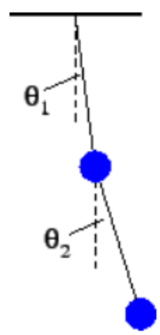
TALLER NO 5. MODOS NORMALES DE SISTEMAS CONTINUOS, LA ECUACIÓN DE ONDA

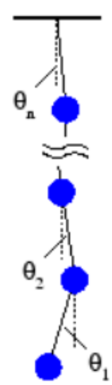
1. Una cuerda de longitud L y masa total M se estira mediante una tensión T a) ¿Cuáles son las frecuencias de los tres modos inferiores de oscilación de la cuerda? b) Compare estas frecuencias con las de los modos normales de 3 masas cada una de ellas de masa $M/3$ separadas a intervalos iguales sobre una cuerda sin masa sometida a una tensión T y de longitud L.

2. Una cuerda uniforme de 2.5 m de longitud y 0.01 kg de masa se somete a una tensión de 10 N. (a) ¿Cuál es la frecuencia de su modo fundamental? (b) Si la cuerda se pone a oscilar en su modo fundamental (modo mas bajo) y luego se toca en un punto a 0.5 m de uno de sus extremos ¿qué frecuencias persistiŕıan?

3. Considere el doble péndulo que se muestra en la figura. (a) Teniendo en cuenta las aproximaciones de $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$ para ángulos pequeños escriba las ecuaciones de movimiento para cada masa. (b) Resuelva dichas ecuaciones y escriba la solución más general para el movimiento de cada masa. (c) Determine la razón entre las frecuencias de los modos normales. (d) esboce una representación de los modos fundamentales.



4. Utilice los aprendido en el ejercicio (3) para resolver el problema de N péndulos acoplados formando una cadena colgante, como se muestra en la figura.



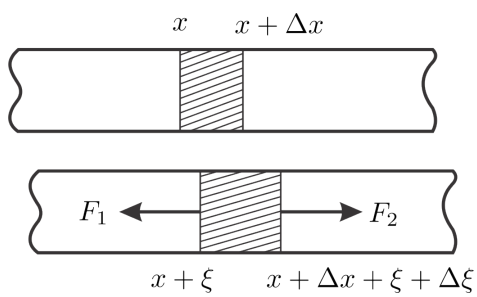
   a) Etiquete las masas con el índice j desde abajo hacia arriba y muestre que la tensión en la j-ésima cuerda se puede escribir como $T_j \approx jmg$ para ángulos pequeños.
   b) Haciendo uso de la segunda ley de Newton para el movimiento horizontal de las masas y considerando nuevamente ángulos pequeños, muestre que la ecuación de movimiento de la j-ésima masa se puede escribir como

$$\ddot{x}_j = -\frac{g}{\ell}\left[(2j-1)x_j - jx_{j+1} - (j-1)x_{j-1}\right]$$

c) Convénzase a si mismo que la ecuación anterior se reduce a la que obtuvo para $N = 2$ (en el ejercicio 3). ¿Cuáles deben ser las condiciones de frontera en este caso? Infortunadamente de aquí en adelante es necesario realizar un proceso numérico para la solución del problema y esto se escapa del objetivo del curso.

5. **Vibraciones longitudinales en una varilla.** En este caso los desplazamientos de las partículas ocurren en la misma dirección de x y no tranversalmente (ver figura). Definiendo ξ como el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio de cada partícula y considerando que la tensión que soporta una sección de la varilla en la posición x se puede calcular como $Y(\partial\xi/\partial x)$, entonces se tiene que

$$(\text{tensión en } x + \Delta x) = (\text{tensión en } x) + \frac{\partial(\text{tensión})}{\partial x}\Delta x$$



a) Suponiendo un área de sección transversal α y utilizando las definiciones anteriores, muestre que la diferencia de las fuerzas aplicadas a una cierta sección de longitud Δx se puede calcular como

$$F_2 - F_1 = \alpha Y \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x$$

b) Aplicando ahora la segunda ley de Newton para la sección comprendida entre x y $x+\Delta x$ y considerando que su masa es $\rho\alpha\Delta x$, pruebe que se puede escribir la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

con $v = \sqrt{Y/\rho}$.

c) Para la solución de la ecuación de onda anterior, suponga soluciones del tipo $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$, con las siguientes condiciones de frontera: Para $x = 0$ la varilla está fija, mientras que para $x = L$ la varilla está libre. Tomando $f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\omega x}{v}\right)$ y aplicando dichas condiciones de frontera, muestre que las frecuencias naturales de la varilla vienen dadas por

$$\nu_n = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

d) Haga un esquema de la forma que tendrían los tres primeros modos normales y determine que parte de la *longitud de onda* de dicho modo cabe en la longitud de la varilla.