SOLUCIONARIO

TALLERES EN CLASE:

FISICA DE OSCILACIONES, ONDAS Y OPTICA

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Física
Sede Manizales

SEMESTRE 01/2011

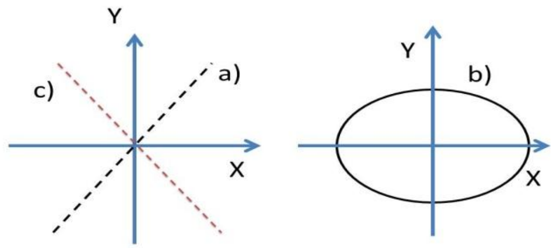
Prof. H. Vivas C.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MANIZALES
SOLUCIONARIO I – FISICA II: OSCILACIONES, ONDAS Y OPTICA.
Semestre 01/2011

1. *Movimiento Armónico Simple*. Una partícula cuya masa es de 0.5 kg se mueve con movimiento armónico simple. Su periodo es de 2 s y la amplitud de movimiento es de 12 cm. Calcular la aceleración, la fuerza, la energía potencial y la energía cinética cuando la partícula está a 8 cm de su posición de equilibrio.
   R:
   Aceleración en la posición x = 8 cm: $a = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x = 0.789$ m/s^2. (Magnitud).
   Fuerza (magnitud): $F = ma = 0.395\ N$.
   La energía Potencial: $U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 = 0.016\ J$.
   La energía Cinética: $E_K = \frac{1}{2}Mv^2 = E - U = \frac{1}{2}KA^2 - U = \frac{1}{2}M\omega^2 A^2 - U = 0.01953\ \ J$, en donde E corresponde a la energía mecánica total del oscilador.

2. Encontrar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son: $x(t) = 4\sin(\omega t)$, y $y(t) = 3\sin(\omega t + \alpha)$, cuando $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, y\ \pi$. Construir un gráfico de la trayectoria de la partícula en cada caso.

   R: **(a)** Cuando $\alpha = 0$,
   $$\frac{y}{x} = \frac{3}{4}; \qquad y = \frac{3}{4}x.$$
   La trayectoria es una línea recta que pasa por el origen con pendiente ¾.
   (b) Cuando $\alpha = \pi/2$,
   $$\frac{x}{4} = \sin(\omega t);$$
   $$\frac{y}{3} = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)\,;$$
   Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos:
   $$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$
   El cual corresponde a una elipse con centro en el origen y semieje mayor 4 y semieje menor 3.
   (c) Si $\alpha = \pi$;
   $$\frac{x}{4} = \sin(\omega t);$$
   $$\frac{y}{3} = \sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)\,;$$
   Combinando estas dos expresiones, obtenemos:
   $$\frac{x}{4} = -\frac{y}{3}, \qquad y = -\frac{3}{4}x.$$
   La trayectoria es una línea recta que pasa por el origen con pendiente -¾.



Representación de las diferentes trayectorias de un cuerpo bajo dos movimientos armónicos perpendiculares y cambio de fase relativa.

3. Un oscilador armónico tiene una frecuencia angular ω y una amplitud *A*. a) Determine las componentes de posición y velocidad cuando su energía potencial elástica es igual a su energía cinética. b) Con qué frecuencia ocurre esto en cada ciclo?. c) Qué tiempo transcurre entre cada ocurrencia?.

R: (a) En este caso, planteamos la condición que exige el problema:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Kx^2.$$

Si el movimiento es armónico, entonces $K = M\omega^2$. Así, la ecuación anterior se reduce a:

$$v^2 = \omega^2 x^2.$$

En este caso, tenemos una ecuación y dos incógnitas. La segunda ecuación necesaria para resolver el problema proviene de la relación entre la velocidad instantánea, la posición instantánea y la amplitud de oscilación:

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2).$$

Al sumar las dos últimas expresiones, se elimina la variable posición x y se obtiene v:

$$2v^2 = \omega^2 A^2, \qquad v = \pm\frac{\omega A}{\sqrt{2}};$$

Mientras que si las dos expresiones de la referencia se restan, tendremos (o reemplazando en la primera), las soluciones para la posición x:

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, las energías son iguales en los puntos $\pm\frac{A}{\sqrt{2}}$, en el intervalo $\{-A, A\}$.

(b) El número de veces en el cual la energía cinética del cuerpo es igual a la energía potencial, en un ciclo es cuatro (4). El cuerpo pasa por cada punto dos veces en una oscilación completa.

(c) Entre dos ocurrencias consecutivas transcurre un tiempo de un cuarto de periodo: $T/4$. Una forma de entender este resultado es la siguiente:

Igualamos las funciones de energía potencial y energía cinética:

$$\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}M\omega^2A^2\sin^2(\omega t)\,.$$

En forma equivalente,

$$\cos^2(\omega t) = \sin^2(\omega t)\,.$$

Esta igualdad se cumple solo si $\omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ en un ciclo. La diferencia entre dos valores consecutivos es: $\pi/2$. Por lo tanto, el tiempo Δt que transcurre entre dos eventos es: $\omega\Delta t = \frac{\pi}{2}$.

Reemplazando $\omega = 2\pi/T$, finalmente:

$$\Delta t = \frac{T}{4}.$$

4. Muchos resortes reales son más fáciles de estirar que de comprimir. Es posible representar este caso utilizando diferentes constantes de resorte para x > 0 y para x < 0. Considere un resorte que ejerce la siguiente fuerza restauradora:

$$F = \begin{cases} -Kx & \text{si } x > 0, \\ -2Kx & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una masa M sobre una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se desplaza a x=A estirando el resorte y se libera. Determine (a) El valor más negativo de x que alcanza la masa M. (b) El periodo de movimiento. (c) Es simétrica la oscilación respecto a $x = 0$?.

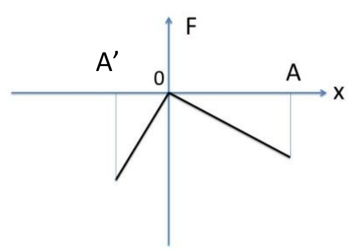


Figura: Problema 4.

(a) El valor más negativo que alcanza la masa M se obtiene desde el principio de conservación de la energía. La energía TOTAL del sistema, al estirar el resorte hacia los valores positivos de x es:

$$U = E = \frac{1}{2}KA^2.$$

Esta energía se conservará en **todos** los puntos, dado que se desprecia el efecto de la fricción. Cuando el resorte se comprime, su constante elástica efectiva es *2K*, y la energía potencial máxima almacenada es:

$$U = \frac{1}{2}(2K)A'^2,$$

en donde A' es la distancia máxima de compresión. Igualando:

$$U = E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(2K)A'^2.$$

Calculando para A':

$$A' = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

(b) El cálculo del periodo de movimiento puede realizarse de manera intuitiva:

i) El tiempo de recorrido desde $x = +A$ hasta $x = 0$ es $T/4$, con $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$.

ii) El tiempo de recorrido desde $x = 0$ hasta $x = -A'$ es $T'/4$, con $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$.

iii) El tiempo de recorrido desde $x = -A'$ hasta $x = 0$ es $T'/4$ con $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$.

iv) El tiempo de recorrido desde $x = 0$ hasta $x = +A$ es $T/4$, con $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$.

Sumando estos tiempos, calculamos el periodo de oscilación del cuerpo de masa M acoplado en un resorte asimétrico:

$$Periodo = \frac{T}{2} + \frac{T'}{2}.$$

Introduciendo los valores:

$$Periodo = \pi\sqrt{\frac{M}{K}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.707\pi\sqrt{\frac{M}{K}}.$$

Para un resorte homogéneo, el periodo de oscilación es $2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$. Es decir, en el caso estudiado (resorte asimétrico), el periodo de movimiento es menor en un 30%.

(c) La oscilación con respecto a $x = 0$ es **asimétrica**, ya que $A \neq A'$.

Preparado por: H. Vivas C. Marzo 2011.
Verificar las soluciones en:
www.campus.virtual.unal.edu.co

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-Sede Manizales
Departamento de Física
Curso de Oscilaciones, Ondas y Óptica

Solucionario Taller 02: **Movimiento Amortiguado y Forzado**

1. (**20%**) Un objeto de masa 0.2 kg cuelga de un resorte cuya constante elástica es de 80 N/m. El cuerpo está sujeto a la acción de una fuerza de fricción dada por *–bv,* donde *v* es su velocidad (m/s) y *b* = 4 kg/s. (a) Hallar el periodo de las oscilaciones de este sistema. (b) Si el cuerpo se somete a una fuerza exterior dada por $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, con $F_0 = 2N$ y $\omega = 30\ r.s^{-1}$, cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas?.

   a) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{b}{2M}\right)^2}} = 0.363\ s.$

   b) $A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = 1.28\ cm.$

2. (**20%**) Un cuerpo de 2 kg oscila con una amplitud inicial de 3 cm acoplado a un muelle de constante elástica K=400 N/m. Si la energía disminuye en 1% por periodo, hallar la constante de amortiguamiento *b* y el factor *Q*.
   La energía por periodo es
   $$E(T) = E_0 e^{-2\gamma T}.$$

   Si la energía disminuye en un 1% por periodo, $\gamma T = 0.00502$.
   De la relación:
   $$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2.$$

   Multiplicando por el Periodo de oscilación del sistema *T* (con amortiguamiento):
   $$(\omega T)^2 = (\omega_0 T)^2 - (\gamma T)^2 = (2\pi)^2.$$

   Reemplazando $\omega_0 = \sqrt{K/M} = 14.14\ r/s$ y $\gamma T = 0.00502$, obtenemos:
   $\boldsymbol{T = 0.44}\ s.$ El parámetro $\gamma = \frac{0.00502}{0.44} = 0.0114.$ La constante de amortiguamiento *b* se calcula desde γ: $\gamma = \frac{b}{2M}$; $\boldsymbol{b = 2M\gamma = 0.0456}$ **kg/s**. El factor *Q :*
   $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 620.3}.$

3. (**10%**) Si la amplitud de un movimiento amortiguado se reduce a 96% de su valor después de cada oscilación, en cuanto se reduce su energía?
La fórmula de la amplitud de un movimiento amortiguado es:

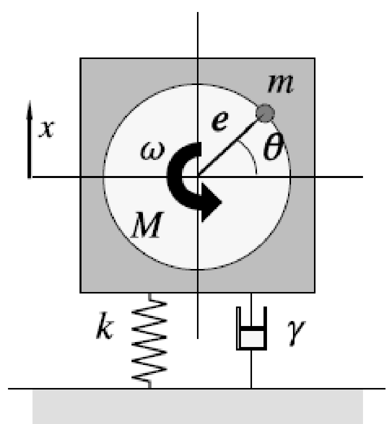
$$A(t) = Ae^{-\gamma t}.$$

Después de un periodo, $A(T) = Ae^{-\gamma T} = 0.96A$. Así, $\gamma T = 0.041$. Esta información es suficiente para calcular la reducción en la energía por ciclo, desde la expresión:

$$E(T) = E_0 e^{-2\gamma T} = E_0 e^{-2(0.041)} = 0.92E_0.$$

La energía se reduce a **92%** después del primer ciclo.

4. (**50%**) Una máquina que posee una parte rotatoria (motor eléctrico) puede esquematizarse como se muestra en la figura, siendo *M* la masa total de la máquina, y *m* una masa equivalente excéntrica (incluida en la masa total *M*) situada a una distancia *e* del eje de rotación, de modo que, cuando la máquina está en marcha, se producen vibraciones de la misma frecuencia que la rotación del rotor. **a**) Encontrar la expresión de la amplitud de las vibraciones verticales de la máquina en función de su velocidad de rotación ω y de las constantes características *k*, γ. **b**) Determinar la amplitud de las vibraciones en la resonancia, **c**) Determinar la fuerza que se transmite al piso.



(a) La fuerza asociada al movimiento de la masa m es $em\omega^2$, la fuerza centrípeta del cuerpo cuya componente vertical es $em\omega^2 \sin\theta$, lo que representa una fuerza "exterior" impulsora con magnitud $F_0 = em\omega^2$. Así, la amplitud de las oscilaciones verticales de la máquina están dadas por:

$$A(\omega) = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{em\omega^2/M}{\sqrt{(\omega^2 - k/M)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

(b) La amplitud de las vibraciones en la frecuencia de resonancia se obtiene maximizando la expresión anterior, dado que F_0 depende de la frecuencia:

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} = 0; \qquad \omega_r = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Obsérvese que esta frecuencia es diferente a ω_0. La amplitud de las oscilaciones en resonancia es calculada reemplazando $A(\omega_r)$:

$$A(\omega_r) = \frac{ekm}{2\gamma M^2} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

(c) La fuerza que se transmite al piso se calcula como la suma de las fuerzas generadas por el resorte y el amortiguador:

$$F_p = kx + 2M\gamma \frac{dx}{dt}.$$

Si consideramos que $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, entonces la fuerza transmitida al piso es:

$$F_p = Ak\cos(\omega t + \varphi) + 2M\gamma\omega A\sin(\omega t + \varphi).$$

La expresión anterior se puede factorizar aplicando relaciones trigonométricas:

$$F_p = A\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}\sin(\omega t + \theta),$$

en donde θ es un factor de fase. La amplitud de la fuerza transmitida al piso es:

$$F_M = A\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}.$$

El cociente entre las amplitudes de la fuerza transmitida y de la fuerza impulsora $em\omega^2$ se denomina "*transmisibilidad*" *TR:*

$$TR = \frac{F_M}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + (2M\gamma\omega)^2}}{M\sqrt{(\omega^2 - k/M)^2 + (2\gamma\omega)^2}},$$

el cual define el porcentaje de la fuerza máxima transmitida al piso debido a la rotación del motor a frecuencia ω. Si la frecuencia de rotación es cero, *TR=1,* mientras que si la constante de amortiguamiento es cero, o muy pequeña,

$$TR \sim \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Preparado por: H.Vivas.
Marzo/2011
www.campus.virtual.unal.edu.co

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-Sede Manizales
Departamento de Física. Curso de Oscilaciones, Ondas y Óptica
Solucionario Taller 03: Ondas Mecánicas

1. Los niveles de Intensidad de dos ondas sonoras difieren en 10 dB. Hallar la relación entre sus intensidades y sus amplitudes de presión.

   R: Si la diferencia entre los niveles de intensidad es 10 dB, entonces tenemos:
$$\beta_2 - \beta_1 = 10\ dB = 10 \log_{10}\left[\frac{\langle I_2\rangle}{\langle I_1\rangle}\right].$$
   El cociente entre sus intensidades es $\frac{\langle I_2\rangle}{\langle I_1\rangle} = 10$, mientras que entre sus amplitudes de presión, teniendo que cuenta que $\langle I\rangle \sim (\Delta P)^2$, es
$$\frac{(\Delta \mathrm{P}_2)}{(\Delta \mathrm{P}_1)} = \sqrt{10} = 3.16.$$

2. Dos altavoces idénticos están situados en los puntos A y B, separados 2 metros. Los altavoces están conectados por el mismo amplificador y producen ondas sonoras con una frecuencia de 880 Hz. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s. Se aleja un micrófono pequeño desde el punto B a lo largo de una línea que une a B y a C (línea BC en la figura). (a) A qué distancias de B habrá interferencia destructiva?. (b) Y constructiva? (c) Si la frecuencia se hace lo suficientemente baja, no habrá posiciones sobre la línea BC en las ocurra interferencia destructiva. Qué tan baja debe ser la frecuencia para que esto suceda?.

R: En cualquier punto a una distancia *x* desde el punto B sobre la línea BC existe una diferencia de camino:
$\Delta r = \sqrt{x^2 + d^2} - x.$
Se produce interferencia destructiva cuando del desfase de las ondas recibidas sea un múltiplo impar de π, i.e., π, 3π, 5π… :

$\mathrm{k}\Delta r = \frac{2\pi f}{v}\Delta r = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$
La ecuación para resolver para *x* es:

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = \frac{v}{2f}, \frac{3v}{2f}, \frac{5v}{2f} \ldots$$

El mínimo de orden 1 de interferencia destructiva (a la derecha de B) aparece cuando x es: $x_1 = \frac{4d^2 f^2 - v^2}{4vf} = 10.135$ m.
El mínimo de orden 3 está localizado en $x_3 = 3.11$ m. Mínimo de orden 5 (el cual es el más cercano a la derecha de B) $x_5 = 1.55$ m.

La interferencia constructiva ocurre cuando la diferencia de fase es múltiplo par de π:

$$\mathrm{k}\Delta r = \frac{2\pi f}{v}\Delta r = 2\pi, 4\pi, 6\pi \ldots$$

En este caso:

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = \frac{v}{f}, \frac{2v}{f}, \frac{3v}{f} \ldots$$

Los máximos de interferencia estarán localizados en: $x_1 = 4.92$ m, $x_2 = 2.16$ m, $x_3 = 1.12$ m…
c) En este caso consideramos que el primer mínimo de interferencia se encuentra localizado en un punto sobre la línea AB, es decir, $x = 0$. Aplicamos el límite $x \to 0$ y obtenemos $f = \frac{v}{2d} = 86$ Hz. Es decir, el primer mínimo de interferencia estará localizado muy cercano a la fuente B si la frecuencia de las mismas es del orden de 86 Hz.

3. *Ultrasonido Médico.* Una onda sonora de 2 MHz viaja por el abdomen de la madre y es reflejada por la pared cardiaca del feto, que se mueve hacia el receptor de sonido al latir el corazón. El sonido reflejado se mezcla con el transmitido, detectándose 120 pulsaciones por segundo. La rapidez del sonido en el tejido corporal es 1500 m/s. Calcule la velocidad de la pared cardiaca fetal en el instante que se hace la medición.

   R: Utilizamos la expresión del efecto Doppler para este caso. En la primera situación, la onda del aparato viaja hacia el feto, y la frecuencia que éste captaría es:

$$f_0 = \left(1 + \frac{v_{feto}}{v_w}\right) f_{fuente}.$$

   Esta onda es reflejada a la misma frecuencia f_0, convirtiendo al feto en fuente, y viaja hacia el aparato que detectará una frecuencia de **pulsación** de 120 Hz. Así, la frecuencia que retorna al aparato está diferenciada con respecto a la frecuencia original por 120 Hz. Es decir,

$$f'_0 = 2MHz + 120\ Hz = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{v_{feto}}{v_w}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{v_{feto}}{v_w}\right)}{\left(1 - \frac{v_{feto}}{v_w}\right)} f_{fuente}$$

   Resolviendo para v_{feto}, obtenemos: $v_{feto} = 0.045\ m/s$.

4. Un afinador de pianos estira un alambre de piano de acero con una tensión de 600 N. El alambre tiene 0.400 m de largo y una masa de 5.0 g. (a) Calcule la frecuencia de su modo de vibración fundamental. (b) Determine el armónico más alto que puede escuchar una persona cuyo límite de audición es de 10 kHz.

   R: (a) La frecuencia del modo fundamental se obtiene como:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 273.86\ Hz.$$

(b) El orden del armónico más alto que puede escuchar una persona con un límite de audición de 10 kHz es:

$$10{,}000 = nf_1,$$

Con n como número entero más cercano al límite. $n = 36.$

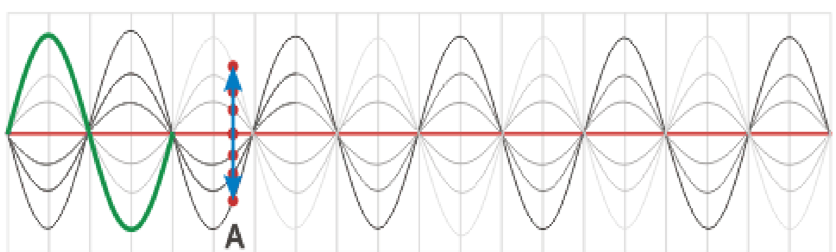
5. En un punto A de una cuerda de 2 m de longitud, se superponen dos ondas armónicas procedentes de dos fuentes F1 y F2, en fase, situadas en los extremos de la cuerda. Sabiendo que ambas ondas se propagan con una velocidad de 40 m/s como indica la figura, con una frecuencia de 100 Hz cada una y con igual amplitud de 0,20 m, determinar la ecuación de movimiento oscilatorio que adquiere el punto A, que se halla a 0,55 m de F1.

Este caso puede considerarse como el de una onda estacionaria formada por dos ondas armónicas senoidales que viajan en direcciones opuestas:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

La amplitud de oscilación en cada punto es $2A\sin(kx)$. Introduciendo los valores numéricos, con x = 0.55 m, la ecuación que describe la cinemática del punto A es:

$$y(0.55, t) = 0.28\cos(628t).$$



La doble flecha azul representa la oscilación del punto **A** (en rojo), cuya ecuación de posición en función del tiempo obtuvimos en el ejercicio. Obsérvese la aparición de nodos y antinodos alternados en todo el dominio de la cuerda.

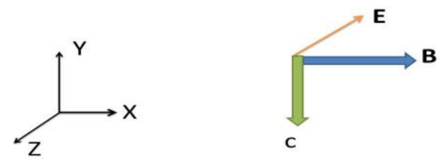
http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/No_me_salen/ONDAS/ond_013.html

Preparado por H.Vivas

www.campus.virtual.unal.edu.co

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA-Sede Manizales
Departamento de Física. Curso de Oscilaciones, Ondas y Óptica
Solucionario 04: Ondas Electromagnéticas, Óptica Geométrica y Ondulatoria

1. El Sol emite energía en forma de ondas electromagnéticas a razón de 3.9×10^{26} W. Esta energía es producida por reacciones nucleares en el centro del Sol. a) Encuentre la intensidad de la radiación y su presión sobre un objeto absorbente en la superficie (radio r = R). Considere el radio del Sol como 6.96×10^{8} m. b) Calcular la intensidad de la radiación sobre la superficie terrestre.
   a) Sobre la superficie del Sol, la intensidad promedio de la radiación se estima como:
   $$\langle I \rangle = \frac{P}{Area} = \frac{3.9 \times 10^{26}\, W}{4\pi(6.96 \times 10^{8})^{2} m^{2}} = 64.1 \times 10^{6}\, \frac{W}{m^{2}}.$$
   La presión sobre un objeto absorbente es: $\frac{\langle I \rangle}{c} = p_r = 0.214$ Pa.
   b) En la superficie terrestre, considerando que la distancia Tierra – Sol en promedio es 150 millones de kilómetros:
   $$\langle I \rangle = \frac{P}{Area} = \frac{3.9 \times 10^{26}\, W}{4\pi(1.5 \times 10^{11})^{2} m^{2}} = 1.379 \times 10^{3}\, \frac{W}{m^{2}}.$$
   La intensidad sobre la superficie terrestre es menor en tres órdenes de magnitud comparada con aquella intensidad de la radiación emitida en la superficie del Sol.
2. La intensidad de una fuente de luz brillante es de 935 W/m^2. Encuentre la presión de radiación media (en Pa) sobre a) una superficie completamente absorbente b)Una superficie completamente reflectora.
   a) En una superficie absorbente:
   $p_{rad} = \frac{\langle I \rangle}{c} = 3.115 \times 10^{-6}$ Pa.
   b) En una superficie completamente reflectora, la presión de radiación se define como:
   $p_{rad} = \frac{2\langle I \rangle}{c} = 6.23 \times 10^{-6}$ Pa.
3. Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por $\boldsymbol{B}(y,t) = (4.38 \times 10^{-8} T)\sin(\omega t + (7.45 \times 10^{4})y)\boldsymbol{U_X}$. Escriba una ecuación vectorial para el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(y,t)$.
   Es claro que el campo electromagnético se propaga en dirección –Y. Un diagrama simple de los estados de polarización de los campos se ilustra en la siguiente figura:



El campo eléctrico posee dirección Z, y su fórmula vectorial puede escribirse como:

$$\boldsymbol{E}(y,t) = \left(13.14\frac{V}{m}\right)\sin(\omega t + (7.45 \times 10^4)y)(-\boldsymbol{U_Z}).$$

4. Cierto material birrefringente tiene índices de refracción n_1 y n_2 para las dos componentes de la luz linealmente polarizada que pasa por él. Las correspondientes longitudes de onda son $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ y $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$, en donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío. a) Para que el cristal funcione como una placa de **cuarto de onda**, el número de longitudes de onda asociado a cada componente dentro del material debe diferir en 1/4. Demuestre que el espesor mínimo para una placa de cuarto de onda es:

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}.$$

b) Encuentre el espesor mínimo de una placa de cuarto de onda construida de calcita si los índices de refracción son $n_1 = 1.658$, $n_2 = 1.486$ y la longitud de onda en el vacío es $\lambda_0 = 590$ nm.

a) El material birrefringente reacciona distintamente dependiendo de la polarización de la luz incidente. Una onda de luz circularmente polarizada puede ser producida introduciendo una diferencia de fase de $\pi/2$ entre dos componentes ortogonales de luz linealmente polarizada. Un dispositivo que puede fabricarse con estas características se conoce como placa de cuarto de onda. Estas placas están construidas de cristales transparentes doblemente refractivos, como la Calcita o Mica. El índice de refracción difiere para diferentes direcciones de la polarización. Es posible cortar un cristal doblemente refractivo dentro de películas de tal forma que el eje de un índice máximo n_1 (el eje lento) y un eje asociado al índice menor n_2 (el eje rápido) yacen en un ángulo recto en el plano de la placa. Si la placa tiene un espesor *d*, entonces el espesor óptico $n_1 d$ para la luz polarizada en la dirección del eje lento y $n_2 d$ para la luz polarizada la dirección del eje rápido. Para una placa de cuarto de onda, d se escoge de tal forma que la diferencia $n_1 d - n_2 d$ iguala un cuarto de longitud de onda de la onda incidente en el vacío $\frac{\lambda_0}{4}$. Igualando: $d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}$.

El mismo resultado puede obtenerse desde el concepto de interferencia constructiva. Si el campo eléctrico está polarizado sobre el eje X, y éste se propaga en dirección +Z (incidencia normal), la condición de interferencia constructiva una vez la onda se ha propagado en el material, para este caso es:

$$\delta_1 = 2\pi\frac{d}{\lambda_1} = 2\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0}.$$

Si ahora el campo esta polarizado en la dirección del eje Y, la diferencia de fase para la onda que incide en este estado de polarización y ha atravesado la placa es:

$$\delta_2 = 2\pi\frac{d}{\lambda_2} = 2\pi n_2 \frac{d}{\lambda_0}.$$

En un cuarto de longitud de onda, la diferencia de fase total debe ser $\frac{\pi}{2}$. De esta forma:

$$\delta_1 - \delta_2 = 2\pi(n_1 - n_2)\frac{d}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2}.$$

Resolviendo para *d*

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}.$$

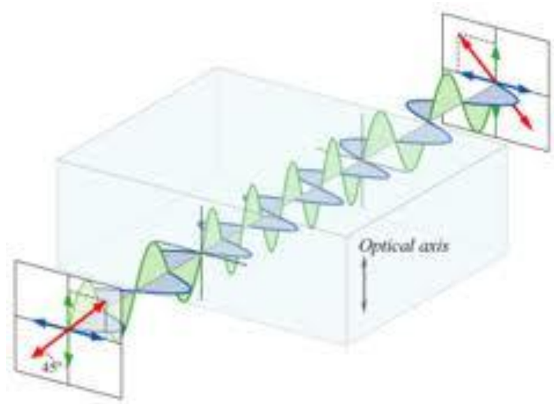


Diagrama esquemático de la diferencia de fase de $\frac{\pi}{2}$ *(o cambio de polarización) entre la onda incidente y la onda transmitida (línea roja) una vez ésta atraviesa el material birrefringente.*

b) $\boldsymbol{d}$ **= 857.6 nm.**

5. Una ranura de 0.2 mm de ancho está iluminada por rayos de luz paralelos con $\lambda = 590$ nm. La configuración de difracción se observa en una pantalla situada a 4 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central es de $5 \times 10^{-6}\ W/m^2$ a) Cuál es la distancia desde el centro del máximo central al primer mínimo? b) Cuál es la intensidad en un punto sobre la pantalla situado a la mitad de la distancia calculada en a)?.
La intensidad asociada al patrón de Fraunhofer se define como:

$$I = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2,$$

Con $u = (\pi\, b\sin\theta)/\lambda$, con *b* como el ancho del ranura. a) El primer mínimo de difracción se ubica en la posición:

$$b\sin\theta = \lambda.$$

La distancia entre el máximo central y el primer mínimo es: (*D* es la distancia de la ranura a la pantalla).

$$\tan\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{b} \approx \frac{y}{D}.$$

$$y = \frac{D\lambda}{b} = \frac{4\times590\times10^{-9}}{0.2\times10^{-3}} = 0.0118 \text{ m (1.18 cm)}.$$

b) En un punto ubicado a la mitad de la distancia calculada, tendremos: $y = 0.0059$ m. Así:

$$\sin\theta = \frac{0.0059}{4} = 1.475 \times 10^{-3}.$$

El valor de $u = \frac{(\pi\, b \sin\theta)}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$. La intensidad en este punto toma el valor:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = \frac{4I_0}{\pi^2} = \frac{4 \times 5 \times 10^{-6}}{\pi^2} = 2.03 \times 10^{-6}\ W/m^2$$

Preparado por H.Vivas, Mayo2011
www.campus.virtual.unal.edu.co