

Lösung zum Übungsblatt Komplexe Zahlen

1. a)

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{i+7}} = \frac{i+7}{i+9} = \frac{(i+7)(9-i)}{(i+9)(9-i)} = \frac{64-2i}{82} = \frac{32}{41} + i \frac{1}{41}$$

b)

$$e^{i(5\pi+i\ln 4)} = e^{5i\pi} e^{-\ln 4} = -1 \cdot \frac{1}{e^{\ln 4}} = -\frac{1}{4}$$

c)

$$e^{e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{e} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\sqrt{e} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{i\varphi}} &= \frac{\overline{1+e^{i\varphi}}}{(1+e^{i\varphi})(\overline{1+e^{i\varphi}})} = \frac{1+e^{-i\varphi}}{(1+e^{i\varphi})(1+e^{-i\varphi})} = \frac{1+e^{-i\varphi}}{2+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}} \\ &= \frac{1+\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)} = \frac{1+\cos(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)} - i \frac{\sin(\varphi)}{2(1+\cos(\varphi))} \\ &= \frac{1}{2} - i \frac{\sin(\varphi)}{2(1+\cos(\varphi))} = \frac{1}{2} - i \frac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{4\cos^2(\varphi/2)} = \frac{1}{2} - i \frac{\tan(\varphi/2)}{2} \end{aligned}$$

2. a) e^2i

c) $2\sqrt{2}\pi^3 - i2\sqrt{2}\pi^3$

b) $\frac{1}{2} + i\frac{5}{2}$

d) $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

3. a) $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot i}$

b) $-i = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$

c) Zunächst ist $r^2 = |1 - i\sqrt{3}|^2 = 1 + \sqrt{3}^2 = 4$, also $r = 2$. Damit folgt

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 e^{\frac{5\pi}{3}i}.$$

d) Es ist $z := e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i$ und $r^2 = |z|^2 = |-1 + 2i|^2 = 1 + 2^2 = 5$, also $r = \sqrt{5}$. Ferner folgern wir aus $\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{2}{-1} = -2$, dass $\varphi = \arctan(-2) + k\pi = -\arctan 2 + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ sein muss. Wegen $-\arctan 2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ und der Forderung $\varphi \in [0, 2\pi)$ muss entweder $k = 1$ oder $k = 2$ sein. Da $\sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$ sein muss, müssen wir $k = 1$ wählen. Also ist

$$z = \sqrt{5} e^{i(-\arctan 2 + \pi)} = \sqrt{5} e^{i(\pi - \arctan 2)}.$$

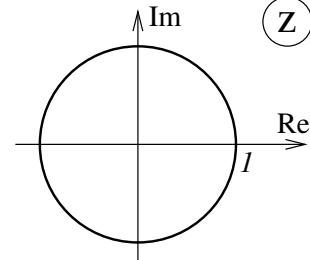
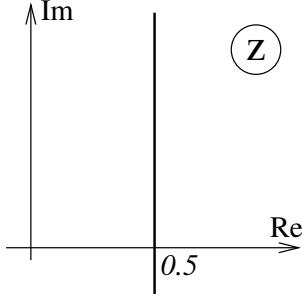
e)

$$\begin{aligned} \frac{2+2i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} &= 2\sqrt{2} \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2\sqrt{2} \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i5\pi/3}} = \\ &2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3})} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{17\pi}{12}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

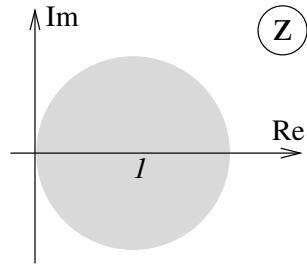
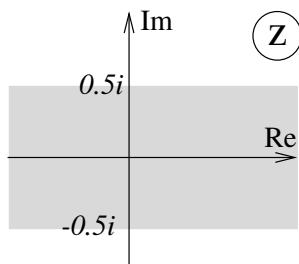
4.

$$\begin{aligned} (1-i)^{101} &= \sqrt{2}^{101} (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{101} = \sqrt{2}^{101} e^{-i\pi\frac{101}{4}} \\ &= \sqrt{2}^{101} e^{-i\pi\frac{96}{4}} e^{-i\pi\frac{5}{4}} = \sqrt{2}^{101} e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}^{101} \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i) = \sqrt{2}^{100} (-1+i) = -2^{50} + i 2^{50}. \end{aligned}$$

5. a) $z + \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ b) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z = 1$ c) $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$
besitzt keine Lösung.



d) $|z - \bar{z}| < 1 \Leftrightarrow |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}$ e) $|z - 1| < 1$



Siehe nächstes Blatt!

6. a) Wir schreiben $-1 = e^{i\pi}$ und erhalten die vierten Wurzeln als

$$z_0 = e^{i\pi/4}, z_1 = e^{i\pi/4 + \frac{2\pi}{4}} = e^{i3\pi/4}, z_2 = e^{i\pi/4 + \frac{4\pi}{4}} = e^{i5\pi/4}, z_3 = e^{i\pi/4 + \frac{6\pi}{4}} = e^{i7\pi/4}$$

Wir vereinfachen dies zu $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$,

b) Sei $z = \sqrt{3} - i$, so gilt $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ und $\arg(z) = -\arctan \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{6}$. Also gilt $z = 2e^{-i\pi/6}$. Die dritten Wurzeln von z sind gegeben durch

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}e^{-i\pi/6 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}(\cos \frac{\pi}{18} - i \sin \frac{\pi}{18}), \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}e^{i(-\pi/18+2\pi/3)} = \sqrt[3]{2}(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18}), \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}e^{i(-\pi/18+4\pi/3)} = \sqrt[3]{2}(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18}). \end{aligned}$$

c) Alle Gleichheitszeichen stimmen ausser bei

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1) \cdot (-1)}.$$

Hier ist nicht klar welche Wurzel gemeint ist. In \mathbb{C} hat jede Zahl genau zwei Quadratwurzeln. Links steht hier zweimal die Wurzel von -1 als i . D.h. rechts müsste auch $i^2 = -1$ stehen. Dort haben wir aber die Wurzel aus 1 , und in \mathbb{R} ist das natürlich 1 . Eine der Wurzeln von 1 in \mathbb{C} ist aber tatsächlich -1 , denn $(-1)^2 = 1$.

7. a) Man beachte, dass

$$\cos(3\varphi) = \operatorname{Re}(e^{3i\varphi}) = \operatorname{Re}((e^{i\varphi})^3) = \operatorname{Re}(z^3),$$

wenn wir $z = e^{i\varphi}$ schreiben. Andererseits kriegt man mit $z = x + iy$:

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3,$$

und mit $y^2 = 1 - x^2$ erhält man

$$\operatorname{Re}(z^3) = x^3 - 3x(1 - x^2) = 4x^3 - 3x.$$

Also ist

$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi).$$

Bitte wenden!

b) Zunächst sehen wir, dass

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

(diese allgemeine Formel stammt von *de Moivre*). Damit ist also $\sin(n\varphi)$ der Imaginärteil von

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\varphi)^{n-k} i^k \sin(\varphi)^k.$$

Nun ist i^k reell genau wenn k gerade ist. Aufspalten in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\cos(n\varphi) = \sum_{k=0,2,4,6,\dots}^n \binom{n}{k} \cos(\varphi)^{n-k} i^k \sin(\varphi)^k$$

$$i \sin(n\varphi) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^n \binom{n}{k} \cos(\varphi)^{n-k} i^k \sin(\varphi)^k$$

oder auch

$$\cos(n\varphi) = \sum_{k=0,2,4,6,\dots}^n (-1)^{k/2} \binom{n}{k} \cos(\varphi)^{n-k} \sin(\varphi)^k$$

$$\sin(n\varphi) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^n (-1)^{(k-1)/2} \binom{n}{k} \cos(\varphi)^{n-k} \sin(\varphi)^k.$$

Für $n = 8$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} \sin(8\varphi) &= \binom{8}{1} \cos^7 \varphi \sin \varphi - \binom{8}{3} \cos^5 \varphi \sin^3 \varphi + \binom{8}{5} \cos^3 \varphi \sin^5 \varphi - \binom{8}{7} \cos \varphi \sin^7 \varphi \\ &= 8 \cos^7 \varphi \sin \varphi - 56 \cos^5 \varphi \sin^3 \varphi + 56 \cos^3 \varphi \sin^5 \varphi - 8 \cos \varphi \sin^7 \varphi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$ und $\binom{8}{5} = \binom{8}{8-5} = \binom{8}{3}$ benutzt.

8. Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = a + ib$.

a) $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

b) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z$
 $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z$

c) $\overline{z+w} = \overline{(x+a) + i(y+b)} = (x+a) - i(y+b) = (x - iy) + (a - ib) = \bar{z} + \bar{w}$,
 ebenso für $z - w$.

d) $\overline{z \cdot w} = \overline{(x+iy)(a+ib)} = \overline{(xa-yb) + i(xb+ay)} = (xa-yb) - i(xb+ay)$,
 und $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{x+iy} \cdot \overline{a+ib} = (x-iy)(a-ib) = (xa-yb) + i(-xb-ay)$.

e) Wir zeigen zuerst

$$\overline{z^{-1}} = \overline{(x+iy)^{-1}} = \overline{\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+(-y)^2} + i\frac{-y}{x^2+(-y)^2} = \frac{1}{x-iy} = (\overline{z})^{-1}.$$

Damit gilt nun $\overline{z/w} = \overline{z \cdot w^{-1}} = \overline{z} \cdot \overline{w^{-1}} = \overline{z} \cdot (\overline{w})^{-1} = \overline{z}/\overline{w}$, falls $w \neq 0$ (das zweite Gleichheitszeichen wegen e)).

f) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x - (-iy) = x + iy = z$

g) $\overline{re^{i\varphi}} = \overline{r \cos \varphi + ir \sin \varphi} = r \cos \varphi - ir \sin \varphi = r \cos(-\varphi) + ir \sin(-\varphi) = re^{-i\varphi}$.

h) Da $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, gilt also $\operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \cos \varphi$ und $\operatorname{Im}(e^{i\varphi}) = \sin \varphi$. Die Aussagen folgen nun mit Hilfe von b).

9. Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = a + ib$.

a)

$$\overline{iz} = \overline{ix-y} = -ix-y = -i(x-iy) = -i\overline{z}$$

b)

$$(z+\overline{z})^2 - (z-\overline{z})^2 = (2\operatorname{Re}(z))^2 - (2i\operatorname{Im}(z))^2 = 4(\operatorname{Re}(z))^2 + 4(\operatorname{Im}(z))^2 = 4|z|^2 = |2z|^2$$

c)

$$|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - \overline{z}w = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$$

d) Die linke Seite ist

$$|w\overline{z} + \overline{w}z| = |(a+ib)(x-iy) + (a-ib)(x+iy)| = |2ax + 2by| = 2\sqrt{(ax+by)^2},$$

und die rechte Seite ist

$$2|wz| = 2|(a+ib)(x+iy)| = 2\sqrt{(ax-by)^2 + (bx+ay)^2}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$(ax+by)^2 \leq (ax-by)^2 + (bx+ay)^2$$

ist. Wenn man ausmultipliziert und alles auf eine Seite bringt, bekommt man aber

$$0 \leq b^2x^2 + a^2y^2 + 2abxy = (bx+ay)^2,$$

was offensichtlich erfüllt ist.