

LABORATORIO DE ONDAS Y FLUIDOS 2016-20
PÉNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR UN RESORTE

José Restom y Paula Ordóñez
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
9 de Septiembre de 2016

Resumen

1. Objetivos

- Observar y analizar los diferentes modos normales de los péndulos físicos acoplados.
- Analizar cómo y por qué cambia el periodo de los péndulos a medida que el resorte se va alejando del pivote.
- Hallar la exactitud del experimento y sus posibles fuentes de error.

Sumar todas las fuerzas, encontramos:

$$\sum \tau_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - m_1gl\theta_1 + u_1l$$

$$\sum \tau_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - m_2gl\theta_2 + u_2l_{cm}$$

Usando la ecuación inicial obtenemos:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{l_{cm}mg}{I\cos(\theta_0)}\theta_1 - k\frac{l^2}{I}((\theta_1 + \theta_2)\cos^2\theta_0 + (\theta_1 - \theta_2)\sin^2\theta_0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l_{cm}mg}{I\cos(\theta_0)}\theta_2 - k\frac{l^2}{I}((\theta_2 + \theta_1)\cos^2\theta_0 + (\theta_2 - \theta_1)\sin^2\theta_0)$$

2. Marco Teórico

2.1. Demostración ecuación 4.1

Se usa la segunda ley de Newton para movimientos rotacionales:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Donde τ es el torque sobre el eje principal, $I = l_{cm}^2$ que es el momento de inercia en el centro de masa; $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular.

Se tiene en cuenta la definición de torque:

$$\tau = rxF = rF\sin\theta$$

Se utiliza la ley de Hooke:

$$F = -kx$$

Siguiendo la condición de que k es la constante de elasticidad del resorte y que x es la elongación del mismo.

$$\tau_{s1} = -ka^2(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)) = -ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$

Sabemos que el resorte actúa en ambos péndulos con la misma magnitud pero con diferente dirección; por lo tanto obtenemos que:

$$\tau_{s2} = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_0)$$

Ahora obtenemos el torque debido a las fuerzas aplicadas:

$$\tau_{u1} = u_1l(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_0)) = u_1l_{cm}$$

$$\tau_{u2} = u_2l(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_0)) = u_2l_{cm}$$

2.2. Demostración de las ecuaciones 4.2 y 4.3

Se aplican las condiciones de frontera para el primer modo $0 = \theta_1 - \theta_2$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kl^2}{I}\cos^2\theta_0\right)\phi$$

Para el segundo modo $0 = \theta_1 + \theta_2$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kl^2}{I}\sin^2\theta_0\right)\theta$$

2.3. Demostración de las ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6

De lo anterior, obtenemos un movimiento que es de la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -(\omega_-)\phi$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\omega_+)\phi$$

De las anteriores demostraciones sabemos que:

$$\omega_+^2 = \left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kcl^2}{I}\cos^2\theta_0\right)$$

y

$$\omega_-^2 = \left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kcl^2}{I}\sin^2\theta_0\right)$$

Para obtener la frecuencia sacamos raíz y se tiene que:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{3k_c l}{I} \cos^2 \theta_0} \quad (1)$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{3k_c l}{I} \sin^2 \theta_0} \quad (2)$$

Donde la primera es en fase y la segunda en fase opuesta. [2] [3]

Se sabe que el período de una pulsación de los péndulos está definida como el tiempo transcurrido entre los dos máximos de amplitud o dos ceros de amplitud. Éste está dado por la ecuación:

$$T_{pulsacion} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Delta} \quad (3)$$

3. Análisis cualitativo

¿Cuál es el valor de las frecuencias ω_+ y ω_- cuándo el estado de equilibrio corresponde a los péndulos en posición vertical?

En este caso cada frecuencia tendrá un valor distinto; para ω_+ será máximo al contener un coseno, ya que $\cos(0) = 1$; en el caso de ω_- la frecuencia será mínima, ya que $\sin(0) = 0$.

¿Cómo son las frecuencias de los modos normales cuando el ángulo de equilibrio es $0 = 0^\circ$ y $0 = 45^\circ$?

Las frecuencias de los modos normales varían demasiado de acuerdo a la amplitud angular; en este caso, a medida que el ángulo de equilibrio aumenta, la frecuencia aumenta. Es decir, son directamente dependientes.

¿Cómo es el período de la pulsación en este caso con respecto a los periodos medidos en las otras condiciones?

En el caso de nuestro montaje no se alcanzó a llegar a los 45° , pero se pudo observar que al aumentar el ángulo de la posición de "equilibrio" se hacía más difícil medir el periodo a pesar que este aumentaba.

Piense cómo las fuerzas de fricción presentes afectan sus resultados experimentales.

Las fuerzas de fricción alrededor de un objeto en movimiento hacen que la velocidad de éste disminuya y por lo tanto, hacen que en un determinado movimiento pare su movimiento. En el caso de los péndulos físicos acoplados, las fuerzas de fricción afectan en mayor medida a las dos masas del final del péndulo;

éstas fuerzas también afectan a las varillas debido a que son relativamente largas. Las fuerzas de fricción acá también reducen la velocidad lineal del péndulo y afecta su frecuencia angular; al afectar a esta última el periodo de oscilación no es uniforme a medida que pasa tiempo, es decir, la fricción hace que el período disminuya y también se observa que la amplitud angular va disminuyendo. Estas fuerzas de fricción son producidas por el aire dentro del laboratorio y por las corrientes de éste que pueden ser generadas por el movimiento de algunas personas o de otras corrientes de aire provenientes del exterior.[1]

Explique físicamente: ¿Por qué las frecuencias de los modos normales cuando $\theta = 45^\circ$ son iguales?

Las frecuencias de los modos normales cuando $\theta = 45^\circ$ son iguales porque estas se rigen por las ecuaciones de osciladores acoplados:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{2k_c l^2}{I} \sin^2 \theta_0\right)\phi \quad (4)$$

y por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{2k_c l^2}{I} \sin^2 \theta_0\right)\theta \quad (5)$$

Al observar las ecuaciones se puede notar que éstas están definidas por senos y cosenos; cuando el ángulo es 45° los valores de seno y coseno son iguales $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Análisis cuantitativo

4.1. Momento de Inercia

El péndulo del experimento es el mostrado en la siguiente figura:

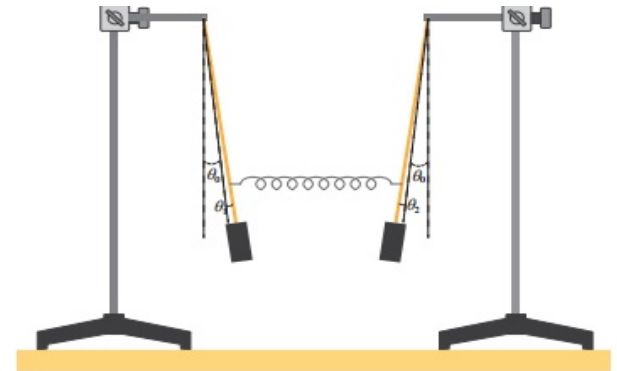


Figura 1: Modelo de péndulo usado en la práctica [4]

Para calcular el momento de inercia de cada uno de los péndulos se deben sumar los momentos de inercia de la barra y del cilindro.

$$I = I_{barra} + I_{cilindro} \quad (6)$$

CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA BARRA

Para calcular este momento de inercia se debe saber que el centro de masa no es el centro de la barra; por lo tanto se debe usar el teorema de ejes paralelos.[5]

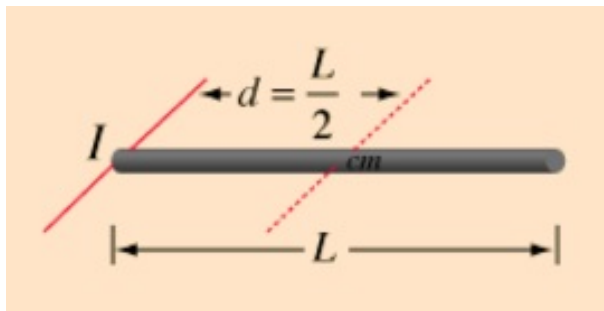


Figura 2: Figura para calcular el momento de Inercia sobre un extremo. [5]

$$I_{barra} = I_{cm} + Md^2$$

Reemplazando se tiene que:

$$I_{extremo} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

Se realiza la suma de fraccionarios y se tiene que:

$$I_{extremo} = \frac{1}{3}ML^2$$

En este caso el grosor de la varilla es despreciable, ya que el radio de ésta es $5,6 \times 10^{-3}m$.

Sabemos que la longitud de la barra es de $40cm$, su masa es $103,4gr$ y con esto calculamos el momento de inercia de la varilla:

$$I_{barra} = 5,52 \times 10^{-3} Kgm^2$$

CÁLCULO DE MOMENTO DE INERCIA DEL CILINDRO

En este caso, el cilindro es macizo por lo que se puede usar el momento de inercia conocido de éste:

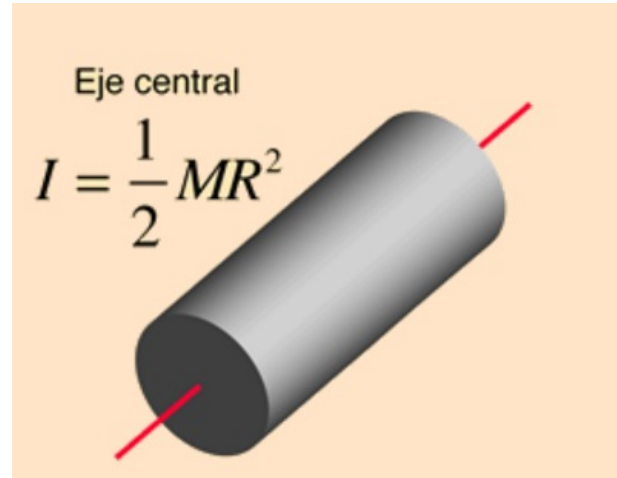


Figura 3: Momento de inercia de un cilindro. [6]

Se sabe que la masa del cilindro es $200gr$ y su radio es $1,27cm$

$$I_{cilindro} = 1,54 \times 10^{-5} Kgm^2$$

Ahora que se tienen los dos momentos de inercia, se puede calcular el momento de inercia total del péndulo:

$$I = I_{barra} + I_{cilindro}$$

$$I = 5,54 \times 10^{-3} kgm^2$$

MOMENTO DE INERCIA CON EL PERÍODO DE OSCILACIÓN

En este caso se tomó el periodo de oscilación varias veces:

Intento	Período (s)
1	1.17
2	1.1
3	1.14
4	1.12
5	1.18
6	1.13
7	1.12
8	1.12
Promedio	1.14

Cuadro 1: Período de oscilación del péndulo físico

Para poder calcular el momento de inercia con el período se tiene la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgd}} \quad (7)$$

Donde I_A es el momento de inercia del péndulo, m es la masa total, g la gravedad y d es la distancia del pivote al centro de masa.

Para hallar el centro de masa se tiene que:

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$X_{cm} = 0,16m$$

Se tiene el centro de masa; con esto se puede hallar d que es la distancia del pivote al centro de masa. En este caso $d = 0,4m - X_{cm}$, es decir: $d = 0,24m$. Teniendo estos datos ya se puede calcular el momento de inercia:

$$\frac{T^2 mgd}{4\pi^2} = I_A$$

$$2,4 \times 10^{-3} = I_A$$

Los resultados de ambos métodos son similares, sin embargo el primero es más confiable porque al medir el período se pueden cometer errores que lleven a la diferencia de éstos. Para el resto del informe se tomará la inercia hallada en la primera parte de éste procedimiento.

4.2. Determinación de la constante elástica

Para hallar el valor de la constante elástica se tomaron varios valores de elongación vs masa que colgaba del resorte. En este caso, la fuerza que se le aplica al resorte es el peso de la masa.

Masa(kg)	Elongación($x - x_0$)(m)	F(N)
0	0.19	0
0.01	3×10^{-3}	0.098
0.03	0.01	0.294
0.06	0.025	0.588
0.08	0.03	0.784
0.11	0.045	1.078
0.13	0.055	1.274
0.16	0.065	1.568
0.18	0.08	1.764
0.19	0.083	1.862
0.2	0.09	1.96

Cuadro 2: Elongación del resorte.

Para hallar la constante elástica, en este caso se realizó una gráfica junto con su regresión lineal y se obtuvo:

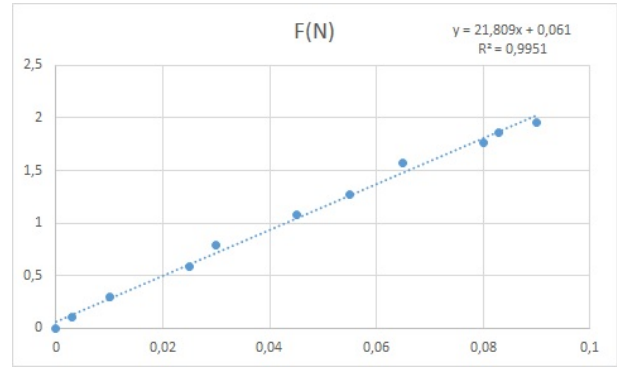


Figura 4: Gráfica F vs x

El coeficiente que acompaña la x es el valor de la constante de elongación, por lo tanto:

$$k_c = 21,809$$

El valor de R^2 indica que los resultados son bastante buenos, ya que el valor presentado en la gráfica es cercano a 1.

4.3. ω_+ en función de l

Para hallar esta frecuencia se tienen en cuenta los periodos de los péndulos en fase o modo asimétrico.

Periodo (s)	Distancia al pivote(cm)
-------------	-------------------------

Cuadro 3: Períodos de péndulos en fase

Referencias

- [1] OLMO, M. y NAVE, R., *Fricción del aire*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/airfri.html>
- [2] ANÓNIMO, *Oscilaciones Acopladas*. Recuperado de: <https://sbrouard.webs.ull.es/act4ocente/tecexp1/pacoplados2.pdf>
- [3] ANÓNIMO, *Dos osciladores Acoplados*. Recuperado de: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html>
- [4] CASTRILLÓN, L.(2016), *Guía de Laboratorio, Ondas y Fluidos*. Universidad de Los Andes, Departamento de Física: Bogotá, Colombia.
- [5] OLMO, M. y NAVE, R., *Momento de la Varilla sobre su extremo*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/mi2.html>

- [6] OLMO, M. y NAVE, R., *Momento de Inercia: Cilindro*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/icyl.html#icyl>
- [7] CUEVAS, J., *Práctica: Momentos de Inercia y Péndulo Físico*. Recuperado de: <http://personales.us.es/~jcuevas/docencia/Pendolo.pdf>