Apuntes de Física, Calor, Ondas y Óptica

Nicolás Pérez Julve

Versión 24 de agosto de 2017

Prefacio

Este apunte de estudio fue hecho con el propósito de ayudar a estudiantes de la carrera de Ingeniería en Construcción de la Facultdad de Ingeniería de la Universidad de Valparaíso. Cualquier sugerencia o error puede comunicarse a nicolasperezjulve@gmail.com.

IMPORTANTE: Este apunte fue diseñado para ser impreso a doble cara, es por esta razón que antes y después del prefacio hay una página en blanco.

"La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡Qué importa! Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo. Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste."

Marie Curie

Índice general

Capítulo 1

Oscilador Armónico

1.1. Oscilador armónico simple

Una bola de masa m unida al extremo de un resorte de constante k se mueve periódicamente desplazándose una distancia Δx desde un punto inicial x_0 como se muestra en la Figura 1.1 en ausencia de fuerzas disipativas y la gravedad.

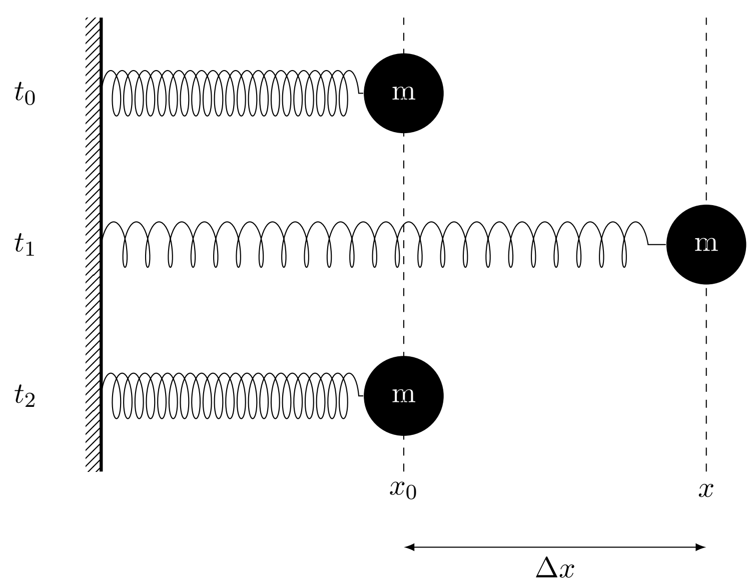

Figura 1.1: Movimiento de un resorte. El resorte esta en su posición inicial en el tiempo t_0 y vuelve a su posición inicial en el tiempo t_2

Este comportamiento, corresponde a la Ley de Hooke, que dice que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa m es proporcional a su desplazamiento y en sentido contrario.

Si $x_0 = 0$ podemos expresar esta Ley como:

Ley de Hooke

$$F = -kx \tag{1.1}$$

Ejercicio 1.1. *Dibuje el diagrama de interacciones, inventario de fuerzas y diagrama de cuerpo libre para la masa m.*

De acuerdo a la Segunda Ley de Newton, la sumatoria de todas las fuerzas ejercidas sobre la masa m es ma. Escribiendo la Ley de Hooke (1.1) en términos de la Segunda Ley de Newton, tenemos:

$$\begin{aligned} ma &= -kx \\ a &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \tag{1.2}$$

Podemos expresar esta ecuación en términos de x, dado que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt}v \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}x \end{aligned} \tag{1.3}$$

De esta forma, reemplazando (1.3) en (1.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x &= -\frac{k}{m}x \\ \frac{d^2}{dt^2}x + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definiendo $\omega^2 = k/m$, y reemplazando en (1.4) tenemos:

Oscilador Armónico

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2 x = 0} \tag{1.5}$$

Esta es una **ecuación diferencial** de segundo orden cuya solución es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{1.6}$$

Ejercicio 1.2. *Compruebe que la solución (1.6) satisface la ecuación (1.5).*

Definición 1.1. *El **periodo** (T) de una función se define como el intervalo de tiempo requerido para que una partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento.* *Periodo*

Como el periodo de la función coseno es 2π, tenemos que la diferencia del argumento de la función en (1.6) en un intervalo de tiempo de t y $t+T$, es decir el tiempo cuando complete un ciclo debe ser 2π esto se resume en:

$$[\omega(t+T)+\phi]-[\omega t+\phi]=2\pi \tag{1.7}$$

Despejando el valor de T obtenemos la relación:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}} \tag{1.8}$$ Periodo

Como el inverso del periodo es la **frecuencia** (f), podemos reescribir la relación (1.8) como:

$$\boxed{\omega=2\pi f} \tag{1.9}$$ Frecuencia angular

Así, el valor de ω adquiere un significado físico y se llama **frecuencia angular** y es una medida de que tan rápido se presentan las oscilaciones.

Ejercicio 1.3. *De la solución (1.6) grafique la posición, velocidad y aceleración del movimiento identificando A, T y la importancia de ϕ. Identifique también cuanto es la máxima velocidad y aceleración.*

Entonces, la velocidad y aceleración del oscilador armónico son respectivamente:

$$v(t)=-\omega A\sin(\omega t+\phi) \tag{1.10}$$ Velocidad

$$a(t)=-\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \tag{1.11}$$ Aceleración

En el oscilador armónico, A, ω y ϕ son constantes que son determinadas por las **condiciones iniciales**. Para el caso del oscilador armónico, que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden, es necesario tener dos condiciones iniciales para calcular las constantes.

Ejercicio 1.4. *Si las condiciones iniciales para la solución (1.6) son : $x(0)=A$ y $x'(0)=0$, ¿qué puede decir sobre ϕ? Luego si $x(0)=0$ y $x'(0)=v_i$ ¿qué puede decir sobre ϕ? y A. ¿Se ve afectado el valor de ω?. Exprese la solución para ambos casos.*

Ejercicio 1.5. *Un ave se posa sobre la rama de un árbol de masa* $0{,}5$ kg*. Usted observa que la rama comienza a oscilar con un periodo de* $2s$ *y una amplitud de* $0{,}05$ m*. Si considera que el tiempo* $t = 0$ s *corresponde a la máxima amplitud, determine la constante* k *de la rama del árbol.*

1.1.1. Energía del Oscilador Armónico

Sabemos que la energía cinética y la energía potencial elástica del resorte, se expresa como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.12}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.13}$$

Ejercicio 1.6. *Utilizando la solución del oscilador armónico (1.6) y la velocidad (1.10) encuentra la expresión para la energia cinética y potencial elástica del oscilador armónico.*

Las expresiones para energía cinética y potencial elástica del oscilador armónico se obtiene reemplazando (1.6) y (1.10) en (1.12) y (1.13) respectivamente. Las expresiones son:

Energía cinética

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \tag{1.14}$$

Energía elástica

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \tag{1.15}$$

La energía total del sistema es $E = K + U$:

Energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{1.16}$$

Ejercicio 1.7. *Compruebe la expresión (1.16)*

Ejercicio 1.8. *Utilizando (1.16) pruebe que :*

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \tag{1.17}$$

verifique si esta expresión en consistente con (1.10).

Ejercicio 1.9. *Grafique* K *y* U*.*

Ejercicio 1.10. *Utilizando barra de energía, calcule como es la energía del resorte en su máxima y mínima compresión.*

Ejercicio 1.11. *Un bola de masa* 0,5 *kg esta unido a un resorte de constante* $k = 2\ N/m$*. Si la amplitud del movimiento es de 50 cm. Calcule la energía total del sistema. Calcule la energía cinética y potencial elástica para una compresión de 25cm y compruebe que la suma es la energía total del sistema.*

1.1.2. El péndulo simple

Si consideramos un péndulo de masa m y largo L sujeto a la aceleración de gravedad, como se muestra la Figura 1.2 (se ha omitido la notación vectorial)

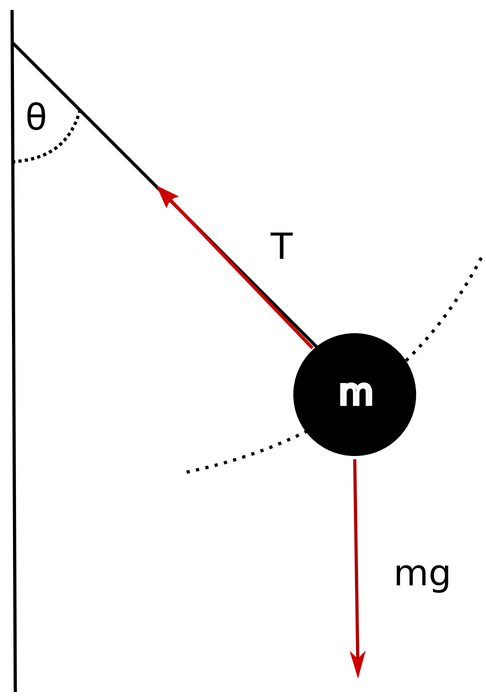

Figura 1.2: Péndulo simple

Si consideramos que la trayectoria del péndulo es un arco de circunferencia s, la ecuación de movimiento es:

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2}{dt^2}s \tag{1.18}$$

Ejercicio 1.12. *Demuestre la ecuación (1.18).* ***Pista:*** *utilice el eje y paralelo a la tensión* T*.*

El arco de circunferencia s se puede escribir como $s = L\theta$ (la demostración es una simple proporción entre el perímetro total de la circunferencia y el perímetro de un arco de cierto arco). Por otro lado para ángulos pequeños, $\theta \approx 0$, $\sin\theta \approx \theta$, así podemos escribir:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{1.19}$$

Ejercicio 1.13. *Muestre la ecuación (1.19).*

Definiendo $\omega = \sqrt{g/L}$, vemos que la frecuencia angular no depende de la masa del péndulo, solo depende del largo L de la cuerda del péndulo.

1.2. Oscilador armónico amortiguado

Como su nombre lo indica, el oscilador armónico amortiguado, es un tipo de movimiento periódico bajo la acción de **fuerzas no conservativas**. La contribución de esta fuerza no conservativa es el término $-b\dot{x}$, con b constante, que se agrega a la ecuación del oscilador armónico simple. De esta forma, la ecuación del oscilador armónico amortiguado es:

Oscilador armónico amortiguado

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}x + \frac{k}{m}x = 0} \tag{1.20}$$

Si consideramos que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la solución a esta ecuación es:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{1.21}$$

Ejercicio 1.14. *Muestre que la solución (1.21) satisface la ecuación (1.20).* ***Pista:*** *para demostrar esto, suponga que la solución es de la forma $x = Ae^{\lambda t}$.*

Ejercicio 1.15. *Grafique la solución para el caso en que: (a) $\omega_0^2 > \frac{b^2}{4m^2}$, (b) $\omega_0^2 = \frac{b^2}{4m^2}$ y (c) $\omega_0^2 < \frac{b^2}{4m^2}$*

Ejercicio 1.16. *Muestre que la variación de la energía del oscilador amortiguado es:*

$$\frac{d}{dt}E = -bv^2 \tag{1.22}$$

Ejercicio 1.17. *Un péndulo con una longitud $1{,}00$ m se libera desde un ángulo inicial de 10^o. Después de $1\,000$ s, su amplitud se reduce por fricción a $5{,}50^o$. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?*

1.3. Oscilador armónico forzado

Si ahora, al oscilador armónico simple, le agregamos la contribución de una fuerza sinusoidal de la forma $F = F_0 \cos \omega t$, obtenemos lo que se conoce comúnmente como oscilador armónico forzado.

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{k}{m}x - \frac{F_0}{m}\cos \omega t = 0} \tag{1.23}$$

Oscilador armónico forzado

La solución a la ecuación (1.23) es:

$$\boxed{x(t) = C \cos \omega t} \quad \text{con} \quad C = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{1.24}$$

Ejercicio 1.18. *Muestre que la solución (1.24) satisface la ecuación (1.23).*

Ejercicio 1.19. *Grafique C en función de ω.*

Una solución más general para la descripción correcta del movimiento oscilatorio es:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad A = |C| \tag{1.25}$$

Ejercicio 1.20. *Grafique A en función de ω.*

El valor de ϕ depende del valor de ω:

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega < \omega_0 \\ \pi & \text{si} \quad \omega > \omega_0 \end{cases} \tag{1.26}$$

Ejercicio 1.21. *Una masa de 2,00 kg atada a un resorte se mueve bajo acción de una fuerza externa $F = 3{,}00N \cos 2\pi t$. Si la constante del resorte es 20,0 N/m determine: (a) el periodo y (b) la amplitud del movimiento.*