Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institute for Dynamic Systems and Control
IDSC
Institut für Dynamische Systeme und Regelungstechnik

BSc - Sessionsprüfung | 11.08.2011

Regelungstechnik II (151-0590-00)

Prof. L. Guzzella

Musterlösung

Dauer der Prüfung:	**120 Minuten Prüfungszeit + 15 Minuten Lesezeit**
Anzahl der Aufgaben:	**8** (**unterschiedlich** gewichtet, total 62 Punkte)
Bewertung:	Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.
Erlaubte Hilfsmittel:	20 A4-Blätter (40 Seiten) Taschenrechner (zur Verfügung gestellt) Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben.
Zur Beachtung:	Alle Lösungen sind zu begründen. Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Aufgabe 1 (PID-Regler) 6 Punkte

Amacher (Ochsner)

Ein System $P(s)$ soll mit einem PID-Regler geregelt werden. Der Regler soll Setpoint Weighting enthalten und mit Hilfe der Aström-Hägglund Regeln eingestellt werden.

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

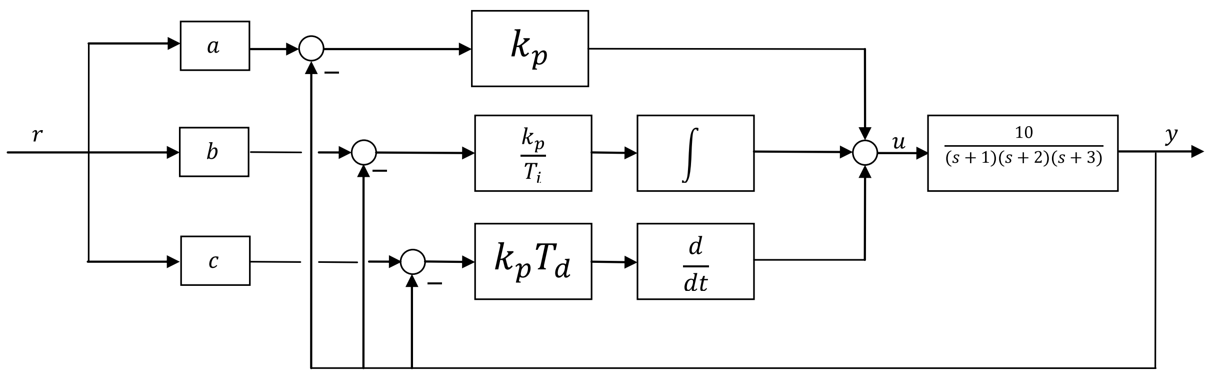
a) (2 Punkte) Berechnen Sie folgende Werte, die notwendig sind um die Reglerparameter zu berechnen:

i) Die kritische Zeitkonstante T^*

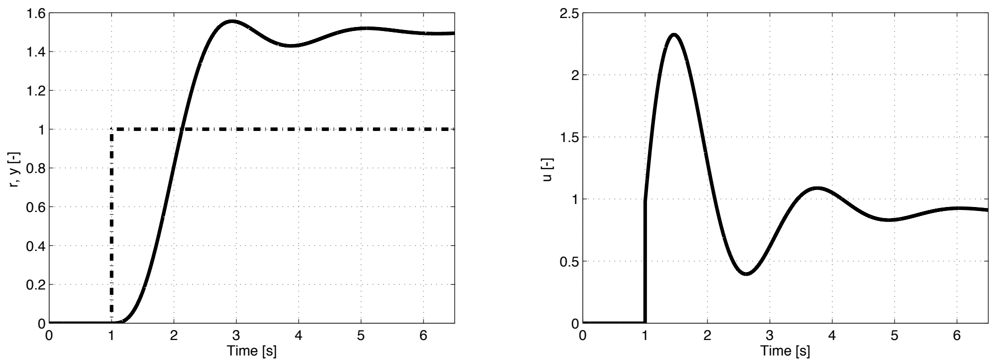
ii) Die kritische Verstärkung k_p^*

iii) Die statische Verstärkung der Strecke

b) (2 Punkte) Untenstehende Abbildung zeigt das Signalflussbild des Gesamtsystems. Berechnen Sie analytisch (d.h. als Formel) die Übertragungsfunktion von r nach y.



c) (2 Punkte) Aufgrund der Resultate in Teilaufgabe a) wurden mit Hilfe der Aström-Hägglund Regeln die Parameter k_p (=3.73), T_i (=0.99), T_d (=0.25) und a (=0.26) bestimmt. Das Bild unten zeigt die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises. Aus der Vorlesung wissen Sie, was sinnvolle Werte für die Parameter b und c sind. Wurden diese im vorliegenden Fall korrekt gewählt?



Lösung 1

a) Die gesuchten Werte k_p^* und T^* können durch Auswerten der beiden folgenden Beziehungen gefunden werden:

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) \stackrel{!}{=} -1 + 0 \cdot j$$

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$$

Die Auswertung ergibt:

$$k_p^* \cdot P(j\omega^*) = \frac{10 \cdot k_p^*}{(j\omega^* + 1)(j\omega^* + 2)(j\omega^* + 3)} = \frac{10 \cdot k_p^*}{-6\omega^{*2} + 6 + j(-\omega^{*3} + 11\omega^*)}$$

$$-\omega^{*3} + 11\omega^* \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \omega^* = \sqrt{11}$$

$$\frac{10 \cdot k_p^*}{-6\omega^{*2} + 6} \stackrel{!}{=} -1 \Longrightarrow k_p^* = 6$$

Die statische Verstärkung der Strecke beträgt:

$$P(0) = \frac{10}{6}$$

b)

$$Y(s) = P(s) \cdot U(s) = P(s) \cdot \left((aR(s) - Y(s)) \cdot k_p + (bR(s) - Y(s)) \cdot \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s} + (cR(s) - Y(s)) \cdot k_p \cdot T_d \cdot s \right)$$

$$R(s) \cdot P(s) \cdot k_p \cdot (a + \frac{b}{T_i s} + cT_d) = Y(s) \cdot (1 + P(s) \cdot k_p \cdot (1 + \frac{1}{T_i s} + k_p T_d s))$$

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_p \cdot P(s)(a + \frac{b}{T_i s} + cT_d s)}{1 + k_p \cdot P(s)(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)} \\ &= \frac{10k_p(aT_i s + b + cT_i T_d s^2)}{T_i s(s+1)(s+2)(s+3) + 10k_p(T_i s + 1 + T_i T_d s^2)} \end{aligned}$$

c) Sinnvolle Werte für b und c sind:

- b=1. Der statische Nachlauffehler des Systems geht mit dieser Wahl gegen Null.
- c=0. Die Sollwert wird nicht auf den Differentiator geschaltet. Somit entstehen keine Probleme bei Sprüngen in der Sollgrösse.

Aus den gezeigten Simulationsdaten kann geschlossen werden dass der Wert für b nicht entsprechend der oben genannten Richtlinien gewählt wurde, da ein statischer Nachlauffehler vorhanden ist. Da die Stellgrösse trotz eines Sollwertsprungs beschränkt bleibt, kann davon ausgegangen werden dass c gleich Null gewählt wurde.

Aufgabe 2 (Prädiktive Regelung) 8 Punkte

Ochsner (Amacher)

Eine Regelstrecke $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s\tau}$ wird mit einem Smith Predictor geregelt. Das Signalflussbild des geschlossenen Regelkreises ist in Abbildung 1 dargestellt.

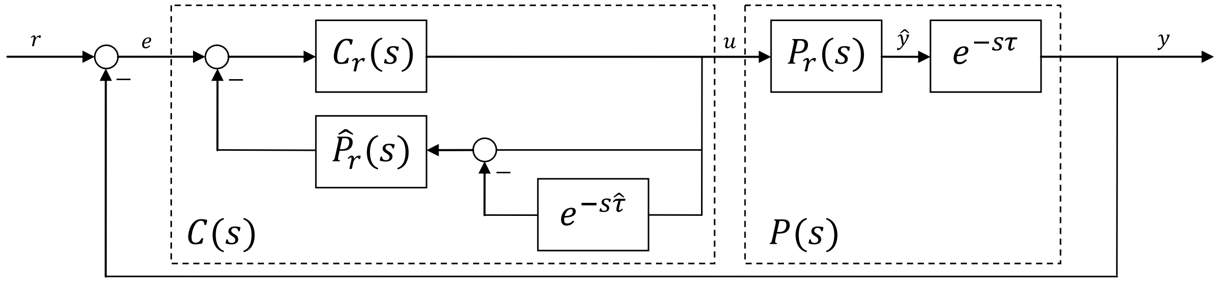


Abbildung 1: Smith Predictor

a) (3 Punkte) Nehmen Sie an, dass das interne Modell des Reglers nicht genau mit dem Modell der Strecke übereinstimmt ($\hat{P}_r(s) \neq P_r(s)$ und $\hat{\tau} \neq \tau$). Leiten Sie die folgenden Übertragungsfunktionen als Funktion der elementaren Blöcke aus dem Signalflussbild her.

i) Regler
ii) Kreisverstärkung
iii) Komplementäre Sensitivität

b) (1 Punkt) Der interne Regler $C_r(s)$ kann ohne Berücksichtigung der Totzeit ausgelegt werden, sofern Strecke und Modell übereinstimmen ($\hat{P}_r(s) = P_r(s)$ und $\hat{\tau} = \tau$). Zeigen Sie, dass sich in diesem idealen Fall die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises darstellen lässt als

$$T(s) = T_r(s) \cdot e^{-s\tau},$$

wobei $T_r(s)$ von endlicher Ordnung ist.

c) (1 Punkt) $T_r(s)$ soll sich wie ein Tiefpass erster Ordnung mit einer Eckfrequenz von a verhalten. Die Verstärkung von $T_r(s)$ bei tiefen Frequenzen soll dabei so gewählt werden, dass kein statischer Nachlauffehler auftritt. Geben Sie die gewünschte Übertragungsfunktion $T_r(s)$ an, die diese Eigenschaften erfüllt.

d) (1 Punkt) Die Regelstrecke wurde von Ihrem Kollegen modelliert. Allerdings hat er nur die Zustandsraumbeschreibung hergeleitet. Sie ist gegeben durch

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

und

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \qquad\qquad y(t) = \hat{y}(t-\tau)$$

Berechnen Sie die Übertragunsfunktion $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-s\tau}$.

e) (2 Punkte) Berechnen Sie mit den Resultaten für $T_r(s)$ und $P_r(s)$ die Übertragungsfunktion des internen Reglers $C_r(s)$.

Lösung 2

a) i) Regler

$$U(s) = C_r(s) \cdot \left[E(s) - \hat{P}_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{\tau}}) \cdot U(s)\right]$$

$$\left[1 + \hat{P}_r(s) \cdot C_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{\tau}})\right] \cdot U(s) = C_r(s) \cdot E(s)$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{C_r(s)}{1 + \hat{P}_r(s) \cdot C_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{\tau}})}$$

i) Kreisverstärkung

$$Y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot E(s)$$

$$L(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = P(s) \cdot C(s)$$

$$L(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot e^{-s\tau}}{1 + \hat{P}_r(s) \cdot C_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{\tau}})}$$

i) Komplementäre Sensitivität

$$Y(s) = L(s) \cdot \left[R(s) - Y(s)\right]$$

$$\left[1 + L(s)\right] \cdot Y(s) = L(s) \cdot R(s)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$T(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot e^{-s\tau}}{1 + \hat{P}_r(s) \cdot C_r(s) \cdot (1 - e^{-s\hat{\tau}}) + P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot e^{-s\tau}}$$

b) Es gilt $\hat{P}_r(s) = P_r(s)$ und $\hat{\tau} = \tau$, damit wird die die Komplementäre Sensitivität zu

$$T(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot e^{-s\tau}}{1 + P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot (1 - e^{-s\tau}) + P_r(s) \cdot C_r(s) \cdot e^{-s\tau}}$$

$$T(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s)} \cdot e^{-s\tau} = T_r(s) \cdot e^{-s\tau}$$

c) Ein Tiefpass erster Ordnung hat die Übertragungsfunktion

$$\Sigma(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

mit k als DC-gain und $\omega = \frac{1}{\tau}$ als Eckfrequenz. Um keinen statischen Nachlauffehler zwischen r und y zu haben muss der geschlossene Regelkreis eine statische Verstärkung von 1 haben. Mit der Information über die Eckfrequenz von a erhält man als Lösung

$$T_r(s) = \frac{1}{\frac{1}{a}s + 1} = \frac{a}{s+a}.$$

d) Die beiden Differentialgleichungen sind einzeln geschrieben

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} \cdot u(t)$$

mit

$$\hat{y}(t) = x_1(t) \qquad y = \hat{y}(t - \tau).$$

Laplace transformiert lauten die Gleichungen dann

$$sX_1(s) = X_2(s) \qquad sX_2(s) = \frac{1}{m} \cdot U(s)$$

und

$$\hat{Y}(s) = X_1(s) \qquad Y(s) = \hat{Y}(s) \cdot e^{-s\tau}.$$

Diese Gleichungen werden zu

$$s^2 X_1(s) = sX_2(s) = \frac{1}{m} U(s)$$

und die Übertragungsfunktion damit zu

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X_1(s) \cdot e^{-s\tau}}{X_1(s) \cdot ms^2} = \frac{1}{ms^2} \cdot e^{-s\tau} = P_r(s) \cdot e^{-s\tau}.$$

e) Aus b) gilt

$$T_r(s) = \frac{P_r(s) \cdot C_r(s)}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s)}.$$

Aufgelöst nach $C_r(s)$ ergibt sich

$$C_r(s) = \frac{T_r(s)}{P_r(s) \cdot \big(1 - T_r(s)\big)}.$$

mit den oben hergeleiteten $T_r(s) = \frac{a}{s+a}$ und $P_r(s) = \frac{1}{ms^2}$ ergibt sich

$$C_r(s) = \frac{\frac{a}{s+a}}{\frac{1}{ms^2} \cdot \big(1 - \frac{a}{s+a}\big)} = \frac{ams^2}{(s+a) - a} = \frac{ams^2}{s} = am \cdot s.$$

Aufgabe 3 (Diagonal Dominante Systeme) 10 Punkte

Shafai (Guzzella)

An Ihrem ersten Arbeitstag in der Firma SCS Inc. (Super Control Systems, Incorporated) erhalten Sie die Aufgabe zu beurteilen, ob für ein MIMO-System mit der Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \alpha \\ \frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

ein "echter" MIMO-Entwurf notwendig ist oder die Regelungsaufgabe auch zufriedenstellend mit zwei voneinander unabhängigen SISO-Regelkreisen ("one-loop-at-the-time") gelöst werden kann.

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die frequenzabhängige Matrix der Relative-Gain Array $RGA(s)$ in Funktion von α. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften der RGA-Matrix, damit Sie $RGA(s)$ mögllichst effizient bestimmen können!

b) (1 Punkt) Für welchen Wert von α können Sie die Regelungsaufgabe für alle Frequenzen $\omega \in [0, \infty)$ mit dem Ansatz "one-loop-at-the-time" lösen?

Nun erhalten Sie die Zusatzinformation, dass $\alpha = 1$ ist.

c) (4 Punkte) Verwenden Sie die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu **beurteilen**, ob das Regelsystem für das Frequenzband von $\omega \in [0, 0.1]$ rad/s mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden kann.

d) (2 Punkte) Verwenden Sie ebenfalls die Beträge der Elemente der RGA-Matrix, um zu **zeigen**, dass das Regelsystem für den Frequenzbereich $\omega \in [10, \infty)$ rad/s mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden kann. Geben Sie an, welche Paarung der Ein- und Ausgangsgrössen für die Regelung ausgewählt werden muss.

Lösung 3

a) (3 Punkte) Das $RGA(s)$ ist durch eine 2×2-Matrix mit den folgenden Elementen gegeben, die in Abhängigkeit von s und α berechnet sind.

$$[RGA(s)]_{11} = [RGA(s)]_{22} = \frac{P_{11}P_{22}}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} = \frac{-\frac{1}{s(s+1)}}{-\frac{1}{s(s+1)} - \frac{\alpha(s+2)}{s+1}} = \frac{1}{1+\alpha s(s+2)} = \frac{1}{\alpha s^2 + 2\alpha s + 1}$$

$$[RGA(s)]_{12} = [RGA(s)]_{21} = 1 - [RGA(s)]_{11} = 1 - \frac{1}{1+\alpha s(s+2)} = \frac{\alpha s(s+2)}{1+\alpha s(s+2)} = \frac{\alpha s(s+2)}{\alpha s^2 + 2\alpha s + 1}$$

b) (1 Punkt) Für $\alpha = 0$ ist $RGA(s) = I$ und somit ist das System $P(s)$ (unabhängig von Frequenz s) diagonal-dominant. Deshalb kann die Regelungsaufgabe für alle Frequenzen $\omega \in [0,\infty)$ mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz gelöst werden.

c) (4 Punkte) Für $\alpha = 1$ erhalten wir für die RGA-Matrix

$$[RGA(s)]_{11} = [RGA(s)]_{22} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$
$$[RGA(s)]_{12} = [RGA(s)]_{21} = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+1} = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}.$$

Die Beträge der Emente der RGA-Matrix in Funktion von Kreisfrequenz ω erhalten wir wie folgt:

$$|[RGA(j\omega)]_{11}| = |[RGA(j\omega)]_{22}| = \frac{1}{|j\omega+1|^2} = \frac{1}{1+\omega^2}$$
$$|[RGA(j\omega)]_{12}| = |[RGA(j\omega)]_{21}| = \frac{|j\omega||j\omega+2|}{|j\omega+1|^2} = \frac{\omega\sqrt{4+\omega^2}}{1+\omega^2}.$$

Für den Frequenzbereich $\omega \in [0, 0.1]$ rad/s kann in den obigen Ausdrucken $\omega^2 \leq 0.01$ im Vergleich zu 1 und 4 vernachläsigt werden. Daraus resultiert:

$$|[RGA(j\omega)]_{11}| = |[RGA(j\omega)]_{22}| \approx 1$$
$$|[RGA(j\omega)]_{12}| = |[RGA(j\omega)]_{21}| \leq 0.2.$$

Da die Diagonalemente ungefähr 1 sind und die Ausserdiagonale viel kleiner als 1 sind, kann angenommen werden, dass das System diagonal-dominant ist. Deshalb kann empfohlen werden, das Regelsystem mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz zu entwerfen.

d) (2 Punkte) Für den Frequenzbereich $\omega \in [10,\infty)$ rad/s können die Zahlen 1 und 4 gegenüber $\omega^2 \geq 100$ vernachlässigt werden. Daraus resultiert für die Diagonalelemente ungefähr 0 und für die Ausserdiagonale ungefähr 1. Deshalb ist das System $P(s)$ auch in diesem Fall diagonaldominant und das Regelsystem kann mit dem "one-loop-at-the-time" Ansatz entworfen werden.

Da die Diagonalelemente ungefähr 1 und die Ausserdiagonale ungefähr 0 sind, muss allerdings die folgende Paarung der Ein- und Ausgangsgrössen für die "one-loop-at-the-time" Behandlung gewählt werden: u_1 für y_2 und u_2 für y_1.

Aufgabe 4 (Robust Performance) 6 Punkte

Ebbesen (Ott)

a) (2 Punkte) Bild 2 zeigt die gemessene Unsicherheit einer Regelstrecke. Jeder Punkt stellt eine Messung des Betrages $|\mathbf{U}_{i,k}|$ der Unsicherheit. Die Indizes beziehen sich auf die k-te Messung bei der i-ten Frequenz.

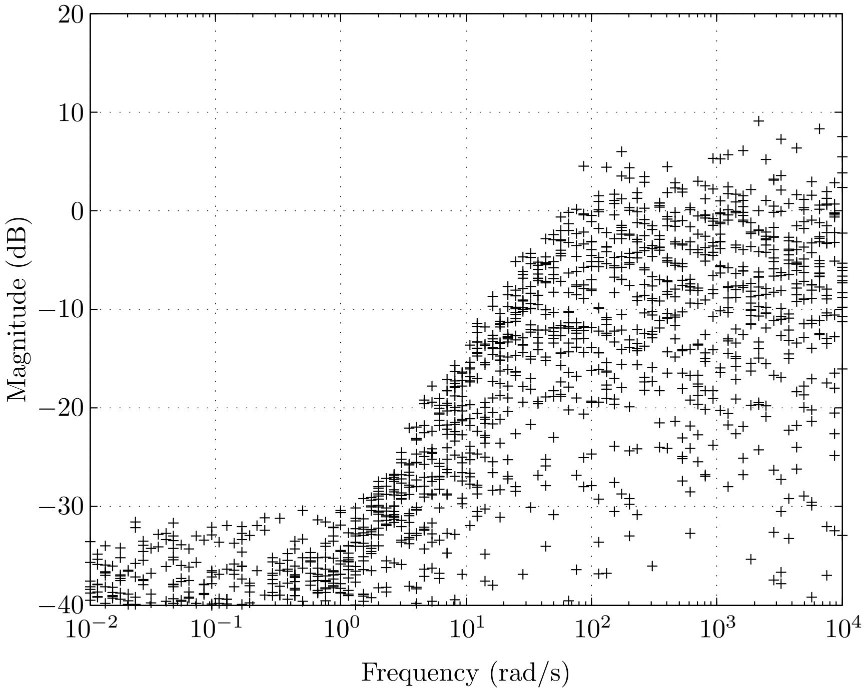


Abbildung 2: Der Betrag der Unsicherheit der Regelstrecke ($|\mathbf{U}_{i,k}| \ \forall\ i,k$).

Wählen Sie aus den folgenden vier Übertragungsfunktionen eine sinnvolle Begrenzung $W_2(s)$ für die gemessene Unsicherheit aus: $|W_2(j\omega)| \geq |\mathbf{U}_{i,k}| \ \forall\ i,k$. Geben Sie eine mathematisch klare Begründung für Ihre Auswahl.

$$\frac{\sqrt{10}}{100}\cdot\frac{1+0.1\cdot s}{1+\frac{1}{1000}\cdot s},\qquad \frac{1}{100}\cdot\frac{1+10\cdot s}{1+\frac{\sqrt{10}}{100}\cdot s},\qquad \frac{\sqrt{10}}{100}\cdot\frac{1+s}{1+\frac{1}{100}\cdot s},\qquad \frac{\sqrt{10}}{100}\cdot\frac{1+s}{1+\frac{\sqrt{10}}{100}\cdot s}.$$

b) (1 Punkt) Skizzieren Sie den Amplitudengang Ihrer ausgewählten Unsicherheit $W_2(s)$ im Bild 2.

c) (3 Punkte) Schlagen Sie eine Übertragungsfunktion $W_1(s)$ für die Begrenzung der Sensitivität $S(s)$ vor, die im Bild 3 dargestellt ist, d.h. $|W_1(j\omega)\cdot S(j\omega)| < 1 \,\forall\, \omega$.

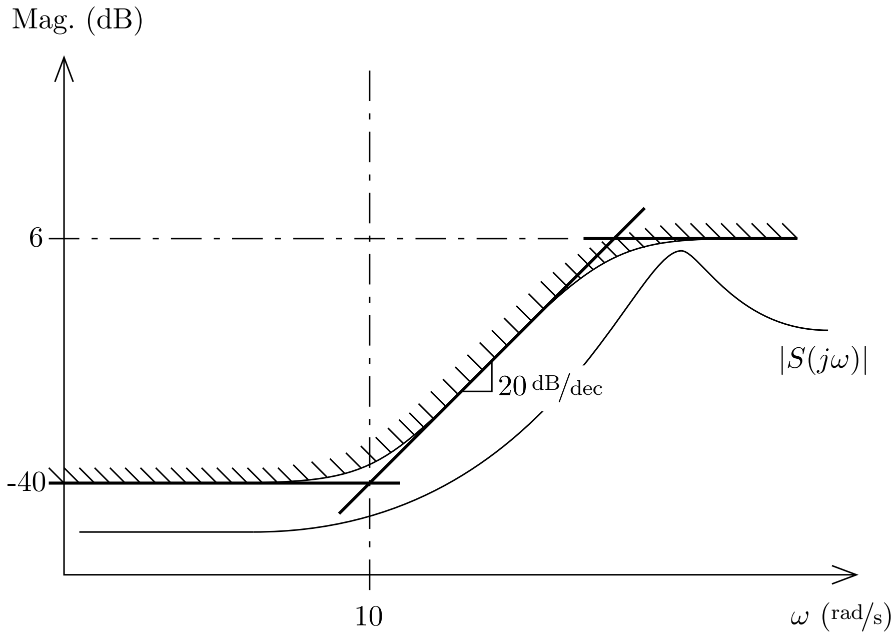


Abbildung 3: Begrenzung der Sensitivität.

Lösung 4

a) All four possible bounds are in the general form

$$W_2(s) = k \cdot \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha \cdot T \cdot s}. \tag{1}$$

Figure 4 demonstrates how the amplitude of this general transfer function (lead) can be sketched given the parameters k, T, and α.

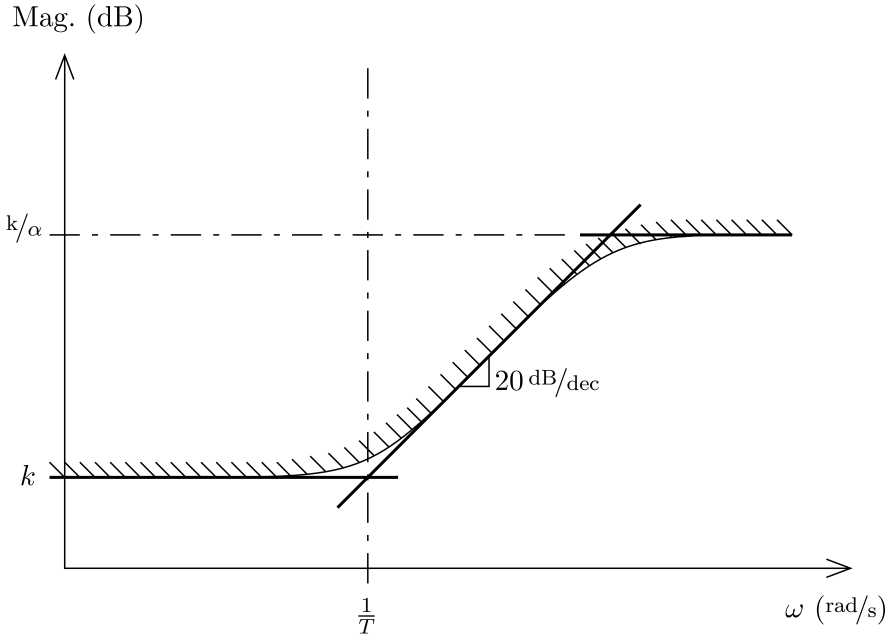


Abbildung 4: Sketch of $W_2(j\omega)$.

The only transfer function of the four possibilities which does not violate one or more of the uncertainties is

$$W_2(s) = \frac{\sqrt{10}}{100} \cdot \frac{1+s}{1+\frac{1}{100}\cdot s} \tag{2}$$

b) The correct transfer function given above is plotted in Figure 5.

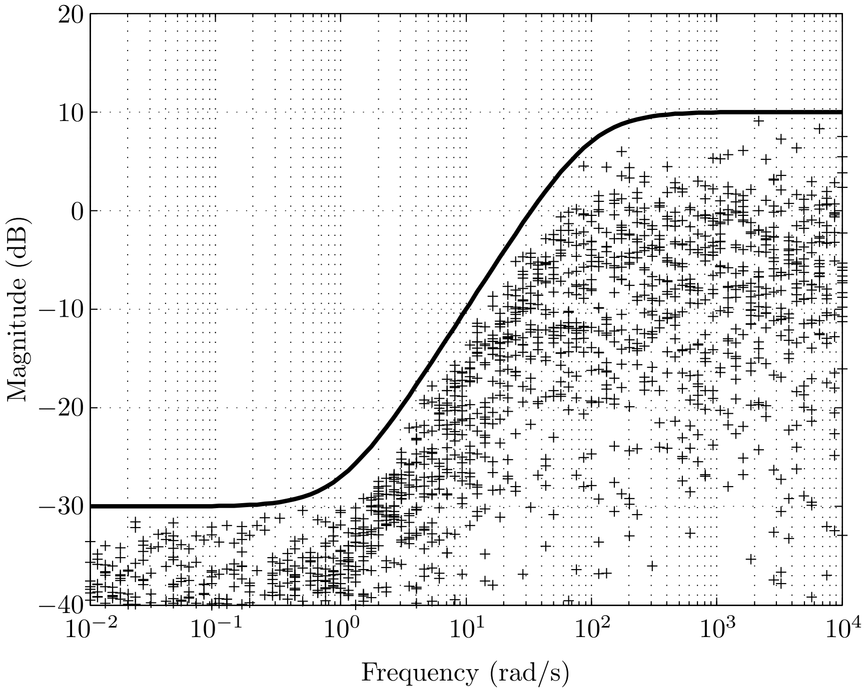


Abbildung 5: Plot of $W_2(j\omega)$.

c) The correct transfer function is

$$W_1(s) = 100 \cdot \frac{1+\frac{1}{2000}\cdot s}{1+\frac{1}{10}\cdot s} \tag{3}$$

Aufgabe 5 (LQG) **10 Punkte**

Ott (Ebbesen)

Gegeben sei eine Regelstrecke

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1$$

Das Gütekriterium sei

$$J = \int x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 + \frac{1}{4} \cdot u^2 \; dt$$

Sie möchten einen LQG-Regler (Zustandsrückführung mit Zustandsbeobachter) dafür auslegen.

a) (4 Punkte) Gehen Sie in einem ersten Schritt davon aus, dass Sie die Zustandsgrössen (x_1, x_2) direkt messen könnten. Berechnen Sie die Zustandsrückführungsmatrix K so, dass das Gütekriterium J minimiert wird ($u = -Kx$).
Hinweis: Die Vorzeichen der Lösung der resultierenden Matrix-Riccatti-Gleichung sind:

$$\Phi = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) Da die Zustandsgrössen nicht messbar sind, müssen Sie einen Zustandsbeobachter verwenden. Zeichnen Sie ein Signalflussbild der Regelstrecke mit Zustandsbeobachter und Zustandsrückführung.

c) (4 Punkte) Die Beobachterrückführungsmatrix hat Ihr Kollege schon für Sie berechnet ($L = [\, 1 \quad 1 \,]^T$). Berechnen Sie die Übertragunsfunktion des resultierenden LQG-Reglers.

$$C(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$$

Verwenden Sie für die Zustandsrückführungsmatrix $K = [\, 1 \quad 2 \,]$.

d) (1 Punkt) Wie würden Sie Aufgabe a) mit MATLAB lösen?

Lösung 5

a) Für die Zustandsrückführung muss folgende Riccatti-Gleichung gelöst werden:

$$0 = \Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - Q$$

Die Systemmatrizen A, B, C, D sind:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Gewichtungsmatrizen Q und R sind:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad R = \frac{1}{4}$$

Die Matrix Φ ist symmetrisch, somit gilt:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{bmatrix} \phi_2^2 & \phi_2\phi_3 \\ \phi_2\phi_3 & \phi_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \phi_1 \\ \phi_1 & 2\phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Woraus ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 gefunden werden:

$$\phi_1 = 2 \qquad \phi_2 = 0.5 \qquad \phi_3 = 1$$

Für die Zustandsrückführungsmatrix ergibt sicht:

$$K = R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Die Lösung ist aus Abbildung 6 ersichtlich

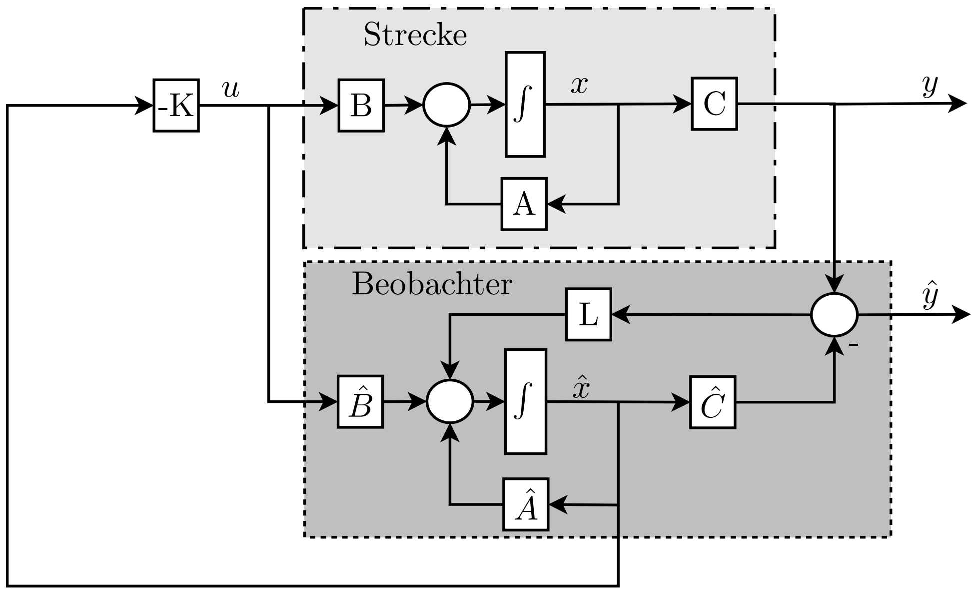


Abbildung 6: Signalflussbild Strecke mit Beobachter und Zustandsrückführun

c) Die Zustandsgleichung des Reglers ist:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} - LC\hat{x} + Ly$$

Der Ausgang des Reglers ist:

$$u = -K\hat{x}$$

Somit gilt für die Übertragungsfunktion des Reglers:

$$C(s) = -K\left(sI - (A - BK - LC)\right)^{-1} L$$

$$= -K \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} L$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)+2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{3s+1}{s^2+3s+4}$$

d) Lösung in MATLAB

```
A = [ 0 1 ; 0 0 ];
B = [ 0 ; 1 ];
Q = [ 1 0 ; 0 3 ];
R = 1/4;
K = lqr( A , B , Q , R );
```

Aufgabe 6 (Stabilität) 8 Punkte

Guzzella (Shafai)

Bild 7 zeigt die zu analysierende Strecke (ein Zwei-Massen-Schwinger). Beide Wagen haben die Masse 1 kg und rollen reibungsfrei auf der Ebene. Zwischen den beiden Wagen wirkt eine Kopplungskraft welche von einer linearen Feder mit Federsteifigkeit $k_f = 1$ N/m und einem linearen Dämpfer mit Dämpferkonstante $k_d = 1$ N/(m/s) erzeugt wird.

Nur die Position $y(t)$ des linken Wagens wird gemessen. Auf den rechten Wagen wirkt eine Kraft $u(t)$ welche durch einen Regler vorgegeben werden kann. Auf den linken Wagen wirkt eine Kraft $d(t)$ welche nicht beeinflussbar und nicht messbar ist.

Um diese Störung $d(t)$ zu kompensieren wird das System mit einem P-Regler geregelt, d.h.

$$u(t) = k_p \cdot (r(t) - y(t))$$

wobei $r(t)$ der Sollwert für die Position $y(t)$ ist.

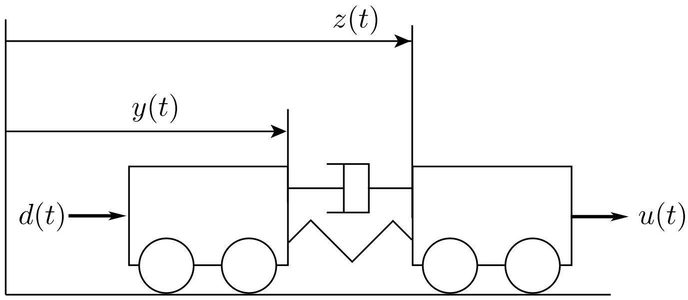


Abbildung 7: Schema der zu analysierenden Strecke.

a) (3 Punkte) Welche Ordnung n hat eine Zustandsraumdarstellung der Strecke? Wählen Sie einen sinnvollen Zustandsvektor für die Strecke. Leiten Sie die Matrizen $\{A_{cl}, b_{cl}, c_{cl}\}$ des **geschlossenen** Regelsystems her.

b) (4 Punkte) Für welche Werte von k_p ist das geschlossene Regelsystem asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch. Tip: das charakteristische Polynom $\det(s\,I - A_{cl})$ ist das Polynom $s^4 + 2\,s^3 + 2\,s^2 + k_p\,s + k_p$.

c) (1 Punkte) Welcher Regler würden Sie vorschlagen, wenn Sie das Systemverhalten verbessern müssten? Eine qualitative Begründung ist ausreichend.

Lösung 6

a) Die Dynamik einer Masse in einer Bewegungsrichtung wird durch ein System zweiter Ordnung beschrieben. Da zwei solcher Massenpunkte vorkommen wird die Strecke die Ordnung $n = 4$ haben. Eine mögliche und sinnvolle Wahl der Koordinaten des Zustandsvektors $x(t)$ lautet

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ z(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{bmatrix}$$

Die Systemmatrizen des **offenen** Regelsystems

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad y(t) = c \cdot x(t)$$

lauten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [\,1\;\;0\;\;0\;\;0\,]$$

Die Systemmatrizen des geschlossenen Regelsystems

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + b \cdot k_p \cdot (r(t) - y(t)) = (A - k_p \cdot b \cdot c) \cdot x(t) + k_p \cdot b \cdot r(t)$$

haben dann die folgende Form

$$A_{cl} = A - k_p \cdot b \cdot c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 - k_p & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_{cl} = k_p \cdot b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_p \end{bmatrix} \qquad c_{cl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises kann man in diesem Fall am einfachsten durch die Berechnung der Eigenwerte von A_{cl} bestimmen. Das charakteristische Polynom von A_{cl} ist in der Aufgabenstellung gegeben

$$\det(s\,I - A_{cl}) = s^4 + 2\,s^3 + 2\,s^2 + k_p\,s + k_p$$

und die gesuchten Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung

$$\det(s\,I - A_{cl}) = 0$$

Die geschlossene Berechnung dieser Lösungen ist schwierig, aber zum Glück nicht nötig. Mit der Methode von Hurwitz kann die Frage beantwortet werden, ob alle Eigenwerte von A_{cl} in der linken Halbebene sind indem man nachweist, dass alle Hurwitzdeterminanten grösser als 0 sind. Die dazu benötigte Hurwitzmatrix hat in diesem Beispiel die Form

$$H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ k_p & 2 & 2 & 1 \\ 0 & k_p & k_p & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k_p \end{bmatrix}$$

Entsprechend lauten die vier Hurwitzdeterminanten

$$H_1 = 2, \quad H_2 = 4 - k_p, \quad H_3 = -k_p^2, \quad H_4 = k_p \cdot H_3$$

H_1 ist immer positiv, H_2 und H_4 führen auf die Bedingung $0 < k_p < 4$. Die dritte Hurwitzdeterminante führt aber auf einen Widerspruch: die Bedingung $-k_p^2 > 0$ ist für kein reelles k_p erfüllbar und damit ist gezeigt, dass die Regelstrecke mit einem P-Regler nicht stabilisierbar ist. Trotz der Dämpfung **zwischen** den Wagen genügt ein einfacher P-Regler also nicht. Die intuitive Begründung dafür ist, dass der Schwerpunkt der beiden Wagen sich wie ein reibungsloser Massenpunkt bewegt, von dem man weiss, dass er nicht mit einem P-Regler zu stabilisieren ist.

c) Offensichtlich muss dem Regelsystem zusätzliche Dämpfung mitgegeben werden. Das erreicht man am einfachsten indem man einen PD-Regler einsetzt. Andere Lösungen sind natürlich auch denkbar (LQG-Regler etc.).

Aufgabe 7 (Systemanalyse) 8 Punkte

Alberding (Shafai)

Gegeben sei das System

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

mit der zugehörigen Übertragungsmatrix

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{s^2-6s+9} & 0 \\ \frac{-1}{s^2-6s+9} & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Ist das System im Sinne von Lyapunov stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

b) (2 Punkte) Ist das System vollständig steuerbar? Ist das System vollständig beobachtbar?

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Pole und Nullstellen des Systems und deren Vielfachheit.

d) (2 Punkte) Tritt eine Pol-Nullstellenkürzung auf? Welche der vorigen Teilaufgaben müssen Sie gelöst haben, um diese Frage in jedem Fall ohne weitere Rechnung beantworten zu können?

e) (1 Punkt) Das Zustandsraummodell sei in Matlab durch `A`, `B`, `C` und `D` definiert. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der die Übertragungsmatrix bestimmt.

Lösung 7

a) Aus der Blockdiagonalform von A lässt sich ohne weitere Rechnung erkennen, dass ein Eigenwert

$$\lambda_1 = 2$$

in der rechten Halbebene liegt und das System somit instabil ist.

Die anderen beiden Eigenwerte lauten

$$\lambda_{2,3} = 3.$$

b) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

besitzt vollen Rang, das System ist vollständig steuerbar.

Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 15 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

besitzt vollen Rang, das System ist vollständig beobachtbar.

Da bereits die ersten drei Spalten von $\mathcal{R}$ und die drei ersten Zeilen von $\mathcal{O}$ linear unabhängig sind, kann auf die Berechnung von $A^2 \cdot B$ und $C \cdot A^2$ verzichtet werden.

c) Die Pole sind die Wurzeln des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren der Übertragungsmatrix.

Minoren 1. Ordnung sind:

$$\frac{s-2}{s^2-6s+9}, \quad \frac{-1}{s^2-6s+9}, \quad \frac{1}{s-2},$$

Minor 2. Ordnung ist:

$$\frac{1}{s^2-6s+9}.$$

Das Pol-Polynom ergibt sich zu $(s-2)(s^2-6s+9)$, woraus die Pole des Systems und deren Vielfachheit folgen:

$$\pi_1 = 2, \quad \pi_{2,3} = 3.$$

Das System ist vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, somit entsprechen die Pole den Eigenwerten.

Die Nullstellen sind die Wurzeln des grössten gemeinsamen Teilers der Zähler der Minoren höchster Ordnung, nachdem diese auf das Pol-Polynom als gemeinsamen Nenner normiert wurden.

Es gibt nur einen Minor 2. Ordnung $\frac{1}{s^2-6s+9}$, nach Normierung des Nenners auf das Pol-Polynom $(s-2)(s^2-6s+9)$ lautet der Zähler $s-2$. Somit hat das System eine Nullstelle bei

$$\zeta_1 = 2.$$

d) Nein. Zwar liegen sowohl ein Pol $\pi_1 = 2$ als auch eine Nullstelle $\zeta_1 = 2$ bei der gleichen Frequenz, für eine Kürzung muss bei einem MIMO-System jedoch auch die Richtung übereinstimmen.

Um die Frage in jedem Fall ohne weitere Rechnung beantworten zu können, kann b) verwendet werden. Ist das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, ist das System eine Minimalrealisierung und es tritt keine Pol-Nullstellenkürzung auf. Ist das System nicht vollständig steuerbar und/oder nicht vollständig beobachtbar, tritt eine Pol-Nullstellenkürzung auf.

Alternativ kann auch c) zur Lösung führen. Allerdings nur, indem man die Anzahl der gefundenen Pole mit der Anzahl der Zustände vergleicht. Gibt es weniger Pole als Zustände, findet eine Pol-Nullstellenkürzung statt. Gibt es gleich viele Pole und Zustände, findet keine Pol-Nullstellenkürzung statt.

e)

```
P = tf(ss(A,B,C,D))
```

Alternativ:

```
s = tf('s');
P = C*inv(s*eye(3)-A)*B+D
```

Aufgabe 8 (MIMO-Systeme, Singulärwerte) 6 Punkte

Ott (Alberding)

a) (2 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den zwei Subsystemen $R(s)$ und $Q(s)$. Es hat die Eingänge u_1 und u_2 und die Ausgänge y_1 und y_2.

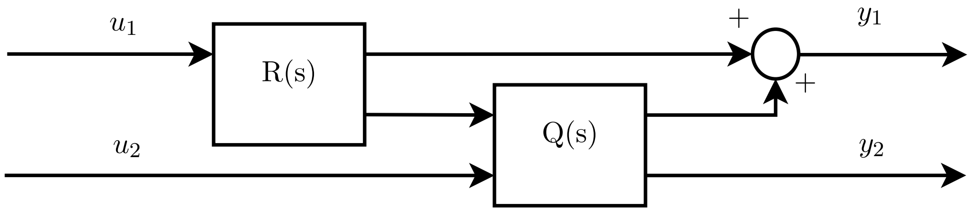


Abbildung 8: Blockdiagramm des in a) zu analysierenden Systems.

Die Subsysteme R(s) und Q(s) haben folgende Übertragunsmatrizen:

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} \qquad Q(s) = \begin{bmatrix} Q_{1,1}(s) & Q_{1,2}(s) \\ Q_{2,1}(s) & Q_{2,2}(s) \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Übertragunsmatrix P(s) des gesamten Systems.

b) (2 Punkte) Gegeben sei das Signalflussbild eines linearen MIMO-Systems. Leiten Sie daraus die Zustandsraumdarstellung dieses Systems ab.

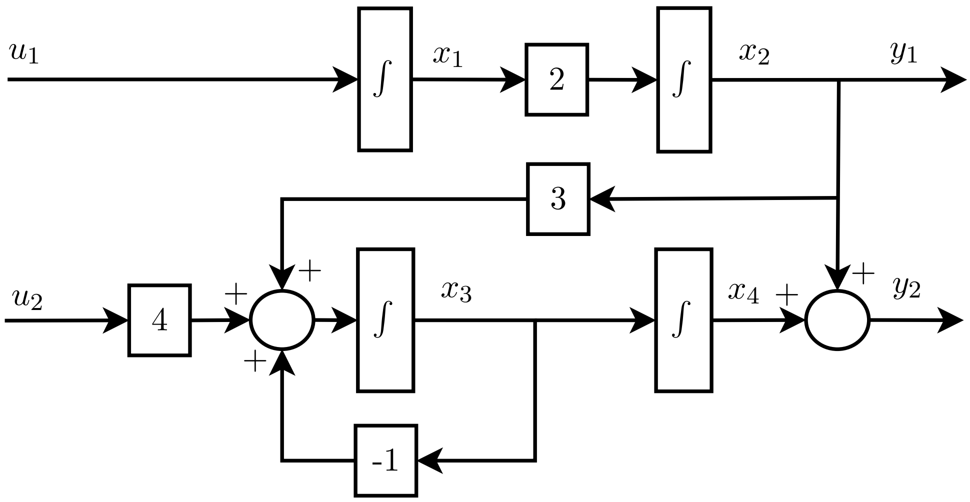


Abbildung 9: Blockdiagramm des in b) zu analysierenden Systems.

c) (2 Punkte) Gegeben sei folgende Übertragunsmatrix $G(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Singulärwerte von $G(s)$ bei der Frequenz $\omega = 1\frac{rad}{s}$

Lösung 8

a) Die beiden Ausgäne y_1 und y_2 werden folgendermassen berechnet:

$$y_1 = R_1 \cdot u_1 + Q_{1,1} \cdot R_2 \cdot u_1 + Q_{12} \cdot u_2$$

$$y_2 = Q_{21} \cdot R_2 \cdot u_1 + Q_{22} \cdot u_2$$

Daraus kann die Übertraungsmatrix bestimmt werden:

$$P(s) = \begin{bmatrix} R_1 + Q_{11} \cdot R_2 & Q_{12} \\ Q_{21} \cdot R_2 & Q_{22} \end{bmatrix}$$

b) Die Zustandsraumdarstellung kann aus dem Signalflussbild abgelesen werden.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

c) Die Übertragunsmatrix $G(s)$ hat bei der Frequenz $\omega = 1\frac{rad}{s}$ folgenden Wert:

$$G(j \cdot 1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{j+1} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{j+1} & \frac{2}{j+1} \end{bmatrix}$$

Die Singulärwerte einer Matrix G berechnen sich zu $\sigma_i\{G\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{G}^T G\}}$

$$H = \{\bar{G(j)}^T G(j)\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-j+1} & \frac{\sqrt{2}}{-j+1} \\ 0 & \frac{2}{-j+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{j+1} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{j+1} & \frac{2}{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von H können mit $det(\lambda I - H) = 0$ bestimmt werden. Das charakteristische Polynom ist dann:

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 4$$

Die Singulärwerte sind dann:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \qquad \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 2$$