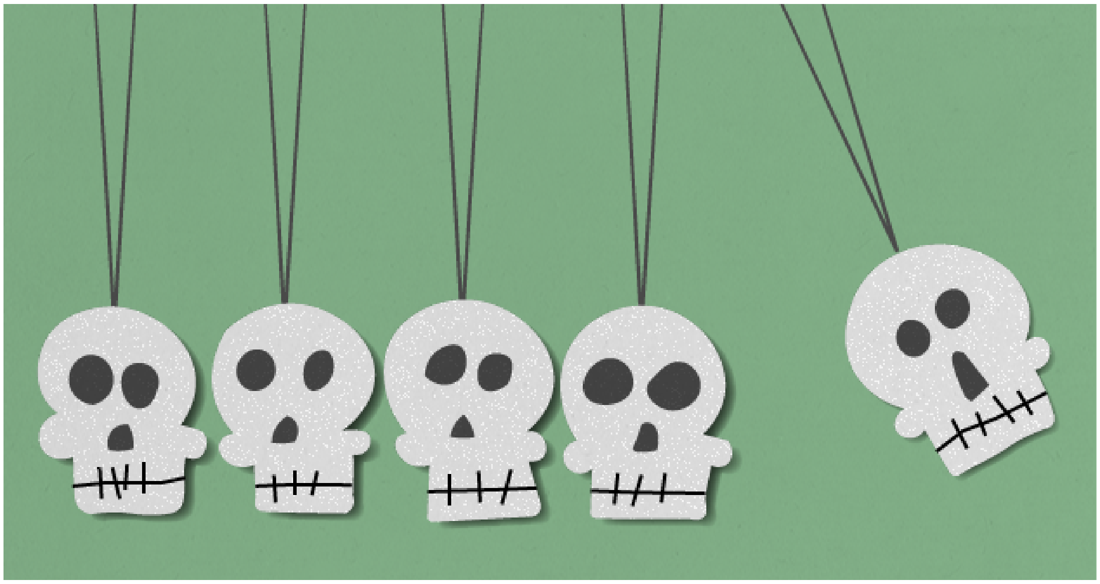

Apuntes de Física Electrónica

Nicolás Pérez Julve

Versión 14 de noviembre de 2017

Prefacio

Este apunte de estudio fue hecho con el propósito de ayudar a estudiantes del curso de Física Electrónica de la Universidad Santo Tomás. Cualquier sugerencia o error puede ser advertido a nicolasperezjulve@gmail.com.

IMPORTANTE: Este apunte fue diseñado para ser impreso a doble cara, es por esta razón que antes y después del prefacio hay una página en blanco.

"La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡Qué importa! Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo. Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste."

Marie Curie

Índice general

Capítulo 1

Magnitudes Físicas, Unidades y Mediciones

1.1. Magnitudes Físicas

En física, existen **magnitudes fundamentales**[1]de las cuales se pueden definir otras magnitudes.

Definición 1.1. *Las **magnitudes fundamentales** son un conjunto de magnitudes tal que ninguna magnitud puede ser expresada en función de otra **magnitud fundamental**.*

Magnitud fundamental

Ejemplo 1.1. ***Magntiudes fundamentales** son: masa, longitud, tiempo, temperatura entre otras.*

Por otro lado existen **magnitudes derivadas**[1] las cuales se forman combinando las **magnitudes fundamentales**.

Definición 1.2. *Las **Magnitudes derivadas** son todas aquellas que pueden ser expresadas en función de otras magnitudes.*

Magnitud derivada

Ejemplo 1.2. ***Magnitudes derivadas** son: rapidez, aceleración, presión, entre otras.*

La **rapidez** es una **magnitud derivada** por dos **magnitudes fundamentales** y la construcción de esta cantidad es la "división"de una **longitud** determinada sobre un **tiempo** determinado (más adelante se dará una definición exacta del concepto de **rapidez**). Pero, ¿que es exactamente la **longitud** y el **tiempo**? Dado que estas magnitudes son fundamentales, no es posible comprenderlas como la combinación de otras

[1]JCGM 200:2008(E/F), International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM) :4

magnitudes, por esta razón, estas magnitudes son deducidas mediante una **definición operacional**

Definición operacional

Definición 1.3. *Una **definición operacional**[2] constituye el conjunto de procedimientos que describe las actividades que un observador debe realizar para recibir las impresiones sensoriales (sonidos, impresiones visuales o táctiles, etc.), que indican la existencia de un concepto teórico en mayor o menor grado. En otras palabras, especifica qué actividades u operaciones deben realizarse para medir una variable.*

De esta forma la masa, la longitud y el tiempo son magnitudes que pueden ser descritas mediante una **definición operacional**.

Masa

Definición 1.4. *El estándar de masa, el **kilogramo** (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de aleación platrino-iridio específico que se conserva en la oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París.*

Longitud

Definición 1.5. *El estándar de longitud, el **metro** (que se abrevia en m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en* $1/299\,792\,458$ *segundos.*

Tiempo

Definición 1.6. *El estándar de tiempo, el **segundo** (que se abrevia como s) se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia, el átomo de cesio sufre una transición entre dichos estados. Un **segundo** se define como el tiempo que tardan* $9\,192\,631\,770$ *oscilaciones de la radiación emitida producto de la transición.*

Con estas tres magnitudes físicas, es posible construir los fundamentos de la Mecánica Newtoniana, como se verá en los próximos capítulos.

1.2. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Se ha visto que las tres magnitudes fundamentales expuestas en la sección anterior, presentan estándares para su medición. Estos estándares corresponden a la unidad de medida para cada magnitud fundamental. A lo largo de la historia de la humanidad, el ser humano siempre ha tenido la necesidad de cuantificar objetos, distancias entre otras cosas, inventando distintas unidades de medidas, como el largo de un pie, de un antebrazo etc. Durante mucho tiempo, la diversidad de unidades de medida provocó incertidumbre respecto a las mediciones que se hacían.

Las mediciones exactas y confiables requieren unidades inmutables que los observadores puedan volver a utilizar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros por todo el mundo se denomina comúnmente "sistema

[2] Extracto de http://www.tecnicas-de-estudio.org/investigacion/investigacion36.htm

métrico.ªunque, desde 1960, su nombre oficial es **Sistema Internacional** o **SI**. En las Tablas (1.1) y (1.2), se muestran algunas unidades.

Tabla 1.1: Unidades de algunas magnitudes fundamentales en el SI

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Cantidad de sustancia	mol	mol

Tabla 1.2: Unidades de algunas magnitudes derivadas en el SI

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**
Velocidad lineal	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad de masa	kilogramo sobre metro cúbico	kg/m^3
Velocidad lineal	metro sobre segundo	m/s
Frecuencia	hertz	Hz
Energía	joule	J

El SI también admite prefijos para las unidades de medida, con el fin de expresar las cantidades de una forma mas compacta. El la Tabla (1.3) se muestran los prefijos aceptados en el SI.

Tabla 1.3: Prefijos del SI

Nombre	**Símbolo**	**Factor**	**Nombre**	**Símbolo**	**Factor**
exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
penta	P	10^{15}	centi	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^{9}	micro	μ	10^{-6}
mega	M	10^{6}	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^{3}	pico	p	10^{-12}
hecto	h	10^{2}	femto	f	10^{-15}
deca	da	10^{1}	atto	a	10^{-18}

Con las unidades de medida y los prefijos del SI, se puede expresar **todas** las cantidades medibles.

1.2.1. Reglas para el uso del SI

1. No se colocarán puntos luego de los símbolos de las unidades SI, sus múltiplos o submúltiplos. **Ejemplo: kg , dm , m .**

2. Cuando sea necesario referirse a una unidad, se recomienda escribir el nombre completo de una unidad, salvo casos en los cuales no exista riesgo de confusión al escribir únicamente el símbolo.

3. El símbolo de una unidad será el mismo para el singular como el plural. **Ejemplo: un kilogramo 1kg - cinco kilogramos 5 kg**.

4. No se acepta utilización de abreviaturas para designar las unidades SI. Existe símbolos no abreviaturas. **Ejemplo: kgs no corresponde a kilogramos, lo correcto es: kg**.

5. Cuando se deba escribir (o pronunciar) el plural del nombre de una unidad SI, se usarán las reglas de la Gramática Española. **Ejemplo: (singular) metro - (plural) metros, (singular) mol - (plural) moles**.

6. Se usarán prefijos SI y sus símbolos para formar respectivamente los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI. **Ejemplo: centímetro = cm**.

7. No deberán combinarse nombres y símbolos al expresar el nombre de una unidad derivada. **Ejemplo: metro/s , lo correcto es: m/s o metro/segundo**.

1.3. Cambio de Unidades al SI

1.3.1. Cambio de unidades de magnitudes fundamentales

Si se quiere transformar las magnitudes de masa, longitud y tiempo se puede proseguir como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3. *Si se quiere transformar la cantidad de 100 g a kg se prosigue como sigue (tomando en cuenta que 1 kg son 1000 g):*

$$\cancel{100g}^{\,1}\,\frac{1kg}{\cancel{1000g}_{\,10}} = \frac{1kg}{10} = 0{,}1kg \tag{1.1}$$

La idea de este procedimiento se basa utilizar la razón entre kilogramo y gramo, como sabes 1kg : 1000g.

Ejemplo 1.4. *Transformar la cantidad de 100 minutos a segundos. Sabemos que 1 minuto corresponde a 60 segundos, cuya razón se escribe 1 min : 60 s o bien 60 s : 1 min. La transformación se hace como:*

$$\cancelto{100}{100min}\,\frac{60s}{\cancelto{1}{1min}} = 6000s \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.5. *Transforme la cantidad de 1 centímetro a metro. Para realizar esta transformación, sabemos que 1 m : 100 cm.*

$$\cancelto{1}{1cm}\,\frac{1m}{\cancelto{100}{100cm}} = \frac{1m}{100} = 0{,}01m \tag{1.3}$$

Ejercicio 1.1. *Transforme 1 hora a SI.*

1.3.2. Cambio de unidades de magnitudes derivadas

Para el cambio de magnitudes derivadas, se utiliza el mismo procedimiento agregando la razón de cualquier otra magnitud en custión.

Ejemplo 1.6. *Tranfforme 36 km/h al SI. Para este caso sabemos que 1000 m : 1 km y 1 h : 3600 s. La operación es:*

$$36\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\;\frac{1000m}{1\cancel{km}}\;\frac{1\cancel{h}}{3600s} = 10\frac{m}{s} \tag{1.4}$$

Ejemplo 1.7. *Tranforme la densidad del agua (1g / cm^3). Para realizar esta operación es necesario comprender que hay que elevar una cantidad al cuadrado, como muestra la operación:*

$$1\frac{\cancelto{1}{g}}{cm^3}\;\left(\frac{100cm}{1m}\right)^3\frac{1kg}{\cancelto{1000}{1000g}} = \frac{1}{1000}\frac{kg}{\cancel{cm^3}}\frac{100^3\cancel{cm^3}}{m^3} = 1000\frac{kg}{m^3} \tag{1.5}$$

Ejercicio 1.2. *Tranforme 20 cm^2 a SI.*

Ejercicio 1.3. *Tranforme 1000 cm^3 a SI.*

1.4. Mediciones

1.4.1. Precisión y exactitud

Definición 1.7. *Se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad o extensión en lecturas de un instrumento.* ***Precisión***

Exactitud **Definición 1.8.** *Se refiere a la aproximación de una medida al valor verdadero.*

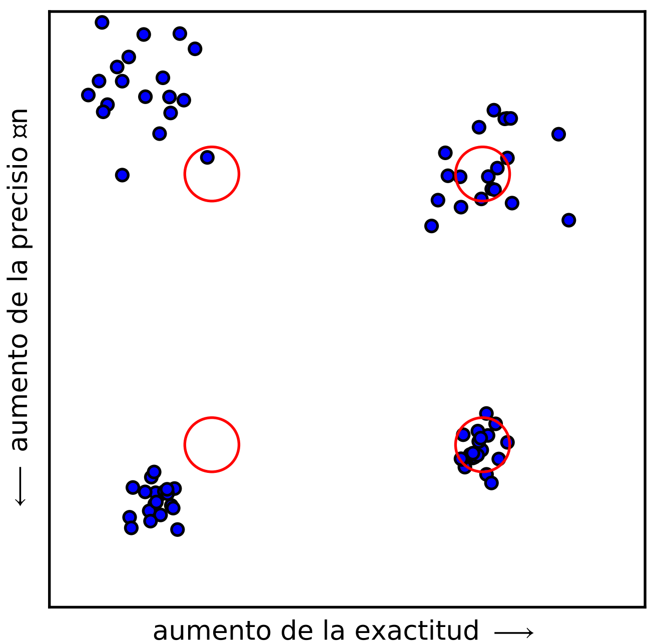

Figura 1.1: Exactitud vs precisión

1.4.2. Tipos de errores

Definición 1.9 (Error aleatorio). *Al repetir una medida varias veces, se obtienen diferentes resultados que están relacionados a la precisión de los datos obtenidos. Esta dispersión se debe a la presencia del error aleatorio.*

Definición 1.10 (Error sistemático). *Este tipo de error está relacionado con la exactitud del resultado, a mayor exactitud menor es el error sistemático. Las fuentes de este tipo de error podrían ser la mala calibración del instrumento de medición o un método que siempre sobre estime o subestime un valor medido.*

Definición 1.11 (Equivocación). *Este tipo de error es cuando en el conjunto de medidas se encuentran algunos datos malos y no tienen relación con el experimento en sí. Un ejemplo de equivocación podría ser un error de escritura al transferir los datos.*

1.4.3. Cifras significativas

El número de cifras significativas de un número, lo obtenemos mirando los dígitos de dicho número de izquierda a derecha y comenzando a contar desde el primer dígito distinto de cero hasta el último dígito, sea o no cero. La mencionada cantidad de dígitos nos entrega el número de cifras significativas.

Algunos ejemplos:

1	1 cifra significativa
25	2 cifras significativas
10 000	5 cifras significativas
$0,00045$	2 cifras significativas

Ejercicio 1.4. *¿Cuantas cifras significativas tienen los números* $10,00078$ *y* $00,004506$*?*

1.4.4. Aproximación y redondeo

Si queremos expresar el número $\pi = 3,1415...$ con n cifras significativas, debemos desechar todas las cifras que se encuentren a la derecha del enésimo lugar

Reglas

1. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n+1)$ es mayor que 5, se le agrega una cantidad a la cifra que se encuentra en el lugar enésimo.

2. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n+1)$ es menor que 5, dejamos la cifra enésima inalterable.

3. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n+1)$ es igual a 5, adoptaremos el siguiente criterio:

   - Si la enésima cifra es impar, se le agrega una unidad.

   - Si la enésima cifra es par, la dejamos inalterable

Este último criterio es totalmente arbitrario y para asegurarnos que realmente es al azar el que la cifra enésima aumente o quede inalterable, debemos cerciorarnos que la posibilidad que sea par es la misma que sea impar. Pera estos efectos consideramos al cero como número par.

Para expresar el resultado de una operación con números de distintas cifras significativas, se utiliza la siguiente regla:

1. **Suma y sustracción:** el resultado se expresa con tantos decimales como el número de menor cantidad de decimales que participa de la operación.

2. **Multiplicación y división:** el resultado se expresa con tantas cifras significativas como la magnitud que tenga menor número de cifras significativas.

1.4.5. Notación científica

La notación científica consiste en expresar un número entero o decimal como potencia de diez. Así un número cualquiera, puede ser expresado como $a \times 10^b$, donde la **parte entera** de a es entre 1 y 9.

Ejemplo 1.8. *Expresar el número* 24,54 *en notación científica.*
Solución:

$$24{,}54 = 2{,}454 \times 10^1$$

Ejemplo 1.9. *Expresar el número* 0,00576 *en notación científica.*
Solución:

$$0{,}00576 = 5{,}76 \times 10^{-3}$$

Si se quiere operar con números con distintos números de cifras significativas, el uso de la notación científica puede ser de ayuda.

Ejemplo 1.10. *Si se quiere multiplicar* 200 *por* 1*, notamos que el primer número tiene tres cifras significativas y el segundo tiene una. Sabemos que el resultado es* 200*, sin embargo, el resultado debe expresarse con una cifra significativa, así que el resultado final es* 2×10^2*, este resultado tiene una cifra significativa (la potencia no cuenta como cifra significativa).*

1.4.6. Orden de magnitud

El orden de magnitud es la potencia de diez más cercana a algún número.

Ejemplo 1.11. *Algunos ejemplos son:*

1. 7,2 *es de orden* 10^1
2. 4,3 *es de orden* 10^0
3. $150,4$ *es de orden* 10^2

1.4.7. Mediciones análogas

Para comprender como se hace una correcta medición análoga, ejemplificaremos el correcto procedimiento de una medición. Supongamos que tenemos una regla milimétrica como muestra la Figura 1.2.

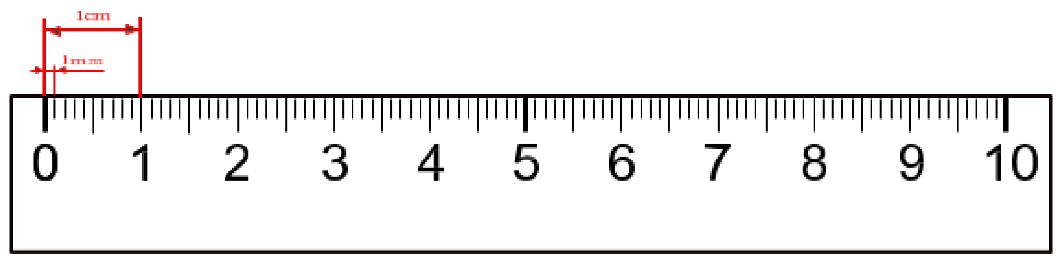

Figura 1.2: Regla milimétrica. La sensibilidad de esta regla es de 1 mm.

Definición 1.12. *La **sensibilidad** de un instrumento, es la menor medida que puede tomar.*

Para el caso de la regla milimétrica, su sensibilidad es de un 1 mm.

Definición 1.13. *El **error** asociado a la medición con un instrumento, es la mitad de su sensibilidad, para el caso de instrumentos análogos y la última cifra significativa (error informado por el fabricante) para el caso de un instrumento digital.*

Ejemplo 1.12. *Como la sensibilidad de la regla milimétrica es de* 1 *mm su error asociado es de* 0,5 *mm. Entonces al hacer una medición con la regla milimétrica nos da un valor de* 14 *mm, lo correcto es hacer una **estimación** de la última cifra significativa, por ejemplo una persona puede medir* 14,3 *mm otra* 14,5 *mm entre otras, pero eso no es importante, por que sabemos que nuestra medición es válida en un rango de* $\pm 0{,}5$ *mm. Así la medición correcta es de:*

$$[14{,}3 \pm 0{,}5]mm$$

1.4.8. Mediciones digitales

En una medición digital, la sensibilidad del instrumento es la última cifra significativa que da el instrumento y su error es informado por el fabricante del instrumento.

Ejemplo 1.13. *En la Figura 1.3 se muestra la medición de un instrumento digital que especifíca el error asociado a la medición.*

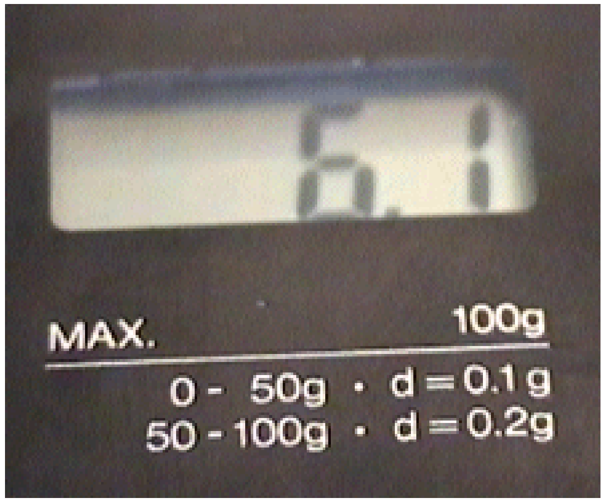

Figura 1.3: Balanza digital. Su sensibilidad es de 0,1 g

De esta forma, la medición es:

$$[6{,}1 \pm 0{,}1]g$$

Capítulo 2

Vectores

2.1. Vectores

Definición 2.1. *Un **escalar** es un solo valor que no tiene indicador direccional y que representa una cantidad.* *Escalar*

Definición 2.2. *Un **vector** es un arreglo de números (que puede ser expresado en 1,2,3 ... dimensiones) llamadas "componentes de vectores"que se combinan con indicadores direccionales (bases) para formar una cantidad vectorial (magnitud, dirección y sentido).* *Vector*

2.2. Componentes cartesianas de un vector

Para hablar de un vector, es necesario designar un sistema coordenado del cual podamos identificar los indicadores direcciones y obtener de un vector cantidades como sus componentes, ángulo sobre el eje x y la magnitud. En la Figura 2.1 se muestra un vector sobre el plano cartesiano.

Definición 2.3. *La **componente** de un vector, se define como la proyección del vector a lo largo de su indicador direccional.* *Componente de un vector*

Ejemplo 2.1. *En la Figura 2.1, las componentes del vector $\vec{r}$ son:*

$$\begin{aligned} r_x &= r\cos\theta \\ r_y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Definición 2.4. *La **magnitud** de un vector es una cantidad escalar y se define como:* *Magnitud de un vector*

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \tag{2.1}$$

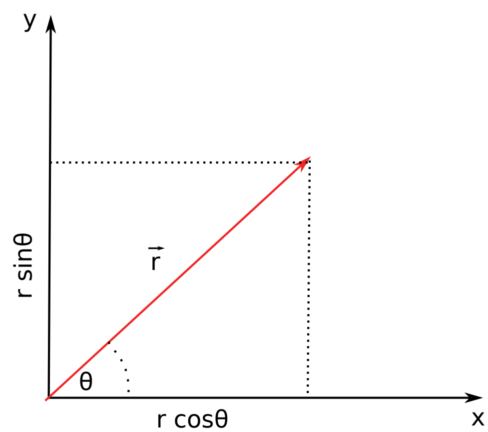

Figura 2.1: Un vector $\vec{r}$ sobre el plano cartesiano.

Un vector en el plano cartesiano puede ser escrito en forma algebraica como una combinación de sus componentes multiplicadas por sus **bases** (indicador direccional).

$$\vec{r} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} = r\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{j}} \tag{2.2}$$

Ejercicio 2.1. *Compruebe que la elección de (2.2) satisface (2.1).*

2.3. Operaciones con vectores en el plano cartesiano

2.3.1. Suma de vectores

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ definidos en el plano cartesiano. La operación $\vec{A}+\vec{B}$ define un vector resultante $\vec{C}$.

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

Esta operación cumple con ciertas propiedades importantes:

- Es **conmutativa:**
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$
- Es **asociativa:**
$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

La suma vectores puede verse gráficamente mediante una construcción geométrica. Si queremos sumar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ bien definidos, el vector resultante $\vec{C}$ es el vector que une el **origen** del primero con el final del segundo como se muestra en la Figura 2.2.

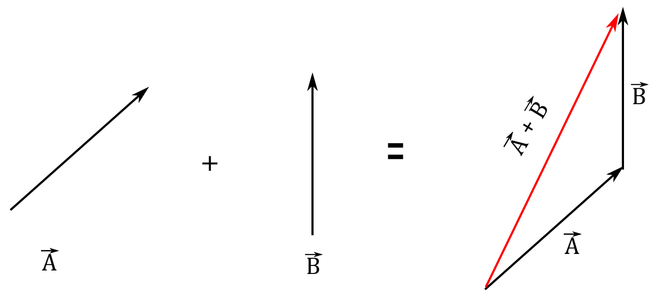

Figura 2.2: Suma gráfica de dos vectores.

Ejercicio 2.2. *Verifica que la suma de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es conmutativa.*

Un vector puede multiplicarse por un escalar y el resultado es otro vector en la misma **dirección**:

$$\lambda\vec{A} = \vec{C} \tag{2.3}$$

Ejercicio 2.3. *Muestre como es la multiplicación de $\lambda\vec{A}$ si $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ y $\lambda = \pm 1$.*

Si se consideran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la Figura 2.2 y se quiere realizar la operación $\vec{A} - \vec{B}$, se debe pensar en este operación como $\vec{A} + (-\vec{B})$ como muestra la Figura 2.3.

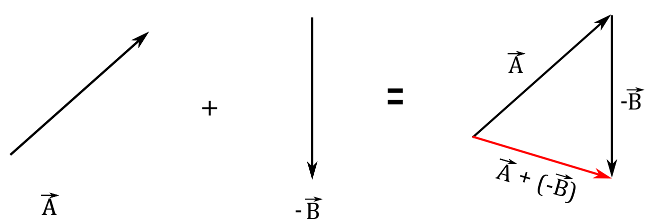

Figura 2.3: "Resta"de dos vectores.

2.3.2. Producto escalar

Sean $\vec{A} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{B} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$, se define el producto escalar (o producto punto) como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y \tag{2.4}$$

o también, el producto escalar se puede definir como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\theta_{AB}) \tag{2.5}$$

Como su nombre lo indica, el resultado del producto escalar es una cantidad vectorial que depende de las coordenadas de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ o su magnitud y ángulo entre los vectores, como se muestra en la Figura 2.4.

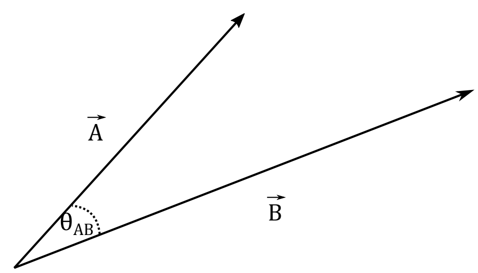

Figura 2.4: Ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

2.3.3. Producto vectorial

Sean $\vec{A} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{B} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}$, se define la **magnitud** el producto vectorial (o producto cruz) como:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin(\theta_{AB}) \tag{2.6}$$

La representación gráfica del producto vectorial se muestra en la Figura 2.5

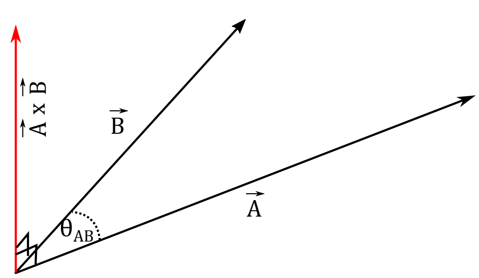

Figura 2.5: Producto vectorial entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El producto vectorial es **no es conmutativo**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{2.7}$$

Es por esta razón, que el sentido del producto vectorial viene dado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la Figura 2.6

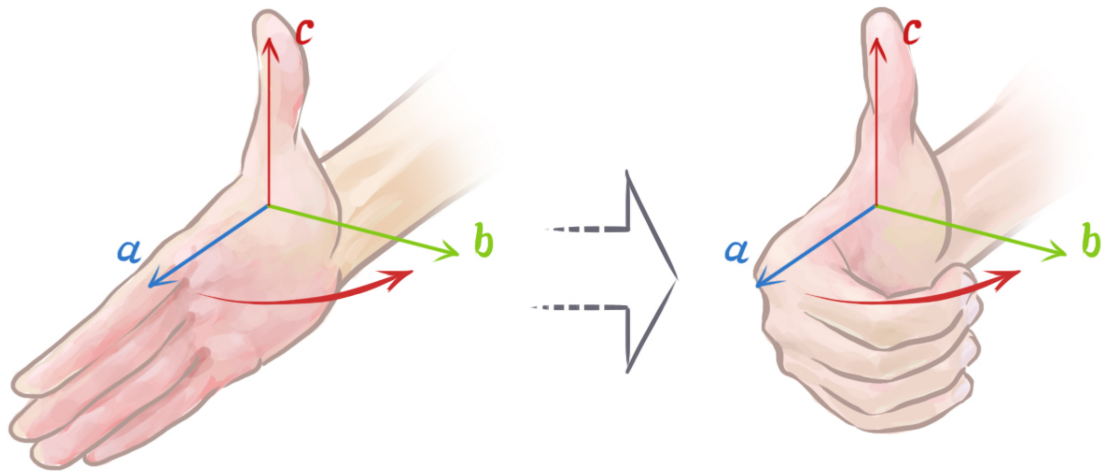

Figura 2.6: Regla de la mano derecha para el producto vectorial.

La dirección de la mano apunta hacia el primer vector de la operación $a \times b$. El vector resultante c apunta en la dirección del dedo pulgar.

2.3.4. Vectores unitarios

Se ha visto, que los vectores son definidos mediante marcadores direcciones, llamadas bases. En el plano cartesiano, las bases vienen dadas por los vectores: $\hat{\mathbf{i}}$ para la dirección sobre el eje x y $\hat{\mathbf{j}}$ para la dirección sobre el eje y.

Si aplicamos el producto vectorial entre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, el vector resultante corresponde a un vector unitario perpendicular a los vectores $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ llamado $\hat{\mathbf{k}}$. Este producto vectorial forma el espacio tridimensional como muestra la Figura 2.7.

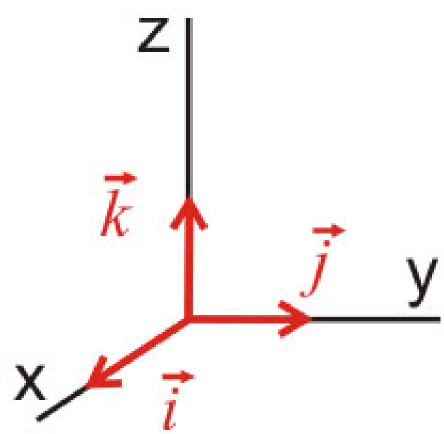

Figura 2.7: Espacio tridimensional formado por los tres vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$.

Para comprender el significado y la importancia de estos tres vectores unitarios, es necesario ver como es el producto vectorial y escalar entre estos vectores. Usando la regla de la mano derecha es posible deducir que:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\,\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{2.8}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\,\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \tag{2.9}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \tag{2.10}$$

Por otro lado el producto escalar de los vectores unitarios es:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{2.11}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \tag{2.12}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{2.13}$$

Ejercicio 2.4. *Compruebe estos productos.*

Los vectores unitarios son perpendiculares entre ellos y forman el espacio tridimensional.

Capítulo 3

Cinemática

3.1. Desplazamiento, velocidad y aceleración

Si consideramos que en un instante inicial t_i, un objeto se encuentra en cierta posición en el espacio, denotaremos como $\vec{r}(t_i)$ la posición de este objeto en t_0. Si este objeto se mueve desde su posición inicial a otra posición, diremos que este objeto en un instante final t_f se encuentra en $\vec{r}(t_f)$ como muestra la Figura 3.1.

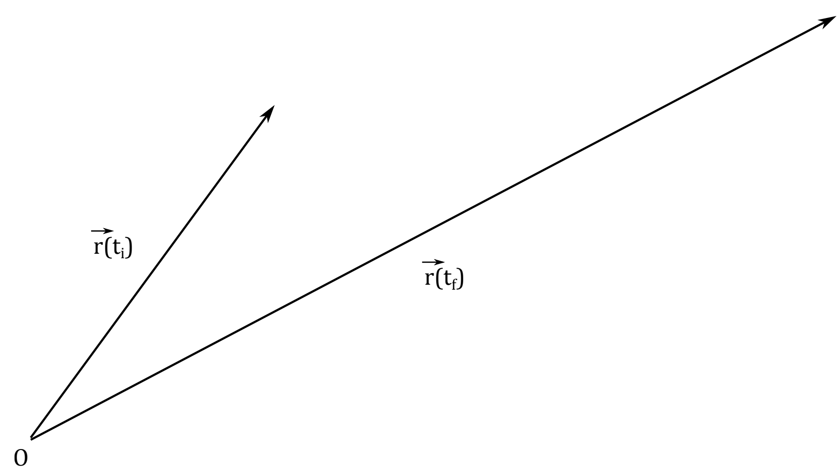

Figura 3.1: Posición de un objeto con respecto al origen O en dos instantes diferentes

Desde $\vec{r}(t_i)$ hasta $\vec{r}(t_f)$ existen muchos caminos que llevan desde su posición inicial hasta la final. Todos estos caminos se llaman **trayectorias**, existen muchas **trayectorias** que llevan desde el punto $\vec{r}(t_i)$ hasta $\vec{r}(t_f)$.

Desplazamiento

Definición 3.1. *El desplazamiento de un punto a otro se define como:*

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) \tag{3.1}$$

El desplazamiento es un vector que va desde la posición inicial hasta la posición final, como muestra la Figura 3.2.

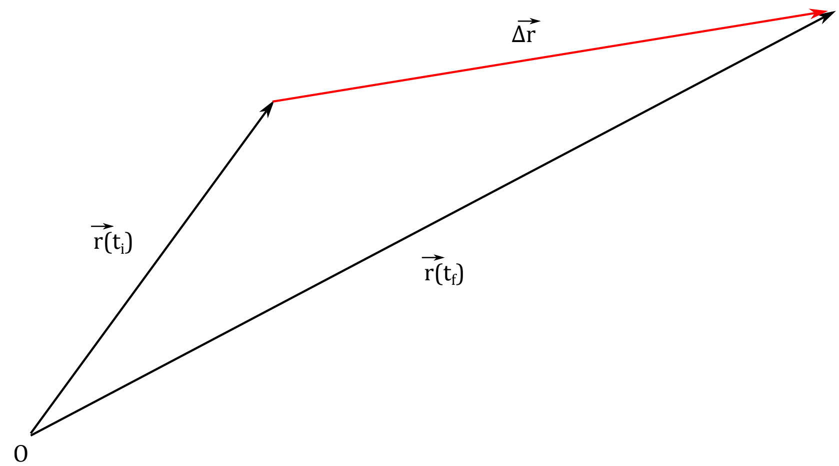

Figura 3.2: El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$

Si consideramos que este desplazamiento se produjo entre un intervalo de tiempo t_i y t_f podemos definir la variación de la posición con respecto al tiempo como:

Velocidad media

Definición 3.2. *La variación de la posición con respecto al tiempo se llama* ***velocidad media*** *y se define como:*

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

Si consideramos que en el movimiento la velocidad no es constante, es decir, la velocidad cambia de valor a través del tiempo en un intervalo de tiempo t_i y t_f, podemos definir la **aceleración media**.

Aceleración media

Definición 3.3. *La variación de la velocidad con respecto al tiempo se llama* ***aceleración media*** *y se define como:*

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.3}$$

3.2. Ecuación de movimiento

Sin perdida de generalidad, si consideramos el movimiento en una dimensión para un cuerpo bajo la acción de una *aceleración constante*, podemos escribir:

$$a_x = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i} \tag{3.4}$$

Si consideramos que el tiempo inicial es $t_i = 0$ y haciendo $t_f = t$ podemos escribir:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \tag{3.5}$$

y despejando v_x, tenemos:

$$\boxed{v_x = v_{0x} + a_x t} \tag{3.6}$$

Rapidez instantánea

Hasta este punto, se ha logrado obtener una expresión para la rapidez instantánea de un cuerpo bajo *aceleración constante*. El siguiente paso es obtener una expresión para la posición del objeto a cada instante del tiempo. Para esto, podemos escribir (3.2) como:

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \tag{3.7}$$

haciendo $t_0 = 0$ esta expresión queda como:

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t} \tag{3.8}$$

Por otro lado, v_{m-x}, no es más que el promedio entre una rapidez inicial y una rapidez final, esto es:

$$v_{mx} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \tag{3.9}$$

Si combinamos las ecuaciones (3.6) y (3.9), podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_{mx} &= \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t \end{aligned} \tag{3.10}$$

Y finalmente combinando (3.8) y (3.10) obtenemos una expresión final para la posición de un cuerpo en cualquier instante del tiempo bajo la acción de una aceleración:

Posición instantánea

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2} \tag{3.11}$$

Esta expresión, corresponde a la ecuación de una parábola, centrada en x_0. Este movimiento, bajo una aceleración constante, se llama **movimiento rectilíneo uniforme acelerado (MRUA)**. Si $a_x = 0$, entonces el movimiento es llamado **movimiento rectilíneo uniforme (MRU)**.

3.3. Posición, rapidez y aceleración en el MRU

Se ha visto que la posición de un cuerpo en un movimiento rectilíneo uniforme es:

$$x(t) = x_i + v_i t \tag{3.12}$$

La velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme es constante.

$$v(t) = v_i \tag{3.13}$$

Y finalmente, como la velocidad es constante, la aceleración es:

$$a(t) = 0 \tag{3.14}$$

Las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14) se pueden graficar como funciones de posición, rapidez y aceleración en función del tiempo, como muestra la Figura 3.3.

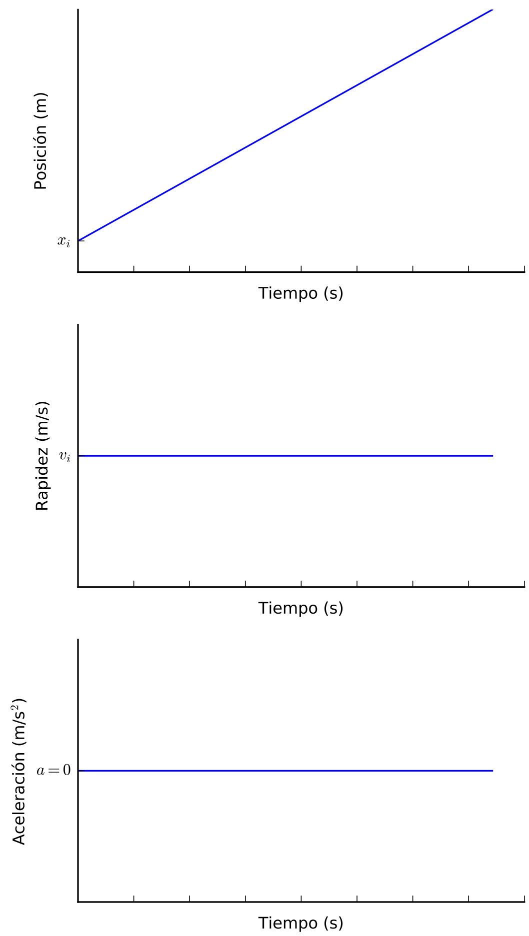

Figura 3.3: Posición, rapidez y aceleración en función del tiempo.

3.4. Posición, rapidez y aceleración en el MRUA

Se ha visto que la posición de un cuerpo en un movimiento rectilíneo uniforme acelerado (bajo una aceleración a) es una parábola de la forma:

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{3.15}$$

La velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme acelerado varía con respecto al tiempo como una función lineal.

$$v(t) = v_i + at \tag{3.16}$$

Y finalmente, como la velocidad es constante, la aceleración es:

$$a(t) = a \tag{3.17}$$

Las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) se pueden graficar como funciones de posición, rapidez y aceleración en función del tiempo, como muestra la Figura 3.4.

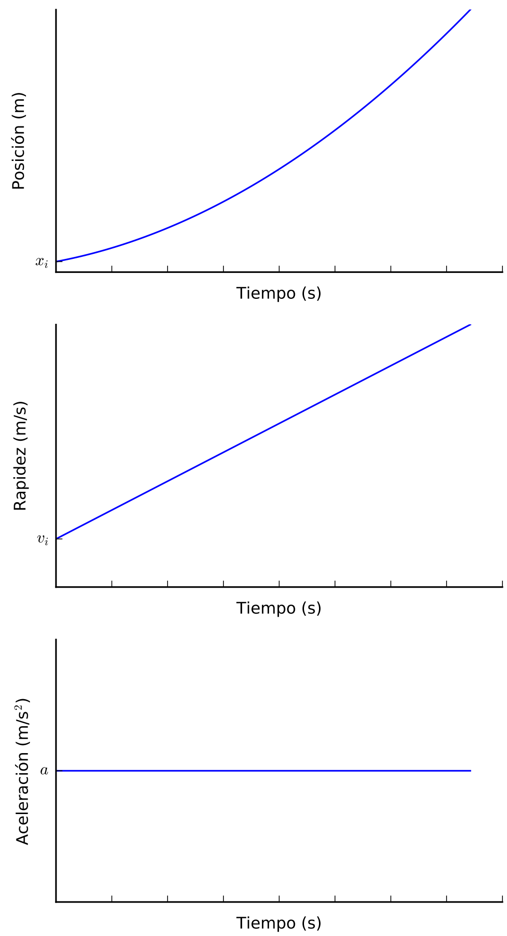

Figura 3.4: Posición, rapidez y aceleración en función del tiempo.

Capítulo 4

Fuerza y movimiento

4.1. Fuerzas e interacciones

A menudo escuchamos cotidianamente el concepto de fuerza como un empujón o tirón. Sin embargo, este concepto de fuerza esta acotado sólo al contacto entre dos cuerpos, por otro lado, ¿has visto como un imán mueve una barra de hierro y aún así no hay contacto? Para dar cabida a este fenómeno diremos que:

Definición 4.1. *Una fuerza es la interacción entre dos o más cuerpos.* *Fuerza*

Bajo esta definición, surgen dos categorías de fuerzas: fuerzas de contacto y fuerzas de largo alcance. Así, de este modo, un empujón es una fuerza de contacto y la fuerza que ejerce el imán sobre la barra de hierro es una fuerza de largo alcance. Diremos entonces que la fuerza (ya sea de contacto o largo alcance) que ejerce un cuerpo A sobre otro cuerpo B es:

$$\vec{F}_{A\to B} \tag{4.1}$$

Por otro lado, la fuerza que ejerce B sobre A es:

$$\vec{F}_{B\to A} \tag{4.2}$$

Aunque parezca un poco complicado, es importante diferenciar cual es el cuerpo de estudio y las fuerzas que se ejercen sobre este cuerpo, es por esto que siempre hablaremos de la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro.

Si sobre un cuerpo A interactúan n cuerpos, con n entero, es posible obtener una superposición de estas fuerzas en una sola (fuerza neta), esto es:

$$\vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A} + \cdots + \vec{F}_{n\to A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\to A} = \vec{F}_{neta} \tag{4.3}$$

Esta expresión se puede extender componente a componente. Por ejemplo en dos dimensiones:

$$\sum F_x = F_x^{neta} \qquad \sum F_y = F_y^{neta} \tag{4.4}$$

4.2. Leyes de Newton

Con los convenios de notación vistos en la sección anterior, ahora es posible enunciar las Leyes de Newton:

Definición 4.2. ***Primera Ley de Newton.*** *Un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante.*

En términos de las ecuaciones (4.3) y (4.4) esto es:

$$\vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A} + \cdots + \vec{F}_{n\to A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\to A} = \vec{F}_{neta} = \vec{0} \tag{4.5}$$

$$\sum F_x = F_x^{neta} = 0 \qquad \sum F_y = F_y^{neta} = 0 \tag{4.6}$$

Otra definición de la primera Ley de Newton dice que: *en ausencia de fuerzas externas, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa su movimiento a velocidad constante.* Esta definición dice algo muy distinto a la primera, porque se refiere a la ausencia de fuerzas externas sobre un cuerpo y es más precisa para definir la fuerza como la variación del *momento*[2] con respecto al tiempo.

Definición 4.3. ***Segunda Ley de Newton.*** *Cuando el estado fundamental de un objeto de masa m (v constante) se ve afectado, el objeto esta en presencia de una o más fuerzas externas que es proporcional a la masa y aceleración del cuerpo.*

En términos matemáticos, esta ley se puede expresar como:

$$\sum \vec{F}_{neta} = m\vec{a} \tag{4.7}$$

[2] El momento se define como la cantidad de movimiento que tiene un cuerpo de masa m y velocidad $\vec{v}$. Matemáticamente se expresa como $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\sum F_x = F_x^{neta} = ma_x \qquad \sum F_y = F_y^{neta} = ma_y \tag{4.8}$$

Una definición alternativa a la segunda Ley de Newton dice que: *la fuerza es la variación del momento con respecto al tiempo*. Esta definición permite comprender de mejor manera el concepto de fuerza, por que decir que la fuerza es simplemente ma da la impresión que este concepto es solamente un invento. En la expresión (4.9), se tiene que cuando la masa es constante, la variación del momento mv es ma y la definición de fuerza aparece en forma natural.

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = ma = F \tag{4.9}$$

Definición 4.4. ***Tercera Ley de Newton.*** *Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce la misma fuerza en magnitud pero en sentido contrario.*

Matemáticamente, esta definición se puede expresar como:

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \tag{4.10}$$

Esta Ley es comúnmente llamada Ley de acción y reacción, porque dice que toda interacción tiene su par acción y reacción. Para comprender el significado de esta Ley, ilustraremos la siguiente situación.

Paradoja del burro: Hubo una vez un burro que en sus ratos de descanso le gustaba estudiar Física. Cuando aprobó los temas de mecánica quiso aprovechar sus conocimientos para flojear. Entonces dijo a su dueño: -Es una tontería que me amarre a su carro para tirar de él, ¿acaso no conoce la Tercera Ley de Newton? Y qué dice la Tercera Ley de Newton -contestó el dueño-. Y el astuto asno expresó adoptando una actitud de gran conocedor - La Tercera Ley de Newton es la que nos habla de las fuerzas de acción y reacción, y dice así:

"A toda acción se opone siempre una reacción igual, es decir, que las acciones mutuas de dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en sentidos contrarios"

De tal manera –continuó el mañoso borrico- que si yo tiro del carro con una determinada fuerza, este tirará de mí con una fuerza igual, pero de sentido contrario. Así que para que me esfuerzo, si de todas formas la Tercera Ley de Newton me impide mover el carro.

¿Tiene razón el burro?

4.3. Algunas fuerzas

4.3.1. Fuerza de gravedad $\vec{F}_g$

La fuerza de gravedad es la fuerza que nos mantiene los pies es la Tierra, se denota comúnmente como $\vec{F}g$ y es proporcional a la masa m de un cuerpo y la *aceleración de gravedad* $\vec{g}$ cuya magnitud es de $g = 9,8m/s^2$.

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{4.11}$$

La fuerza de gravedad apunta siempre hacia abajo y dependiendo de la notación de signos, será puesto como $+g$ o $-g$ en la resolución de problemas.

4.3.2. Fuerza normal $\vec{N}$

La fuerza normal, denotada como $\vec{N}$ es una fuerza **perpendicular** a la superficie en la cual reposa un cuerpo. Esta es la fuerza que nos mantiene de pie, o la que nos afirma cuando nos apoyamos en una superficie.

4.3.3. Fuerza de roce estático y cinético $\vec{f}_r$

La fuerza de roce estático, es una fuerza **paralela** a la superficie y proporcional a la magnitud de la fuerza normal y una constante llamada coeficiente de roce estático μ que es una propiedad de cada superficie. La magnitud de esta fuerza es:

$$f_r \leq \mu N \tag{4.12}$$

Esta es la fuerza que hace que los cuerpos que reposan sobre una superficie inclinada no caigan, como por ejemplo los automóviles al estacionarse a la subida de un cerro.

Si un cuerpo esta en movimiento sobre una superficie con roce, este cuerpo siente la fuerza de roce cinético, que siempre se opone al movimiento.

Capítulo 5

Trabajo y energía

5.1. Trabajo de una fuerza constante

Si se considera una fuerza constante $\vec{F}$ y el desplazamiento de un cuerpo $\Delta\vec{r}$, entonces el trabajo ejercido por esta fuerza es de acuerdo a la siguiente definición:

Trabajo

Definición 5.1. *El trabajo W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento del cuerpo.*

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \tag{5.1}$$

Esta definición relaciona las componentes de una fuerza y las componentes del desplazamiento de cuerpo. Teniendo en mente la definición del producto escalar, ¿qué se puede decir sobre el trabajo? El trabajo no es más que la proyección de una fuerza sobre la dirección del desplazamiento. En el sistema SI el trabajo se mide en Joule, se abrevia J y sus unidades son Nm.

Si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas constantes, entonces el trabajo neto que ejercen todas estas fuerzas es:

$$W_{neto} = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1. *Un hombre que limpia un piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50$ N en un ángulo de 30^o con la horizontal. Calcule el trabajo consumido por la fuerza sobre la aspiradora a medida que ésta se desplaza 3 m hacia la derecha.*

Ejemplo 5.2. *Una partícula móvil en el plano xy se somete a un desplazamiento conocido por $\Delta\vec{r} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$ m cuando una fuerza constante $\vec{F} = (4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$ N actúa sobre la partícula. Calcule el trabajo consumido por la fuerza $\vec{F}$*

5.2. Energía cinética

Cuando un cuerpo tiene un movimiento a velocidad constante, es correcto decir que $W_{neto} = 0$, es decir, que este cuerpo no pierde ni gana energía, pero que $W_{neto} = 0$ no quiere decir que este cuerpo no tenga energía. Todo cuerpo que tenga movimiento tiene **energía cinética**

Energía cinética

Definición 5.2. *La energía cinética de un cuerpo con velocidad v y masa m se define como:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.3}$$

Si el cuerpo en estudio esta sometido a alguna fuerza neta constante no nula y su velocidad varía entonces podemos definir el cambio de la energía cinética como:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{5.4}$$

El trabajo consumido por la fuerza neta W_{neta}, se puede relacionar con el cambio en la energía cinética mediante el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *El trabajo efectuado por una fuerza neta sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo.*

$$\boxed{W_{neto} = \Delta K} \tag{5.5}$$

Ejemplo 5.3. *Un bloque de* 6 *kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de* 12 *N. Encuentre la rapidez del bloque después que se ha movido* 3 *m.*

5.3. Energía potencial

Si consideramos el trabajo que ejerce la fuerza de gravedad sobre un cuerpo de masa m que cae desde desde una altura inicial y_1 hasta una altura y_2, podemos escribir:

$$W_g = F\Delta r = -mg(y_2 - y_1) = mg(y_1 - y_2) \tag{5.6}$$

Si consideramos que el cuerpo esta en una altura y entonces podemos escribir que:

Definición 5.3. *Si un cuerpo de masa m y altura y esta sometido a la fuerza gravitacional, entonces su energía potencial es:*

$$U_g = mgy \tag{5.7}$$

Energía potencial

Entonces, es posible definir el cambio de la energía potencial de la misma situación como :

$$\Delta U_g = U_{g2} - U_{g1} = mg(y_2 - y_1) \tag{5.8}$$

Entonces la expresión para el trabajo W_g en (5.6) puede ser escrita en función del cambio de la energía potencial como:

$$\boxed{W_g = -\Delta U_g} \tag{5.9}$$

Este resultado es muy interesante, porque dentro de esta expresión se esconde un concepto importante dentro de la física: **las fuerzas conservativas**. Una fuerza conservativa es un tipo de fuerza tal que el trabajo de esta fuerza no depende de la trayectoria del cuerpo, solo depende de la variación entre los puntos final e inicial. Otro ejemplo de este tipo de fuerzas es el potencial elástico.

5.4. Energía potencial elástica

5.4.1. Ley de Hooke

Si se considera una masa m y unida a un resorte de constante k como se muestra en la Figura 5.1, la magnitud de fuerza que ejerce el resorte sobre la masa es:

$$F = -k\Delta x \tag{5.10}$$

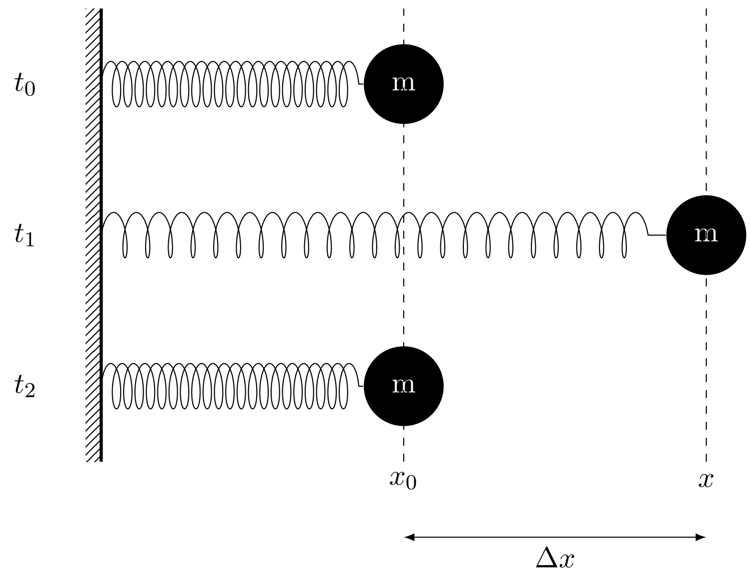

Figura 5.1: Movimiento de un resorte. El resorte esta en su posición inicial en el tiempo t_0 y vuelve a su posición inicial en el tiempo t_2

Si consideramos que la posición de equilibrio x_0 coincide con el origen del sistema, podemos escribir:

Ley de Hooke

$$\boxed{F = -kx} \tag{5.11}$$

5.4.2. Energía potencial elástica

El resorte al comprimirse, almacena energía y cuando vuelve a su posición inicial la libera en forma de movimiento. El trabajo que ejerce el resorte sobre la masa m es en una trayectoria $i \rightarrow f$:

$$W_e = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \tag{5.12}$$

De esta expresión, es posible definir entonces que la energía potencial elástica es:

Energía potencial elástica

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.13}$$

El cambio, entonces de una energía potencial elástica, desde un punto inicial hasta un punto final es

$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \tag{5.14}$$

Combinando las expresiones (5.12) y (5.14), es posible escribir el trabajo realizado por un resorte como:

$$\boxed{W_e = -\Delta U_e} \tag{5.15}$$

Y de esta forma es evidente ver que el trabajo que ejerce un resorte sobre un cuerpo no depende la trayectoria que haya seguido el cuerpo, solo depende menos el cambio en su energía potencial elástica entre los puntos inicial y final. En otras palabras, al igual que la fuerza gravitacional, la fuerza que ejerce un resorte es una fuerza conservativa.

Ejemplo 5.4. *Un resorte de constante $k = 2$ N/m esta atado a una masa $m = 5$ kg. Si el resorte se expande 0,5 m encuentre a) la fuerza del resorte y b) El trabajo que ejerce el resorte.*

5.5. Crítica al concepto de energía y trabajo

Hasta este punto, se ha visto el concepto de energía cinética, energía potencial y energía potencial elástica. En cada uno de estos tres conceptos, se esconde un idea muy fundamental en la naturaleza y que lleva directamente a la ley de conservación de la energía, esta es la idea de: almacenar energía. La expresión para la energía cinética y la energía potencial, tienen ambas un término de masa m, entonces se dice que el cuerpo de masa m **almacena** energía cinética y energía potencial respectivamente. Sin embargo, para la energía potencial elástica, no hay término que relacione la masa al resorte, entonces, ¿quién almacena la energía potencial elástica? La respuesta es fácil y se encuentra en el término de constante del resorte k y así se deduce que es el resorte quien almacena la energía potencial elástica.

Por otro lado, de la ecuación (5.5) que relaciona el trabajo ejercido por una fuerza neta y la variación de la energía cinética, dice que si:

- Si $W_{neto} = 0$ entonces $\Delta K = 0$, se **conserva la energía cinética** por que en efecto, la energía no varía.
- Si $W_{neto} > 0$ es claro evidenciar que $\Delta K > 0$, entonces la energía cinética no se conserva y el cuerpo gana energía (en forma de energía cinética).
- Si $W_{neto} < 0$ es claro evidenciar que $\Delta K < 0$, entonces la energía cinética no se conserva y el cuerpo pierde energía (en forma de energía cinética).

Como estudio, el estudiante puede pensar que pasa en los casos de energía potencial y energía potencial elástica. Una generalización de este razonamiento en base a las tres fuerzas conservativas se conoce como la ley de conservación de la energía mecánica.

5.6. Conservación de la energía potencial

Consideremos el caso de un cuerpo de masa m que está a una altura h desde el suelo, entonces su energía potencial es:

$$U = mgh \tag{5.16}$$

Ejercicio 5.1. *Si el cuerpo se deja caer desde la altura h hasta el suelo calcule el trabajo W_{neto}. Para esto, identifique primero cual es la fuerza neta que se ejerce sobre el cuerpo (aplique la segunda ley de Newton). Demuestre que:*

$$W_{neto} = mgh \tag{5.17}$$

Este resultado, a) ¿está de acuerdo con la expresión (5.9)? b)¿Se agrega o se quita energía al sistema[3]? Utilice la expresión (5.5) y demuestre que:

$$v = \sqrt{2gh} \tag{5.18}$$

c)¿Puede responder con mayor detalle la pregunta b)? y c) ¿cuál es la importancia de este resultado?

Este ejercicio representa un resultado importante, si llamamos a la cantidad E_{mec} a todas las energías del sistema podemos escribir:

$$E_{mec} = K + U_g + U_p \tag{5.19}$$

entonces, podemos decir que si la energía de un sistema se conserva, entonces su energía mecánica también, esto es:

$$\Delta E_{mec} = 0 \tag{5.20}$$

Ejercicio 5.2. *Reproduzca el Ejercicio 5.1 sabiendo que $\Delta E_{mec} = 0$. ¿Obtiene el mismo resultado?*

[3]Cuando se habla de sistema, se refiere al cuerpo o los cuerpos en estudio, para este caso particular, se entiende que el sistema es el cuerpo de masa m sometido a la fuerza gravitacional.