Euclidien

CHARLES Mathieu Mathieu FAGET

Nicolas LE GUERROUÉ Titouan LESEC-ROLLAND

Mai 2020

Table des matières

1 Mise en équation **2**
1.1 Objectif 2
1.2 Contexte 2
1.3 Un premier modèle de température 2
1.4 L'équation résolvable 4

2 Solution **6**
2.1 Programme Python 6
2.2 Prédictions et résultats 7

Mathieu CHARLES
Matthieu FAGET
Nicolas LE-GUERROUÉ
Titouan LESEC-ROLLAND

Chapitre 1

Mise en équation

1.1 Objectif

L'objectif est de prédire l'évolution de la température sur une barre de fer.

1.2 Contexte

Nous possédons les données de température sur 99 intervalles de temps. Ces données concernent un pas de temps évidemment petit car nous souhaitons prédire la température.

1.3 Un premier modèle de température

A partir du fichier mesures précises , en mettant en relation l'évolution de température, le temps et les positions sur la barre, on a crée un modèle de température.

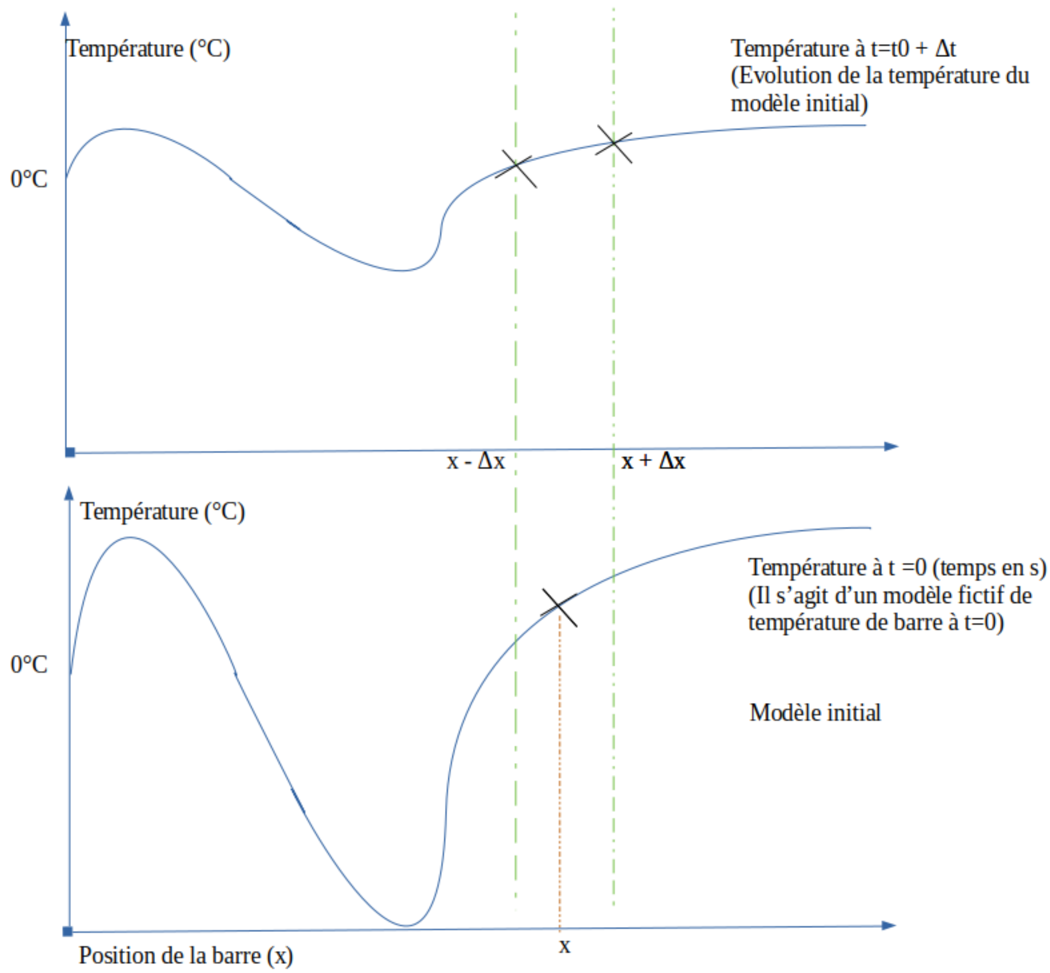

FIGURE 1.1 – Modèle de température

On obtient l'équation suivante

$$T(x, t+\Delta t) - T(x,t) = C \times ((T(x+\Delta x, t) - T(x,t)) + (T(x-\Delta x, t) - T(x,t)))$$

avec Δt l'intervalle de temps entre les deux mesures, et Δx un déplacement infinitésimal de la position du capteur de température .

Mathieu CHARLES
Matthieu FAGET
Nicolas LE-GUERROUÉ
Titouan LESEC-ROLLAND

On a une relation de proportionnalité entre Δt,Δx et C, d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Par lecture graphique sur le fichier des températures, on a :

$$\alpha = 0.049$$

1.4 L'équation résolvable

Cependant, nous ne savons pas résoudre cette équation. L'objectif suivant sera de chercher une équation plus simple que nous pourrons calculer.
On cherche donc une équation de la forme suivante

$$T(x,t) = f(t) \times g(x)$$

Nous allons poser $T(x,t) = f(t) \times g(x)$.
De ce fait, l'équation de la chaleur devient :

$$f'(t) \times g(x) = \alpha f(t) \times g''(x)$$

avec $\frac{f'(t)}{\alpha f(t)}$ constante, que nous appelerons β.
La première équation devient alors :

$$g''(x) = \beta g(x)$$

on en déduit la deuxième :

$$f'(t) = \alpha\beta f(t)$$

Solution de la deuxième équation :

$$f(t) = C \times e^{\alpha\beta t}$$

nous cherchons à avoir une combinaison linéaire qui sera pour nous une solution pour se rapprocher au mieux de la réalité . on prendra donc un β strictement négatif puisque la température sera ammenée à décroître. Ici, nous sommes dans le troisième cas :

$$g(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\beta} x) + C_2 \sin(\sqrt{-\beta} x)$$

De plus, sous savons que g(0)=0, ce qui impose que $C_1 = 0$. Il reste donc

$$g(x) = C_2 \text{sin}(\sqrt{-\beta} x)$$

Or g(2)=0,on a donc

$$C_2 \sin(2\sqrt{-\beta}) = 0$$

Comme les solutions de $\sin\phi = 0$ sont les $\phi = k\pi$ avec k entier, on en déduit que $2\sqrt{-\beta} = k\pi$, donc que les valeurs possibles pour β sont

$$\beta = -\frac{k^2\pi^2}{4}$$

pour tout k entier.

$T(x,t) = f(t)g(x)$, nous permet de trouver une famille de solutions possibles, tous les :

$$e^{-\alpha\frac{k^2\pi^2}{4}t}\sin(\frac{k\pi}{2}x)$$

pour k entier. Or nous savons également que la combinaison linéaire de ces éléments est aussi solution , alors nous avons l'expression possible suivante :

$$e^{-\alpha\frac{\pi^2}{4}t}\sin(\frac{\pi}{2}x), e^{-\alpha\frac{4\pi^2}{4}t}\sin(\frac{2\pi}{2}x), e^{-\alpha\frac{9\pi^2}{4}t}\sin(\frac{3\pi}{2}x), e^{-\alpha\frac{16\pi^2}{4}t}\sin(\frac{4\pi}{2}x), ...$$

avec les conditions initiales (t=0) on a :

$$\alpha_1 e^{-\alpha\frac{\pi^2}{4}t}\sin(\frac{\pi}{2}x)+\alpha_2 e^{-\alpha\frac{4\pi^2}{4}t}\sin(\frac{2\pi}{2}x)+\alpha_3 e^{-\alpha\frac{9\pi^2}{4}t}\sin(\frac{3\pi}{2}x)+... = \alpha_1\sin(\frac{\pi}{2}x)+\alpha_2\sin(\frac{2\pi}{2}x)+\alpha_3\sin(\frac{3\pi}{2}x)$$

On cherche à calculer les coefficient alpha

On part de la relation suivante

$$\alpha_i = \int_0^2 M(x)\cdot sin(\frac{i\cdot\pi}{2})dx$$

avec i representant le numéro du coefficient α.

Chapitre 2

Solution

2.1 Programme Python

Nous avons codé un programme Python pour calculer automatiquement les coefficients alphas.
Ce programme possède une fonction main qui permet de :

1. calculer autant de coefficient alpha que souhaité
2. Afficher la température de la barre à un t donnée (tableau des temps)
3. Calculer et afficher l'écart de température entre t(0) et t(final) du tableur
4. Calculer et afficher l'écart de température entre t(0) et t(variable) avec les coefficients calculés

Le code source (classe Data) est disponible en annexe du dossier. Voici la fonction main

```
def main():
    #Création d'un objet Data
  data = Data()
  data.accuracy(15)                        #Nombre de alphas
  data.alpha(0.0495)                       #Alpha

  #Lis les valeurs à t=0
  data.readCSV("mesuresPrecises.csv", step=0)

  #calcul des coefficients alphas
  data.compute()

  #Affiche le graphique des températures réelles et calculées avec
   les alphas
```

```python
    data.displayGraph()

    #Affiche le graphique de la température à t=...
    #data.displayGraphTime(0.1)


    #Affiche le graphique des températures passée en argument
    data.displayGraphTimes([0.0098, 0.2, 1, 2,  5, 20])

      #Affiche la différence de température entre t(0) et t(final) du tableau
      #et la différence de température entre t(0) et t(0.0098)
    data.displayDelta(0.0098)

if __name__ == '__main__':
    main()
```

2.2 Prédictions et résultats

```
>>> Lecture du fichier CSV mesuresPrecises.csv
Valeurs pour les  15  trouvé(s) :
Alpha  1  =  1.2732015233215779
Alpha  2  =  -0.7578574140221348
Alpha  3  =  0.424298152292656
Alpha  4  =  -0.8841472084386262
Alpha  5  =  0.25445685586288425
Alpha  6  =  0.4823573017881738
Alpha  7  =  0.18162333670920702
Alpha  8  =  0.10211595337197363
Alpha  9  =  0.1411277719844731
Alpha  10  =  0.0425580573895339
Alpha  11  =  0.11532980857956651
Alpha  12  =  0.022429730128601177
Alpha  13  =  0.09744628251450824
Alpha  14  =  0.01345909092708365
Alpha  15  =  -0.0001742575027909684
```

FIGURE 2.1 – Calcul des coefficients alphas

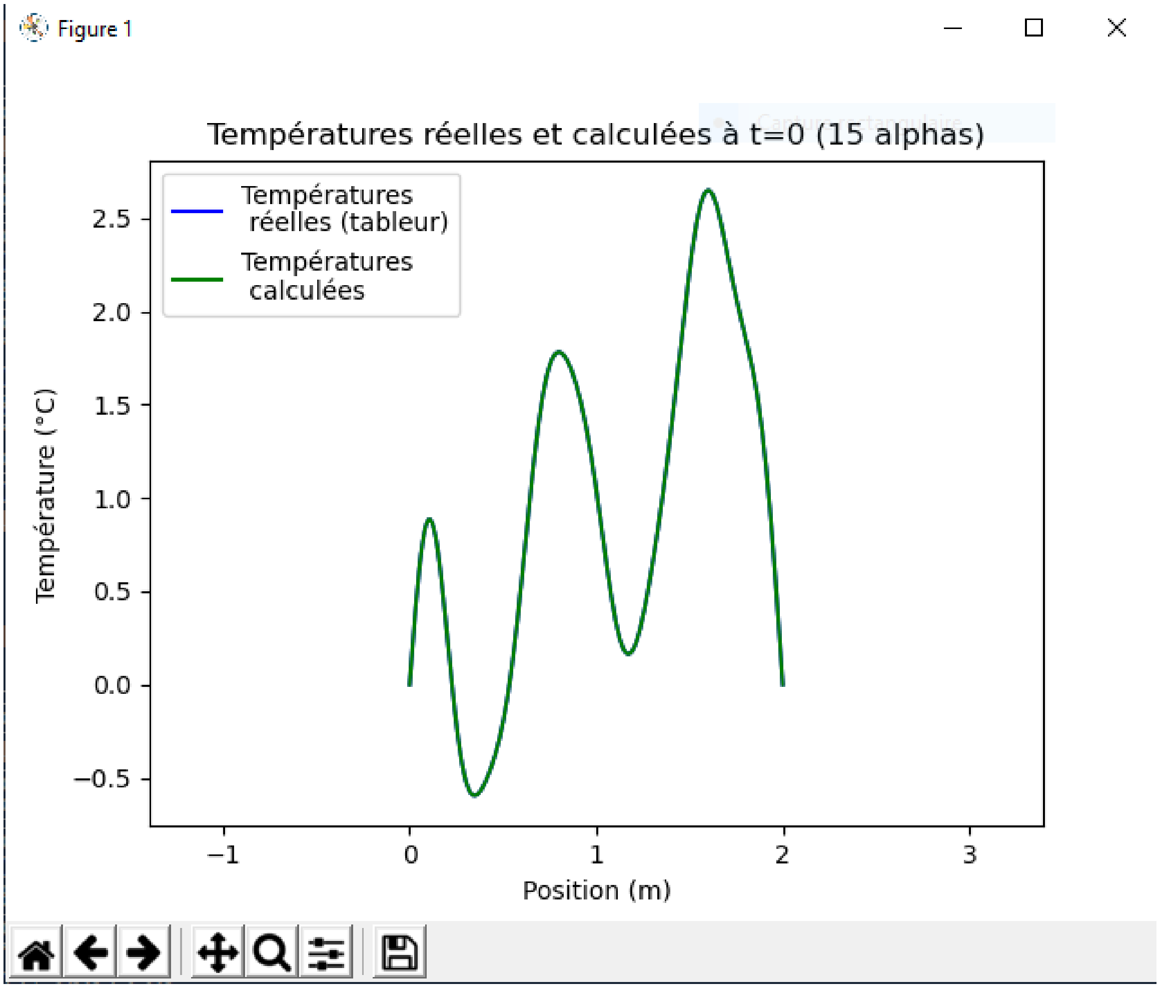

Figure 2.2 – Vérification du modèle à t=0

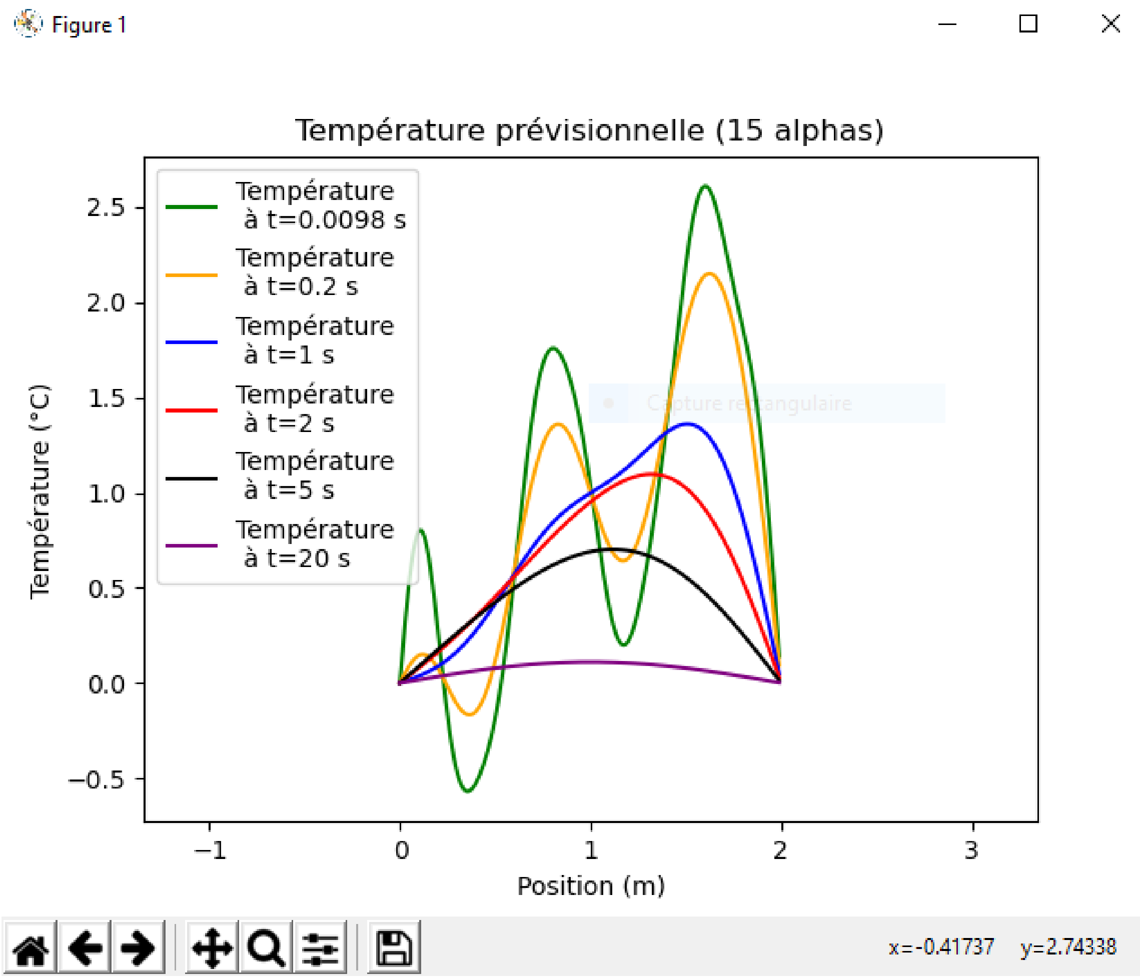

FIGURE 2.3 – Prédictions des températures

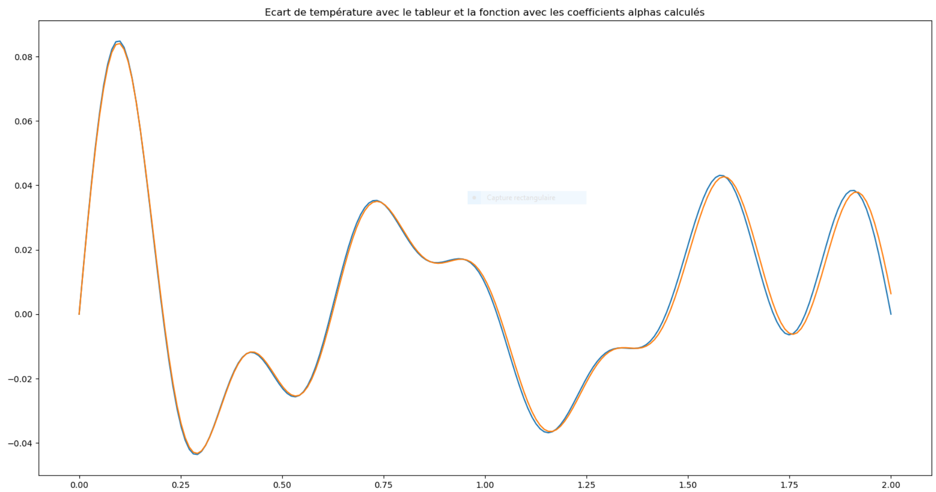

Figure 2.4 – Vérification des résultats

La courbe bleue représente la différence de température de la barre enter t=0 et t=0.0098s