Laboratorio de Ondas y Fluidos 201610

EXPERIMENTO 7: ONDAS MECÁNICAS EN UNA CUERDA

Luis Felipe Duarte L.[1] **Sofía M. Delgado Balaguera**[2]

[1]*Departamento de Geociencias e Ingeniería Civil y Ambiental*

[2]*Departamento de Geociencias*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

28-03-2016

Resumen

El estudio de ondas mecánicas que se transmiten en una cuerda puede verse aplicada al estudio de fenómenos industriales como en mediciones de velocidades y movimientos de objetos sometidos a un fluido. Debido a esto, la importancia de comprender las ondas en general, ejemplificadas por el movimiento de una cuerda se hace útil para optimizar sistemas en los que se utilice aire u otros fluidos para crear y manejar sistemas. A partir de esta práctica experimental se llegó a obtener que la frecuencia de un oscilador de frecuencia establecida de 60 Hz se obtuvo en base a las mediciones de una cuerda que oscilaba en resonancia con valores de 56,18 Hz $\pm$ 1,21 Hz. Junto con esto se probaron varios métodos para hallar la frecuencia y se discutió su fidelidad.

1. Introducción

Al aplicar una perturbación en determinado tiempo en una cuerda, se produce un pulso que se propaga de manera longitudinal a través de la cuerda. Esta propagación o bien deformación que surge en el sistema se da por choques de moléculas adyacentes entre sí. El fenómeno producido por la propagación transversal de la perturbación se acopla al comportamiento descrito por una ecuación de onda. La energía se transporta a lo largo de todo el sistema, haciendo que este oscile de forma continua y con la misma amplitud, a este fenómeno se conoce con el nombre de onda estacionaria, producto del reflejo de las ondas emitidas hacia un punto fijo en los extremos de la cuerda. En esta onda son evidentes nodos, o los puntos fijos de la onda, mientras que los antinodos oscilan con una amplitud máxima y se encuentran en medio de dos nodos.

El desplazamiento de la onda puede ocurrir en diferentes modos, el primer modo observable está descrito mediante el comportamiento mostrado en la ecuación (1.1), este caso se toma como una sumatoria de osciladores infinitos. Mientras que, cuando la cuerda posee sus dos extremos fijos la ecuación que describe el movimiento es la (1.2).

La velocidad de propagación de una onda mecánica, depende de la longitud de la cuerda, la densidad de masa y la tensión a la cual es sometida la cuerda (en este caso las perturbaciones se realizan a través de un oscilador mecánico que produce vibraciones en la cuerda), esta dependencia es evidente en la ecuación (1.3). Por otro lado, la longitud de onda producida está dada por la velocidad de propagación de la misma y la frecuencia de los modos normales, tal como se ve en la ecuación (1.4).

$$y_{(x,t)} = \left(A_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)\right) \cos(v_n t - \propto_n) \quad \mathbf{(1.1)}$$

$$y_{(x,t)} = A_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) \cos(v_n t - \propto_n) \quad \mathbf{(1.2)}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{T}} = \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \mathbf{(1.3)}$$

$$\lambda_n = \frac{v}{v_n} = \frac{2l}{n} \quad \mathbf{(1.4)}$$

2. Procedimiento experimental

Para esta práctica experimental se empleó un oscilador electromecánico Phywe de frecuencia $v = 60\ Hz$ con el cual se produjeron las oscilaciones sobre la cuerda del sistema. También, se utilizaron soportes universales para ajustar una polea al borde de la mesa por donde se posiciona la cuerda oscilante que en su otro extremo está atada al oscilador. Junto a todo esto, se usaron recipientes con agua con el cual se varió la masa que colgaba de la cuerda que, en consecuencia, cambiaba la tensión ejercida por la cuerda y por lo tanto, el modo de oscilación de la cuerda.

De manera separada, fue necesario un flexómetro para medir las distancias generadas entre nodos o secciones antinodales formadas por la oscilación de la cuerda, una regla para cuantificar la medida de la cuerda; una jeringa para controlar pausadamente el aumento de masa (agua) en el recipiente que cuelga de la polea y una balanza electrónica para realizar medidas de los pesos de los objetos involucrados: como la cuerda y las masas.

2.1 Primera parte

Inicialmente, es necesario establecer las propiedades del medio de propagación de las ondas: la cuerda; por lo que es necesario calcular la densidad de masa de la misma midiendo su longitud con el flexómetro y su peso con la balanza electrónica. Una vez realizado esto, se procede a fijar la polea y a colgar una masa inicial determinada colgada de la cuerda.

Al encender el oscilador, se debe observar la propagación de la onda y, regulando la masa de agua con la jeringa, se debe buscar una imagen de oscilación en la que se observen 6 antinodos y a partir de aquí se debe seguir aumentando la masa en el recipiente hasta ir disminuyendo la cantidad de antinodos de 6 a 2 y para cada caso se debe medir la distancia de separación entre los nodos.

Seguidamente se debe realizar el mismo procedimiento pero esta vez, tomando como masa inicial el recipiente con dos masas deseadas y a partir de ahí incrementar la masa con agua y repetir las mediciones para el caso anterior.

2.2 Segunda parte

Luego, se debe tomar la longitud inicial L de la cuerda usada para la primera parte y ajustar a un valor fijo la tensión causada por la masa en el recipiente, y esta vez, se debe variar pausadamente la longitud inicial L de la cuerda hasta obtener, inicialmente, los mismos 6 antinodos conseguidos en las primeras mediciones realizadas. A diferencia del procedimiento anterior, en este es necesario medir la distancia entre nodos y la nueva longitud de la cuerda entre el oscilador y la polea.

Finalmente, se debe variar la longitud de la cuerda hasta obtener 2 antinodos y para cada número de antinodos se deben realizar las mismas mediciones para cuando se consiguieron 6 antinodos. De esta forma es posible analizar la relación entre λ_n y L.

3. Análisis de resultados

Usando la relación establecida por la ecuación (3) se tiene que a partir de:

$$v_n = \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Se da que:

$$2\ln(\lambda_n) = \ln(T) - \ln\left(\mu\, v_n{}^2\right)$$

$$\ln(\lambda_n) = \frac{1}{2}\ln(T) - \frac{1}{2}\ln\left(\mu\, v_n{}^2\right)$$

expresión, la cual tiene como variables linealizadas $\ln(\lambda_n)$ y $\ln(T)$.

Habiendo conseguido esta relación es necesario calcular la densidad de masa de la cuerda, teniendo:

CUERDA	
$\boldsymbol{m\ (kg \pm 1\times10^{-4}\ kg)}$	$0{,}3\times10^{-4}$
$\boldsymbol{l\ (m\ \pm 0{,}001\ m)}$	1

Tabla 1: Propiedades de la cuerda.

De donde se obtiene que:

$$\boldsymbol{\mu} = 3\times10^{-4}\ {}^{kg}/_{m}\ \pm 0{,}0005\ {}^{kg}/_{m}$$

T		
Antinodos n	$\boldsymbol{m\ (kg\ \pm\ 1\times10^{-4}\ kg)}$	$\boldsymbol{T\ (N)}$
6	0,0167	0,163
5	0,0215	0,210
4	0,0377	0,369
3	0,0641	0,628
2	0,1359	1,333

Tabla 2: Tensiones calculadas para el sistema.

Usando los datos obtenidos en la Primera Parte Experimental se tiene que:

Longitud entre nodos (Longitud de onda)		
Antinodo n	$\boldsymbol{\lambda_n/2\ (m \pm 0{,}001\ m)}$	$\boldsymbol{\lambda_n\ (m \pm 0{,}002\ m)}$
6	0,20	0,40
5	0,26	0,52
4	0,30	0,60
3	0,38	0,76
2	0,59	1,18

Tabla 3: Distancias medidas entre nodos

A partir de estos datos, y usando la segunda igualdad de la ecuación (1.3) es posible conocer la longitud de onda λ_n:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}$$

Frecuencia del Oscilador v_n	
n	$v_n\ (Hz\ \pm 8\ Hz)$
6	58,27
5	50,87
4	58,45
3	60,20
2	56,42
v_n Promedio	**56,84**

Tabla 4: Longitud de onda para el sistema.

Ahora se tomarán los valores resaltados para juzgar la exactitud de los datos tomados, al usarlos en la ecuación en la ecuación 1.3:

$$v = \frac{1}{\lambda_n}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v = \frac{1}{0{,}76}\sqrt{\frac{0{,}628}{3\times 10^{-4}}}$$

$$\boldsymbol{v_n = 60{,}20\ Hz\ \pm 8\ Hz}$$

$$\boldsymbol{E_1} = \frac{|v_{Teo} - v_{Exp}|}{v_{Teo}} \times 100 = \frac{3{,}16}{60} \times 100 = \ \boldsymbol{5{,}26}\ \%$$

Realizando una regresión de los datos de la tensión vs la longitud de onda se obtiene que:

REGRESIÓN LINEAL		
B	56,18	Frecuencia v
A	$\pm$ 1,21	Incertidumbre de v

Tabla 5: Regresión de la tensión y la longitud de onda.

A partir de estos resultados de $\boldsymbol{v_n = 60{,}20\ Hz}$ del calculo y $\boldsymbol{v_n = 56{,}18\ Hz}$ de la regresión se puede concluir que el error atribuido a los datos es de 5,26% pero aun así la incertidumbre en el resultado hallado con los valores de prueba permite establecer un rango en el que sí se encuentra la frecuencia teórica del oscilador establecida antes $\boldsymbol{v = 60\ Hz}$, por lo que a pesar del error que puede atribuirse a los instrumentos de medición y al error humano, se obtiene un valor muy cercano al esperado.

Ahora, a partir de la ecuación (1.3) es posible establecer una relación lineal entre el número de antinodos n y la longitud inicial de la cuerda L para la parte Experimental 2, dada por:

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n}$$

$$v_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$n = 2v_n\sqrt{\frac{T}{\mu}}\ L + 0$$

donde puede reconocerse que la pendiente de esta recta está dada por $2v_n\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ y el corte con el eje y dado por 0. Así, usando los datos de la Parte Experimental 2, se tiene:

Antinodos n	$L\ (m\ \pm 5\times 10^{-3}\ m)$
6	1,14
5	0,95
4	0,79
3	0,61

Tabla 6: Longitud de la cuerda en función de los modos

Con estos datos es posible realizar otra regresión lineal con el fin de obtener el valor de la frecuencia v y su incertidumbre, obteniendo:

REGRESIÓN LINEAL		
B	54,83	Frecuencia v
A	$\pm$ 7,64	Incertidumbre de v

Tabla 7: Regresión de los antinodos y la longitud.

$$\boldsymbol{E_2} = \frac{|v_{Teo} - v_{Exp}|}{v_{Teo}} \times 100 = \frac{3{,}16}{60} \times 100 = \ \boldsymbol{8{,}61}\ \%$$

A partir de estos resultados de $\boldsymbol{v_n = 54{,}83\ Hz}$ se puede observar que el error atribuido a los datos es de 8,61% pero aun así la incertidumbre en el resultado hallado con los valores de prueba permite establecer un rango en el que sí se encuentra la frecuencia teórica del oscilador establecida antes $\boldsymbol{v = 60\ Hz}$, por lo que se puede decir que se obtuvo un valor muy cercano al esperado.

A pesar de que se obtienen valores e incertidumbres similares, se ve que comparando ambos métodos para calcular la frecuencia del oscilador, se obtiene una discrepancia menor con el primer método. Sin embargo, los factores de error para el primer método involucran más fuentes de error ya que para desarrollarlo se requieren de mayor cantidad de medidas y por lo tanto se obtienen mayores incertidumbres sumadas al error humano; mientras que para el segundo método solo se requiere un set de medidas y una regresión lo que guía a un poco menos de error en el resultado.

4. Conclusiones

- Se puede concluir que la frecuencia del oscilador si se puede determinar experimentalmente a partir del estudio de las ondas estacionarias en una cuerda.

- Cuando se varía la longitud de la cuerda pero no la masa que se ubica como tensión para la cuerda se observa que la distancia entre nodos se mantiene casi constante.

- Durante la estimación de los modos normales, no es posible fijar una cantidad exacta de agua en el recipiente para hallar la oscilación exacta. Esto pudo conllevar a mediciones equivocadas que se podrían reflejar en los errores para los valores calculados de la frecuencia.

5. Referencias

1. French, A. P. Vibraciones y ondas: Curso de física del M.I.T. Barcelona: Editorial Reverté, 1974.

2. Departamento de Física. (2016). Experimento 7: Ondas mecánicas en una cuerda. Bogotá. Universidad de los Andes