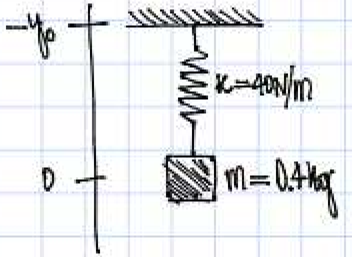
1. a)



$$m\ddot{y}=-ky \Rightarrow \ddot{y}+\omega_0^2 y=0 \;;\; \omega_0^2=k/m$$

b) Dada la ecuación $\ddot{y}+\omega_0^2 y=0$ y las condiciones iniciales

$n \in \mathbb{Z}$

$v_0=0.1\,m/s$

$x_0=0.0$

$$y(t)=A\cos(\omega_0 t+\alpha) \rightarrow y(0)=0=A\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha=0 \rightarrow \alpha=n\pi/2$$

$$\dot{y}(t)=-A\omega_0\,\mathrm{Sen}(\omega_0 t+\alpha) \rightarrow \dot{y}(0)=v_0=-A\omega_0\,\mathrm{Sen}\,\alpha \rightarrow v_0=-A\omega_0\,\mathrm{Sen}(n\pi/2)$$

Luego $A=-\dfrac{v_0}{\omega_0\,\mathrm{Sen}(n\pi/2)}=\dfrac{v_0}{\omega_0}=\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,v_0 \longrightarrow A=0.01\,m$

$\alpha=-\pi/2$

c) La frecuencia con amortiguamiento se puede escribir

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-(\gamma/2)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 \Rightarrow \omega_0^2-(\gamma/2)^2=\frac{3}{4}\omega_0^2$$

$$\omega_0^2-\frac{3}{4}\omega_0^2=(\gamma/2)^2$$

$$\frac{1}{4}\omega_0^2=(\gamma/2)^2 \rightarrow \frac{\omega_0}{2}=\frac{\gamma}{2}$$

es decir $\gamma=\omega_0$, pero $\gamma=\dfrac{b}{m}$, luego

$$b=\omega_0 m=\sqrt{\frac{k}{m}}\,m=\sqrt{\frac{km^2}{m}}=\sqrt{km}=4. \qquad \gamma=\frac{4}{0.4}=10\ (kg\,m/s)^{-1}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{40}{0.4}}=10\ rad/s$$

d) El factor de calidad $Q=\dfrac{\omega_0}{\gamma}=\dfrac{\sqrt{k/m}}{10}=\dfrac{10}{10}=1$

e) $y(t)=A_0e^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t+\alpha) \longrightarrow A(t)=A_0e^{-\gamma t/2}$; $\gamma=\omega_0=10$

Además $\omega_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10=5\sqrt{3}$ y por tanto $T=\dfrac{2\pi}{5\sqrt{3}}$ (tiempo para realizar una oscilación)

$T=2.47s$

$$t=10T=\frac{4\pi}{\sqrt{3}} \rightarrow A\left(\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\right)=A_0e^{-5\cdot\frac{4\pi}{\sqrt{3}}}=A_0\underbrace{(1.46\times10^{-16})}_{}$$

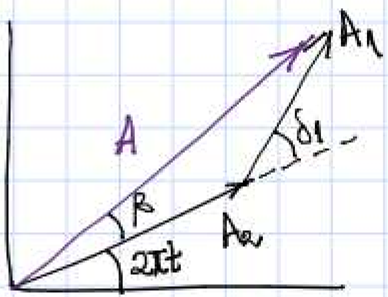
$\longrightarrow$ factor pedido.

2. a) $\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \cos(10\pi t) \\ x_2(t) = \cos(12\pi t) \end{array}\right\} x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2\cos\left(\frac{10\pi + 12\pi}{2} t\right)\cos\left(\frac{12\pi - 10\pi}{2} t\right)$

Luego $x(t) = 2\cos(11\pi t)\cos(\pi t)$; es una pulsación $\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{T_{puls}} \rightarrow T_{puls} = 1s$

b) $x_1(t) = \operatorname{Sen}(2\pi t - \sqrt{2}) = \operatorname{Cos}(2\pi t - \sqrt{2} - \pi/2) = \cos(2\pi t - \delta_1)$; $\delta_1 = \sqrt{2} + \pi/2$; $A_1 = 1.0$

$x_2(t) = A_2 \cos(2\pi t)$; $A_2 = 0.5$

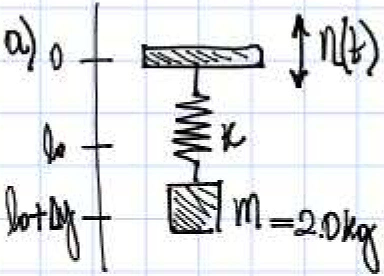


- $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\operatorname{Cos}\delta_1$
- $\alpha = \beta \rightarrow \operatorname{Sen}\beta = \frac{A_2}{A}\operatorname{Sen}\delta_1$

Reemplazando los valores tenemos: $A = \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\sqrt{2}} = 0.512$

$$\alpha = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{0.5}{A}\operatorname{Sen}(\sqrt{2} + \pi/2)\right) = 0.153 \text{ rad}.$$

3. a)



Inicialmente $k\Delta y - mg = 0 \Rightarrow k = \dfrac{mg}{\Delta y} = \dfrac{(2.0\,kg)(9.8\,m/s^2)}{2.5\times 10^{-2}\,m}$

luego

$k = 784\ N/m \quad ; \quad \omega_0 = 14\sqrt{2} = 19.8\ rad/s$

pero por otro lado $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma} \longrightarrow \gamma = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\sqrt{k/m}}{Q} = \dfrac{14}{15}\sqrt{2} = 1.32\,(m/s)^{-1}$

de otra forma $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = 19.8\,s^{-1} = \dfrac{2\pi}{T}$

es decir $T = 0.317\,s$

b) $Q = 15 \longrightarrow \omega_0 > \gamma$, Si puede considerarse debilmente amortiguado

3.c)

$$a(\omega_F) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2 + (\gamma\omega_F)^2}}$$

$F_0 = 1.0\times10^{-3}\,m$; $Q = 15$

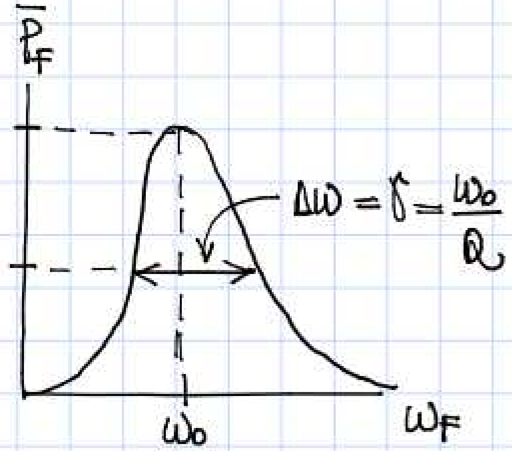
$m = 2.0\,kg$; $\omega_0 = 14\sqrt{2}$ rad/s

Para $\omega_F = \omega_0$

$$a(\omega_0) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2} = \frac{(1.0\times10^{-3}m)(15)}{(2.0kg)(14\sqrt{2}\,rad/s)^2} = 3.79\times10^{-4}\ \frac{m/s^2}{kg}$$

d) La potencia absorbida

$$\overline{P_F(\omega_F)} = \frac{F_0^2}{2m\gamma}\cdot\frac{(\gamma\omega_F)^2}{(\omega_0^2-\omega_F^2)^2+(\gamma\omega_F)^2}$$



* El máximo :

$$\overline{P_F}^{max} = \frac{F_0^2}{2m\gamma}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0}$$

* El ancho : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{14\sqrt{2}}{15} = 1.32\ (kg\,m/s)^{-1}$

e) $E(t) = E_0 e^{-\gamma t}$ $\qquad E(t^*) = E_0 e^{-5} = E_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t^*} \Rightarrow 5 = \frac{\omega_0}{Q}t^*$

Luego $t^* = \frac{5Q}{\omega_0} = \frac{5(15)}{14\sqrt{2}} = 3.78\,s$

$\nu = 640\,Hz = \nu_1$

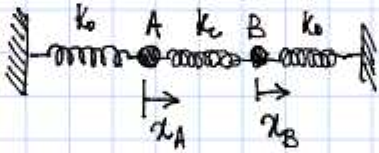
$T = ?$

$L = 33\times10^{-2}\,m$

$m = 0.125\times10^{-3}\,kg$

Sabemos $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2\pi\nu_n \Rightarrow \nu_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$; $\mu = m/L$

$$\nu_1^2 = \frac{T}{4L^2(m/L)} \Rightarrow T = 4Lm\nu_1^2 \Rightarrow \boxed{T = 67.6\,N}$$



a) $$m\ddot{x}_A = -K_0 x_A - K_c(x_A - x_B)$$
$$m\ddot{x}_B = -K_0 x_B + K_c(x_A - x_B)$$

definiendo $\omega_0^2 = K_0/m$ y $\omega_c^2 = K_c/m$, las ecuaciones de mov. serían:

$$\ddot{x}_A + \omega_0^2 x_A + \omega_c^2(x_A - x_B) = 0$$
$$\ddot{x}_B + \omega_0^2 x_B - \omega_c^2(x_A - x_B) = 0$$

$\Longrightarrow$ Matricialmente

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2+\omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2+\omega_c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\phi} + \mathbb{M}\vec{\phi} = \vec{0}$$

b) Diagonalizamos la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2+\omega_c^2-\lambda & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2+\omega_c^2-\lambda \end{vmatrix} = (\omega_0^2+\omega_c^2-\lambda)^2 - \omega_c^4 = 0 \Rightarrow (\omega_0^2+\omega_c^2-\lambda) = \pm\omega_c^2 \begin{cases} \lambda_1 = \omega_0^2 \equiv \omega_1^2 \\ \lambda_2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \equiv \omega_2^2 \end{cases}$$

Luego las frecuencias de los modos normales son: $\omega_1 = \sqrt{K_0/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K_c/m}$

Por otro lado, si B está quieta ($x_B = 0$) la ecuación de movimiento de A es:

$$\ddot{x}_A + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A = 0 \Rightarrow \omega_A^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2$$

c) $K_c/K_0 = ?$ Sabemos $\nu_A = \frac{\omega_A}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_0}{m} + \frac{K_c}{m}}$ y $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_0}{m}}$

$\nu_1 = 1.14\,Hz$

$\nu_A = 1.81\,Hz$

$$\frac{\nu_A^2}{\nu_1^2} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\left(\frac{K_0}{m} + \frac{K_c}{m}\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\left(\frac{K_0}{m}\right)} = 1 + \frac{(K_c/m)}{(K_0/m)} = 1 + \frac{K_c}{K_0} \Rightarrow \frac{K_c}{K_0} = \frac{\nu_A^2}{\nu_1^2} - 1$$

Luego: $\boxed{K_c/K_0 = 1.52}$

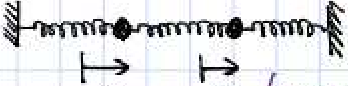
d) Introducimos los modos normales de tal forma que $\mathbb{A}\vec{\phi} = \vec{q}$ y $\mathbb{A}\mathbb{M}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{D}$ (Diagonal) lo que produce: $\vec{\phi} = A^{-1}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$x_A = C_1\cos(\omega_1 t+\delta_1) + C_2\cos(\omega_2 t+\delta_2)$$

$$x_B = C_1\cos(\omega_1 t+\delta_1) - C_2\cos(\omega_2 t+\delta_2)$$

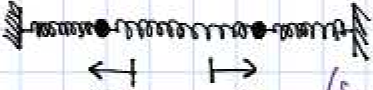
y se distinguen los mov. mas fundamentales

Modo $n=1$



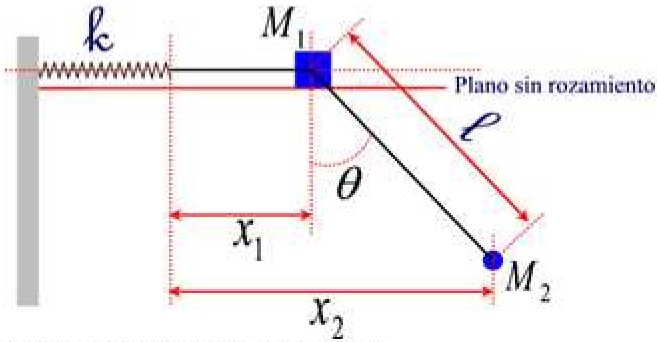
x_A x_B (se mueven en la misma direc.)

Modo $n=2$



x_A x_B (se mueven en direciones opuestas)

El esquema muestra una masa M_1 sobre un plano sin rozamiento unida a un soporte O mediante un muelle de rigidez k. La masa M_2 está sujeta a M_1 mediante una cuerda de longitud l.



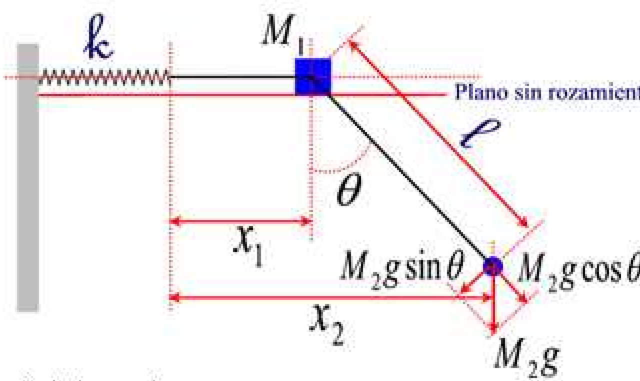
a) Utilizando la aproximación de oscilaciones pequeñas:

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x_2 - x_1}{l}$$

Y partiendo de F = ma, deduce las ecuaciones de movimiento de M1 y M2:

$$M_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - M_2\frac{g}{l}(x_2 - x_1) \quad M_2\ddot{x}_2 = -\frac{M_2 g}{l}(x_2 - x_1)$$

Si planteamos el sistema de fuerzas:



Las ecuaciones dinámicas serán:

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M_2 g\sin\theta$$

$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -M_2 g\sin\theta$$

Si planteamos la aproximación para ángulos pequeños, encontraremos:

$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M_2 g\frac{x_2 - x_1}{l} \Rightarrow M_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M_2\frac{g}{l}(x_2 - x_1)$$

$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -M_2 g\frac{x_2 - x_1}{l} \Rightarrow M_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -M_2\frac{g}{l}(x_2 - x_1)$$

Que son las ecuaciones que nos proponían inicialmente.

b) Para $M_1 = M_2 = M$, utiliza las ecuaciones para obtener las frecuencias normales del sistema.

Combinamos ahora las dos ecuaciones anteriores para obtener las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas normales del sistema:

$$\begin{array}{ll} M_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M_2\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) & M_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M_2\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) \\ M_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -M_2\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) & -\left[M_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -M_2\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1)\right] \\ \hline M_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + M_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_1 - 2M_2\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) & M_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - M_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_1 \end{array}$$

Si $M_1 = M_2 = M$ el sistema se simplifica enormemente, quedando:

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} + M\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_1 - 2M\frac{g}{l}(x_2 - x_1) \;\Rightarrow\; \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -\frac{k}{M}x_1 - 2\frac{g}{l}(x_2 - x_1)$$

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} - M\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_1 \;\Rightarrow\; \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -\frac{k}{M}x_1$$

Sin embargo, nuevamente (problema 2)) no es posible resolver este sistema por el método de las coordenadas normales, puesto que no es posible hallar una combinación lineal que nos separe completamente ambas. No quedará más solución que recurrir al método general:

$$x_1 = C_1 e^{i\omega t} \quad \frac{dx_1}{dt} = iC_1\omega e^{i\omega t} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -C_1\omega^2 e^{i\omega t}$$

$$x_2 = C_2 e^{i\omega t} \quad \frac{dx_2}{dt} = iC_2\omega e^{i\omega t} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -C_2\omega^2 e^{i\omega t}$$

Introducimos estas funciones de prueba en las ecuaciones iniciales, con la aproximación $M_1 = M_2 = M$

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - M\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) \\ M\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -M\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -MC_1\omega^2 e^{i\omega t} = -kC_1 e^{i\omega t} - M\dfrac{g}{l}\left(C_2 e^{i\omega t} - C_1 e^{i\omega t}\right) \\ -MC_2\omega^2 e^{i\omega t} = -M\dfrac{g}{l}\left(C_2 e^{i\omega t} - C_1 e^{i\omega t}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -MC_1\omega^2 = -kC_1 - M\dfrac{g}{l}(C_2 - C_1) \\ -MC_2\omega^2 = -M\dfrac{g}{l}(C_2 - C_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -MC_1\omega^2 = -kC_1 - M\dfrac{g}{l}C_2 + M\dfrac{g}{l}C_1 \\ -MC_2\omega^2 = -M\dfrac{g}{l}C_2 + M\dfrac{g}{l}C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -MC_1\omega^2 = -kC_1 - M\dfrac{g}{l}C_2 + M\dfrac{g}{l}C_1 \\ -C_2\omega^2 = -\dfrac{g}{l}C_2 + \dfrac{g}{l}C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -MC_1\omega^2 + kC_1 - M\dfrac{g}{l}C_1 = -M\dfrac{g}{l}C_2 \\ -C_2\omega^2 + \dfrac{g}{l}C_2 = \dfrac{g}{l}C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-M\omega^2 + k - M\dfrac{g}{l}\right)C_1 = -M\dfrac{g}{l}C_2 \\ \left(-\omega^2 + \dfrac{g}{l}\right)C_2 = \dfrac{g}{l}C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{-M\dfrac{g}{l}}{\left(-M\omega^2 + k - M\dfrac{g}{l}\right)} \\ \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{\left(-\omega^2 + \dfrac{g}{l}\right)}{\dfrac{g}{l}} \end{cases}$$

A partir de estos cocientes extraemos el valor de ω, a partir de una ecuación de 2º grado:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{-M\frac{g}{l}}{\left(-M\omega^2+k-M\frac{g}{l}\right)}=\frac{\left(-\omega^2+\frac{g}{l}\right)}{\frac{g}{l}}$$

$$-M\left(\frac{g}{l}\right)^2=\left(-\omega^2+\frac{g}{l}\right)\left(-M\omega^2+k-M\frac{g}{l}\right)$$

$$-M\left(\frac{g}{l}\right)^2=M\omega^4-\omega^2k+M\omega^2\frac{g}{l}-M\omega^2\frac{g}{l}+k\frac{g}{l}-M\left(\frac{g}{l}\right)^2$$

$$0=M\omega^4-\omega^2k+k\frac{g}{l}-M\left(\frac{g}{l}\right)^2+M\left(\frac{g}{l}\right)^2$$

$$0=M\omega^4-\omega^2k+k\frac{g}{l}$$

Esta es la ecuación de 2º grado que hay que resolver, por lo tanto:

$$\omega^2=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4k^2\frac{g}{l}}}{2M}=\frac{k\pm\sqrt{\left(1-4\frac{g}{l}\right)k^2}}{2M}=\frac{k\pm k\sqrt{1-4\frac{g}{l}}}{2M}=\frac{k}{2M}\pm\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}$$

Y así las frecuencias de los modos normales de vibración serán:

$$\omega'=\left[\frac{k}{2M}+\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}\qquad \omega''=\left[\frac{k}{2M}-\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}$$

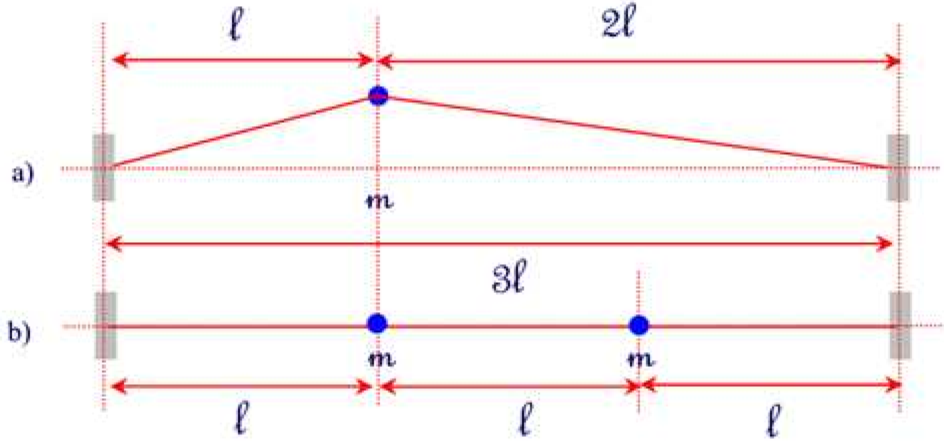
$$2\pi\nu'=\left[\frac{k}{2M}+\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}\qquad 2\pi\nu''=\left[\frac{k}{2M}-\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}$$

$$\nu'=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{k}{2M}+\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}\qquad \nu''=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{k}{2M}-\frac{k}{2M}\sqrt{1-4\frac{g}{l}}\right]^{1/2}$$

c) ¿Cuáles son los movimientos de modo normales para $M_1 = M_2 = M$ y $g/l >> k/M$?

Si $g/l >> k/M$, la frecuencia de los modos normales de vibración se convierte en imaginaria, por lo que el sistema se comportará como un péndulo fijo. Lo que estará sucediendo es que M es muy grande, comparado con la constante elástica del muelle y entonces no podrá vibrar, por lo que desaparece el acoplamiento, el único movimiento posible, por tanto será el del péndulo.

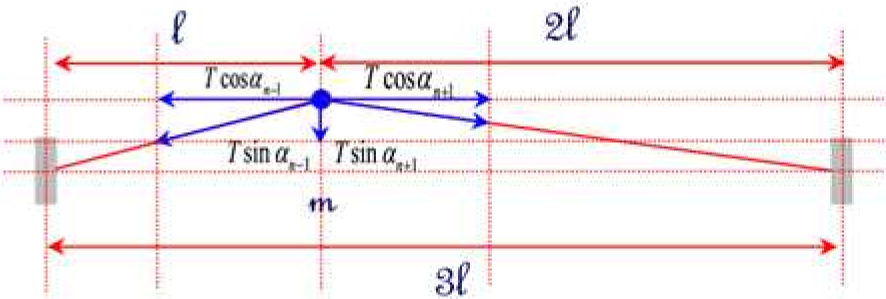
6) Se sujeta por sus extremos a dos soportes fijos una cuerda de longitud 3l y masa despreciable. La tensión de la cuerda es T.



$$A_{pn} = C_n \sin\theta$$

a) Se sujeta una partícula de masa m a una distancia l de un extremo de la cuerda, como está indicado. Escribe la ecuación para las oscilaciones transversales pequeñas de m y halla el período.

El sistema de fuerzas para el primer caso será:



La ecuación dinámica por tanto será:

$$\left(0, -m\frac{d^2 y_n}{dt^2}\right) = \left(T\cos\alpha_{n+1} - T\cos\alpha_{n-1}, T\sin\alpha_{n+1} - T\sin\alpha_{n-1}\right) \begin{cases} T\cos\alpha_{n+1} - T\cos\alpha_{n-1} = 0 \\ -m\dfrac{d^2 y_n}{dt^2} = T\sin\alpha_{n+1} - T\sin\alpha_{n-1} \end{cases}$$

La ecuación que nos interesa es la de la dirección vertical, ya que da un resultado diferente de 0. Si aplicamos la aproximación para ángulos pequeños:

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{y_n - y_{n+1}}{l}$$

Por tanto nos quedará la ecuación diferencial:

$$-m\frac{d^2y_n}{dt^2}=T\sin\alpha_{n+1}-T\sin\alpha_{n-1}=T\frac{y_n-y_{n+1}}{l}-T\frac{y_{n-1}-y_n}{2l}=\frac{T}{2l}(2y_n-2y_{n+1}-y_{n-1}+y_n)=$$

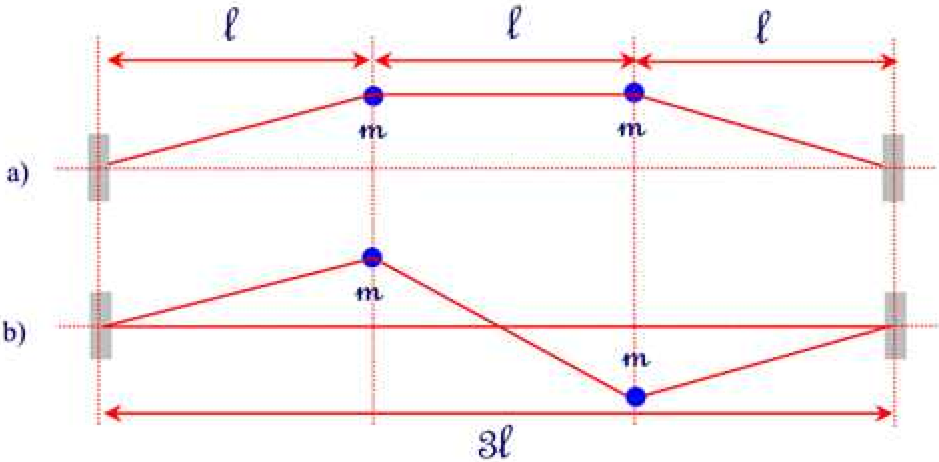
$$3\frac{T}{2l}y_n-\frac{T}{2l}(2y_{n-1}+y_{n+1})=3\frac{T}{2l}y_n-\frac{T}{2l}2y_{n-1}-\frac{T}{2l}y_{n+1}\Rightarrow-\frac{d^2y_n}{dt^2}=3\frac{T}{2lm}y_n-\frac{T}{2lm}2y_{n-1}-\frac{T}{2lm}y_{n+1}$$

$$\Rightarrow-\frac{d^2y_n}{dt^2}=3\omega_0^2y_n-2\omega_0^2y_{n-1}-\omega_0^2y_{n+1}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=3\omega_0^2y_n-\omega_0^2(2y_{n-1}+y_{n+1})\\ \omega_0^2=\dfrac{T}{2lm}\end{cases}$$

Como y_{n-1} y y_{n+1} son los extremos de la cuerda están fijos, por lo que la ecuación diferencial queda:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=3\omega_0^2y_n\\ \omega_0^2=\dfrac{\vec{T}}{2lm}\end{array}\right\}\Rightarrow\omega^2=3\omega_0^2\Rightarrow\omega=\sqrt{3\omega_0^2}=\sqrt{\frac{3\vec{T}}{2lm}}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{3\vec{T}}{2lm}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2lm}{3\vec{T}}}$$

b) Se une una partícula adicional de masa m a la cuerda como se ve en la figura, dividiéndola en tres segmentos iguales cada uno de ellos con tensión T. Dibuja el aspecto de la cuerda y la posición de las masas en los dos modos normales separados de las oscilaciones transversales.



c) Calcula ω para el modo normal que tenga mayor frecuencia.

La ecuación diferencial para una cuerda con n masas equiespaciadas será:

$$-m\frac{d^2y_n}{dt^2}=T\sin\alpha_{n+1}-T\sin\alpha_{n-1}=T\frac{y_n-y_{n+1}}{l}-T\frac{y_{n-1}-y_n}{l}=\frac{T}{l}(y_n-y_{n+1}-y_{n-1}+y_n)=$$

$$2\frac{T}{l}y_n-\frac{T}{l}(y_{n-1}+y_{n+1})=2\frac{T}{l}y_n-\frac{T}{l}y_{n-1}-\frac{T}{l}y_{n+1}\Rightarrow-\frac{d^2y_n}{dt^2}=2\frac{T}{lm}y_n-\frac{T}{lm}y_{n-1}-\frac{T}{2lm}y_{n+1}$$

$$\Rightarrow-\frac{d^2y_n}{dt^2}=2\omega_0^2y_n-\omega_0^2y_{n-1}-\omega_0^2y_{n+1}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=2\omega_0^2y_n-\omega_0^2(y_{n-1}+y_{n+1})\\ \omega_0^2=\dfrac{T}{lm}\end{cases}$$

Si introducimos $A_{pn} = C_n \sin\theta$ como función de prueba:

$$A_{pn} = C_n \sin\theta \quad \frac{dA_{pn}}{dt} = C_n \frac{d\theta}{dt}\cos\theta \quad \frac{d^2 A_{pn}}{dt^2} = -C_n\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin\theta$$

Introducimos ahora esta serie de ecuaciones en la ecuación diferencial:

$$C_n\omega^2 \sin\theta = 2\omega_0^2 C_n \sin\theta - \omega_0^2\left(C_{n-1}\sin\theta + C_{n+1}\sin\theta\right)$$

$$C_n\omega^2 = 2\omega_0^2 C_n - \omega_0^2 C_{n-1} + \omega_0^2 C_{n+1}$$

$$C_n\omega^2 - 2\omega_0^2 C_n = -\omega_0^2 C_{n-1} + \omega_0^2 C_{n+1}$$

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{C_n}$$

La cuerda tiene 4 nodos, de los cuales el nodo 1 y el 4 están inmóviles, por lo que los modos normales de vibración serán:

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{C_2}{0} = \infty$$

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{C_3 - C_1}{C_2} = \frac{C_3 - 0}{C_2} = 1$$

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{0 - C_2}{C_3} = -1$$

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = -\frac{C_3}{C_4} = -\frac{C_3}{0} = \infty$$

En los extremos la expresión no es válida, porque están estacionarios, por lo tanto las soluciones del sistema serán:

$$\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 - 2\omega_0^2 = \pm\omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 \pm \omega_0^2 \begin{cases} \omega^2 = 2\omega_0^2 + \omega_0^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{3}\omega_0 \\ \omega^2 = 2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La solución que nos están pidiendo será la del modo normal que tenga mayor frecuencia:

$$\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{\frac{3T}{lm}}$$

Considerando un sistema de N osciladores acoplados asociados a una frecuencia $\omega < 2\omega_0$, es decir, $y_0 = 0;\ y_{N+1} = h\cos\omega t$. Halla las amplitudes resultantes de los N osciladores.

Indicaciones: Las ecuaciones diferenciales del movimiento son las mismas que en el caso sin impulsar, sólo son diferentes las condiciones límite. De aquí que pueda ensayarse $A_p = C\sin\alpha p$, y determinar así los valores necesarios de α y C.

Si $\omega < 2\omega_0$, α es complejo y las ondas se amortiguan exponencialmente en el espacio.

En el ejercicio anterior obtuvimos la ecuación diferencial para un sistema con n masas equiespaciadas:

$$-\frac{d^2 y_n}{dt^2} = 2\omega_0^2 y_n - \omega_0^2 (y_{n-1} + y_{n+1}) \quad \omega_0^2 = \frac{T}{lm}$$

Introducimos ahora la expresión que proponen en el enunciado. En primer lugar calculamos las derivadas:

$$A_p = C\cos\alpha p \quad \frac{dA_p}{dt} = .-Cp\frac{d\alpha}{dt}\sin\alpha p \quad \frac{d^2 A_p}{dt^2} = -Cp^2\omega^2\cos\alpha p$$

Ahora ya podemos introducir estas expresiones en la ecuación diferencial:

$$Cp^2\omega^2\cos\alpha p = 2\omega_0^2 C\cos\alpha p - \omega_0^2(C\cos\alpha(p-1) + C\cos\alpha(p+1))$$

$$(p^2\omega^2 - 2\omega_0^2)\cos\alpha p = -\omega_0^2(\cos\alpha(p-1) + \cos\alpha(p+1))$$

$$-\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\cos\alpha(p-1) + \cos\alpha(p+1)}{\cos\alpha p}$$

$$-\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\cos(\alpha p - \alpha) + \cos(\alpha p + \alpha)}{\cos\alpha p}$$

$$-\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\cos\alpha p\cos\alpha + \sin\alpha p\sin\alpha + \cos\alpha p\cos\alpha - \sin\alpha p\sin\alpha}{\cos\alpha p}$$

$$-\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\cos\alpha p\cos\alpha + \cos\alpha p\cos\alpha}{\cos\alpha p} = \cos\alpha$$

Por lo tanto obtenemos que el valor de α será:

$$\cos\alpha = -\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left[-\frac{p^2\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2}\right]$$

Si se ha de cumplir que $\omega < 2\omega_0$, entonces $p^2 = 1$, y entonces quedará:

$$\alpha = \arccos\left[-\frac{\omega^2 - 2\omega_0^2}{\omega_0^2}\right]$$

Como el extremo de la cuerda está libre α debe ser múltiplo de π en ese punto, para que se cumpla que $y_{N+1} = h\cos\omega t$:

$$(N+1)\alpha = p\pi \Rightarrow \alpha = \frac{p\pi}{(N+1)}$$

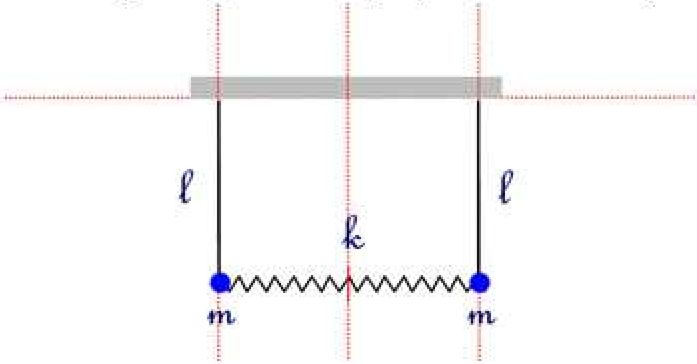
Introducimos este resultado en la función de prueba y obtenemos el valor de C, de acuerdo con las condiciones de contorno:

$$y_{N+1} = h\cos\omega t = C\cos\left(\frac{p\pi}{(N+1)}\right)\cos\omega t \Rightarrow C = h\frac{1}{\cos\left(\frac{p\pi}{(N+1)}\right)}$$

Como p=1, entonces quedará:

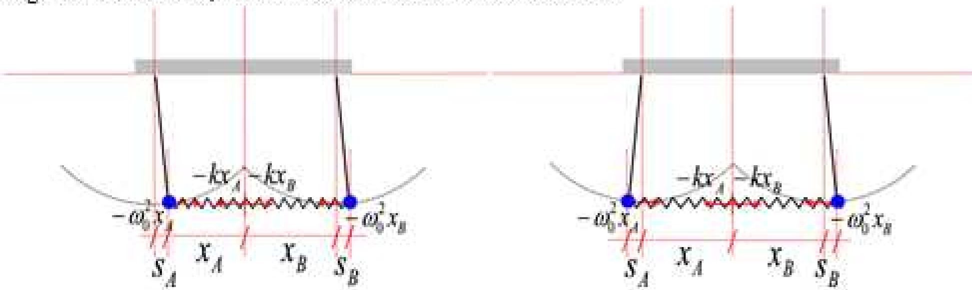
$$C = h\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{(N+1)}\right)}$$

Se unen dos péndulos idénticos mediante un muelle de acoplamiento ligero. Cada péndulo tiene una longitud de 0,4 m y están situados en un lugar donde g = 9,8 m/s^2. Estando conectado el muelle de acoplo, se sujeta uno de los péndulos y se encuentra que el periodo del otro es de 1,25 s. exactamente.



a) Si ninguno de los péndulos está sujeto ¿Cuáles son los periodos de los dos modos normales?

Según vimos en clase, los dos modos normales de vibración son:



Donde $\omega_0^2 = g/l$, que será la velocidad angular de los péndulos. En el primero los dos péndulos oscilan en fase y por tanto no inducen elongación en el muelle que los une, mientras que en el segundo los dos péndulos tienen un desfase de $\pi/2$ y por tanto ambos inducen elongación en el muelle que los une.

Por tanto las ecuaciones dinámicas para este sistema serán:

$$m\vec{a} = m\left(\frac{d^2x_A}{dt^2} - \left(-\omega_0^2 x_A\right)\right) = -kx_A + kx_B \Rightarrow m\frac{d^2x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + kx_A - kx_B = 0$$

$$m\vec{a} = m\left(\frac{d^2x_B}{dt^2} - \left(-\omega_0^2 x_B\right)\right) = -kx_B + kx_A \Rightarrow m\frac{d^2x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B + kx_B - kx_A = 0$$

Si reordenamos las ecuaciones del sistema obtendremos:

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + kx_A - kx_B = m\frac{d^2x_A}{dt^2} + m\omega_0^2 x_A + k(x_A - x_B) = 0$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B + kx_B - kx_A = m\frac{d^2x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B - k(x_A - x_B) = 0$$

Como los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas son, en general difíciles de resolver, buscamos combinaciones lineales que nos permitan resolver cada sistema por separado.

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2}+m\omega_0^2x_A+k(x_A-x_B)=0 \qquad m\frac{d^2x_A}{dt^2}+m\omega_0^2x_A+k(x_A-x_B)=0$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2}+m\omega_0^2x_B-k(x_A-x_B)=0 \qquad -\left[m\frac{d^2x_B}{dt^2}+m\omega_0^2x_B-k(x_A-x_B)\right]=0$$

$$m\frac{d^2(x_A+x_B)}{dt^2}+m\omega_0^2(x_A+x_B)=0 \qquad m\frac{d^2(x_A-x_B)}{dt^2}+m\omega_0^2(x_A-x_B)+2k(x_A-x_B)=0$$

Que son los modos normales de vibración, por lo que todo el sistema queda reducido a estas dos ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{d^2(x_A+x_B)}{dt^2}+m\omega_0^2(x_A+x_B)=0 \\ q_1=(x_A+x_B) \end{array}\right\} \Rightarrow m\frac{d^2q_1}{dt^2}+m\omega_0^2q_1=0$$

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{d^2(x_A-x_B)}{dt^2}+m\omega_0^2(x_A-x_B)+2k(x_A-x_B)=0 \\ q_2=x_A-x_B \end{array}\right\} \Rightarrow m\frac{d^2q_2}{dt^2}+m\omega_0^2q_2+2kq_2=0$$

Si resolvemos estos sistemas vemos que la solución para q_1 y q_2 será:

$$q_1=(x_A+x_B)\Rightarrow \qquad m\frac{d^2q_1}{dt^2}+m\omega_0^2q_1=0 \qquad \Rightarrow\frac{d^2q_1}{dt^2}+\omega_0^2q_1=0$$

$$q_2=(x_A-x_B)\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+m\omega_0^2q_2+2kq_2=0 \\ \Rightarrow\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+\omega_0^2q_2+2\dfrac{k}{m}q_2=\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+\omega_0^2q_2+2\omega_c^2q_2= \\ =\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+(\omega_0^2+2\omega_c^2)q_2=\dfrac{d^2q_2}{dt^2}+\omega'^2q_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\frac{d^2q_2}{dt^2}+\omega'^2q_2=0$$

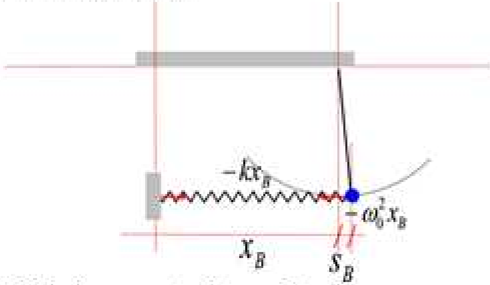
Por lo tanto tendremos que los valores de la velocidad angular para cada modo normal será:

$\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$	$\omega'=\sqrt{\omega_0^2+2\omega_c^2}\Rightarrow\omega_c=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

El valor del periodo del primer modo normal de vibración es muy sencillo, será el mismo que el de un péndulo con la misma longitud que nos indican en el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ \omega_0=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow\sqrt{\frac{g}{l}}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}4}{9{,}8}}=1{,}27s$$

El segundo modo normal es un poco más difícil porque mezcla el periodo del oscilador armónico con el periodo del péndulo. Podemos obtener éste a partir del periodo del sistema, manteniendo fijo uno de los péndulos, dado que si se mantiene fijo uno de los péndulos el péndulo restante se comporta como si no estuviera acoplado. El sistema quedará:



Si planteamos la ecuación dinámica para este sistema obtendremos:

$$m\vec{a} = m\left(\frac{d^2x_B}{dt^2} - \left(-\omega_0^2 x_B\right)\right) = -kx_B \Rightarrow m\frac{d^2x_B}{dt^2} + m\omega_0^2 x_B + kx_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_B}{dt^2} + \omega_0^2 x_B + \frac{k}{m}x_B = 0 \Rightarrow \frac{d^2x_B}{dt^2} + \omega_0^2 x_B + \omega_c^2 x_B = 0 \Rightarrow \frac{d^2x_B}{dt^2} + \left(\omega_0^2 + \omega_c^2\right)x_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_B}{dt^2} + \omega''^2 x_B = 0 \Rightarrow \omega'' = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$$

Como ya sabemos el valor de T_0 y T'', podemos obtener el valor de T_c:

$$\omega'' = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T''} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_c}\right)^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T''} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{T''}\right)^2 = \left(\frac{1}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_c}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{T_c}\right)^2 = \left(\frac{1}{T''}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_0}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{T''}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{T''}\right)^2 - \left(\frac{1}{T_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{9{,}8}{0{,}4} - \frac{1}{(1{,}25)^2}}} = 0{,}55s$$

Por tanto una vez hemos obtenido T_c, ya podemos obtener el periodo del segundo modo normal de vibración.

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2} \\ \omega_c &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_c} \end{aligned}\right\} \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + 2\left(\frac{2\pi}{T_c}\right)^2} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{2}{T_c^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{g}{l} + \frac{2}{T_c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{2}{T_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{9{,}8}{0{,}4} + \frac{2}{(0{,}55)^2}}} = 0{,}31s$$

b) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre dos amplitudes posibles máximas sucesivas de un péndulo después que uno de ellos se retira lateralmente y luego se deja en libertad?

El movimiento del sistema corresponderá a la superposición de las ecuaciones de movimiento de los dos modos normales de vibración.

Si resolvemos las ecuaciones diferenciales para cada una de las coordenadas normales, obtendremos:

$$q_1 = Ce^{i\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = -i\left[\dfrac{C}{2}e^{i\omega_0 t} - \dfrac{C}{2}e^{-i\omega_0 t}\right] \Rightarrow q_1 = C\sin(\omega_0 t) \\ q'_1 = \dfrac{C}{2}e^{i\omega_0 t} + \dfrac{C}{2}e^{-i\omega_0 t} \Rightarrow q'_1 = C\cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

$$q_2 = Ce^{i\omega' t} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = -i\left[\dfrac{D}{2}e^{i\omega' t} - \dfrac{D}{2}e^{-i\omega' t}\right] \Rightarrow q_2 = D\sin(\omega' t) \\ q'_2 = \dfrac{D}{2}e^{i\omega' t} + \dfrac{D}{2}e^{-i\omega' t} \Rightarrow q'_2 = D\cos(\omega' t) \end{cases}$$

Como quiera que el movimiento real de los péndulos es una superposición de estas coordenadas, obtenemos el movimiento de los péndulos deshaciendo la combinación lineal que usamos para obtener q_1 y q_2:

$$x_A = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{1}{2}\left(C\sin(\omega_0 t) + D\sin(\omega' t)\right) \\ x_A = \dfrac{1}{2}\left(C\cos(\omega_0 t) + D\cos(\omega' t)\right) \end{cases}$$

$$x_B = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{1}{2}\left(C\sin(\omega_0 t) - D\sin(\omega' t)\right) \\ x_B = \dfrac{1}{2}\left(C\cos(\omega_0 t) - D\cos(\omega' t)\right) \end{cases}$$

Esta adición-sustracción de senos y cosenos la podemos desarrollar como un producto de senos y cosenos.

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{1}{2}\left(A_0\sin(\omega_0 t) + A_0\sin(\omega' t)\right) = \dfrac{A_0}{2}\left(2\sin\dfrac{1}{2}(\omega_0 t + \omega' t)\cos\dfrac{1}{2}(\omega_0 t - \omega' t)\right) = A_0\sin\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega')t\right]\cos\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega')t\right] \\ x_A = \dfrac{1}{2}\left(A_0\cos(\omega_0 t) + A_0\cos(\omega' t)\right) = \dfrac{A_0}{2}\left(2\cos\dfrac{1}{2}(\omega_0 t + \omega' t)\cos\dfrac{1}{2}(\omega_0 t - \omega' t)\right) = A_0\cos\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega')t\right]\cos\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega')t\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{1}{2}\left(A_0\sin(\omega_0 t) - A_0\sin(\omega' t)\right) = \dfrac{A_0}{2}\left(2\cos\dfrac{1}{2}(\omega_0 t + \omega' t)\sin\dfrac{1}{2}(\omega_0 t - \omega' t)\right) = A_0\cos\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega')t\right]\sin\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega')t\right] \\ x_B = \dfrac{1}{2}\left(A_0\cos(\omega_0 t) - A_0\cos(\omega' t)\right) = \dfrac{A_0}{2}\left(2\sin\dfrac{1}{2}(\omega_0 t - \omega' t)\sin\dfrac{1}{2}(\omega_0 t + \omega' t)\right) = A_0\sin\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega')t\right]\sin\left[\dfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega')t\right] \end{cases}$$

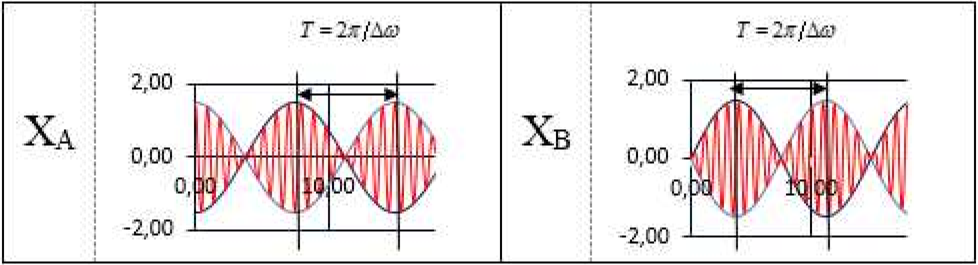
En cualquier caso vemos que el movimiento de los péndulos presenta una pulsación con una velocidad angular :

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega')$$

Y una envolvente que tiene una velocidad angular:

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega')$$

Si representamos gráficamente el movimiento de los péndulos, vemos que el intervalo entre dos amplitudes máximas es el periodo de la envolvente:



Como regla mnemotécnica piensa que la velocidad angular más pequeña será la de la envolvente, dado que es la que oscila menos veces por unidad de tiempo.

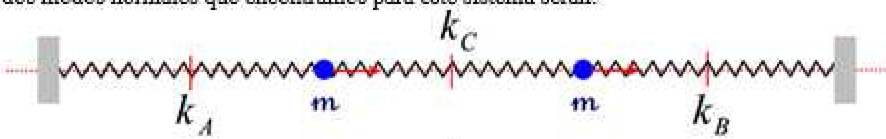
Por tanto, lo que nos están pidiendo en el ejercicio es:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\omega = \dfrac{1}{2}\left(\omega_0 - \omega'\right)\\ \omega = \dfrac{2\pi}{T}\end{array}\right\} \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{T_0} - \dfrac{2\pi}{T'}\right) \Rightarrow T = \dfrac{2}{\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T'}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{0{,}31} - \dfrac{1}{1{,}27}} = 0{,}81s$$

Como quiera que, a priori, es imposible decidir cuál de los dos periodos será mayor, el orden de éstos se decide cuándo se reduce al valor numérico de tal manera que el resultado ha de ser siempre positivo.

Dos osciladores armónicos A y B, de masa m y constantes k_A y k_B, respectivamente, se acoplan juntos mediante un muelle de constante k_C. Halla las frecuencias normales ω' y ω'' y describe los modos normales de oscilación si se cumple la relación: $k_C^2 = k_A k_B$.

Los dos modos normales que encontramos para este sistema serán:



En el primer modo normal se estiran los muelles A y B, aunque desfasados, pero no el muelle C, y en cambio en el segundo modo normal se estiran todos los muelles, vibrando en fase los muelles A y B y estando el muelle C desfasado con respecto a A y B.

Por tanto las ecuaciones dinámicas serán:

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C x_C$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B - k_C x_C$$

Si consideramos que $x_C = (x_A - x_B)$, con respecto a x_A, pero $x_C = (x_B - x_A)$, con respecto a x_B entonces obtendremos las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C(x_A - x_B) \Rightarrow m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C(x_A - x_B)$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B - k_C(x_B - x_A) \Rightarrow m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B + k_C(x_A - x_B)$$

A partir de estas ecuaciones dinámicas podemos obtener las coordenadas normales del sistema, que serán las que expresan los modos normales de vibración:

$$\begin{array}{ll}
m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C(x_A - x_B) & m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C(x_A - x_B) \\
m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B + k_C(x_A - x_B) & -\left[m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B + k_C(x_A - x_B)\right] \\
\hline
m\frac{d^2(x_A + x_B)}{dt^2} = -k_A x_A - k_B x_B & m\frac{d^2(x_A - x_B)}{dt^2} = -k_A x_A + k_B x_B - 2k_C(x_A - x_B)
\end{array}$$

Pero como vemos no es posible ir más allá, porque para avanzar por este método necesitaríamos que se cumpliera la condición adicional que $k_A = k_B$.

Para sortear este escollo y resolver el sistema, recurriremos a un método algo más general. Proponemos las siguientes funciones de prueba:

$$x_A = C_A e^{i\omega t} \quad \frac{dx_A}{dt} = iC_A \omega e^{i\omega t} \quad \frac{d^2x_A}{dt^2} = -C_A \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$x_B = C_B e^{i\omega t} \quad \frac{dx_B}{dt} = iC_B \omega e^{i\omega t} \quad \frac{d^2x_B}{dt^2} = -C_B \omega^2 e^{i\omega t}$$

Introducimos ahora estas funciones de prueba en la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k_A x_A - k_C(x_A - x_B) \Rightarrow -mC_A\omega^2 e^{i\omega t} = -k_A C_A e^{i\omega t} - k_C(C_A e^{i\omega t} - C_B e^{i\omega t}) \Rightarrow -mC_A\omega^2 = -k_A C_A - k_C(C_A - C_B)$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2} = -k_B x_B + k_C(x_A - x_B) \Rightarrow -mC_B\omega^2 e^{i\omega t} = -k_B C_B e^{i\omega t} + k_C(C_A e^{i\omega t} - C_B e^{i\omega t}) \Rightarrow -mC_B\omega^2 = -k_B C_B + k_C(C_A - C_B)$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos el valor de C_A y C_B:

$$\begin{cases} -mC_A\omega^2 = -k_A C_A - k_C(C_A - C_B) \\ -mC_B\omega^2 = -k_B C_B + k_C(C_A - C_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mC_A\omega^2 = -k_A C_A - k_C C_A + k_C C_B \\ -mC_B\omega^2 = -k_B C_B + k_C C_A - k_C C_B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mC_A\omega^2 + k_A C_A + k_C C_A = k_C C_B \\ -mC_B\omega^2 + k_B C_B + k_C C_B = k_C C_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mC_A\omega^2 + k_A C_A + k_C C_A = k_C C_B \\ -mC_B\omega^2 + k_B C_B + k_C C_B = k_C C_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-m\omega^2 + k_A + k_C)C_A = k_C C_B \\ (-m\omega^2 + k_B + k_C)C_B = k_C C_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{C_A}{C_B} = \frac{k_C}{-m\omega^2 + k_A + k_C} \\ \frac{C_A}{C_B} = \frac{-m\omega^2 + k_B + k_C}{k_C} \end{cases}$$

Podemos utilizar la expresión de estos cocientes para obtener el valor de ω como el resultado de una ecuación de segundo grado:

$$\frac{C_A}{C_B} = \frac{k_C}{-m\omega^2 + k_A + k_C} = \frac{-m\omega^2 + k_B + k_C}{k_C} \Rightarrow k_C^2 = (-m\omega^2 + k_B + k_C)(-m\omega^2 + k_A + k_C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_C^2 = m^2\omega^4 - mk_A\omega^2 - mk_C\omega^2 - mk_B\omega^2 + k_A k_B + k_B k_C - mk_C\omega^2 + k_A k_C + k_C^2$$

$$\Rightarrow 0 = m^2\omega^4 - m(k_A + k_B + 2k_C)\omega^2 + (k_A k_B + k_B k_C + k_A k_C)$$

Por lo tanto la ecuación de segundo grado que hay que resolver será:

$$0 = m^2\omega^4 - m(k_A + k_B + 2k_C)\omega^2 + (k_A k_B + k_B k_C + k_A k_C)$$

A partir de esta ecuación obtenemos los valores de ω, que serán la velocidad angular de los modos normales de vibración: