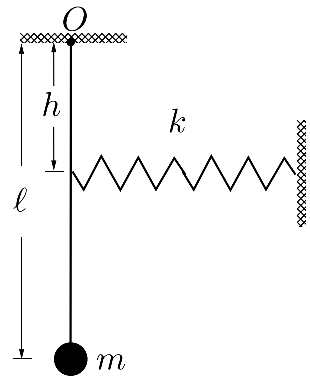
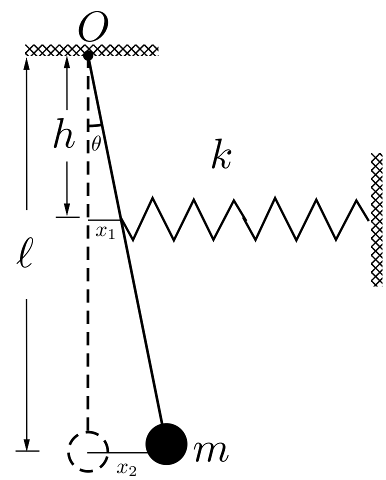
SOLUCIÓN TALLER # 2 - ONDAS Y FLUIDOS



1. Un péndulo simple conformado por una barra rígida sin masa de longitud ℓ y una masa m en su extremo, se conecta a un resorte ligero de constante k a una distancia h desde O (Ver figura). El resorte no está deformado cuando el péndulo está vertical. Calcular la frecuencia angular (ω) para pequeñas oscilaciones.

Solución

A partir del esquema a la derecha y usando os criterios de aproximación para ángulos pequeños, tenemos:



$$
\begin{aligned}
\sin\theta &\approx \tan\theta \approx \theta = \frac{x_1}{h} \quad \rightarrow \quad x_1 = h\theta \\
\sin\theta &\approx \tan\theta \approx \theta = \frac{x_2}{L} \quad \rightarrow \quad x_2 = L\theta \\
\sum \tau_O &= I_O\alpha \quad \rightarrow \quad -kx_1h - mgx_2 = m\ell^2\alpha \\
-kh^2\theta - mg\ell\theta &= m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{kh^2 + mg\ell}{m\ell^2}\right)\theta = 0 \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{kh^2 + mg\ell}{m\ell^2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kh^2}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell}}}
\end{aligned}
$$

Opción 2 (Método Energías)

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_px_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \rightarrow \quad k_p = m\omega_p^2 = \frac{mg}{\ell} \\
E &= \frac{1}{2}k(h\theta)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{\ell}\right)(\ell\theta)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \\
E &= \frac{1}{2}kh^2\theta^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\left(kh^2 + mg\ell\right)\theta^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \\
\frac{dE}{dt} &= 0 = (kh^2 + mg\ell)\theta\dot{\theta} + m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}\left(m\ell^2\ddot{\theta} + (kh^2 + mg\ell)\theta\right) = 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{kh^2 + mg\ell}{m\ell^2} &= 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kh^2 + mg\ell}{m\ell^2}} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kh^2}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell}}
\end{aligned}
$$

2. Se cuelga un objeto de masa 0.2 kg de un resorte cuya constante es 80 N/m. Se somete el objeto a una fuerza resistiva dada por $-bv$, siendo v su velocidad en m/s.

   a. Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema.

   b. Si la frecuencia angular con amortiguamiento es $\sqrt{3}/2$ de la frecuencia sin amortiguamiento. Calcular el valor de la constante b

   c. Cuál es el valor de Q del sistema, y en que factor se reducirá la amplitud del sistema después de 10 oscilaciones completas.

Solución

En el caso de oscilaciones libres no existe fricción y la ecuación diferencial viene dada por:

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad -kx = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para calcular la constante, usamos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\omega_0^2 = \frac{1}{4}\omega_0^2 \quad \rightarrow \quad b = m\omega_0 = \sqrt{mk}$$

$$b = \sqrt{(0.2\ kg)\left(80\frac{N}{m}\right)} = 4\frac{kg}{s}$$

Para calcular Q, usamos:

$$Q = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{m\omega_0}{m\omega_0} = 1$$

Después de 10 oscilaciones $t = 10T = \frac{20\pi}{\omega_0}$. Usando este resultado tenemos:

$$A = A_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = A_0 e^{-\frac{\omega_0\left(\frac{20\pi}{\omega_0}\right)}{2}} = A_0 e^{-10\pi} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{A_0} = e^{-10\pi} \approx 2.27 \times 10^{-14}$$