Algoritmos y estructuras de datos

Programación Dinámica

CEIS

Escuela Colombiana de Ingeniería

Agenda

Agenda

Formulación

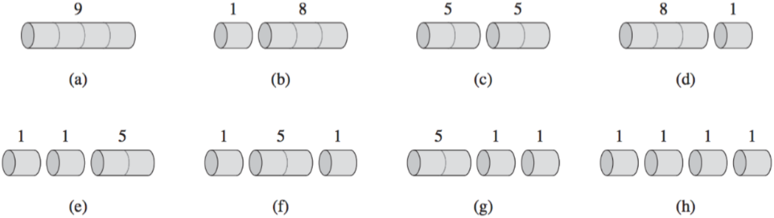
Dado una varilla de longitud n y una tabla de precios p_i $para\ i = 1,2,..,n$. Determinar la ganancia máxima r_n obtenible de cortar la varilla y vender las piezas.

length i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
price p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Diseño

Se puede cortar la varilla de 2^{n-1} formas diferentes

n=4



length i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
price p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Dividir y conquistar

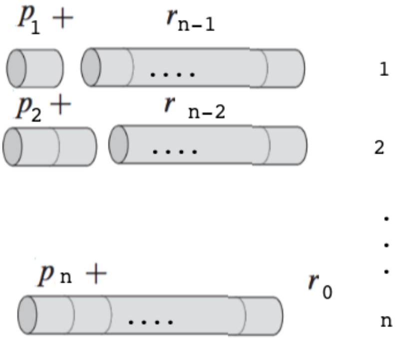
r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

Dividir y conquistar

r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

r_n
$n = 0$ 0

r_n
$n \geq 1$



$$\max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i})$$

Dividir y conquistar

r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

$$r_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i}) & n \geq 1 \end{cases}$$

n llamadas recursivas

Dividir y conquistar

CUT-ROD(p, n) es la máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

$$r_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \max\limits_{1 \le i \le n} (p_i + r_{n-i}) & n \ge 1 \end{cases}$$

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```

Análisis

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```

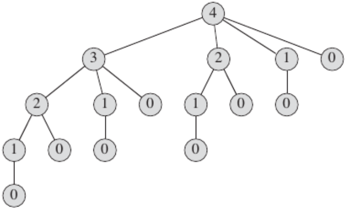
$$T(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} T(j) . \qquad (15.3)$$

$$T(n) = 2^n , \qquad (15.4)$$

Análisis

n=4

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```



Se resuelven repetidamente algunos problemas.

Programación dinámica

Al ver que que una función recursiva resuelve repetidamente el mismo problema, podemos modificar el algoritmo para solo solucionar estos subproblemas solo una vez y almacenar la solución.

Se hace un trade-off entre memoria y tiempo. Pudiendo convertir soluciones exponenciales a un tiempo polinómico.

Programación dinámica

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```

Se escribe un algoritmo recursivo de forma normal, pero lo modificamos para guardar el resultado de cada subproblema. Entonces el procedimiento verifica si ese subproblema ha sido resuelto previamente o no.

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
let r[0..n] be a new array
for i = 0 to n
    r[i] = −∞
return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
if r[n] ≥ 0
    return r[n]
if n == 0
    q = 0
else q = −∞
    for i = 1 to n
        q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n − i, r))
r[n] = q
return q
```

Agenda

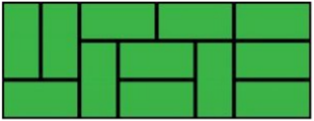
Baldosas

Dado un table de 3 x n, encuentre el número de formas en que puede completar con dominós de tamaño 2 x 1.

3 x 2

3 formas

3 x 8



n	# formas
2	3
8	153
12	2131

Amigos

Suponga que hay *n* amigos, quienes pueden permanecer solos o ser emparejados con otro amigo. Cada amigo puede ser emparejado una sola vez. Encuentre el número de formas en que los amigos pueden quedar solos o emparejados.

3 amigos

- [1, 2, 3]
- [1], [2, 3]
- [1, 2], [3]
- [1, 3], [2]

4 formas

Clavos

1. Considere un camino plano con clavos en el camino. Usted puede saltar de punto en punto según una velocidad S; luego de llegar a un punto, puede ajustar su velocidad en 1 unidad antes de dar el siguiente salto. La idea es no pisar ningún clavo durante el camino, y se detiene una vez su velocidad llego a 0. Dado un camino, una posición y una velocidad inicial, indique si es posible detenerse a lo largo del camino sin pisar ningún clavo.