

Apuntes de Física Electrónica

Nicolás Pérez Julve

Versión 5 de septiembre de 2017

Prefacio

Este apunte de estudio fue hecho con el propósito de ayudar a estudiantes del curso de Física Electrónica de la Universidad Santo Tomás. Cualquier sugerencia o error puede ser advertido a nicolasperezjulve@gmail.com.

IMPORTANTE: Este apunte fue diseñado para ser impreso a doble cara, es por esta razón que antes y después del prefacio hay una página en blanco.

“La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡Qué importa! Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo. Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste.”

[Marie Curie](#)

Índice general

1. Magnitudes Físicas, Unidades y Mediciones	1
1.1. Magnitudes Físicas	1
1.2. Sistema Internacional de Unidades (SI)	2
1.2.1. Reglas para el uso del SI	3
1.3. Cambio de Unidades al SI	4
1.3.1. Cambio de unidades de magnitudes fundamentales	4
1.3.2. Cambio de unidades de magnitudes derivadas	5
1.4. Mediciones	5
1.4.1. Precisión y exactitud	5
1.4.2. Tipos de errores	6
1.4.3. Cifras significativas	6
1.4.4. Aproximación y redondeo	7
1.4.5. Notación científica	7
1.4.6. Orden de magnitud	8
1.4.7. Mediciones análogas	8
1.4.8. Mediciones digitales	9
2. Vectores	10
2.1. Vectores	10
2.2. Componentes cartesianas de un vector	10
2.3. Operaciones con vectores en el plano cartesiano	11
2.3.1. Suma de vectores	11
2.3.2. Producto escalar	12
2.3.3. Producto vectorial	13
2.3.4. Vectores unitarios	14
3. Cinemática	16
3.1. Desplazamiento, velocidad y aceleración	16
3.1.1. Ecuación de movimiento	17

Capítulo 1

Magnitudes Físicas, Unidades y Mediciones

1.1. Magnitudes Físicas

En física, existen **magnitudes fundamentales**¹ de las cuales se pueden definir otras magnitudes.

Definición 1.1. *Las **magnitudes fundamentales** son un conjunto de magnitudes tal que ninguna magnitud puede ser expresada en función de otra **magnitud fundamental**.* **Magnitud fundamental**

Ejemplo 1.1. ***Magnitudes fundamentales** son: masa, longitud, tiempo, temperatura entre otras.*

Por otro lado existen **magnitudes derivadas**¹ las cuales se forman combinando las **magnitudes fundamentales**.

Definición 1.2. *Las **Magnitudes derivadas** son todas aquellas que pueden ser expresadas en función de otras magnitudes.* **Magnitud derivada**

Ejemplo 1.2. ***Magnitudes derivadas** son: rapidez, aceleración, presión, entre otras.*

La **rapidez** es una **magnitud derivada** por dos **magnitudes fundamentales** y la construcción de esta cantidad es la “división” de una **longitud** determinada sobre un **tiempo** determinado (más adelante se dará una definición exacta del concepto de **rapidez**). Pero, ¿qué es exactamente la **longitud** y el **tiempo**? Dado que estas magnitudes son fundamentales, no es posible comprenderlas como la combinación de otras magnitudes, por esta razón, estas magnitudes son deducidas mediante una **definición operacional**

¹JCGM 200:2008(E/F), International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM) :4

Definición operacional **Definición 1.3.** Una **definición operacional**² constituye el conjunto de procedimientos que describe las actividades que un observador debe realizar para recibir las impresiones sensoriales (sonidos, impresiones visuales o táctiles, etc.), que indican la existencia de un concepto teórico en mayor o menor grado. En otras palabras, especifica qué actividades u operaciones deben realizarse para medir una variable.

De esta forma la masa, la longitud y el tiempo son magnitudes que pueden ser descritas mediante una **definición operacional**.

Masa **Definición 1.4.** El estándar de masa, el **kilogramo** (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en la oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París.

Longitud **Definición 1.5.** El estándar de longitud, el **metro** (que se abrevia en m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ segundos.

Tiempo **Definición 1.6.** El estándar de tiempo, el **segundo** (que se abrevia como s) se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia, el átomo de cesio sufre una transición entre dichos estados. Un **segundo** se define como el tiempo que tardan $9\,192\,631\,770$ oscilaciones de la radiación emitida producto de la transición.

Con estas tres magnitudes físicas, es posible construir los fundamentos de la Mecánica Newtoniana, como se verá en los próximos capítulos.

1.2. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Se ha visto que las tres magnitudes fundamentales expuestas en la sección anterior, presentan estándares para su medición. Estos estándares corresponden a la unidad de medida para cada magnitud fundamental. A lo largo de la historia de la humanidad, el ser humano siempre ha tenido la necesidad de cuantificar objetos, distancias entre otras cosas, inventando distintas unidades de medidas, como el largo de un pie, de un antebrazo etc. Durante mucho tiempo, la diversidad de unidades de medida provocó incertidumbre respecto a las mediciones que se hacían.

Las mediciones exactas y confiables requieren unidades inmutables que los observadores puedan volver a utilizar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros por todo el mundo se denomina comúnmente “sistema métrico.” aunque, desde 1960, su nombre oficial es **Sistema Internacional** o **SI**. En las Tablas (1.1) y (1.2), se muestran algunas unidades.

²Extracto de <http://www.tecnicas-de-estudio.org/investigacion/investigacion36.htm>

Tabla 1.1: Unidades de algunas magnitudes fundamentales en el SI

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Cantidad de sustancia	mol	mol

Tabla 1.2: Unidades de algunas magnitudes derivadas en el SI

Magnitud	Unidad	Símbolo
Velocidad lineal	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad de masa	kilogramo sobre metro cúbico	kg/m^3
Velocidad lineal	metro sobre segundo	m/s
Frecuencia	hertz	Hz
Energía	joule	J

El SI también admite prefijos para las unidades de medida, con el fin de expresar las cantidades de una forma mas compacta. En la Tabla (1.3) se muestran los prefijos aceptados en el SI.

Tabla 1.3: Prefijos del SI

Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo	Factor
exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
penta	P	10^{15}	centi	c	10^{-1}
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^9	micro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	pico	p	10^{-12}
hecto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deca	da	10^1	atto	a	10^{-18}

Con las unidades de medida y los prefijos del SI, se puede expresar **todas** las cantidades medibles.

1.2.1. Reglas para el uso del SI

1. No se colocarán puntos luego de los símbolos de las unidades SI, sus múltiplos o submúltiplos. **Ejemplo:** kg , dm , m .
2. Cuando sea necesario referirse a una unidad, se recomienda escribir el nombre completo de una unidad, salvo casos en los cuales no exista riesgo de confusión al

escribir únicamente el símbolo.

3. El símbolo de una unidad será el mismo para el singular como el plural. **Ejemplo: un kilogramo 1kg - cinco kilogramos 5 kg.**
4. No se acepta utilización de abreviaturas para designar las unidades SI. Existe símbolos no abreviaturas. **Ejemplo: kgs no corresponde a kilogramos, lo correcto es: kg.**
5. Cuando se deba escribir (o pronunciar) el plural del nombre de una unidad SI, se usarán las reglas de la Gramática Española. **Ejemplo: (singular) metro - (plural) metros, (singular) mol - (plural) moles.**
6. Se usarán prefijos SI y sus símbolos para formar respectivamente los nombres y los símbolos de los múltiplos y submúltiplos de las unidades SI. **Ejemplo: centímetro = cm.**
7. No deberán combinarse nombres y símbolos al expresar el nombre de una unidad derivada. **Ejemplo: metro/s , lo correcto es: m/s o metro/segundo.**

1.3. Cambio de Unidades al SI

1.3.1. Cambio de unidades de magnitudes fundamentales

Si se quiere transformar las magnitudes de masa, longitud y tiempo se puede proseguir como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3. *Si se quiere transformar la cantidad de 100 g a kg se prosigue como sigue (tomando en cuenta que 1 kg son 1000 g):*

$$\cancel{100g} \xrightarrow{1} \frac{1kg}{\cancel{1000g}} \xrightarrow{10} = \frac{1kg}{10} = 0,1kg \quad (1.1)$$

La idea de este procedimiento se basa utilizar la razón entre kilogramo y gramo, como sabes 1kg : 1000g.

Ejemplo 1.4. *Transformar la cantidad de 100 minutos a segundos. Sabemos que 1 minuto corresponde a 60 segundos, cuya razón se escribe 1 min : 60 s o bien 60 s : 1 min. La transformación se hace como:*

$$\cancel{100min} \xrightarrow{100} \frac{60s}{\cancel{1min}} \xrightarrow{1} = 6000s \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.5. Transforme la cantidad de 1 centímetro a metro. Para realizar esta transformación, sabemos que $1\text{ m} : 100\text{ cm}$.

$$1\cancel{\text{cm}} \xrightarrow{1} \frac{1\text{ m}}{100\cancel{\text{cm}}} \xrightarrow{100} = \frac{1\text{ m}}{100} = 0,01\text{ m} \quad (1.3)$$

Ejercicio 1.1. Transforme 1 hora a SI.

1.3.2. Cambio de unidades de magnitudes derivadas

Para el cambio de magnitudes derivadas, se utiliza el mismo procedimiento agregando la razón de cualquier otra magnitud en cuestión.

Ejemplo 1.6. Transforme 36 km/h al SI. Para este caso sabemos que $1000\text{ m} : 1\text{ km}$ y $1\text{ h} : 3600\text{ s}$. La operación es:

$$36 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \frac{1000\text{ m}}{1\cancel{\text{km}}} \frac{1\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.7. Transforme la densidad del agua ($1\text{ g} / \text{cm}^3$). Para realizar esta operación es necesario comprender que hay que elevar una cantidad al cuadrado, como muestra la operación:

$$1 \frac{\cancel{\text{g}}}{\text{cm}^3} \left(\frac{100\cancel{\text{cm}}}{1\text{ m}} \right)^3 \frac{1\text{ kg}}{1000\cancel{\text{g}}} \xrightarrow{1000} = \frac{1}{1000} \frac{\text{kg}}{\cancel{\text{cm}}^3} \frac{100^3\cancel{\text{cm}}^3}{\text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1.5)$$

Ejercicio 1.2. Transforme 20 cm^2 a SI.

Ejercicio 1.3. Transforme 1000 cm^3 a SI.

1.4. Mediciones

1.4.1. Precisión y exactitud

Definición 1.7. Se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad o extensión en lecturas de un instrumento. **Precisión**

Definición 1.8. Se refiere a la aproximación de una medida al valor verdadero. **Exactitud**

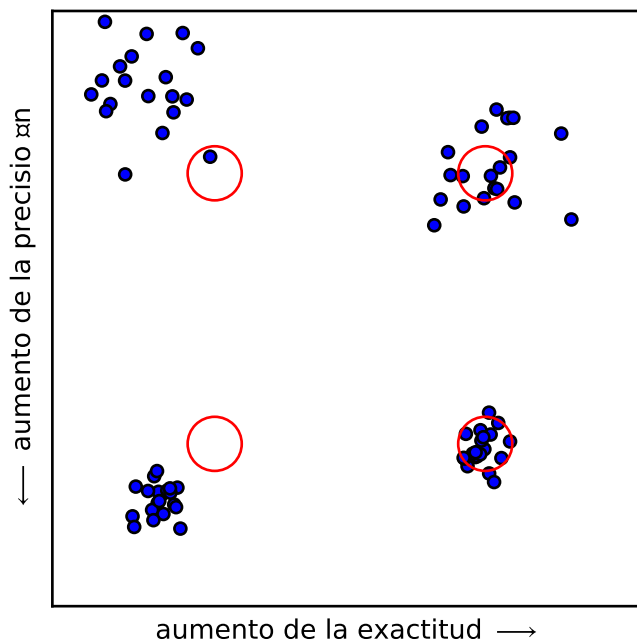


Figura 1.1: Exactitud vs precisión

1.4.2. Tipos de errores

Definición 1.9 (Error aleatorio). *Al repetir una medida varias veces, se obtienen diferentes resultados que están relacionados a la precisión de los datos obtenidos. Esta dispersión se debe a la presencia del error aleatorio.*

Definición 1.10 (Error sistemático). *Este tipo de error está relacionado con la exactitud del resultado, a mayor exactitud menor es el error sistemático. Las fuentes de este tipo de error podrían ser la mala calibración del instrumento de medición o un método que siempre sobre estime o subestime un valor medido.*

Definición 1.11 (Equivocación). *Este tipo de error es cuando en el conjunto de medidas se encuentran algunos datos malos y no tienen relación con el experimento en sí. Un ejemplo de equivocación podría ser un error de escritura al transferir los datos.*

1.4.3. Cifras significativas

El número de cifras significativas de un número, lo obtenemos mirando los dígitos de dicho número de izquierda a derecha y comenzando a contar desde el primer dígito distinto de cero hasta el último dígito, sea o no cero. La mencionada cantidad de dígitos nos entrega el número de cifras significativas.

Algunos ejemplos:

1	1 cifra significativa
25	2 cifras significativas
10 000	5 cifras significativas
0,00045	2 cifras significativas

Ejercicio 1.4. *¿Cuántas cifras significativas tienen los números 10,00078 y 00,004506?*

1.4.4. Aproximación y redondeo

Si queremos expresar el número $\pi = 3,1415\dots$ con n cifras significativas, debemos desechar todas las cifras que se encuentren a la derecha del n -ésimo lugar

Reglas

1. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n + 1)$ es mayor que 5, se le agrega una cantidad a la cifra que se encuentra en el lugar n -ésimo.
2. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n + 1)$ es menor que 5, dejamos la cifra n -ésima inalterable.
3. Si la cifra que se encuentra en el lugar $(n + 1)$ es igual a 5, adoptaremos el siguiente criterio:
 - Si la n -ésima cifra es impar, se le agrega una unidad.
 - Si la n -ésima cifra es par, la dejamos inalterable

Este último criterio es totalmente arbitrario y para asegurarnos que realmente es al azar el que la cifra n -ésima aumente o quede inalterable, debemos cerciorarnos que la posibilidad que sea par es la misma que sea impar. Para estos efectos consideramos al cero como número par.

Para expresar el resultado de una operación con números de distintas cifras significativas, se utiliza la siguiente regla:

1. **Suma y sustracción:** el resultado se expresa con tantos decimales como el número de menor cantidad de decimales que participa de la operación.
2. **Multiplicación y división:** el resultado se expresa con tantas cifras significativas como la magnitud que tenga menor número de cifras significativas.

1.4.5. Notación científica

La notación científica consiste en expresar un número entero o decimal como potencia de diez. Así un número cualquiera, puede ser expresado como $a \times 10^b$, donde la **parte entera** de a es entre 1 y 9.

Ejemplo 1.8. Expresar el número 24,54 en notación científica.

Solución:

$$24,54 = 2,454 \times 10^1$$

Ejemplo 1.9. Expresar el número 0,00576 en notación científica.

Solución:

$$0,00576 = 5,76 \times 10^{-3}$$

Si se quiere operar con números con distintos números de cifras significativas, el uso de la notación científica puede ser de ayuda.

Ejemplo 1.10. Si se quiere multiplicar 200 por 1, notamos que el primer número tiene tres cifras significativas y el segundo tiene una. Sabemos que el resultado es 200, sin embargo, el resultado debe expresarse con una cifra significativa, así que el resultado final es 2×10^2 , este resultado tiene una cifra significativa (la potencia no cuenta como cifra significativa).

1.4.6. Orden de magnitud

El orden de magnitud es la potencia de diez más cercana a algún número.

Ejemplo 1.11. Algunos ejemplos son:

1. 7,2 es de orden 10^1
2. 4,3 es de orden 10^0
3. 150,4 es de orden 10^2

1.4.7. Mediciones análogas

Para comprender como se hace una correcta medición análoga, ejemplificaremos el correcto procedimiento de una medición. Supongamos que tenemos una regla milimétrica como muestra la Figura 1.2.



Figura 1.2: Regla milimétrica. La sensibilidad de esta regla es de 1 mm.

Definición 1.12. La **sensibilidad** de un instrumento, es la menor medida que puede tomar.

Para el caso de la regla milimétrica, su sensibilidad es de un 1 mm.

Definición 1.13. El **error** asociado a la medición con un instrumento, es la mitad de su sensibilidad, para el caso de instrumentos análogos y la última cifra significativa (error informado por el fabricante) para el caso de un instrumento digital.

Ejemplo 1.12. Como la sensibilidad de la regla milimétrica es de 1 mm su error asociado es de 0,5 mm. Entonces al hacer una medición con la regla milimétrica nos da un valor de 14 mm, lo correcto es hacer una **estimación** de la última cifra significativa, por ejemplo una persona puede medir 14,3 mm otra 14,5 mm entre otras, pero eso no es importante, por que sabemos que nuestra medición es válida en un rango de $\pm 0,5$ mm. Así la medición correcta es de:

$$[14,3 \pm 0,5] \text{ mm}$$

1.4.8. Mediciones digitales

En una medición digital, la sensibilidad del instrumento es la última cifra significativa que da el instrumento y su error es informado por el fabricante del instrumento.

Ejemplo 1.13. En la Figura 1.3 se muestra la medición de un instrumento digital que especifica el error asociado a la medición.

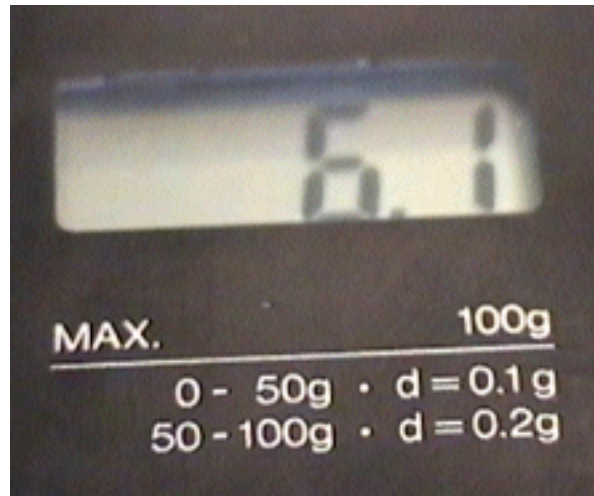


Figura 1.3: Balanza digital. Su sensibilidad es de 0,1 g

De esta forma, la medición es:

$$[6,1 \pm 0,1] \text{ g}$$

Capítulo 2

Vectores

2.1. Vectores

Escalar **Definición 2.1.** Un **escalar** es un solo valor que no tiene indicador direccional y que representa una cantidad.

Vector **Definición 2.2.** Un **vector** es un arreglo de números (que puede ser expresado en 1,2,3 ... dimensiones) llamadas “componentes de vectores” que se combinan con indicadores direccionales (bases) para formar una cantidad vectorial (magnitud, dirección y sentido).

2.2. Componentes cartesianas de un vector

Para hablar de un vector, es necesario designar un sistema coordenado del cual podamos identificar los indicadores direcciones y obtener de un vector cantidades como sus componentes, ángulo sobre el eje x y la magnitud. En la Figura 2.1 se muestra un vector sobre el plano cartesiano.

Componente de un vector **Definición 2.3.** La **componente** de un vector, se define como la proyección del vector a lo largo de su indicador direccional.

Ejemplo 2.1. En la Figura 2.1, las componentes del vector \vec{r} son:

$$r_x = r \cos \theta$$

$$r_y = r \sin \theta$$

Magnitud de un vector **Definición 2.4.** La **magnitud** de un vector es una cantidad escalar y se define como:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (2.1)$$

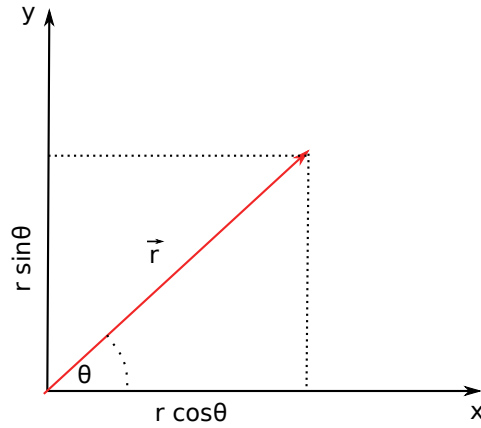


Figura 2.1: Un vector \vec{r} sobre el plano cartesiano.

Un vector en el plano cartesiano puede ser escrito en forma algebraica como una combinación de sus componentes multiplicadas por sus **bases** (indicador direccional).

$$\vec{r} = r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}} = r \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \quad (2.2)$$

Ejercicio 2.1. Compruebe que la elección de (2.2) satisface (2.1).

2.3. Operaciones con vectores en el plano cartesiano

2.3.1. Suma de vectores

Sean \vec{A} y \vec{B} definidos en el plano cartesiano. La operación $\vec{A} + \vec{B}$ define un vector resultante \vec{C} .

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

Esta operación cumple con ciertas propiedades importantes:

- Es **conmutativa**:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

- Es **asociativa**:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

La suma de vectores puede verse gráficamente mediante una construcción geométrica. Si queremos sumar dos vectores \vec{A} y \vec{B} bien definidos, el vector resultante \vec{C} es el vector que une el **origen** del primero con el final del segundo como se muestra en la Figura 2.2.

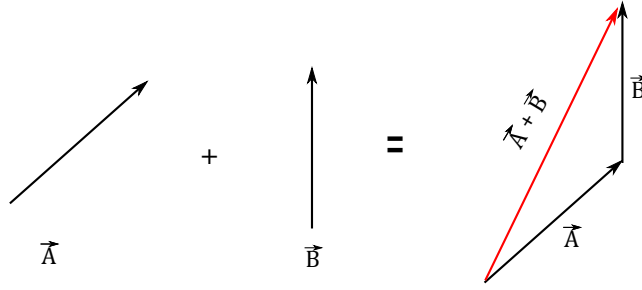


Figura 2.2: Suma gráfica de dos vectores.

Ejercicio 2.2. Verifica que la suma de \vec{A} y \vec{B} es conmutativa.

Un vector puede multiplicarse por un escalar y el resultado es otro vector en la misma **dirección**:

$$\lambda \vec{A} = \vec{C} \quad (2.3)$$

Ejercicio 2.3. Muestre como es la multiplicación de $\lambda \vec{A}$ si $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ y $\lambda = \pm 1$.

Si se consideran los vectores \vec{A} y \vec{B} de la Figura 2.2 y se quiere realizar la operación $\vec{A} - \vec{B}$, se debe pensar en esta operación como $\vec{A} + (-\vec{B})$ como muestra la Figura 2.3.

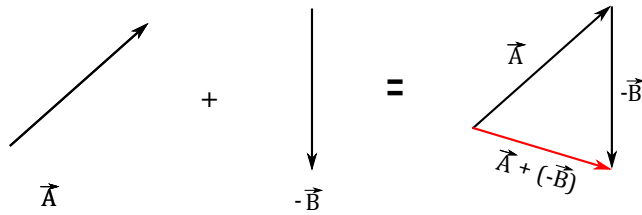


Figura 2.3: “Resta” de dos vectores.

2.3.2. Producto escalar

Sean $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ y $\vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$, se define el producto escalar (o producto punto) como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y \quad (2.4)$$

o también, el producto escalar se puede definir como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta_{AB}) \quad (2.5)$$

Como su nombre lo indica, el resultado del producto escalar es una cantidad vectorial que depende de las coordenadas de los vectores \vec{A} y \vec{B} o su magnitud y ángulo entre los vectores, como se muestra en la Figura 2.4.

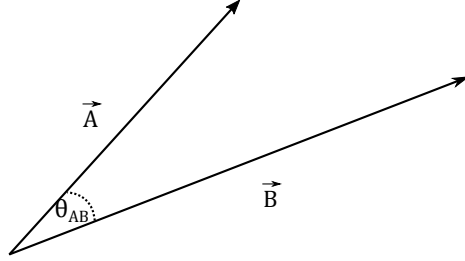


Figura 2.4: Ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} .

2.3.3. Producto vectorial

Sean $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ y $\vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$, se define la **magnitud** el producto vectorial (o producto cruz) como:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(\theta_{AB}) \quad (2.6)$$

La representación gráfica del producto vectorial se muestra en la Figura 2.5

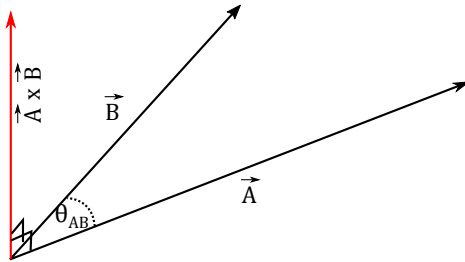


Figura 2.5: Producto vectorial entre los vectores \vec{A} y \vec{B} .

El producto vectorial es **no es conmutativo**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (2.7)$$

Es por esta razón, que el sentido del producto vectorial viene dado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la Figura 2.6

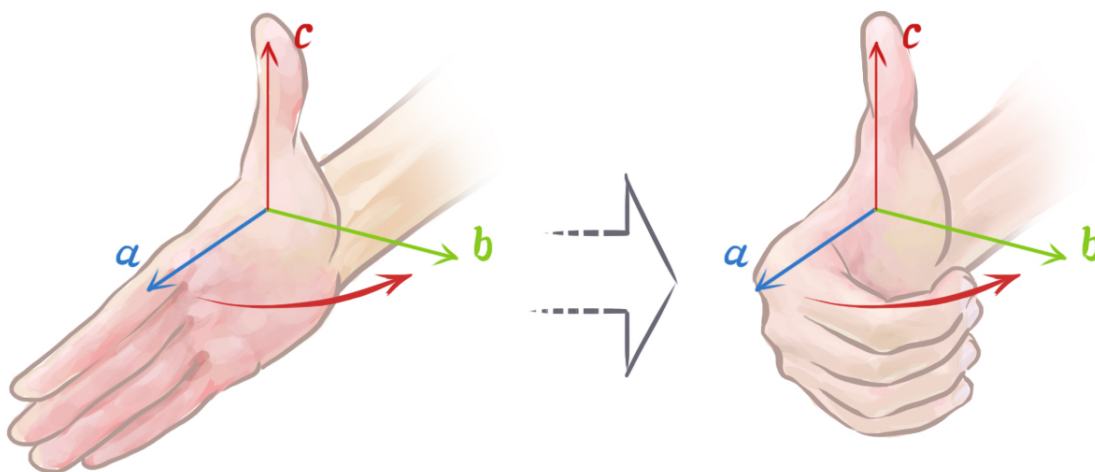


Figura 2.6: Regla de la mano derecha para el producto vectorial.

La dirección de la mano apunta hacia el primer vector de la operación $a \times b$. El vector resultante c apunta en la dirección del dedo pulgar.

2.3.4. Vectores unitarios

Se ha visto, que los vectores son definidos mediante marcadores direcciones, llamadas bases. En el plano cartesiano, las bases vienen dadas por los vectores: \hat{i} para la dirección sobre el eje x y \hat{j} para la dirección sobre el eje y .

Si aplicamos el producto vectorial entre los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} , el vector resultante corresponde a un vector unitario perpendicular a los vectores \hat{i} y \hat{j} llamado \hat{k} . Este producto vectorial forma el espacio tridimensional como muestra la Figura 2.7.

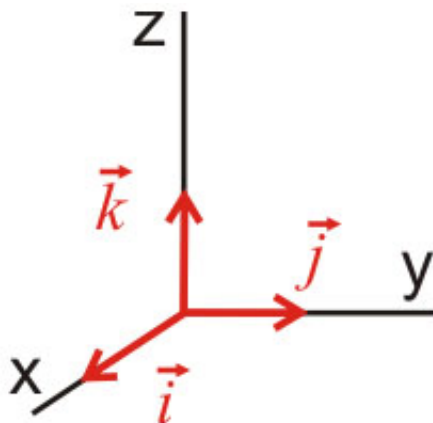


Figura 2.7: Espacio tridimensional formado por los tres vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} .

Para comprender el significado y la importancia de estos tres vectores unitarios, es necesario ver como es el producto vectorial y escalar entre estos vectores. Usando la regla de la mano derecha es posible deducir que:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \quad (2.8)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \quad (2.10)$$

Por otro lado el producto escalar de los vectores unitarios es:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \quad (2.11)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.13)$$

Ejercicio 2.4. *Compruebe estos productos.*

Los vectores unitarios son perpendiculares entre ellos y forman el espacio tridimensional.

Capítulo 3

Cinemática

3.1. Desplazamiento, velocidad y aceleración

Si consideramos que en un instante inicial t_i , un objeto se encuentra en cierta posición en el espacio, denotaremos como $\vec{r}(t_i)$ la posición de este objeto en t_0 . Si este objeto se mueve desde su posición inicial a otra posición, diremos que este objeto en un instante final t_f se encuentra en $\vec{r}(t_f)$ como muestra la Figura 3.1.

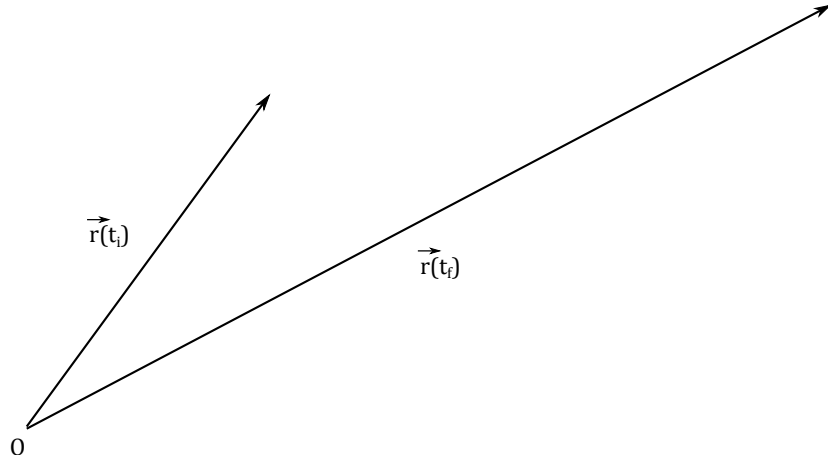


Figura 3.1: Posición de un objeto con respecto al origen O en dos instantes diferentes

Desde $\vec{r}(t_i)$ hasta $\vec{r}(t_f)$ existen muchos caminos que llevan desde su posición inicial hasta la final. Todos estos caminos se llaman **trayectorias**, existen muchas **trayectorias** que llevan desde el punto $\vec{r}(t_i)$ hasta $\vec{r}(t_f)$.

Desplazamiento **Definición 3.1.** *El desplazamiento de un punto a otro se define como:*

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i) \quad (3.1)$$

El desplazamiento es un vector que va desde la posición inicial hasta la posición final, como muestra la Figura 3.2.

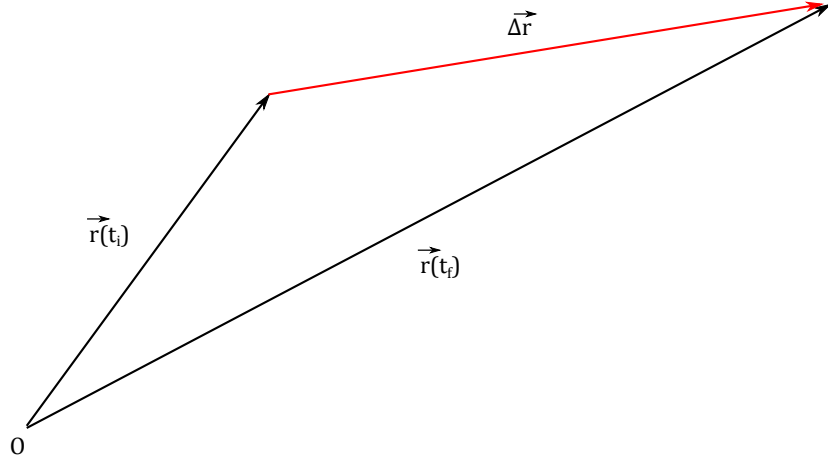


Figura 3.2: El vector desplazamiento $\Delta \vec{r}$

Si consideramos que este desplazamiento se produjo entre un intervalo de tiempo t_i y t_f podemos definir la variación de la posición con respecto al tiempo como:

Definición 3.2. *La variación de la posición con respecto al tiempo se llama **velocidad media** y se define como:* *Velocidad media*

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Si consideramos que en el movimiento la velocidad no es constante, es decir, la velocidad cambia de valor a través del tiempo en un intervalo de tiempo t_i y t_f , podemos definir la **aceleración media**.

Definición 3.3. *La variación de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración media** y se define como:* *Aceleración media*

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.3)$$

3.1.1. Ecuación de movimiento

Sin pérdida de generalidad, si consideramos el movimiento en una dimensión para un cuerpo bajo la acción de una *aceleración constante*, podemos escribir:

$$a_x = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i} \quad (3.4)$$

Si consideramos que el tiempo inicial es $t_i = 0$ y haciendo $t_f = t$ podemos escribir:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \quad (3.5)$$

y despejando v_x , tenemos:

Rapidez
instantánea

$$\boxed{v_x = v_{0x} + a_x t} \quad (3.6)$$

Hasta este punto, se ha logrado obtener una expresión para la rapidez instantánea de un cuerpo bajo *aceleración constante*. El siguiente paso es obtener una expresión para la posición del objeto a cada instante del tiempo. Para esto, podemos escribir (3.2) como:

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \quad (3.7)$$

haciendo $t_0 = 0$ esta expresión queda como:

$$v_{mx} = \frac{x - x_0}{t} \quad (3.8)$$

Por otro lado, v_{m-x} , no es más que el promedio entre una rapidez inicial y una rapidez final, esto es:

$$v_{mx} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \quad (3.9)$$

Si combinamos las ecuaciones (3.6) y (3.9), podemos escribir:

$$\begin{aligned} v_{mx} &= \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Y finalmente combinando (3.8) y (3.10) obtenemos una expresión final para la posición de un cuerpo bajo la acción de una aceleración en cualquier instante del tiempo:

Posición
instantánea

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2} \quad (3.11)$$

Esta expresión, corresponde a la ecuación de una parábola, centrada en x_0 . Este movimiento, bajo una aceleración constante, se llama **movimiento rectilíneo uniforme acelerado (MRUA)**. Si $a_x = 0$, entonces el movimiento es llamado **movimiento rectilíneo uniforme (MRU)**.