cdot B \cdot B^\top \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^\top \cdot \Phi - Q = 0, \quad (6.47)$$

$$K = \frac{1}{r} \cdot B^\top \cdot \Phi. \quad (6.48)$$

Matlab: `Phi = care(A,B,Q,beta*r*eye(nu)), K = 1/r*B'*Phi.`

¹⁵ $\arg \min f(x)$ ist der Argument, der $f(x)$ minimiert. Zum Beispiel $\arg \min x^2$ ist $x = 0$, da für $x = 0$ ist $f(x) = x^2$ minimal.

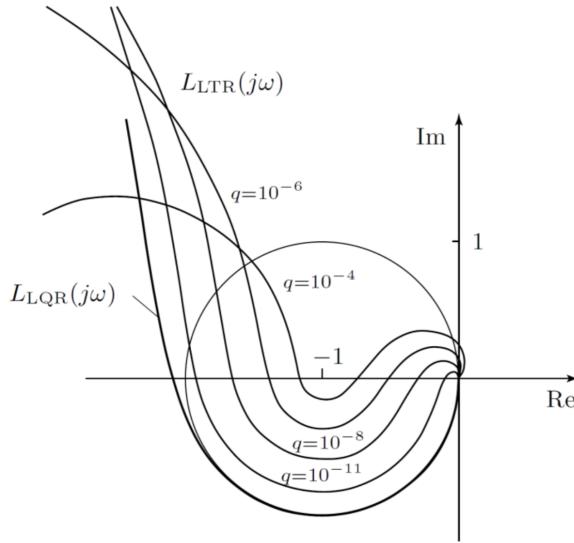


Abbildung 27: LTR.

- LQG: Berechne L mit

$$\frac{1}{q \cdot \beta} \cdot \Psi \cdot C^\top \cdot C \cdot \Psi - \Psi \cdot A^\top - A \cdot \Psi - \bar{B} \cdot \bar{B}^\top = 0, \quad (6.49)$$

$$L^\top = \frac{1}{q} \cdot C \cdot \Psi. \quad (6.50)$$

Matlab: `Psi = care(A',C',B_bar*B_bar',beta*q*eye(ny)), L = (1/q*C*Psi)'`.

Bemerkung. Bis jetzt konnte man K und L mit dem Befehl `lqr` bestimmen. Da β nur in der Gleichung für Φ bez. Ψ auftritt (und nicht in der Gleichung für K bez. L) muss man zuerst die Riccati Gleichung lösen (mit `care`) und dann den Gain bestimmen.

6.7.2 LQG/LQR für $m \geq p$

1. Strecke modellieren, linearisieren und normieren;
2. Definiere Spezifikationen in Frequenzbereich;
3. Lege den Beobachter aus:
 - `Psi = care(A',C',B_bar*B_bar',beta*q*eye(ny));`
 - `L = (1/q*C*Psi)'`;
 - Find $B_{\text{bar}} * B_{\text{bar}}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q > 0$, and $\beta \leq 1$, die die Spezifikationen mit (ungefähr) 3 dB Margin erfüllen;
 - Berechne L_{obs} mit

$$L_{\text{obs}}(s) = C \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot L; \quad (6.51)$$
4. Legen ein LTR ‘state feedback regulator’ aus:
 - `K = lqr(A,B,C'*Q_y*C,rho*R_u);`
 - Finde $Q_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $R_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (oft $Q_y = \text{eye}(ny)$ und $R_u = \text{eye}(nu)$);
 - Verkleine `rho` bis alle Spezifikationen erfüllt sind;

(d) Loop gain:

$$L_{\text{LTR}}(s) = C \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B \cdot K \cdot (s \cdot \mathbb{I} - (A - B \cdot K - L \cdot C))^{-1} \cdot L; \quad (6.52)$$

5. Regler implementieren.

6.7.3 LQG/LQR für $p \geq m$

1. Strecke modellieren, linearisieren und normieren;
2. Definiere Spezifikationen in Frequenzbereich;
3. Lege den LQR aus:

- (a) `Phi = care(A,B,Q,beta*q*eye(nu));`
- (b) `K = 1/r*B'*Phi;`
- (c) Finde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $r > 0$, and $\beta \leq 1$, die die Spezifikationen mit (ungefähr) 3 dB Margin erfüllen;
- (d) Berechne L_{obs} mit

$$L_{\text{LQR}}(s) = K \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B; \quad (6.53)$$

4. Legen ein LTR “state feedback regulator” aus:

- (a) `L = lqr(A',C',B*Q_u*B',mu*R_y)';`
- (b) Finde $Q_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $R_y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (oft $Q_u = eye(nu)$ and $R_y = eye(ny)$);
- (c) Verkleine μ bis alle Spezifikationen erfüllt sind;
- (d) Loop gain:

$$L_{\text{LTR}}(s) = C \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot B \cdot K \cdot (s \cdot \mathbb{I} - (A - B \cdot K - L \cdot C))^{-1} \cdot L; \quad (6.54)$$

5. Regler implementieren.

6.8 Aufgaben

1. Gegeben sei eine Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

Sie möchten einen Zustands-Beobachter für das System auslegen. Der Beobachter soll aus den Messungen $y(t)$ und den Stellsignalen $u(t)$ die Zustandsvariablen der Strecke durch $\hat{x}(t) \approx x(t)$ abschätzen.

- Welche Dimension hat die Beobachterverstärkungsmatrix L ? Zeichnen Sie das detaillierte Signalflussbild des Beobachters.
- Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix des Beobachters L für $q = 1$.
- Sie haben schon eine Zustandsrückführungsmaatrix $K = [1 \ 1]$ für das obige System ausgelegt. Geben Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden LQG-Reglers $C(s)$ an. Benutzen Sie $L = [\sqrt{2} \ 1]^\top$.
- Zeigen Sie, dass die Dynamik des Beobachtungsfehlers $\bar{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ durch folgende Differenzialgleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= -\sqrt{2} \cdot \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 &= -\bar{x}_1.\end{aligned}$$

Benutzen Sie L und K wie in der Teilaufgabe b).

2. Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind.

- (a) Es soll ein LQR entworfen werden. Gegeben seien das lineare zeitinvariante System im Zustandsraum (A, B, C, D) und die Gewichtsmatrizen $Q = \bar{C} \cdot \bar{C}^\top$ und R . Es ist garantiert, dass die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung eine positiv definite Lösung besitzt, wenn das System (A, B, C, D) vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist.
- (b) Es soll ein LQR entworfen werden. Gegeben seien das lineare zeitinvariante System im Zustandsraum (A, B, C, D) und die Gewichtsmatrizen $Q = \bar{C} \cdot \bar{C}^\top$ und R . Wenn das System (A, B) nicht vollständig steuerbar ist, kann die Matrix K nicht gefunden werden.

3. Gegeben sei eine Regelstrecke

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1.$$

Das Gütekriterium sei

$$J = \int_0^\infty x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + \frac{1}{4} \cdot u^2 dt.$$

Sie möchten einen LQG-Regler (Zustandsrückführung mit Zustandsbeobachter) dafür auslegen.

- (a) Gehen Sie in einem ersten Schritt davon aus, dass Sie die Zustandsgrößen (x_1, x_2) direkt messen könnten. Berechnen Sie die Zustandsrückführungsmatrix K so, dass das Gütekriterium J minimiert wird ($u = -k \cdot x$).

Hinweis: Die Vorzeichen der Lösung der resultierenden Matrix-Riccati-Gleichung sind:

$$\Phi = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}.$$

- (b) Da die Zustandsgrößen nicht messbar sind, müssen Sie einen Zustandsbeobachter verwenden. Zeichnen Sie ein Signalflussbild der Regelstrecke mit Zustandsbeobachter und Zustandsrückführung.
- (c) Die Beobachterrückführungsmatrix hat Ihr Kollege schon für Sie berechnet ($L = [1 \ 1]^\top$). Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des resultierenden LQG-Reglers

$$C(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}.$$

Verwenden Sie für die Zustandsrückführungsmatrix $K = [1 \ 2]$.

- (d) Wie würden Sie Aufgabe a) mit Matlab lösen?

4. Sie müssen einen LQ-Regler für eine Strecke mit 2 Eingänge, 3 Ausgänge und 6 Zuständen auslegen.

- (a) Was ist die Dimension der Matrizen A, B, C, D ?
- (b) Was ist die Dimension der Übertragungsfunktion $u \rightarrow y$?
- (c) Was ist die Dimension der Matrix Q des Gütekriteriums J_{LQR} ?
- (d) Was ist die Dimension der Matrix R des Gütekriteriums J_{LQR} ?
- (e) Was ist die Dimension der Matrix K ?
- (f) Was ist die Dimension der Matrix L ?

5. Ihr Bachelor Student hat ein LQR Regler für die Strecke

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

ausgelegt. Leider ist er schon in BQM für die EM Fussball Spiele und hat vergessen, Ihnen die Zustandsrückführmatrix K zu kommunizieren. Jedoch finden Sie einige Notizen des Studenten und Sie lesen, dass die Pole des geschlossenen Systems bei $\pi_1 = -0.5$ und $\pi_2 = -2.5$ liegen.

- (a) Von welcher Dimension ist die Matrix K ?
- (b) Berechnen Sie die Matrix K .

6. You would like to autonomously drive a train from Zürich to Lugano without stops in two and a half hours by consuming as little energy as possible. You therefore formulate the optimal control problem as

$$\begin{aligned} & \min_{P_m(t \in [0, T])} \int_0^T P_{\text{el}}(P_m(t)) dt \\ \text{s.t. } & \dot{s}(t) = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot E_{\text{kin}}(t)} \\ & \dot{E}_{\text{kin}}(t) = P_m(t) - F_{\text{drag}}(s(t), E_{\text{kin}}(t)) \cdot \sqrt{\frac{2}{m} \cdot E_{\text{kin}}(t)} \\ & s(0) = E_{\text{kin}}(0) = E_{\text{kin}}(T) = 0, s(T) = S_{\text{end}} \\ & |P_m(t)| \leq P_{\text{max}} \\ & E_{\text{kin}}(t) \leq \frac{m}{2} \cdot v_{\text{max}}(s(t))^2, \end{aligned}$$

where $P_m(t)$ is the power generated by the electric motors, $P_{\text{el}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a nonlinear function describing the relation between mechanical power and power extracted from the electric grid, $s(t)$ is the current position of the train, $E_{\text{kin}}(t)$ its current kinetic energy, $F_{\text{drag}}(s(t), E_{\text{kin}}(t))$ the total drag force, S_{end} the total distance between Zürich and Lugano, P_{max} the maximum power that can be exerted by the motors and $v_{\text{max}}(s(t))$ the position-dependent maximum speed profile.

- (a) Identify the state variables $x(t)$ and the input variables $u(t)$.
- (b) Identify the system dynamics $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ and the initial conditions x_0 . Is it a nonlinear system?
- (c) What is the stage cost function $l(x(t), u(t))$? Is it linear, quadratic or nonlinear? What about the terminal cost function $m(x(T))$ and the objective function $J_T(x_0, u(t))$?
- (d) What is the value of T in seconds?
- (e) Identify the state, input and terminal state constraint sets \mathcal{X} , \mathcal{U} and \mathcal{X}_f .

7. Consider the MPC scheme $\mathcal{P}(x_0)$

$$\begin{aligned} \min_{u(t \in [0, T])} & \int_0^T q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{x}(t) = u(t), x(0) = x_0 \\ & u(t) \in \mathcal{U}, x(t) \in \mathcal{X}, x(T) = \mathcal{X}_f. \end{aligned}$$

- (a) How can we solve the problem for $T \rightarrow \infty$ and $\mathcal{X} = \mathcal{U} = \mathcal{X}_f = \mathbb{R}$? What is the solution $u^*(t)$?
- (b) What happens if the value of r is decreased? And what if it is increased? Include the notion of “cheap” and “expensive” control in your reasoning.
- (c) In this case would you need to iteratively solve the optimization problem? Why?
- (d) Consider now a finite horizon T and the constraint sets $\mathcal{X} = \mathbb{R}, \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} | u \leq u_{\max}\}$ and $\mathcal{X}_f = \{0\}$. Define the feasible set of this MPC scheme, i.e. find the set $X_T := \{x_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(x_0) \text{ admits a feasible solution}\}$. What happens if $x_0 \notin \mathcal{X}_f$?
- (e) Now also consider $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq x_{\max}\}$. How does the \mathcal{X}_T changes?

8. Gegeben sei die Strecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t)\end{aligned}$$

und der Regler

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= F \cdot z(t) + G \cdot e(t) \\ u(t) &= H \cdot z(t) + M \cdot e(t)\end{aligned}$$

mit $e(t) = r(t) - y(t)$.

- (a) Definieren Sie den Zustandsvektor $\tilde{x}(t)$ des geschlossenen Regelkreises.
- (b) Finden Sie eine Zustandsraumdarstellung

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{B} \cdot r(t)$$

des geschlossenen Regelkreises.

Betrachten Sie jetzt die Strecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + 2 \cdot u(t) \\ y(t) &= 2 \cdot x(t)\end{aligned}$$

und der Regler

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -2 \cdot z(t) + 1.5 \cdot e(t) \\ u(t) &= z(t)\end{aligned}$$

- (c) Ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil?
- (d) Ist der geschlossene Regelkreis schwingungsfähig?

A Mathematik

A.1 Matrizen

A.1.1 Inverse Matrix

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ ist inverse Matrix A^{-1} so definiert, dass

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}. \quad (\text{A.1})$$

Im Allgemeinen lässt sich die Inverse mit der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A), \quad \{\text{adj}(A)\}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

berechnen. Spezialfälle:

- $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Eigenwertproblem

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Der Eigenraum \mathbf{v}_λ eines Eigenwertes λ ist dann gegeben durch

$$\text{kern}(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \Leftrightarrow (\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Komplexe Analysis

Für eine komplexe Zahl

$$z = a + j \cdot b = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad (\text{A.7})$$

gilt

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A.2.1 Rechenregel

Für drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 sei

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}. \quad (\text{A.9})$$

Dann gilt:

$$|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}, \quad \angle(z) = \angle(z_1) + \angle(z_2) - \angle(z_3). \quad (\text{A.10})$$

B Mechanik

B.1 Dynamik und Kräfte

Der Impulssatz (“Linear Momentum Principle”) besagt:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{F}. \quad (\text{B.1})$$

Der Spin-/Drallsatz (“Angular Momentum Principle”) besagt:

$$I_S \cdot \ddot{\theta} + m \cdot \mathbf{r}_{\text{OS}} \times \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{r}_{\text{OP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}, \quad (\text{B.2})$$

$$I_S \cdot \ddot{\theta} = \sum \mathbf{r}_{\text{SP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}. \quad (\text{B.3})$$

Die Federkraft einer Feder mit Federkonstante k ist gegeben durch

$$F = k \cdot x. \quad (\text{B.4})$$

Die Dämpferkraft eines Dämpfers mit Dämpferkonstante d ist gegeben durch

$$F = d \cdot \dot{x}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Arbeit und Leistung

Die Leistung einer Kraft ist:

$$P = F \cdot v. \quad (\text{B.6})$$

Die Leistung eines Drehmoment ist:

$$P = M \cdot \omega. \quad (\text{B.7})$$

Bemerkung. Hier wird es angenommen, dass die Kraft und Geschwindigkeit bzw. Moment und Winkelgeschwindigkeit die gleiche Richtung besitzen.

C MATLAB

C.1 Allgemein

Befehl	Beschreibung
<code>A(i,j)</code>	Eintrag von A in Position i (Zeile) und j (Spalte)
<code>abs(X)</code>	Betrag von allen Einträgen von X
<code>angle(X)</code>	Phase von allen Einträgen von X (in Bogenmass)
<code>X'</code>	Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>X.'</code>	Nicht Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>conj(X)</code>	Komplex konjugiert von allen Einträgen von X
<code>real(X)</code>	Realteil von allen Einträgen von X
<code>imag(X)</code>	Imaginärteil von allen Einträgen von X
<code>eig(A)</code>	Eigenwerte von A
<code>[V,D]=eig(A)</code>	Eigenwerte D (Diagonaleinträge), Eigenvektoren V (Spaltenvektoren)
<code>s=svd(A)</code>	Singularwerte der Matrix A
<code>[U,Sigma,V]=svd(A)</code>	Singular Values Decomposition der Matrix A
<code>rank(A)</code>	Rang der Matrix A
<code>det(A)</code>	Determinante der Matrix A
<code>inv(A)</code>	Inverse der Matrix A
<code>diag([a1,...,an])</code>	Diagonalmatrix mit a1,...,an als Diagonaleinträge
<code>zeros(x,y)</code>	Nullmatrix der Dimension x×y
<code>zeros(x)</code>	Nullmatrix der Dimension x×x
<code>eye(x,y)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x×y
<code>eye(x)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x×x
<code>ones(x,y)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x×y
<code>ones(x)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x×x
<code>max(A)</code>	Größtes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>min(A)</code>	Kleinstes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>sum(A)</code>	Summe der Elemente von A (A Matrix: Summe Zeile pro Zeile)
<code>dim=size(A)</code>	Dimension der Matrix A (<code>size=[#Zeilen #Spalten]</code>)
<code>dim=size(A,a)</code>	a=1: dim=#Zeilen, a=2: dim=#Spalten, sonst dim=1
<code>t=a:i:b</code>	<code>t=[a,a+1,a+2,...,b-i,b]</code> (Zeilenvektor)
<code>y=linspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 100 "linear-spaced" Punkte im Intervall [a,b]
<code>y=linspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "linear-spaced" Punkte im Intervall [a,b]
<code>y=logspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 50 "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a,10^b]
<code>y=logspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a,10^b]
<code>I=find(A)</code>	I: Indizes von den nichtnull Elementen von A
<code>disp(A)</code>	Print on screen von A (String: 'name')

C.2 RT-Befehle

Befehl	Beschreibung
<code>sys=ss(A,B,C,D)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D im Zeitbereich
<code>sys=ss(A,B,C,D,Ts)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D und Sampling Zeit Ts (zeitdiskret)
<code>sys=zpk(Z,P,K)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z, Pole P und Gain K
<code>sys=zpk(Z,P,K,Ts)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z, Pole P, Gain K und Sampling Zeit Ts
<code>sys=tf([bm ... b0],[an ... a0])</code>	Übertragungsfunktion mit bn in Zähler und an in Nenner
<code>P=tf(sys)</code>	Übertragungsfunktion von sys
<code>P.iodelay=...</code>	Fügt der Funktion P eine Totzeit hinzu.
<code>pole(sys)</code>	Pole eines Systems
<code>zero(sys)</code>	NST eines Systems
<code>[z,p,k]=zpkdata(sys)</code>	z: Nullstellen, p: Pole, k: statische Verstärkung
<code>ctrb(sys) oder ctrb(A,b)</code>	Steuerbarkeitsmatrix
<code>obsv(sys) oder obsv(A,c)</code>	Beobachtbarkeitsmatrix
<code>series(sys1,sys2)</code>	Serieschaltung von sys1 und sys2
<code>feedback(sys1,sys2)</code>	sys1 mit sys2 als (negative) Feedback
<code>[Gm,Pm,Wgm,Wpm]=margin(sys)</code>	Gm: Verstärkungsreserve, Pm: Phasenreserve, Wpm: Durchtrittsfrequenz
<code>[y,t]=step(sys,Tend)</code>	y: Sprungantwort von sys bis T, t: Zeit
<code>[y,t]=impulse(sys,Tend)</code>	y: Impulsantwort von sys bis Tend, t: Zeit
<code>y=lsim(sys,u,t)</code>	Simulation von sys mit dem Input u für die Zeit t
<code>sim('Simulink model',Tend)</code>	Simultion von Simulink Model' bis Tend
<code>p0=dcgain(sys)</code>	Statische Verstärkung ($P(0)$)
<code>K=lqr(A,B,Q,R)</code>	Verstärkungsmatrix K (Lösung des LQR-Problems)
<code>[X,L,K]=care(A,B,Q)</code>	X: Lösung der Riccati Gleichung, G: Verstärkungsmatrix
<code>Paug=augw(G,W1,W3,W2)</code>	Space State M. für \mathcal{H}_∞
<code>[K,C1,gamma]=hinfsyn(Paug)</code>	$\mathcal{H}_\infty : K$: Regler
<code>fr=evalfr(sys,f)</code>	sys in f evaluiert ($s = f$)
<code>sysd=c2d(sys,Ts,method)</code>	Diskretisierung von sys nach method mit Sampling Zeit Ts

C.3 Plot und Diagramme

Befehl	Beschreibung
<code>nyquist(sys)</code>	Nyquist-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>nyquist(sys,{a,b})</code>	Nyquist-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys)</code>	Bode-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys,{a,b})</code>	Bode-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys)</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys,{a,b})</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>rlocus(sys)</code>	Wurzelortskurven-Diagramm
<code>impulse(sys)</code>	Impulsantwort des Systems <code>sys</code>
<code>step(sys)</code>	Sprungantwort des Systems <code>sys</code>
<code>pzmap(sys)</code>	Pole-Nullstelle Map des Systems <code>sys</code>
<code>svd(sys)</code>	Singularwertverlauf des Systems <code>sys</code>
<code>plot(X,Y)</code>	Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>plot(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>stem(X,Y)</code>	Diskreter Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>stem(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Diskreter Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>xlabel('name')</code>	Name der x-Achse
<code>ylabel('name')</code>	Name der y-Achse
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>xlim([a b])</code>	Schranke für die x-Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>ylim([a b])</code>	Schranke für die y-Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>grid on</code>	Grid
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>legend('name1',..., 'namen')</code>	Legende
<code>subplot(m,n,p)</code>	Grid <code>m×n</code> , Plot in Position <code>p</code>
<code>semilogx(X,Y)</code>	Logarithmitic Plot mit y-Achse linear