

**LABORATORIO DE ONDAS Y FLUIDOS 2016-20**  
**PÉNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR UN RESORTE**

*José Restom y Paula Ordóñez*  
*Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia*  
**9 de Septiembre de 2016**

**Resumen**

## 1. Objetivos

- Observar y analizar los diferentes modos normales de los péndulos físicos acoplados.
- Analizar cómo y por qué cambia el periodo de los péndulos a medida que el resorte se va alejando del pivote.
- Hallar la exactitud del experimento y sus posibles fuentes de error.

Sumar todas las fuerzas, encontramos:

$$\sum \tau_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - m_1gl\theta_1 + u_1l$$

$$\sum \tau_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - m_2gl\theta_2 + u_2l_{cm}$$

Usando la ecuación inicial obtenemos:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{l_{cm}mg}{I\cos(\theta_0)}\theta_1 - k\frac{l^2}{I}((\theta_1 + \theta_2)\cos^2\theta_0 + (\theta_1 - \theta_2)\sin^2\theta_0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l_{cm}mg}{I\cos(\theta_0)}\theta_2 - k\frac{l^2}{I}((\theta_2 + \theta_1)\cos^2\theta_0 + (\theta_2 - \theta_1)\sin^2\theta_0)$$

## 2. Marco Teórico

### 2.1. Demostración ecuación 4.1

Se usa la segunda ley de Newton para movimientos rotacionales:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Donde  $\tau$  es el torque sobre el eje principal,  $I = l_{cm}^2$  que es el momento de inercia en el centro de masa;  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  es la aceleración angular.

Se tiene en cuenta la definición de torque:

$$\tau = rxF = rF\sin\theta$$

Se utiliza la ley de Hooke:

$$F = -kx$$

Siguiendo la condición de que  $k$  es la constante de elasticidad del resorte y que  $x$  es la elongación del mismo.

$$\tau_{s1} = -ka^2(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)) = -ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$

Sabemos que el resorte actúa en ambos péndulos con la misma magnitud pero con diferente dirección; por lo tanto obtenemos que:

$$\tau_{s2} = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_0)$$

Ahora obtenemos el torque debido a las fuerzas aplicadas:

$$\tau_{u1} = u_1l(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_0)) = u_1l_{cm}$$

$$\tau_{u2} = u_2l(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_0)) = u_2l_{cm}$$

### 2.2. Demostración de las ecuaciones 4.2 y 4.3

Se aplican las condiciones de frontera para el primer modo  $0 = \theta_1 - \theta_2$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kl^2}{I}\cos^2\theta_0\right)\phi$$

Para el segundo modo  $0 = \theta_1 + \theta_2$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kl^2}{I}\sin^2\theta_0\right)\theta$$

### 2.3. Demostración de las ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6

De lo anterior, obtenemos un movimiento que es de la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -(\omega_-)\phi$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\omega_+)\phi$$

De las anteriores demostraciones sabemos que:

$$\omega_+^2 = \left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kcl^2}{I}\cos^2\theta_0\right)$$

y

$$\omega_-^2 = \left(\frac{l_{cm}mg}{I\cos\theta_0} + \frac{2kcl^2}{I}\sin^2\theta_0\right)$$

Para obtener la frecuencia sacamos raíz y se tiene que:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{3k_c l}{I} \cos^2 \theta_0} \quad (1)$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{3k_c l}{I} \sin^2 \theta_0} \quad (2)$$

Donde la primera es en fase y la segunda en fase opuesta. [2] [3]

Se sabe que el período de una pulsación de los péndulos está definida como el tiempo transcurrido entre los dos máximos de amplitud o dos ceros de amplitud. Éste está dado por la ecuación:

$$T_{pulsacion} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Delta} \quad (3)$$

### 3. Análisis cualitativo

*¿Cuál es el valor de las frecuencias  $\omega_+$  y  $\omega_-$  cuándo el estado de equilibrio corresponde a los péndulos en posición vertical?*

En este caso cada frecuencia tendrá un valor distinto; para  $\omega_+$  será máximo al contener un coseno, ya que  $\cos(0) = 1$ ; en el caso de  $\omega_-$  la frecuencia será mínima, ya que  $\sin(0) = 0$ .

*¿Cómo son las frecuencias de los modos normales cuando el ángulo de equilibrio es  $0 = 0^\circ$  y  $0 = 45^\circ$ ?*

Las frecuencias de los modos normales varían demasiado de acuerdo a la amplitud angular; en este caso, a medida que el ángulo de equilibrio aumenta, la frecuencia aumenta. Es decir, son directamente dependientes.

*¿Cómo es el período de la pulsación en este caso con respecto a los periodos medidos en las otras condiciones?*

En el caso de nuestro montaje no se alcanzó a llegar a los  $45^\circ$ , pero se pudo observar que al aumentar el ángulo de la posición de "equilibrio" se hacía más difícil medir el periodo a pesar que este aumentaba.

*Piense cómo las fuerzas de fricción presentes afectan sus resultados experimentales.*

Las fuerzas de fricción alrededor de un objeto en movimiento hacen que la velocidad de éste disminuya y por lo tanto, hacen que en un determinado movimiento pare su movimiento. En el caso de los péndulos físicos acoplados, las fuerzas de fricción afectan en mayor medida a las dos masas del final del péndulo;

éstas fuerzas también afectan a las varillas debido a que son relativamente largas. Las fuerzas de fricción acá también reducen la velocidad lineal del péndulo y afecta su frecuencia angular; al afectar a esta última el periodo de oscilación no es uniforme a medida que pasa tiempo, es decir, la fricción hace que el período disminuye y también se observa que la amplitud angular va disminuyendo. Estas fuerzas de fricción son producidas por el aire dentro del laboratorio y por las corrientes de éste que pueden ser generadas por el movimiento de algunas personas o de otras corrientes de aire provenientes del exterior.[1]

**Explique físicamente: ¿Por qué las frecuencias de los modos normales cuando  $\theta = 45^\circ$  son iguales?**

Las frecuencias de los modos normales cuando  $\theta = 45^\circ$  son iguales porque estas se rigen por las ecuaciones de osciladores acoplados:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{2k_c l^2}{I} \sin^2 \theta_0\right)\phi \quad (4)$$

y por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{l_{cm}mg}{I \cos \theta_0} + \frac{2k_c l^2}{I} \sin^2 \theta_0\right)\theta \quad (5)$$

Al observar las ecuaciones se puede notar que éstas están definidas por senos y cosenos; cuando el ángulo es  $45^\circ$  los valores de seno y coseno son iguales  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

## 4. Análisis cuantitativo

### 4.1. Momento de Inercia

El péndulo del experimento es el mostrado en la siguiente figura:



Figura 1: Modelo de péndulo usado en la práctica [4]

Para calcular el momento de inercia de cada uno de los péndulos se deben sumar los momentos de inercia de la barra y del cilindro.

$$I = I_{\text{barra}} + I_{\text{cilindro}} \quad (6)$$

#### CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA BARRA

Para calcular este momento de inercia se debe saber que el centro de masa no es el centro de la barra; por lo tanto se debe usar el teorema de ejes paralelos.[5]

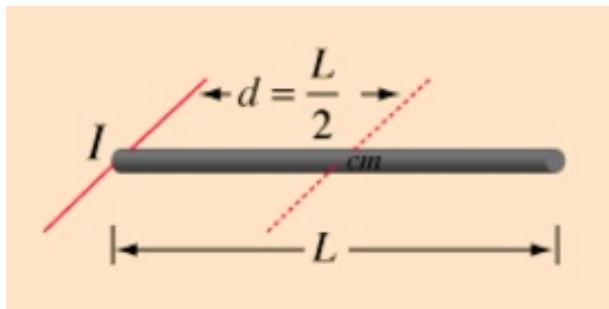


Figura 2: Figura para calcular el momento de Inercia sobre un extremo. [5]

$$I_{\text{barra}} = I_{\text{cm}} + Md^2$$

Reemplazando se tiene que:

$$I_{\text{extremo}} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

Se realiza la suma de fraccionarios y se tiene que:

$$I_{\text{extremo}} = \frac{1}{3}ML^2$$

En este caso el grosor de la varilla es despreciable, ya que el radio de ésta es  $5,6 \times 10^{-3}m$ .

Sabemos que la longitud de la barra es de  $40cm$ , su masa es  $103,4gr$  y con esto calculamos el momento de inercia de la varilla:

$$I_{\text{barra}} = 5,52 \times 10^{-3} Kgm^2$$

#### CÁLCULO DE MOMENTO DE INERCIA DEL CILINDRO

En este caso, el cilindro es macizo por lo que se puede usar el momento de inercia conocido de éste:

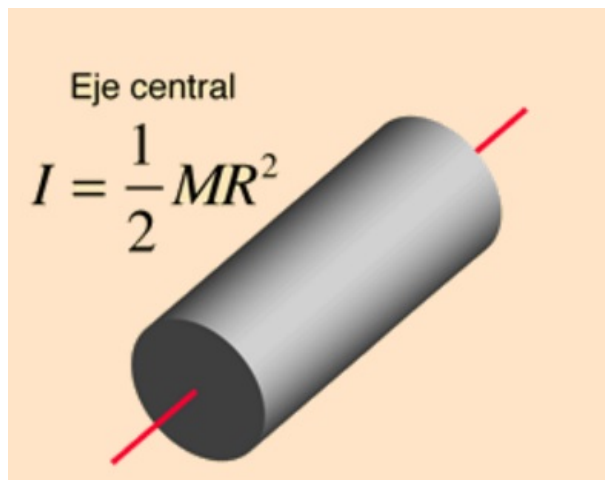


Figura 3: Momento de inercia de un cilindro. [6]

Se sabe que la masa del cilindro es  $200gr$  y su radio es  $1,27cm$

$$I_{\text{cilindro}} = 1,54 \times 10^{-5} Kgm^2$$

Ahora que se tienen los dos momentos de inercia, se puede calcular el momento de inercia total del péndulo:

$$I = I_{\text{barra}} + I_{\text{cilindro}}$$

$$I = 5,54 \times 10^{-3}$$

#### 4.2. Determinación de la constante elástica

Para hallar el valor de la constante elástica se tomaron varios valores de elongación vs masa que colgaba del resorte.

Masa(kg)	Elongación( $x - x_0$ )(m)
0	0.19
0.01	$3 \times 10^{-3}$

#### Referencias

- [1] OLMO, M. y NAVE, R., *Fricción del aire*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/airfri.html>
- [2] ANÓNIMO, *Oscilaciones Acopladas*. Recuperado de: <https://sbrouard.webs.ull.es/actadocente/tecexpI/pacoplados2.pdf>

- [3] ANÓNIMO, *Dos osciladores Acoplados* Recuperado de: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados/acoplados.html>
- [4] CASTRILLÓN, L.(2016), *Guía de Laboratorio, Ondas y Fluidos*. Universidad de Los Andes, Departamento de Física: Bogotá, Colombia.
- [5] OLMO, M. y NAVE, R., *Momento de la Varilla sobre su extremo*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/mi2.html>
- [6] OLMO, M. y NAVE, R., *Momento de Inercia: Cilindro*. Recuperado de: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/icyl.html#icyl>