CNyT Las matemáticas de la computación cuántica
(Yanofsky Cap. 1 y 2)

1) Números complejos

- Expandiendo los sistemas numéricos
- La unidad imaginaria i
- Codificación
- Conjugado
- Suma, resta, multiplicación, división y potencias.
- Módulo, fase
- Módulo al cuadrado → Probabilidad
- Forma cartesiana y forma polar
- La fórmula de Euler

* Expandiendo los sistemas numéricos

	Tiene solución	No tiene sol
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	$n+2=11$	$n+3=0$
Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	$n+3=0$	$2n+1=0$
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z}^*\}$	$2n+1=0$	$n^2=2$
$\mathbb{R}$ los números reales	$n^2=2$	$n^2=-1$
$\mathbb{C}$ los números complejos	$n^2=-1$ ↳ $i=\sqrt{-1}$	

Ej: Encontrar las soluciones de

$$\underbrace{\ }_{a}x^2 - \underbrace{6}_{b}x + \underbrace{13}_{c} = 0$$

Recordemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sol:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 13}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-1 \times 16}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \overbrace{\sqrt{-1}}^{i} \cdot \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x = 3 \pm 2i$$

Sol: $x_+ = 3 + 2i$

$x_- = 3 - 2i$

* La unidad imaginaria i

$i = \sqrt{-1}$ equivale a $i^2 = -1$

Ej:

- $\sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = \sqrt{7}\, i$
- $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = 2i \times 3i = 6i^2 = -6$

¿Cuánto vale $i^3, i^4, i^5, \ldots$? $i^{2568} = ?$

- $i^3 = \underbrace{i \cdot i}\cdot i = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

* Codificación

parte real — parte imaginaria

Al número complejo $a + ib$ lo podemos codificar como una tupla: (a, b)
$[a, b]$

Ej:

Número complejo	P. real	P. imag.	Arreglo/Lista/Tupla
i	0	1	$[0, 1]$
0	0	0	$[0, 0]$
-3	-3	0	$[-3, 0]$
$4 + 5i$	4	5	$[4, 5]$
$\sqrt{2} - \frac{1}{7}i$	$\sqrt{2}$	$-1/7$	$[\sqrt{2}, -1/7]$
$\frac{6-2i}{3}$	2	$-\frac{2}{3}$	$[2, -\frac{2}{3}]$

$\frac{6}{3} - \frac{2}{3}i$

* **Conjugado** = cambiar el signo de la p. imag.

Dado un número complejo $c = a + ib$, su **conjugado** $\bar{c} = a - ib$

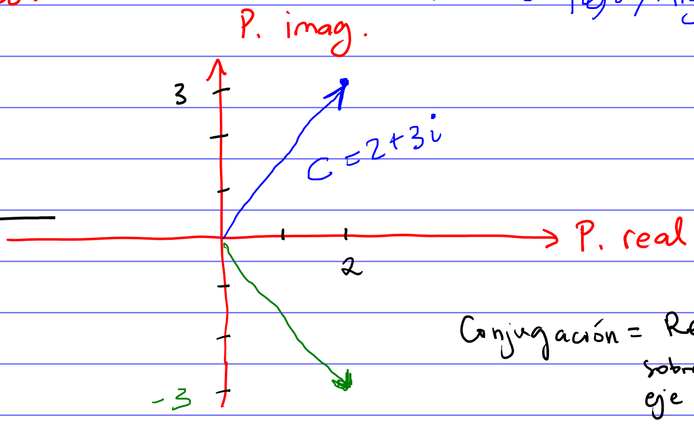
Ej:

c	$\bar{c}$
$-i$	i
$2+8i$	$2-8i$
$\sqrt{3}-\sqrt{7}\,i$	$\sqrt{3}+\sqrt{7}\,i$
$\dfrac{4-6i}{3}$	$\dfrac{4+6i}{3}$

Gráficamente:

Plano complejo / Argand

$$
\begin{array}{rl}
 & \text{Si } c = 2+3i \\
+ & \bar{c} = 2-3i \\
\hline
 & c+\bar{c} = 4
\end{array}
$$



Conjugación = Reflexión sobre el eje Real

* **Suma, resta, multiplicación, división y potencias**

Suma:

$$(-7+4i) + (9-6i) = 2-2i$$

Resta:

$$(-7+4i) - (9-6i) =$$

$$-7+4i-9+6i = -16+10i$$

Multiplicación: $(-7+4i)\times(9-6i)$

$$= -63 + \overbrace{42i + 36i}\; - 24\, i^2 \qquad (i^2 = -1)$$

$$= -63 + 78i + 24$$

$$= -39 + 78i$$

Ej: (IMPORTANTE!) ¿Qué pasa cuando se multiplica un complejo por su conjugado?

$$(9-6i)\times(9+6i) = 81 + \cancel{54i} - \cancel{54i} - 36 i^2 \qquad (i^2 = -1)$$

$$= 81 + 36$$

$$= 117$$

$c\bar{c}$ es real

$$\frac{-7+4i}{9-6i}$$

División: $\dfrac{(-7+4i)}{(9-6i)} \cdot \dfrac{(9+6i)}{(9+6i)} = \dfrac{-63-42i+36i+24i^2}{117}$

Multiplico arriba y abajo por el conjugado del denominador

$$= \frac{-63-24-6i}{117} = \frac{-87-6i}{117}$$

$$a + ib \longrightarrow \underbrace{\frac{-87}{117}}_{\text{P. Real}} \underbrace{- \frac{6}{117}}_{\text{P. Imaginaria}} i$$

Nota: La división es importante pues si te preguntan por las partes Real e Imaginaria del complejo

$$c = \frac{-7+4i}{9-6i}$$ de aquí no lo puedes decir directamente

VALE QUE: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Potencias: $(-7+4i)^2 =$

$(-7+4i)(-7+4i) =$ ejercicio .

Calcular: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^3$

$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ Ejercicio

Hay infinitas fases! $\theta' = \theta + 2\pi k$

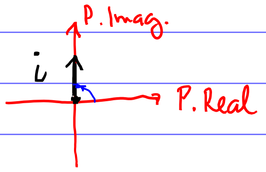
*** Módulo, fase** $\quad c = a + ib$

Módulo (longitud) $\longrightarrow$ $\sqrt{a^2+b^2}$

Fase (ángulo) $\longrightarrow$ $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ + Revisar el cuadrante !

Ej: Graficar, calcular su módulo y fase

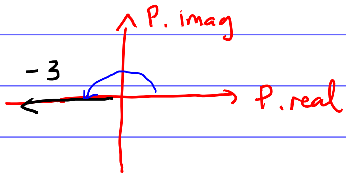
a) $c = i = 0 + 1i$



Módulo = $1 = \sqrt{0^2+1^2}$

Fase = $90°$ ó $\frac{\pi}{2}$

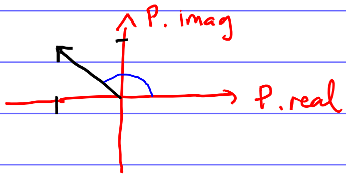
b) $c = -3$



Módulo = 3

Fase = $180°$ ó π

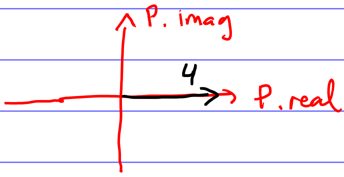
c) $c = -1 + i$



Módulo = $\sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Fase = $\frac{3\pi}{4}$ ó $135°$

d) $c = 4$



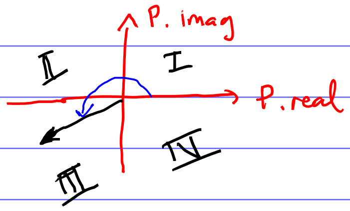
Módulo = 4

Fase = 0 ó $0°$

e) $c = \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2}}_{a = -\frac{\sqrt{3}}{2}} - \underbrace{\frac{i}{2}}_{b = -\frac{1}{2}}$

Módulo = $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$



Fase = $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 30°$ ó $\pi/6$

¡Pero este ángulo no está en el cuadrante III!

Por lo tanto, debemos sumarle $180°$ ó π

$$\Rightarrow \text{Fase} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ó} \quad 30° + 180° = 210°$$

* **Nota:** Si le sumamos $2\pi k$ $(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ a la fase, ésta sigue siendo válida (ya que le estamos sumando 1 o más vueltas completas)

Por ejemplo, en el punto e) anterior también son válidos los siguientes valores para la fase:

$$\vdots$$

$$\frac{7\pi}{6} - 6\pi = \frac{-29\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} - 4\pi = \frac{-17\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} - 2\pi = \frac{-5\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} + 0 = \frac{7\pi}{6}$$

→ Ésta es la más simple $0 \leq \text{fase} \leq 2\pi$

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{19\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} + 4\pi = \frac{31\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} + 6\pi = \frac{43\pi}{6}$$

$$\vdots$$

etc.

* Módulo al cuadrado → Probabilidad

Estado de un qubit: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Amplitud

Para un qubit en estado $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{3+2i}{4}|1\rangle$

Calcular $|\alpha|^2$ = Prob. de medir el estado $|0\rangle$

y $|\beta|^2$ = Prob. de medir el estado $|1\rangle$

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 0^2 = \frac{3}{16} = 18.75\%$$

$$|\beta|^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{4}{16}$$

$$= \frac{13}{16} = 81.25\%$$

* Forma cartesiana y forma polar

$c = a + ib$ — Parte real (a), Parte imag (b)

$c = \rho \cdot e^{i\theta}$ — Módulo (ρ), fase (θ)

Ej: Expresar los números complejos dados (están en forma cartesiana) en forma polar

FORMA POLAR

a) $c = i$

b) $c = -3$

c) $c = -1 + i$ $\qquad c = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$

d) $c = 4$

e) $c = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

* La fórmula de Euler (la clave para pasar de forma polar a forma cartesiana)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ej: $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$
$= -1 + i \cdot 0$

$e^{i\pi} = -1 \longrightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

Esta bella igualdad contiene las 5 constantes más importantes de las matemáticas!

Escribir en forma cartesiana:

a) $\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $4e^{-i\frac{\pi}{3}} =$

2) Vectores y matrices (Próximo tema)