TALLER # 4 - ONDAS Y FLUIDOS

Un objeto de masa 0.2 kg se cuelga de un resorte cuya constante de elasticidad es 80 $\frac{N}{m}$. El cuerpo es sujeto a una fuerza resistiva dada por $-bv$, donde v es su velocidad en m/s and $b = 4\frac{N\cdot s}{m}$. El objeto está sometido a una fuerza sinusoidal dada por $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, donde $F_0 = 2\ N$ y $\omega = 30\ s^{-1}$. En estado estacionario, cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas?.

Solución

Planteamos la ecuación diferencial para el oscilador amortiguado y forzado.

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= ma \\
-kx - bv + F_0 \sin(\omega t) &= m\ddot{x} \\
-kx - b\dot{x} + F_0 \sin(\omega t) &= m\ddot{x} \\
\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

En estado estacionario, la frecuencia de oscilación ω corresponde a la frecuencia de la fuerza de conducción. Definimos $\gamma = \frac{b}{m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \quad \boxed{\sin\omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \\
\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_0}{m}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Expresamos la forma compleja de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{F_0}{m}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad \boxed{z = Ae^{i(\omega t - \delta)}} \\
\left(-A\omega^2 + i\gamma\omega A + A\omega_0^2\right)e^{i\omega t}e^{-i\delta} &= \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad \left(-A\omega^2 + i\gamma\omega A + A\omega_0^2\right) = \frac{F_0}{m}e^{i\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)} \\
\left(-A\omega^2 + i\gamma\omega A + A\omega_0^2\right) &= \frac{F_0}{m}\left(\cos\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
A(\omega_0^2 - \omega^2) &= \frac{F_0}{m}\cos\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1) \\
\gamma\omega A &= \frac{F_0}{m}\sin\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 1 y 2 y sumando, obtendremos:

$$\begin{aligned}
: \quad A^2\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2\right) &= \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \quad \left(\sin^2\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = 1\right) \\
A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{80\frac{N}{m}}{0.2\ kg} = 400\ s^{-2} \quad ; \quad \gamma = \frac{4\frac{N\cdot s}{m}}{0.2\ kg} = 20 s^{-1}} \\
A &= \frac{\frac{2\ N}{0.2\ kg}}{\sqrt{(400 s^{-2} - 900 s^{-2})^2 + ((20 s^{-1})(30 s^{-1}))^2}} \approx 0.0128\ m
\end{aligned}$$