

# OSCILACIONES Y ONDAS

Notas de clase

**Alicia Guerrero de Mesa**

Departamento de Física

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia



# Contenido

<b>Presentación</b>	<b>vii</b>
<b>1. Osciladores libres con un grado de libertad</b>	<b>1</b>
1.1. Osciladores armónicos simples . . . . .	2
1.1.1. Péndulo simple . . . . .	2
1.1.2. El resorte de Hooke . . . . .	6
1.1.3. Masa en el centro de cuerda sobre plano horizontal . . . . .	6
1.1.4. Circuito LC sin resistencia . . . . .	7
1.1.5. Observaciones generales . . . . .	9
1.1.6. Puntos de equilibrio de los osciladores . . . . .	10
1.1.7. Conservación de la energía . . . . .	11
1.2. Osciladores libres amortiguados . . . . .	12
1.2.1. Rectificación del modelo, nuevas ecuaciones . . . . .	12
1.2.2. Decaimiento de la energía y factor de calidad . . . . .	14
Ejercicios . . . . .	16
<b>2. El oscilador simple amortiguado y forzado</b>	<b>19</b>
2.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	19
2.2. Solución de las ecuaciones de movimiento . . . . .	21
2.3. Análisis físico de la solución . . . . .	24
2.3.1. Evolución del estado transitorio al estado estacionario . . . . .	24
2.3.2. Resonancia . . . . .	26
2.3.3. Absorción de potencia, curva de resonancia . . . . .	28
2.3.4. Factor de calidad de un oscilador forzado . . . . .	31
2.4. Principio de superposición de fuentes . . . . .	33
2.5. Modelo clásico de interacción radiación-átomo . . . . .	35
2.6. Fuerza externa aplicada a través de un soporte móvil . . . . .	37
2.6.1. Resorte horizontal . . . . .	37
2.6.2. Sismógrafo . . . . .	39

Ejercicios . . . . .	41
<b>3. Sistema libre de dos osciladores acoplados no amortiguados</b>	<b>45</b>
3.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	45
3.1.1. Péndulos acoplados . . . . .	45
3.1.2. Masas acopladas a resortes sobre superficie horizontal sin fricción . . . . .	47
3.1.3. Masas acopladas por cuerdas sobre plano horizontal sin fricción . . . . .	47
3.1.4. Dos circuitos LC acoplados por condensador . . . . .	48
3.2. Solución de las ecuaciones acopladas . . . . .	49
3.3. Interpretación física de la solución. Modos normales . . . . .	50
3.4. Método del determinante secular . . . . .	52
3.5. Diagonalización de las ecuaciones de movimiento . . . . .	55
3.6. Osciladores acoplados inercial o inductivamente . . . . .	58
3.7. Diagonalización de la energía . . . . .	61
3.8. Pulsaciones . . . . .	62
3.9. Intercambio de energía en las pulsaciones . . . . .	64
Ejercicios . . . . .	65
<b>4. Sistema de dos osciladores amortiguados y forzados</b>	<b>67</b>
4.1. Sistema amortiguado sin fuerza externa . . . . .	68
4.2. Sistema amortiguado y forzado armónicamente . . . . .	69
4.2.1. Ecuaciones de movimiento y solución general . . . . .	69
4.2.2. Análisis físico de la respuesta estacionaria . . . . .	71
4.2.3. Absorción de potencia . . . . .	72
4.2.4. Absorción resonante como instrumento de análisis . . . . .	74
4.2.5. Protector antivibraciones . . . . .	75
4.3. Solución de las ecuaciones de movimiento mediante coordenadas normales . . . . .	78
4.3.1. Sistema amortiguado no forzado . . . . .	78
4.3.2. Sistema amortiguado y forzado . . . . .	79
4.4. Sistema acoplado por resistencia . . . . .	81
4.5. Sistemas no solubles mediante uso de coordenadas normales . . . . .	83
4.6. Relevancia del sistema de dos osciladores acoplados . . . . .	85
Ejercicios . . . . .	86
<b>5. Sistema de N osciladores acoplados</b>	<b>89</b>
5.1. Redes de osciladores idénticos sin fricción ni fuerza externa . . . . .	90
5.1.1. Red de péndulos acoplados . . . . .	90

5.1.2.	Red de masas acopladas por resortes . . . . .	91
5.1.3.	Red de masas acopladas por cuerdas . . . . .	91
5.1.4.	Red de circuitos LC acoplados por condensadores . . . . .	92
5.1.5.	Red de inductancias acopladas por condensadores . . . . .	93
5.2.	Diagonalización de las ecuaciones de movimiento . . . . .	94
5.2.1.	Sistemas libres no amortiguados . . . . .	94
5.2.2.	Sistemas amortiguados y forzados . . . . .	95
5.3.	Teorema fundamental sobre pequeñas oscilaciones . . . . .	98
5.4.	Método alternativo de solución mediante condiciones de frontera . . . . .	100
5.5.	Solución con condiciones de frontera . . . . .	102
5.6.	Aplicación de condiciones de frontera . . . . .	104
5.6.1.	Sistemas con extremos fijos . . . . .	104
5.6.2.	Sistemas con extremos libres . . . . .	105
5.7.	Análisis del espectro de frecuencias normales . . . . .	106
5.8.	Relaciones de dispersión . . . . .	108
	Ejercicios . . . . .	111
<b>6.</b>	<b>Redes lineales forzadas armónicamente</b>	<b>115</b>
6.1.	Respuesta estacionaria de una red forzada armónicamente . . . . .	116
6.1.1.	Respuesta resonante . . . . .	116
6.1.2.	Respuesta elástica: rasgos generales . . . . .	116
6.2.	Respuesta elástica en el rango dispersivo . . . . .	119
6.3.	Respuesta elástica en el rango reactivo inferior . . . . .	121
6.4.	Respuesta elástica en el rango reactivo superior . . . . .	124
6.5.	Conclusiones generales . . . . .	126
6.6.	Medios reactivos y dispersivos acoplados . . . . .	127
	Ejercicios . . . . .	131
<b>7.</b>	<b>Límite continuo. Ondas viajeras y evanescentes</b>	<b>133</b>
7.1.	Ecuación de onda clásica y de Klein-Gordon . . . . .	134
7.2.	Condiciones de frontera y modos normales . . . . .	136
7.3.	Análisis comparativo de la relación de dispersión . . . . .	138
7.4.	Red continua forzada armónicamente en un extremo . . . . .	140
7.4.1.	Solución estacionaria no resonante . . . . .	140
7.4.2.	Respuesta en el rango dispersivo de frecuencias . . . . .	140
7.4.3.	Respuesta en el rango reactivo inferior . . . . .	141
7.5.	Ondas armónicas viajeras . . . . .	143
7.6.	Ondas exponenciales o evanescentes . . . . .	146
7.7.	Ondas electromagnéticas en la ionosfera . . . . .	147

7.8. Ondas electromagnéticas en los metales . . . . .	151
7.9. Ondas amortiguadas . . . . .	153
Ejercicios . . . . .	157
<b>8. Análisis de Fourier y propagación de señales</b>	<b>161</b>
8.1. Teorema de Fourier para funciones periódicas . . . . .	162
8.2. Aplicaciones del análisis armónico a funciones periódicas . . . . .	165
8.2.1. Determinación de constantes arbitrarias a partir de condiciones iniciales . . . . .	165
8.2.2. Análisis armónico de una señal periódica . . . . .	166
8.3. Teorema de Fourier para funciones no periódicas . . . . .	168
8.4. Espectro de frecuencias de un emisor armónico amortiguado . . . . .	170
8.5. Propagación de paquetes de ondas . . . . .	172
8.5.1. Ondas no dispersivas . . . . .	172
8.5.2. Ondas dispersivas . . . . .	173
8.6. Técnicas de modulación de amplitud, fase y frecuencia . . . . .	175
8.7. Relaciones de incertidumbre . . . . .	178
8.8. Paquetes y pulsos . . . . .	181
8.8.1. Paquete gaussiano . . . . .	181
8.8.2. Paquete cuasiarmónico . . . . .	182
8.8.3. Pulso de duración finita . . . . .	184
Ejercicios . . . . .	186
<b>9. Ondas sonoras</b>	<b>189</b>
9.1. Sonido, ultrasonido, infrasonido y ruido . . . . .	190
9.2. Ondas transversales en cuerda no dispersiva . . . . .	192
9.3. Ecuación de ondas dispersivas en cuerda semirrígida . . . . .	195
9.4. Ecuación de onda bidimensional en membrana elástica . . . . .	197
9.5. Modos normales de una membrana rectangular . . . . .	199
9.6. Ondas longitudinales en varillas . . . . .	202
9.7. Ondas longitudinales en tubos sonoros . . . . .	204
9.8. Condiciones de frontera y modos normales en un tubo sonoro . . . . .	208
9.9. Sonido musical, armonía y disonancia . . . . .	210
Ejercicios . . . . .	212
<b>10. Ondas electromagnéticas</b>	<b>215</b>
10.1. Ondas de corriente y voltaje en líneas de transmisión . . . . .	216
10.2. Teoría electromagnética de la luz. Espectro de la radiación . . . . .	221
10.3. Ondas electromagnéticas en el vacío . . . . .	224
10.4. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos transparentes . . . . .	225

10.5. Ondas planas monocromáticas . . . . .	227
10.6. Polarización . . . . .	231
10.7. Ondas electromagnéticas en medios conductores . . . . .	233
10.8. Guías de ondas electromagnéticas . . . . .	235
10.8.1. Modos TE y TM en una guía de Ondas . . . . .	236
10.8.2. Campos en guía de sección rectangular . . . . .	237
10.9. Cavidades resonantes, modos normales del campo EM . . . . .	242
10.10. Transporte de información en fibras ópticas . . . . .	245
Ejercicios . . . . .	250

## **Apéndices 253**

<b>A. La ecuación del oscilador electromagnético en aproximación cuasiestática a partir de las ecuaciones de Maxwell</b>	<b>253</b>
A.1. Circuito RLC en serie . . . . .	253
A.2. Circuito RLC en serie con fuente de voltaje . . . . .	257
A.3. Significado físico de la integral de línea del campo eléctrico . . . . .	258
A.4. Acerca de una “ley” de Kirchhoff . . . . .	260
<b>B. Osciladores no lineales</b>	<b>261</b>
B.1. Oscilaciones transversales de masa entre dos resortes . . . . .	261
B.2. Péndulo simple . . . . .	262
B.3. Osciladores con término cuadrático en la fuerza recuperadora . . . . .	265
B.4. Modelo no lineal de dieléctrico en campo externo . . . . .	267
B.5. Sistemas conservativos no lineales en el espacio de fase . . . . .	269
B.5.1. Oscilador asimétrico . . . . .	269
B.5.2. El péndulo simple sin serie de Taylor . . . . .	271
<b>C. Ondas no dispersivas</b>	<b>277</b>
C.1. Teorema de D’Alembert . . . . .	277
C.2. Interpretación física de la solución general . . . . .	279
C.2.1. Enfoque espacial . . . . .	279
C.2.2. Enfoque temporal . . . . .	280
C.3. Problema de Cauchy . . . . .	281
C.4. Interpretación causal de la solución al problema de Cauchy . . . . .	283





# Presentación

*Esta es la edad de los métodos, y la universidad, que debe ser el exponente de la situación contemporánea de la mente humana, debe ser la universidad de los métodos.*

CHARLES SANDERS PEIRCE

Nuestro **punto de partida** es el oscilador armónico, considerado como fundamento de todos los procesos ondulatorios. A partir de este elemento simple, construimos redes de osciladores que, en el límite continuo, satisfacen ecuaciones de onda.

Nuestro **método**: el avance constructivo de lo simple a lo complejo; del oscilador armónico a las ondas en medios materiales, guías o fibras ópticas; de la abstracción y generalidad de los modelos matemáticos a la interpretación física y la aplicación concreta.

Nuestra **motivación central**: la universalidad de los procesos oscilatorios y ondulatorios. Esta universalidad radica en que sistemas físicos diferentes (mecánicos y electromagnéticos, microscópicos y cosmológicos, sólidos, líquidos, gases y aun el vacío) satisfacen ecuaciones de osciladores o de ondas de idéntica forma matemática. No importa si lo que oscila son partículas que se desplazan alrededor de posiciones de equilibrio, o cargas en condensadores y corrientes en circuitos, o campos eléctricos y magnéticos en el vacío, o ciertas amplitudes cuánticas de probabilidad. Conceptos como: resonancia, modos normales, relaciones de incertidumbre, análisis de Fourier y propagación de ondas, tienen vastos campos de aplicación que trascienden los límites de la física clásica y revelan una identidad estructural en fenómenos sin conexión aparente. Esta universalidad confiere al curso de *Oscilaciones y ondas* un carácter interdisciplinario, donde pueden residir al mismo tiempo su interés y cierto grado de dificultad.

Nuestro **propósito inmediato**: sentar las bases matemáticas y físicas para estudios más específicos en mecánica cuántica, óptica, materia condensada y fluidos, sistemas no lineales, sistemas biológicos, teoría de circuitos, redes neuronales, etcétera.



## Capítulo 1

# Osciladores libres con un grado de libertad

En este capítulo elegimos como prototipos algunos sistemas físicos que pueden sustentar oscilaciones, y los sometemos a análisis según el esquema metodológico siguiente:

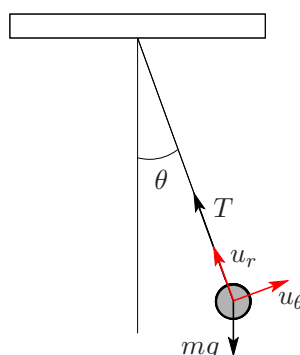
- Construimos un modelo simplificado del sistema dejando de lado ciertos aspectos que consideramos secundarios o ignorables en primera aproximación.
- A estos sistemas simples aplicamos las leyes físicas correspondientes: de Newton a los sistemas mecánicos y de Maxwell a los electromagnéticos. De aquí resultan las ecuaciones de movimiento respectivas.
- Efectuamos el análisis matemático y hallamos las soluciones de las ecuaciones de movimiento.
- Interpretamos físicamente las soluciones.
- Finalmente, introducimos una corrección importante a los modelos iniciales y hallamos e interpretamos las nuevas soluciones.

## 1.1. Osciladores armónicos simples

### 1.1.1. Péndulo simple

#### a. Construcción del modelo

Un péndulo simple es una masa puntual suspendida de una varilla o cuerda fija en el extremo superior. En primera aproximación se puede suponer que las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa  $m$  son el peso ( $mg$ ) y la tensión  $T$  ejercidas por la cuerda o varilla. Esto implica ignorar las fuerzas de fricción y la reacción de posibles ondas de presión emitidas al aire circundante.



**Figura 1.1** Péndulo simple.

La varilla o cuerda se suponen inextensibles y de tensión uniforme. Como la tensión varía con el movimiento de la masa, ésta es una idealización que implica admitir que todos los puntos de la cuerda se “enteran” simultáneamente del cambio de la fuerza ejercida en su extremo inferior por la masa. En realidad, cualquier perturbación en un punto requiere un tiempo finito para propagarse a otros puntos, pero en primera aproximación podemos ignorar este “efecto de retardo”, considerándolo muy pequeño en comparación con otros factores determinantes del comportamiento del sistema.

También se ignora cualquier no inercialidad del sistema de referencia (el laboratorio). Esto implica no considerar fuerzas ficticias como las debidas a la rotación de la tierra.

Al tratar de comparar las predicciones de la teoría con los datos experimentales es conveniente tener presentes las limitaciones del modelo tomado como punto de partida. Algunos de los efectos no incorporados en primera aproximación pueden ser tomados en cuenta en un modelo más refinado y complejo, aunque generalmente más difícil de resolver.

## b. Ecuaciones de movimiento

De acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \quad (1.1)$$

Dada la geometría del problema (véase la figura 1.1), es conveniente usar coordenadas polares  $(r, \theta)$  a fin de aprovechar la información contenida en la suposición de cuerda inextensible ( $r = l = \text{cte}$ ) para dejar  $\theta(t)$  como la única variable dinámica del sistema.

Al descomponer la fuerza a lo largo de los ejes instantáneos  $u_r$  y  $u_\theta$ , resulta:

$$F_r = \frac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \quad (1.2)$$

$$F_\theta = m \frac{dv}{dt} = ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (1.3)$$

Bastaría resolver (1.3) y sustituir  $\theta(t)$  en (1.2) para hallar el valor de la tensión  $T$  como función del tiempo. Pero hacer esto no es fácil. La razón reside en que (1.3) no es una ecuación diferencial lineal por contener la función  $\sin \theta$ , que no es lineal en la variable  $\theta$ . Sin embargo si, como en el presente caso, estamos interesados solamente en cierta clase de movimientos del sistema, donde el ángulo  $\theta$  (medido en radianes) es siempre menor que 1, podemos hacer una expansión en serie de Taylor de la función  $\sin \theta$  alrededor de  $\theta = 0$  e ignorar potencias iguales o superiores a 3 del ángulo  $\theta$ :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \approx \theta$$

Con esta restricción a ángulos pequeños (la llamada “aproximación de pequeñas oscilaciones”), la ecuación (1.3) toma la forma lineal siguiente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad (1.4)$$

## c. Análisis y solución de la ecuación de movimiento

La ecuación (1.4) es, desde el punto de vista matemático, una ecuación diferencial ordinaria, lineal, homogénea, de segundo orden en  $t$ . *Ordinaria* porque no aparecen derivadas parciales de funciones de varias variables. *Lineal* porque puede escribirse en la forma característica:  $a\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = d$ , donde los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  pueden depender del tiempo pero no de la función  $\theta(t)$

o de sus derivadas<sup>1</sup>. *Homogénea* porque no aparece en la ecuación el término  $d$ , independiente de  $\theta$  o de sus derivadas. De *segundo orden* porque dos es el máximo orden de las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial.

- El hecho de ser lineal y homogénea tiene una implicación de gran trascendencia física: si existen varias soluciones de la ecuación, cualquier superposición lineal de ellas será también solución. Este llamado “principio de superposición” es exclusivo de ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas (no importa el orden o si son ordinarias o no). Si la ecuación es lineal pero no homogénea, se cumple un principio de superposición modificado, como veremos en el capítulo siguiente.
- El hecho de ser una ecuación ordinaria de segundo orden en el tiempo implica que la solución general (ajutable a cualesquiera condiciones iniciales) debe contener dos constantes arbitrarias.
- Dadas dos condiciones iniciales  $\theta(0)$  y  $\frac{d\theta(0)}{dt}$ , la solución de la ecuación (1.4) es única; esto es, al fijar condiciones iniciales se da un valor único a las constantes arbitrarias contenidas en la solución.

Para resolver la ecuación (1.4) podemos partir de una suposición o Ansatz, de la forma:

$$\theta(t) = e^{\lambda t}$$

Así, al derivar dos veces con respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Al remplazar en la ecuación (1.4), resulta:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{g}{l} e^{\lambda t} = 0$$

Entonces

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{l}} = \pm i\omega_0 \quad \text{con} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}$$

---

<sup>1</sup> Esta definición matemática de linealidad implica que en una ecuación diferencial lineal no pueden aparecer términos que contengan la función  $\theta(t)$  o sus derivadas elevadas a una potencia diferente de cero o uno. Pero ésta no es una condición suficiente de linealidad. Una ecuación diferencial que contenga productos de la forma  $\theta\dot{\theta}$  no es lineal.

Obtenemos dos soluciones linealmente independientes que pueden superponerse con coeficientes arbitrarios para dar la solución general:

$$\theta(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (1.5)$$

Esta solución puede expresarse de muchas maneras:

$$\theta(t) = A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t \quad (1.6a)$$

$$\theta(t) = C \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (1.6b)$$

$$\theta(t) = D \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (1.6c)$$

Observe que en todas las expresiones quedan dos constantes arbitrarias que toman un valor determinado al ajustar la solución general a las condiciones iniciales especificadas en cada caso.

#### d. Interpretación física

La función  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$  representa una oscilación armónica de frecuencia angular  $\omega_0$  (llamada "*frecuencia natural*" del oscilador y expresada en rad/seg), *amplitud*  $A$  (constante no necesariamente positiva) y *constante de fase*  $\delta$ . El argumento de la función coseno es la *fase total* (dependiente del tiempo).

El modelo más simple del péndulo conduce a una aproximación a la realidad que, tomada literalmente, predice la existencia de un movimiento perpetuo y rigurosamente periódico con período  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  (en seg/ciclo) y frecuencia  $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$  (en hertz o ciclos/seg).

La ecuación (1.4) puede expresarse en función de la coordenada horizontal  $x$  usando la aproximación  $x = l \sin \theta \approx l\theta$ , de la manera siguiente:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{l}x(t)$$

Al escribir su solución en la forma estándar

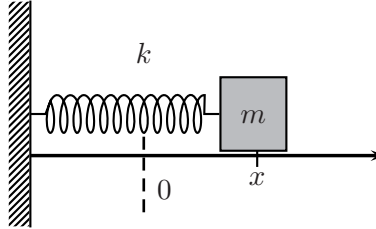
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

y derivar una y dos veces esta expresión, podemos ver que también la velocidad y la aceleración horizontales oscilan con frecuencia  $\omega_0$  pero con desfases de  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$  respecto a la coordenada de posición.

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \delta + \pi)$$

### 1.1.2. El resorte de Hooke



**Figura 1.2** Masa acoplada a resorte de Hooke.

Como en el ejemplo del péndulo simple, suponemos muy pequeña la fricción de la superficie y del aire. Ignoramos la posible radiación de ondas de presión y el tiempo finito de propagación de las perturbaciones a lo largo del resorte. Además, suponemos que el resorte cumple la ley (empírica) de Hooke cuando su deformación no es muy grande, caso al cual nos restringiremos. Si elegimos el origen de la coordenada  $x$  en la posición de equilibrio, la aplicación de la segunda ley de Newton a la masa  $m$  conduce inmediatamente a la ecuación de movimiento

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) es, en su forma matemática, idéntica a la ecuación de movimiento del caso anterior, lo cual nos permite traducir de inmediato la solución y la interpretación física de ésta. Basta sustituir:

$$\begin{aligned} \theta &\longrightarrow x \\ \frac{g}{l} &\longrightarrow \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2 \end{aligned}$$

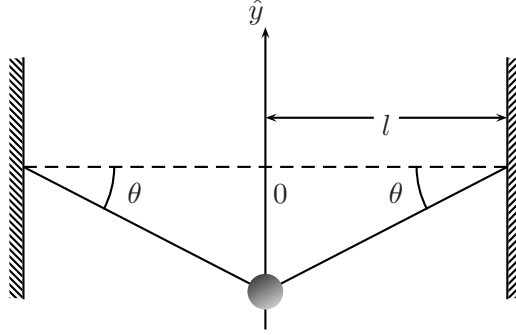
### 1.1.3. Masa en el centro de cuerda sobre plano horizontal

Suponemos que la masa  $m$  (figura 1.3) se mueve transversalmente (a lo largo del eje  $\hat{y}$ ) e ignoramos posibles movimientos longitudinales. Si consideramos que la tensión  $T$  de la cuerda permanece prácticamente constante para pequeños desplazamientos e ignoramos la fricción, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento a partir de la segunda ley de Newton:

$$F_y = m\ddot{y} = -2T \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma el segmento de cuerda con la horizontal, y tiene por convención el mismo signo que la coordenada  $y$ .





**Figura 1.3** Masa en cuerda sobre plano horizontal.

Para valores pequeños del ángulo puede aproximarse:  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{y}{l}$ . La ecuación de movimiento toma la forma

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2T}{ml}y(t) = -\omega_0^2 y(t) \quad (1.8)$$

La solución predice oscilaciones transversales de la masa  $m$  con una frecuencia natural

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2T}{ml}}$$

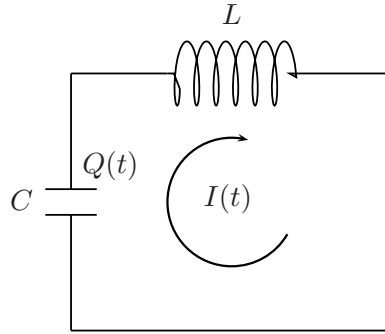
#### 1.1.4. Circuito LC sin resistencia

##### a. Construcción de un modelo

En primera aproximación puede suponerse ignorable la pérdida de energía electromagnética del circuito por causa de la resistencia finita de los conductores o por emisión de ondas electromagnéticas. Puede suponerse, además, que no se acumulan cargas en ningún punto del circuito, salvo sobre las placas del condensador. Por simplicidad elegimos un circuito sin carga neta, de manera que la carga  $Q$  sobre la placa superior será igual en magnitud, pero de signo opuesto, a la carga sobre la placa inferior en cada instante.

En concordancia con lo anterior, y para respetar la conservación de la carga eléctrica, suponemos que en cada instante fluye en el circuito una corriente única,  $I(t) = -\frac{dQ}{dt}$ , lo cual equivale a ignorar cualquier efecto de retardo debido a la velocidad finita de propagación de las perturbaciones.

Finalmente, consideramos que la energía magnética está concentrada en la región de la inductancia  $L$  y la energía eléctrica, en la región entre las placas del condensador  $C$ .



**Figura 1.4** Circuito LC.

Estas aproximaciones serán razonables si, entre otras cosas, el cambio de cargas, corrientes y campos en el tiempo no es demasiado rápido y si las dimensiones del circuito son pequeñas en comparación con cierta longitud característica del orden de  $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$  (donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío)<sup>2</sup>.

### b. Ecuaciones de movimiento

Tomamos como punto de partida la ecuación de conservación de la energía electromagnética del circuito:

$$U_{em} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{cte} \quad (1.9)$$

Por convención,  $Q(t)$  es la carga sobre la placa superior del condensador,  $I(t)$  la corriente del circuito y su sentido positivo lo indica la dirección de la flecha en la figura 1.4.

Al derivar la ecuación (1.9) con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{Q\dot{Q}}{C} + LI\dot{I} = 0 \quad (1.10)$$

Pero, como  $I = -\dot{Q}$ , la ecuación de movimiento del circuito toma la forma:

$$\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{LC}Q(t) \quad (1.11)$$

<sup>2</sup> Si usted desea convencerse de que estas aproximaciones son buenas sólo para el caso cuasi-estático, vea en las *Lectures de Feynman* (tomo II, cap. 23) cómo se comportan condensadores e inductancias reales cuando los cambios ocurren a altas frecuencias.

La solución a la ecuación (1.11) puede escribirse en la forma estándar:

$$Q(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

El modelo conduce a la predicción de oscilaciones armónicas de la carga con frecuencia natural

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

La corriente  $I$  oscilará con un desfase de  $\frac{\pi}{2}$  respecto a la carga (es decir, cuando  $Q$  es máxima, la corriente es cero, y viceversa). Al derivar la ecuación (1.11) puede observarse que la corriente  $I(t)$  satisface una ecuación de forma idéntica a la que rige la carga  $Q(t)$ .

### 1.1.5. Observaciones generales

Los cuatro sistemas considerados son prototipos de osciladores que comparten ciertas características comunes:

- Cada oscilador, como un todo, es un sistema físico localizado en cierta región del espacio y caracterizado por algunos parámetros que permanecen constantes (masa, longitud de la cuerda, constante del resorte, tensión de la cuerda, inductancia, capacitancia). Estos parámetros determinan la frecuencia natural del oscilador.
- Estos osciladores son sistemas con un grado de libertad porque basta una sola variable dinámica ( $\theta(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $Q(t)$ ) para describir completamente el comportamiento del sistema en el transcurso del tiempo.
- Las variables dinámicas de todos estos sistemas satisfacen, en primera aproximación, una ecuación de movimiento de la forma genérica:

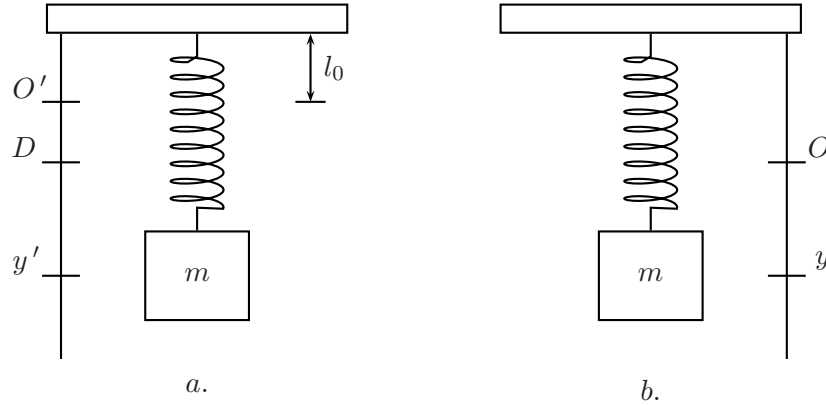
$$\ddot{\Phi}(t) + \omega_0^2 \Phi(t) = 0$$

con

$$\Phi \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \theta \\ x \\ y \\ Q \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{g}{l} \\ \frac{k}{m} \\ \frac{2T}{ml} \\ \frac{1}{LC} \end{array} \right\}$$

### 1.1.6. Puntos de equilibrio de los osciladores

Sobre un cuerpo de masa  $m$ , suspendido de un resorte vertical, actúa, además de la fuerza elástica proporcional al alargamiento algebraico del resorte, su peso  $mg$ . El efecto de esta fuerza constante es trasladar el punto de equilibrio una longitud  $D$  tal que  $kD = mg$ .



**Figura 1.5** Corrimiento del origen en resorte vertical.

Si elegimos el origen  $O'$  en el extremo del resorte no deformado (figura 1.5a), la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{y}' = -ky' + mg \quad (1.12)$$

será lineal pero no homogénea (por contener un término independiente tanto de  $y'$  como de sus derivadas). La solución de (1.12) tiene la forma:

$$y'(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) + D \quad (1.13)$$

con

$$D = \frac{mg}{k}$$

Esto significa que la masa oscilará alrededor de su posición de equilibrio  $y' = D$  (si se le da algún desplazamiento o velocidad inicial). Pero basta elegir de una manera “razonable” un nuevo origen  $O$  en el punto de equilibrio para obtener una ecuación de movimiento más simple (figura 1.5b). En este caso, la fuerza que actúa sobre  $m$  en la posición  $y$  es:

$$m\ddot{y} = mg - k(D + y) = -ky \quad (1.14)$$

En un circuito  $LC$  se presenta una situación análoga cuando tiene una carga neta  $q_0 \neq 0$ . En este caso, el punto de equilibrio corresponde a  $Q' = \frac{q_0}{2}$ , esto es, cuando la carga se reparte por igual entre las dos placas y el campo eléctrico se hace nulo. En la ecuación diferencial aparecerá un término constante (como se plantea en uno de los ejercicios al final del capítulo). Para eliminarlo basta redefinir el origen de la carga, eligiendo como variable dinámica  $Q = Q' - \frac{q_0}{2}$ .

### 1.1.7. Conservación de la energía

En este capítulo hemos deducido las ecuaciones de movimiento de los osciladores mecánicos a partir de la ley fundamental de la mecánica expresada en la segunda ley de Newton. La ecuación de movimiento del oscilador electromagnético, en cambio, se obtuvo a partir de la ley de conservación de la energía y no directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell (que son las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético)<sup>3</sup>. Entre ambos métodos existe la conexión siguiente:

La ecuación de movimiento de un oscilador armónico

$$\ddot{\Phi}(t) + \omega_0^2 \Phi(t) = 0 \quad (1.15)$$

admite una “integral primera” que puede igualarse a la energía del sistema. En efecto, al integrar (1.15) con respecto a  $\Phi$ ,

$$0 = \int \frac{d\dot{\Phi}}{dt} d\Phi + \omega_0^2 \int \Phi d\Phi$$

$$0 = \int \dot{\Phi} d\dot{\Phi} + \omega_0^2 \int \Phi d\Phi$$

$$0 = \frac{1}{2} \left[ \dot{\Phi}^2 + \omega_0^2 \Phi^2 \right]_{t_0}^t$$

resulta:

$$\dot{\Phi}^2(t) + \omega_0^2 \Phi^2(t) = \dot{\Phi}^2(t_0) + \omega_0^2 \Phi^2(t_0) = \text{cte} \quad (1.16)$$

Se puede comprobar directamente que para cada uno de los sistemas analizados esta constante es proporcional a la energía, y a la inversa: al derivar la ecuación de conservación de la energía se obtiene la ecuación de movimiento.

<sup>3</sup> Una deducción basada en las ecuaciones de Maxwell se desarrolla en el apéndice A.

## 1.2. Osciladores libres amortiguados

### 1.2.1. Rectificación del modelo, deducción y solución de nuevas ecuaciones

La experiencia cotidiana basta para descubrir un rasgo falso en el primer modelo de oscilador: una vez excitadas las oscilaciones por obra de algún agente externo (que luego deja libre el sistema), éstas no persisten indefinidamente. Con mayor o menor rapidez disminuye su amplitud y, finalmente, se extinguen.

Se hace necesario entonces refinar el modelo para dar cuenta de estas observaciones. Si la principal causa de amortiguamiento es la fricción (o un factor equiparable a ella), basta adicionar un término en las ecuaciones de movimiento.

Para los sistemas mecánicos, la fuerza de fricción (viscosa) puede aproximarse en ciertas condiciones (que aquí consideramos satisfechas) por la expresión siguiente:

$$\mathbf{F}_{fr} = -b\mathbf{v} \quad (1.17)$$

donde  $b$  es un parámetro constante, y  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la masa  $m$ .

Para los sistemas electromagnéticos, si suponemos que cumplen con la ley de Ohm, basta igualar la potencia *absorbida* (o incremento de la energía del circuito en la unidad de tiempo) a  $-I^2 R$ .

Con esta modificación del modelo inicial, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

Péndulo simple:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \theta(t) - \frac{b}{m} \dot{\theta}(t) \quad (1.18)$$

Resorte de Hooke:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m} x(t) - \frac{b}{m} \dot{x}(t) \quad (1.19)$$

Cuerda con masa:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2T}{ml} y(t) - \frac{b}{m} \dot{y}(t) \quad (1.20)$$

Circuito RLC en serie:

$$\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{LC} Q(t) - \frac{R}{L} \dot{Q}(t) \quad (1.21)$$

Circuito RLC en paralelo<sup>4</sup>:

$$\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{LC} Q(t) - \frac{1}{RC} \dot{Q}(t) \quad (1.22)$$

Observe que estas ecuaciones tienen idéntica forma matemática y pueden expresarse genéricamente así:

$$\ddot{\Phi}(t) + \omega_0^2 \Phi(t) + \Gamma \dot{\Phi}(t) = 0 \quad (1.23)$$

De nuevo tenemos una ecuación diferencial, ordinaria, lineal, homogénea, de segundo orden en el tiempo. A partir del Ansatz:

$$\Phi(t) = e^{\lambda t}$$

resultan dos soluciones con

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Al superponer estas dos soluciones con coeficientes arbitrarios  $A$  y  $B$ , resulta:

$$\Phi(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} t} \quad (1.24)$$

Pueden presentarse tres casos:

- *Sobreamortiguamiento*: si  $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$ , el sistema no puede oscilar. Predomina la fricción sobre la fuerza elástica o de *recuperación*.
- *Amortiguamiento crítico*: si  $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$ , las dos soluciones se reducen a una sola con una única constante arbitraria independiente. Con el método de variación de parámetros se obtiene la solución general:

$$\Phi(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

En este caso el sistema no puede oscilar.

- *Amortiguamiento débil*: si  $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$ , el sistema puede oscilar libremente. En lo sucesivo supondremos que esta condición es satisfecha por todos los sistemas físicos que estudiamos.

---

<sup>4</sup> Véase el ejercicio 1.6 al final del capítulo.

Si escribimos:

$$\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \equiv i \omega'$$

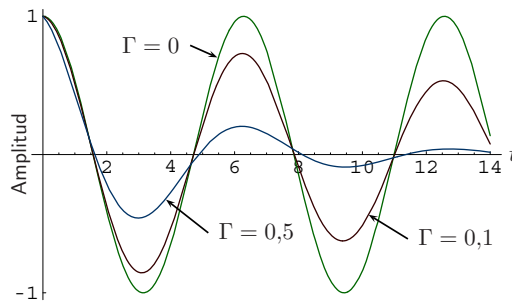
podemos escribir así la solución general para los osciladores amortiguados:

$$\Phi(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left( A e^{i\omega't} + B e^{-i\omega't} \right) \quad (1.25)$$

O de modo equivalente

$$\Phi(t) = C e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega't + \delta) \quad (1.26)$$

Observe que una oscilación amortiguada no es un movimiento armónico, ni siquiera periódico, pues no existe  $T$  tal que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)$  (figura 1.6).



**Figura 1.6** Oscilaciones amortiguadas.

### 1.2.2. Decaimiento de la energía y factor de calidad

Si, para tomar un caso concreto, analizamos el comportamiento predicho por la ecuación (1.26) para el sistema masa-resorte, observamos de inmediato que la amplitud de las oscilaciones decae exponencialmente.

Más importante aún: la energía del sistema no se conserva sino que decae de una manera complicada. Si llevamos la solución

$$x(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega't + \delta)$$



a la expresión de la energía

$$E(t) = m \frac{\dot{x}^2}{2} + k \frac{x^2}{2}$$

resulta:

$$E(t) = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \left[ m \left( \frac{\Gamma}{2} \right)^2 A^2 \cos^2(\omega' t + \delta) + m \omega' \Gamma A^2 \cos(\omega' t + \delta) \sin(\omega' t + \delta) \right. \\ \left. + m \omega'^2 A^2 \sin^2(\omega' t + \delta) + k A^2 \cos^2(\omega' t + \delta) \right] \quad (1.27)$$

Sin embargo, si suponemos que el amortiguamiento es suficientemente débil ( $\Gamma \ll \omega_0$ ), podemos ignorar los dos primeros términos de (1.27) en comparación con los restantes y aproximar:

$$\omega'^2 \approx \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Si esta aproximación es válida, la energía del oscilador libre amortiguado decae exponencialmente con el tiempo<sup>5</sup>:

$$E(t) \approx \frac{1}{2} \left( k A^2 e^{-\Gamma t} \right) \approx \left( m \frac{\dot{x}^2(0)}{2} + k \frac{x^2(0)}{2} \right) e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-\Gamma t} \quad (1.28)$$

Observe que  $E(t) = \frac{E_0}{2}$  cuando  $e^{-\Gamma t} = \frac{1}{2}$ , esto es, cuando  $\Gamma t = \ln 2$ . De aquí resulta que el tiempo  $\tau$  necesario para que la energía del oscilador decaiga a la mitad de su valor inicial es igual a

$$\tau = \frac{\ln 2}{\Gamma} \approx \frac{1}{\Gamma}$$

$\tau$  se denomina *vida media del oscilador*. Sólo un oscilador *sin* amortiguamiento puede tener una vida media infinita. La *calidad* de un oscilador puede medirse por el número de oscilaciones que puede ejecutar durante su vida media, es decir, antes de que su amplitud se reduzca apreciablemente. Este número es igual a

$$\frac{\tau}{T'} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\Gamma} \approx \frac{\omega_0}{\Gamma} = \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$  se denomina *factor de calidad del oscilador*. (Observe que  $\mathbb{Q}$  es un número adimensional).

<sup>5</sup> Aquí se ilustra el poder de la aproximación en física: para poder ver los aspectos relevantes o dominantes de un fenómeno es necesario prescindir en primera aproximación de detalles más finos.

## Ejercicios

- 1.1** a. A partir de la ecuación de conservación de la energía de un péndulo simple, halle su ecuación de movimiento en coordenadas polares en aproximación de pequeñas oscilaciones.  
b. Deduzca la ecuación de movimiento en presencia de una fuerza tangencial viscosa.
- 1.2** Halle el período de oscilación de un péndulo físico de masa  $m$  y distancia  $h$  del centro de masa al punto de suspensión, en aproximación de ángulos pequeños.
- 1.3** a. Exprese la amplitud y la constante de fase de un oscilador armónico en función de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $v(0)$ .  
b. Suponga que el sistema es sometido a una fuerza de amortiguamiento de la forma  $-\Gamma\dot{x}$ . Halle una expresión para  $A(t)$  y  $\delta$  en función de las mismas condiciones iniciales de la parte a.
- 1.4** Utilizando la relación  $\lambda\nu = c$  (donde  $c$  es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío), señale un límite para las dimensiones de un circuito donde es válida la aproximación cuasiestática (que permite ignorar los efectos de retardo):  
a. Si  $\omega_0 = 60 \text{ Hz}$   
b. Si  $\omega_0 = 1 \text{ kHz}$   
c. Si  $\omega_0 \approx 1 \text{ MHz}$
- 1.5** A partir de la conservación de la energía electromagnética halle la ecuación de un circuito LC con carga neta  $q_0$ . Redefina el origen de la carga para obtener una ecuación homogénea, e interprete físicamente sus soluciones. Compare este sistema con la masa atada a un resorte suspendido verticalmente.
- 1.6** a. Deduzca la ecuación (1.22) para el circuito RLC en paralelo. Exprese la potencia instantánea disipada en función de  $R$ .  
b. Compare el tiempo de vida  $\tau$  de un oscilador RLC en paralelo con el del oscilador en serie. ¿De qué depende el factor de calidad  $Q$  en cada caso? Justifique el resultado aparentemente paradójico del circuito en paralelo.
- 1.7** Demuestre que para un circuito RLC en paralelo, la energía también decae en forma aproximadamente exponencial si  $\Gamma \ll \omega_0$ .

**1.8** Calcule  $\omega_0$ ,  $\omega'$ ,  $\tau$ ,  $Q$ , en circuitos RLC en serie y paralelo con los parámetros siguientes:

- a.  $L = 25 \text{ mH}$        $R = 25 \text{ k}\Omega$        $C = 10^{-9} \text{ F}$   
 b.  $L = 10 \text{ H}$        $R = 1 \Omega$        $C = 6 \mu\text{F}$

Analice la plausibilidad de sus resultados.

- 1.9** a. Integre las ecuaciones de movimiento (1.3) y (1.7), para el péndulo simple y el sistema masa-resorte, halle su energía total y muestre que es una constante en el tiempo.  
 b. Derivando la expresión de la energía del sistema amortiguado masa-resorte demuestre, mediante la ecuación de movimiento, que la potencia perdida tiene igual magnitud que el trabajo de la fuerza viscosa por unidad de tiempo.

**1.10** Para el sistema masa-resorte no amortiguado:

- a. Elabore gráficas comparativas de  $E$  (energía total),  $E_{pot}$  (energía potencial) y  $E_{cin}$  (energía cinética) en función de  $t$ .  
 b. Elabore gráficas de  $E$ ,  $E_{pot}$  y  $E_{cin}$  en función de  $x$ .  
 c. Halle la velocidad  $\dot{x}$  en función de  $x$  para hacer un diagrama en el espacio de fase del oscilador  $(x, \dot{x})$ . Muestre que la velocidad describe una elipse en el espacio de fase, indique en qué sentido la describe y exprese los semiejes  $a$  y  $b$  en función de la energía  $E$ . Muestre que, si existe amortiguamiento, la curva describe una espiral que converge hacia el origen.

**1.11** A partir de la solución de la ecuación de movimiento, muestre que la energía total de un oscilador amortiguado disminuye durante el tiempo de una oscilación completa  $T = \frac{2\pi}{\omega'}$  a un valor

$$E(t_0 + T) = E_0 e^{-\Gamma T}$$

( $E_0$  es el valor de la energía en  $t_0$ ). Como este resultado es válido para cualquier  $t_0$ , usted puede elegir  $t_0 = 0$  y escribir:

$$E(nT) = E_0 e^{-n\Gamma T}$$

Compare la gráfica exacta de  $E(t)$  (ecuación (1.27)) con la gráfica aproximada de decaimiento exponencial.



## Capítulo 2

# El oscilador simple amortiguado y forzado

En este capítulo se analiza la respuesta de osciladores con un grado de libertad a una fuerza armónica.

- La forma de la solución general lleva a concluir que los sistemas amortiguados tienden a *olvidar* las condiciones iniciales.
- El estudio de la resonancia y el análisis de las curvas de absorción de potencia constituyen el núcleo del capítulo.
- Se muestra que el factor de calidad está relacionado con el ancho de la curva de resonancia y con la eficiencia del oscilador para almacenar energía.
- Un teorema de superposición lineal permite generalizar los resultados a fuerzas que dependen del tiempo de una manera arbitraria.
- Se usa un modelo clásico para comprender de manera aproximada el comportamiento de dieléctricos lineales bajo la acción de la radiación electromagnética.
- Algunos ejemplos ilustran la conexión entre modelos teóricos y aplicaciones técnicas.

### 2.1. Ecuaciones de movimiento

Para los sistemas mecánicos considerados en el capítulo 1, la fuerza externa  $F(t)$  puede incorporarse de inmediato en las ecuaciones de movimiento.

Péndulo forzado:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \theta(t) - \frac{b}{m} \dot{\theta}(t) + \frac{F_{\theta}(t)}{ml} \quad (2.1)$$

Sistema forzado masa-resorte:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m} x(t) - \frac{b}{m} \dot{x}(t) + \frac{F_x(t)}{m} \quad (2.2)$$

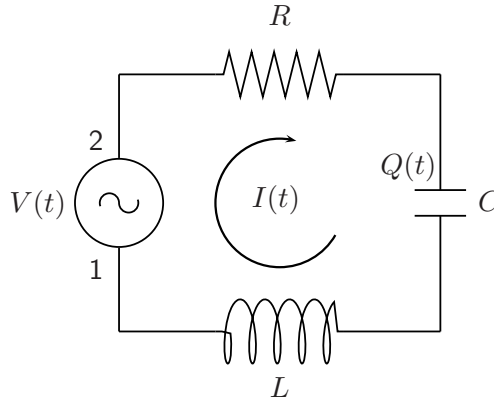
Sistema forzado masa-cuerda:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2T}{ml} y(t) - \frac{b}{m} \dot{y}(t) + \frac{F_y(t)}{m} \quad (2.3)$$

Al final del capítulo mostraremos una forma simple e indirecta de forzar estos sistemas mecánicos.

### Sistema RLC forzado

El circuito RLC en serie puede forzarse mediante una fuente de voltaje  $V(t)$ , como se indica en la figura 2.1.



**Figura 2.1** Circuito RLC forzado armónicamente.

La ecuación de movimiento de este sistema puede hallarse igualando el cambio de energía electromagnética del circuito por unidad de tiempo a la energía disipada en la resistencia ( $-I^2 R$ ) más la potencia suministrada por la fuente ( $IV(t)$ ):

$$\frac{dE_{em}}{dt} = -I^2 R + IV(t) \quad (2.4)$$

Como:

$$E_{em} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \quad I = \dot{Q}$$

resulta:

$$\ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{V(t)}{L} \quad (2.5)$$

Por convención,  $V(t)$  se toma como positivo cuando tiende a producir en el circuito exterior a la fuente una corriente en el sentido que se ha elegido como positivo. Observe que cuando  $V(t)$  e  $I(t)$  son positivos, la fuente realiza trabajo positivo, por cuanto las cargas en su interior van de un punto de potencial menor (1) a uno de potencial mayor (2) (figura 2.1).

## 2.2. Solución de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones halladas en la sección anterior tienen la forma genérica:

$$\ddot{\Phi}(t) + \Gamma\dot{\Phi}(t) + \omega_0^2\Phi(t) = G(t) \quad (2.6)$$

Por ahora nos restringiremos al caso en que la fuerza externa es puramente armónica<sup>1</sup>, de la forma  $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t - \beta)$ . En este caso, el término a la derecha de la ecuación (2.6) se expresa así:

$$G(t) = G_0 \cos(\omega_f t - \beta) \quad (2.7)$$

con  $G_0 = \frac{F_0}{m}$  para los sistemas mecánicos, y expresiones similares para los electromagnéticos.

Desde el punto de vista matemático, (2.6) es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden respecto al tiempo y no homogénea. Un teorema aplicable a ecuaciones diferenciales de este tipo permite construir la solución general como la suma de una solución particular de (2.6) (sin ninguna constante arbitraria) y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (que se obtiene igualando a cero el término de la derecha de (2.6)). Esta parte de la solución general contiene las dos constantes arbitrarias ajustables a las condiciones iniciales de cada caso.

---

<sup>1</sup> Esta restricción no es esencial. Con la ayuda del principio de superposición de fuentes (sección 2.4) y del análisis de Fourier (capítulo 8), que permite descomponer casi cualquier función  $F(t)$  en componentes armónicas, podemos obtener la solución para un  $G(t)$  arbitrario superponiendo linealmente las respuestas de cada una de sus componentes armónicas.

En consecuencia, podemos escribir la solución general de (2.6) así:

$$\Phi(t) = \Phi_h(t) + \Phi_p(t) \quad (2.8)$$

La ecuación homogénea coincide con la del oscilador simple amortiguado, ya resuelta en el capítulo anterior. Con base en estos resultados podemos expresar  $\Phi_h(t)$  de la manera siguiente:

$$\Phi_h(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \delta) \quad (2.9)$$

con

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Para hallar la solución particular  $\Phi_p(t)$  usamos como Ansatz una función de forma similar al término no homogéneo de la ecuación (2.6):

$$\Phi_p(t) = C_f(\omega_f) \cos(\omega_f t - \beta - \alpha_f(\omega_f)) \quad (2.10)$$

Con la notación queremos subrayar que  $C_f$  y  $\alpha_f$  no son constantes arbitrarias, sino que están completamente determinadas por los parámetros del sistema y por la frecuencia de la fuerza externa.

Dado que  $\Phi_p(t)$  debe ser solución de (2.6):

$$\ddot{\Phi}_p(t) + \Gamma \dot{\Phi}_p(t) + \omega_0^2 \Phi_p(t) = G_0 \cos(\omega_f t - \beta) \quad (2.11)$$

podemos simplificar los cálculos usando como auxiliar la variable compleja:

$$Z_p(t) = C_f e^{i(\omega_f t - \beta - \alpha_f)}$$

Es obvio que si logramos hallar  $C_f$  y  $\alpha_f$  tales que  $Z_p(t)$  satisfaga:

$$\ddot{Z}_p(t) + \Gamma \dot{Z}_p(t) + \omega_0^2 Z_p(t) = G_0 e^{i(\omega_f t - \beta)}, \quad (2.12)$$

la parte real de  $Z_p(t)$ , que coincide con  $\Phi_p(t)$ , satisfará (2.11).

Llevando  $Z_p(t)$  en forma explícita a (2.12), resulta:

$$(-\omega_f^2 + \omega_0^2 + i\Gamma\omega_f)C_f e^{i(\omega_f t - \beta - \alpha_f)} = G_0 e^{i(\omega_f t - \beta)}$$



lo cual implica:

$$C_f (\omega_0^2 - \omega_f^2 + i\Gamma\omega_f) = G_0 e^{i\alpha_f} \quad (2.13)$$

Al igualar por separado la parte real y la parte imaginaria de (2.13), resulta:

$$C_f (\omega_0^2 - \omega_f^2) = G_0 \cos \alpha_f$$

$$C_f \Gamma\omega_f = G_0 \sin \alpha_f$$

entonces:

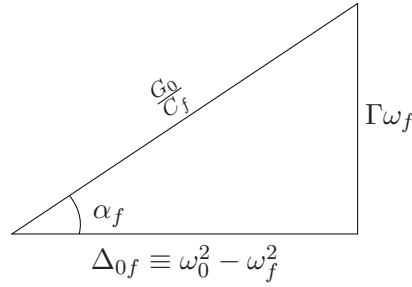
$$\tan \alpha_f = \frac{\Gamma\omega_f}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \quad (2.14)$$

$$C_f^2 = \frac{G_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2} \quad (2.15)$$

Sin perder generalidad podemos elegir  $C_f$  de igual signo que  $G_0$ , lo cual implica elegir  $\sin \alpha_f \geq 0$ , es decir:

$$0 \leq \alpha_f \leq \pi$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) pueden representarse gráficamente con ayuda del triángulo de la figura 2.2.



**Figura 2.2** Representación geométrica de (2.14) y (2.15).

La solución particular puede expresarse así:

$$\begin{aligned} \Phi_p(t) &= C_f \cos(\omega_f t - \beta - \alpha_f) \\ &= C_f \cos \alpha_f \cos(\omega_f t - \beta) + C_f \sin \alpha_f \sin(\omega_f t - \beta) \end{aligned}$$

De acuerdo con la figura 2.2 y la ecuación (2.15):

$$\begin{aligned}\Phi_p(t) &= \frac{C_f^2}{G_0} \Delta_{0f} \cos(\omega_f t - \beta) + \frac{C_f^2}{G_0} \Gamma \omega_f \sin(\omega_f t - \beta) \\ &= \frac{G_0 \Delta_{0f}}{\Delta_{0f}^2 + (\Gamma \omega_f)^2} \cos(\omega_f t - \beta) + \frac{G_0 \Gamma \omega_f}{\Delta_{0f}^2 + (\Gamma \omega_f)^2} \sin(\omega_f t - \beta)\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\Phi_p(t) = A_{el} \cos(\omega_f t - \beta) + A_{ab} \sin(\omega_f t - \beta) \quad (2.16)$$

$$A_{el} = \frac{G_0 \Delta_{0f}}{\Delta_{0f}^2 + (\Gamma \omega_f)^2} \quad A_{ab} = \frac{G_0 \Gamma \omega_f}{\Delta_{0f}^2 + (\Gamma \omega_f)^2} \quad (2.17)$$

$$(\Delta_{0f} \equiv \omega_0^2 - \omega_f^2)$$

Hemos identificado los coeficientes de la solución particular con una amplitud elástica ( $A_{el}$ ) y una amplitud absorbente ( $A_{ab}$ ) por razones que se verán con claridad al analizar físicamente el comportamiento del oscilador forzado. Observe que la parte elástica está en fase ( $\omega_f < \omega_0$ ) o en antifase ( $\omega_f > \omega_0$ ) con la fuerza externa, en tanto que la parte absorbente está desfasada en  $\frac{\pi}{2}$ , o en *cuadratura* con la fuerza, como suele decirse.

Finalmente, podemos escribir la solución general de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \delta) \\ &\quad + A_{el} \cos(\omega_f t - \beta) + A_{ab} \sin(\omega_f t - \beta) \quad (2.18)\end{aligned}$$

## 2.3. Análisis físico de la solución

### 2.3.1. Evolución del estado transitorio al estado estacionario

El movimiento del oscilador, descrito en la ecuación (2.18), tiene una forma complicada. Sin embargo, la parte homogénea de la solución general que contiene toda la información sobre las condiciones iniciales en las constantes  $A$  y  $\delta$ , decae exponencialmente con una rapidez que depende del parámetro  $\Gamma$ .

Después de transcurrido un tiempo  $t \gg \tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$ , la amplitud de esta oscilación se ha amortiguado de modo considerable y sólo persiste la contribución  $\Phi_p(t)$ ;

por ello puede decirse que el oscilador ha “olvidado” sus condiciones iniciales. Esto significa que dos osciladores idénticos sometidos a fuerzas idénticas, pero “excitados” o preparados inicialmente en forma diferente, llegarán a un estado estacionario idéntico en el cual ambos oscilarán con la frecuencia de la fuerza externa, una amplitud constante  $C_f$  y una constante de fase  $\alpha_f$ .

Con un ejemplo podemos ilustrar cómo pasa un oscilador del estado transitorio ( $t \leq \tau$ ) al estado estacionario ( $t \gg \tau$ ): un péndulo inicialmente en reposo es sometido a una fuerza armónica  $F_0 \cos(\omega_f t)$  con frecuencia  $\omega_f = \omega_0$ . En este caso  $\Delta_{0f} = 0$ ,  $\beta = 0$  y la solución general de la ecuación de movimiento toma la forma:

$$x(t) = A e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left( A_1 \sin(\omega' t) + A_2 \cos(\omega' t) \right) + A_{ab} \sin(\omega_0 t)$$

donde  $A_{ab} = \frac{F_0}{m\Gamma\omega_0}$ .

Por condiciones iniciales:

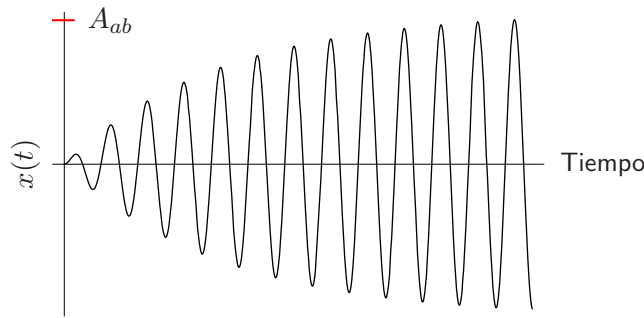
$$x(0) = 0 = A_2$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \omega' A_1 + \omega_0 A_{ab}$$

Si el amortiguamiento es débil ( $\omega_0 \gg \frac{\Gamma}{2}$ ), podemos aproximar  $\omega' \cong \omega_0$ , con lo cual  $A_1 \cong -A_{ab}$  y la solución única toma la forma:

$$x(t) = A_{ab} \sin(\omega_0 t) \left( 1 - e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \right)$$

Observe que para  $t \gg \frac{1}{\Gamma}$  la solución  $x(t)$  tiende a una oscilación puramente armónica, de la forma  $A_{ab} \sin(\omega_0 t)$  (figura 2.3).



**Figura 2.3** Evolución del estado transitorio al estacionario.

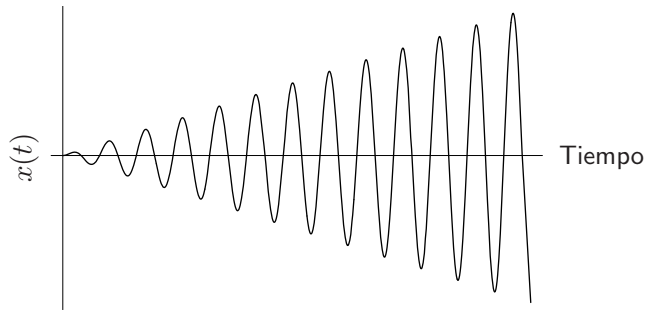
En este mismo caso es interesante ver lo que ocurre cuando el amortiguamiento tiende a cero. Al hacer una expansión en serie de Taylor de la exponencial antes de tomar el límite, resulta:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \left( 1 - 1 + \frac{1}{2}\Gamma t - \frac{1}{4}(\Gamma t)^2 + \dots \right)$$

Entonces:

$$x(t) \longrightarrow \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Esta solución coincide con la que se habría obtenido directamente a partir de la ecuación para el oscilador forzado no amortiguado con el método de los coeficientes indeterminados. Observe que la solución predice un crecimiento ilimitado de la amplitud de las oscilaciones, como se muestra en la figura 2.4. Pero no olvide que nuestro modelo lineal sólo es válido para pequeñas oscilaciones y que, probablemente, el sistema acabará por romperse por efectos de resonancia.



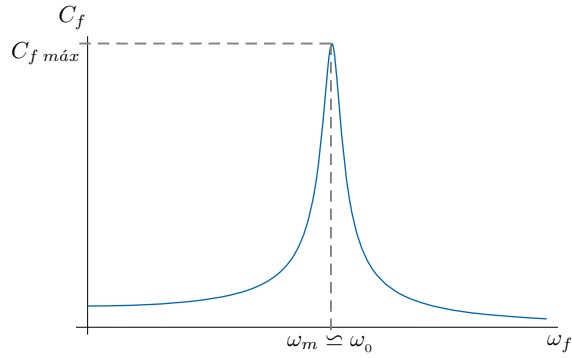
**Figura 2.4** Crecimiento ilimitado de la amplitud.

En general, cuando  $\Gamma = 0$ , no tiene sentido distinguir entre estados estacionario y transitorio. Además, cuando  $\omega_f$  coincide con  $\omega_0$ , la amplitud no tiende instantáneamente a infinito. La solución correcta predice un crecimiento lineal de la amplitud en el tiempo, tal como el que resultó en el caso particular que analizamos. Si desde el comienzo suponemos  $\omega_0 - \omega_f = 0$  y  $\Gamma = 0$ , el Ansatz (2.10) conduce a una indeterminación en  $C_f$ ,  $\cos \alpha_f$  y  $\sin \alpha_f$ .

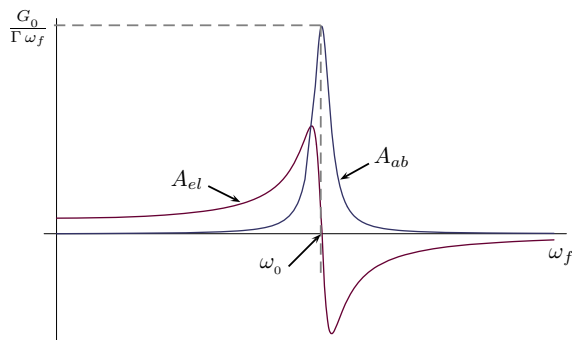
### 2.3.2. Resonancia

Después de un tiempo considerable, la fuente externa impone al oscilador su frecuencia  $\omega_f$ . Pero la amplitud de la respuesta estacionaria depende crucialmente de la relación entre esta frecuencia externa y la frecuencia natural del

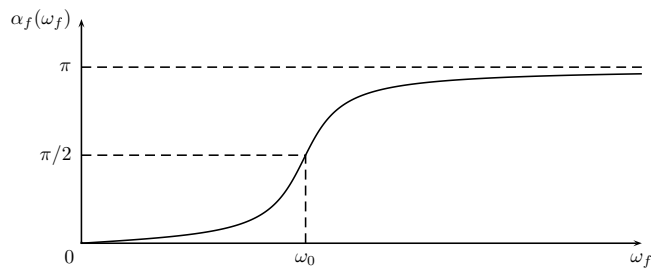
oscilador. Las gráficas 2.5, 2.6 y 2.7 muestran cómo dependen  $C_f$ ,  $A_{el}$ ,  $A_{ab}$  y  $\alpha_f$  de  $\omega_f$ . De aquí puede concluirse:



**Figura 2.5** Amplitud en función de la frecuencia de la fuente.



**Figura 2.6** Amplitud elástica y absorbente en función de la frecuencia de la fuente.



**Figura 2.7** Constante de fase en función de la frecuencia de la fuente.

- La amplitud total de la respuesta estacionaria es muy pequeña para frecuencias bastante alejadas de la frecuencia natural  $\omega_0$  y tiene un máximo en  $\omega_f = \omega_m$ , que corresponde al extremo de la función  $C_f(\omega_f)$  y es cercano a  $\omega_0$ .
- Para frecuencias  $\omega_f$  muy alejadas de  $\omega_0$ , predomina la contribución elástica y puede ignorarse la absorbente. La respuesta elástica está en fase con la fuerza externa (para  $\omega_f < \omega_0$ ) o en antifase (para  $\omega_f > \omega_0$ ).
- Para frecuencias cercanas a  $\omega_0$ , predomina la contribución absorbente y puede ignorarse la elástica.
- Exactamente en la *resonancia* (cuando  $\omega_f = \omega_0$ ), la respuesta del oscilador presenta los *rasgos característicos* siguientes:

$A_{ab}$  es máxima

$$A_{el} = 0$$

$$\alpha_f = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_p(t) = \frac{G_0}{\Gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t - \beta) \quad \text{Respuesta en cuadratura con la fuerza}$$

$$\dot{\Phi}_p(t) = \frac{G_0}{\Gamma} \cos(\omega_0 t - \beta) \quad \text{Velocidad en fase con la fuerza}$$

### 2.3.3. Absorción de potencia, curva de resonancia

En el estado estacionario, la *energía media* del oscilador forzado permanece constante a pesar de las pérdidas por fricción o resistencia. Esto significa que durante cada ciclo el oscilador absorbe de la fuerza externa la energía necesaria para compensar estas pérdidas.

Para corroborar esto calculemos  $P_f(t)$ , el trabajo realizado en la unidad de tiempo por el agente externo sobre un oscilador mecánico con un grado de libertad  $x$ .

$$P_f(t) = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = F_0 \cos(\omega_f t - \beta) \dot{x}(t)$$

En el estado estacionario:

$$P_f(t) = F_0 \cos(\omega_f t - \beta) \dot{x}_p(t)$$

$$P_f(t) = -F_0\omega_f A_{el} \cos(\omega_f t - \beta) \sin(\omega_f t - \beta) + F_0\omega_f A_{ab} \cos^2(\omega_f t - \beta)$$

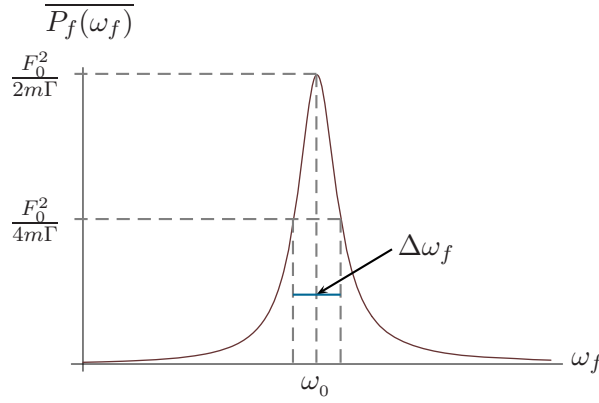
La potencia media (energía absorbida por unidad de tiempo promediada durante un ciclo) es una cantidad de mayor interés físico que la potencia instantánea:

$$\overline{P_f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T P_f(t) dt = \frac{F_0 \omega_f A_{ab}}{2}$$

Entonces:

$$\overline{P_f(t)} = \frac{F_0^2}{2m\Gamma} \frac{\Gamma^2 \omega_f^2}{(\Delta_{0f}^2 + \Gamma^2 \omega_f^2)} \quad (2.19)$$

Observe que la contribución de la respuesta elástica a la absorción de potencia media es nula. Sólo la parte de la respuesta estacionaria que corresponde a una velocidad en fase con la fuerza externa, contribuye a la absorción de potencia media. Esto explica la denominación de los coeficientes  $A_{el}$  y  $A_{ab}$  en la ecuación (2.16).



**Figura 2.8** Curva de resonancia.

Al variar lentamente la frecuencia de la fuerza externa podemos obtener la curva experimental de resonancia descrita según el modelo teórico por la ecuación (2.19) (figura 2.8).

En el máximo de la función  $\overline{P_f(\omega_f)}$  aparece el rasgo fundamental de una resonancia:

*La potencia absorbida es máxima cuando  $\omega_f$  coincide con la frecuencia natural del oscilador.*

Mediante el análisis de una curva como ésta es posible obtener información sobre los parámetros del sistema. Si el amortiguamiento es débil ( $\omega_0 \gg \frac{\Gamma}{2}$ ),

el pico de resonancia será estrecho y aproximadamente simétrico alrededor del máximo. En este caso es suficiente analizar la curva de valores de  $\omega_f$  cercanos a  $\omega_0$ .

Podemos entonces hacer la aproximación siguiente:

$$\Delta_{0f} \equiv \omega_0^2 - \omega_f^2 = (\omega_0 - \omega_f)(\omega_0 + \omega_f) \cong (\omega_0 - \omega_f)(2\omega_f)$$

Con esta aproximación, la potencia media como función de la frecuencia de la fuerza externa toma una forma particularmente simple:

$$\overline{P_f(\omega_f)} = \frac{F_0^2}{2m\Gamma} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega_0 - \omega_f)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (2.20)$$

La función (2.20) es desde el punto de vista matemático una curva lorentziana<sup>2</sup>, simétrica alrededor del máximo en  $\omega_f = \omega_0$ .

Parámetros típicos de una curva de resonancia son: *centro* ( $\omega_0$ ), *ancho a la mitad de la altura* ( $\Delta\omega_f$ ) y *altura de la curva* ( $\overline{P_f(\omega_f)}_{\text{máx}} = \frac{F_0^2}{2m\Gamma}$ ).

Para obtener el semiancho de la curva de resonancia basta hallar el valor  $\omega_f$  para el cual la potencia media disminuye a la mitad de su valor máximo:

$$\overline{P_f(\omega_{f\frac{1}{2}})} = \frac{F_0^2}{4m\Gamma} = \frac{F_0^2}{2m\Gamma} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega_0 - \omega_{f1/2})^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Esto implica:

$$\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 = (\omega_0 - \omega_{f\frac{1}{2}})^2$$

entonces:

$$|\omega_0 - \omega_{f\frac{1}{2}}| = \frac{\Gamma}{2}$$

Si denominamos  $\Delta\omega_f$  el ancho total de la curva de resonancia a la mitad de la altura, obtenemos:

$$\Delta\omega_f = \Gamma$$

---

<sup>2</sup> En física atómica una curva lorentziana describe procesos de absorción de energía y se conoce como fórmula de Breit-Wigner.



Observe que el pico de la curva de absorción de potencia media tiene una altura  $\frac{F_0^2}{2m\Gamma}$  que aumenta cuando su ancho  $\Gamma$  disminuye. Esto significa que un oscilador con una curva de absorción estrecha, y por tanto alta, puede absorber energía de modo apreciable sólo en un pequeño rango  $\Delta\omega_f$  de frecuencias alrededor de su frecuencia natural. Si miramos el proceso de absorción como un flujo de energía que sale de la fuente externa y al pasar por el oscilador se dispersa o se transforma en calor, podemos decir que energía incidente con frecuencia fuera del rango  $\Delta\omega_f$  prácticamente pasa de largo sin disminuir su intensidad.

Así, el oscilador débilmente amortiguado se comporta como un filtro de frecuencias cuya selectividad está determinada por el parámetro  $\Gamma$ .

Si el sistema amortiguado oscilara libremente (sin fuerza externa), su vida media sería igual a  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ . De aquí resulta una relación fundamental entre el ancho de la curva de resonancia del oscilador y el tiempo de vida media del oscilador libre (relación que nos permite predecir el ancho de la curva de resonancia a partir de una curva de decaimiento, y viceversa):

$$\Delta\omega_f \tau = 1 \quad (2.21)$$

A pesar de su aspecto simple, esta relación, multiplicada por la constante de Planck, se reencontrará en la mecánica cuántica jugando un papel esencial como relación de incertidumbre tiempo–energía. En el capítulo 8 encontrará más precisiones sobre esta correspondencia.

### 2.3.4. Factor de calidad de un oscilador forzado

En el capítulo 1 se definió el factor de calidad  $Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = \omega_0 \tau$  como medida del número de oscilaciones que ejecuta un oscilador débilmente amortiguado durante su vida media. Ahora vamos a mostrar que si el oscilador es forzado armónicamente, el factor de calidad también mide la eficiencia del oscilador para almacenar energía.

Como una medida de esta eficiencia, comparemos la energía almacenada en el oscilador débilmente amortiguado y forzado con la energía absorbida de la fuente externa durante un ciclo para sustentar la oscilación estacionaria.

En el caso general, el trabajo realizado por unidad de tiempo por la fuerza friccional (negativo) no lo compensa exactamente la potencia instantánea (fluctuante) de la fuerza externa. Sólo los promedios durante cada ciclo se compensan. Por ello la energía del oscilador no permanece constante sino en promedio. Pero en el caso  $\omega_f = \omega_0$ , la fase  $\alpha_f$  es igual a  $\frac{\pi}{2}$ , la cancelación del trabajo de la fuerza externa y de la fuerza viscosa es exacta en cada instante y, por tanto, la energía almacenada en el oscilador resonante permanece rigurosamente constante. (Para demostrarlo desarrolle el ejercicio 2.7).

Como la absorción de energía sólo es apreciable en una pequeña región de frecuencias alrededor de  $\omega_0$ , podemos evaluar la fracción:

$$\frac{\text{Energía almacenada en el oscilador}}{\text{Energía absorbida en un ciclo}}$$

a la frecuencia de resonancia  $\omega_f = \omega_0$ .

Tomemos el caso de un oscilador mecánico como el sistema masa–resorte. La energía total es igual a la energía potencial del oscilador en un punto de retorno ( $\dot{x}(t) = 0$ ). De acuerdo con (2.10) y (2.15):

$$\text{Energía almacenada} = k \frac{C_f^2}{2} = k \frac{F_0^2}{2m^2\Gamma^2\omega_0^2} = \frac{F_0^2}{2m\Gamma^2}$$

pero según (2.19):

$$\text{Energía absorbida por ciclo} = \overline{P_f}T = \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \frac{F_0^2}{2m\Gamma}$$

De aquí resulta:

$$\frac{\text{Energía almacenada en el oscilador}}{\text{Energía absorbida en un ciclo}} = \frac{\omega_0}{2\pi\Gamma}$$

En consecuencia:

$$\frac{\omega_0}{\Gamma} = \mathbb{Q} = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía absorbida en un ciclo}} \quad (2.22)$$

Esta eficiencia para almacenar energía por lo general es una característica deseable desde el punto de vista técnico, lo cual explica la denominación de “factor de calidad”. En circuitos de radio a base de condensadores e inductancias convencionales  $\mathbb{Q}$  es del orden de  $10^2$  en el rango de frecuencias de megahertz ( $10^6$  Hz). Cavidades de microondas absorben energía muy selectivamente y alcanzan valores de  $\mathbb{Q}$  del orden de  $10^5$ . Átomos y núcleos se comportan como osciladores con varias frecuencias naturales características, y sus factores de calidad en resonancia son del orden de  $10^7$  y  $10^{12}$ – $10^{15}$ , respectivamente.

Las curvas de resonancia, con los rasgos de nuestro modelo clásico debidamente reinterpretados, juegan un papel esencial en el estudio de procesos de absorción de energía (no sólo electromagnética) por átomos, núcleos y partículas elementales. Basta hojear una revista científica para convencerse de que el análisis de curvas de resonancia es uno de los métodos fundamentales para explorar la estructura de sistemas cuánticos<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> El eje de las frecuencias estará comúnmente traducido a energías, y el eje de potencia, a intensidades, probabilidades o secciones eficaces.

## 2.4. Principio de superposición de fuentes

En algunos de los análisis anteriores hemos supuesto implícitamente el llamado “principio de superposición de fuentes” que es, en realidad, un teorema válido para ecuaciones lineales no homogéneas.

Puede mostrarse directamente que si  $x_1(t)$  es una solución de una ecuación diferencial lineal con término no homogéneo (o “fuente”) igual a  $F_1(t)$  y  $x_2(t)$  es solución de una ecuación diferencial idéntica, excepto el término no homogéneo igual a  $F_2(t)$ , la superposición  $x_1(t) + x_2(t)$  es solución de la ecuación diferencial con fuente  $F_1(t) + F_2(t)$ .

En física esto se traduce diciendo que cada fuente produce su efecto independientemente de la otra, como si actuase sola.

Este hecho puede generalizarse en el teorema siguiente:

*Sea  $x(t)$  solución de una ecuación diferencial lineal con término no homogéneo  $F(t)$ . Si  $F(t)$  puede expresarse como una suma:*

$$F(t) = \sum_n F_n(t) \quad (2.23)$$

*entonces  $x(t)$  también puede escribirse como suma:*

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (2.24)$$

*donde  $x_n(t)$  es solución de la ecuación con el término no homogéneo  $F_n(t)$ .*

En muchos casos de interés físico, la fuerza externa sobre el oscilador puede desarrollarse como suma (finita o infinita) de fuerzas armónicas en la forma:

$$F(t) = \sum_n F_{0n} \cos(\omega_{fn}t + \Theta_n) \quad (2.25)$$

En consecuencia, la solución general puede expresarse como suma de la solución de la ecuación homogénea y una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = \sum_n C_{fn} \cos(\omega_{fn}t + \Theta_n - \alpha_{fn}) \quad (2.26)$$

donde los coeficientes  $C_{fn}$  y las constantes  $\alpha_{fn}$  se han definido como:

$$C_{fn}(\omega_{fn}) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{fn}^2)^2 + (\Gamma \omega_{fn})^2}} \quad (2.27)$$

$$\tan \alpha_{fn} = \frac{\Gamma \omega_{fn}}{(\omega_0^2 - \omega_{fn}^2)} \quad (2.28)$$

El teorema puede extenderse al caso en que la superposición deba expresarse en la forma de integral y no de suma sobre frecuencias discretas. En el capítulo 8 se estudiará en detalle la técnica de descomposición de casi cualquier función  $f(t)$  en sus componentes armónicos mediante el análisis de Fourier.

Observemos que el teorema formulado en la sección 2.2, que permite expresar la solución de una ecuación diferencial lineal como suma de la solución de la ecuación homogénea (dependiente de condiciones iniciales) y una solución particular de la ecuación con fuente externa, puede incorporarse como caso particular de este teorema de superposición de fuentes. Para ello basta agregar en la sumatoria (2.25) un término  $F_0(t) = 0$  e identificar  $x_0(t)$  con la solución de la ecuación homogénea. Esto evita la impresión de que se trata de nociones radicalmente diferentes de superposición lineal.

Al analizar la forma de la solución, vemos que los coeficientes  $C_{fn}$  ( $n \neq 0$ ) sólo son apreciables en un rango estrecho alrededor de la frecuencia natural del oscilador. Desde el punto de vista físico esto implica que, si sobre un oscilador débilmente amortiguado actúa una fuerza que varía arbitrariamente con el tiempo, éste responderá de modo apreciable sólo a aquella componente armónica cuya frecuencia coincide con su frecuencia natural.

Nuestras sensaciones suministran un ejemplo inmediato de esta selectividad frente a los estímulos externos: el oído no es sensible a ondas sonoras de frecuencia demasiado elevada o demasiado baja, y la retina no responde de modo apreciable sino a la radiación electromagnética en un rango muy pequeño de frecuencias, llamado “rango visible”, situado entre el infrarrojo y el ultravioleta, invisibles para el ojo humano.

Un receptor de radio es un prototipo de selectividad creado por la técnica. Al receptor llegan simultáneamente las ondas electromagnéticas emitidas por todas las estaciones de radio. Si queremos seleccionar o sintonizar una estación particular, debemos ajustar los parámetros internos de nuestro sistema (por ejemplo, la inductancia o la capacitancia de un aparato de respuesta lineal) de tal modo que su frecuencia natural coincida con la frecuencia característica de la emisora elegida. En este caso, lo que hacemos es combinar el principio de superposición lineal con el fenómeno de resonancia.

No obstante la amplísima gama de aplicaciones, es conveniente no olvidar las limitaciones de una aproximación lineal. Efectos complejos y a veces sorprendentes de no linealidad están presentes en la naturaleza y en la técnica, y son objeto de intenso estudio y aplicaciones crecientes. (Véanse algunos efectos no lineales en el apéndice B).

## 2.5. Modelo clásico de interacción radiación-átomo

Un modelo sencillo de osciladores forzados permite describir cualitativamente algunos aspectos de la interacción de una onda electromagnética con un material dieléctrico e isotrópico.

Suponemos que un electrón ligado a un átomo o molécula del material responde al campo eléctrico  $\mathbf{E}$  de la onda electromagnética incidente como un oscilador lineal forzado.

El campo eléctrico de una onda armónica varía sinusoidalmente, tanto en el tiempo como en el espacio. Sin embargo, para luz visible y aun para ultravioleta cercano (con longitudes de onda del orden de  $5 \times 10^{-5}$  cm y  $10^{-5}$  cm, respectivamente), es razonable suponer que el campo no varía de manera apreciable en la pequeña región ( $\approx 10^{-8}$  cm) donde oscila el electrón.

De este modo, en presencia de la onda armónica, el electrón experimenta una fuerza eléctrica de la forma<sup>4</sup>:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(t) = qE_0 \cos(\omega_f t)$$

Por simplicidad ignoramos una constante de fase que puede ser diferente para diversos átomos del material, pero que en el caso de un material amorfo como el vidrio es irrelevante para el resultado final.

En este modelo clásico, la ecuación de movimiento del electrón a lo largo del eje paralelo al campo eléctrico, que hacemos coincidir con el eje  $x$ , toma la forma:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \Gamma\dot{x}(t) + \frac{q}{m}E_0 \cos(\omega_f t) \quad (2.29)$$

donde la coordenada  $x$  se mide con respecto al núcleo como origen.

La fuerza recuperadora  $-kx$  es una especie de “proyección” sobre el eje  $x$  de la fuerza centrípeta que, en un modelo clásico, mantiene al electrón girando alrededor del núcleo. La fuerza friccional da cuenta de la capacidad del átomo

<sup>4</sup> La fuerza debida al campo magnético  $\mathbf{B}$  de la onda es pequeña, comparada con la fuerza eléctrica, para electrones que no tienen velocidades comparables con la de la luz, y puede ignorarse en una aproximación no relativista.

para absorber energía del campo externo; esta energía puede ser reemitida (dispersada) por el átomo en todas las direcciones o cedida en colisiones a átomos vecinos.

Con ayuda de este modelo podemos calcular el momento dipolar eléctrico inducido por el campo externo. Un electrón típico con carga  $q$  en estado estacionario contribuirá al momento dipolar total con un dipolo inducido:

$$p_x(t) = q x_p(t) = q A_{el} \cos(\omega_f t) + q A_{ab} \sin(\omega_f t)$$

Si la frecuencia de la onda incidente coincide con la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ , habrá apreciable absorción de energía, lo cual implica que el material se hace *opaco* para esta radiación electromagnética. Así el vidrio es opaco para la radiación ultravioleta (con  $\nu \approx 10^{16}$  Hz), lo cual indica la presencia de una banda de resonancia en este rango<sup>5</sup>.

Como el vidrio es *transparente* para la luz visible, con frecuencias que van desde  $4,2 \times 10^{14}$  Hz (rojo) hasta  $7,5 \times 10^{14}$  Hz (azul), debemos concluir que en este rango de frecuencias predomina la respuesta *elástica*. Este efecto elástico, que no conduce a absorción de energía, se manifiesta en una *polarización* macroscópica del material.

Si en la unidad de volumen hay  $N$  electrones que contribuyen a este efecto (y responden independientemente al campo), la polarización (o momento de dipolo eléctrico por unidad de volumen) inducida por la radiación será:

$$P_x(t) = N q A_{el} \cos(\omega_f t)$$

En un material lineal e isotrópico  $\mathbf{P}$  es paralelo a  $\mathbf{E}$  y la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  está dada por:

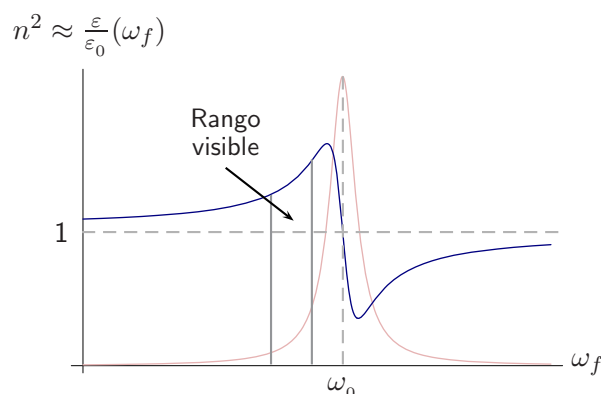
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{P}{E}$$

Con base en nuestro modelo podemos escribir:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{e^2 N}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_f^2)}{[(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma \omega_f)^2]} \quad (2.30)$$

La gráfica de  $\varepsilon(\omega_f)$  para un átomo con una sola resonancia (figura 2.9) permite reproducir cualitativamente el comportamiento de la permitividad eléctrica para un material amorfo como el vidrio. (Hemos adicionado la gráfica punteada para separar la región donde predomina la absorción sobre el efecto elástico de polarización).

<sup>5</sup> En realidad, un átomo no tiene una sino muchas frecuencias de resonancia, y cada una de ellas contribuye a la respuesta total.



**Figura 2.9** Comportamiento de  $n^2$  en función de la frecuencia de la fuente.

El índice de refracción de un medio está definido como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) y en el medio considerado ( $v$ ). Es decir,  $n$  mide el grado de retardo de la luz en el medio con respecto al vacío:

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

Para un dieléctrico ordinario  $n$  es aproximadamente igual a  $\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  (ecuación 7.44). De la figura 2.9 podemos extraer algunas conclusiones:

En el rango visible  $n$  aumenta con la frecuencia del campo externo. Esto significa que el vidrio presenta un índice de refracción mayor para la luz azul que para la roja; lo cual, a su vez, conduce al fenómeno familiar de la dispersión de la luz blanca por un prisma. En el rango ultravioleta lejano predomina la absorción sobre el efecto elástico de polarización, y para frecuencias mucho mayores que las del rango absorbente (por ejemplo, para rayos X) el modelo predice un índice de refracción menor que 1.

## 2.6. Fuerza externa aplicada a través de un soporte móvil

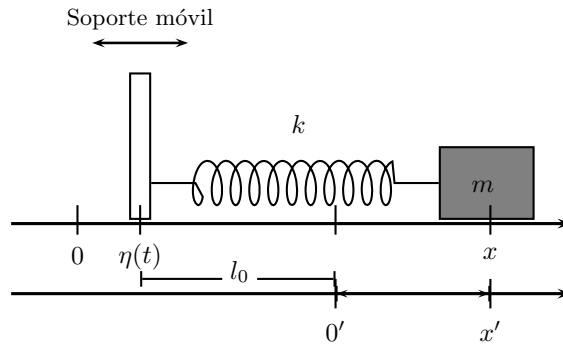
### 2.6.1. Resorte horizontal

Cuando se somete a un movimiento oscilatorio el punto de suspensión de un péndulo o de un resorte vertical, o el soporte de una varilla o resorte horizontal, la masa  $m$  experimenta su efecto como si se tratase de una fuerza directamente aplicada a ella.

En el sistema horizontal masa–resorte (figura 2.10), si elegimos el origen en el punto alrededor del cual oscila el soporte, podemos expresar la posición de la masa en cualquier tiempo, así:

$$x(t) = \eta(t) + l_0 + x'(t) \quad (2.31)$$

donde  $l_0$  es la longitud natural del resorte,  $x'$  mide su deformación o alargamiento algebraico y  $\eta(t)$  describe el movimiento del soporte.



**Figura 2.10** Sistema masa-resorte sujeto a un soporte móvil.

Como nuestro sistema de referencia es inercial, y sobre la masa  $m$  no actúa fuerza distinta a la del resorte (si ignoramos la fricción), la ecuación de movimiento toma la forma:

$$m\ddot{x}(t) = -kx'(t) \quad (2.32)$$

Al tomar la segunda derivada en (2.31) y sustituir en (2.32), resulta:

$$m\ddot{x}'(t) = -kx'(t) - m\ddot{\eta}(t) \quad (2.33)$$

Si suponemos que la oscilación del punto de soporte es puramente armónica, obtenemos una ecuación de oscilador forzado, idéntica en forma a (2.2), con  $-m\ddot{\eta}(t)$  en el papel fuerza externa. Al resolver esta ecuación (con un término adicional de fricción) podemos hallar, a partir de la respuesta estacionaria, la aceleración del soporte respecto a un sistema inercial. Por esta razón, un dispositivo como éste puede funcionar como *acelerómetro*.

Observe que la aceleración de  $m$  respecto al sistema inercial es  $\ddot{x}(t)$  y no  $\ddot{x}'(t)$ , que es la aceleración medida por un observador no inercial en reposo con respecto al soporte.



Si queremos usar cantidades medidas en el sistema inercial para expresar la ecuación de movimiento, sustituimos  $x'(t)$  de (2.31) en (2.32), con lo cual obtenemos:

$$m\ddot{x}(t) = -k(x(t) - l_0) + k\eta(t)$$

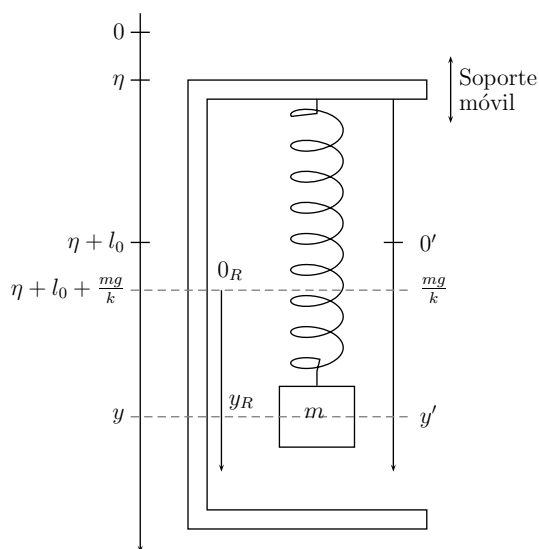
Para eliminar el término constante, al lado derecho de esta ecuación hacemos un corrimiento del origen del eje  $x$ , con lo cual resulta una ecuación de oscilador forzado con fuerza externa igual a  $k\eta(t)$ :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}\eta(t) \quad (2.34)$$

### 2.6.2. Sismógrafo

Un sismógrafo es un aparato diseñado para detectar y registrar movimientos de la corteza terrestre que pueden ser debidos, entre otras causas, a terremotos o explosiones nucleares subterráneas.

Para medir los desplazamientos verticales puede usarse un dispositivo como el indicado en la figura 2.11.



**Figura 2.11** Sismógrafo vertical.

Designamos por  $y$  el desplazamiento vertical de la masa  $m$  medido a partir del punto alrededor del cual oscila el soporte del resorte que está rígidamente unido

a la tierra. (Este origen de la coordenada  $y$  se supone fijo en un sistema inercial con respecto al cual la tierra vibra).

Sobre  $m$  actúan: la fuerza de la gravedad  $mg$ , la fuerza recuperadora  $-ky'$ , donde  $y' = y - l_0 - \eta(t)$  es el alargamiento algebraico del resorte, y una fuerza de fricción que es proporcional a la velocidad relativa de la masa y el medio (por ejemplo el aire). Si éste se mueve con la superficie terrestre, entonces la fuerza puede expresarse como:  $-b(\dot{y} - \dot{\eta}) = -b\dot{y}'$ . De este modo, en el sistema inercial la ecuación de movimiento toma la forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}(t) &= -ky'(t) - b\dot{y}'(t) + mg \\ &= -k[y(t) - l_0] + k\eta(t) - b[\dot{y}(t) - \dot{\eta}(t)] + mg \end{aligned}$$

Al trasladar el origen del eje  $y$  por una cantidad constante  $(l_0 + \frac{mg}{k})$ , podemos escribir la ecuación anterior en función de la nueva variable  $Y = y - l_0 - \frac{mg}{k}$ , así:

$$\ddot{Y}(t) + \frac{k}{m}Y(t) + \Gamma\dot{Y}(t) = \frac{k}{m}\eta(t) + \Gamma\dot{\eta}(t) \quad (2.35)$$

Si suponemos que el movimiento de la tierra es aproximadamente una oscilación armónica de la forma  $\eta(t) = A_0 \cos(\omega_f t)$ , tendremos al lado derecho una superposición de la forma:

$$A_0 \frac{k}{m} \cos(\omega_f t) - A_0 \Gamma \omega_f \sin(\omega_f t)$$

Sin embargo, si estamos interesados en registrar el movimiento de la masa  $m$  respecto a un eje fijo en el sistema no inercial tierra-soporte, es más conveniente expresar la ecuación anterior en función del desplazamiento relativo  $y_R = Y - \eta$ .

Al sustituir  $Y = y_R + \eta$  en la ecuación (2.35) obtenemos:

$$\ddot{y}_R(t) + \frac{k}{m}y_R(t) + \Gamma\dot{y}_R(t) = -\ddot{\eta}(t) = A_0\omega_f^2 \cos(\omega_f t) \quad (2.36)$$

Esta es la ecuación de un sistema amortiguado y sometido a una fuerza armónica  $mA_0\omega_f^2 \cos(\omega_f t)$ .

Si usted quiere ver cómo se logra en nuestro sistema no inercial un reflejo directo del movimiento de la tierra en el movimiento de la masa  $m$ , desarrolle y analice la respuesta del ejercicio 2.6.

## Ejercicios

- 2.1** Cuando hay un término de fricción en la ecuación de movimiento, es más simple usar variable compleja y al final tomar la parte real. Para hallar la solución particular de la ecuación de movimiento del oscilador forzado (2.6) con término no homogéneo de la forma (2.7), resuelva primero la ecuación con  $\Phi_p$  compleja y término de fuente

$$G(t) = G_0 e^{i(\omega_f t - \beta)}$$

(con  $G_0$  real). Suponga un Ansatz de la forma siguiente:

$$\Phi_p = A(\omega_f) e^{i(\omega_f t - \beta)}$$

con amplitud  $A(\omega_f)$  compleja

$$A(\omega_f) = A e^{-i\alpha_f}$$

Muestre que:

$$\Phi_p = \frac{G_0(\omega_0^2 - \omega_f^2) e^{i(\omega_f t - \beta)}}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2} + \frac{G_0 \Gamma\omega_f e^{i(\omega_f t - \beta - \frac{\pi}{2})}}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2}$$

Verifique que la parte real de esta expresión coincide con (2.16) y (2.17) y que  $\tan \alpha_f$  y  $C_f = A$  concuerdan con (2.14) y (2.15).

- 2.2** Halle la frecuencia externa para la cual la amplitud de la respuesta estacionaria de un oscilador forzado es máxima.
- 2.3** Halle la ecuación de movimiento de un péndulo simple cuyo punto de suspensión se mueve horizontalmente con movimiento armónico simple de la forma  $\zeta = \zeta_0 \cos(\omega_f t)$ . Con base en el resultado anterior, analice el experimento siguiente:

Mida la frecuencia natural  $\omega_0$  de un péndulo constituido por una masa de unos 20 g atada al extremo de una cuerda de 50 cm de longitud. Mueva el extremo superior con una frecuencia mucho mayor que  $\omega_0$  y observe después de un tiempo la frecuencia y la fase de la oscilación de la masa  $m$  con respecto a la oscilación del soporte. Disminuya la frecuencia, localice la resonancia y continúe disminuyendo  $\omega_f$  hasta cuando la masa  $m$  y el soporte oscilen aproximadamente en fase.

**2.4** Halle la ecuación de movimiento de un circuito RLC en paralelo con una fuente de corriente  $I(t) = I_0 \cos(\omega_f t)$ . Halle una expresión para la potencia media absorbida por este oscilador. ¿Cuál es su valor máximo?

**2.5** En un sismógrafo de frecuencia natural  $\nu_0 = 1 \text{ Hz}$  y factor de calidad  $\mathbb{Q} = 6$  se registra un desplazamiento relativo

$$y_R = 0,4 \cos\left(18t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ cm}$$

Deduzca a partir de aquí la amplitud del movimiento de la tierra.

*Sugerencia:* escriba la amplitud de la respuesta estacionaria en función del factor de calidad.

**2.6** Suponga que la frecuencia natural del sismógrafo es mucho menor que la frecuencia de las oscilaciones terrestres. (¿Cómo puede lograr esto?). Muestre que en este caso la masa  $m$  permanece prácticamente en reposo con respecto al sistema inercial.

*Sugerencia:* a partir de la solución estacionaria de la ecuación (2.36) en el límite  $\frac{\omega_0}{\omega_f} \rightarrow 0$ , demuestre que  $y_R \cong -\eta$ .

En estas condiciones (que son técnicamente difíciles de lograr), una gráfica del movimiento de  $m$  relativo a la tierra refleja especularmente el movimiento de la superficie terrestre.

**2.7** A partir de la solución particular (2.10):

- Muestre que el trabajo de la fuerza friccional por unidad de tiempo es en general diferente del trabajo por unidad de tiempo de la fuerza externa.
- Demuestre que, en promedio, sobre un ciclo ambas potencias se compensan; por tanto, la energía media del sistema es constante.
- Halle la condición en la cual ambas potencias instantáneas son de la misma magnitud y, por tanto, la energía del oscilador es estrictamente constante.

**2.8** Muestre que la calidad  $\mathbb{Q}$  de un oscilador débilmente amortiguado y no forzado es igual a:

$$\mathbb{Q} = 2\pi \frac{\text{Energía al comienzo de un ciclo}}{\text{Energía perdida durante un ciclo}} = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

*Sugerencia:* elija el comienzo del ciclo cuando toda la energía es potencial y aproxime  $e^{-\Gamma T} \cong 1 - \Gamma T$ .

- 2.9** Sobre un oscilador débilmente amortiguado actúan simultáneamente dos fuerzas de frecuencias y amplitudes iguales pero de diferentes constantes de fase. Analice la amplitud del movimiento armónico resultante en función de la diferencia de fase.
- 2.10** Dos fuerzas armónicas de igual amplitud y constante de fase pero con frecuencias ligeramente diferentes actúan simultáneamente sobre un oscilador. Muestre, con ayuda de identidades trigonométricas, que el estado estacionario puede expresarse como producto de una oscilación armónica “rápida”, por una función armónica de variación “lenta”, función que se puede interpretar como una amplitud variable de la oscilación rápida. Dibuje una gráfica del estado estacionario con  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{11}{9}$ . Interprete, con base en este modelo, el hecho de que cuando el tímpano recibe simultáneamente dos notas con frecuencias cercanas (que difieren en menos de 10 Hz), un oído no entrenado no las percibe por separado sino como un sonido de frecuencia intermedia con una amplitud que varía lentamente con el tiempo. Si las frecuencias son suficientemente diferentes, el oído percibirá un acorde constituido por dos notas distinguibles.
- 2.11**
- Con los siguientes valores de parámetros:  $L = 25 \text{ mH}$ ,  $R = 600 \Omega$ ,  $C = 0,001 \text{ F}$ , calcule frecuencia natural, factor de calidad y vida media del circuito RLC en serie.
  - Si el circuito es forzado por una fuente de voltaje en serie con frecuencia variable y amplitud igual a 10 voltios, ¿para qué frecuencia de la fuente se obtendrá la máxima amplitud de la carga en el estado estacionario? Haga una gráfica aproximada de potencia media contra frecuencia de la fuente, indicando claramente: centro, ancho y altura de la curva.



## Capítulo 3

# Sistema libre de dos osciladores acoplados no amortiguados

En este capítulo se describe el comportamiento de sistemas de dos osciladores idénticos acoplados, sin fricción ni fuerza externa.

- Se introduce el concepto fundamental de *modo normal* de oscilación.
- Se resuelven las ecuaciones de movimiento acopladas mediante el método del determinante secular.
- Se desarrolla el método matricial de diagonalización de las ecuaciones de movimiento mediante *coordenadas normales* y se construye un algoritmo aplicable a casos más generales de osciladores acoplados.
- Se muestra que las coordenadas normales también permiten diagonalizar la expresión de la energía.
- Se describe el fenómeno de *pulsaciones*, con el consiguiente intercambio periódico de energía entre dos osciladores débilmente acoplados.

### 3.1. Ecuaciones de movimiento

#### 3.1.1. Péndulos acoplados

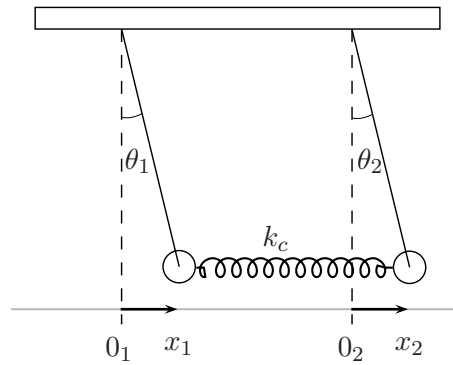
Por conveniencia hemos elegido coordenadas de oscilación  $x_1$  y  $x_2$  que describen la desviación de las masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 = m_2 = m$ ) de sus posiciones de equilibrio; suponemos que en equilibrio la distancia entre ellas es igual a la

longitud natural del resorte de acoplamiento (figura 3.1). En el rango de pequeñas oscilaciones (ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2 \ll 1$  rad), la fuerza del resorte y la fuerza tangencial sobre cada una de las masas son casi horizontales y puede hacerse la aproximación:

$$x_1 = l \sin \theta_1 \approx l\theta_1 \quad x_2 = l \sin \theta_2 \approx l\theta_2$$

Por tanto:

$$m \frac{dv_1}{dt} \approx m l \ddot{\theta}_1 \approx m \ddot{x}_1 \quad m \frac{dv_2}{dt} \approx m l \ddot{\theta}_2 \approx m \ddot{x}_2$$



**Figura 3.1** Péndulos acoplados.

El alargamiento algebraico del resorte se expresa en nuestras coordenadas como  $(x_2 - x_1)$ : cuando esta cantidad es positiva, el resorte está estirado; cuando es negativa, está comprimido. Las ecuaciones de movimiento toman la forma<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} F_{tan1} = m\ddot{x}_1 &= -\frac{mg}{l}x_1 + k_c(x_2 - x_1) \\ F_{tan2} = m\ddot{x}_2 &= -\frac{mg}{l}x_2 - k_c(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En forma compacta:

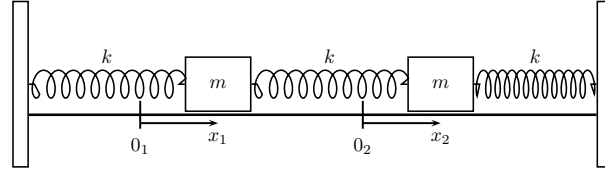
$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_c^2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_c^2 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ,  $\omega_c^2 = \frac{k_c}{m}$

<sup>1</sup> Observe que si el resorte está estirado, la primera masa es halada en dirección  $+\hat{x}_1$  y la segunda en dirección  $-\hat{x}_2$ , lo que determina los signos de los términos de acoplamiento en las ecuaciones (3.1).



### 3.1.2. Masas acopladas a resortes sobre superficie horizontal sin fricción



**Figura 3.2** Masas iguales acopladas por resortes iguales.

De acuerdo con la figura 3.2, las ecuaciones de movimiento pueden escribirse así:

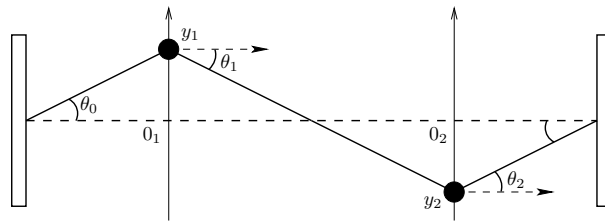
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k x_1 + k (x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k x_2 - k (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

o en forma abreviada:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

con  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

### 3.1.3. Masas acopladas por cuerdas sobre plano horizontal sin fricción



**Figura 3.3** Masas iguales acopladas por cuerdas.

Si elegimos ejes  $y_1$  y  $y_2$  como indica la figura 3.3, y suponemos la tensión  $T$

constante en magnitud, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -T \sin \theta_0 + T \sin \theta_1 \\ m\ddot{y}_2 &= -T \sin \theta_1 + T \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

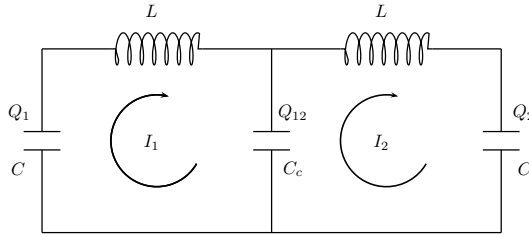
Hemos definido  $\theta_j$  como el ángulo que forma el segmento respectivo de la cuerda con la dirección horizontal  $+\hat{x}$ ; observe que en la figura  $\theta_0$  y  $\theta_2$  son positivos, en tanto que  $\theta_1$  es negativo.

En función de los desplazamientos  $y_1$  y  $y_2$  podemos reescribir así las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 + \omega_0^2 (y_1 - y_2) &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 (y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

con  $\omega_0^2 = \frac{T}{ml_0}$ .

### 3.1.4. Dos circuitos LC acoplados por condensador



**Figura 3.4** Circuitos LC acoplados por condensador.

Para hallar las ecuaciones de movimiento de este sistema puede aplicarse la regla práctica deducida en el apéndice A:  $\sum V_i = 0$  (en cada trayectoria cerrada).

Resultan las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{C} - L \frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_{12}}{C_c} &= 0 \\ \frac{Q_{12}}{C_c} - L \frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_2}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al usar las convenciones sobre signos de cargas y corrientes indicadas en la figura 3.4, se tiene:

$$\dot{Q}_1 = -I_1, \quad \dot{Q}_2 = I_2, \quad \dot{Q}_{12} = I_1 - I_2$$

Al derivar las ecuaciones (3.7) con respecto al tiempo, después de dividir por  $L$  y cambiar el signo, resulta:

$$\begin{aligned}\ddot{I}_1 + \omega_0^2 I_1 + \omega_c^2 (I_1 - I_2) &= 0 \\ \ddot{I}_2 + \omega_0^2 I_2 - \omega_c^2 (I_1 - I_2) &= 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

con  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  y  $\omega_c^2 = \frac{1}{LC_c}$ .

### 3.2. Solución de las ecuaciones acopladas

Como puede verse, todos nuestros osciladores acoplados tienen ecuaciones de idéntica forma general<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_1 + \omega_0^2 \Phi_1 + \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0 \\ \ddot{\Phi}_2 + \omega_0^2 \Phi_2 - \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0\end{aligned}\quad (3.9)$$

Decimos que éste es un sistema de ecuaciones diferenciales *acopladas* porque la solución  $\Phi_1(t)$  depende de la solución  $\Phi_2(t)$ , y viceversa. A continuación mostraremos que es posible *desacoplar* este sistema, es decir, convertirlo en una pareja de ecuaciones *independientes*, introduciendo *nuevas variables* para describir el sistema físico.

Al sumar las dos ecuaciones (3.9) y definir la nueva variable  $q_1 \equiv \Phi_1 + \Phi_2$ , obtenemos:

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad (3.10)$$

Al restar miembro a miembro las ecuaciones (3.9) e introducir la nueva variable  $q_2 \equiv \Phi_1 - \Phi_2$ , resulta:

$$\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 + 2\omega_c^2 q_2 = 0$$

es decir:

$$\ddot{q}_2 + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) q_2 = 0 \quad (3.11)$$

(3.10) y (3.11) son ecuaciones de osciladores *independientes* con coordenadas de oscilación  $q_1$  y  $q_2$ , y frecuencias naturales  $\omega_1^2 = \omega_0^2$  y  $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega_c^2$ , respectivamente.

<sup>2</sup> En los numerales 3.1.2 y 3.1.3 hemos elegido  $\omega_c = \omega_0$ .

Las soluciones generales de (3.10) y (3.11) son bien conocidas:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ q_2(t) &= C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son constantes arbitrarias.

La ventaja de este método reside en que a partir de estas soluciones familiares podemos hallar la solución general de nuestro sistema acoplado (3.9):

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \frac{1}{2} [q_1(t) + q_2(t)] \\ &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \Phi_2(t) &= \frac{1}{2} [q_1(t) - q_2(t)] \\ &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias hemos absorbido en ellas el factor  $\frac{1}{2}$ .

Las nuevas variables,  $q_1$  y  $q_2$ , se denominan *coordenadas normales* del sistema. Debido al papel central que desempeña este concepto en el estudio de sistemas oscilatorios más complejos, es conveniente anticipar una definición más general.

Se denominan *coordenadas normales* aquellas variables que permiten desacoplar las ecuaciones de movimiento, satisfacen ecuaciones de osciladores armónicos independientes con frecuencias normales  $\omega_n$ , características del sistema oscilatorio, y permiten describir el movimiento de cada una de las partes del sistema como superposición lineal de ellas. Más adelante veremos que también permiten expresar la energía del sistema como suma de energía de osciladores independientes, lo cual se ha utilizado ampliamente en física moderna.

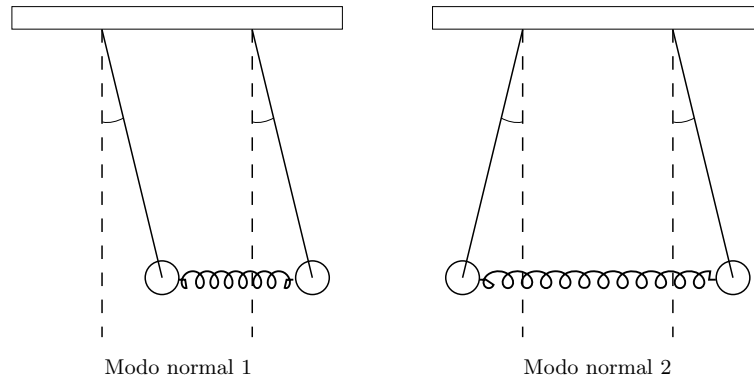
### 3.3. Interpretación física de la solución Modos normales

El movimiento de dos osciladores acoplados por lo general no será armónico, ni siquiera periódico (para ello se necesita que  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  sea igual a un número racional  $\frac{n_1}{n_2}$ ). Pero si el sistema se excita adecuadamente, es posible obtener un movimiento armónico de cada una de las partes, y periódico para el sistema como un todo.

Por ejemplo, si las condiciones iniciales son tales que  $C_2 = 0$ , el movimiento del sistema quedará descrito así:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \Phi_2(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1)\end{aligned}\quad (3.14)$$

En este caso ambos osciladores se mueven *en fase* con *idéntica amplitud* y con *idéntica frecuencia*  $\omega_1$ . Las dos constantes,  $C_1$  y  $\delta_1$ , pueden tomar valores arbitrarios, dependientes únicamente de las condiciones iniciales. Decimos entonces que el *sistema* oscila en el *modo normal* 1, con la frecuencia normal  $\omega_1 = \omega_0$ .



**Figura 3.5** Modos normales de dos péndulos acoplados.

De modo análogo: si las condiciones iniciales son tales que  $C_1 = 0$ , entonces el *sistema* oscilará en el *modo normal* 2 con frecuencia  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$ , constante de fase única  $\delta_2$  y amplitudes  $C_2$  y  $-C_2$  (para cada una de las partes del sistema, respectivamente):

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \Phi_2(t) &= -C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)\end{aligned}\quad (3.15)$$

Los dos tipos de movimiento descritos son los más simples y ordenados que pueden existir en el sistema y se denominan *modos normales* de oscilación. En un modo normal todas las partes del sistema oscilan con idéntica frecuencia  $\omega_n$  e idéntica constante de fase  $\delta_n$ , por ello pasan por su estado de equilibrio simultáneamente. Los “desplazamientos” de las partes guardan entre sí relaciones constantes en el tiempo, que son características de cada modo:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ en el modo normal 1} \\ -1 \text{ en el modo normal 2} \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Las amplitudes  $C_n$  y las fases  $\delta_n$  son constantes arbitrarias (dependientes solamente de la forma de excitación del sistema) y por tal razón los modos normales no son soluciones *particulares* del sistema de ecuaciones. Tampoco son soluciones *generales*, por no tener las cuatro constantes arbitrarias requeridas. Por convención las llamaremos “soluciones especiales”. A partir de ellas podemos obtener la solución general por simple superposición de modos normales, como se desprende de (3.13).

### 3.4. Método del determinante secular

Para hallar los modos normales del sistema y la solución general de las ecuaciones (3.9) procedemos de acuerdo con el esquema siguiente:

1. Suponemos soluciones *especiales* de (3.9) de la forma:

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(n)} &= D_{1n} \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ \Phi_2^{(n)} &= D_{2n} \cos(\omega_n t + \delta_n)\end{aligned}\tag{3.17}$$

o de manera abreviada:

$$\Phi_j^{(n)} = D_{jn} \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad j = 1, 2$$

2. Al llevar estas soluciones especiales al sistema (3.9), obtenemos un sistema homogéneo de ecuaciones *algebraicas*:

$$\begin{aligned}D_{1n}(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2) - D_{2n}\omega_c^2 &= 0 \\ D_{1n}(-\omega_c^2) + D_{2n}(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2) &= 0\end{aligned}\tag{3.18}$$

Aunque desconocemos por el momento el valor de  $\omega_n$ , podemos tomar como incógnitas las amplitudes  $D_{1n}$  y  $D_{2n}$ . Pero un sistema homogéneo y lineal como éste tiene soluciones no triviales si, y solamente si, el determinante de los coeficientes es nulo:

$$\text{Det coef} = \begin{vmatrix} -\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & -\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{vmatrix} = 0\tag{3.19}$$

La expresión (3.19) se conoce como *ecuación secular* y puede escribirse como:

$$(-\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)^2 = (\omega_c^2)^2$$

Entonces, se tienen las dos ecuaciones:

$$-\omega_n^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 = \pm \omega_c^2$$

De aquí resultan para  $\omega_n$  los posibles valores:

$$\begin{aligned}\omega_{n+}^2 &= \omega_0^2 \equiv \omega_1^2 \\ \omega_{n-}^2 &= \omega_0^2 + 2\omega_c^2 \equiv \omega_2^2\end{aligned}\tag{3.20}$$

Cada valor posible de  $\omega_n$  es una frecuencia normal y determina un modo normal del sistema.

3. Para hallar las relaciones de amplitud de cada uno de los modos, reemplazamos sucesivamente  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en el sistema (3.18).

Con  $\omega_1 = \omega_0$  resulta:

$$D_{11} \omega_c^2 - D_{21} \omega_c^2 = 0 \quad \text{esto es:} \quad D_{11} = D_{21} \tag{3.21a}$$

Con  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}$  resulta:

$$-D_{12} \omega_c^2 - D_{22} \omega_c^2 = 0 \quad \text{esto es:} \quad D_{12} = -D_{22} \tag{3.21b}$$

Observe que en cada modo normal existe una relación *fija* entre las amplitudes de oscilación de las diferentes partes del sistema, de manera que sólo queda una amplitud arbitraria, dependiente de las condiciones iniciales. Para destacar esto y usar una notación más susceptible de generalización es conveniente escribir las  $D_{jn}$  como producto de una constante arbitraria  $C_n$  y unos coeficientes  $a_{jn}$  que fijan las relaciones de amplitud en el modo normal  $n$ -ésimo:

$$D_{jn} \equiv a_{jn} C_n$$

Así, una vez fijado por convención el valor  $a_{1n}$  (puede ser  $a_{1n} = 1$ ), los demás coeficientes (en este caso los  $a_{2n}$ ) quedan automáticamente determinados. En cada modo normal quedan sólo dos constantes arbitrarias,  $C_n$  y  $\delta_n$ , que se determinan por condiciones iniciales.

Con esta notación las soluciones especiales o normales pueden escribirse así:

$$\Phi_j^{(n)} = a_{jn} C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad j = 1, 2 \tag{3.22}$$

con  $a_{11} = a_{21}$ ,  $a_{12} = -a_{22}$ .

4. El sistema (3.9) es lineal y homogéneo. Por tanto, una suma de soluciones también será solución. La suma de las dos soluciones especiales obtenidas por el método del determinante secular tiene precisamente las cuatro constantes arbitrarias que permiten identificarla como solución general del sistema:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(t) &= \Phi_1^{(1)} + \Phi_1^{(2)} \\
 &= a_{11} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_{12} C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\
 \Phi_2(t) &= \Phi_2^{(1)} + \Phi_2^{(2)} \\
 &= a_{21} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_{22} C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Esta es la solución general del sistema de ecuaciones (3.9), que puede expresarse en notación más compacta así:

$$\Phi_j(t) = \sum_{n=1}^2 a_{jn} q_n(t) \quad j = 1, 2 \tag{3.24}$$

$$\text{con } q_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \delta_n).$$

El movimiento del sistema en general será muy complejo. Si la relación de frecuencias normales no es un número racional (esto es, si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{n_1}{n_2}$ ) y se excitan ambos modos normales, el movimiento jamás se repetirá estrictamente porque no es periódico. Los modos normales son las formas más simples, más ordenadas y simétricas de movimiento, y a partir de ellos pueden reconstruirse todos los movimientos complejos.

Observe que las constantes  $C_n$  y  $\delta_n$  quedan determinadas por las condiciones iniciales. Así, basta saber con qué amplitud y fase fue excitado inicialmente cada uno de los modos normales para conocer el movimiento del sistema en cualquier instante.

Mientras cada una de las coordenadas ordinarias ( $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ ) describe el movimiento de *una* de las partes del sistema, cada una de las coordenadas normales ( $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ) describe un movimiento *global*. Sin embargo, ambas descripciones son equivalentes y completas. Una especificación global del movimiento del sistema requiere indicar solamente con qué amplitud y constante de fase ha sido excitado cada modo normal.

Podríamos decir que ( $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ ) es una descripción analítica del sistema en función de sus partes, en tanto que ( $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ) es una descripción global



o sintética que toma como base movimientos especiales del sistema como un todo.

Aunque en *física* clásica es más usual describir el todo indicando el estado de cada una de sus partes, en la teoría cuántica es conveniente (y aun necesario) un cambio de perspectiva de una visión por partes a una visión global. Por ejemplo, en la descripción de los estados cuánticos de sólidos y del campo electromagnético, los modos normales pueden asociarse a partículas denominadas fonones y fotones, respectivamente. Por ello puede decirse que, en sentido estricto, un fotón de frecuencia  $\omega_n$  es una excitación elemental<sup>3</sup> del  $n$ -ésimo modo normal del campo electromagnético.

### 3.5. Diagonalización de las ecuaciones de movimiento

Decir que las coordenadas normales desacoplan las ecuaciones de movimiento equivale a decir que “diagonalizan” el sistema de ecuaciones. Para mostrar esto, escribamos el sistema (3.9) en forma matricial:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o de manera más concisa:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi + \mathbf{M}\Phi = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Para pasar a coordenadas  $(q_1(t), q_2(t))$  que desacoplen las ecuaciones de movimiento debemos hacer una transformación lineal:

$$\Phi \rightarrow \mathbf{A}\Phi = \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Al aplicar la matriz  $\mathbf{A}$  (independiente del tiempo) a la izquierda de (3.25), resulta:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{A}\Phi + \mathbf{A}\mathbf{M}\Phi = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

---

<sup>3</sup> Es *elemental* porque tiene asociada una energía indivisible de magnitud  $\hbar\omega_n$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck.

Si intercalamos  $\mathbf{1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$  en el segundo término del lado izquierdo, podemos expresar la ecuación matricial en función de  $\mathbf{q}$  así:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Pero, por hipótesis, éste debe ser un sistema de dos ecuaciones independientes (desacopladas) para  $q_1$  y  $q_2$ . En consecuencia, la matriz  $\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}$  debe ser diagonal:

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Con esta transformación, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} q_1 + \lambda_1 q_1 = 0 \quad \frac{d^2}{dt^2} q_2 + \lambda_2 q_2 = 0 \quad (3.30)$$

cuyas soluciones generales son inmediatas:

$$q_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1), \quad q_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad (3.31)$$

donde hemos definido  $\lambda_n = \omega_n^2$ .

Así, el problema de hallar coordenadas normales se ha reducido al problema de diagonalizar la matriz de acoplamiento  $\mathbf{M}$ .

Además, el problema de diagonalización de  $\mathbf{M}$  nos conduce de manera directa a un problema de valores propios. Para verificar esto, multipliquemos a la izquierda de (3.29) por la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}' \quad (3.32)$$

Si escribimos  $\mathbf{A}$  como una matriz constituida por dos vectores columna yuxtapuestos:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \left( \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right) = (\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2)$$

la ecuación (3.32) puede escribirse así:

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2) = (\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1 \mathbf{R}_1 | \lambda_2 \mathbf{R}_2)$$

Al identificar columnas a ambos lados, vemos que esta ecuación matricial es equivalente al conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\mathbf{M}\mathbf{R}_i = \lambda_i \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2$$

Así, para obtener  $\mathbf{A}^{-1}$ , basta resolver la ecuación de valores propios:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución no trivial es necesario y suficiente que  $\text{Det}(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ . Y con esto hemos desembocado en la ecuación secular (3.19), cuyas soluciones nos dan los valores propios de la matriz  $\mathbf{M}$  ( $\lambda_n = \omega_n^2$ ). Al remplazar  $\lambda$  en (3.33) por cada uno de estos valores propios obtenemos los correspondientes vectores propios ( $\mathbf{R}_n$ ) con componentes  $a_{jn}$  ( $j = 1, 2$ ).

De aquí resulta evidente que el método de diagonalización de las ecuaciones de movimiento es equivalente al denominado método del determinante secular (sección 3.4), que parte de la suposición de soluciones especiales en forma de modos normales de oscilación (ecuación (3.17)).

Finalmente, puede expresarse  $\Phi$  en términos de las coordenadas normales:

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} \quad (3.34)$$

Al comparar con la ecuación (3.24), puede comprobarse que las relaciones de amplitud  $a_{jn}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Esto equivale a describir el movimiento general del sistema como superposición de modos normales de oscilación. Este método de diagonalización tiene la enorme ventaja de ser generalizable a sistemas con más de dos grados de libertad. En el caso de nuestros dos osciladores acoplados (eligiendo  $a_{11}$  y  $a_{12}$  iguales a 1, ya que el sistema homogéneo (3.33) sólo determina relaciones  $\frac{a_{1n}}{a_{2n}}$ ), las soluciones toman la forma:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

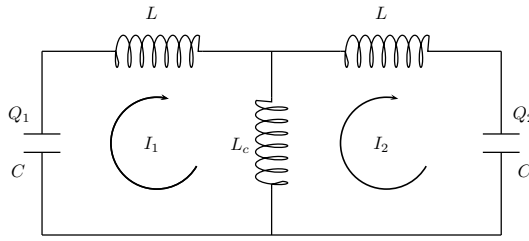
con lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Phi &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como puede verse, esta ecuación matricial es equivalente al sistema (3.24).

### 3.6. Osciladores acoplados inercial o inductivamente

Los sistemas prototipo que hemos considerado hasta ahora están acoplados por resortes o por condensadores o, como suele decirse, tienen acoplamiento *elástico*. El método de coordenadas normales puede aplicarse igualmente a sistemas de osciladores acoplados por masas o por inductancias (acoplamiento *inercial* o *inductivo*, respectivamente), como el que se ilustra en la figura 3.6.



**Figura 3.6** Circuitos LC acoplados por inductancia.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema toman la forma:

$$\frac{Q_1}{C} - L \frac{dI_1}{dt} - L_c \frac{d}{dt}(I_1 - I_2) = 0$$

$$L_c \frac{d}{dt}(I_1 - I_2) - L \frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

Al tomar derivadas e igualar  $\dot{Q}_1 = -I_1$ ,  $\dot{Q}_2 = I_2$ , resulta:

$$I_1 + LC \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_c C \frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 + LC \frac{d^2 I_2}{dt^2} - L_c C \frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) = 0$$

Al escribir estas ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} LC + L_c C & -L_c C \\ -L_c C & LC + L_c C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

resulta:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M} \mathbf{I} + \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

donde hemos definido:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} LC + L_c C & -L_c C \\ -L_c C & LC + L_c C \end{pmatrix}$$

A este sistema podemos aplicar el método de solución basado en la diagonalización de las ecuaciones de movimiento; para ello debemos pasar a coordenadas normales con:

$$\mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{q} \quad \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}' \quad (\text{diagonal})$$

En este caso, las coordenadas normales satisfacen el sistema desacoplado:

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = 0 \quad (3.38)$$

Para diagonalizar  $\mathbf{M}$  (esto es, para convertirla en  $\mathbf{M}'$ ), basta resolver la ecuación de valores propios (3.33):

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1})\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Para ello debemos determinar primero los valores propios de  $\lambda_n$  igualando a cero el determinante secular:

$$\text{Det}(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}) = 0 = \begin{vmatrix} LC + L_c C - \lambda & -L_c C \\ -L_c C & LC + L_c C - \lambda \end{vmatrix}$$

Al denominar  $u = LC + L_c C$  y  $v = L_c C$ , tenemos:

$$(u - \lambda)^2 - v^2 = 0 = \lambda^2 - 2u\lambda + (u^2 - v^2)$$

cuyas soluciones son:  $\lambda_{\pm} = u \pm v$ , esto es:

$$\lambda_- = LC = \frac{1}{\omega_0^2} \equiv \lambda_1 \quad \lambda_+ = LC + 2L_c C \equiv \lambda_2$$

Con cada uno de estos valores regresamos a la ecuación de valores propios y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} u - \lambda_1 & -v \\ -v & u - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces:  $a_{21} = a_{11}$ .

$$\begin{pmatrix} u - \lambda_2 & -v \\ -v & u - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces:  $a_{22} = -a_{12}$ .

Si regresamos a la ecuación (3.38), con

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

obtenemos las ecuaciones que satisfacen las coordenadas normales:

$$\lambda_1 \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \quad \lambda_2 \ddot{q}_2 + q_2 = 0$$

cuya solución es inmediata:

$$q_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad q_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

con:

$$\omega_1 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} = \omega_0 \quad \omega_2 = \lambda_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{LC + 2L_c C}}$$

Observe que los elementos de la matriz  $\mathbf{M}'$  de este sistema son los inversos de los cuadrados de las frecuencias normales.

Finalmente, podemos escribir la solución general del sistema de ecuaciones (3.36) así:

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ I_2 &= C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned}$$

donde, por convención, hemos elegido  $a_{11} = a_{12} = 1$ .

A partir de este ejemplo podemos construir un algoritmo útil para aplicar el método de diagonalización a problemas de osciladores acoplados:

1. Escriba las ecuaciones de movimiento en forma matricial.
2. Resuelva la ecuación de valores propios (3.33) de la matriz no diagonal  $\mathbf{M}$  en los dos pasos siguientes:

- a. Iguale a cero el determinante secular a fin de obtener los valores propios de  $\mathbf{M}(\lambda_n)$ .
  - b. Sustituya cada uno de estos valores en la ecuación de valores propios para obtener los coeficientes  $a_{jn}$ , que son los elementos de la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ .
3. Con los valores de  $\lambda_n$  construya la matriz diagonal  $\mathbf{M}'$ , escriba las ecuaciones que satisfacen las coordenadas normales y halle sus respectivas soluciones  $q_n(t)$ .
  4. Aplique la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  al vector columna  $\mathbf{q}$  para reconstruir  $\Phi$  de acuerdo con (3.35). Esto le conduce a la solución general (3.24).
  5. Aplique condiciones iniciales para determinar las constantes arbitrarias  $C_n$  y  $\delta_n$ . Esto le permite saber con qué amplitudes y constantes de fase fueron excitados los modos normales del sistema en el estado inicial.

Como se verá en los capítulos siguientes, este algoritmo es susceptible de generalización a sistemas amortiguados y forzados, y a un número arbitrario de osciladores acoplados que admiten soluciones expresables como superposición de modos normales.

### 3.7. Diagonalización de la energía

La energía total del sistema de dos masas acopladas por resortes se expresa de la manera siguiente en función de las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ :

$$E = \frac{1}{2}(m\dot{x}_1^2 + m\omega_0^2 x_1^2) + \frac{1}{2}(m\dot{x}_2^2 + m\omega_0^2 x_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x_1 - x_2)^2 \quad (3.39)$$

Observe que la energía potencial del sistema es una función  $V(x_1, x_2)$  tal que las fuerzas sobre las masas 1 y 2 pueden obtenerse por derivación parcial:

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

De (3.39) se ve que en las coordenadas *usuales*  $x_1$  y  $x_2$  la energía no se descompone en suma de energías de los osciladores 1 y 2. Pero es fácil verificar, por sustitución directa, que *en coordenadas normales la energía se descompone exactamente en suma de energías asociadas a cada modo normal*<sup>4</sup>. Este

<sup>4</sup> Su comprobación se propone como ejercicio al final del capítulo.

es un resultado de gran importancia y generalidad extensible a sistemas con infinitos grados de libertad y válido más allá de la física clásica. Así, *las coordenadas normales no sólo desacoplan las ecuaciones de movimiento. También “diagonalizan” la energía*, porque permiten expresarla como suma de energías de osciladores normales independientes. Estos dos hechos no están aislados sino que se implican mutuamente. Por ello en algunos problemas es más simple hallar la transformación que diagonaliza la energía para obtener los modos normales.

### 3.8. Pulsaciones

Las pulsaciones pueden visualizarse como oscilaciones casi armónicas con una amplitud que varía lentamente con el tiempo. En general, este movimiento resulta de la superposición lineal de dos oscilaciones armónicas con frecuencias cercanas y tales que su promedio

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

es mucho mayor que su diferencia

$$\Delta \equiv \omega_1 - \omega_2$$

Un oscilador simple sometido simultáneamente a dos fuerzas de frecuencias vecinas y amplitudes iguales presenta pulsaciones<sup>5</sup>. Mostraremos a continuación que este fenómeno también puede presentarse en un sistema *aislado* constituido por dos osciladores débilmente acoplados. En este caso, las frecuencias vecinas están dadas por las frecuencias normales y, por tanto, el acoplamiento debe ser débil. Durante cierto lapso de tiempo oscila de manera apreciable sólo uno de los osciladores. Paulatinamente disminuye su amplitud al tiempo que aumenta la del otro y se intercambian los papeles; hay una transferencia periódica de energía de un oscilador al otro.

Supongamos que uno de los péndulos se separa ligeramente de su posición de equilibrio, de manera que las condiciones iniciales toman la forma:

$$x_1(0) = A \quad x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

A partir de la solución general (3.13) podemos determinar las constantes arbitrarias. En este caso obtenemos:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \quad C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

---

<sup>5</sup> Véase ejercicio 10 del capítulo 2.



Observe que por la forma en que fue excitado el sistema, las contribuciones de los dos modos normales son iguales.

La solución toma la forma:

$$x_1(t) = \frac{A}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

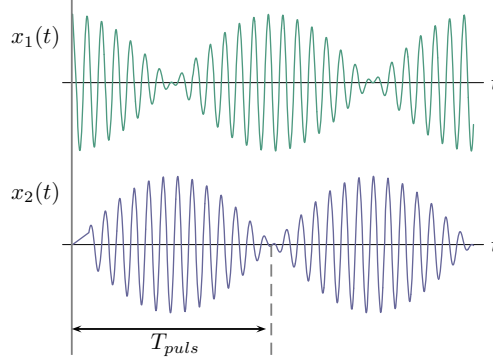
$$x_2(t) = \frac{A}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$$

Con ayuda de la expresión compleja del coseno puede escribirse la solución de manera más transparente:

$$x_1(t) = A \cos\left(\frac{\Delta}{2}t\right) \cos(\bar{\omega}t) \equiv A_1^{mod}(t) \cos(\bar{\omega}t) \quad (3.40)$$

$$x_2(t) = A \sin\left(\frac{\Delta}{2}t\right) \sin(\bar{\omega}t) \equiv A_2^{mod}(t) \sin(\bar{\omega}t)$$

Cuando el acoplamiento es débil  $\bar{\omega} \gg \frac{\Delta}{2}$ . Entonces, las funciones  $A_1^{mod}(t)$  y  $A_2^{mod}(t)$  tienen una variación más lenta que la oscilación con frecuencia  $\bar{\omega}$ . Por tanto, aparecerán como amplitudes dependientes del tiempo que modulan la oscilación rápida, tal como se ilustra en la figura 3.7.



**Figura 3.7** Pulsaciones de dos osciladores débilmente acoplados.

Como puede verse en las gráficas, el período de pulsación ( $T_{puls}$ ) no es igual al período de las amplitudes de modulación porque durante éste tienen lugar dos pulsaciones; esto es:

$$T_{puls} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta} \right) = \frac{2\pi}{\Delta} \quad (3.41)$$

### 3.9. Intercambio de energía en las pulsaciones

Por simplicidad analizaremos las oscilaciones longitudinales de dos masas acopladas débilmente por un resorte. Como  $\omega_c \ll \omega_0$ , podemos considerar que la energía almacenada en el elemento de acoplamiento (en este caso el resorte) es ignorable comparada con la energía de los dos osciladores; esto es:

$$\begin{aligned} E_T &\approx E_1 + E_2 \\ &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \end{aligned}$$

Al usar las ecuaciones (3.40) y hacer las aproximaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\approx -\bar{\omega} A_1^{mod}(t) \sin(\bar{\omega} t) & \dot{x}_2 &\approx \bar{\omega} A_2^{mod}(t) \cos(\bar{\omega} t) \\ k &= m\omega_0^2 \approx m\bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

resulta finalmente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}k(A_1^{mod})^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}t\right) \\ E_2 &= \frac{1}{2}k(A_2^{mod})^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}t\right) \end{aligned}$$

con lo cual

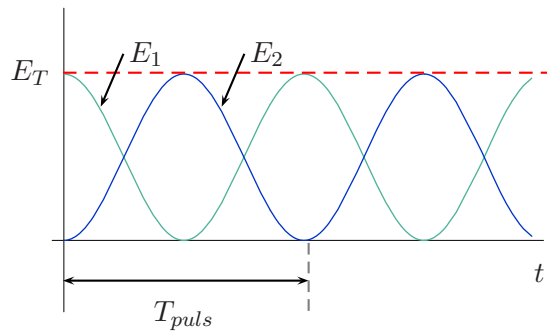
$$E_T \approx E_1 + E_2 \approx \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 A^2 = \text{cte}$$

En la figura 3.8 puede verse cómo la energía fluye de un oscilador a otro a través del resorte de acoplamiento.

El fenómeno de pulsaciones es fácilmente observable en sistemas macroscópicos. Pero su validez se extiende al dominio microscópico. Así, este modelo sirve de base a la descripción cuántica de muchos procesos atómicos y moleculares. Entre ellos el ejemplo más conocido es el de las pulsaciones con frecuencia en el rango de microondas de la molécula de amoníaco<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Una discusión detallada de este sistema puede encontrarse en las *Lectures de Feynman*, tomo III, capítulo 9.

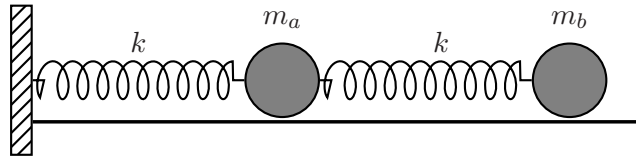


**Figura 3.8** Intercambios de energía de dos osciladores.

## Ejercicios

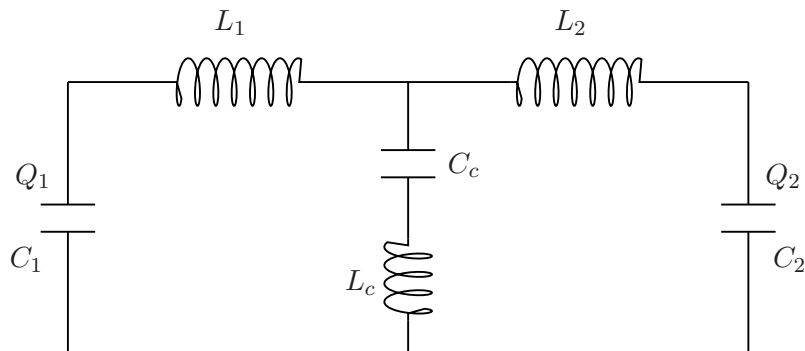
- 3.1 Sustituyendo directamente  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  en términos de coordenadas normales en la expresión (3.39), muestre que la energía de dos osciladores acoplados puede escribirse como la suma de energías asociadas a cada modo normal, como si se tratara de osciladores independientes.
- 3.2 Mediante el algoritmo propuesto en la sección 3.6 halle explícitamente las coordenadas normales del sistema constituido por dos circuitos LC acoplados por un condensador  $C_c$ . Halle las soluciones con los siguientes conjuntos de condiciones iniciales:
  - a.  $I_1 = I_2 = I_0$ ,  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0$ . Interprete esta solución.
  - b.  $I_1 = I_0$ ,  $I_2 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = 0$ . En este caso, ¿podría usted observar pulsaciones en el laboratorio? Explique.
- 3.3 Escriba las ecuaciones de movimiento de dos masas desiguales,  $m_a$  y  $m_b$ , acopladas entre sí por un resorte de constante  $k_c$  y a los extremos por resortes idénticos de constante  $k$ . Encuentre las frecuencias y relaciones de amplitud de los modos normales. Verifique que en el caso  $m_a = m_b$  se obtiene el mismo resultado (3.21).
- 3.4
  - a. En el problema anterior suponga que el acoplamiento entre las dos masas es débil y describa las pulsaciones que se producen a partir de un estado inicial con ambas masas en reposo y  $x_a = A$ ,  $x_b = 0$ .
  - b. Halle expresiones aproximadas para  $E_a(t)$  y  $E_b(t)$ , y analice el resultado suponiendo que  $m_a > m_b$ . ¿Es total la transferencia de energía? Analice las transferencias de energía en los dos casos extremos,  $m_a \ll m_b$  y  $m_a \gg m_b$ .

- 3.5** Escriba las ecuaciones de movimiento de las dos masas de la figura 3.9. Halle los modos normales y describa el movimiento a partir de las siguientes condiciones iniciales:  $x_a = \dot{x}_a = \dot{x}_b = 0$ ,  $x_b = B$ , tanto en términos de los desplazamientos de las masas,  $m_a$  y  $m_b$ , como de los modos normales excitados del sistema en el estado inicial. Si el sistema fuera vertical, ¿cómo se modificarían los resultados anteriores?



**Figura 3.9** Sistema de dos masas acopladas por resortes.

- 3.6** Halle las frecuencias normales de un sistema constituido por dos circuitos,  $L_1C_1$  y  $L_2C_2$ , acoplados por un condensador  $C_c$  en serie con una inductancia  $L_c$  (figura 3.10).



**Figura 3.10** Sistema de dos circuitos  $LC$  acoplados por condensador en serie con inductancia.

## Capítulo 4

# Sistema de dos osciladores amortiguados y forzados

En este capítulo se describe el comportamiento de sistemas de dos osciladores acoplados, amortiguados, libres o bajo el efecto de fuerzas externas.

- Se muestra cómo un cambio a coordenadas normales, idéntico al efectuado para los sistemas libres no amortiguados, permite desacoplar y resolver las ecuaciones de movimiento.
- Con base en los resultados del capítulo 2, se hace un breve análisis de las curvas de absorción de potencia en función de la frecuencia de la fuerza externa. De aquí resulta un hecho de importancia capital: a cada modo normal del sistema libre corresponde una resonancia del sistema forzado. Estas resonancias se manifiestan como picos en las curvas de absorción de potencia.
- Se presentan las bases teóricas de dos aplicaciones técnicas: el análisis de sustancias por absorción resonante y un protector contra vibraciones.
- Se generaliza el método matricial de diagonalización de las ecuaciones de movimiento a sistemas amortiguados y forzados.
- Se analiza el caso de sistemas no solubles mediante el método de coordenadas normales.
- Se muestra la relevancia del estudio de sistemas de dos osciladores acoplados para comprender el comportamiento de sistemas más complejos.

### 4.1. Sistema amortiguado sin fuerza externa

Si suponemos que sobre los osciladores considerados en el capítulo anterior actúan fuerzas friccionales de la forma  $-b\dot{\Phi}_1$  y  $-b\dot{\Phi}_2$ , respectivamente, las ecuaciones de movimiento toman la forma genérica:

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}_1 + \omega_0^2 \Phi_1 + \Gamma \dot{\Phi}_1 + \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0 \\ \ddot{\Phi}_2 + \omega_0^2 \Phi_2 + \Gamma \dot{\Phi}_2 - \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Al sumar y restar sucesivamente estas dos ecuaciones resulta un sistema desacoplado para las coordenadas normales

$$q_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \quad q_2 = \Phi_1 - \Phi_2 \tag{4.2}$$

La única diferencia con respecto a los sistemas no amortiguados reside en que las coordenadas normales satisfacen ahora ecuaciones de oscilador simple amortiguado:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + \Gamma \dot{q}_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) q_2 + \Gamma \dot{q}_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

cuyas soluciones generales son, respectivamente:

$$\begin{aligned}q_1(t) &= C_1 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_1' t + \delta_1) \\ q_2(t) &= C_2 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_2' t + \delta_2)\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y

$$(\omega_j')^2 = \omega_j^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2$$

Finalmente, la solución general del sistema de ecuaciones de movimiento puede escribirse en función de estas coordenadas normales, así:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= \frac{1}{2} [q_1(t) + q_2(t)] \\ \Phi_2(t) &= \frac{1}{2} [q_1(t) - q_2(t)]\end{aligned}\tag{4.5}$$

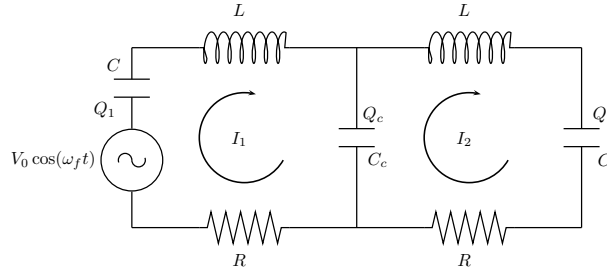
Si expresamos (4.2) y (4.5) en lenguaje matricial, obtenemos:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\Phi \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 4.2. Sistema amortiguado y forzado armónicamente

Para mayor concreción, analizamos un par de circuitos RLC acoplados por un condensador  $C_c$  y con una fuente de voltaje sinusoidal conectada al circuito de entrada, como indica la figura 4.1.



**Figura 4.1** Circuitos RLC acoplados y forzados.

### 4.2.1. Ecuaciones de movimiento y solución general

Al definir las cargas y los sentidos positivos de las corrientes como indica la figura, las ecuaciones de movimiento del sistema pueden escribirse así:

$$\begin{aligned} V_0 \cos(\omega_f t) - I_1 R - \frac{Q_c}{C_c} - L \frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_1}{C} &= 0 \\ \frac{Q_c}{C_c} - I_2 R - \frac{Q_2}{C} - L \frac{dI_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si derivamos con respecto a  $t$  y escribimos  $\dot{Q}_c = I_1 - I_2$ , resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_1 + \omega_0^2 I_1 + \Gamma \dot{I}_1 + \omega_c^2 (I_1 - I_2) &= G_0 \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{I}_2 + \omega_0^2 I_2 + \Gamma \dot{I}_2 - \omega_c^2 (I_1 - I_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

con

$$G_0 \equiv \frac{\omega_f V_0}{L} \quad \Gamma \equiv \frac{R}{L} \quad \omega_c^2 \equiv \frac{1}{LC_c} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{1}{LC}$$

Este sistema de ecuaciones es de la forma genérica:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_1 + \omega_0^2 \Phi_1 + \Gamma \dot{\Phi}_1 + \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= G_0 \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{\Phi}_2 + \omega_0^2 \Phi_2 + \Gamma \dot{\Phi}_2 - \omega_c^2 (\Phi_1 - \Phi_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Un cambio de variables idéntico al que se usó en el caso de sistemas no forzados permite desacoplar este sistema. Definimos:

$$q_1 \equiv \Phi_1 + \Phi_2 \quad q_2 \equiv \Phi_1 - \Phi_2$$

Al sumar y restar sucesivamente las ecuaciones (4.8) resultan dos ecuaciones no acopladas idénticas a las de osciladores forzados amortiguados independientes:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + \Gamma \dot{q}_1 &= G_0 \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{q}_2 + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2) q_2 + \Gamma \dot{q}_2 &= G_0 \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Con base en el análisis hecho en el capítulo 2, podemos escribir de inmediato las soluciones generales de (4.9) como sumas de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y de una solución particular (sin constantes arbitrarias):

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_{1h}(t) + C_{1f} \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2} - \alpha_{1f}\right) \\ &= q_{1h}(t) + A_{1el} \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) + A_{1ab} \sin\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ q_2(t) &= q_{2h}(t) + C_{2f} \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2} - \alpha_{2f}\right) \\ &= q_{2h}(t) + A_{2el} \cos\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) + A_{2ab} \sin\left(\omega_f t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$



donde  $q_{nh}$  es la solución de la correspondiente ecuación homogénea y  $C_{nf}$  es la amplitud de la respuesta estacionaria que, por convención, elegimos positiva:

$$\begin{aligned} C_{nf} &= \frac{G_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2}} \\ A_{nel} &= \frac{G_0 (\omega_n^2 - \omega_f^2)}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2} \quad (n = 1, 2) \\ A_{nab} &= \frac{G_0 \Gamma\omega_f}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma\omega_f)^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Al regresar al caso concreto de los dos circuitos acoplados (figura 4.1), la solución estacionaria, ilustrada en la figura 4.2, toma la forma:

$$\begin{aligned} I_{1p} &= \frac{1}{2} [q_{1p} + q_{2p}] \\ &= \frac{1}{2} (A_{1el} + A_{2el}) \cos \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} (A_{1ab} + A_{2ab}) \sin \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) \\ I_{2p} &= \frac{1}{2} [q_{1p} - q_{2p}] \\ &= \frac{1}{2} (A_{1el} - A_{2el}) \cos \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} (A_{1ab} - A_{2ab}) \sin \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

que, de manera más concisa, puede escribirse:

$$\begin{aligned} I_{1p} &= A_{el}^{(1)} \cos \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) + A_{ab}^{(1)} \sin \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) \\ I_{2p} &= A_{el}^{(2)} \cos \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) + A_{ab}^{(2)} \sin \left( \omega_f t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

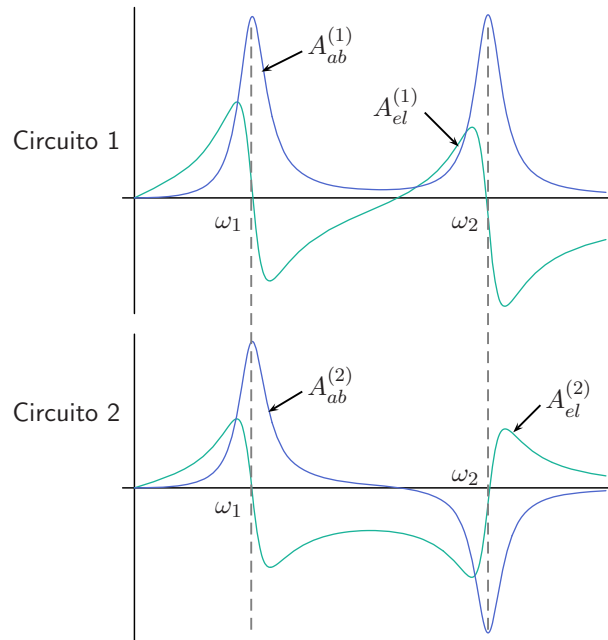
#### 4.2.2. Análisis físico de la respuesta estacionaria

De acuerdo con las gráficas de la figura 4.2, la respuesta de este sistema en el estado estacionario presenta las características siguientes:

1. Cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con una de las frecuencias normales del sistema, éste se comporta como si estuviera oscilando libremente y sin amortiguamiento en el respectivo modo normal (con las partes oscilando en fase o en antifase). En cada resonancia las magnitudes de las amplitudes absorbentes  $A_{ab}^{(j)}(\omega_f)$  pasan por un máximo o un

mínimo y las respectivas amplitudes elásticas  $A_{el}^{(j)}(\omega_f)$  son prácticamente nulas, como puede verificarse al desarrollar el ejercicio 4.2.

2. Fuera de las resonancias, la contribución fundamental a la respuesta se debe a la parte elástica. Sin embargo, la parte absorbente no puede ser estrictamente nula. Así, en la gráfica puede observarse un punto intermedio entre las resonancias donde el segundo circuito oscila sólo con su amplitud elástica, en tanto que el primero oscila con una amplitud absorbente  $A_{ab}^{(1)}$  pequeña, pero no nula, puesto que ella permite al sistema absorber de la fuente la energía para mantener la oscilación estacionaria.



**Figura 4.2** Amplitudes de respuesta elástica y absorbente de dos circuitos RLC con fuente acoplados por condensador  $C_c$ .

#### 4.2.3. Absorción de potencia

En la mayoría de problemas experimentales y técnicos la magnitud que finalmente interesa medir es la potencia media que el sistema absorbe de la fuente externa en el estado estacionario (es decir, después de transcurrido un tiempo suficiente para que la respuesta transitoria se amortigüe de modo apreciable).

La potencia instantánea absorbida por el sistema en el estado estacionario es:

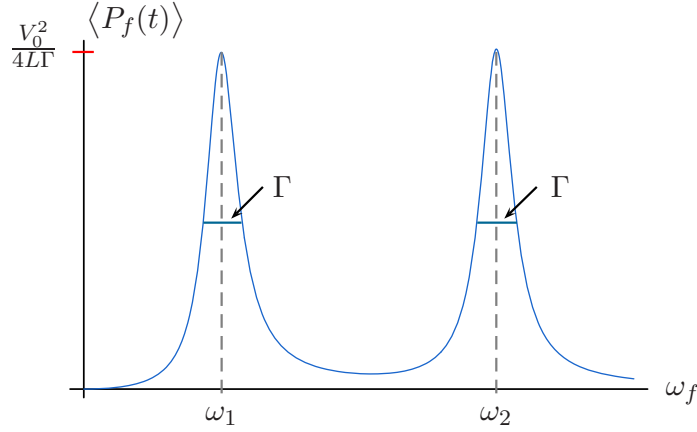
$$\begin{aligned} P_f(t) &= V_0 \cos(\omega_f t) I_1(t) \\ &= -V_0 A_{el}^{(1)} \cos(\omega_f t) \sin(\omega_f t) + V_0 A_{ab}^{(1)} \cos^2(\omega_f t) \end{aligned}$$

Al tomar el promedio durante un número entero de ciclos resulta una potencia media igual a:

$$\langle P_f(t) \rangle = \frac{V_0}{4} [A_{1ab}(\omega_f) + A_{2ab}(\omega_f)] \quad (4.13)$$

Observe que en promedio se anula la contribución de la respuesta elástica a la potencia. Esto justifica la distinción hecha entre una amplitud elástica y una absorbente.

La figura 4.3 ilustra la respuesta del sistema (como potencia absorbida) a la frecuencia de la fuente externa.



**Figura 4.3** Absorción de potencia media de dos circuitos RLC acoplados por condensador.

Observe que el valor de la potencia media absorbida en cada una de las dos resonancias es igual a  $\frac{V_0^2}{4L\Gamma}$ , la mitad de la potencia que sería absorbida por el sistema de un solo circuito alimentado por idéntica fuente de voltaje. En el caso del circuito de la figura 4.1, ambos modos resultaron igualmente amortiguados y, por tanto, los anchos de los dos picos de resonancia son iguales. Sin embargo, otras formas de acoplamiento de los circuitos o de la fuerza externa pueden conducir a anchos diferentes, como se ilustra en la sección 4.4 y en los ejercicios al final del capítulo.

En la sección 2.4 anotamos que una fuerza externa arbitraria puede expresarse como suma de componentes armónicas. La linealidad de las ecuaciones

de movimiento permite entonces escribir la solución como superposición de respuestas a cada una de las fuerzas armónicas presentes, como si éstas actuaran independientemente.

Como el sistema de ecuaciones (4.8) es también lineal, podemos aplicar el mismo teorema de superposición lineal de soluciones y extender las consideraciones sobre filtros y selectividad de frecuencias al presente caso, teniendo presente que ahora existen dos frecuencias de resonancia.

#### 4.2.4. Absorción resonante como instrumento de análisis

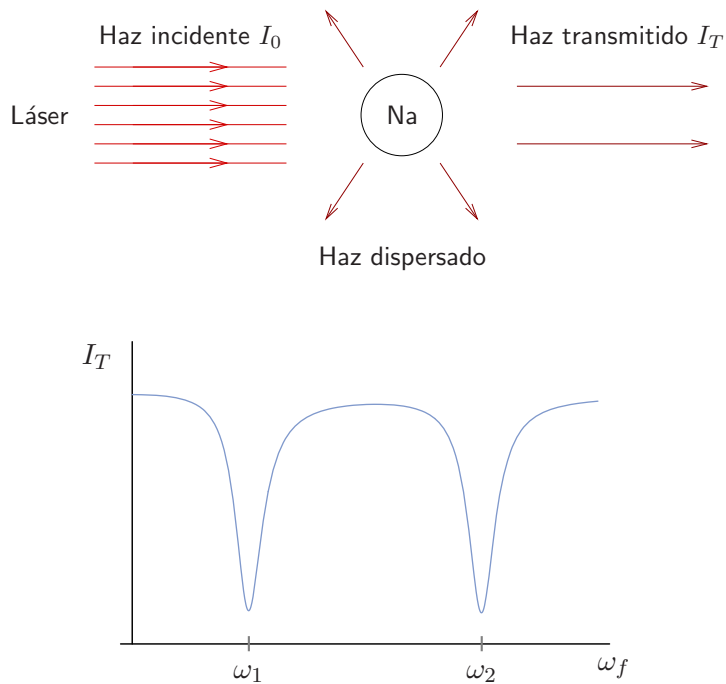
Curvas de absorción de potencia, similares a las que se miden en sistemas macroscópicos, juegan un papel esencial en el estudio de la estructura interna de sistemas moleculares, atómicos y subatómicos.

El análisis de las curvas de resonancia se ha convertido en un instrumento de análisis alternativo o complementario de técnicas químicas o de rayos X. Átomos y moléculas poseen conjuntos característicos de frecuencias de resonancia, como si fuesen osciladores con muchos grados de libertad. Cuando tales partículas son irradiadas con un láser de frecuencia controlable (es decir, sintonizable de manera muy precisa), el sistema absorbe energía electromagnética del láser cuando la frecuencia de éste coincide con alguna de sus frecuencias normales. Mediante el análisis de curvas de absorción de potencia es posible detectar la presencia de átomos o compuestos de un tipo particular en una muestra (por ejemplo, en un tejido orgánico). Esto convierte el estudio de las resonancias en un sensible instrumento de análisis con aplicaciones crecientes en la medicina y en la industria.

Un ejemplo simple de oscilador atómico forzado al cual podemos aproximarnos con nuestro modelo clásico de oscilador de dos frecuencias de resonancia es un átomo de sodio expuesto a radiación electromagnética con frecuencias cercanas a las del típico doblete amarillo del sodio.

Si, como indica la figura 4.4, sobre un haz de átomos de sodio incide un haz de luz proveniente de un láser sintonizable en cierto rango de frecuencias alrededor de  $5,09 \times 10^{14}$  Hz, puede observarse lo siguiente:

- a. Si la frecuencia de la luz coincide con alguna de las frecuencias normales del sodio en esta región del espectro ( $\omega_1 = 5,093 \times 10^{14}$  Hz,  $\omega_2 = 5,088 \times 10^{14}$  Hz), se produce una fuerte absorción de energía que puede detectarse midiendo la disminución del haz transmitido a través del gas, como se ilustra en la figura 4.4. Si la frecuencia difiere de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  por más de  $10^7$  Hz (esto es, por más de una parte en diez millones), la absorción es prácticamente ignorable y el gas de sodio se comporta como si fuera transparente para luz de estas frecuencias.



**Figura 4.4** Absorción de potencia en un sistema con dos resonancias.

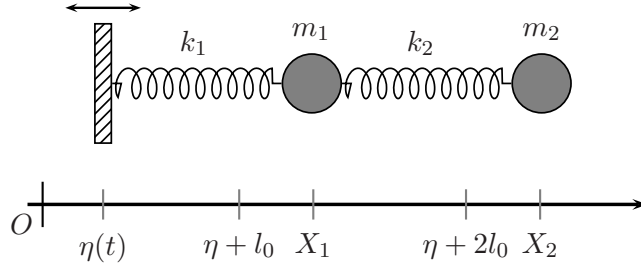
- b. Los átomos de sodio, una vez excitados, disipan la energía absorbida como osciladores amortiguados, reemitiéndola en todas las direcciones en forma de radiación electromagnética. Su tiempo de vida media  $\tau$  es del orden de  $3 \times 10^8$  segundos. Por tanto, el ancho de las curvas de resonancia es  $\Gamma = \frac{1}{\tau} \approx 3 \times 10^7$  Hz. Esto implica que el oscilador atómico tiene en estas resonancias un alto factor de calidad  $Q = \frac{\omega}{\Gamma} \approx 1,6 \times 10^7$ .

En este análisis hemos supuesto que no hay otras frecuencias de resonancia del sodio en el rango de frecuencias del láser e ignoramos un ancho adicional de las resonancias debido al movimiento de los átomos (efecto Doppler).

#### 4.2.5. Protector antivibraciones

En la figura 4.2 puede observarse una frecuencia, intermedia entre las frecuencias de resonancia, para la cual el segundo circuito oscila con amplitud elástica apreciable en tanto que el primero oscila con una pequeña amplitud absorbente que tiende a cero cuando  $\Gamma \rightarrow 0$ . Esto abre la posibilidad de proteger el sistema

de la entrada (que podría ser parte de una maquinaria o un circuito eléctrico) contra las vibraciones inducidas por una perturbación externa de una frecuencia definida, acoplando un segundo oscilador con parámetros adecuados.



**Figura 4.5** Masas acopladas por resortes con soporte oscilante.

En el caso general, no se requiere que ambos sistemas tengan idénticos parámetros. Para ilustrar esto usaremos un modelo mecánico simplificado con resistencia ignorable (figura 4.5). Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 &= -k_1(X_1 - \eta(t) - l_0) + k_2(X_2 - X_1 - l_0) \\ m_2 \ddot{X}_2 &= -k_2(X_2 - X_1 - l_0) \end{aligned}$$

Al cambiar de variable:  $X_1 \rightarrow x_1 = X_1 - l_0$ ,  $X_2 \rightarrow x_2 = X_2 - 2l_0$ , y dividir ambos lados de cada ecuación por las respectivas masas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} - x_2 \frac{k_2}{m_1} &= \frac{k_1}{m_1} \eta(t) \\ \ddot{x}_2 + x_2 \frac{k_2}{m_2} - x_1 \frac{k_2}{m_2} &= 0 \end{aligned}$$

Si suponemos  $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega_f t)$  y designamos:

$$\Omega_1^2 \equiv \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} \quad \Omega_2^2 \equiv \frac{k_2}{m_2} \quad \mu \Omega_2^2 \equiv \frac{k_2}{m_1}, \quad G_0 \equiv \frac{k_1}{m_1} \eta_0$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 - \mu \Omega_2^2 x_2 &= G_0 \cos(\omega_f t) \\ \ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 - \Omega_2^2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que en la aproximación  $\Gamma = 0$  el sistema sólo responde elásticamente, la solución particular debe tener la forma:

$$x_1 = B_1 \cos(\omega_f t)$$

$$x_2 = B_2 \cos(\omega_f t)$$

Al sustituir este Ansatz en las ecuaciones de movimiento, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales, no homogéneas, de las amplitudes  $B_1$  y  $B_2$ , que puede resolverse por métodos elementales (por ejemplo, regla de Cramer), con el resultado siguiente:

$$B_1 = G_0 \frac{(\Omega_2^2 - \omega_f^2)}{\text{Det}}$$

$$B_2 = G_0 \frac{\Omega_2^2}{\text{Det}}$$

donde Det es el determinante de los coeficientes:

$$\text{Det} = (\Omega_1^2 - \omega_f^2)(\Omega_2^2 - \omega_f^2) - \mu \Omega_2^4$$

Naturalmente este Ansatz no es adecuado cuando el determinante se hace cero, lo cual ocurre exactamente cuando  $\omega_f$  coincide con alguna de las dos frecuencias de resonancia del sistema<sup>1</sup>.

La amplitud elástica de la primera masa se anulará exactamente cuando la frecuencia de la fuerza externa coincida con  $\Omega_2$ , esto es, cuando  $\omega_f^2 = \frac{k_2}{m_2}$ . Observe que en este caso la amplitud de las oscilaciones de  $m_2$  es de signo contrario a la amplitud de la fuerza externa:

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = -\frac{G_0}{\mu \Omega_2^2} = -\frac{k_1}{k_2} \eta_0$$

Así, cuando la segunda masa oscila con esta amplitud en antifase con el soporte, ejerce sobre la primera una fuerza que compensa exactamente la fuerza externa; de este modo se anula la solución particular de  $m_1$ , como puede verse directamente en la correspondiente ecuación de movimiento.

Cuando se quiere evitar que un circuito LC expuesto a perturbaciones externas vibre con determinada frecuencia, suele acoplarse por inductancia mutua

<sup>1</sup> En un ejercicio al final del capítulo se sugiere hallar las frecuencias normales y analizar la respuesta estacionaria del sistema con fricción.

un segundo circuito con parámetros determinados por esta frecuencia. Osciladores adicionales acoplados pueden proteger la entrada contra varias frecuencias presentes en la perturbación externa.

### 4.3. Solución de las ecuaciones de movimiento mediante coordenadas normales

#### 4.3.1. Sistema amortiguado no forzado

Un procedimiento similar al empleado en la sección 3.5 nos permite obtener la solución general del sistema de ecuaciones (4.1) en función de las coordenadas normales. Al escribir (4.1) en forma matricial tenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi + \mathbf{M}\Phi + \Gamma\frac{d}{dt}\Phi = 0 \quad (4.14)$$

Si operamos con la matriz  $\mathbf{A}$  a la izquierda e intercalamos la identidad, obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{A}\Phi + \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\Phi + \Gamma\frac{d}{dt}\mathbf{A}\Phi = 0$$

Debe tenerse en cuenta que la matriz  $\mathbf{M}$  coincide exactamente con la matriz definida para este sistema sin amortiguamiento. Al definir<sup>2</sup>:

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{q} \quad \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}' \quad (\text{diagonal})$$

resulta:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}'\mathbf{q} + \Gamma\dot{\mathbf{q}} = 0$$

Este es un sistema de ecuaciones no acopladas pero completamente equivalentes a (4.14). Si se escribe explícitamente en función de las componentes  $q_1$  y  $q_2$ , se ve que cada una satisface una ecuación de oscilador armónico amortiguado

---

<sup>2</sup> Donde por comodidad hemos conservado la notación que se empleó en el capítulo 3 para designar las coordenadas normales de un sistema no amortiguado.



cuya solución es ya conocida:

$$\begin{aligned}
 q_1(t) &= C_1 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega'_1 t + \delta_1) \\
 q_2(t) &= C_2 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega'_2 t + \delta_2) \\
 \omega'_1 &= \sqrt{\omega_1^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad \omega'_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \\
 \omega_1 &= \omega_0 \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}
 \end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  tiene como columnas los vectores propios de  $\mathbf{M}$ , a saber:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  y, por tanto, si conocemos la solución del sistema libre no amortiguado, podemos hallar de manera inmediata la solución del sistema amortiguado:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

#### 4.3.2. Sistema amortiguado y forzado

Al escribir el sistema (4.8) en forma matricial tenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} + \Gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 \cos(\omega_f t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

o de manera más concisa:

$$\frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} + \Gamma \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{G}(t) \quad (4.16)$$

Al operar a la izquierda con  $\mathbf{A}$  y definir  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{q}$ , resulta<sup>3</sup>:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}' \mathbf{q} + \Gamma \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{G}(t) \quad (4.17)$$

De nuevo las matrices  $\mathbf{M}$  (y, por tanto,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{M}'$ ) coinciden con las del caso libre no amortiguado. El problema se reduce entonces a un sistema de ecuaciones no

<sup>3</sup> Continuamos usando la notación  $\mathbf{q}$  para las coordenadas normales, pero es necesario tener presente cuáles ecuaciones de movimiento satisfacen en cada caso.

acopladas de osciladores amortiguados y forzados cuyas soluciones se hallaron en el capítulo 2:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \Gamma \dot{q}_1 &= A_{11}G_1(t) + A_{12}G_2(t) \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \Gamma \dot{q}_2 &= A_{21}G_1(t) + A_{22}G_2(t)\end{aligned}\quad (4.18)$$

donde hemos denominado  $A_{nj}$  las componentes de la matriz  $\mathbf{A}$ .

La solución general del sistema (4.16) toma la forma:

$$\Phi(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  son los  $a_{jn}$  que constituyen los vectores propios de  $\mathbf{M}$ .

Para los sistemas prototipo de dos osciladores acoplados elásticamente y forzados a la entrada tenemos:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} G_o \cos(\omega_f t + \theta_f) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (4.18), las coordenadas normales satisfacen las siguientes ecuaciones de osciladores forzados e independientes:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \Gamma \dot{q}_1 &= \frac{1}{2} G_o \cos(\omega_f t + \theta_f) \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \Gamma \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} G_o \cos(\omega_f t + \theta_f)\end{aligned}$$

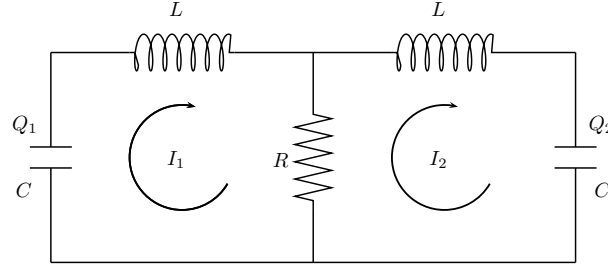
En función de las soluciones generales de estas ecuaciones, podemos escribir la solución general de las corrientes o desplazamientos así:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= q_1 + q_2 \\ \Phi_2 &= q_1 - q_2\end{aligned}$$

Como ya se dijo, la ventaja de este método reside en su posibilidad de generalización a sistemas con muchos grados de libertad cuyas soluciones admiten expansión en modos normales.

#### 4.4. Sistema acoplado por resistencia

En casos como el del circuito de la figura 4.1, ambos modos resultaron con igual ancho o amortiguamiento. Analizamos a continuación un sistema donde esto no ocurre.



**Figura 4.6** Circuitos LC acoplados por resistencia.

Las ecuaciones del circuito de la figura 4.6 toman la forma:

$$\begin{aligned}\frac{Q_1}{C} - L \frac{d}{dt} I_1 - (I_1 - I_2) R &= 0 \\ -\frac{Q_2}{C} - L \frac{d}{dt} I_2 - (I_2 - I_1) R &= 0\end{aligned}$$

Al tomar la derivada y reordenar obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} I_1 + \frac{1}{LC} I_1 + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} (I_1 - I_2) &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} I_2 + \frac{1}{LC} I_2 - \frac{R}{L} \frac{d}{dt} (I_1 - I_2) &= 0\end{aligned}$$

Aunque para hallar los modos normales, en este caso de dos osciladores acoplados, es más fácil usar el método elemental de sumar y restar estas dos ecuaciones, aplicamos a continuación el algoritmo de diagonalización construido en la sección 3.6 con el fin de ganar familiaridad con un método aplicable a sistemas más complejos.

Escribimos las ecuaciones de movimiento en forma matricial:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{LC} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos llevar la matriz

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a forma diagonal; para ello debemos resolver una ecuación de valores propios que nos lleva a la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$$

de donde resulta:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

Para hallar las relaciones de amplitud  $a_{jn}$  que permiten construir la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  retornamos con cada uno de estos valores a la ecuación de valores propios:

$$(\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{1}) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{1}) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

con  $\lambda_1 = 0$  obtenemos:

$$a_{11} = a_{21}$$

con  $\lambda_2 = 2$  resulta:

$$a_{12} = -a_{22}$$

Como resultado del proceso de diagonalización, las coordenadas normales satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{LC} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o de modo equivalente:

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{LC} q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{LC} q_2 + \frac{2R}{L} \dot{q}_2 = 0$$

Observe que el modo normal con frecuencia angular  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  no tiene amortiguamiento, es decir, su ancho es nulo, en tanto que el segundo modo normal tiene un ancho  $\Gamma_2 = \frac{2R}{L}$ . Esto implica que a partir de cualquier condición inicial en la que se exciten ambos modos normales, en un tiempo suficientemente largo el sistema tenderá a oscilar en el modo no amortiguado.

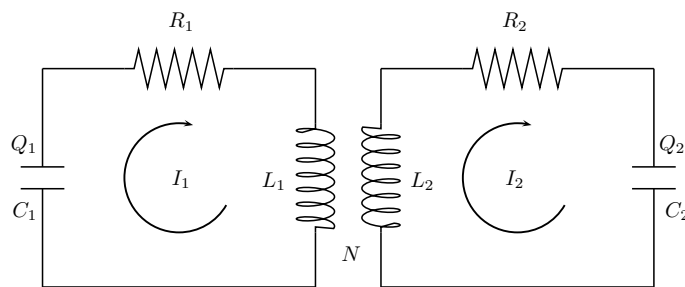
A pesar de que la localización estricta de la resistencia en una pequeña región del circuito es una idealización, este ejemplo permite ilustrar un esquema para aislar prácticamente un modo normal cuando la resistencia es apreciable en el acoplamiento y despreciable en el resto del circuito.

#### 4.5. Sistemas no solubles mediante uso de coordenadas normales

Hasta ahora nos hemos restringido al análisis de dos osciladores idénticos acoplados (inercial o elásticamente) que admiten soluciones de modos normales aun en presencia de términos de amortiguamiento y de fuerzas externas.

Para sistemas de osciladores diferentes, las ecuaciones de movimiento pueden contener varias matrices que no pueden diagonalizarse simultáneamente. En este caso, el sistema no posee estrictamente modos normales de oscilación y su solución debe hallarse mediante otros métodos.

Consideremos dos circuitos diferentes acoplados por su inductancia mutua, como se muestra en la figura 4.7.



**Figura 4.7** Circuitos RC acoplados por inductancia mutua.

Este sistema está regido por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{Q_1}{C_1} - I_1 R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - N \frac{dI_2}{dt} &= 0 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} - N \frac{dI_1}{dt} - I_2 R_2 - \frac{Q_2}{C_2} &= 0\end{aligned}$$

Al tomar derivadas e igualar  $\dot{Q}_1 = -I_1$ ,  $\dot{Q}_2 = I_2$ , resulta:

$$\begin{aligned}I_1 + R_1 C_1 \frac{dI_1}{dt} + L_1 C_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + N C_1 \frac{d^2 I_2}{dt^2} &= 0 \\ I_2 + R_2 C_2 \frac{dI_2}{dt} + L_2 C_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + N C_2 \frac{d^2 I_1}{dt^2} &= 0\end{aligned}\tag{4.20}$$

o en lenguaje matricial:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R_1 C_1 & 0 \\ 0 & R_2 C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} L_1 C_1 & N C_1 \\ N C_2 & L_2 C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\mathbf{I} + \mathbf{Y} \frac{d}{dt} \mathbf{I} + \mathbf{W} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{I} = 0\tag{4.21}$$

Para hallar coordenadas normales sería necesario diagonalizar la matriz  $\mathbf{W}$  sin quitarle a  $\mathbf{Y}$  su forma diagonal. Pero no es posible hallar una transformación que deje ambas matrices en forma diagonal. Esto se debe a que no existe un conjunto de vectores propios comunes a ambas ya que, como puede comprobarse, ellas no conmutan:  $\mathbf{YW} \neq \mathbf{WY}$ .

Si existiera una transformación  $\mathbf{A}$  capaz de convertir a  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{W}$  en matrices diagonales, tendríamos:

$$\mathbf{Y}'_{diag} = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \quad \mathbf{W}'_{diag} = \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^{-1}$$

Pero dos matrices diagonales conmutan:

$$\mathbf{Y}' \mathbf{W}' = \mathbf{W}' \mathbf{Y}'$$

entonces:

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{Y} \mathbf{A}^{-1}$$

Si operamos a la izquierda con  $\mathbf{A}^{-1}$  y a la derecha con  $\mathbf{A}$ , resulta:

$$\mathbf{Y}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{Y}$$

Así, la existencia de  $\mathbf{A}$  implica que las matrices  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{W}$  conmutan. Por tanto, si no conmutan debemos concluir que no existe  $\mathbf{A}$  capaz de diagonalizarlas simultáneamente.

Sin embargo, es posible mostrar que para este sistema existen dos modos de oscilación en que ambas partes oscilan con idéntica frecuencia pero con diferentes constantes de fase. Esto implica que las partes no pasan por su estado de equilibrio simultáneamente y, por tanto, no se trata en sentido estricto de modos normales.

Observe que si  $R_1C_1 = R_2C_2$ , la matriz  $\mathbf{Y}$  se hace proporcional a la identidad y sólo resta diagonalizar  $\mathbf{W}$ . La solución del problema para el sistema simétrico se plantea como ejercicio al final del capítulo.

#### 4.6. Relevancia del sistema de dos osciladores acoplados

Un oscilador lineal simple, no sometido a fuerzas externas, posee una única forma de movimiento libre con frecuencia característica  $\omega_0$ . Cuando dos osciladores idénticos se acoplan aparecen dos formas de movimiento armónico colectivo: la primera puede verse como la simple yuxtaposición de dos osciladores oscilando en fase con la misma frecuencia  $\omega_0$  que tendría cada uno por separado. La segunda implica la aparición de una nueva frecuencia con la cual puede oscilar libremente el sistema como un todo. Podría decirse que el acoplamiento de dos constituyentes simples e idénticos ha producido la *emergencia* de una nueva propiedad, a saber: la posibilidad de un nuevo tipo de movimiento colectivo libre en que ambas partes oscilan con una frecuencia que no sería posible si no existiese el acoplamiento.

Estas formas de movimiento colectivo son coherentes por cuanto existen relaciones de fase constantes entre los *desplazamientos* de las partes. El sistema puede ser excitado en uno de estos modos eligiendo adecuadamente las condiciones iniciales. Pero, en general, los modos permanecen como elementos potenciales, cuya superposición genera cualquier movimiento posible del sistema. Cuando el sistema es sometido a una fuerza externa con múltiples componentes armónicas de diferentes frecuencias o a una fuerza armónica de frecuencia variable, el sistema revela estas potencialidades mostrando selectividad o preferencia por las frecuencias que coinciden con la de sus modos normales.

En el capítulo siguiente generalizaremos estos resultados al caso de  $N$  osciladores idénticos (con  $N$  arbitrariamente grande), cuyo acoplamiento da lugar a  $N$  modos de movimiento colectivo coherente que, a pesar de la simplicidad de los elementos constituyentes, pueden ser muy diferenciados y complejos.

Hemos dedicado un amplio espacio al sistema de dos osciladores acoplados porque en ellos está en germen el comportamiento de sistemas más complejos, con propiedades no preexistentes en ninguna de sus partes.

## Ejercicios

- 4.1** Escriba una expresión general para la energía electromagnética del sistema de dos circuitos idénticos RLC acoplados por un condensador  $C_c$  y forzado armónicamente a la entrada con una fuente de voltaje  $V_0 \cos(\omega_f t)$ . Demuestre que en el estado estacionario la energía electromagnética del sistema no permanece constante sino en promedio (sobre un número entero de ciclos).

*Sugerencia:* compare la potencia media suministrada por la fuente con el calor disipado en promedio por unidad de tiempo.

- 4.2** a. Halle los ceros de las amplitudes elásticas  $A_{el}^{(1)}$  y  $A_{el}^{(2)}$  para las corrientes de los circuitos acoplados de la figura 4.1.  
b. Muestre que cuando  $\Gamma \ll |\omega_2 - \omega_1|$  (y, por tanto,  $\Gamma^2 \ll \omega_1^2 + \omega_2^2$ ),  $A_{el}^{(j)}$  se anula aproximadamente en las dos frecuencias de resonancia.

- 4.3** Haciendo simétrico el sistema de la figura 4.7, con  $R_1 = R_2$ ,  $L_1 = L_2$ ,  $C_1 = C_2$ , el sistema es soluble por el método de las coordenadas normales. Halle explícitamente las frecuencias normales, las relaciones de amplitud y los correspondientes anchos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Analice físicamente el resultado.

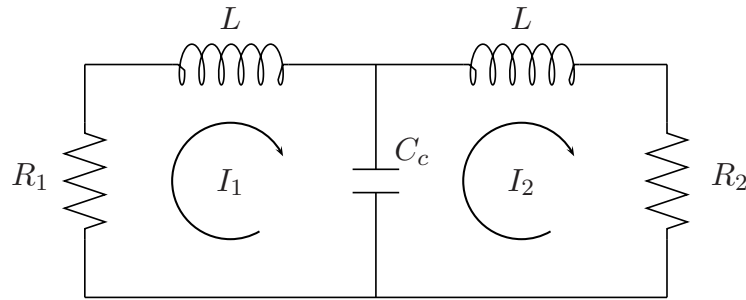
- 4.4** Escriba en forma matricial las ecuaciones de movimiento de los circuitos acoplados de la figura 4.8 y diga por inspección si el sistema posee o no modos normales en el sentido estricto.

En caso negativo, ¿en qué condiciones pueden existir modos normales? Hállelos explícitamente y analice el resultado.

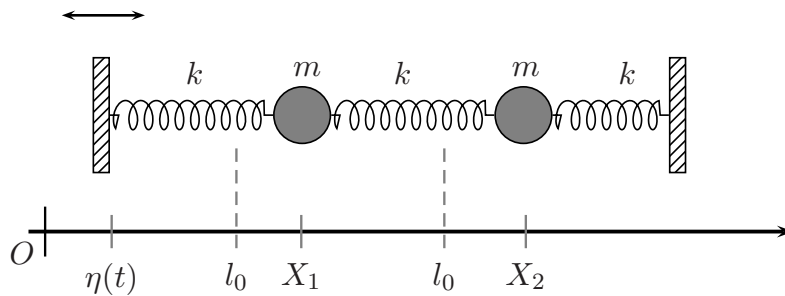
- 4.5** Al sistema de masas iguales sobre una superficie horizontal con fricción, acopladas por resortes idénticos (figura 4.9), se aplica una fuerza moviendo armónicamente el soporte izquierdo, mientras el extremo derecho permanece fijo.



Halle las ecuaciones de movimiento del sistema, escriba la solución general, calcule la potencia absorbida y haga una gráfica de resonancia.



**Figura 4.8** Circuitos diferentes acoplados por condensador.



**Figura 4.9** Masas acopladas por resortes con soporte oscilante.

- 4.6** Analice el comportamiento de un par de circuitos RLC acoplados por una fuente de voltaje armónico **con** y **sin** resistencia apreciable. Elabore gráficas de potencia media contra frecuencia.
- 4.7** En el primer circuito del sistema acoplado inductivamente de la figura 3.6 se coloca en serie una fuente de voltaje alterno. Halle y analice la respuesta del sistema mediante el método de diagonalización.

- 4.8**
- a. Usando Ansatz de modo normal, halle las frecuencias normales y las correspondientes relaciones de amplitud del sistema descrito en la sección 4.2.5.
  - b. Si se introduce en el modelo un factor de amortiguamiento  $\Gamma$ , igual para ambas masas, diga si aún es posible utilizar el segundo oscilador como protector del primero contra oscilaciones de una frecuencia determinada. Justifique su respuesta con el análisis de la respuesta estacionaria del sistema.

## Capítulo 5

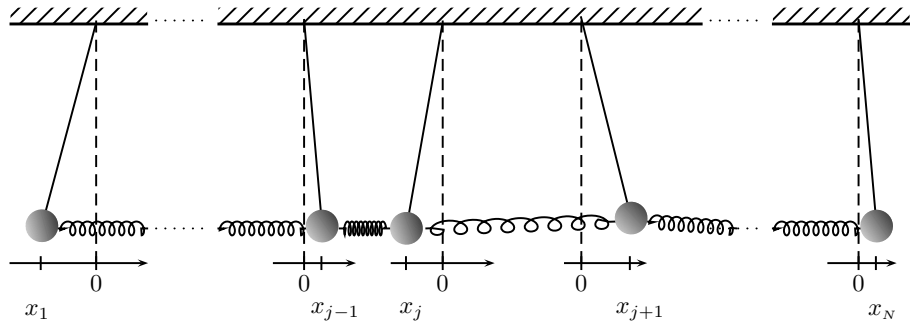
# Sistema de $N$ osciladores acoplados

En este capítulo se generaliza el concepto de modos normales a sistemas con un número arbitrario de osciladores acoplados y se transforma el sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales en una única ecuación con condiciones de frontera.

- Se halla la solución general para una red de  $N$  osciladores acoplados en términos de coordenadas normales que diagonalizan las ecuaciones de movimiento.
- Se establece un teorema sobre pequeñas oscilaciones, aplicable a la descripción del movimiento de un sistema clásico de  $N$  grados de libertad alrededor de una configuración de equilibrio estable. Este teorema nos permite extender los resultados obtenidos para nuestras redes de osciladores a sistemas mecánicos y electromagnéticos más generales, como los sólidos cristalinos.
- Ante la dificultad práctica que ofrece el método de diagonalización para un número  $N$  grande de osciladores acoplados, se presenta un método de solución basado en la separación de ecuaciones de movimiento y *condiciones de frontera*.
- Se resuelve la ecuación genérica resultante para  $N$  osciladores acoplados idénticos, sin fricción ni fuerza externa, usando un Ansatz de modos normales con condiciones de frontera dadas.
- Se analiza el espectro de frecuencias normales y se establecen las relaciones de dispersión que conectan frecuencia y número de onda.

## 5.1. Redes de osciladores idénticos sin fricción ni fuerza externa

### 5.1.1. Red de péndulos acoplados



**Figura 5.1**  $N$  péndulos acoplados por resortes.

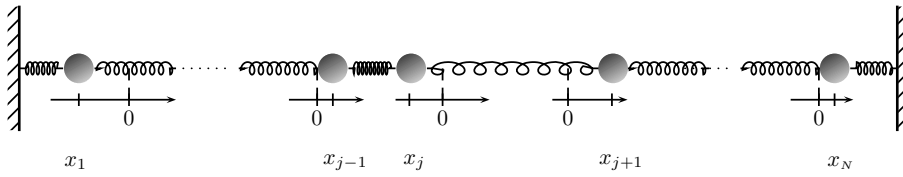
Al elegir origen en la configuración de equilibrio del sistema (esto es, al medir el desplazamiento  $x_i$  a partir de la posición de equilibrio del  $i$ -ésimo oscilador, como se muestra en la figura 5.1), las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \\
 \ddot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k}{m}(x_3 - x_2) \\
 &\vdots \\
 \ddot{x}_j &= -\frac{g}{l}x_j - \frac{k}{m}(x_j - x_{j-1}) + \frac{k}{m}(x_{j+1} - x_j) \\
 &\vdots \\
 \ddot{x}_N &= -\frac{g}{l}x_N - \frac{k}{m}(x_N - x_{N-1})
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

### 5.1.2. Red de masas acopladas por resortes

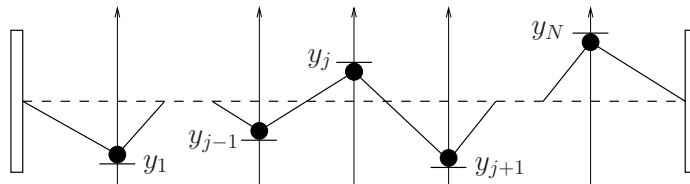
Al elegir coordenadas de oscilación como en la sección 5.1.1, obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \\
 \ddot{x}_2 &= -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) + \frac{k}{m}(x_3 - x_2) \\
 &\vdots \\
 \ddot{x}_j &= -\frac{k}{m}(x_j - x_{j-1}) + \frac{k}{m}(x_{j+1} - x_j) \\
 &\vdots \\
 \ddot{x}_N &= -\frac{k}{m}(x_N - x_{N-1}) - \frac{k}{m}x_N
 \end{aligned} \tag{5.2}$$



**Figura 5.2** Masas iguales acopladas por resortes idénticos.

### 5.1.3. Red de masas acopladas por cuerdas



**Figura 5.3** Masas iguales acopladas por cuerdas.

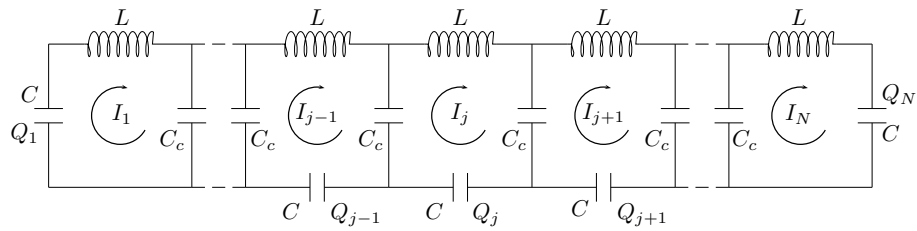
El sistema de ecuaciones para las  $N$  masas idénticas toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 &= -\frac{T}{ml_0}y_1 + \frac{T}{ml_0}(y_2 - y_1) \\
 \ddot{y}_2 &= -\frac{T}{ml_0}(y_2 - y_1) + \frac{T}{ml_0}(y_3 - y_2) \\
 &\vdots \\
 \ddot{y}_j &= -\frac{T}{ml_0}(y_j - y_{j-1}) + \frac{T}{ml_0}(y_{j+1} - y_j) \\
 &\vdots \\
 \ddot{y}_N &= -\frac{T}{ml_0}(y_N - y_{N-1}) - \frac{T}{ml_0}y_N
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Observe que este sistema de ecuaciones es idéntico a (5.2), con las sustituciones:

$$\frac{T}{ml_0} \rightarrow \frac{k}{m} \quad y \rightarrow x$$

#### 5.1.4. Red de circuitos LC acoplados por condensadores



**Figura 5.4**  $N$  circuitos LC acoplados por condensadores.

Al definir cargas y corrientes como indica la figura 5.4 y escribir las ecuaciones

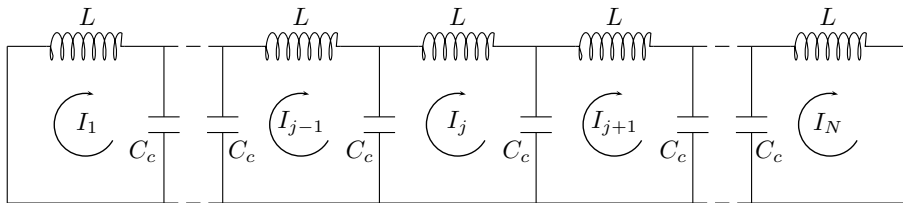
en función de corrientes obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_1 &= -\frac{1}{LC}I_1 + \frac{1}{LC_c}(I_2 - I_1) \\
 \ddot{I}_2 &= -\frac{1}{LC}I_2 - \frac{1}{LC_c}(I_2 - I_1) + \frac{1}{LC_c}(I_3 - I_2) \\
 &\vdots \\
 \ddot{I}_j &= -\frac{1}{LC}I_j - \frac{1}{LC_c}(I_j - I_{j-1}) + \frac{1}{LC_c}(I_{j+1} - I_j) \\
 &\vdots \\
 \ddot{I}_N &= -\frac{1}{LC}I_N - \frac{1}{LC_c}(I_N - I_{N-1})
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Observe que este sistema de ecuaciones es idéntico en forma a (5.1), con las sustituciones:

$$\frac{k}{m} \rightarrow \frac{1}{LC_c} \quad \frac{g}{l} \rightarrow \frac{1}{LC} \quad x \rightarrow I$$

### 5.1.5. Red de inductancias acopladas por condensadores



**Figura 5.5**  $N$  inductancias acopladas por condensadores.

Esta red obedece un sistema de ecuaciones idéntico a (5.4), con  $C \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_1 &= \frac{1}{LC_c}(I_2 - I_1) \\
 \ddot{I}_2 &= -\frac{1}{LC_c}(I_2 - I_1) + \frac{1}{LC_c}(I_3 - I_2) \\
 &\vdots \\
 \ddot{I}_j &= -\frac{1}{LC_c}(I_j - I_{j-1}) + \frac{1}{LC_c}(I_{j+1} - I_j) \\
 &\vdots \\
 \ddot{I}_N &= -\frac{1}{LC_c}(I_N - I_{N-1})
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

## 5.2. Diagonalización de las ecuaciones de movimiento

### 5.2.1. Sistemas libres no amortiguados

Las ecuaciones de movimiento de las redes con acoplamiento elástico que hemos considerado en la sección anterior pueden expresarse genéricamente así:

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} \ddot{\Phi}_j + \sum_{j=1}^N V_{ij} \Phi_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{5.6}$$

O en forma matricial:

$$\mathbf{T} \ddot{\Phi} + \mathbf{V} \Phi = \mathbf{0}$$

donde  $T_{ij} = T_{ji}$ ,  $V_{ij} = V_{ji}$ .

Al suponer que la matriz  $\mathbf{T}$  no tiene valores propios nulos y que, por tanto, su determinante es diferente de cero, podemos multiplicar la ecuación a la izquierda por  $\mathbf{T}^{-1}$ . Al denominar  $\mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$ , el sistema de ecuaciones toma la forma:

$$\ddot{\Phi} + \mathbf{U} \Phi = \mathbf{0} \tag{5.7}$$

A partir de aquí podemos repetir exactamente el mismo procedimiento utilizado en las secciones 3.5 y 4.3 para diagonalizar las ecuaciones de movimiento con ayuda de una transformación a coordenadas normales.

La ecuación secular resultante (análoga a (3.19)) es una ecuación de  $N$ -ésimo grado en las  $\omega_n^2$ . Las  $N$  raíces o soluciones positivas nos dan las  $N$  frecuencias



normales  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ . Al regresar con cada uno de estos valores al sistema de ecuaciones (análogo a (3.33)), que dio origen al determinante secular, podemos determinar las relaciones de amplitud  $(a_{jn}/a_{1n})$  de cada modo normal.

Así, el sistema libre posee  $N$  modos normales, que son formas de movimiento colectivo coherente en que todas las partes oscilan con frecuencia y constante de fase idénticas y con relaciones de amplitud constantes, características de cada modo.

De lo anterior podemos concluir que:

La solución general de un sistema libre, no amortiguado, de osciladores acoplados con  $N$  grados de libertad oscilatorios, puede escribirse como superposición lineal de  $N$  coordenadas normales, con un total de  $2N$  constantes arbitrarias:

$$\Phi_j(t) = \sum_{n=1}^N a_{jn} C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.8)$$

Si escribimos la solución en forma matricial como suma de matrices columna:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \vdots \\ a_{j1} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \vdots \\ a_{N1} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1N} C_N \cos(\omega_N t + \delta_N) \\ \vdots \\ a_{jN} C_N \cos(\omega_N t + \delta_N) \\ \vdots \\ a_{NN} C_N \cos(\omega_N t + \delta_N) \end{pmatrix}$$

podemos reconocer cada columna de la matriz del lado derecho como un modo normal de oscilación de todo el sistema. En este sentido, puede decirse que el movimiento más general es una superposición de modos normales. Cuando el sistema oscila en un modo normal, sólo un coeficiente  $C_k$  es diferente de cero.

### 5.2.2. Sistemas amortiguados y forzados

Como ya se mostró, el método de diagonalización es aplicable también en presencia de fuerzas externas y disipativas, siempre y cuando la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{\Gamma}$  pueda diagonalizarse simultáneamente con  $\mathbf{U}$ . La única diferencia con respecto al caso de dos osciladores acoplados reside en la dimensionalidad de las matrices. Podemos, por tanto, generalizar los resultados de los capítulos 3 y 4 a sistemas con  $N$  grados de libertad oscilatorios.

Nos interesa de manera particular analizar el movimiento de una red impulsada a la entrada por una fuerza armónica. Por simplicidad consideramos un sistema análogo a las redes descritas en la sección 5.1, donde la matriz  $\mathbf{T}$  es proporcional a la identidad.

Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\ddot{\Phi} + \mathbf{U}\Phi + \mathbf{\Gamma}\dot{\Phi} = \mathbf{G}(t)$$

Por tanto, las coordenadas normales del sistema satisfacen la ecuación matricial siguiente:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{U}'\mathbf{q} + \mathbf{\Gamma}'\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{G}(t) \quad (5.9)$$

donde las matrices  $\mathbf{U}'$  y  $\mathbf{\Gamma}'$  son diagonales con elementos  $\omega_n^2$  y  $\Gamma'_n$ , respectivamente, y  $\mathbf{A}$  es la matriz  $N \times N$  que transforma las coordenadas ordinarias  $\Phi_j$  a coordenadas normales  $q_n$ .  $\mathbf{G}(t)$  es una matriz columna con todos los elementos nulos salvo el primero, esto es:  $G_i = G_0 \cos(\omega_f t + \theta_f) \delta_{i1}$ .

Según (5.9) la coordenada normal  $q_n$  satisface la ecuación siguiente:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \Gamma'_n \dot{q}_n = A_{n1} G_0 \cos(\omega_f t + \theta_f) \quad (5.10)$$

donde los números  $A_{nj}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$ . Observe que cada coordenada normal puede tener un amortiguamiento diferente y, en general, todas pueden aparecer forzadas.

A partir de los resultados del capítulo 2 puede escribirse la solución para cada coordenada normal como superposición de una solución transitoria y una estacionaria. La contribución transitoria es amortiguada y depende de las condiciones iniciales. La parte estacionaria puede expresarse de la manera siguiente:

$$q_{np}(t) = A_{nel} \cos(\omega_f t + \theta_f) + A_{nab} \sin(\omega_f t + \theta_f) \quad (5.11a)$$

$$A_{nel} = \frac{A_{n1} G_0 (\omega_n^2 - \omega_f^2)}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma'_n \omega_f)^2} \quad (5.11b)$$

$$A_{nab} = \frac{A_{n1} G_0 \Gamma'_n \omega_f}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (\Gamma'_n \omega_f)^2}$$

La solución general que describe el movimiento de una red de  $N$  osciladores acoplados, amortiguados y con una fuerza armónica actuando a la entrada puede escribirse:

$$\Phi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_{hom}(t) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}_p(t) = \Phi_{hom} + \Phi_p \quad (5.12)$$

Estamos suponiendo que todas las frecuencias normales son diferentes de cero, por lo cual  $\Phi_{hom}(t)$  contiene las  $2N$  constantes arbitrarias requeridas por la solución general.

Debido al amortiguamiento, la memoria de las condiciones iniciales se pierde en el transcurso del tiempo, y sólo persiste la respuesta estacionaria que tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{jp} &= \sum_n a_{jn} q_{np}(t) \\ \Phi_{jp} &= \sum_n a_{jn} \left( A_{nel} \cos(\omega_f t + \theta_f) + A_{nab} \sin(\omega_f t + \theta_f) \right) \quad (5.13) \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

donde los  $a_{jn}$  son los elementos de la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ .

La expresión anterior puede escribirse como una combinación de las respuestas elástica y absorbente, así:

$$\Phi_{jp} = A_{jel} \cos(\omega_f t + \theta_f) + A_{jab} \sin(\omega_f t + \theta_f) \quad (5.14)$$

donde

$$A_{jel} = \sum_n a_{jn} A_{nel}, \quad A_{jab} = \sum_n a_{jn} A_{nab}$$

El sistema presenta  $N$  frecuencias de resonancia. Cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con una de las frecuencias normales, por ejemplo, con  $\omega_k$ , hay un máximo en la curva de resonancia debido a la contribución de  $A_{kab}$ . Ésta será la única contribución apreciable a la respuesta estacionaria si las demás frecuencias normales están suficientemente alejadas de  $\omega_k$ . También puede ocurrir que algunas frecuencias resonantes estén muy cercanas entre sí formando "bandas de resonancia". Para frecuencias  $\omega_f$  alejadas de las frecuencias normales predomina la respuesta elástica y, en cierta aproximación, puede ignorarse la absorbente.

### 5.3. Teorema fundamental sobre pequeñas oscilaciones

Consideremos un sistema mecánico (o su análogo electromagnético) cuya configuración en cualquier instante puede describirse mediante  $N$  coordenadas independientes. Si el sistema posee una configuración de equilibrio estable  $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N})$ , podemos describir el movimiento del sistema en la vecindad de esta configuración, restringiéndonos a pequeñas desviaciones del equilibrio.

Si el sistema es conservativo, podemos describir su dinámica con ayuda de una función de energía potencial  $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , dependiente sólo de las  $N$  coordenadas y tal que:

$$F_i = - \frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.15)$$

donde  $F_i$  es la “fuerza generalizada” asociada a la coordenada  $x_i$ .

Por definición, en el equilibrio todas las fuerzas sobre las componentes del sistema son nulas, esto es:

$$\begin{aligned} F_i(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N}) \\ = - \left. \frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right|_{(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0N})} = 0, \quad \forall i \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si el equilibrio es *estable*, una pequeña desviación de esta configuración no llevará al sistema a alejarse indefinidamente de ella. Por el contrario, el sistema ejecutará un *movimiento acotado alrededor del equilibrio*, que puede ser descrito aproximadamente con ayuda de nuestro modelo de pequeñas oscilaciones. En efecto, al tomar origen en la configuración de equilibrio y suponer que todas las  $x_i$  permanecen pequeñas en el transcurso del tiempo, podemos hacer un desarrollo en serie de Taylor de la energía potencial del sistema:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_N) = V(0, 0, \dots, 0) + \sum_i \left. \frac{\partial V}{\partial x_i} \right|_{(0, 0, \dots, 0)} x_i \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{(0, 0, \dots, 0)} x_i x_j + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Podemos elegir arbitrariamente el nivel de referencia de la energía potencial en la configuración de equilibrio definiendo  $V(0, 0, \dots, 0) = 0$ . El segundo término de la serie se anula debido a la condición de equilibrio (5.16). Conservamos el

término siguiente e ignoramos los restantes de la serie, lo cual implica suponer desviaciones  $x_i$  pequeñas y carácter “suave” de la función  $V$  a fin de que sus derivadas no tomen valores muy grandes en el origen. Con esta aproximación, la energía potencial del sistema puede escribirse así:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum V_{ij} x_i x_j \quad (5.18)$$

donde

$$V_{ij} = V_{ji} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{(0,0,\dots,0)} \quad \text{y} \quad V \geq 0 \quad (V = 0 \text{ si } x_i = 0 \quad \forall i)$$

Con esta energía potencial definitivamente positiva, las ecuaciones de movimiento toman la forma genérica:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{x}_j + \sum_j V_{ij} x_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.19)$$

En particular, si se trata de un sistema mecánico y las  $x_i$  son coordenadas cartesianas, las ecuaciones de movimiento para pequeñas desviaciones respecto a la configuración de equilibrio toman la forma:

$$F_i = m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_j V_{ij} x_j \quad (5.20)$$

lo cual implica:

$$T_{ij} = m_i \delta_{ij}$$

Como (5.19) es de la misma forma de las ecuaciones (5.6) que rigen nuestras redes prototipo, podemos aplicar a estos sistemas más generales el método de diagonalización y expresar su movimiento alrededor de una configuración de equilibrio estable como superposición de modos normales. Observe que en nuestras redes lineales sólo hay interacción entre vecinos próximos, es decir,  $V_{ij} = 0$  para  $j \neq i, i \pm 1$ , pero ésta no es una restricción esencial.

Puede ocurrir que la configuración de equilibrio no sea estable sino, por ejemplo, una configuración de equilibrio indiferente a lo largo de alguna dirección. En este caso aparecerán frecuencias normales nulas y la solución general no podrá escribirse como una superposición de modos normales, a menos que se imponga al sistema una condición (o “ligadura”) que elimine estos grados

de libertad no oscilatorios. Un sistema de dos masas unidas por un resorte, sin sujeción a soportes y la molécula de  $\text{CO}_2$  (que se discutirán en los ejercicios del capítulo) suministran ejemplos simples de esta situación.

El análisis precedente permite concluir que *cualquier sistema que posea una configuración de equilibrio estable ejecutará pequeñas oscilaciones alrededor de esta configuración y actuará de modo similar a nuestras redes de osciladores acoplados, incluso en presencia de fuerzas externas.*

En un sistema con  $N$  grados de libertad oscilatorios las coordenadas normales que diagonalizan las ecuaciones de movimiento también diagonalizan la energía en el sentido siguiente: la energía total puede expresarse como suma de energías de osciladores normales independientes, tal como se mostró en uno de los ejercicios del capítulo 3 para  $N = 2$ .

Los sólidos cristalinos son sistemas a los cuales son aplicables los resultados anteriores. Los átomos que constituyen el sólido están unidos por enlaces químicos de naturaleza electromagnética. Una de las características esenciales de un sólido es que, aparte de su movimiento de rotación y traslación como un todo, sus átomos sólo pueden ejecutar pequeñas oscilaciones alrededor de sus posiciones de equilibrio. Si el sólido es cristalino, estos puntos de equilibrio dibujan un retículo o *lattice* tridimensional periódico. Las coordenadas de los puntos del retículo pueden ordenarse de 1 a  $3N$  (donde  $N$  es el número de átomos del sólido), de modo que la configuración de equilibrio toma la forma  $(x_{01} x_{02} \dots, x_{03N})$ . Al expandir en serie de Taylor alrededor de esta configuración de equilibrio la energía potencial del sólido, debida a la interacción entre sus átomos, e ignorar potencias superiores a dos, se obtiene una expresión de la forma (5.17), donde  $x_i$  es la desviación con respecto a la coordenada de equilibrio  $x_{0i}$ . Esto permite extender a los sólidos cristalinos las conclusiones derivadas del teorema sobre pequeñas oscilaciones.

Este modelo clásico sirve como punto de partida para el análisis cuántico de las vibraciones de los sólidos. Cuánticamente la energía de un sólido que oscila en un modo normal aparece dividida en “cuantos” o porciones de energía  $\hbar\omega_n$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck. Estos cuantos de energía se asocian a “excitaciones elementales” del sólido denominadas “fonones”.

#### 5.4. Método alternativo de solución mediante condiciones de frontera

El método de diagonalización puede resultar demasiado largo y tedioso para un número  $N$  mayor que tres. Pero una simple inspección de las ecuaciones de movimiento para nuestras redes homogéneas sin fricción ni fuerza externa

(ecuaciones 5.1 a 5.6) permite descubrir que, salvo la primera y la última, todas tienen idéntica forma. Esto sugiere aplicar un truco para eliminar esta asimetría sin alterar el problema real. En esencia este truco consiste en adicionar términos a las ecuaciones de los extremos, a fin de obtener  $N$  ecuaciones de idéntica forma. Basta con resolver una sola ecuación genérica. Una vez resuelta ésta, se corrige la alteración mediante las llamadas “condiciones de frontera”.

Por ejemplo, en el sistema de péndulos acoplados (5.1) es fácil ver que puede darse idéntica forma a las  $N$  ecuaciones agregando a la derecha de la primera un término de la forma  $-\frac{k}{m}(x_1 - x_0)$  y a la derecha de la última otro de la forma  $+\frac{k}{m}(x_{N+1} - x_N)$ . Este cambio debe ser compensado con las llamadas “condiciones de frontera” que complementan el sistema de ecuaciones:

$$x_1 = x_0 \quad x_{N+1} = x_N \quad \forall t$$

Físicamente este truco equivaldría a agregar dos masas nulas en  $x_0$  y en  $x_{N+1}$  que oscilarían en fase con las masas de los extremos correspondientes, de tal modo que los resortes adicionales no se deformarían y, por tanto, no ejercerían ningún efecto real sobre la red.

De manera análoga, en el sistema de ecuaciones (5.4) que describe una red de circuitos  $LC$  acoplados por condensadores basta agregar en el lado derecho de la primera ecuación un término de la forma  $-\frac{1}{LC_c}(I_1 - I_0)$  y en la última un término  $+\frac{1}{LC_c}(I_{N+1} - I_N)$ , adicionando el sistema con las condiciones de frontera:

$$I_1 = I_0 \quad I_{N+1} = I_N \quad \forall t$$

Esto equivaldría físicamente a agregar un condensador que permanece siempre descargado en ambos extremos del sistema.

Para los sistemas de ecuaciones (5.2) y (5.3) basta agregar términos de la forma  $\frac{k}{m}x_0$  y  $\frac{k}{m}x_{N+1}$  en el lado derecho de la primera y última ecuaciones, respectivamente, más las condiciones de frontera  $x_0 = 0$ ,  $x_{N+1} = 0$ . Esto equivaldría a colocar masas infinitas y, por tanto, inmóviles en los extremos del sistema (que coinciden con los soportes).

Con este procedimiento se logran tres objetivos importantes:

- En primer lugar, todos nuestros sistemas de ecuaciones acopladas adquieren una forma simple e idéntica:

$$\ddot{\Phi}_j = -\omega_0^2 \Phi_j - \omega_c^2(\Phi_j - \Phi_{j-1}) + \omega_c^2(\Phi_{j+1} - \Phi_j) \quad (5.21)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

Esto sugiere buscar una forma genérica de solución que permita ver de manera más transparente las características globales del movimiento del sistema.

Observe que  $\omega_0^2$  está asociado a fuerzas recuperadoras, como la gravedad, que actúan sobre cada elemento de la red, independientemente de su acoplamiento a elementos vecinos. Por ello  $\omega_0^2$  es nulo para sistemas como (5.2), (5.3) y (5.5), donde las fuerzas recuperadoras son de puro acoplamiento y desaparecen si se elimina éste.

- b. En segundo lugar, se independizan en cierta forma las ecuaciones de movimiento de las condiciones de frontera, lo cual abre la posibilidad de analizar, con ecuaciones idénticas, sistemas con fronteras físicamente diferentes. Por ejemplo, las masas de los extremos de la red de péndulos podrían estar unidas mediante resortes de constante  $k$  a soportes fijos; los soportes de la red de masas acopladas por resortes podrían eliminarse; en los extremos de la red de masas acopladas por cuerdas podrían colocarse masas capaces de oscilar verticalmente sobre el soporte que mantiene la tensión  $T$  en la cuerda, y a la red de circuitos podrían acoplarse inductancias infinitas en los extremos.
- c. En tercer lugar, (5.21) tiene una forma apta para pasar al límite continuo, es decir, a la ecuación de onda clásica, como se mostrará más adelante.

## 5.5. Solución del sistema de ecuaciones con condiciones de frontera

El problema se ha reducido en todos los casos considerados a resolver un sistema de ecuaciones de la forma genérica:

$$\ddot{\Phi}_j + (\omega_0^2 + 2\omega_c^2)\Phi_j - \omega_c^2(\Phi_{j+1} + \Phi_{j-1}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.22)$$

con las condiciones de frontera pertinentes que especifican el movimiento de  $\Phi_0$  y  $\Phi_{N+1}$ . Para resolver este sistema suponemos soluciones especiales de la forma:

$$\Phi_j^{(n)}(t) = a_{jn} C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.23)$$

y las sustituimos en (5.22), a fin de determinar las relaciones de amplitud en cada modo y las frecuencias normales correspondientes. De aquí resulta:

$$\frac{-\omega_n^2 + \omega_0^2 + 2\omega_c^2}{\omega_c^2} = \frac{a_{j+1,n} + a_{j-1,n}}{a_{j,n}} \quad (5.24)$$



La estructura de la ecuación (5.24) es peculiar: el término de la izquierda sólo depende del modo (a través de  $\omega_n$ ) pero es independiente de la variable discreta  $j$  y, por tanto, es idéntico para las  $N$  partes del sistema. En consecuencia, podemos denominarlo  $W_n$ . Esto nos exige buscar una función  $a_{j,n} \equiv f_n(j)$  que satisfaga la condición siguiente:

$$\frac{f_n(j+1) + f_n(j-1)}{f_n(j)} = W_n \quad \text{independiente de } j \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta que funciones exponenciales de la forma  $e^{\pm j\beta_n}$  (con  $\beta_n$  una constante real, imaginaria o, en general, compleja) satisfacen las relaciones:

$$\frac{e^{i(j\pm 1)\beta_n}}{e^{ij\beta_n}} = e^{\pm i\beta_n} \quad \text{independiente de } j$$

podemos suponer para  $a_{j,n}$  soluciones de la forma:

$$a_{j,n} = D_n e^{ij\beta_n} + F_n e^{-ij\beta_n} \quad (5.26)$$

donde las constantes  $D_n$  y  $F_n$  permiten ajustar la solución a las condiciones de frontera.

Al sustituir en (5.25) resulta:

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{D_n e^{i(j+1)\beta_n} + F_n e^{-i(j+1)\beta_n} + D_n e^{i(j-1)\beta_n} + F_n e^{-i(j-1)\beta_n}}{D_n e^{ij\beta_n} + F_n e^{-ij\beta_n}} \\ &= \frac{(D_n e^{ij\beta_n} + F_n e^{-ij\beta_n}) (e^{i\beta_n} + e^{-i\beta_n})}{D_n e^{ij\beta_n} + F_n e^{-ij\beta_n}} \\ &= 2 \cos \beta_n \end{aligned}$$

Al llevar este resultado a (5.24), podemos escribir:

$$\frac{-\omega_n^2 + \omega_0^2 + 2\omega_c^2}{\omega_c^2} = 2 \cos \beta_n \quad (5.27)$$

de donde resulta inmediatamente:

$$\omega_n^2 = 2\omega_c^2 (1 - \cos \beta_n) + \omega_0^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2 \left( \frac{\beta_n}{2} \right) \quad (5.28)$$

Para determinar el parámetro  $\beta_n$  es necesario aplicar condiciones de frontera.

## 5.6. Aplicación de condiciones de frontera

### 5.6.1. Sistemas con extremos fijos

Denominamos sistemas con extremos fijos aquellos que satisfacen las condiciones de frontera:

$$\Phi_0 = 0 \quad \Phi_{N+1} = 0 \quad \forall t \quad (5.29)$$

Pero como  $\Phi_j^{(n)} = a_{j,n} C_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$ , estas condiciones implican:

$$a_{0,n} = 0 \quad a_{N+1,n} = 0 \quad \forall n$$

Al sustituir en (5.26) resulta:

$$D_n + F_n = 0 \quad D_n e^{i(N+1)\beta_n} + F_n e^{-i(N+1)\beta_n} = 0$$

En consecuencia:

$$D_n = -F_n \quad e^{i(N+1)\beta_n} - e^{-i(N+1)\beta_n} = 0$$

Para satisfacer la última ecuación debe elegirse  $\beta_n$  real, con lo cual la condición de frontera toma la forma:

$$\sin((N+1)\beta_n) = 0 \quad (N+1)\beta_n = n\pi$$

esto es,

$$\beta_n = \frac{n\pi}{N+1} \quad \text{Extremos fijos} \quad (5.30)$$

Para las amplitudes  $a_{j,n}$  a partir de (5.26) se tiene:

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= D_n \left( e^{ij\beta_n} - e^{-ij\beta_n} \right) \\ a_{j,n} &= 2i D_n \sin(j\beta_n) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Al reabsorber la constante arbitraria  $2i D_n$  en  $C_n$  finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_j^{(n)} &= \sin(j\beta_n) C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.32)$$

### 5.6.2. Sistemas con extremos libres

Denominamos sistemas con extremos libres aquellos que satisfacen las condiciones de frontera:

$$\Phi_0 = \Phi_1 \quad \Phi_{N+1} = \Phi_N \quad \forall t \quad (5.33)$$

Al aplicarlas al modo normal  $n$  (ecuación (5.23)), resulta:

$$a_{0,n} = a_{1,n} \quad a_{N+1,n} = a_{N,n} \quad \forall n$$

Lo cual, al considerar (5.26), implica por la primera condición:

$$\begin{aligned} D_n + F_n &= D_n e^{i\beta_n} + F_n e^{-i\beta_n} \\ D_n (1 - e^{i\beta_n}) &= F_n (e^{-i\beta_n} - 1) \\ F_n &= D_n e^{i\beta_n} \end{aligned}$$

y por la segunda:

$$\begin{aligned} D_n e^{i(N+1)\beta_n} + F_n e^{-i(N+1)\beta_n} &= D_n e^{iN\beta_n} + F_n e^{-iN\beta_n} \\ e^{-iN\beta_n} F_n (e^{-i\beta_n} - 1) &= e^{iN\beta_n} D_n (1 - e^{i\beta_n}) \\ e^{-iN\beta_n} &= e^{iN\beta_n} \end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$\sin(N\beta_n) = 0 \quad N\beta_n = n\pi$$

esto es,

$$\beta_n = \frac{n\pi}{N} \quad \text{Extremos libres} \quad (5.34)$$

Para las amplitudes  $a_{j,n}$  se obtiene a partir de (5.26):

$$\begin{aligned}
 a_{j,n} &= D_n \left( e^{ij\beta_n} + e^{i\beta_n} e^{-ij\beta_n} \right) \\
 &= D_n e^{i\frac{\beta_n}{2}} \left( e^{i(j-\frac{1}{2})\beta_n} + e^{-i(j-\frac{1}{2})\beta_n} \right) \\
 &= 2 D_n e^{i\frac{\beta_n}{2}} \cos \left( (j - \frac{1}{2})\beta_n \right)
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Al reabsorber la constante arbitraria  $2 D_n e^{i\frac{\beta_n}{2}}$  en  $C_n$ , obtenemos la siguiente forma para el  $n$ -ésimo modo normal de un sistema de osciladores acoplados con extremos libres:

$$\begin{aligned}
 \Phi_j^{(n)} &= \cos \left( (j - \frac{1}{2}) \beta_n \right) C_n \cos (\omega_n t + \delta n) \\
 j &= 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

La solución general puede escribirse directamente como suma de estas soluciones especiales, esto es, como superposición de modos normales:

$$\Phi_j^{\text{EF}}(t) = \sum_n \sin(j \beta_n) C_n \cos (\omega_n t + \delta n) \tag{5.37a}$$

$$\Phi_j^{\text{EL}}(t) = \sum_n \cos \left( (j - \frac{1}{2}) \beta_n \right) C_n \cos (\omega_n t + \delta n) \tag{5.37b}$$

## 5.7. Análisis del espectro de frecuencias normales

Los principales resultados de las secciones 5.5 y 5.6 pueden sintetizarse así:

1. Para las redes prototipo de  $N$  osciladores con acoplamiento elástico, las frecuencias normales constituyen un espectro discreto y están dadas por la relación:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + 4 \omega_c^2 \sin^2 \left( \frac{\beta_n}{2} \right)$$

con

$$\beta_n = \frac{n\pi}{N+1} \quad \text{para redes con extremos fijos}$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{N} \quad \text{para redes con extremos libres}$$

2. Las relaciones entre amplitudes en el modo normal  $n$ -ésimo toman la forma:

$$a_{j,n} = \sin\left(\frac{jn\pi}{N+1}\right) \quad \text{para redes con extremos fijos}$$

$$a_{j,n} = \cos\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{n\pi}{N}\right) \quad \text{para redes con extremos libres}$$

3. De lo anterior se desprende la existencia de una frecuencia normal mínima y una máxima para cada tipo de condiciones de frontera analizadas:
- a. Para sistemas con *extremos fijos* no existe un modo normal de oscilación con  $n = 0$ , puesto que las amplitudes  $a_{j,n}$  se anulan idénticamente. Así que la frecuencia mínima está dada por:

$$\omega_{\min}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)$$

El máximo de la función  $\omega_n^2$  se obtendría para  $n = N + 1$ . Pero de nuevo en este caso se anulan las amplitudes. Por tanto:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{N\pi}{2(N+1)}\right)$$

Esto significa que para sistemas con extremos fijos el espectro de frecuencias normales se extiende entre  $\omega_1$  y  $\omega_N$ .

- b. Para sistemas con *extremos libres* existe un modo con  $n = 0$  si  $\omega_0^2 \neq 0$ . En este caso:

$$\omega_{\min} = \omega_0 \quad a_{j,0} = 1 \quad \forall j$$

Pero si  $\omega_0 = 0$ , este modo no es oscilatorio sino traslacional y es posible eliminarlo, como se ilustra en un ejercicio al final del capítulo. En este caso la frecuencia mínima es:

$$\omega_{\min}^2 = 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) \quad \omega_0 = 0$$

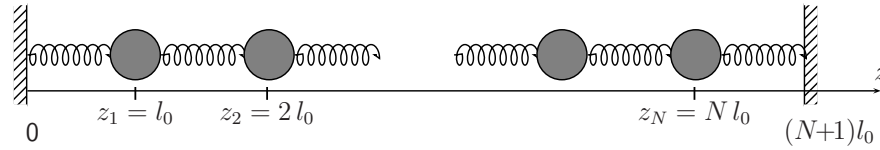
La frecuencia normal máxima se obtiene con  $n = N - 1$  puesto que para  $n = N$  las amplitudes serían idénticamente cero. En general, para sistemas con extremos libres podemos escribir:

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{(N-1)\pi}{2N}\right)$$

Estos resultados muestran que el espectro de frecuencias es discreto y acotado.

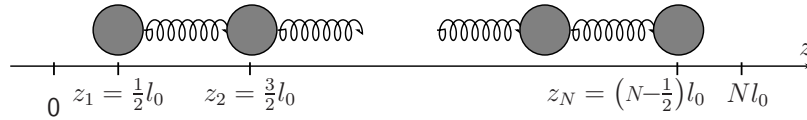
## 5.8. Relaciones de dispersión

Es conveniente asociar a la variable discreta  $j$  una variable discreta espacial  $z_j$  que indique la ubicación del oscilador respectivo dentro de la red. Si la red lineal de osciladores tiene extremos fijos, es natural elegir el origen del eje  $z$  en el extremo izquierdo y llamar  $(N + 1)l_0 \equiv L$ , *longitud total de la red*, siendo  $l_0$  la distancia de equilibrio entre las masas o la longitud de cada uno de los circuitos acoplados (figura 5.6).



**Figura 5.6** Coordenadas de equilibrio en red con extremos fijos.

Si la red lineal tiene extremos libres, es más simple tomar origen de la coordenada  $z$  una distancia  $\frac{l_0}{2}$  a la izquierda de la posición de equilibrio del primer oscilador y considerar terminada la red en el punto situado  $\frac{l_0}{2}$  a la derecha de la posición de equilibrio del  $n$ -ésimo, con lo cual  $L \equiv Nl_0$  (figura 5.7).



**Figura 5.7** Coordenadas de equilibrio en red con extremos libres.

Con esta convención podemos escribir  $\beta_n$  de manera idéntica para sistemas con ambos tipos de condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\beta_n^{\text{EF}} &= \frac{n\pi}{N+1} = \frac{n\pi}{L} l_0 = k_n l_0 \\ \beta_n^{\text{EL}} &= \frac{n\pi}{N} = \frac{n\pi}{L} l_0 = k_n l_0\end{aligned}\tag{5.38}$$

donde hemos definido  $k_0 \equiv \frac{n\pi}{L}$  con la definición convencional de  $L$  para cada caso. Por razones que se verán más adelante,  $k_n$  se denomina *número de onda*, aunque no es un número puro, pues tiene dimensiones de inverso de longitud.

Además, podemos escribir las amplitudes de manera más accesible a la interpretación física:

$$a_{j,n}^{\text{EF}} = \text{sen}(j l_0 k_n) = \text{sen}(k_n z_j) \quad z_j \equiv j l_0 \quad (5.39a)$$

$$a_{j,n}^{\text{EL}} = \cos\left(\left(j - \frac{1}{2}\right) l_0 k_n\right) = \cos(k_n z_j) \quad z_j \equiv \left(j - \frac{1}{2}\right) l_0 \quad (5.39b)$$

Con estas definiciones (5.37a) y (5.37b) toman la forma más simple:

$$\Phi_j^{\text{EF}}(t) = \sum_n \text{sen}(k_n z_j) C_n \cos(\omega_n t + \delta n) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.40a)$$

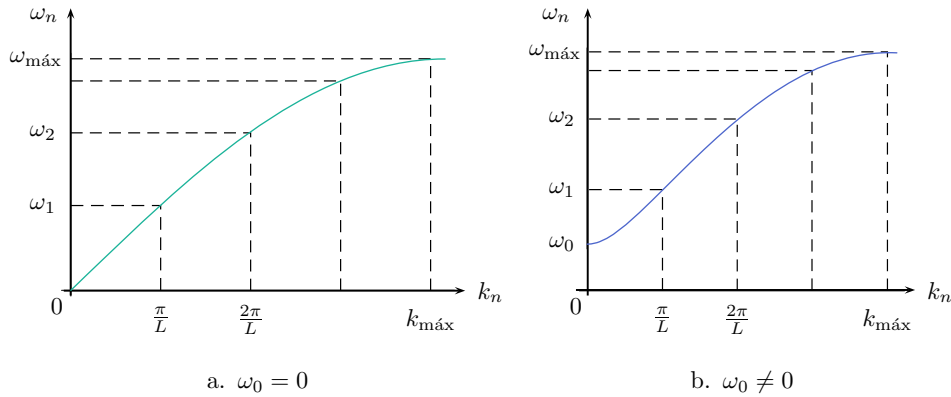
$$\Phi_j^{\text{EL}}(t) = \sum_n \cos(k_n z_j) C_n \cos(\omega_n t + \delta n) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.40b)$$

Esta introducción de una variable espacial discreta permite hacer gráficas de desplazamiento o corriente a partir de las funciones  $\text{sen}(k_n z_j)$  y  $\cos(k_n z_j)$ . En particular permiten reconstruir la forma de la cuerda en cualquier instante, en cualquier modo normal (esto se ilustra en un problema al final del capítulo).

De acuerdo con (5.28), las frecuencias normales pueden expresarse en función del *número de onda* así:

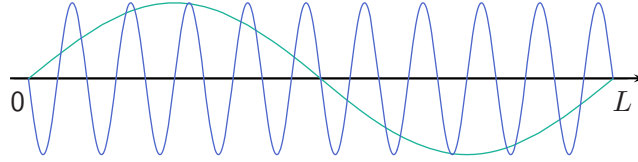
$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \text{sen}^2\left(\frac{l_0 k_n}{2}\right) \quad (5.41)$$

Esta relación entre la frecuencia y el número de onda en general se denomina *relación de dispersión* y puede visualizarse con ayuda de gráficas de dispersión (figura 5.8).



**Figura 5.8** Relaciones de dispersión.

Las ecuaciones (5.38), (5.39a) y (5.39b) parecerían sugerir la existencia de modos para números  $n$  mayores que  $N$ . Pero, de hecho, el sistema no posee más modos normales de oscilación diferentes. En el modo máximo todas las partes oscilan en antifase con sus vecinas –modo *zig-zag*–. Para  $n$  mayor que  $N$ , la gráfica de amplitudes  $a_n(z_j)$  presenta crestas intermedias en puntos donde no hay elementos de la red. Podría decirse que la red no posee elementos suficientes para “dibujar” un modo normal con  $n$  mayor que  $N$ . Si se hace la gráfica de amplitudes para  $n > N$  y se toman en consideración sólo los elementos reales, se verá que este modo repite uno con  $n' < N$ . En la figura 5.9 se ilustra esta aparente duplicación de modos que, según (5.41), tienen idéntica frecuencia normal<sup>1</sup>.



**Figura 5.9** Modos ficticios para  $n > N$ .

En resumen:

En cada modo normal las diferentes partes de la red oscilan de la manera siguiente:

a. Redes con *extremos fijos*:

$$\begin{aligned}\Phi_j^{(n)} &= \sin(k_n z_j) C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \quad L = (N+1)l_0 \\ z_j &= j l_0 \quad j = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{5.42}$$

<sup>1</sup> Véase ejercicio 5.6.



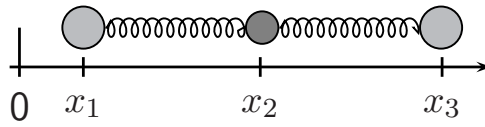
b. Redes con *extremos libres*:

$$\begin{aligned}\Phi_j^{(n)} &= \cos(k_n z_j) C_n \cos(\omega_n t + \delta n) \\ k_n &= \frac{n\pi}{L} \quad L = N l_0 \\ z_j &= \left(j - \frac{1}{2}\right) l_0 \quad j = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{5.43}$$

Observe que en cualquier modo las partes del sistema (masas, corrientes, etc.) oscilan con amplitudes ubicadas en puntos discretos sobre las curvas continuas  $C_n \cos(k_n z)$ ,  $C_n \sin(k_n z)$ , y pasan simultáneamente por sus puntos de equilibrio.

## Ejercicios

- 5.1** Compruebe que los modos normales definidos por (5.32) y (5.36) coinciden con los obtenidos para los sistemas prototipo del capítulo 3.
- 5.2** Escriba las ecuaciones de movimiento y halle las frecuencias normales y las relaciones de amplitud de una red homogénea de tres péndulos acoplados por dos resortes, mediante el método que considere más simple. Identifique la red electromagnética análoga y extienda sus resultados a este sistema. Generalice sus ecuaciones para un número  $N$  arbitrario de péndulos acoplados y analice los modos normales con frecuencias máxima y mínima.
- 5.3** Oscilaciones longitudinales de una molécula de  $\text{CO}_2$



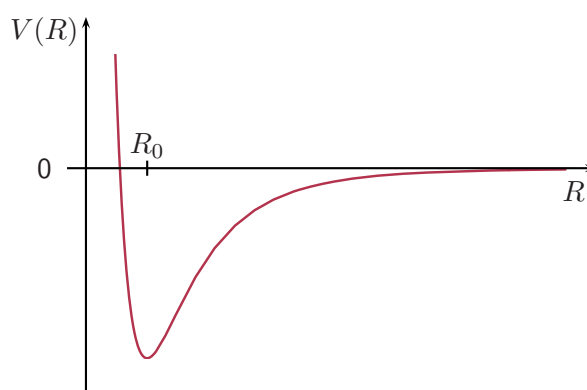
**Figura 5.10** Modelo lineal de  $\text{CO}_2$ .

- a. Mediante el modelo de tres masas acopladas por resortes de constante  $k$ , escriba las ecuaciones de movimiento usando coordenadas  $x_i$  con un origen común 0, como indica la figura 5.10. Redefina

sus variables con corrimientos constantes para obtener ecuaciones homogéneas. A partir de un Ansatz de modo normal, halle las frecuencias normales del sistema y la forma de los correspondientes modos normales. Analice los resultados.

- b. Con base en el teorema sobre pequeñas oscilaciones explique la presencia y el significado físico de un modo cero. Indique la manera de eliminar ese modo no oscilatorio y halle la solución general del sistema de ecuaciones.

**5.4** Aplique el teorema sobre pequeñas oscilaciones a un modelo clásico de molécula diatómica con energía potencial internuclear  $V(R)$ , como la que indica la figura 5.11.



**Figura 5.11** Potencial internuclear de molécula diatómica.

Haga una expansión en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio  $R_0$ .  $R$  es la distancia entre núcleos. Halle la frecuencia natural de este *oscilador* y diga en qué rango de energías es válida la aproximación de pequeñas oscilaciones. Suponga que el centro de masa de la molécula está en reposo.

**5.5** Muestre que en el sistema de dos masas,  $m_1$  y  $m_2$ , acopladas por un resorte de constante  $k$  existe un modo cero –traslacional– e indique cómo puede eliminarlo de las ecuaciones.

- 5.6** Con base en el hecho de que en un modo normal todas las partículas están situadas sobre una curva continua

$$f(z) = \text{sen}(k_n z)$$

con

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

para sistemas con extremos fijos, dibuje la forma de los primeros 5 modos normales de un sistema de 5 masas acopladas por cuerdas con extremos fijos. Dibuje los modos normales con  $n = 6, 7, \dots, 11$ , con sus correspondientes frecuencias normales, y compárelos con los 5 primeros. Usando propiedades generales, sin hacer cálculos explícitos, dibuje los modos con  $n = 1, 3$  y 10 para una cuerda con 10 masas.

- 5.7** Para el sistema de 5 masas acopladas por cuerdas con extremos libres, halle los modos máximo y mínimo con sus frecuencias normales correspondientes, elabore gráficas y analice los resultados.

- 5.8** Sistema con acoplamiento inductivo:

- Escriba las ecuaciones de movimiento de una red de 3 condensadores idénticos acoplados por inductancias  $L_C$ . Halle los modos normales con  $N = 3$  e interprete los resultados.
- Escriba las ecuaciones de movimiento de una red homogénea de  $N$  condensadores acoplados por inductancias. Redúzcalas a una forma genérica introduciendo condiciones de frontera adecuadas. Halle las relaciones de dispersión de este sistema y escriba expresiones para las frecuencias normales mínima y máxima.

- 5.9** a. Exprese la energía potencial de dos masas idénticas acopladas por resortes (con extremos fijos) en la forma:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum V_{ij} x_i x_j$$

con condiciones de frontera:  $x_0 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

Identifique los coeficientes  $V_{ij}$  y compare con la ecuación (3.39) en el caso  $\omega_c = \omega_0$ .

- b. Muestre que la energía potencial de una red de  $N$  masas iguales acopladas por resortes idénticos (con extremos fijos) puede expresarse como:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}) = \frac{k}{2} \sum (x_{j+1} - x_j)^2$$

$$x_0 = 0 = x_{N+1}$$

*Sugerencia:* verifique que la fuerza sobre cualquier masa  $j$ -ésima puede deducirse a partir de esta energía potencial como:

$$m\ddot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$$

de acuerdo con el sistema de ecuaciones (5.2).

- c. Exprese la energía potencial de una red de  $N$  péndulos acoplados por resortes y de  $N$  masas iguales acopladas por cuerdas en forma análoga a la parte b.

## Capítulo 6

# Redes lineales forzadas armónicamente

En este capítulo se analiza la respuesta estacionaria de una red impulsada a la entrada por una fuerza armónica, aplicando el método desarrollado en las secciones 5.4 y 5.5 para sistemas libres no amortiguados.

- En la vecindad de cada una de las frecuencias normales predomina la respuesta absorbente, y las relaciones de amplitud son las mismas del modo normal correspondiente.
- Lejos de las frecuencias de resonancia predomina la respuesta elástica y pueden distinguirse tres rangos:
  - a. Si la frecuencia de la fuente está por debajo o por encima del espectro de frecuencias normales (rangos reactivos inferior y superior), la amplitud de la señal de entrada disminuye a lo largo de la red sin absorción de energía (*atenuación reactiva*).
  - b. Si la frecuencia externa está comprendida entre los límites del espectro de frecuencias normales (rango dispersivo), la amplitud oscila sin atenuarse a lo largo de la red.
- En el comportamiento cualitativamente diferente de las redes en los diferentes rangos de frecuencia se fundamenta su aplicación técnica como filtros de *pasa-bajo*, *pasa-banda* y *pasa-alto*.
- Para una frecuencia externa determinada se definen medios dispersivos y reactivos. Se analiza la respuesta estacionaria de dos redes acopladas que tienen frecuencias de corte inferior por debajo y por encima de la frecuencia externa, respectivamente.

## 6.1. Respuesta estacionaria de una red forzada armónicamente

De acuerdo con los resultados de la sección 5.2, si el sistema se somete a una fuerza armónica podemos separar la solución transitoria (amortiguada) de la respuesta estacionaria (que no depende de condiciones iniciales). A su vez, la respuesta estacionaria, según (5.14), puede separarse en una respuesta elástica (en fase con la fuerza externa) y otra absorbente (con un desfase de  $\pi/2$  respecto a la fuerza).

Si la fuente externa está acoplada a la entrada y el correspondiente término no homogéneo varía como  $\cos(\omega_f t)$ , podemos escribir la respuesta estacionaria en la forma:

$$\Phi_{jp}(t) = A_{jel}(\omega_f) \cos(\omega_f t) + A_{jab}(\omega_f) \sin(\omega_f t) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.1)$$

donde hemos definido amplitudes elásticas y absorbentes en concordancia con la ecuación (5.14).

### 6.1.1. Respuesta resonante

Si la frecuencia de la fuente externa es cercana a alguna de las frecuencias de resonancia del sistema, la respuesta elástica prácticamente puede ignorarse y el sistema oscila con relaciones de amplitud  $\{a_{jn}\}$  idénticas a las del correspondiente modo normal:

$$\Phi_{jp}(t) \approx a_{jn} A_{nab}(\omega_f) \sin(\omega_f t) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.2)$$

Pero la amplitud  $A_{nab}$  está esencialmente determinada por la fuerza externa, de acuerdo con (5.11), no por las condiciones iniciales que suponemos ya borradas con la respuesta transitoria.

Las resonancias se manifiestan como máximos en la curva de absorción de potencia contra frecuencia de la fuerza externa.

### 6.1.2. Respuesta elástica: rasgos generales

Si el amortiguamiento es débil y la frecuencia  $\omega_f$  está lejos de las resonancias, esto es, si  $\omega_f \neq \omega_n$ , predomina la respuesta elástica y la absorbente es prácticamente ignorable. Sin embargo, la respuesta absorbente, aunque pequeña comparada con la elástica, no puede ser estrictamente nula porque para distinguir una respuesta estacionaria de una transitoria se requiere un factor de amortiguamiento  $\Gamma$  diferente de cero.

Como la fuente externa está acoplada a la entrada de la red, podemos dar a todas las ecuaciones una forma genérica absorbiendo el término no homogéneo de la primera ecuación en una condición de frontera oscilante. Si este término varía como  $G_0 \cos(\omega_f t)$ , esta condición de frontera para nuestros sistemas prototipo toma las formas:

$$\Phi_0(t) = \frac{G_0 \cos(\omega_f t)}{\omega_c^2} \quad (6.3a)$$

o bien

$$\Phi_0(t) = \Phi_1(t) + \frac{G_0 \cos(\omega_f t)}{\omega_c^2} \quad (6.3b)$$

Para verificar estas condiciones, desarrolle el ejercicio 6.1.

Al aplicar los métodos de la sección 5.5 podemos utilizar como Ansatz para la respuesta estacionaria

$$\Phi_j(t) = A_j \cos(\omega_f t) \quad j = 0, 1, \dots, N, N+1 \quad (6.4)$$

donde, para simplificar notación, hemos sustituido  $A_{jel}(\omega_f)$  por  $A_j$ .

Los elementos  $j = 0$  y  $j = N+1$  son la “entrada” y la “salida” de la red, cuyos movimientos están especificados en las condiciones de frontera. De acuerdo con las ecuaciones (6.3) y (6.4), la condición de frontera a la entrada implica:

$$A_0 = \frac{G_0}{\omega_c^2} \quad \text{o} \quad A_0 = A_1 + \frac{G_0}{\omega_c^2} \quad (6.5)$$

Para abreviar, en lo que sigue expresaremos todos los resultados en función de  $A_0$ , que puede determinarse al final de acuerdo con (6.5).

Al llevar la solución (6.4) al sistema de ecuaciones (5.22), ignorando en primera aproximación el término de amortiguamiento, ya que en este rango de frecuencias suponemos la respuesta absorbente muy pequeña con respecto a la elástica, obtenemos una ecuación para las amplitudes similar a (5.24), con la frecuencia de la fuente externa  $\omega_f$  en lugar de la frecuencia normal  $\omega_n$ :

$$\frac{A_{j+1} + A_{j-1}}{A_j} = \frac{-\omega_f^2 + \omega_0^2 + 2\omega_c^2}{\omega_c^2} \equiv W_f \quad (6.6)$$

Esta es una ecuación de la forma:

$$\frac{F_{j+1} + F_{j-1}}{F_j} = W_f \quad \text{independiente de } j$$

lo cual nos induce a suponer una solución de tipo exponencial:

$$A_j = B e^{ij\beta_f} + C e^{-ij\beta_f} \quad (6.7)$$

donde  $\beta_f$  depende de  $\omega_f$  y puede ser real, imaginario o, en general, complejo.

Al llevar esta solución a (6.6) resulta:

$$W_f = 2 \cos \beta_f \quad (6.8)$$

Los coeficientes  $B$  y  $C$  se determinan mediante las condiciones de frontera. Si sometemos (6.7) a la condición de frontera en la entrada ( $j = 0$ ) y expresamos el resultado en función de  $A_0$  obtenemos:

$$B + C = A_0 \quad (6.9)$$

En el extremo derecho consideramos dos posibles condiciones de frontera:

a. *Extremo derecho fijo.* Al imponer la condición  $\Phi_{N+1} = 0$  resulta:

$$A_{N+1} = 0 = B e^{i(N+1)\beta_f} + C e^{-i(N+1)\beta_f} \quad (6.10)$$

Al resolver el sistema algebraico (6.9) y (6.10) resulta:

$$B = -\frac{A_0 e^{-i(N+1)\beta_f}}{2i \sin((N+1)\beta_f)} \quad C = \frac{A_0 e^{i(N+1)\beta_f}}{2i \sin((N+1)\beta_f)}$$

Con esto, las amplitudes para sistemas con extremo derecho fijo toman la forma:

$$A_j^{\text{EDF}} = A_0 \frac{\sin((N+1-j)\beta_f)}{\sin((N+1)\beta_f)} \quad (6.11)$$

b. *Extremo derecho libre.* De la condición  $\Phi_{N+1} = \Phi_N$  resulta:

$$B e^{i(N+1)\beta_f} + C e^{-i(N+1)\beta_f} = B e^{iN\beta_f} + C e^{-iN\beta_f} \quad (6.12)$$

Al resolver (6.9) y (6.12) obtenemos:

$$B = \frac{A_0 e^{-i(N+\frac{1}{2})\beta_f}}{2 \cos((N+\frac{1}{2})\beta_f)} \quad C = \frac{A_0 e^{i(N+\frac{1}{2})\beta_f}}{2 \cos((N+\frac{1}{2})\beta_f)}$$



y de aquí, la función de amplitudes para la red con extremo derecho libre:

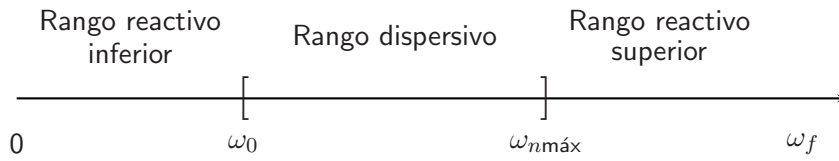
$$A_j^{\text{EDL}} = A_0 \frac{\cos \left( \left( N + \frac{1}{2} - j \right) \beta_f \right)}{\cos \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) \beta_f \right)} \quad (6.13)$$

Las funciones de amplitud (6.11) y (6.13) toman formas cualitativamente diferentes según el carácter (real, imaginario o complejo) del parámetro  $\beta_f$ . De acuerdo con (6.4) y (6.8), este carácter depende del rango en que se encuentre la frecuencia de la fuerza externa. Si para una red determinada consideramos la frecuencia de la fuente externa como un parámetro variable, podemos distinguir tres rangos de frecuencias según el carácter de la respuesta elástica.

*Rango reactivo inferior:* Si  $\omega_f < \omega_0$  (sólo existe para redes con  $\omega_0 \neq 0$ )

*Rango reactivo superior:* Si  $\omega_f > \omega_{n\text{máx}}$

*Rango dispersivo:* Si  $\omega_0 < \omega_f < \omega_{n\text{máx}}$



**Figura 6.1** Rangos de frecuencia de la fuente externa.

## 6.2. Respuesta elástica en el rango dispersivo

De la ecuación (6.6) resulta evidente que  $W_f$  debe ser en todos los casos un número real. Al remplazar (6.8) en (6.6) resulta:

$$2 \cos \beta_f = 2 - \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{\omega_c^2} \quad (6.14)$$

En el rango dispersivo  $\omega_f$  satisface las desigualdades siguientes:

$$\omega_f > \omega_0 \quad \text{y por tanto} \quad \cos \beta_f < 1$$

$$\omega_f^2 < \omega_{n\text{máx}}^2 < \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \quad \text{lo cual implica} \quad \cos \beta_f > -1$$

Ambas desigualdades se cumplen sólo si  $\beta_f$  es real en el rango dispersivo.

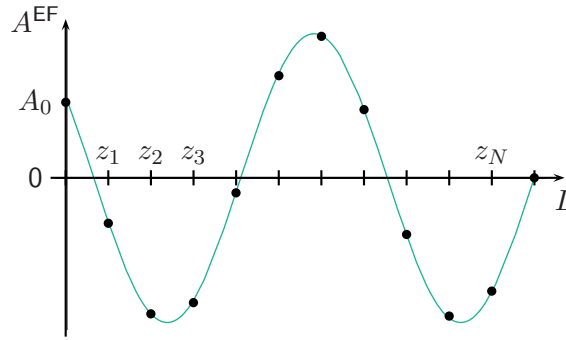
Al introducir explícitamente la longitud  $L$  de la red y la posición de equilibrio del  $j$ -ésimo oscilador, de acuerdo con la convención adoptada en la sección 5.8, y definir:

$$k_f = \frac{\beta_f}{l_0}$$

las funciones de amplitud (6.11) y (6.13) toman las formas siguientes:

a. *Red con extremo derecho fijo:*

$$A_j^{\text{EDF}} = A_0 \frac{\sin((N+1-j)\beta_f)}{\sin((N+1)\beta_f)} = A_0 \frac{\sin(k_f(L-z_j))}{\sin(k_f L)} \quad (6.15)$$

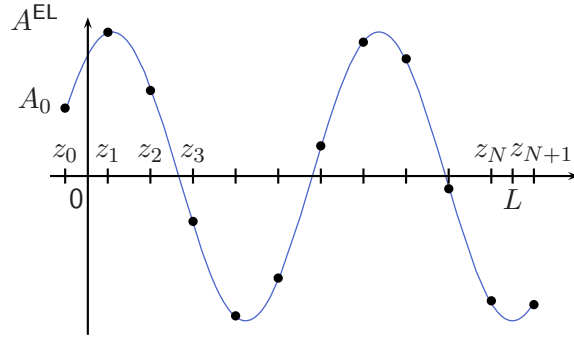


**Figura 6.2** Función de amplitudes para una red con extremo fijo impulsada con una frecuencia en el rango dispersivo.

b. *Red con extremo derecho libre:*

$$A_j^{\text{EDL}} = A_0 \frac{\cos((N+\frac{1}{2}-j)\beta_f)}{\cos((N+\frac{1}{2})\beta_f)} = A_0 \frac{\cos(k_f(L-z_j))}{\cos(k_f(L+\frac{l_0}{2}))} \quad (6.16)$$

Como puede verse, las funciones de amplitud toman en ambos casos valores sobre una curva armónica a lo largo de la red, tal como se ilustra en las figuras 6.2 y 6.3. Se denomina *rango dispersivo* el rango de frecuencias de la fuente externa para el cual las amplitudes presentan este comportamiento oscilatorio.



**Figura 6.3** Función de amplitudes para una red con extremo libre impulsada con una frecuencia en el rango dispersivo.

La relación de dispersión  $\omega_f(k_f)$  para oscilaciones forzadas en el rango dispersivo toma la forma:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2 \left( \frac{k_f l_0}{2} \right) \quad (6.17)$$

Aunque esta relación de dispersión es idéntica en forma a la de los modos normales del sistema libre, en el caso presente la frecuencia  $\omega_f$  no depende de parámetros internos;  $\omega_f$  es un parámetro externo continuo que determina el correspondiente número de onda  $k_f$ .

### 6.3. Respuesta elástica en el rango reactivo inferior

Si el sistema es tal que  $\omega_0 \neq 0$ , y por tanto posee una frecuencia normal mínima independiente de  $N$ , responderá a frecuencias menores que  $\omega_0$  de una manera cualitativamente diferente del caso considerado en la sección anterior. Como veremos en seguida, a lo largo de la red se atenuarán monótonamente las amplitudes de oscilación.

Si  $\omega_f < \omega_0$ , tendremos según la ecuación (6.14):

$$2 \cos \beta_f = 2 + \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{\omega_c^2} \quad (6.18)$$

lo cual implica que  $\cos \beta_f > 1$ .

Esto, a su vez, significa que  $\beta_f$  no puede ser real en este rango. Sin perder generalidad (ya que  $\cos \beta_f$  debe ser real) podemos elegir  $\beta_f$  puramente imaginario:

$$\beta_f = i\rho_f \quad \rho_f \text{ real} \quad (6.19)$$

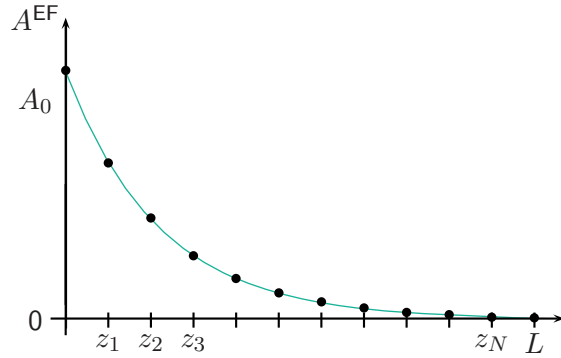
En este caso, al definir:

$$\kappa_f = \frac{\rho_f}{l_0} \quad (6.20)$$

las funciones de amplitud (6.11) y (6.13) toman la forma:

a. *Red con extremo derecho fijo:*

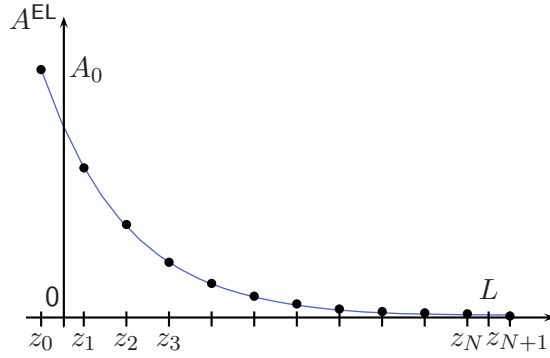
$$A_j^{\text{EDF}} = A_0 \frac{\sinh((N+1-j)\rho_f)}{\sinh((N+1)\rho_f)} = A_0 \frac{\sinh(\kappa_f(L-z_j))}{\sinh(\kappa_f L)} \quad (6.21)$$



**Figura 6.4** Función de amplitudes para una red con extremo fijo impulsada con una frecuencia en el rango reactivo inferior.

b. *Red con extremo derecho libre:*

$$A_j^{\text{EDL}} = A_0 \frac{\cosh\left((N + \frac{1}{2} - j)\rho_f\right)}{\cosh\left((N + \frac{1}{2})\rho_f\right)} = A_0 \frac{\cosh(\kappa_f(L - z_j))}{\cosh(\kappa_f(L + \frac{l_0}{2}))} \quad (6.22)$$



**Figura 6.5** Función de amplitudes para una red con extremo libre impulsada con una frecuencia en el rango reactivo inferior.

Como los argumentos de las funciones hiperbólicas en (6.21) y (6.22) son funciones positivas decrecientes de  $z_j$ , las amplitudes de oscilación decrecen a lo largo de la red a partir de la entrada en la forma descrita en las figuras 6.6 y 6.7.

Si consideramos la oscilación forzada del extremo izquierdo como “señal de entrada”, podemos concluir que la señal se atenúa a lo largo de la red. Aun si el extremo derecho es libre, su amplitud de oscilación es menor que  $\Phi_0$  y tiende a cero cuando  $\kappa_f L \rightarrow \infty$ . En este sentido, decimos que la red se comporta en el rango reactivo inferior como un filtro que atenúa señales con frecuencias menores que una cierta “frecuencia de corte”  $\omega_0$ . En el capítulo siguiente, al describir la propagación de ondas en medios continuos, se precisa el concepto de filtro de frecuencias y se describe el comportamiento de filtros naturales como la ionosfera o los metales.

Es importante anotar que la atenuación de las oscilaciones a lo largo de la red no proviene de pérdidas de energía, ya que sólo se ha tomado en consideración la parte elástica de la respuesta. Denominamos *rango reactivo* el rango de frecuencias de la fuente externa para el cual hay atenuación de la señal de entrada a lo largo de la red sin disipación de energía. Puede decirse que esta atenuación de amplitudes no es resistiva sino “reactiva”.

Al usar en la ecuación (6.18) las identidades:  $1 - \cosh^2 x = -2 \sinh^2 x$  y  $\cos ix = \cosh x$ , la relación de dispersión para oscilaciones forzadas en el rango reactivo inferior toma la forma:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - 4\omega_c^2 \sinh^2 \left( \frac{\kappa_f l_0}{2} \right) \quad (6.23)$$

## 6.4. Respuesta elástica en el rango reactivo superior

Según la ecuación (6.14), si la frecuencia de la fuente es mayor que la frecuencia normal máxima de la red, esto es, si:

$$\omega_f^2 > \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \quad \text{entonces} \quad \cos \beta_f < -1$$

Esto implica que debemos suponer  $\beta_f$  complejo:

$$\beta_f = \delta_f + i \rho_f \quad \delta_f \text{ y } \rho_f \text{ reales}$$

Con este Ansatz tenemos:

$$\cos \beta_f = \cos \delta_f \cosh \rho_f + i \sin \delta_f \sinh \rho_f$$

Si elegimos  $\sin \delta_f = 0$  y  $\cos \delta_f = -1$  tenemos  $\cos \beta_f$  real y al mismo tiempo  $\cos \beta_f < -1$ . Por tanto, podemos escribir:

$$\beta_f = \pi + i \rho_f \quad (6.24)$$

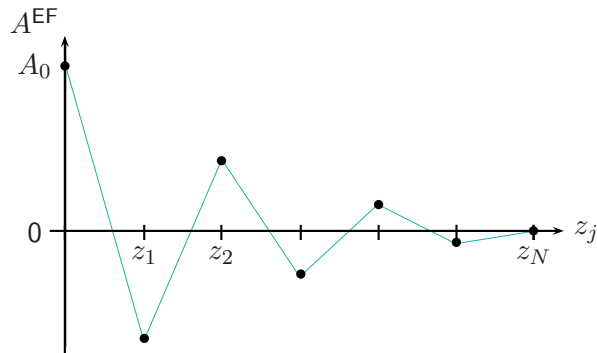
En este caso las funciones de amplitudes (6.11) y (6.13) describen oscilaciones atenuadas en zig-zag a lo largo de la red (figuras 6.6 y 6.7), que recuerdan la forma del modo normal máximo en el sistema libre, salvo por la atenuación (espacial) de la amplitud:

a. *Red con extremo derecho fijo:*

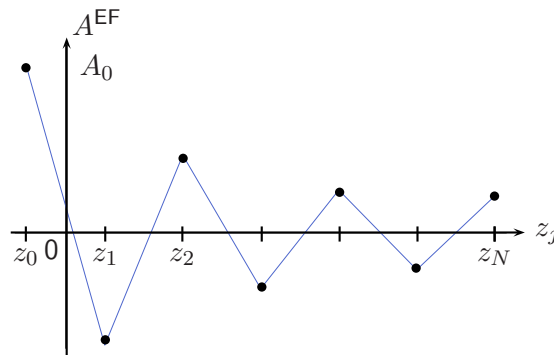
$$\begin{aligned} A_j^{\text{EDF}} &= (-1)^j A_0 \frac{\sinh((N+1-j)\rho_f)}{\sinh((N+1)\rho_f)} \\ &= (-1)^j A_0 \frac{\sinh(\kappa_f(L-z_j))}{\sinh(\kappa_f L)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

b. *Red con extremo derecho libre:*

$$\begin{aligned} A_j^{\text{EDL}} &= (-1)^j A_0 \frac{\sinh\left((N+\frac{1}{2}-j)\rho_f\right)}{\sinh\left((N+\frac{1}{2})\rho_f\right)} \\ &= (-1)^j A_0 \frac{\sinh(\kappa_f(L-z_j))}{\sinh\left(\kappa_f\left(L+\frac{l_0}{2}\right)\right)} \end{aligned} \quad (6.26)$$



**Figura 6.6** Amplitud atenuada en zig-zag para una red con extremo fijo impulsada con una frecuencia en el rango reactivo superior.



**Figura 6.7** Amplitud atenuada en zig-zag para una red con extremo libre impulsada con una frecuencia en el rango reactivo superior.

Al llevar (6.24) a (6.14) y usar la identidad  $1 + \cosh 2x = 2 \cosh^2 x$ , obtenemos la relación de dispersión válida en el rango reactivo superior:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \cosh^2 \left( \frac{\kappa_f l_0}{2} \right) \quad (6.27)$$

## 6.5. Conclusiones generales

La respuesta estacionaria no resonante de una red de osciladores impulsada armónicamente en un extremo está caracterizada por los rasgos siguientes:

- Redes impulsadas armónicamente con una frecuencia comprendida en el rango dispersivo de la respectiva red, y no coincidente con una frecuencia de resonancia  $\omega_n$ , oscilan sincrónicamente en el estado estacionario con la frecuencia de la fuerza externa en forma análoga a una oscilación de modo normal, con la diferencia importante de que las amplitudes no dependen de las condiciones iniciales y los valores de la frecuencia son impuestos desde el exterior del sistema.
- Si la frecuencia de la fuente externa está fuera del rango dispersivo, la amplitud de las oscilaciones decae a lo largo de la red:
  - a. En el *rango reactivo inferior*:  $0 < \frac{A_{j+1}}{A_j} < 1$  para todo  $j$ . Esto significa que todas las partes de la red oscilan en fase como en el primer modo normal pero con una amplitud que decrece a medida que nos alejamos de la entrada.
  - b. En el *rango reactivo superior*: las magnitudes de las amplitudes también decrecen a lo largo de la red pero partes vecinas oscilan en anti-fase, es decir,  $\frac{A_{j+1}}{A_j} < 0$ , como en el modo zig-zag, que es el máximo modo normal.

Esta atenuación espacial reactiva no está asociada a pérdidas de energía.

- En todos los rangos de frecuencia, el parámetro  $\beta_f$  es independiente de las condiciones de frontera y está determinado por  $\omega_f$  mediante la ecuación (6.14):

$$\omega_f^2 = 2\omega_c^2(1 - \cos \beta_f) + \omega_0^2$$

- Sistemas con  $\omega_0 \neq 0$  presentan una frecuencia de corte inferior independiente de  $N$ . Esto significa que una perturbación externa con frecuencia  $\omega_f < \omega_0$  no podrá transmitirse a lo largo de la red sin atenuación. En esta propiedad se fundan los llamados filtros de *pasa-banda*, que sólo dejan pasar sin atenuación las componentes armónicas con frecuencias contenidas en el rango dispersivo.
- Si  $\omega_{n\text{máx}} \rightarrow \infty$ , el sistema sólo atenúa frecuencias menores que  $\omega_0$ ; por ello se comporta como un filtro de *pasa-alto*.

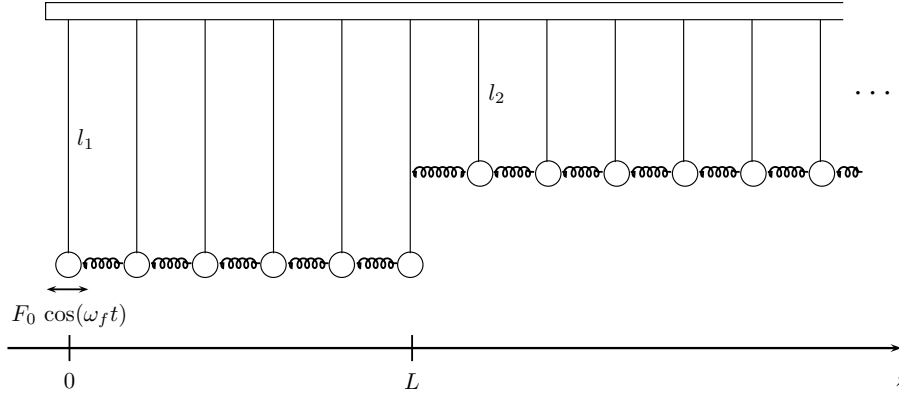


- Sistemas con  $\omega_0 = 0$  y  $\omega_{n\text{máx}}$  finito se comportan como filtros de *pasa-bajo* porque sólo atenúan frecuencias mayores que  $\omega_{n\text{máx}}$ .

## 6.6. Medios reactivos y dispersivos acoplados

Es posible acoplar redes con valores diferentes de la frecuencia de corte inferior. En este caso, para un valor dado de  $\omega_f$ , se dice que un segmento de la red es un medio dispersivo o reactivo, según el carácter de la respuesta estacionaria elástica a esta frecuencia.

Pueden construirse modelos mecánicos simples de redes compuestas por péndulos como los de la figura 6.8.



**Figura 6.8** Red forzada en el rango dispersivo y acoplada a un medio reactivo.

En primer lugar, suponemos que la frecuencia externa  $\omega_f$  está en el rango dispersivo para el primer segmento ( $\omega_f^2 > \omega_{01}^2 = \frac{g}{l_1}$ ) y en el rango reactivo inferior para el segundo ( $\omega_f^2 < \omega_{02}^2 = \frac{g}{l_2}$ ). Esto implica que el primer segmento de la red se comporta como un medio dispersivo y el segundo, como un medio reactivo para esta frecuencia.

Para simplificar los cálculos, suponemos que la red es suficientemente densa a fin de que la gráfica real de amplitudes se aproxime a una curva continua. Esto significa remplazar  $\Phi_j(t) = \Phi(z_j, t)$  por  $\Phi(z, t)$ , donde  $z$  toma valores continuos. La respuesta estacionaria elástica de la red compuesta debe tener la forma:

$$\Phi(z, t) = A(z) \cos(\omega_f t) \quad (0 \leq z < \infty)$$

donde  $\Phi(z, t)$  representa la desviación de un elemento de masa en el tiempo  $t$  con respecto a su posición de equilibrio  $z$ .

El comportamiento de la función de amplitudes es diferente en el medio dispersivo ( $0 \leq z \leq L$ ) y en el medio reactivo ( $L \leq z < \infty$ ). Por ello debemos usar para  $A(z)$  un Ansatz de forma funcional diferente en cada región:

$$\Phi(z, t) = \begin{cases} A_1(z) \cos(\omega_f t) & 0 \leq z \leq L \\ A_2(z) \cos(\omega_f t) & L \leq z < \infty \end{cases} \quad (6.28)$$

- a. En la región dispersiva podemos superponer soluciones de la forma (6.15) y (6.16) con coeficientes ajustables a las condiciones de frontera:

$$A_1(z) = B \sin(k_f (L - z)) + C \cos(k_f (L - z)) \quad 0 \leq z \leq L \quad (6.29)$$

con  $k_f$  determinado por la relación (6.17):

$$\omega_f^2 = \omega_{01}^2 + 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{k_f l_0}{2}\right)$$

- b. En la región reactiva, que suponemos suficientemente larga para hacer tender su longitud a infinito, es conveniente utilizar el Ansatz (6.7), con  $\beta_f = i\kappa_f l_0$ , esto es:

$$A_2(z) = D e^{-\kappa_f z} + E e^{\kappa_f z} \quad L \leq z < \infty \quad (6.30)$$

con  $\kappa_f$  determinada por la relación (6.23):

$$\omega_f^2 = \omega_{02}^2 - 4\omega_c^2 \sinh^2\left(\frac{\kappa_f l_0}{2}\right)$$

Como  $\kappa_f$  es positiva, la exponencial que crece indefinidamente con  $z$  debe ser excluida por razones físicas. Esto implica:  $E = 0$ . Observe que esto equivale a suponer un extremo fijo en  $z \rightarrow \infty$ .

La condición de frontera en  $z = 0$  puede expresarse en función de la amplitud de entrada  $A_1(0) \equiv A_0$ , que se supone conocida en términos de la amplitud de la fuerza externa:

$$A_0 = B \sin(k_f L) + C \cos(k_f L) \quad (6.31)$$

En  $z = L$  la oscilación del extremo derecho del primer segmento actúa como condición de frontera para el segundo. En nuestra aproximación continua esto

implica igualar las funciones de amplitudes y sus primeras derivadas para “pegar” suavemente las soluciones en este punto de discontinuidad del medio.

Al igualar las funciones  $A_1(L) = A_2(L)$ , resulta:

$$C = D e^{-\kappa_f L} \quad (6.32)$$

Al igualar las derivadas  $\frac{\partial A_1}{\partial z}\big|_L = \frac{\partial A_2}{\partial z}\big|_L$ , obtenemos:

$$B = \frac{\kappa_f}{k_f} D e^{-\kappa_f L} \quad (6.33)$$

Si remplazamos (6.32) y (6.33) en (6.31) podemos expresar  $D$  en función de la amplitud de entrada y luego despejar los dos coeficientes restantes:

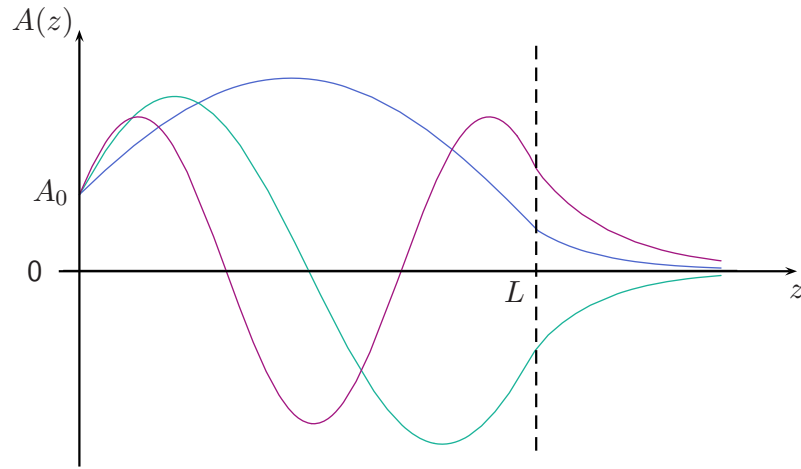
$$\begin{aligned} D &= \frac{e^{\kappa_f L} A_0}{\cos(k_f L) + \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f L)} \\ C &= \frac{A_0}{\cos(k_f L) + \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f L)} \\ B &= \frac{\frac{\kappa_f}{k_f} A_0}{\cos(k_f L) + \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f L)} \end{aligned} \quad (6.34)$$

La función de amplitudes en el primer segmento toma una forma oscilatoria típica del rango dispersivo, en tanto que en el segundo decae exponencialmente:

$$A(z) = \begin{cases} \frac{A_0 \left[ \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f (L - z)) + \cos(k_f (L - z)) \right]}{\cos(k_f L) + \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f L)} & (0 \leq z \leq L) \\ \frac{A_0 e^{\kappa_f (L - z)}}{\cos(k_f L) + \frac{\kappa_f}{k_f} \sin(k_f L)} & (L \leq z < \infty) \end{cases}$$

Esta función se indetermina cuando el denominador de los coeficientes se hace nulo, esto es, cuando:

$$\tan(k_f L) = -\frac{k_f}{\kappa_f} \quad (6.35)$$



**Figura 6.9** Amplitudes de oscilación de la red compuesta para tres valores de  $\omega_f$ .

Como  $k_f$  y  $\kappa_f$  son funciones de  $\omega_f$ , esto implica que para cierto conjunto de frecuencias que satisfacen (6.35) no es válido nuestro Ansatz elástico. Pero esto es precisamente lo que ocurre en las frecuencias de resonancia del sistema<sup>1</sup>.

La figura 6.9 muestra amplitudes de oscilación  $A(z)$  para tres valores de la frecuencia  $\omega_f$  cercanos, pero no idénticos a las tres frecuencias de resonancia.

Estas frecuencias de resonancia pueden determinarse con ayuda de un método gráfico que consiste esencialmente en buscar los puntos de coincidencia de las gráficas de las dos funciones de  $k_f$  que aparecen a izquierda y derecha de la ecuación (6.35). En el ejercicio 7.4 se ilustra la aplicación de este método en el límite de redes continuas. Como resultado se obtiene un conjunto discreto y finito de frecuencias normales, acotado por el valor de la frecuencia de corte del segundo segmento de la red. Estos modos normales de oscilación en regiones dispersivas acotadas por regiones reactivas son un modelo clásico de sistemas cuánticos como los átomos, en estados caracterizados por niveles o valores discretos de energía.

<sup>1</sup> Para confirmar este hecho, desarrolle el ejercicio 6.10.

## Ejercicios

- 6.1** Suponga que una fuerza o fuente armónica actúa a la entrada de los sistemas descritos por las ecuaciones (5.1) y (5.5) y halle la forma explícita de las respectivas condiciones de frontera en el extremo izquierdo.
- 6.2** a. Muestre que un sistema de dos péndulos acoplados por resortes puede actuar como un filtro de *pasa-banda*. Para ello, escriba la respuesta estacionaria elástica y analice el comportamiento de la relación de amplitudes  $\frac{A_1}{A_2}$  para  $\omega_f$  en los rangos reactivos y dispersivo.  
b. Traduzca este resultado al sistema electromagnético análogo.
- 6.3** Compare la amplitud de salida con la amplitud de entrada y muestre que un sistema de dos inductancias ( $L = 10\text{ H}$ ) acopladas por un condensador ( $C_c = 6\text{ }\mu\text{F}$ ) puede comportarse como un filtro eléctrico de *pasa-bajo*.
- 6.4** Con base en los resultados del ejercicio 5.8b, analice una red de condensadores acoplados por inductancias, forzada armónicamente a la entrada. Muestre que puede comportarse como un filtro de frecuencias.
- 6.5** Deduzca la ecuación (6.13) para sistemas con extremo derecho libre impulsados en el rango dispersivo. Haga la gráfica de  $A^{\text{EDL}}$  para  $N = 10$  y  $\frac{N-2}{N} < \frac{\beta_f}{\pi} < \frac{N-1}{N}$ . Compárela con la función de amplitudes para los modos normales más próximos.
- 6.6** Mediante (6.24), deduzca las expresiones (6.25) y (6.26).
- 6.7** Halle la respuesta elástica para las corrientes en el rango dispersivo en una red de  $N$  circuitos  $LC$  acoplados por condensadores  $C_c$ , impulsada a la entrada por una fuente de voltaje  $V(T) = V_0 \cos(\omega_f T)$ . Escriba explícitamente las condiciones de frontera.
- 6.8** Halle la ecuación genérica y las condiciones de frontera de los voltajes  $V_j(t)$  a través de los condensadores de acoplamiento de una red de inductancias con una fuente de voltaje  $V(t) = V_0 \cos(\omega_f t)$  a la entrada. Con un Ansatz adecuado halle la respuesta elástica en el rango reactivo. ¿Qué tipo de filtro es esta red?
- 6.9** Represente gráficamente las relaciones de dispersión para redes acopladas elásticamente y forzadas en los tres rangos de frecuencia, suponiendo  $\omega_0 \neq 0$ .

- 6.10** Con un Ansatz de modo normal, muestre que el sistema de la figura 6.8 puede oscilar libremente –sin fuerza externa– con un conjunto discreto de frecuencias normales que coinciden con las frecuencias de resonancia halladas en la sección 6.6. Suponga que el extremo izquierdo es fijo.

## Capítulo 7

# Límite continuo. Ondas viajeras y evanescentes

Este capítulo cumple un papel metodológico central porque contiene la transición de las oscilaciones a las ondas. En él se muestra que redes de osciladores satisfacen en el límite continuo una ecuación diferencial lineal de segundo orden en el tiempo y en el parámetro espacial  $z$ , llamada genéricamente *ecuación de onda*.

- Redes homogéneas de osciladores acoplados elásticamente dan lugar a dos tipos de ecuación de onda: *la ecuación clásica de onda* (cuando  $\omega = \omega_0$ ) y *la ecuación de Klein-Gordon* (cuando  $\omega \neq \omega_0$ ).
- Se muestra que la ecuación de onda con condiciones de frontera tiene soluciones especiales de la forma de *modos normales*.
- Del análisis comparativo de las relaciones de dispersión (entre frecuencia y número de onda) en redes continuas y discretas resultan dos hechos importantes:
  - a. La *cuantización de frecuencias normales* se mantiene en el límite continuo, pues ella depende del carácter finito de la red y, por tanto, de las condiciones de frontera.
  - b. La *frecuencia de corte superior* desaparece en el límite continuo, pues ella está ligada al carácter discreto de la red con número finito de osciladores acoplados.
- Se examina la respuesta estacionaria de una red continua a una fuente externa armónica y se define una constante de atenuación en el rango reactivo para redes muy largas.

- Se comprueba la existencia de otro tipo de soluciones especiales de la ecuación de onda en forma de *ondas viajeras armónicas* y se demuestra que los modos normales son superposiciones de ondas armónicas que viajan en direcciones opuestas.
- Se analiza la solución de la ecuación de onda en el rango reactivo, solución que asume la forma de ondas exponenciales o evanescentes.
- Se presenta un modelo de ionosfera que satisface la ecuación de *Klein–Gordon* y se discute su comportamiento elástico en los rangos reactivo y dispersivo. Esto permite explicar la reflexión total de ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias de radio AM y la transparencia de la ionosfera para la luz visible y ondas de TV y FM.
- Se aplica un modelo similar a un metal buen conductor para explicar su alta reflectividad en el rango óptico y su transparencia en el ultravioleta.
- Se introducen efectos disipativos en la red continua, se analiza la solución de ondas fuertemente amortiguadas en una cuerda y el fenómeno de *skin–depth* o profundidad de penetración de ondas en conductores a frecuencias por debajo del rango óptico.

## 7.1. Ecuación de onda clásica y de Klein-Gordon

Para obtener el límite continuo de las redes prototipo que han sido examinadas en capítulos anteriores, debemos suponer que el número de osciladores acoplados tiende a infinito y su separación  $l_0$  tiende a cero, en tanto que la longitud de la red permanece constante. Para mantener finitas la inercia por unidad de longitud ( $\frac{m}{l_0}, \frac{L}{l_0}$ ) y los acoplamientos elásticos ( $\frac{k^{-1}}{l_0}, \frac{C}{l_0}$ ), debemos suponer que los parámetros  $m, L, k^{-1}$  y  $C$  de los osciladores individuales tienden a cero.

El parámetro  $z_j$ , que marca y ordena espacialmente los elementos de la red, se convierte en la variable continua  $z$ . La variable de oscilación  $\Phi_j(t)$  (o desplazamiento genérico respecto al equilibrio) se convierte en una función de dos variables continuas  $\Phi(z, t)$ .



El paso a las redes continuas se resume en los límites siguientes:

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty & l_0 &\rightarrow 0 & Nl_0 &= \text{cte} \\ \{m, L, k^{-1}, C\} &\rightarrow 0 & \left\{ \frac{m}{l_0}, \frac{L}{l_0}, \frac{k^{-1}}{l_0}, \frac{C}{l_0} \right\} &\rightarrow \text{ctes finitas} \\ z_j &\rightarrow z, & \Phi_j(t) &\rightarrow \Phi(z, t) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (5.22) para una red homogénea no forzada y no amortiguada puede reescribirse así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t) = -\omega_0^2 \Phi(z, t) + \omega_c^2 \left[ \Phi(z + \Delta z, t) - \Phi(z, t) \right] \\ - \omega_c^2 \left[ \Phi(z, t) - \Phi(z - \Delta z, t) \right] \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde hemos usado la notación  $l_0 = \Delta z$ .

Para obtener coeficientes finitos al tomar el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , multiplicamos y dividimos los dos últimos términos del lado derecho por  $\Delta z^2$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t) = -\omega_0^2 \Phi(z, t) + \omega_c^2 \frac{\left[ \Phi(z + \Delta z, t) - \Phi(z, t) \right] - \left[ \Phi(z, t) - \Phi(z - \Delta z, t) \right]}{\frac{\Delta z}{\Delta z}} \Delta z^2$$

La cantidad  $\omega_c \Delta z$ , que tiene dimensiones de velocidad, tiende a un límite finito cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ . Al definir:

$$u \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \omega_c \Delta z \quad (7.2)$$

y tomar el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , el sistema original de  $N$  ecuaciones ordinarias acopladas adquiere la forma de una única ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t) = -\omega_0^2 \Phi(z, t) + u^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) \quad (0 \leq z \leq L) \quad (7.3)$$

La ecuación (7.3) es una ecuación diferencial parcial, lineal, homogénea y de segundo orden en  $z$  y  $t$ .

Si  $\omega_0 = 0$ , la ecuación se denomina *ecuación clásica de onda* sin fuentes.

Si  $\omega_0 \neq 0$ , la ecuación (7.3) se denomina de *Klein–Gordon*<sup>1</sup>.

El resultado obtenido es de gran interés teórico:

*En el límite continuo, un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se ha sintetizado en una ecuación diferencial parcial que se identifica como ecuación de onda.*

## 7.2. Condiciones de frontera y modos normales

Para determinar completamente la solución de una ecuación diferencial parcial se requiere la especificación de condiciones de frontera (en este caso, condiciones en los extremos de la red) y condiciones iniciales ( $\Phi(z, 0)$  y  $\dot{\Phi}(z, 0)$  para todo  $z$  sobre la red).

Veamos qué forma toman las condiciones de frontera en los sistemas considerados en capítulos anteriores en este límite continuo.

- a. Para redes con extremos fijos, a partir de la ecuación (5.29), es obvio que

$$\Phi(0, t) = 0 \quad \Phi(L, t) = 0 \quad (7.4)$$

- b. Para redes con extremos libres, según la ecuación (5.33), debe cumplirse:

$$\Phi_0(t) = \Phi_1(t) \quad \Phi_{N+1}(t) = \Phi_N(t)$$

Si recordamos que para redes con extremos libres  $z_j = (j - \frac{1}{2})l_0$ , podemos reescribir estas condiciones así:

$$\Phi\left(-\frac{l_0}{2}, t\right) = \Phi\left(\frac{l_0}{2}, t\right) \quad \Phi\left(L + \frac{l_0}{2}, t\right) = \Phi\left(L - \frac{l_0}{2}, t\right)$$

Para los puntos extremos  $z_E = \{0, L\}$  estas condiciones toman la forma genérica:

$$\Phi\left(z_E + \frac{l_0}{2}, t\right) - \Phi\left(z_E - \frac{l_0}{2}, t\right) = 0$$

<sup>1</sup> En realidad esta ecuación fue hallada por E. Schrödinger, usando la correspondencia entre operadores y magnitudes clásicas sugerida en el ejercicio 7.3. Pero, al no obtener correctamente los estados estacionarios del átomo de hidrógeno, la sustituyó por la ecuación no relativista que lleva su nombre. Más tarde O. Klein y W. Gordon (entre otros) la redescubrieron y le encontraron sentido físico dentro de los marcos de la mecánica cuántica relativista.

Al dividir por  $l_0$  y tomar el límite  $l_0 \rightarrow 0$ , estas condiciones de frontera toman la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, t) = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } z = L \quad (7.5)$$

En síntesis, la función de onda  $\Phi(z, t)$  presenta nodos (ceros) en las fronteras fijas y máximos o mínimos en las fronteras libres.

Con estas condiciones de frontera podemos buscar soluciones especiales de la ecuación de onda que tengan las características definitorias de un modo normal, a saber: todas las partes del sistema oscilan con idéntica frecuencia normal, igual constante de fase (por tanto pasan por el estado de equilibrio al mismo tiempo) y con amplitudes (en general diferentes) que guardan entre sí relaciones constantes características del modo normal.

Al suponer soluciones especiales de la forma:

$$\Phi^{(n)}(z, t) = a_n(z) C_n \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (7.6)$$

y llevarlas a la ecuación de onda (7.3), resulta:

$$-\omega_n^2 a_n(z) = -\omega_0^2 a_n(z) + u^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} a_n(z)$$

esto es:

$$a_n''(z) = -a_n(z) \frac{\omega_n^2 - \omega_0^2}{u^2} \quad (7.7)$$

Para obtener soluciones no triviales que satisfagan las condiciones de frontera en redes con extremos fijos o libres debemos suponer que  $\omega_n > \omega_0$ . La solución general de (7.7) puede escribirse así:

$$a_n(z) = A \cos(k_n z) + B \sin(k_n z) \quad (7.8)$$

con:

$$k_n^2 = \frac{\omega_n^2 - \omega_0^2}{u^2} \quad (7.9)$$

a. Para extremos fijos:

$$a_n(z) = 0, \quad \text{entonces} \quad A = 0$$

$$a_n(L) = 0, \quad \text{entonces} \quad \sin(k_n L) = 0 \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Phi^{(n)}(z, t) = C_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.10)$$

b. Para *extremos libres*:

$$\begin{aligned} a'_n(z) = 0 & \text{ entonces } B = 0 \\ a'_n(L) = 0 & \text{ entonces } \operatorname{sen}(k_n L) = 0 \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \\ \Phi^{(n)}(z, t) &= C_n \cos(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (7.11)$$

La constante arbitraria que no quedó determinada por las condiciones de frontera se absorbió en  $C_n$ . Valores negativos de  $n$  no conducen a nuevas soluciones.

Observe que el modo  $n = 0$  sólo se presenta en sistemas con extremos libres que satisfacen la ecuación de *Klein–Gordon* (como una red de péndulos acoplados o de circuitos *LC* acoplados por condensadores). En este modo cero todas las partes del sistema oscilan con idéntica amplitud  $C_0$ .

El movimiento libre más general de una red unidimensional que satisface la ecuación de onda (7.3), con condiciones de frontera, puede ser descrito por una superposición de modos normales de oscilación de la forma:

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n z + \alpha_n) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (7.12)$$

donde la constante  $\alpha_n$  se determina por condiciones de frontera y las constantes  $C_n$  y  $\delta_n$  dependen de las condiciones iniciales.

De la solución general para redes libres y finitas en su forma (7.12) se desprende que las condiciones iniciales  $\Phi(z, 0)$  y  $\dot{\Phi}(z, 0)$  pueden expresarse como un conjunto infinito pero contable de constantes arbitrarias  $\{C_n, \delta_n\}$ .

### 7.3. Análisis comparativo de la relación de dispersión

Al remplazar los valores permitidos de  $k_n$  en la ecuación (7.9) resulta la siguiente relación entre frecuencia normal y número de onda:

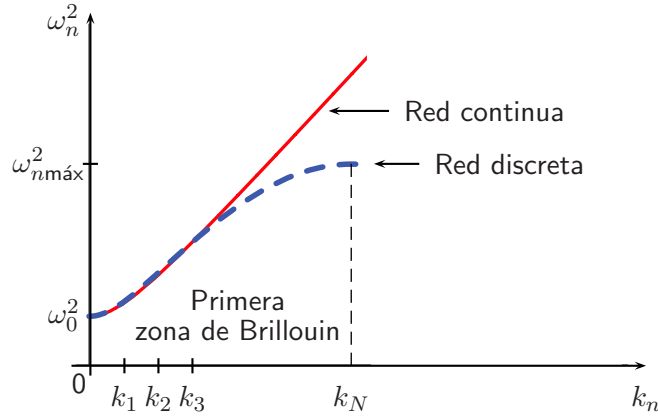
$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + u^2 k_n^2 = \omega_0^2 + u^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (7.13)$$

Este es un resultado de carácter general: las frecuencias normales, con las cuales el sistema puede oscilar libre y armónicamente como un todo, constituyen un conjunto discreto, sin importar si el sistema es continuo o discreto.

Por otra parte, el espectro de frecuencias no tiene cota superior, lo cual implica que en un sistema continuo no existe frecuencia de corte superior cuando el sistema es forzado armónicamente.

La relación de dispersión (7.13) puede obtenerse directamente tomando el límite  $l_0 \rightarrow 0$  en la ecuación (5.41), válida para redes discretas. En efecto:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + 4\omega_c^2 \sin^2\left(\frac{l_0 k_n}{2}\right) \rightarrow \omega_0^2 + \omega_c^2 (k_n l_0)^2 = \omega_0^2 + u^2 k_n^2$$



**Figura 7.1** Relaciones de dispersión para redes discretas y continuas.

Las dos gráficas (figura 7.1) no difieren mucho para frecuencias bajas. Y esto es natural; como el número de onda  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  es pequeño, la aproximación  $\sin \alpha \approx \alpha$  funciona bien, aun si  $l_0$  no tiende a cero. Pero para frecuencias  $\omega_n$  grandes, es decir, cercanas a  $\omega_{\text{máx}}$ , empieza a manifestarse el carácter corpuscular o discreto del sistema. Esta frecuencia normal máxima actúa como frecuencia de corte superior, típica de los sistemas discretos, e inexistente en los estrictamente continuos. Cuando, en 1881, Lord Kelvin intentaba explicar la dispersión de luz por materia con ayuda de una red atómica lineal, encontró y discutió la significación de este hecho. Más tarde, en 1912, Max Born lo redescubrió cuando estudiaba la propagación de ondas en los cristales.

De acuerdo con el análisis realizado en el capítulo 5, es importante tener en cuenta que, aun si se utiliza una aproximación continua para un sistema realmente discreto como un sólido cristalino, no tiene sentido físico usar valores de número de onda mayores que el correspondiente al modo máximo, que es la frontera de la llamada *primera zona de Brillouin*, como se ilustra en la figura 7.1.

## 7.4. Red continua forzada armónicamente en un extremo

### 7.4.1. Solución estacionaria no resonante

Suponemos una fuerza externa de la forma  $F_0 \cos(\omega_f t)$  acoplada a la entrada de la red. Si  $\omega_f$  no coincide con una de las frecuencias de resonancia  $\omega_n$ , podemos aproximar la respuesta estacionaria por la respuesta elástica. Naturalmente, suponemos que hay algún tipo de amortiguamiento que nos permite distinguir entre respuesta estacionaria y transitoria. En la última sección de este capítulo ilustramos la incorporación de efectos disipativos en la ecuación de onda.

El carácter forzado de la red se manifiesta como condición de frontera en  $z = 0$ . El extremo  $z = L$  (salida) puede ser fijo o libre. Basta, por tanto, resolver la ecuación de onda sin fuente con condición de frontera oscilante en la entrada.

La solución estacionaria no resonante, en fase con la fuerza externa, puede reescribirse así:

$$\Phi(z, t) = A_{el}(z) \cos(\omega_f t) \quad (7.14)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación de onda (7.3) resulta:

$$-\omega_f^2 \Phi(z, t) = -\omega_0^2 \Phi(z, t) + u^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) \quad (0 \leq z \leq L)$$

Entonces:

$$A_{el}''(z) = -A_{el}(z) \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{u^2} \quad (7.15)$$

llamando

$$k_f^2 \equiv \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{u^2} \quad (7.16)$$

podemos reescribir la solución general de (7.15) en la forma:

$$A_{el}(z) = B e^{ik_f z} + C e^{-ik_f z} \quad (7.17)$$

### 7.4.2. Respuesta en el rango dispersivo de frecuencias

Una red continua del tipo de la cuerda vibrante o la red de inductancias acopladas por condensadores no tiene rango reactivo inferior ya que  $\omega_0 = 0$ . En este

caso,  $k_f$  es real para cualquier valor de  $\omega_f$ . Para sistemas con  $\omega_0 \neq 0$ , análogos a la red de péndulos acoplados, los resultados de esta sección son válidos para  $\omega_f > \omega_0$ .

Al aplicar a (7.17) la condición de frontera  $\Phi(0, t) = A_0 \cos(\omega_f t)$  resulta:

$$A_{el}(0) = A_0 = B + C$$

Para red con extremo derecho fijo:

$$B e^{ik_f L} + C e^{-ik_f L} = 0$$

Para red con extremo derecho libre:

$$\left. \frac{d}{dz} (B e^{ik_f z} + C e^{-ik_f z}) \right|_{z=L} = 0$$

Las soluciones respectivas toman la forma:

*Extremo derecho fijo:*

$$A_{el}(z) = A_0 \frac{\sin k_f (L - z)}{\sin k_f L} \quad (7.18)$$

*Extremo derecho libre:*

$$A_{el}(z) = A_0 \frac{\cos k_f (L - z)}{\cos k_f L} \quad (7.19)$$

Al comparar con (6.15) y (6.16) puede verse que estas funciones de amplitud son el límite continuo de las obtenidas para la red discreta forzada en el rango dispersivo.

### 7.4.3. Respuesta en el rango reactivo inferior

En sistemas continuos con  $\omega_0 \neq 0$  es posible que la frecuencia de la fuente externa sea menor que esta frecuencia normal mínima. En tal caso un Ansatz como (7.14) nos conduce a una ecuación de la función de amplitud idéntica a (7.15), cuya solución general está dada por (7.17). Pero ahora  $k_f^2 \equiv \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{u^2}$  es

menor que cero y, por tanto,  $k_f$  es un número imaginario que podemos escribir así:

$$k_f = i\kappa \quad \text{con} \quad \underbrace{\kappa = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_f^2}}{u}}_{\text{real positivo}} \quad (7.20)$$

La solución general de la amplitud toma entonces la forma:

$$A_{el}(z) = B e^{-\kappa z} + C e^{\kappa z}$$

Al aplicar las condiciones de frontera para sistemas con extremo derecho libre:

$$\Phi(0, t) = A_0 \cos(\omega_f t) \quad \left. \frac{d}{dz} \Phi(z, t) \right|_{z=L} = 0$$

resulta:

$$A_{el}(z) = A_0 \frac{\left( e^{\kappa(L-z)} + e^{-\kappa(L-z)} \right)}{2 \cosh \kappa L} = A_0 \frac{\cosh \kappa(L-z)}{2 \cosh \kappa L} \quad (7.21)$$

Así, a partir de la ecuación de onda con condiciones de frontera hemos llegado a una solución, representada con trazo continuo en la figura 6.7, que es el límite continuo de la solución discreta (6.22).

Podemos analizar la respuesta reactiva de una red muy larga reescribiendo la función de amplitud para red con un extremo libre en la forma:

$$A_{el}(z) = A_0 e^{\kappa L} \frac{\left( e^{-\kappa z} + e^{\kappa z} e^{-2\kappa L} \right)}{2 \cosh \kappa L}$$

Al tomar formalmente el límite  $L \rightarrow \infty$ ,  $e^{-\kappa L} \rightarrow 0$ , resulta:

$$A_{el} \rightarrow A_0 e^{-\kappa z} \quad (L \rightarrow \infty) \quad (7.22)$$

Esto significa que la amplitud de las oscilaciones decae exponencialmente a lo largo de la red. La constante de atenuación se define a partir de (7.22), así:

$$\kappa \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{A_{el}(z)} \frac{d}{dz} A_{el}(z) \right] \quad (7.23)$$

A una distancia de la entrada igual a  $\frac{1}{\kappa}$  la amplitud de las oscilaciones decae a  $\frac{1}{e}$  de su valor en  $z = 0$ . Por esta razón la constante  $\delta \equiv \kappa^{-1}$  se denomina *longitud de atenuación*.



## 7.5. Ondas armónicas viajeras

En secciones precedentes hemos analizado los modos normales de redes libres como soluciones especiales de la ecuación de onda cuya característica esencial es que todos los puntos de la red oscilan en fase con amplitudes en general diferentes. Estas soluciones especiales tienen la forma genérica:

$$\Phi^{(n)}(z, t) = C_n \cos(k_n z + \alpha_n) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (7.24)$$

donde la constante  $\alpha_n$  se determina por condiciones de frontera.

Pero existe otro conjunto de soluciones de la ecuación de onda que representan ondas armónicas viajeras de la forma:

$$\Phi(z, t) = A \cos(\omega t \pm k z) \quad (7.25)$$

Al sustituir (7.25) en la ecuación de onda (7.3) puede verificarse que  $\omega$  satisface la relación de dispersión:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + u^2 k^2 \quad (7.26)$$

¿Qué representa físicamente una solución de este tipo?

Analíticamente podemos encontrar la justificación del nombre de ondas viajeras para estas soluciones especiales de la ecuación de onda, comparando el valor de la “perturbación”  $\Phi$  en el instante  $t$  en dos puntos vecinos:

$$\Phi(z, t) = A \cos(\omega t - k z) = A \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)\right)$$

(donde hemos definido  $v \equiv \frac{\omega}{k}$ )

$$\Phi(z + \Delta z, t) = A \cos\left(\omega \left(t - \frac{\Delta z}{v}\right) - \frac{z}{v}\right) = \Phi\left(z, \left(t - \frac{\Delta z}{v}\right)\right)$$

Esto significa que el valor de  $\Phi$  en la posición  $(z + \Delta z)$  en el tiempo  $t$  es el mismo que existía en el punto  $z$  en el tiempo anterior  $\left(t - \frac{\Delta z}{v}\right)$ . Tiene sentido decir entonces que la perturbación se propagó una distancia  $\Delta z$ , a lo largo de la dirección positiva  $\hat{z}$ , con velocidad  $v$ . Un argumento similar permite mostrar que la solución  $A \cos(\omega t + k z)$  describe una perturbación de amplitud  $A$  que se propaga en la dirección  $-\hat{z}$ .

Por tal razón, estas soluciones especiales con frecuencia bien definida se denominan *ondas armónicas viajeras*. Su velocidad de propagación  $v = \frac{\omega}{k}$  se denomina *velocidad de fase*. La longitud  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , que es la longitud de una oscilación espacial completa, se llama *longitud de onda*. Observe que cuando  $z$  aumenta en  $\lambda$ , la fase o argumento de la función coseno cambia por  $2\pi$ .

Físicamente la existencia de estas soluciones significa que la red puede propagar ondas armónicas con frecuencia  $\omega > \omega_0$  y velocidad de fase:

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu \quad \text{donde} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Otra manera de ver la propagación de ondas armónicas se obtiene reescribiéndolas en la forma:

$$A \cos(kz \pm \omega t) = A \cos(k(z \pm vt))$$

Así se pone de manifiesto que una onda armónica tiene la forma funcional  $f(z \pm vt)$ , que describe en general una configuración  $f(z)$  (en  $t = 0$ ) que viaja hacia la derecha o hacia la izquierda con velocidad  $v$ . Esto puede visualizarse haciendo gráficas de  $f(z, t)$  contra  $z$  para distintos valores de  $t$ , lo cual equivale a tomar instantáneas de la configuración de la onda en distintos instantes, como se ilustra en el apéndice C.

Para las ondas clásicas, la velocidad de fase es una constante independiente de la frecuencia y dependiente solamente de las propiedades del medio:

$$v = \frac{\omega}{k} = u$$

Por esta razón, la solución general de la ecuación de onda clásica puede escribirse como superposición de funciones arbitrarias  $f(z - vt)$  y  $g(z + vt)$  que representan paquetes de ondas que se propagan sin deformarse puesto que todas las componentes armónicas viajan con idénticas velocidades de fase.

Por el contrario, para las ondas de Klein-Gordon la velocidad de fase depende de  $k$  y, por tanto, de  $\omega$ :

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{k^2} + u^2}$$

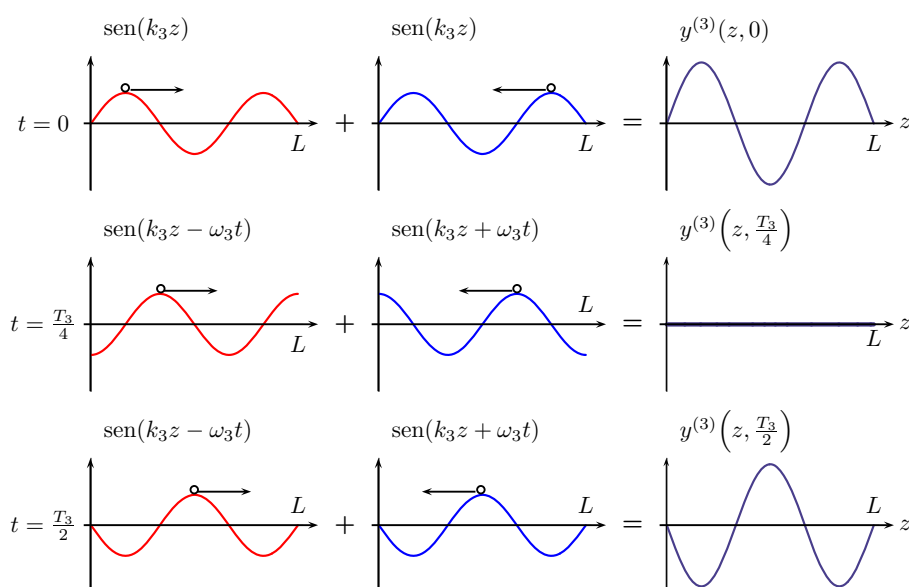
Esto implica que un paquete o superposición de ondas de Klein-Gordon con diferentes frecuencias, propagándose en la dirección  $z$ , cambia de forma en el transcurso del tiempo (puesto que cada componente viaja con su propia velocidad de fase) y no puede, por tanto, expresarse como  $f(z - vt)$ . Este es el llamado fenómeno de *dispersión* que se analizará en el capítulo siguiente.

Mostraremos ahora que los modos normales de oscilación de redes libres pueden expresarse como superposición de ondas armónicas viajeras.

Para abreviar notación elegimos  $\alpha_n = 0$ ,  $\delta_n = 0$  en (7.24). Usando la identidad trigonométrica  $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$  podemos escribir:

$$\begin{aligned}\Phi^{(n)}(z, t) &= C_n \cos(k_n z) \cos(\omega_n t) \\ &= \frac{C_n}{2} \cos(\omega_n t - k_n z) + \frac{C_n}{2} \cos(\omega_n t + k_n z) \quad (7.27)\end{aligned}$$

Gráficas de la configuración de una cuerda con extremos fijos oscilando en el tercer modo normal, en diferentes instantes separados por un cuarto de período, comparadas con las correspondientes configuraciones de ondas armónicas viajeras, permiten visualizar las diferencias entre modos normales y ondas viajeras (figura 7.2).



**Figura 7.2** Onda viajera a la derecha + onda viajera a la izquierda = onda estacionaria (modo normal).

Observe que mientras en un modo normal todos los puntos de la red oscilan con idéntica constante de fase (pasando por el estado de equilibrio simultáneamente), en una onda armónica viajera las diferencias de fase dependen de la ubicación  $z$ . En una onda armónica viajera todos los puntos oscilan con idéntica amplitud, en tanto que en un modo normal la amplitud varía en general con  $z$  y existen puntos nodales donde la amplitud es cero en todo instante  $t$ .

En síntesis: *en un modo normal todos los puntos vibran con igual constante de fase y con diferentes amplitudes (positivas y negativas), mientras que en una onda armónica viajera los puntos vibran con idéntica amplitud y diferentes fases.*

En los modos normales no tiene sentido hablar de velocidad de fase porque no hay propagación. Sin embargo, por tratarse de soluciones de la ecuación de onda y porque pueden expresarse como superposición de ondas armónicas que se propagan en sentidos opuestos, se les denomina *ondas estacionarias*. Si consideramos cada modo normal como el resultado de una única onda armónica que viaja reflejándose infinitas veces en los dos extremos de la red, podemos comprender por qué sólo ondas viajeras con determinadas frecuencias  $\omega_n$  y sus correspondientes longitudes de onda  $\lambda_n$  pueden originar un patrón estacionario, es decir, una oscilación sincronizada de toda la red con amplitudes  $A_n(z)$  independientes del tiempo. De la relación  $k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$  se desprende que la longitud  $L$  debe ser múltiplo de  $\frac{\lambda_n}{2}$  para redes con *ambos* extremos fijos o libres.

## 7.6. Ondas exponenciales o evanescentes

Después del análisis anterior surge de manera natural la pregunta: ¿Qué ocurre si hacemos oscilar un extremo de la red con una frecuencia en el rango reactivo? O más precisamente, ¿pueden propagarse en una red ondas armónicas con frecuencia menor que la frecuencia de corte  $\omega_0$ ?

La respuesta es negativa, porque en este caso el número de onda es imaginario ( $k = i\kappa$ ) y las soluciones toman una forma que no describe una propagación a lo largo de la red.

Para demostrarlo basta ensayar un Ansatz formalmente idéntico a una solución de ondas viajeras armónicas de la forma:

$$\Phi(z, t) = A_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (7.28)$$

donde al final tomamos la parte real y por simplicidad hemos supuesto la constante de fase nula.

Al sustituir esta función en la ecuación de onda (7.3) obtenemos una relación de dispersión de forma idéntica a la que rige en el rango dispersivo:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + u^2 k^2$$

pero, como  $\omega$  es menor que  $\omega_0$ ,  $k$  debe ser un imaginario:

$$k = i\kappa = \pm i \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{u} \quad (7.29)$$

Esto implica:

$$\Phi(z, t) = A_0 e^{\pm \kappa z} \cos(\omega t) \quad (7.30)$$

¿Qué significado puede atribuirse a estas soluciones?

Por razones físicas, no es admisible que una amplitud de oscilación (que está directamente relacionada con la energía) crezca de manera indefinida. Una función de la forma  $\Phi(z, t) = A_0 e^{-\kappa z} \cos(\omega t)$  puede describir una oscilación sincrónica de una red semiinfinita ( $0 \leq z < \infty$ ) excitada en  $z = 0$  por una fuerza armónica de frecuencia  $\omega < \omega_0$ . La amplitud de la oscilación decae a lo largo de la red con constante de atenuación  $\kappa$ . De manera similar,  $\Phi(z, t) = A_0 e^{\kappa z} \cos(\omega t)$  puede describir una red semiinfinita ( $-\infty < z \leq 0$ ) excitada en el rango reactivo en  $z = 0$ .

Esto implica que no hay real propagación de ondas en la red impulsada con frecuencias en el rango reactivo. Una onda viajera que incide en un extremo de la red es totalmente reflejada. La red se comporta como un filtro de pasa-alto.

Estas soluciones exponenciales dan lugar a dos fenómenos de gran importancia en óptica y mecánica cuántica: a) *Penetración de barrera o efecto túnel*; b) *Estados estacionarios con espectro discreto en sistemas con fronteras infinitas*<sup>2</sup>.

## 7.7. Ondas electromagnéticas en la ionosfera

La ionosfera es una parte de la atmósfera que se extiende desde una altura aproximada de 55 km sobre la superficie terrestre hasta las capas más altas (aproximadamente a 400 km de altura) donde la concentración de aire deja de ser apreciable.

Aunque la ionosfera en conjunto es un gas neutro, su característica esencial es la alta concentración de iones y electrones libres, producidos principalmente por la radiación ultravioleta del sol que ioniza los átomos y las moléculas del aire (como  $N_2$ ,  $O_2$  y  $NO$ ). Esto hace que la concentración de iones y electrones alcance su máximo durante el día y se reduzca fuertemente durante la noche debido a la recombinación de cargas. Tales procesos de absorción de radiación ultravioleta hacen de la ionosfera una cubierta protectora sin la cual no habría sido posible la vida sobre la superficie terrestre.

En la ionosfera se distinguen varias capas ( $D$ ,  $E$ ,  $F_1$  y  $F_2$ ) caracterizadas por diferentes concentraciones de electrones libres. En una descripción precisa

<sup>2</sup> En los ejercicios 7.4 y 7.5 se proponen modelos mecánicos de estos procesos.

de la ionosfera no puede hacerse abstracción del campo magnético terrestre que confina las partículas cargadas imprimiéndoles un movimiento de rotación, con la llamada *frecuencia de ciclotrón*, alrededor de la Tierra.

Sin embargo, un tratamiento aproximado, con ayuda de un modelo de plasma neutro sin campo magnético, nos permite comprender por qué la ionosfera actúa como un espejo cóncavo para ondas de radio AM, permitiendo comunicaciones a larga distancia sobre el planeta.

En primer lugar, trataremos de entender por qué un plasma neutro puede oscilar libremente con una frecuencia  $\omega_p$ . En ausencia de campo externo, el electrón (que consideramos prácticamente libre por haberse liberado del campo coulombiano del átomo) puede verse sometido a una fuerza restauradora que proviene de la presencia de un campo eléctrico local. ¿Cuál es el origen de este campo?

Si bien en promedio el plasma es neutro, en algunas regiones hay déficit de carga de un signo, mientras que en otras vecinas hay exceso. Estas fluctuaciones espaciales de densidad de carga producen un campo interno que acelera los electrones, los cuales tienden a neutralizar las cargas vecinas hasta alcanzar una posición de equilibrio. Pero la inercia les obliga a sobrepasar esta posición, con lo cual el signo del campo local se invierte. Tenemos así el juego de *fuerza recuperadora + inercia*, que es típico del movimiento oscilatorio.

El campo interno, por ser resultado de las desviaciones de las cargas con respecto a una situación de equilibrio, puede describirse como un campo de polarización:

$$\mathbf{E}_{int}(t) = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (7.31)$$

donde  $\mathbf{P}$  es igual a la polarización por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = Nqx(t) \quad (7.32)$$

Al definir el eje  $x$  a lo largo de la polarización, la ecuación de movimiento de un electrón típico toma la forma:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = q E_{int}(t) = \frac{Nq^2}{\epsilon_0} x(t) \quad (7.33)$$

que es la ecuación típica de un oscilador libre con una frecuencia natural  $\omega_p$ , denominada frecuencia de plasma:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \quad (7.34)$$

El electrón en el plasma se comporta prácticamente como un péndulo, donde la fuerza debida al campo eléctrico de polarización juega el papel de fuerza gravitacional.

Si se hace incidir perpendicularmente sobre la ionosfera una onda electromagnética, un electrón libre experimenta una fuerza debida a la superposición del campo eléctrico de la onda ( $\mathbf{E}_{ext}(t) = \mathbf{E}_{0\ ext} \cos(\omega_f t - kz)$ ) y el campo de polarización ( $\mathbf{E}_{int}(t) = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ ). En esta aproximación ignoramos el campo magnético de la onda.

Si suponemos pequeña la amplitud de las oscilaciones del electrón, comparada con la longitud de onda de la radiación incidente, podemos ignorar la variación espacial del campo eléctrico remplazando  $kz$  por una constante de fase. Entonces la fuerza que actúa sobre el electrón puede escribirse así:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(t) = q \left( \mathbf{E}_{0\ ext} \cos(\omega_f t + \phi) - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (7.35)$$

Es importante anotar que en este modelo estamos ignorando efectos friccionales que pueden ser importantes a muy bajas frecuencias.

En materiales lineales e isotrópicos, la polarización  $\mathbf{P}$  es proporcional al campo resultante  $\mathbf{E}(t)$  (no al campo incidente). La constante de proporcionalidad es la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$  definida a través de la relación:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}(t) \epsilon_0 \quad (7.36)$$

De (7.35) y (7.36) resulta:

$$\mathbf{E}(t) + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e) \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{0\ ext} \cos(\omega_f t + \phi) \quad (7.37)$$

De aquí puede concluirse que  $\mathbf{E}(t)$  oscila en fase con el campo externo, por lo cual podemos escribir el campo resultante de la manera siguiente:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_f t + \phi) \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{E}_{0\ ext}}{1 + \chi_e} \quad (7.38)$$

Si elegimos el eje  $x$  a lo largo de la dirección del campo eléctrico, la ecuación de movimiento del electrón libre en presencia de la fuerza debida al campo resultante es<sup>3</sup>

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = q E_0 \cos(\omega_f t + \phi) \quad (7.39)$$

<sup>3</sup> En esta ecuación no aparece explícitamente la frecuencia del plasma  $\omega_p$  y, por tanto, no tiene aspecto de una ecuación de un oscilador forzado. Sin embargo, si se escribe en función del campo externo, resulta una ecuación de oscilador forzado que es equivalente a (7.39), como puede verificarse al desarrollar el ejercicio 7.6.

cuya solución particular es inmediata:

$$x(t) = \frac{q E_0}{m} \left( -\frac{1}{\omega_f^2} \right) \cos(\omega_f t + \phi) \quad (7.40)$$

Aunque inicialmente no conocemos la amplitud del campo eléctrico resultante  $E_0$ , que incluye el efecto de la polarización inducida por el campo externo, podemos deducir de aquí una expresión para la susceptibilidad eléctrica y, por tanto, para la constante dieléctrica del plasma dada por:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \quad (7.41)$$

En efecto:

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{Nq}{\epsilon_0 E} x(t) = -\frac{Nq^2}{m\omega_f^2 \epsilon_0}$$

entonces:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left( 1 - \frac{Nq^2}{m\omega_f^2 \epsilon_0} \right) = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_f^2} \right) \quad (7.42)$$

A partir de aquí podemos hallar la relación de dispersión para ondas electromagnéticas en el plasma. Como veremos más adelante, la velocidad de fase en un medio con índice de refracción  $n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}}$  es diferente de la velocidad  $c$  de la luz en el vacío:

$$v = \frac{\omega_f}{k} = \frac{c}{n} \quad (7.43)$$

Para materiales cuya permeabilidad magnética  $\mu$  es cercana a  $\mu_0$  puede aproximarse:

$$n^2 = \frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0} \approx \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (7.44)$$

De (7.42) y (7.43) resulta inmediatamente:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx n^2 = k^2 \frac{c^2}{\omega_f^2} = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_f^2} \right) \quad (7.45)$$



lo cual implica una relación de dispersión idéntica a la de Klein–Gordon:

$$\omega_f^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (7.46)$$

Durante el día, la densidad de electrones libres en la ionosfera toma valores máximos entre  $10^6/\text{cm}^3$  y  $10^7/\text{cm}^3$  en la capa superior que se extiende aproximadamente hasta 400 km sobre la superficie terrestre. Esto significa que la frecuencia del plasma  $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  toma valores entre 10 y 30 MHz.

Frecuencias típicas de TV y radio FM son del orden de 100 MHz. En este rango el número de onda  $k$  es real y, por tanto, la ionosfera se comporta como un medio dispersivo que permite la propagación de las ondas sin atenuación. Igual cosa ocurre con frecuencias en el rango de la luz visible ( $10^{14}$  Hz), pues de lo contrario no podríamos ver la luz del sol.

La transmisión de radio AM tiene frecuencias típicas del orden de 1-2 MHz, que están por debajo del rango dispersivo de la ionosfera. Esto implica que el número de onda  $k$  es imaginario, no hay propagación sino atenuación reactiva dentro de la ionosfera y, puesto que no hay absorción de energía, se produce reflexión total de las ondas incidentes. Este es precisamente el mecanismo que hace de la ionosfera un espejo cóncavo para ondas de radio AM y un medio transparente para ondas de TV, FM y luz visible.

Debemos anotar, sin embargo, que efectos dejados de lado en este modelo, como la fricción debida a las colisiones de los electrones con los iones o el movimiento de los iones pesados, que tiene su propia frecuencia de plasma del orden de 100 KHz, pueden ser importantes a bajas frecuencias.

## 7.8. Ondas electromagnéticas en los metales

Un modelo similar al de la ionosfera permite describir el comportamiento de los metales dentro de cierto rango de frecuencias.

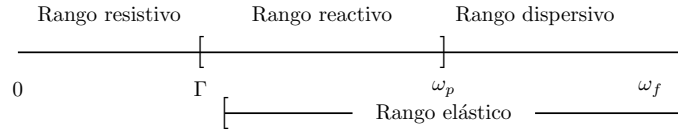
Los electrones libres o de conducción (responsables de la corriente eléctrica) son los electrones de valencia de los átomos aislados que, al constituirse la red cristalina del sólido, pueden moverse como partículas cuasilibres dentro del metal.

Cuando una onda electromagnética incide sobre el conductor, cada electrón libre se comporta como un oscilador forzado y amortiguado, con una constante de amortiguamiento  $\Gamma$  que toma en cuenta la conductividad del metal.

En buenos conductores, la frecuencia del plasma es mucho mayor que  $\Gamma$ . Por ejemplo, para un metal univalente como la plata, con una densidad de electrones  $N = 5,8 \times 10^{22}/\text{cm}^3$  y una constante de amortiguamiento  $\Gamma = 2,7 \times 10^{13}/\text{s}$ ,

resulta una frecuencia de plasma  $\omega_p = 1,36 \times 10^{16}$  rad/s, que es mucho mayor que la constante de amortiguamiento  $\Gamma$ .

Esto implica la existencia de tres rangos de frecuencias en los cuales el metal se comporta de manera diferente:



- Para frecuencias de radiación menores que  $\Gamma$ , como las de microondas ( $10^{11}$  Hz) para la plata, el metal se comporta como un medio resistivo denso que permite muy poca penetración de la onda incidente. Este efecto se analiza en la sección 7.9 a partir de una ecuación de onda con amortiguamiento y se deduce con base en el modelo de plasma en el ejercicio 7.7.
- Para frecuencias mucho mayores que  $\Gamma$  predomina la respuesta elástica sobre la absorbente. Al usar un modelo similar al de la ionosfera, encontramos que el índice de refracción satisface la relación:

$$n^2 = 1 - \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m \omega_f^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_f^2} \quad \Gamma \ll \omega_p \quad \Gamma \ll \omega_f \quad (7.47)$$

Esto implica que en el rango elástico es válida una relación de dispersión idéntica a la de Klein–Gordon (7.45). Como  $\omega_p \gg \Gamma$ , este rango se subdivide en un rango reactivo y uno dispersivo, en los cuales el metal se comporta de dos maneras cualitativamente diferentes:

- Si  $\Gamma \ll \omega_f \leq \omega_p$ , la onda no se propaga en el medio, no hay prácticamente absorción de energía y se produce reflexión total. Esto significa que para estas frecuencias el metal se comporta como un espejo.
- Si  $\omega_f > \omega_p$ , el metal se comporta como un medio dispersivo, y la onda electromagnética puede propagarse prácticamente sin atenuación como en un dieléctrico transparente.

La luz visible tiene frecuencias que varían entre  $4,2$  y  $7,5 \times 10^{14}$  Hz, mayores que  $\Gamma$  pero mucho menores que  $\omega_p$ . En este rango, la plata se comporta como un medio reactivo y, por tanto, como un reflector perfecto. Naturalmente, si el espesor de una capa de plata es menor que la longitud de atenuación  $\delta$  para

estas frecuencias, puede haber transmisión parcial de luz, como ocurre en los espejos semiplatedados.

La luz ultravioleta y los rayos X tienen frecuencias del orden de  $10^{16}$  Hz, que se ubican en el rango dispersivo de la plata. Esto explica la llamada *transparencia ultravioleta de los metales*.

## 7.9. Ondas amortiguadas

Si sobre cada elemento de las redes prototipo analizadas en el capítulo 5 introducimos una fuerza friccional de la forma  $-b \frac{d}{dt} \phi_j$ , al tomar el límite continuo resulta una ecuación de onda con un término disipativo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(z, t) + \omega_0^2 \Phi(z, t) - u^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(z, t) + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = 0 \quad (7.48)$$

Por simplicidad consideraremos un sistema con  $\omega_0 = 0$ . En este caso, la ecuación anterior puede describir una cuerda elástica sumergida en un medio viscoso.

Ensayemos una solución de onda viajera que se propaga en dirección  $z$ :

$$\Phi(z, t) = A_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.49)$$

con la condición de tomar al final sólo la parte real. Al sustituir esta solución en (7.48) resulta:

$$\omega^2 - i\Gamma \omega = u^2 k^2 \quad \omega_0 = 0 \quad (7.50)$$

Como  $\omega$  es real, esta ecuación implica que el número de onda  $k$  es complejo y, por tanto, podemos expresarlo así:

$$k = K + i\kappa \quad (7.51)$$

Al llevar (7.51) a (7.50) podemos separar las partes real e imaginaria de  $k$ . Pero es posible obtener una información más significativa si consideramos dos casos extremos:

- a. Constante de amortiguamiento pequeña con respecto a  $\omega$ ,  $\frac{\omega}{\Gamma} \gg 1$

Si la constante de amortiguamiento es pequeña comparada con la frecuencia de la onda, podemos hacer la aproximación siguiente:

Si tomamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$\omega^2 \left(1 - i \frac{\Gamma}{\omega}\right) = u^2 k^2$$

podemos escribir:

$$\omega \left(1 - i \frac{\Gamma}{2\omega}\right) \approx \pm u(K + i\kappa)$$

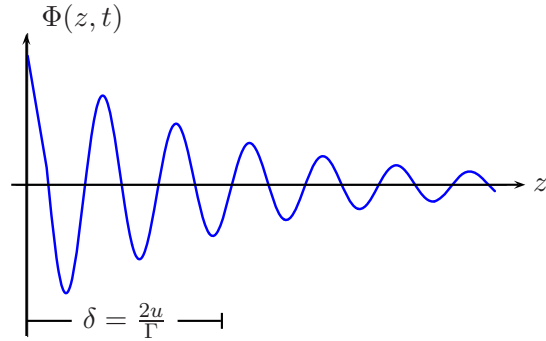
de donde resulta:

$$K \approx \pm \frac{\omega}{u} \quad \kappa \approx \pm \frac{\Gamma}{2u} \quad (7.52)$$

Al elegir los signos de  $K$  y  $\kappa$  para que la solución describa una onda que se propaga en dirección  $z$ , sin que su amplitud crezca de una manera ilimitada y por tanto no física, podemos escribir finalmente:

$$\Phi(z, t) = A_0 e^{-\kappa z} \cos(\omega t - Kz) \quad (7.53)$$

Como el cociente  $\frac{\kappa}{K} = \frac{\Gamma}{2\omega}$  es por hipótesis mucho menor que 1, la solución describe una onda débilmente amortiguada, la cual se ilustra en la figura 7.3.



**Figura 7.3** Onda viajera débilmente amortiguada por fricción.

Observe que la constante de atenuación  $\kappa$  es mucho menor que el número de onda real  $k$  y, por tanto, la longitud de penetración  $\delta = \kappa^{-1}$  es mucho mayor que la longitud de onda  $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ . Por ello, la cuerda puede presentar un buen número de oscilaciones espaciales sin que la amplitud se atenúe de manera apreciable. Esta atenuación espacial no depende de la frecuencia, y se debe enteramente a la disipación de energía en el medio viscoso.

- b. Frecuencia de la onda incidente pequeña con respecto a  $\Gamma$ ,  $\frac{\omega}{\Gamma} \ll 1$

Si la frecuencia de la onda incidente sobre un extremo de la cuerda es mucho menor que la constante de amortiguamiento  $\Gamma$ , podemos ignorar  $\omega^2$  con respecto a  $\Gamma\omega$  en la ecuación (7.50):

$$-i\Gamma\omega \approx u^2(K + i\kappa)^2$$

Al considerar que

$$\sqrt{-i} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

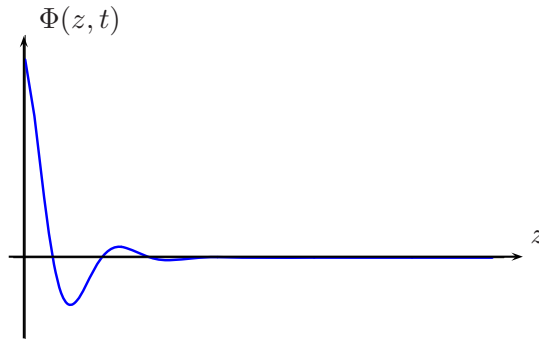
resulta:

$$K + i\kappa \approx \pm(1-i) \left| \sqrt{\frac{\Gamma\omega}{2u^2}} \right| \quad (7.54)$$

Al elegir adecuadamente los signos de  $K$  y  $\kappa$  obtenemos una solución de la forma:

$$\Phi(z, t) = A_0 e^{-\kappa z} \cos(\omega t - Kz) \quad (7.55)$$

que describe ondas electromagnéticas propagándose en la dirección  $z$ . Pero ahora, a diferencia del caso anterior, la longitud de penetración  $\delta$  es igual a  $K^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$ , de modo que la amplitud disminuye a  $\frac{1}{e}$  de su valor en  $z = 0$  antes de completar una oscilación y ya la onda es difícilmente reconocible, como puede apreciarse en la figura 7.4.



**Figura 7.4** Onda fuertemente amortiguada por fricción.

Una ecuación de onda de forma similar a la de una cuerda con fricción se deducirá en el capítulo 10 (a partir de las ecuaciones de Maxwell) para cada componente del campo eléctrico en un medio conductor homogéneo e isotrópico de conductividad  $\sigma$  (real) y constante dieléctrica  $\epsilon$  (real):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) = 0 \quad (7.56)$$

donde  $v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon}$  depende de la frecuencia, por lo cual esta ecuación es válida sólo para ondas de frecuencia bien definida.

Como un metal se comporta como conductor en el rango  $\omega < \Gamma$ , podemos aplicarle los resultados (7.54) y (7.55). Esto implica que la longitud de penetración o *skin-depth* disminuye con la conductividad y la frecuencia (dentro del rango resistivo) de la manera siguiente:

$$\delta = \kappa^{-1} \approx \sqrt{\frac{2v^2\epsilon}{\omega\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \quad (7.57)$$

Este resultado es aplicable a buenos conductores para frecuencias típicas de circuitos eléctricos. En el cobre, por ejemplo, la profundidad de penetración del campo en el conductor es aproximadamente de 1 mm para frecuencias del orden de 60 Hz, y de  $3,8 \times 10^{-5}$  cm para ondas de radar con longitud de onda de 1 cm.

Esto significa que en circuitos eléctricos de alta frecuencia (en el rango resistivo) la onda prácticamente no penetra en el conductor, y la corriente fluye sólo sobre la superficie. Por ello en una cavidad de microondas las pérdidas debidas a la conductividad finita de las paredes suelen ser insignificantes y se puede suponer que el campo dentro del conductor es nulo.

Aunque este es un comportamiento similar al de una onda con frecuencia en el rango reactivo, el mecanismo es completamente diferente. En primer lugar, puede observarse que la forma funcional del campo (7.55) que describe propagación es cualitativamente diferente de la oscilación estacionaria (7.30) en un medio reactivo. Por otra parte, en el caso resistivo u óhmico hay pérdidas de energía debidas a corrientes cuasisuperficiales, mientras que en el rango reactivo la disipación de energía puede ignorarse por tratarse de un efecto elástico; en vez de absorción se produce reflexión total.

## Ejercicios

- 7.1** Halle la ecuación de onda de las corrientes  $I(z, t)$  en una red de condensadores acoplados por inductancias y encuentre los modos normales de este sistema.
- 7.2** Deduzca la ecuación de onda de los voltajes a través de los condensadores de acoplamiento de una red de inductancias. Explique si este sistema puede funcionar como filtro de frecuencias en el rango elástico. Compare con los resultados del ejercicio 6.8.
- 7.3** Para ver la conexión entre la ecuación de Klein-Gordon y la mecánica cuántica, sustituya en la ecuación de Einstein:

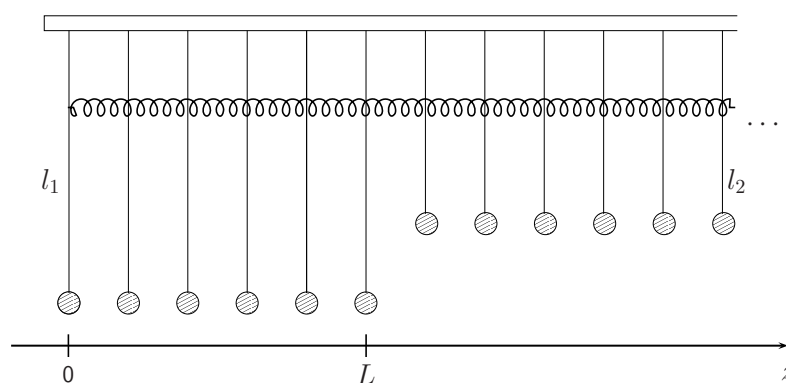
$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

la energía  $E$  y el *momentum*  $p$  por operadores:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

y aplique la ecuación resultante a una función  $\Phi(z, t)$ . Esta función describe cuánticamente estados de partículas libres de masa  $m$ , con espín cero.

- 7.4** Modelo mecánico de estados ligados.



**Figura 7.5** Modelo mecánico de estados ligados.

Suponga que la red de la figura 7.5, en el límite continuo, oscila en un estado estacionario de la forma:

$$\Phi(z, t) = A(z) \cos(\omega t)$$

con  $\omega$  en el rango dispersivo para la región central y en el rango reactivo inferior para la región derecha.

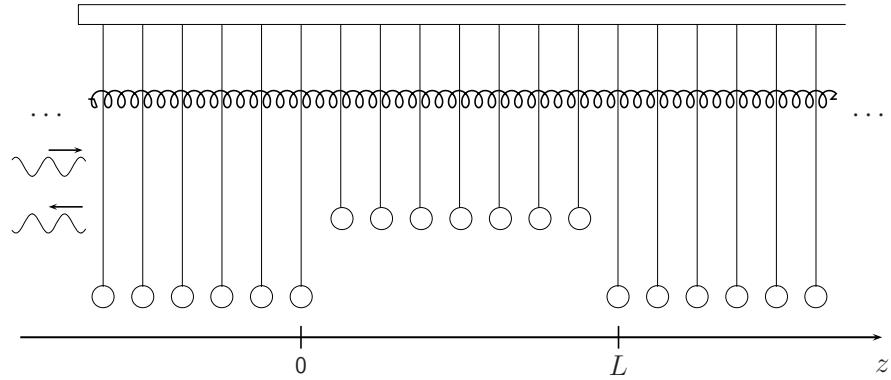
- a. Usando un Ansatz adecuado para cada región, aplique como condiciones de frontera:

$$A(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad A(z) = 0 \quad (z = 0)$$

y pegue suavemente las soluciones en  $z = L$ . Observe que las ecuaciones resultantes sólo son compatibles para ciertos valores de  $k$ ,  $\kappa$  y, por tanto,  $\omega$ . Utilice las relaciones de dispersión para encontrar las ecuaciones que relacionen las variables  $\zeta = kL$  y  $\eta = \kappa L$ . Indique de manera aproximada en un plano con ejes  $\eta$ ,  $\zeta$  los posibles valores de  $k$ ,  $\kappa$  y  $\omega$ . Compare los resultados anticipados en la sección 6.6.

- b. Muestre gráficamente que el espectro de frecuencias normales de esta red es acotado y explique la razón física de este hecho.
- c. Si este sistema se hace simétrico con respecto al origen ya no es necesario que la solución se anule en  $z = 0$ . Analice lo que ocurre en este caso.

### 7.5 Modelo mecánico de efecto túnel o penetración de barrera.



**Figura 7.6** Modelo mecánico de efecto túnel.

Suponga que en la red de la figura 7.6, en el límite continuo, incide por la izquierda una onda armónica viajera de la forma:

$$\Phi^{\text{inc}}(z, t) = \text{Re} \left[ A_i e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad \text{con } A_i \text{ real}$$



Suponga que en la región central (o barrera)  $\omega$  está en el rango reactivo inferior y, por tanto, la solución tiene la forma:

$$\Phi(z, t) = \text{Re} \left[ \left( B e^{\kappa z} + C e^{-\kappa z} \right) e^{-i\omega t} \right]$$

Región central:  $(0 \leq z \leq L)$

En la región derecha, de nuevo  $\omega$  está en el rango dispersivo y podemos suponer una solución de onda viajera hacia la derecha de la forma:

$$\Phi^{\text{out}}(z, t) = \text{Re} \left[ D e^{i(kz - \omega t)} \right]$$

Región derecha:  $(L \leq z < \infty)$

Para satisfacer condiciones de frontera debemos admitir en la región izquierda la posibilidad de una onda reflejada que viaja en dirección  $-\hat{z}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \Phi^{\text{inc}}(z, t) + \Phi^{\text{ref}} \\ &= \text{Re} \left[ A_i e^{i(kz - \omega t)} \right] + \text{Re} \left[ A_r e^{-i(kz - \omega t)} \right] \end{aligned}$$

Región izquierda:  $(-\infty < z \leq 0)$

Pegue suavemente las soluciones en  $z = 0$  y  $z = L$  para determinar los coeficientes en función de  $A_i$ . Analice físicamente lo que ocurre en los dos casos siguientes:

- $L$  razonablemente pequeño. Se trata del fenómeno de penetración de barrera.
- $L \rightarrow \infty$  y desaparece la región derecha. Muestre que en este caso la magnitud de  $A_r$  es igual a la magnitud de  $A_i$ . Se trata de reflexión total en frontera con medio reactivo infinito. Analice el caso límite  $\kappa \rightarrow \infty$  y muestre que, en este caso,  $z = 0$  se comporta como un extremo fijo.

**7.6** La ecuación que describe el movimiento de un electrón libre en presencia de un campo resultante puede escribirse explícitamente como superposición del campo externo y del campo de polarización. Como resultado se

obtiene una ecuación de oscilador forzado:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{Nq^2}{\epsilon_0} x(t) + q E_{0ext} \cos(\omega_f t + \phi)$$

Halle la respuesta estacionaria (suponiendo la fricción pequeña). A partir de aquí deduzca una expresión para la susceptibilidad y la constante dieléctrica. Muestre que su resultado coincide con (7.42).

### 7.7 Comportamiento de los metales en diferentes rangos de frecuencia.

- a. Escriba la ecuación de movimiento de un electrón forzado y amortiguado en el modelo de plasma de los metales en función de un campo eléctrico resultante complejo  $E_0 e^{i\omega t}$  (ignorando por ahora la fase en la posición promedio del electrón), que contiene el campo incidente más el campo de polarización.

Suponga una solución particular compleja  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$  y halle expresiones complejas para la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$ , la constante dieléctrica  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  y el índice de refracción  $n$ . A partir de aquí, halle las relaciones de dispersión para las ondas electromagnéticas dentro del metal válidas según este modelo para todas las frecuencias. Deduzca la ecuación de onda en los metales.

- b. Muestre para qué rangos de frecuencia obtiene la ecuación de Klein-Gordon y diga brevemente cómo se comporta el metal en estos rangos escribiendo expresiones explícitas para el campo eléctrico de la onda resultante dentro del metal.
- c. Considere el rango dispersivo u óhmico (con  $\omega \ll \Gamma$  y  $\Gamma \ll \omega_p$ ). Demuestre que la conductividad  $\sigma$ , definida por  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , es real y, por tanto, la densidad de corriente  $\mathbf{J} = Nq \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  oscila en fase con el campo resultante. Halle una expresión para el *skin-depth* y señale la diferencia de este efecto con respecto al fenómeno de atenuación en una red reactiva.

### 7.8 En el límite continuo de una red de osciladores con fricción, acoplados elásticamente, halle la ecuación de onda y sus soluciones de modos normales. Verifique si estos modos pueden describirse como superposición de ondas viajeras amortiguadas.

## Capítulo 8

# Análisis de Fourier y propagación de señales

En este capítulo se introduce el análisis de Fourier como herramienta matemática que permite descomponer casi cualquier función  $f(x)$  en funciones puramente armónicas.

- Se establece una conexión entre la suma de modos normales para la cuerda vibrante y el teorema de Fourier para funciones periódicas.
- Se efectúa el análisis armónico de una señal periódica.
- Se formula el teorema de Fourier para funciones no periódicas y se pasa de la forma real a la forma compleja.
- Se obtiene la “forma de línea” o espectro de frecuencias emitido por un oscilador amortiguado.
- Se aplica el análisis de Fourier a paquetes constituidos por soluciones armónicas viajeras de una ecuación de onda dispersiva, como la de Klein–Gordon, y se muestra el origen de la *dispersión* o distorsión del paquete en el transcurso del tiempo.
- Se analiza la propagación de paquetes de ondas con base en los conceptos de *velocidad de fase* y *velocidad de grupo*.
- Se describen someramente las técnicas de modulación de amplitud, frecuencia y fase usadas en transmisión de información.

- Se formulan las relaciones de indeterminación características de todos los fenómenos ondulatorios y se presenta brevemente su extensión a ondas complejas que describen el movimiento de partículas cuánticas.
- Finalmente, se ilustra la validez de estas relaciones en el análisis de un paquete gaussiano, uno cuasiarmónico y un pulso de duración finita.

### 8.1. Teorema de Fourier para funciones periódicas

En el capítulo 7, mediante el paso al límite continuo de una red discreta, se mostró que el movimiento más general de un sistema oscilatorio libre, unidimensional, de longitud  $L$ , con ambos extremos fijos o libres, puede describirse mediante una superposición de la forma:

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(k_n z) + B_n \sin(k_n z)) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad 0 \leq z \leq L \quad (8.1)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Esto implica que cualquier perfil de una cuerda con estas condiciones de frontera puede ser descrito en cualquier instante  $t_0$  mediante una serie de la forma:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \right] \quad 0 \leq z \leq L \quad (8.2)$$

$$a_n = A_n \cos(\omega_n t_0 + \delta_n) \quad b_n = B_n \cos(\omega_n t_0 + \delta_n)$$

Desde un punto de vista matemático, el perfil de la cuerda es simplemente la realización física de una curva continua sobre un intervalo dado. El dominio de definición de la función  $\Phi(z)$  puede extenderse a todo el eje  $z$ , dando como resultado una función periódica de período  $P = 2L$ <sup>1</sup>.

Este paso permite ver la expansión (8.2), extendida a todo el eje  $z$ , como el desarrollo de una función periódica en componentes armónicas. La generalización de este resultado a casi todas las funciones periódicas abrió las puertas

<sup>1</sup> Se dice que una función  $F(z)$  es periódica con período  $P$  si, para todo valor de  $z$ , se cumple que  $F(z + P) = F(z)$ , donde  $P$  es la constante más pequeña que satisface esta condición. Esto implica que  $F(z + nP) = F(z)$  para todo  $n$  entero.

a uno de los métodos más poderosos de la física matemática: el análisis de Fourier, que permite analizar prácticamente cualquier función en componentes armónicas.

El teorema de Fourier para funciones periódicas puede formularse de la siguiente manera:

*Casi<sup>2</sup> cualquier función periódica  $F(z)$  con período  $P$  puede expresarse mediante una serie armónica de la forma:*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n z + \delta_n) \quad (8.3)$$

con:

$$k_n = \frac{2n\pi}{P} = n k_1 \quad k_1 = \frac{2\pi}{P}$$

Hacer análisis de Fourier de una función  $F(z)$  significa determinar las amplitudes o coeficientes  $C_n$  y las fases  $\delta_n$  de cada componente armónica de la serie. Para ello es conveniente reescribirla en la forma:

$$F(z) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n z) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n z) \quad (8.4)$$

donde hemos definido:

$$A_n = C_n \cos \delta_n \quad B_n = -C_n \sin \delta_n$$

lo cual implica:

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \delta_n = \arctan \frac{-B_n}{A_n}$$

Para determinar  $A_0$  integramos ambos lados de (8.4) sobre un período completo:

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} F(z) dz = A_0 \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} dz + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos(k_n z) dz + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin(k_n z) dz$$

<sup>2</sup> Basta que la función periódica sea continua a pedazos y posea derivada a izquierda y derecha en cada punto. En puntos de discontinuidad, la serie converge al promedio de los límites a izquierda y derecha. El teorema no se aplica a funciones que son continuas pero infinitamente quebradas, o tienen infinitas discontinuidades en un intervalo finito, o tales que la integral de su valor absoluto sobre un período no es finita.

Puesto que las dos últimas ecuaciones del lado derecho son nulas, resulta:

$$A_0 = \frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} F(z) dz \quad (8.5)$$

Para extraer los coeficientes restantes podemos usar como “anzuelos” las funciones  $\sin(k_m z)$  y  $\cos(k_m z)$ , respectivamente. Esta técnica para extraer coeficientes se basa en las llamadas relaciones de ortogonalidad para las funciones armónicas:

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin(nk_1 z) \sin(mk_1 z) dz = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \cos(nk_1 z) \cos(mk_1 z) dz = \frac{P}{2} \delta_{n,m} \quad (8.6a)$$

$$\int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} \sin(nk_1 z) \cos(mk_1 z) dz = 0 \quad \forall n, m \text{ enteros} \quad (8.6b)$$

Así, al multiplicar ambos lados de (8.4) por  $\cos(k_m z)$  e integrar sobre un período completo sólo sobrevive a la derecha la integral que contiene  $A_m$ . Análogamente, si queremos obtener un coeficiente  $B_m$ , basta multiplicar ambos lados de la ecuación por  $\sin(k_m z)$  e integrar sobre un período completo.

Como resultado tenemos:

$$A_m = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} F(z) \cos(k_m z) dz \quad (8.7)$$

$$B_m = \frac{2}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} F(z) \sin(k_m z) dz \quad (8.8)$$

Observe que si la función  $F(z)$  (que multiplica dentro del signo integral la función par  $\cos(k_m z)$ ) es impar, el integrando es impar y la integral entre  $-\frac{P}{2}$  y  $\frac{P}{2}$  se anula. Si la función  $F(z)$  es par, el integrando de la (8.8) resulta impar y la integral se anula. Así, cuando la función  $F(z)$  tiene una paridad definida, se elimina una de las dos series en (8.4):

- a. Si  $F(z)$  es par, todos los  $B_m$  son cero.
- b. Si  $F(z)$  es impar, todos los  $A_m$  son nulos.

El desarrollo de Fourier de una función con período  $P$  es único, puesto que los coeficientes quedan determinados de manera única por las ecuaciones anteriores. Pero una función  $F(z)$  cualquiera, definida inicialmente sólo sobre un intervalo finito, puede prolongarse periódicamente de muchas maneras con diversos períodos. Esto implica que existen varias series de Fourier que la representan en el intervalo finito.

Cuando extendimos el dominio de (8.2) a todo el eje  $z$ , obtuvimos una continuación periódica determinada y, por tanto, una expansión de Fourier única. Este procedimiento implica continuación par en un extremo libre y continuación impar en un extremo fijo.

## 8.2. Aplicaciones del análisis armónico a funciones periódicas

### 8.2.1. Determinación de constantes arbitrarias a partir de condiciones iniciales

Analicemos el caso de una red no dispersiva, como la cuerda de longitud  $L$  con extremos fijos. Hemos mostrado que la solución general de este problema puede escribirse como superposición de modos normales de la forma:

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad 0 \leq z \leq L \quad (8.9)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n = \frac{n\pi v}{L}$$

Para hallar la solución única del problema, debemos determinar las constantes  $C_n$  y  $\delta_n$  a partir de las condiciones iniciales:

$$\Phi(z, 0) = \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \cos(\delta_n)] \operatorname{sen}(k_n z) \quad 0 \leq z \leq L \quad (8.10)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [-C_n \operatorname{sen}(\delta_n)] \operatorname{sen}(k_n z) \quad 0 \leq z \leq L \quad (8.11)$$

Si extendemos periódicamente el dominio de definición de las condiciones iniciales  $\Psi(z)$  y  $\chi(z)$  a todo el eje  $z$ , podemos ver las ecuaciones (8.10) y (8.11)

como simples expansiones de Fourier de las funciones periódicas impares  $\Psi(z)$  y  $\chi(z)$  con período  $2L$ .<sup>3</sup> Podemos, por tanto, aplicar las técnicas de análisis de Fourier para despejar los coeficientes:

$$C_m \cos \delta_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi(z) \sin(k_m z) dz \quad (8.12)$$

$$-C_m \omega_m \sin \delta_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \chi(z) \sin(k_m z) dz \quad (8.13)$$

De este par de ecuaciones pueden obtenerse de inmediato todos los coeficientes  $C_n$  y las constantes de fase  $\delta_n$  que aparecen en (8.9), con lo cual queda completamente resuelto el problema a partir del dato de las condiciones iniciales.

### 8.2.2. Análisis armónico de una señal periódica

Una señal de entrada armónica, con frecuencia  $\omega$ , produce una respuesta estacionaria de igual frecuencia. Gracias a la linealidad de la ecuación de onda, una superposición de señales armónicas producirá una respuesta igual a la suma de las contribuciones de todas las componentes armónicas presentes en la señal de entrada.

Supongamos que la perturbación a la entrada tiene la forma de una *onda cuadrada*, con la expresión analítica:

$$F(t) = \begin{cases} C & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (8.14)$$

$$F(t + NT) = F(t) \quad N \text{ entero}$$

Esta función es periódica pero sin paridad definida. Para simplificar el problema es conveniente hacer un corrimiento del origen del tiempo para que la función  $F(t)$  adquiera paridad definida, como se indica en la figura 8.1.

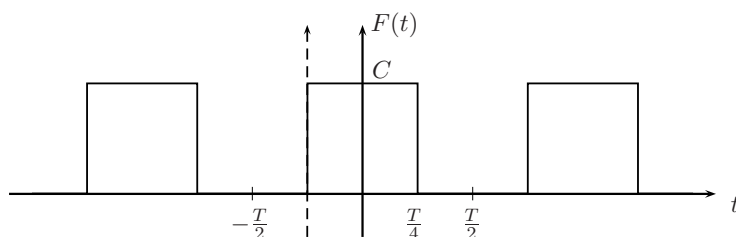
La expresión analítica toma ahora la forma:

$$F(t) = \begin{cases} C & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (8.15)$$

$$F(t + NT) = F(t) \quad N \text{ entero}$$

<sup>3</sup> Si la cuerda tuviera extremos libres, la continuación tomaría la forma de funciones  $\Psi(z)$  y  $\chi(z)$  periódicas pares.





**Figura 8.1** Onda cuadrada.

Así definida,  $F(t)$  es función par. En consecuencia, los coeficientes  $B_n$  de la serie de Fourier se anulan. Los demás coeficientes están dados por:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) dt = \frac{C}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos(\omega_m t) dt = \frac{2C}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt$$

De aquí resulta:

$$A_m = \frac{2C}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

y por tanto:

$$A_1 = \frac{2C}{\pi} \quad A_2 = 0 \quad A_3 = -\frac{2C}{3\pi}$$

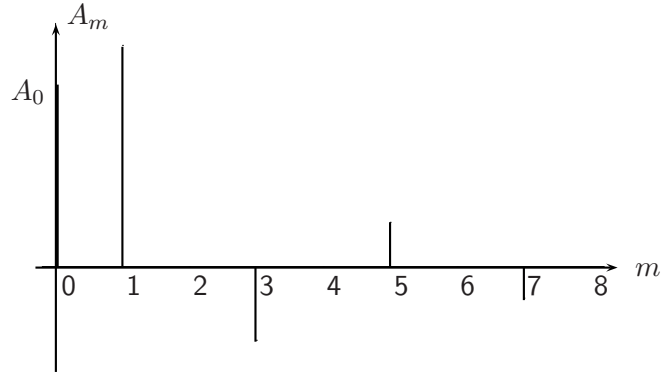
El resultado se ilustra en la figura 8.2.

La expansión armónica de la perturbación  $F(t)$  toma la forma:

$$F(t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t) + A_0$$

Como se trata de una función periódica, el espectro  $\{\omega_n\}$  es discreto y la gráfica  $A_m$  *versus*  $m$  recibe el nombre de espectro de líneas.

En la sección siguiente mostraremos que una función no periódica tiene un espectro continuo.



**Figura 8.2** Espectro de una onda cuadrada.

### 8.3. Teorema de Fourier para funciones no periódicas

Una función  $F(t)$  no periódica puede considerarse como el límite de una función de período  $T$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . En este límite, la diferencia entre frecuencias normales vecinas tiende a cero:  $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ . Por tanto, la variable  $\omega_n$  tiende a ser continua y la suma se convierte en una integral.

El teorema de Fourier para funciones no periódicas afirma lo siguiente:

*Si  $F(t)$  es continua a pedazos, tiene derivada a izquierda y derecha en cada punto, y la integral  $\int |F(t)| dt$  existe,  $F(t)$  puede ser representada por una integral de la forma:*

$$F(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (8.16)$$

con:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cos(\omega t') dt' \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \sin(\omega t') dt' \quad (8.17)$$

*En cada punto de discontinuidad el valor de la integral de Fourier es igual al promedio de los límites a izquierda y derecha de  $F(t)$  en ese punto.*

En este caso también se cumple que si  $F(t)$  es función par, la expansión se

reduce a las funciones armónicas pares  $\cos(\omega t)$ ; si  $F(t)$  es impar, sólo contribuyen las funciones armónicas impares  $\sin(\omega t)$ .<sup>4</sup>

En muchas aplicaciones es conveniente expresar el desarrollo integral de Fourier en forma compleja. Al remplazar (8.17) en (8.16) resulta:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') [\cos(\omega t') \cos(\omega t) + \sin(\omega t') \sin(\omega t)] dt' d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cos[\omega(t - t')] dt' d\omega \end{aligned}$$

Pero observe que la integral

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cos[\omega(t - t')] dt'$$

es una función par de  $\omega$ . Podemos entonces extender la integral sobre  $\omega$  de  $-\infty$  hasta  $\infty$  y dividir por dos sin alterar su valor. De este modo:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cos[\omega(t - t')] dt' d\omega \quad (8.18)$$

Como la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t') \sin[\omega(t - t')] dt'$$

es función impar de  $\omega$ , a la expresión (8.18) podemos sumar la expresión nula:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \sin[\omega(t - t')] dt' \right] d\omega$$

<sup>4</sup> Las expresiones (8.17) y sus correspondientes para funciones periódicas permiten hacer análisis de Fourier aun para una curva empírica  $F(t)$ , cuya forma analítica no se conoce. En este caso, basta hacer integración gráfica o numérica.

y obtenemos:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') e^{i\omega(t-t')} dt'$$

Finalmente, si damos a la expresión anterior una forma más simétrica, llegamos a la *forma compleja de la integral de Fourier*:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.19)$$

con:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (8.20)$$

$\mathcal{F}(\omega)$  se denomina *transformada de Fourier* de  $F(t)$ , y su conocimiento, como puede verse de (8.19), es suficiente para determinar  $F(t)$  por completo. Esto implica que la información contenida en  $\mathcal{F}(\omega)$  es equivalente a la contenida en  $F(t)$ .

Cuando  $t$  tiene sentido físico de tiempo, su variable conjugada  $\omega$  tiene dimensiones de frecuencia. Análogamente, si  $t$  tiene el sentido de una variable espacial  $z$ , su variable conjugada tiene el sentido de un número de onda y suele notarse por la letra  $k$ . En este caso, el desarrollo de Fourier de  $F(z)$  y su transformada de Fourier tienen la forma de las expresiones (8.19) y (8.20), con las sustituciones:  $t \rightarrow z$ ,  $\omega \rightarrow k$ :

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ikz} dk$$

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z') e^{-ikz'} dz'$$

#### 8.4. Espectro de frecuencias de un emisor armónico amortiguado

Si un oscilador amortiguado está acoplado a un medio ondulatorio, la perturbación producida en el origen se propagará como un paquete de ondas cuya forma

puede analizarse aplicando los métodos del análisis de Fourier. En primer lugar, es conveniente hallar el espectro de frecuencias de la señal emitida:

$$F(0, t) = \begin{cases} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad \text{y} \quad \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

Según las ecuaciones (8.19) y (8.20):

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega' t) e^{-i\omega t} dt$$

Al expresar  $\cos(\omega' t)$  en forma compleja se obtiene:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\omega' - \omega + i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{1}{-(\omega' + \omega) + i\frac{\Gamma}{2}} \right]$$

esto es:

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\omega' - \omega - i\frac{\Gamma}{2}}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} - \frac{\omega' + \omega + i\frac{\Gamma}{2}}{(\omega' + \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \right]$$

La señal emitida en  $z = 0$  puede expresarse como integral de Fourier así:

$$F(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Para reconstruir la forma del paquete que se propaga en dirección positiva del eje  $z$ , basta remplazar dentro de la integral  $\omega t \rightarrow \omega t - kz$ , ya que cada componente armónica viaja independientemente de las otras con su velocidad de fase  $\frac{\omega}{k}$ . En consecuencia, podemos describir el paquete de ondas emitido por el oscilador amortiguado de la manera siguiente:

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{-i(kz - \omega t)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{-ik(z - vt)} d\omega$$

Los resultados anteriores pueden corroborarse analizando las frecuencias del sonido emitido por una cuerda de un piano o de una guitarra, con ayuda de un arreglo de diapasones que actúan como resonadores de alta calidad.

Un oscilador amortiguado puede servir como modelo clásico de un átomo excitado que regresa a un estado de más baja energía emitiendo un pulso de radiación electromagnética. La expresión resultante para la intensidad espectral  $I(\omega)$ , que es proporcional a  $|\mathcal{F}(\omega)|^2$ , reproduce con una similitud asombrosa la llamada “forma de línea”, calculada cuánticamente con  $\Gamma \ll \omega$ :

$$I(\omega) \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

## 8.5. Propagación de paquetes de ondas

### 8.5.1. Ondas no dispersivas

Considere un paquete de ondas  $\Phi(z, t)$  constituido por una superposición lineal de soluciones armónicas de la ecuación clásica de onda cuyas fases viajan en dirección positiva  $z$  en un medio sin frontera derecha:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \int A(k) \cos [kz - \omega(k)t] dk + \int B(k) \sin [kz - \omega(k)t] dk \\ &= \int A(k) \cos [k(z - vt)] dk + \int B(k) \sin [k(z - vt)] dk \end{aligned} \quad (8.21)$$

donde, por definición de la velocidad de fase, hemos sustituido  $\omega(k) = kv$ .

La configuración inicial del paquete en  $t = 0$  tiene la misma forma que (8.16) y, por tanto, podemos usar los resultados de la sección 8.3 para expresarla en forma compleja:

$$\Phi(z, 0) \equiv F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ikz} dk \quad (8.22)$$

con

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(z') e^{-ikz'} dz' \quad (8.23)$$

Como el paso de  $\Phi(z, 0)$  a  $\Phi(z, t)$  se obtiene simplemente reemplazando dentro de la integral en cada componente armónica la variable  $z$  por  $z - vt$ , podemos escribir:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ik(z - vt)} dk \quad (8.24)$$

Observe que  $\mathcal{F}(k)$  está determinada solamente por condiciones iniciales.

Como la velocidad de fase de las ondas clásicas es una constante independiente de  $k$ , la forma del paquete en cualquier instante puede expresarse así:

$$\Phi(z, t) = F(z - vt)$$

lo cual significa que el paquete, que podría contener información, se traslada sin cambio de forma, con velocidad  $v$ . Se dice entonces que el paquete de ondas clásicas se propaga sin dispersión. De aquí proviene el nombre de “ondas no dispersivas” para ondas armónicas cuya velocidad de fase no depende de  $k$  y, por tanto, tampoco de  $\omega$ .

### 8.5.2. Ondas dispersivas

Veamos cómo se comporta en el transcurso del tiempo un paquete constituido por ondas armónicas dispersivas que viajan en dirección  $z$  y con una forma conocida  $F(z, 0)$  en el instante inicial. A partir de la forma compleja de la integral de Fourier podemos escribir:

$$F(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ikz} dk \quad (8.25)$$

con

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(z', 0) e^{-ikz'} dz' \quad (8.26)$$

Para obtener la forma del paquete en cualquier  $t \neq 0$ , basta hacer la sustitución  $z \rightarrow z - vt$  en cada componente armónica dentro del signo integral. Pero, en las ondas dispersivas la velocidad de fase depende de  $k$  y cada componente armónica se desplaza con su propia velocidad  $v(k)$ . Debido al carácter dispersivo de las ondas, la resultante de la superposición ya no puede escribirse como  $F(z - vt)$ :

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ik[z - v(k)t]} dk \quad (8.27)$$

El comportamiento de un *paquete de ondas dispersivas* puede ser muy complicado puesto que su forma se altera en el transcurso del tiempo. Por ello nos centraremos en el análisis de la propagación de cierto tipo de superposición que tiene algunas características que lo hacen apto para transmitir información con cierto grado de fidelidad, esto es, sin deformación apreciable durante cierto lapso de tiempo.

En primer lugar, podemos hacer un desarrollo de Taylor de la relación de dispersión alrededor del número de onda promedio del paquete  $\bar{k}$ , así:

$$\omega(k) = \omega(\bar{k}) + (k - \bar{k}) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\bar{k}} + \frac{1}{2} (k - \bar{k})^2 \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{\bar{k}} + \dots \quad (8.28)$$

Como condición supondremos que

$$(k - \bar{k})^2 \omega''(k) \rightarrow 0$$

para todo  $k$  que contribuye a la integral con una amplitud  $|\mathcal{F}(k)|$  apreciable, durante todo el tiempo que dura la propagación de la señal. Esta condición se satisface si el paquete es suficientemente estrecho alrededor de  $\bar{k}$ , si la variación de  $\omega$  con  $k$  es suficientemente “suave” y si los tiempos considerados no son demasiado largos.

Al multiplicar (8.26) por  $1 = e^{i\bar{k}z} e^{-i\bar{k}z}$ , reemplazar  $\omega$  por los dos primeros términos de su expansión de Taylor y reordenar obtenemos:

$$\begin{aligned} F(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\bar{k}z - \bar{\omega}t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{i[(k - \bar{k})z - (k - \bar{k})v_g t]} dk \\ &= \frac{e^{i(\bar{k}z - \bar{\omega}t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{i(k - \bar{k})(z - v_g t)} dk \end{aligned} \quad (8.29)$$

donde hemos definido  $\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\bar{k}} \equiv v_g =$  velocidad de grupo del paquete y  $\bar{\omega} = \omega(\bar{k})$ .

Al reescribir:

$$\bar{k}z - \bar{\omega}t = \bar{k}(z - \bar{v}t)$$

donde  $\bar{v} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$  es la velocidad de fase promedio del paquete, vemos que  $F(z, t)$  es el producto de dos funciones:

$$F(z, t) = f(z - \bar{v}t) \mathcal{A}(z - v_g t)$$



Esto significa que, en los casos en que es válida esta aproximación, la información o señal contenida en el factor  $\mathcal{A}$  viaja a la velocidad de grupo  $v_g$  sin deformarse<sup>5</sup>. La función  $f$  describe una onda puramente armónica que viaja con velocidad de fase promedio  $\bar{v}$ . Si  $\mathcal{A}$  es de variación lenta, actúa como amplitud variable o “envolvente” de la oscilación rápida  $f$ . Si la dispersión es normal, esto es, si  $v_g < \bar{v}$ , la onda armónica de frecuencia  $\omega$ , denominada *onda portadora*, es “modulada” por la señal  $\mathcal{A}$ . Un ejercicio al final del capítulo permite visualizar esta relación.

La llamada “dispersión anómala” se presenta cuando  $v_g > \bar{v}$ , y suele ocurrir en la vecindad de las frecuencias de absorción y resonancia del medio material en que se propaga la onda. Pero esto no implica que la información puede viajar con velocidad mayor que la velocidad de grupo. En este rango de frecuencias hay absorción, la frecuencia varía rápidamente con  $k$  y el comportamiento del paquete no puede describirse de manera adecuada con la aproximación anterior. En este caso,  $v_g$  pierde su sentido como velocidad de propagación de una señal. En un dieléctrico ocurre una dispersión anómala para ondas electromagnéticas cuando  $\frac{dn}{d\omega}$  es menor que cero, como lo muestra el ejercicio 8.7.

## 8.6. Técnicas de modulación de amplitud, fase y frecuencia

En la técnica de telecomunicaciones es necesario modular una onda portadora (oscilación “rápida”, típica de cada estación emisora) con las señales que se desea transmitir. En el sistema AM de *modulación de amplitud*, usual en señales de onda media y corta de la radio comercial, a cada emisora se asigna cierto rango de frecuencias alrededor de su frecuencia portadora específica. La envolvente contiene las frecuencias audibles, que están en el rango de 30 Hz a 15 KHz. En el receptor, donde se “sintoniza” la frecuencia portadora, se efectúa un proceso complementario de demodulación para obtener a la salida solamente la señal audible.

Para transmitir un sonido de frecuencia  $\omega_s$  desde una emisora con frecuencia portadora  $\omega_p$ , la señal acústica se convierte en señal electromagnética mediante un micrófono. Luego se le superpone una componente continua DC a fin de que la envolvente de la onda portadora de frecuencia  $\omega_p$  sea siempre positiva, dando como resultado una señal  $y'(t) = A + B \cos(\omega_s t)$ . Esta señal entra en

<sup>5</sup> Los términos siguientes en la serie de Taylor contienen los efectos de la dispersión y pueden calcularse como correcciones a esta primera aproximación. De aquí resulta un ensanchamiento espacial de paquetes en el transcurso del tiempo, denominado “dispersión cromática”.

un circuito que da como salida el producto de la función señal por la función de la onda portadora:

$$\begin{aligned} F(0, t) &= [A + B \cos(\omega_s t)] \cos(\omega_p t) \\ &= A \cos(\omega_p t) + \frac{B}{2} \cos[(\omega_p + \omega_s)t] + \frac{B}{2} \cos[(\omega_p - \omega_s)t] \quad (8.30) \end{aligned}$$

donde  $\omega_p \gg \omega_s$ .

Esto implica que alrededor de la frecuencia portadora  $\omega_p$  se requieren dos bandas, cada una con el ancho del espectro de las frecuencias que se trata de emitir, a fin de evitar interferencias con señales de otras emisoras con frecuencia portadoras vecinas. En la figura 8.3 se ilustra el procedimiento de modulación de amplitud, con  $B = A = 1$ . Sin embargo, técnicamente es posible eliminar la información redundante dejando sólo una de las dos bandas laterales. En el espectro resultante en el análisis de Fourier de la señal (8.30) aparecen la frecuencia portadora y su suma y su diferencia con la frecuencia sonora  $\omega_s$ . Aunque puede parecer asombroso, la frecuencia  $\omega_s$  que se escucha después del proceso de demodulación no forma parte del espectro del paquete de ondas transmitido.

Otra manera de evitar que interfieran señales provenientes de diferentes estaciones consiste en acumular la información, no en la amplitud, sino en la fase de la onda portadora (*modulación de fase*). Esto produce una perturbación de la forma  $\cos[\omega_p t + f(t)]$ , de la cual se extrae en el receptor la señal contenida en  $f(t)$ .

La técnica de *modulación de frecuencia* FM, usual tanto en transmisiones de radio estéreo como de televisión, hace uso de un procedimiento para almacenar la información mediante una alteración de la frecuencia portadora con el tiempo. La perturbación resultante tiene la forma:

$$F(0, t) = \cos \left[ \omega_p t + \int^t f(t') dt' \right]$$

Por cuanto puede definirse consistentemente la frecuencia como la derivada temporal del argumento de la función armónica, la correspondiente frecuencia es:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \left[ \omega_p t + \int^t f(t') dt' \right] = \omega_p + f(t)$$

Esto significa que la señal  $f(t)$  no viaja en la fase sino en la frecuencia, y puede identificarse en cada instante como un cambio de frecuencia. Si se emite una

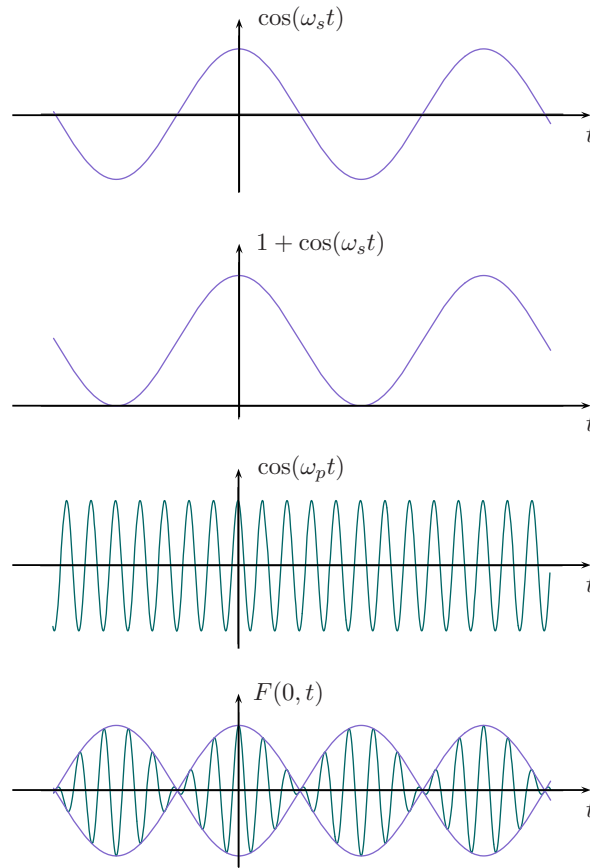
señal periódica de la forma  $B \cos(\omega_s t)$ , la perturbación en el foco emisor ( $z = 0$ ) tendrá la forma:

$$F(0, t) = \cos \left[ \omega_p t + \int^t B \cos(\omega_s t') dt' \right] = \cos \left[ \omega_p t + \frac{B}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \right]$$

Por tanto, la frecuencia instantánea tendrá la forma:

$$\omega(t) = \omega_p + B \cos(\omega_s t)$$

Observe que la diferencia con respecto a la modulación de fase reside en que para cada señal armónica, la amplitud de modulación de la fase ( $\frac{B}{\omega_s}$ ) es inversamente proporcional a su frecuencia  $\omega_s$ . Esto conlleva una ventaja técnica en el control del ancho de banda.



**Figura 8.3** Modulación de amplitud.

## 8.7. Relaciones de incertidumbre

Existe un teorema aplicable a todo desarrollo de Fourier que tiene implicaciones de gran trascendencia teórica y práctica, no sólo para las ondas clásicas sino también para las ondas que representan estados cuánticos de partículas.

Se definen los anchos  $\Delta z$  y  $\Delta k$  de los paquetes  $F(z, t)$  y  $\mathcal{F}(k)$ , como desviaciones estándar de los correspondientes valores medios o valores esperados  $\bar{z}$  y  $\bar{k}$ , tomando como pesos  $|F(z, t)|^2$  y  $|\mathcal{F}(k)|^2$ , así:

$$(\Delta z)^2 = \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{z^2} - \bar{z}^2$$

$$= \frac{\int |F(z, t)|^2 z^2 dz}{\int |F(z, t)|^2 dz} - \left[ \frac{\int |F(z, t)|^2 z dz}{\int |F(z, t)|^2 dz} \right]^2 \quad (8.31)$$

$$(\Delta k)^2 = \overline{(k - \bar{k})^2} = \overline{k^2} - \bar{k}^2 =$$

$$\frac{\int |\mathcal{F}(k)|^2 k^2 dk}{\int |\mathcal{F}(k)|^2 dk} - \left[ \frac{\int |\mathcal{F}(k)|^2 k dk}{\int |\mathcal{F}(k)|^2 dk} \right]^2 \quad (8.32)$$

donde:

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk,$$

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z', 0) e^{-ikz'} dz'$$

Observe que  $F(z, t)$  describe un paquete de ondas armónicas que viajan en dirección positiva  $z$ .

En la teoría del análisis de Fourier puede mostrarse rigurosamente que las indeterminaciones:

$$\Delta z \equiv \sqrt{(\Delta z)^2} \quad (8.33)$$

$$\Delta k \equiv \sqrt{(\Delta k)^2}$$

están conectadas por la desigualdad siguiente<sup>6</sup>:

$$\Delta k \Delta z \geq \frac{1}{2} \quad (8.34)$$

Estos anchos o indeterminaciones suelen denotarse *incertidumbres*, aunque esta denominación sugiere un elemento subjetivo que no se desprende del análisis anterior. Por el contrario, se trata de anchos de posición y número de onda objetivamente definidos.

Si el teorema se aplica al desarrollo de Fourier

$$F(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8.35)$$

de una señal  $F(0, t)$ , producida por un emisor de ondas en el origen de coordenadas, puede demostrarse que el ancho de frecuencias  $\Delta\omega$  y la duración  $\Delta t$  del pulso o paquete de ondas, definidos de manera similar a  $\Delta z$  y  $\Delta k$ , no pueden hacerse arbitrariamente pequeños, pues deben satisfacer la relación:

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2} \quad (8.36)$$

Como veremos en la sección siguiente, el signo igual se presenta para un paquete de *mínima incertidumbre*, que es de tipo gaussiano.

Las relaciones (8.34) y (8.36) implican que un pulso o paquete de corta duración contiene frecuencias en un intervalo  $\Delta\omega$  que no puede hacerse arbitrariamente pequeño. De manera análoga, si se quiere construir un paquete bien localizado, esto es, con  $\Delta z$  pequeño, es necesario superponer ondas armónicas con números de onda  $k$  en un ancho  $\Delta k \geq \frac{1}{2\Delta z}$ .

Se presentan dos casos límites:

- Si el paquete es prácticamente una onda armónica, es decir,  $\Delta k \rightarrow 0$ ,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , su ancho espacial  $\Delta z$  y su duración  $\Delta t$  deben tender a infinito.
- Si el paquete está perfectamente localizado en el espacio y el tiempo, lo que significa  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , el número de onda y la frecuencia deben estar completamente indeterminados, esto es,  $\Delta k \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow \infty$ .

---

<sup>6</sup> Una demostración rigurosa del teorema puede consultarse en H. P. Hsu, *Fourier analysis*, sección 9.3.

Estas relaciones son válidas para ondas dispersivas y no dispersivas, para ondas viajeras y ondas estacionarias.

Si las ondas son dispersivas, el ancho espacial del paquete cambiará (generalmente aumentará) en el transcurso del tiempo. Si  $F(z, t)$  describe un paquete que se propaga en un medio dispersivo, su duración,  $\Delta t$ , medida en puntos fijos por donde pasa el paquete, aumentará en el curso de la propagación.

Pero los anchos espectrales  $\Delta\omega$  y  $\Delta k$ , en sistemas lineales, sólo dependen de condiciones iniciales, como puede verse de su definición y, por tanto, permanecen constantes.

Observe que estas relaciones de incertidumbre son una consecuencia directa de las transformaciones de Fourier. Por ello deben ser válidas para todo tipo de ondas, en particular para ondas cuánticas que describen estados de partículas libres cuya energía  $E$  y *momentum*  $p$  están relacionados con la frecuencia y el número de onda, así:

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k \quad \text{donde} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

siendo  $h$  la constante de Planck.

Un paquete o superposición de ondas armónicas complejas describe la propagación de una partícula con una incertidumbre en posición  $\Delta z$ , y con *momentum*  $p_z$  dentro de un ancho  $\Delta p_z$ , de modo que, de acuerdo con el teorema anterior:

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Esta es una de las llamadas relaciones de incertidumbre de Heisenberg, que implica la imposibilidad de determinar (definir o medir) simultáneamente posición y velocidad de una partícula.

Por otra parte, la relación:

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

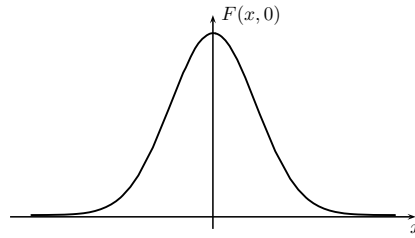
implica que un estado de partícula con energía bien definida ( $\Delta E \rightarrow 0$ ) debe tener duración  $\Delta t \rightarrow \infty$ , esto es, el estado debe ser rigurosamente estable. Si el estado decae, debe tener una incertidumbre o ancho finito de energía, similar al ancho de frecuencias que obtuvimos para el oscilador amortiguado en la sección 8.4.

## 8.8. Paquetes y pulsos

### 8.8.1. Paquete gaussiano

En el instante  $t = 0$  un paquete de ondas tiene la forma que se muestra en la figura 8.4, cuya ecuación es:

$$F(x, 0) = e^{-\alpha x^2} \quad \alpha > 0 \quad (8.37)$$



**Figura 8.4** Paquete gaussiano.

Su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, 0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx$$

es fácil de calcular completando el cuadrado en la exponencial y haciendo el cambio de variable:

$$x \rightarrow y = \sqrt{\alpha} \left( x + i \frac{k}{2\alpha} \right) \quad dx \rightarrow dy = \sqrt{\alpha} dx$$

Mediante el resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

se obtiene:

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

Por argumentos de paridad, resulta:  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{k} = 0$ . A partir de las definiciones (8.31) y (8.32) obtenemos:

$$(\Delta x)_0^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx} = \frac{1}{2(2\alpha)}$$

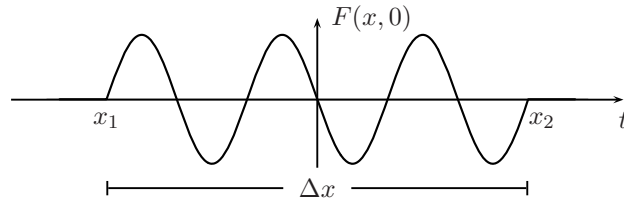
$$(\Delta k)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-\frac{k^2}{2\alpha}} dk}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2\alpha}} dk} = \frac{2\alpha}{2}$$

de donde resulta:

$$\Delta x_0 \Delta k = \frac{1}{2} \quad (8.38)$$

Naturalmente, si este paquete es dispersivo,  $\Delta x$  aumentará con el tiempo, en forma que depende de la relación de dispersión  $\omega(k)$ , mientras que  $\Delta k$  permanece constante.

### 8.8.2. Paquete cuasiarmónico



**Figura 8.5** Paquete cuasiarmónico.

Si un paquete de ondas tiene la forma:

$$F(x, 0) = \begin{cases} A_0 \sin(k_0 x) & x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{con} \quad x_2 - x_1 = n\lambda_0 = \frac{2n\pi}{k_0} \\ 0 & x_2 \leq x \leq x_1 \end{cases} \quad (8.39)$$

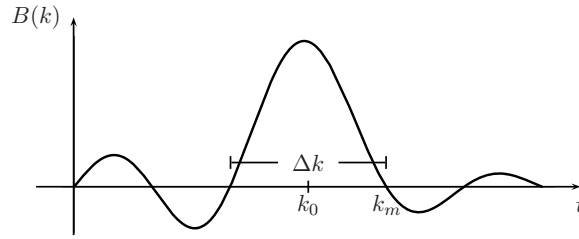
como se aprecia en la figura 8.5, es conveniente hacer un corrimiento en el origen de coordenadas,  $x_1 \rightarrow -\frac{L}{2}$ ,  $x_2 \rightarrow \frac{L}{2}$ , de modo que la función  $F(x, 0)$  sea



impar, y utilizar la forma real de la expansión de Fourier, con lo cual se anula la función  $A(k)$  de acuerdo con la ecuación (8.17). En este caso:

$$\begin{aligned}
 B(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_0 \sin(k_0 x) \sin(kx) dx \\
 &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [\cos[(k - k_0)x] - \cos[(k + k_0)x]] dx \\
 &= \frac{A_0}{\pi} \left[ \frac{\sin[(k - k_0)\frac{L}{2}]}{k - k_0} - \frac{\sin[(k + k_0)\frac{L}{2}]}{k + k_0} \right] \quad (8.40)
 \end{aligned}$$

En la forma real del desarrollo de Fourier  $k > 0$ ; entonces la expresión anterior sólo tiene magnitud apreciable alrededor del máximo en  $k_0$ , como puede verse en la figura 8.6.



**Figura 8.6** Desarrollo de Fourier de paquete cuasiarmónico.

Para un análisis semicualitativo de las relaciones de indeterminación podemos tomar como orden de magnitud del ancho  $\Delta x$  del paquete (en  $t = 0$ ) la longitud  $L$  del pulso cuasiarmónico y aproximar el ancho  $\Delta k$  al ancho del máximo central de  $A(k)$ , esto es:

$$\Delta k \approx 2(k_m - k_0)$$

donde  $k_m$  es el primer cero de  $A(k)$ :

$$(k_m - k_0) \frac{L}{2} = \pi$$

En consecuencia,

$$\Delta k \Delta x \approx 4\pi \quad (8.41)$$

Observe que si  $L$  es muy pequeño (pulso bien localizado),  $\Delta k$  es grande (indeterminación grande en el número de onda). En el otro extremo, cuando  $L \rightarrow \infty$ , el paquete se convierte en una oscilación armónica (con  $k$  perfectamente definido pero sin localización definida).

Al aplicar un análisis similar a un paquete que describe el estado de una partícula cuántica, se concluye que cuanto más definida es su posición ( $L \rightarrow 0$ ) tanto más indefinido debe ser su *momentum*. Por principio no es posible un estado cuántico de partícula con posición y *momentum* simultáneamente bien definidos. La noción de *trayectoria clásica*, con posición y *momentum* perfectamente definidos en cada instante, pierde sentido en el nivel cuántico de descripción.

### 8.8.3. Pulso de duración finita

Un emisor de ondas ubicado en el origen de coordenadas produce un pulso constituido por  $N + 1$  oscilaciones de amplitudes iguales y frecuencias separadas por intervalos iguales de tamaño  $\delta\omega$ :

$$F(0, t) = -A \left[ \sin(\omega_0 t) + \sin((\omega_0 + \delta\omega)t) + \sin((\omega_0 + 2\delta\omega)t) + \cdots + \sin(\omega_N t) \right] \quad (8.42)$$

donde hemos definido:

$$\omega_N = \omega_0 + N\delta\omega$$

Al usar notación compleja:

$$\begin{aligned} F(0, t) &= -A \operatorname{Im} e^{i\omega_0 t} \left[ 1 + e^{i\delta\omega t} + e^{i2\delta\omega t} + \cdots + e^{iN\delta\omega t} \right] \\ &= -A \operatorname{Im} e^{i\omega_0 t} S \end{aligned}$$

donde:

$$S = \left[ 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^N \right] \quad \text{con} \quad a = e^{i\delta\omega t}$$

pero  $aS = S + a^{N+1} - 1$ , entonces:

$$S = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1} = a^{\frac{N}{2}} \frac{a^{\frac{N+1}{2}} - a^{-\frac{N+1}{2}}}{a^{1/2} - a^{-1/2}}$$

En consecuencia, podemos escribir:

$$F(0, t) = -A \operatorname{Im} e^{i\omega_0 t} e^{i\frac{N}{2}\delta\omega t} \frac{\operatorname{sen} \left[ (N+1) \frac{\delta\omega}{2} t \right]}{\operatorname{sen} \left[ \frac{\delta\omega}{2} t \right]}$$

Pero:

$$\frac{\omega_0 + N\delta\omega}{2} = \frac{\omega_N}{2}$$

con lo cual:

$$F(0, t) = -A \operatorname{sen}(\bar{\omega}t) \frac{\operatorname{sen} \left[ \frac{N+1}{N} \frac{\Delta\omega}{2} t \right]}{\operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{N} t \right]}$$

donde:

$$\omega_N - \omega_0 \equiv \Delta\omega = N\delta\omega \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_N}{2}$$

Si hacemos tender  $N \rightarrow \infty$ ,  $\delta\omega \rightarrow 0$ , de manera que  $\Delta\omega$  permanezca finito, podemos aproximar:

$$\frac{N+1}{N} \rightarrow 1 \quad \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{N} t \right] \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{N} t$$

con lo cual:

$$F(0, t) = -N A \operatorname{sen}(\bar{\omega}t) \frac{\operatorname{sen} \left[ \frac{\Delta\omega}{2} t \right]}{\frac{\Delta\omega}{2} t} \quad (8.43)$$

La forma del pulso se ilustra en la figura 8.7.

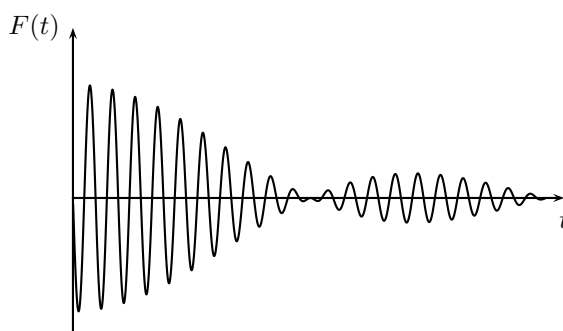
Si tomamos como orden de magnitud del ancho  $\Delta t$  del paquete el tiempo al cabo del cual la envolvente tiene su primer cero, esto es:

$$\frac{\Delta\omega \Delta t}{2} = \pi$$

obtenemos una relación de incertidumbre entre frecuencia y duración del paquete:

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad (8.44)$$

en concordancia con el teorema general.



**Figura 8.7** Pulso de duración finita.

## Ejercicios

- 8.1** Desarrolle en componentes armónicas una perturbación  $F(t)$  que tiene la forma de un pulso cuadrado y haga una evaluación aproximada del producto de la duración del pulso por la indeterminación en frecuencia.
- 8.2** Muestre que si se superponen dos ondas *dispersivas* de frecuencias vecinas  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , que viajan en idéntica dirección  $z$ , la perturbación resultante es una sucesión periódica de paquetes con frecuencia de modulación  $\frac{\Delta\omega}{2}$  y frecuencia rápida igual a la frecuencia media  $\bar{\omega}$ . Haga dos gráficas en tiempos diferentes para ilustrar la diferencia entre la velocidad de la envolvente (o velocidad de grupo) y la velocidad de fase promedio. Señale claramente la diferencia con la propagación de una perturbación que tiene idéntica forma en el origen ( $z = 0$ ) pero viaja en un medio no dispersivo.
- 8.3** Mediante análisis de Fourier, determine  $y(z, t)$  para una cuerda de longitud  $L$  con extremos fijos, a partir de las condiciones iniciales  $\Psi(z) = z(L - z)$ ,  $\chi(z) = 0$  ( $0 \leq z \leq L$ ).
- 8.4** Mediante aplicación de condiciones de frontera, muestre que la forma más general de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre, que satisface la ecuación de onda clásica, puede representarse en cualquier tiempo en el intervalo  $[0, L]$  por una serie de la forma:

- a. Si el extremo derecho es libre

$$f(z) = \sum F_n \sin(k_n z) \quad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

b. Si el extremo derecho es fijo

$$f(z) = \sum G_n \cos(k_n z) \quad \text{con} \quad k_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Muestre que estas funciones definidas sobre todo el eje  $z$  son periódicas con período  $P = 4L$  y que, por tanto, a) y b) pueden interpretarse como expansiones de Fourier de las respectivas funciones periódicas.

**8.5** Expresé los coeficientes reales  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  de la expansión de Fourier en función del coeficiente complejo  $\mathcal{F}(\omega)$  en la ecuación (8.20).

**8.6** Halle una expresión para la velocidad de grupo de un paquete de ondas armónicas que satisfacen la ecuación de Klein–Gordon, suponiendo conocidos los valores del número de onda y la frecuencia promedios. Compare la velocidad de grupo con la velocidad de fase promedio y diga si estas ondas muestran dispersión normal o anómala.

**8.7** Cada una de las componentes cartesianas del campo electromagnético  $E_i(z, t)$ ,  $B_i(z, t)$  satisface una ecuación de onda que, en un medio transparente con un índice de refracción  $n(\omega)$ , tiene para cada frecuencia la forma de la ecuación (7.56) con  $\sigma = 0$  y  $v = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k}$ . Halle la velocidad de grupo de un paquete en función de  $\frac{dn(\omega)}{d\omega}$  y diga en qué caso puede presentarse dispersión anómala.

**8.8** En mecánica cuántica, para una partícula libre no relativista de masa  $m$  son válidas las relaciones siguientes:  $p = \hbar k$ ,  $E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m}$ . Halle la relación de dispersión y la velocidad de grupo de un paquete de ondas armónicas. Si en  $t = 0$  el paquete era de tipo gaussiano (incertidumbre mínima), diga lo que ocurrirá en el transcurso del tiempo con las indeterminaciones  $\Delta p$  y  $\Delta z$ .

**8.9** a. Muestre que la expansión en serie de una función de período  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  de la forma:

$$F(t) = \sum [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \quad \text{donde} \quad \omega_n = n\omega_0$$

puede expresarse de la forma:

$$F(t) = \sum C_n e^{i\omega_n t} \quad \text{donde} \quad C_{-n} = C_n^*$$

y exprese los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  en función de las partes real e imaginaria de los  $C_n$ .

b. Muestre que:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t') e^{-i\omega_n t'} dt'$$

y que, al tomar el límite  $T \rightarrow \infty$ , la suma tiende a una integral sobre  $\omega$  con  $d\omega = \omega_0 dn$ , y la expansión de la función  $F(t)$  adquiere la forma compleja:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

donde  $\mathcal{F}(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $F(t)$ , de acuerdo con las ecuaciones (8.19) y (8.20).

c. En el espectro de frecuencias de un oscilador armónico amortiguado, identifique los coeficientes  $A(\omega)$  y  $B(\omega)$  de la expansión real en función de la transformada compleja de Fourier  $\mathcal{F}(\omega)$  obtenida en la sección 8.4.

## Capítulo 9

# Ondas sonoras

En este capítulo se analizan los modos normales de sistemas vibrantes capaces de producir ondas sonoras, como cuerdas, tubos y membranas, y se explican, con base en modelos físicos, rasgos característicos de los sonidos.

- Se introducen los conceptos básicos de ondas acústicas, ruido, sonido musical, tono puro, infrasonido y ultrasonido.
- A partir de un modelo de cuerda idealmente elástica se reencuentra la ecuación clásica para ondas transversales no dispersivas y se analizan algunas implicaciones musicales de su espectro de frecuencias normales.
- Al incorporar en el modelo efectos de rigidez, se reencuentra la ecuación de Klein-Gordon para una cuerda semirrígida y se analiza la desviación de su espectro de frecuencias normales con respecto a la serie armónica de una cuerda perfectamente elástica.
- Se deduce una ecuación de onda bidimensional para una membrana elástica, se analizan sus modos normales y se introduce el concepto de *degeneración de frecuencias*.
- Se deduce la ecuación de ondas longitudinales en una varilla y se calculan velocidades de fase y frecuencias normales típicas de cuerdas metálicas.
- Con base en algunas suposiciones hidrodinámicas, se halla la ecuación que satisfacen las ondas longitudinales en un gas confinado en un tubo sonoro y se analizan sus modos normales con diferentes condiciones de frontera.
- Se precisan las características percibidas de un sonido musical y las bases físicas de la consonancia y la disonancia.

## 9.1. Sonido, ultrasonido, infrasonido y ruido

En sentido físico, ondas acústicas o sonoras son ondas longitudinales que se propagan en medios materiales (sólidos, líquidos y gases). Esto significa que las partículas del medio oscilan en la misma dirección de propagación de la perturbación.

En cierto rango de frecuencias, comprendidas entre 20 Hz y 20 KHz, estas ondas pueden excitar el sistema auditivo humano oído–cerebro produciendo la sensación de *sonido*. Para que esto ocurra es necesario además que la amplitud de las oscilaciones del aire esté comprendida entre un umbral inferior y uno superior, que representan cambios fraccionales de presión  $\frac{\Delta P}{P_{atm}}$  del orden de  $2 \times 10^{-10}$  y  $2 \times 10^{-4}$ , respectivamente.

El sonido se propaga en el aire con una velocidad aproximada de 340 m/s, que puede variar con factores como la temperatura, la humedad, el grado de contaminación, etc. Esto implica que las longitudes de ondas perceptibles como sonido a través del aire varían entre 1,7 cm y 17 m aproximadamente. Ondas acústicas con frecuencias por debajo de este rango, como las ondas de compresión y rarefacción producidas en el interior de la Tierra durante un sismo, son inaudibles y se denominan *infrasonido*.

Ondas longitudinales con frecuencias por encima del rango audible (*ultrasonido*) pueden ser producidas mediante efecto piezo-eléctrico por las oscilaciones de un cristal de cuarzo en resonancia con un campo eléctrico alterno. Su longitud de onda en el aire puede llegar a ser comparable con la longitud de onda de la luz visible. La reflexión de ondas de ultrasonido está en la base de una amplia gama de escáneres para fines industriales y médicos que permiten, por ejemplo, obtener imágenes tridimensionales del interior del corazón y otros órganos.

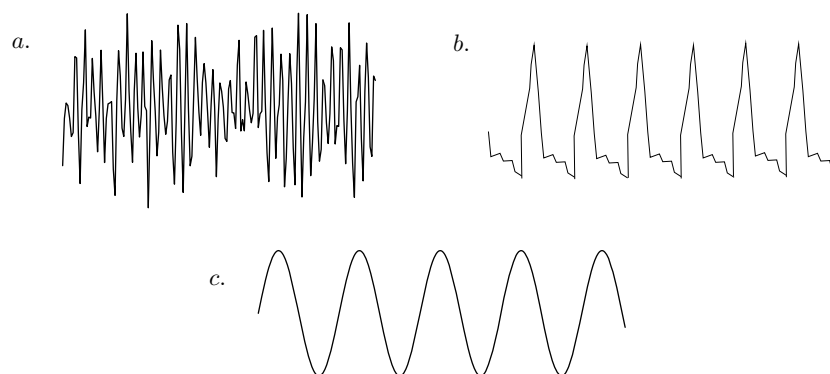
En superfluidos como el helio a muy bajas temperaturas ( $T < 2,18$  K) se han detectado diversos tipos de ondas longitudinales que se denominan genéricamente sonidos. El *primer sonido* es una onda de presión y densidad, como el sonido ordinario, detectable con micrófonos especiales o con transductores piezo-eléctricos como el cuarzo, para frecuencias del orden de MHz. El *segundo sonido* es una onda de temperatura que no se propaga como una perturbación térmica normal, regida por la ecuación de difusión del calor, sino de acuerdo con la ecuación clásica de onda. Este tipo de “sonido” puede ser excitado en el helio superfluido con pulsos de calor y detectado mediante termómetro.

Las ondas acústicas que percibimos usualmente como sonido suelen ser generadas por cuerdas vibrantes, como las cuerdas vocales o las de un violín o un piano, cuyo efecto es generalmente amplificado por cajas de resonancia. O por columnas de aire confinadas en tubos sonoros, como los de un órgano o un clarinete. O por membranas como las de un parlante, un tambor o un xilófono.



Las vibraciones de estas fuentes producen ondas de presión que se propagan en el aire circundante y, si tiene frecuencias y amplitudes dentro de los rangos adecuados a nuestro sistema oído–cerebro, son percibidas como sonido “musical” en sentido amplio. Otras fuentes de ondas acústicas, como la caída del agua, un equipo de sonido o de televisión no sintonizados, el vapor escapándose de una válvula o un aplauso prolongado, producen perturbaciones en el aire que percibimos como *ruido*.

La señal de un micrófono, registrada en un osciloscopio de rayos catódicos, exhibe los rasgos que diferencian un ruido de un sonido “musical”. Un ruido produce una traza que muestra cambios en la presión irregulares, aleatorios, no periódicos, como se ilustra en la figura 9.1.



**Figura 9.1** Cambios de presión en: a) ruido blanco, b) sonido musical, c) tono puro.

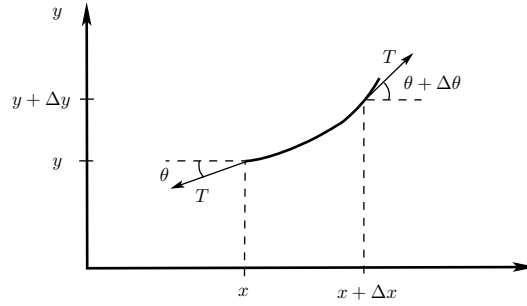
Sin embargo, no es fácil distinguir en un osciloscopio a primera vista una señal que presenta puro ruido (o “ruido blanco”) de una señal correspondiente al lenguaje articulado. Experimentos realizados con varias personas que pronuncian las mismas palabras muestran dos hechos paradójicos: las señales producidas en el osciloscopio por diferentes personas no muestran entre sí semejanzas notorias, y todas presentan una apariencia similar al ruido blanco<sup>1</sup>. Nuestro cerebro ha desarrollado en un largo proceso evolutivo la capacidad de reconocer fielmente la diferencia de estas señales respecto a un ruido carente de información y, al mismo tiempo, de captar su identidad como portadoras de la misma información. En contraste, el reconocimiento de voz por parte de computadores digitales ha resultado ser un problema tecnológico de difícil solución.

<sup>1</sup> Véase Charles Taylor, *Exploring music*, Londres, Institute of Physics, 1992, pp. 9 y siguientes.

## 9.2. Ondas transversales en cuerda no dispersiva

Consideremos una cuerda de masa total  $m$ , longitud  $L$  y densidad lineal de masa uniforme  $\mu = \frac{m}{L}$ , cuya tensión, de magnitud  $T$  (que suponemos aproximadamente constante), se fija mediante algún soporte en los extremos. En esta primera aproximación ignoramos efectos secundarios debidos a rigidez, gravedad o pérdida de energía, que podría ser causada por fricción o emisión de ondas al medio circundante.

Si elegimos el eje  $x$  a lo largo de la cuerda en equilibrio (sin deformación) y suponemos que los desplazamientos son puramente transversales (en dirección del eje  $y$ ) un segmento de la cuerda tendrá en cierto instante  $t$  la forma descrita en la figura 9.2. En este modelo las únicas fuerzas que actúan sobre el segmento son las tensiones en sus extremos. Esto implica que sólo existe fuerza neta, transversal, si el segmento está curvado.



**Figura 9.2** Fuerzas sobre cuerda perfectamente elástica.

Al suponer los desplazamientos suficientemente pequeños podemos aproximar  $\sin \theta \approx \tan \theta$  (que es la pendiente de la cuerda en cada punto), y  $\cos \theta \approx 1$ . Podemos entonces escribir:

$$F_y = T \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin(\theta) \approx T [\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan(\theta)]$$

$$F_x = T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos(\theta) \approx 0$$

Al aplicar la segunda ley de Newton al segmento y utilizar:

$$\tan \theta = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \quad \tan(\theta + \Delta\theta) = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

resulta para la componente  $y$  de la fuerza:

$$F_y = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right]$$

Al dividir la ecuación por  $T\Delta x$  y tomar el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ , resulta:

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Observe que, por consistencia, la dimensión de  $\frac{\mu}{T}$  debe ser  $(\text{s/cm})^2$ .

Si definimos  $u \equiv \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , obtenemos la ecuación de onda clásica para la cuerda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9.1)$$

De esta manera, a partir de un modelo continuo, hemos llegado a la misma ecuación de onda obtenida en el capítulo 6, como límite continuo del sistema de ecuaciones de movimiento de una sucesión de masas acopladas.

En la ecuación de onda clásica,  $u$  coincide con la velocidad de fase  $v$ . Esta velocidad depende sólo de la densidad y la tensión de la cuerda y, por tanto, es independiente de la frecuencia.

Como se mostró en el capítulo 7, los modos normales de una cuerda elástica con extremos fijos tienen la forma:

$$y^{(n)} = C_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \omega_n = u k_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

o de modo equivalente:

$$\nu_n = n\nu_1 \quad \nu_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (9.2)$$

Esto significa que en una cuerda de longitud  $L$ , densidad  $\mu$  y tensión  $T$  fijas sólo pueden ser excitadas vibraciones con frecuencias que son múltiplos de una frecuencia fundamental  $\nu_1$ . El movimiento más general de una cuerda libre es una superposición de sus modos normales con amplitudes  $C_n$  que dependen de la forma de excitación. Por ejemplo, en una cuerda de piano el perfil de

desplazamientos iniciales  $y(x, 0)$  es cero, pero el perfil de velocidades iniciales depende de los puntos donde golpea el martillo, de su velocidad y de algunas características físicas del mismo. En instrumentos como la guitarra, el perfil de velocidades iniciales es cero, pero el perfil de desplazamientos determina las amplitudes de los modos normales que estarán presentes en la vibración.

Nuestro sistema auditivo oído-cerebro tiene una peculiaridad conocida desde la antigüedad pero aún no suficientemente explicada. Es un hecho bien establecido que notas con frecuencias que son múltiplos exactos de una frecuencia fundamental, percibidas simultáneamente, producen un efecto agradable o “armónico”, en tanto que otras superposiciones pueden producir un sonido áspero, ronco o discordante.

El hecho de que en una cuerda elástica sólo puedan excitarse simultáneamente vibraciones *armónicas*, con frecuencias que son múltiplos exactos de una frecuencia fundamental, explica la calidad musical de los sonidos emitidos y hace que las cuerdas elásticas sean particularmente aptas como osciladores primarios en muchos instrumentos musicales. Para que el movimiento de este oscilador primario pueda producir ondas sonoras de suficiente intensidad, debe ser amplificado por cajas de resonancia, visibles en violines, guitarras, pianos y arpas.

En el caso de la voz humana, la fuente primaria de sonido son las cuerdas vocales, un par de bandas o membranas en la laringe con tensión y separación variables, que vibran cuando el aire de los pulmones pasa a través de ellas. La altura del sonido emitido usualmente se controla variando la tensión de las cuerdas vocales, pero puede modificarse también alterando la forma de las cavidades de la boca, la nariz y la garganta. Todas las tonalidades requeridas en el habla o en el canto son obtenidas modificando los parámetros del sistema fonador. Por ejemplo, al mantener constante la tensión de las cuerdas vocales, la forma de la cavidad de la boca determina el sonido que el cerebro interpreta como una vocal determinada.

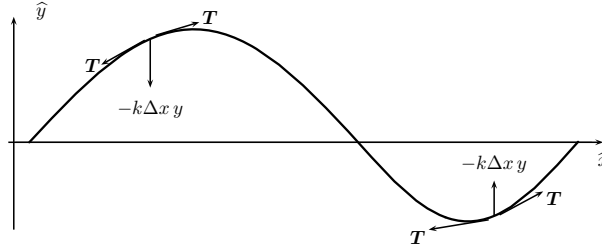
La frecuencia fundamental de una cuerda puede variarse al modificar uno o varios de los factores  $T$ ,  $L$ ,  $\mu$  que la determinan. Esto permite construir instrumentos, como los de la familia del violín, con un número pequeño de cuerdas de diferentes densidades. Todas las notas de la escala musical pueden obtenerse variando las longitudes efectivas de las cuerdas mediante presión de los dedos en puntos adecuados. En instrumentos como el piano hay una tecla para cada nota de la escala musical; por ello puede decirse con Charles Taylor que “un piano es realmente un conjunto de 88 instrumentos separados, uno para cada nota” (*op. cit.*, p. 16).

La posibilidad de disminuir la frecuencia fundamental de una cuerda aumentando el valor de  $\mu$  está limitada por el hecho de que, al aumentar su densidad, la cuerda tiende a adquirir características de varilla rígida y, como veremos

en la sección siguiente, esto conduce a un cambio en el espectro de frecuencias normales y a una consiguiente pérdida de “armonicidad”. Esto explica por qué las cuerdas correspondientes a las frecuencias fundamentales más bajas en pianos, violines y guitarras tienen enrollamientos de hilos muy finos de plata para aumentar su densidad sin incrementar notoriamente su rigidez.

### 9.3. Ecuación de ondas dispersivas en cuerda semirrígida

Ninguna cuerda real es perfectamente flexible. Toda cuerda posee cierto grado de rigidez que puede simularse con una fuerza transversal que se opone al “doblamiento”, análoga a la fuerza de rigidez de una varilla. En un modelo rudimentario podemos suponer la fuerza directamente proporcional al desplazamiento transversal de la cuerda, como si ésta estuviera conectada lateralmente en su configuración de equilibrio mediante bandas elásticas de constante  $k$  por unidad de longitud de la cuerda.



**Figura 9.3** Fuerzas sobre cuerda semirrígida.

Sobre cada segmento de la cuerda de longitud  $\Delta x$  actúa, además de la resultante de las tensiones en los extremos, una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento transversal  $y$ . La ecuación de movimiento tiene la forma:

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k \Delta x y$$

la cual puede expresarse en la forma canónica:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\omega_0^2 y \quad (9.3)$$

donde hemos definido:

$$u \equiv \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \frac{k}{\mu} \equiv \omega_0^2$$

Observe que (9.3) es una ecuación de onda del tipo Klein–Gordon, de forma idéntica a la que rige, en el límite continuo, la red de péndulos acoplados por resortes y la red electromagnética análoga.

Como se demostró en el capítulo 7, la ecuación (9.3) con condición de frontera de extremos fijos tiene soluciones de modos normales de la forma:

$$y^{(n)} = C_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \omega_n = \sqrt{\omega_0^2 + k_n^2 u^2}$$

o de modo equivalente:

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 + \frac{n^2 \pi^2 T}{L^2 \mu}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (9.4)$$

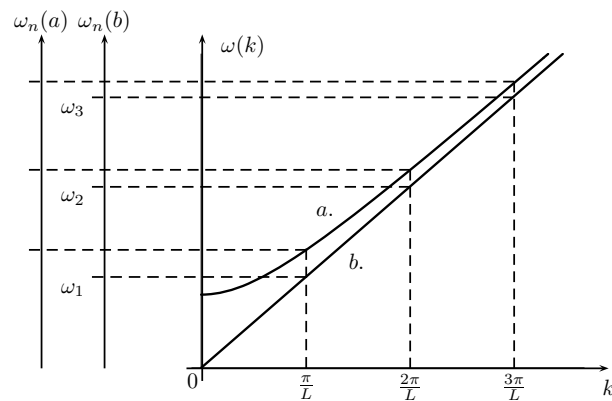
Como puede observarse, la relación de dispersión  $\omega(k)$  no es lineal (véase la figura 7.1). Esto tiene dos consecuencias de importancia teórica y práctica, sobre todo en el área tecnológica del sonido y las comunicaciones:

- La velocidad de fase  $v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{u^2 + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2}$  depende de  $k$  y, por tanto, de  $\omega$ . Esto implica que ondas armónicas con diferente longitud de onda que viajan en igual dirección tienen diferentes velocidades de fase, esto es, sus puntos de fase constante, por ejemplo máximos, se trasladan con velocidades diferentes. Esto a su vez implica que cualquier paquete o superposición de ondas armónicas se “desalineará” o deformará en el transcurso del tiempo.
- Las frecuencias normales de una cuerda que no es perfectamente elástica no constituyen una serie armónica donde los términos son múltiplos de una frecuencia fundamental. Si bien la forma de los modos normales no cambia, la rigidez produce un corrimiento positivo de las frecuencias normales respecto a las de una cuerda no dispersiva (véanse la figura 9.4 y el ejercicio 9.1).

Sin embargo, este modelo simple de rigidez no predice correctamente el comportamiento de la cuerda a altas frecuencias. En cuerdas reales, el efecto de

la rigidez se hace más notorio a medida que aumenta la curvatura de la cuerda y, por tanto, la curva  $\omega$  versus  $k$  tiende hacia arriba para valores altos de  $k$ , en vez de tender a coincidir con la línea recta, como predice este modelo. Por esta razón, los sobretonos más altos en un piano (que posee cuerdas más gruesas y rígidas que otros instrumentos de cuerda) son más agudos que los correspondientes a la serie armónica.

Pero en contra de lo esperado, esta pequeña ruptura de la armonicidad no produce en nosotros un efecto desagradable. Más bien confiere a los sonidos resultantes una propiedad que los músicos denominan “calidez” y que está ausente en teclados donde los tonos son sintetizados electrónicamente en riguroso acuerdo con la serie armónica.



**Figura 9.4** Curvas de dispersión para cuerda: a) semirrígida y b) elástica.

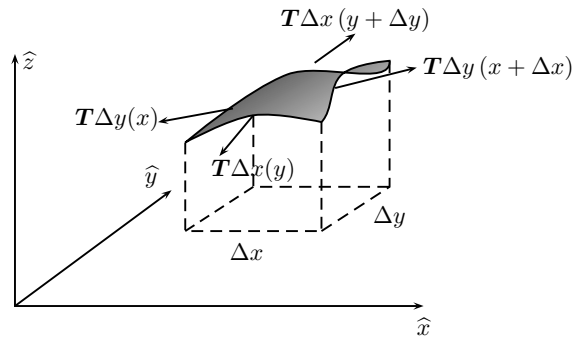
## 9.4. Ecuación de onda bidimensional en membrana elástica

Supongamos que en equilibrio la membrana ocupa cierta área limitada por un contorno  $C$  en el plano horizontal ( $z = 0$ ). Ignorando efectos de gravedad, rigidez y fricción, las únicas fuerzas que actúan sobre un segmento de membrana son las tensiones superficiales en los bordes (como se indica en la figura 9.5). La tensión superficial  $T$  actúa en los planos tangentes a la membrana en el sentido de la normal al contorno lineal que delimita el área, y se define como fuerza por unidad de longitud del contorno.

El tipo de coordenadas para describir el movimiento debe elegirse de tal manera que facilite la aplicación de las condiciones de frontera y, por tanto, la

solución de la ecuación de onda. Analizaremos una membrana con fronteras rectangulares para las cuales es conveniente el empleo de coordenadas cartesianas.

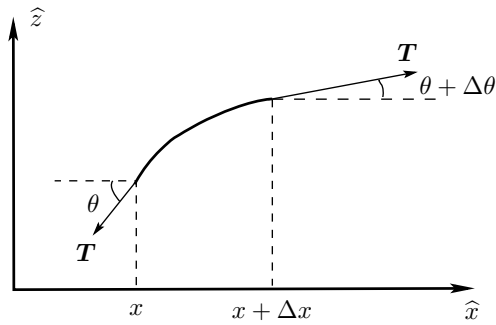
Suponemos que las componentes horizontales de las tensiones se cancelan, y por consiguiente ignoramos cualquier posible desplazamiento horizontal de la membrana. Como ya es usual, haremos la aproximación de pequeñas oscilaciones, lo cual implica que las ecuaciones son válidas sólo para desplazamientos verticales  $z(x, y, t)$  pequeños, y suponemos que la masa por unidad de área,  $\sigma$ , y la magnitud,  $T$ , de la tensión superficial, permanecen aproximadamente constantes a pesar de las deformaciones.



**Figura 9.5** Fuerzas sobre segmento de membrana.

Sobre la masa  $\sigma \Delta x \Delta y$  actúa una fuerza neta  $F_z$  que es la suma de las fuerzas  $F_{1z}$  y  $F_{2z}$  sobre los segmentos de longitud  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , respectivamente.

Para hallar la fuerza vertical  $F_{2z}$  resultante de las tensiones sobre los segmentos de longitud  $\Delta y$  consideramos una proyección sobre el plano  $xz$ :



**Figura 9.6** Fuerzas sobre el segmento de membrana en el plano  $xz$ .



$$\begin{aligned}
F_{2z} &= \Delta y [T_z(x + \Delta x) - T_z(x)] = \Delta y T [\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan(\theta)] \\
&= \Delta y T \left[ \frac{\partial z(x + \Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right] = \Delta y \Delta x T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

donde hemos aproximado  $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{\partial z}{\partial x}$ .

De manera análoga, consideramos una proyección sobre el plano  $yz$  para analizar la fuerza vertical sobre el segmento de longitud  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned}
F_{1z} &= \Delta x [T_z(y + \Delta y) - T_z(y)] = \Delta x T [\tan(\phi + \Delta\phi) - \tan(\phi)] \\
&= \Delta x T \left[ \frac{\partial z(x, y + \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right] = \Delta y \Delta x T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

donde hemos aproximado  $\sin(\phi) \approx \tan(\phi) = \frac{\partial z}{\partial y}$ .

Al aplicar la segunda ley de Newton al segmento rectangular de membrana resulta:

$$\sigma \Delta y \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta y \Delta x T \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = \Delta y \Delta x T \nabla^2 z$$

Al definir  $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ , dividir la ecuación por  $\Delta y \Delta x T$  y tomar los límites  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , se obtiene la ecuación de onda clásica bidimensional:

$$\nabla^2 z(x, y, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9.5)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano, y la función  $z(x, y, t)$  describe la deformación de la membrana en cada instante.

## 9.5. Modos normales de una membrana rectangular

Consideremos una membrana rectangular con bordes fijos. Las condiciones de frontera toman la forma:

$$z(0, y, t) = 0 \quad z(L_x, y, t) = 0 \quad z(x, 0, t) = 0 \quad z(x, L_y, t) = 0$$

Al sustituir en la ecuación de onda soluciones especiales de la forma:

$$z = F(x, y) G(t)$$

y dividir la ecuación por  $F(x, y)G(t)$ , resulta:

$$v^2 \frac{F_{xx} + F_{yy}}{F(x, y)} = \frac{G_{tt}}{G(t)}$$

donde hemos utilizado una notación corriente para segundas derivadas parciales.

Observe que el lado derecho de la ecuación es una función que sólo depende de  $t$ , mientras que el lado izquierdo sólo depende de las variables  $x, y$ . Pero dos funciones de variables independientes no pueden ser idénticas para todos los valores de las variables a menos que sean iguales a una única constante. Si denominamos la constante  $-\omega^2$ , obtenemos dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 G}{dt^2} = -\omega^2 G(t)$$

$$F_{xx} + F_{yy} = -\frac{\omega^2}{v^2} F(x, y) = -k^2 F(x, y)$$

La solución de la primera es inmediata:

$$G(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Para resolver la segunda ecuación aplicamos de nuevo el método de separación de variables suponiendo una solución de la forma  $F(x, y) = X(x)Y(y)$ , dividiendo la ecuación resultante por  $F$  e igualando ambos lados a una constante que denominaremos  $-k_x^2$ :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2\right) = -k_x^2$$

La solución de estas ecuaciones:

$$X''(x) = -k_x^2 X(x)$$

$$Y''(y) = -[k^2 - k_x^2] Y(y) = -k_y^2 Y(y)$$

con las condiciones de frontera de extremos fijos, es inmediata:

$$X(x) = B \sin(k_x x) \quad Y(y) = C \sin(k_y y)$$

con:

$$k_x = n_1 \frac{\pi}{L_x} \quad k_y = n_2 \frac{\pi}{L_y} \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (9.6)$$

Al llevar estas soluciones a la ecuación de movimiento resulta el espectro de frecuencias normales:

$$\omega_{n_1 n_2} = v \sqrt{\left(n_1 \frac{\pi}{L_x}\right)^2 + \left(n_2 \frac{\pi}{L_y}\right)^2} \quad (9.7)$$

La solución general para el movimiento libre de la membrana rectangular con bordes fijos toma la forma:

$$z(x, y, t) = \sum \sum C_{n_1 n_2} \sin \left[ \frac{n_1 \pi}{L_x} x \right] \sin \left[ \frac{n_2 \pi}{L_y} y \right] \cos(\omega_{n_1 n_2} t + \delta_{n_1 n_2}) \quad (9.8)$$

donde las amplitudes y fases de los distintos modos normales dependen de la forma de excitar las vibraciones.

El espectro de frecuencias normales de sistemas bidimensionales presenta dos diferencias importantes con respecto a los modos normales de sistemas que satisfacen la ecuación de onda clásica unidimensional:

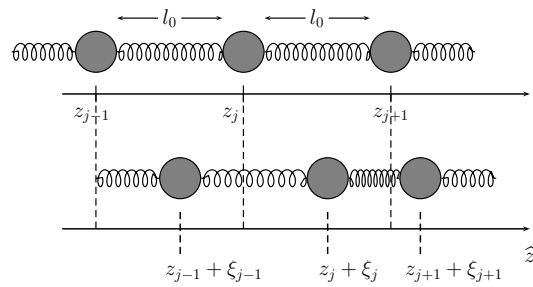
- a. En el caso unidimensional, existe para cada modo normal una frecuencia determinada y, a la inversa, cada frecuencia normal determina un modo de oscilación. En el caso bidimensional, un modo está caracterizado por la *pareja ordenada* de números enteros  $(n_1, n_2)$ . Pero la frecuencia normal depende de una suma de cuadrados, y puede ocurrir que un mismo valor de frecuencia corresponde a varios modos normales de oscilación (véase el ejercicio 9.2). En tal caso se dice que esta frecuencia es *degenerada* y su grado de degeneración es el número de modos diversos con idéntica frecuencia. En mecánica cuántica las frecuencias normales están directamente relacionadas con niveles de energía, y los modos normales con estados cuánticos denominados *estacionarios*. El número de estados cuánticos correspondientes a cada nivel de energía, es decir, su grado de degeneración, juega un papel importante en el cálculo de la entropía en mecánica estadística cuántica.
- b. Las frecuencias normales para sistemas regidos por la ecuación de onda clásica unidimensional son múltiplos de la frecuencia fundamental o primer armónico. En el caso bidimensional, estas frecuencias no constituyen una sucesión armónica, ni siquiera en la membrana cuadrada, como puede verificarse al dividir las primeras frecuencias normales por la frecuencia fundamental  $\omega_{11}$ . El hecho de que las frecuencias excitadas en una membrana no tengan entre sí relaciones armónicas explica el carácter peculiar

del sonido producido al percutir un tambor, que no corresponde a una nota definida.

Estas consideraciones son válidas también para membranas circulares. En este caso, por la simetría del sistema, es más conveniente escribir la ecuación de onda en coordenadas polares. Los modos normales no poseen la forma sinusoidal simple de la geometría rectangular, sino que están descritos por funciones de Bessel que tienen nodos en los bordes de la membrana<sup>2</sup>.

## 9.6. Ondas longitudinales en varillas

Para describir las oscilaciones longitudinales de una varilla o barra delgada elástica podemos partir del modelo de masas acopladas por resortes en el límite continuo (ecuación (5.2) con  $x_j \rightarrow \xi_j$  como desplazamiento de la masa  $j$ -ésima respecto a su posición de equilibrio).



**Figura 9.7** Modelo discreto de una barra elástica.

De acuerdo con la figura 9.7, la ecuación de movimiento de la masa  $j$ -ésima toma la forma:

$$m\ddot{\xi}_j - k(\xi_{j+1} - \xi_j) + k(\xi_j - \xi_{j-1}) = 0 \quad (9.9)$$

Al dividir (9.9) por la separación de las masas en equilibrio resulta:

$$\mu\ddot{\xi}_j - k l_0 \frac{(\xi_{j+1} - \xi_j)}{l_0^2} + k l_0 \frac{(\xi_j - \xi_{j-1})}{l_0^2} = 0 \quad (9.10)$$

donde  $\mu = \rho A$  es la masa por unidad de longitud de la varilla de densidad  $\rho$  y sección transversal  $A$ .

<sup>2</sup> Las secciones 9.9 y 9.10 del libro *Advanced Engineering Mathematics*, de Erwing Kreyszig, segunda edición, contienen una solución detallada de este problema.

En el límite continuo la ecuación de onda no dispersiva tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial z^2} \quad (9.11)$$

donde hemos identificado  $\frac{k l_0}{A}$  en el límite continuo con el módulo de Young.

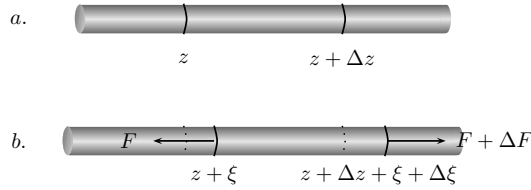
A partir de un modelo continuo para la barra elástica podemos analizar el movimiento de un segmento infinitesimal que en equilibrio se extiende entre  $z$  y  $z + \Delta z$ . Cuando se produce una perturbación, debida por ejemplo a la aplicación de una tensión en uno de sus extremos, el segmento se traslada y además sufre una elongación  $\Delta \xi$ , como se ilustra en la figura 9.8. La fuerza neta sobre el segmento es  $F + \Delta F - F = \Delta F$ .

Al aplicar la segunda ley de Newton al segmento, resulta:

$$\Delta F = \rho A \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (9.12)$$

Para una varilla elástica de longitud inicial  $L$  y sección transversal  $A$  que satisface la ley de Hooke (esfuerzo proporcional a la deformación producida) se define el módulo de Young  $Y$  como la relación entre la tensión (fuerza por unidad de área) necesaria para producir una elongación  $\Delta L$  y la deformación relativa  $\frac{\Delta L}{L}$  (o elongación por unidad de longitud). Esto es:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L} \quad (9.13)$$



**Figura 9.8** Modelo continuo de barra elástica: a) segmento en equilibrio, b) segmento desplazado y elongado.

Al tomar el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , podemos escribir:

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta \xi}{\Delta z} \simeq Y \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (9.14)$$

De aquí podemos deducir:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z \simeq AY \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (9.15)$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación de movimiento (9.12) resulta una ecuación de onda idéntica a (9.11), que predice propagación de ondas longitudinales en la varilla con una velocidad  $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ , que sólo depende de la densidad y el módulo de Young del material.

Para una cuerda de acero con densidad aproximada de  $8.000 \text{ kg/m}^3$  y módulo de Young  $Y \approx 2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$  resulta  $v = 5 \text{ km/s}$ . Velocidades de varios kilómetros por segundo son típicas para los metales, ya que cuanto mayor es  $\rho$  tanto mayor tiende a ser  $Y$ .

Esto implica que la frecuencia fundamental  $\nu_1 = \frac{v}{2L}$  para oscilaciones longitudinales de una cuerda de acero de  $0,33 \text{ m}$  es aproximadamente igual a  $7,57 \text{ kHz}$ . El sistema oído-cerebro, que es muy sensible a estas frecuencias, las percibe como un sonido muy agudo y desagradable, por lo cual un violinista experto evita excitar estos modos longitudinales.

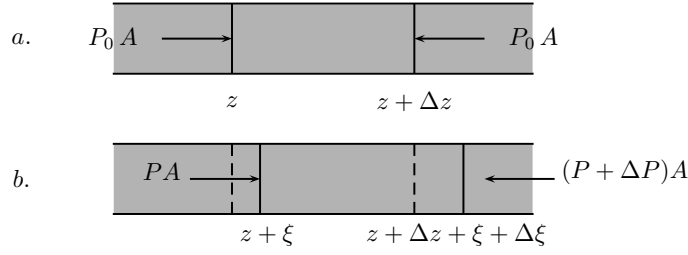
## 9.7. Ondas longitudinales en tubos sonoros

Consideremos un tubo cilíndrico de longitud  $L$  y área transversal  $A$ , lleno con un gas que en equilibrio tiene densidad  $\rho_0$  y presión  $P_0$ . Como un fluido no puede sustentar fuerzas torsionales o de cizallamiento, en el gas sólo pueden propagarse ondas longitudinales.

Si  $L$  es grande en comparación con el radio de la sección transversal, el gas dentro del tubo se comporta esencialmente como un sistema unidimensional cuyas variables dinámicas (presión, densidad, temperatura) sólo pueden variar a lo largo del eje del tubo.

Para deducir la ecuación diferencial que rige la propagación de las ondas acústicas en el tubo, examinemos un pequeño elemento del gas, cuando se ha producido una pequeña perturbación o desviación respecto a la situación de equilibrio (figura 9.9).

En equilibrio, un segmento típico de gas está comprendido entre  $z$  y  $z + \Delta z$ , tiene densidad  $\rho_0$ , masa  $m = A \Delta z \rho_0$ , presión  $P_0$  y temperatura  $T_0$ . Al producirse una perturbación del equilibrio, por ejemplo a consecuencia de un cambio de presión en un extremo del tubo, el  $z$ -ésimo elemento que estamos considerando puede desplazarse de tal modo que en el tiempo  $t$  su pared izquierda tiene coordenada  $z + \xi(z, t)$  y su pared derecha, coordenada  $z + \Delta z + \xi + \Delta \xi$ .



**Figura 9.9** Fuerzas sobre un elemento de gas: a) en equilibrio, b) perturbado.

Recuerde que la coordenada  $z$  es apenas un índice o parámetro continuo que permite marcar los elementos de volumen y, por tanto, no tiene el carácter de una variable dinámica. Las variables dinámicas básicas elegidas son: el corrimiento  $\xi(z, t)$ , que identificamos con el desplazamiento de la masa  $z$ -ésima en el tiempo  $t$ , su velocidad  $\frac{\partial \xi(z, t)}{\partial t}$  y su aceleración  $\frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2}$ . Si definimos  $P(z, t)$  como la presión ejercida sobre la pared izquierda del elemento  $z$ -ésimo en el tiempo  $t$ , y  $P(z + \Delta z, t)$  como la presión ejercida sobre su pared derecha en el mismo instante, la ecuación de movimiento de este segmento toma la forma:

$$\rho_0 A \Delta z \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = A [P(z, t) - P(z + \Delta z, t)] \approx -A \Delta z \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} \quad (9.16)$$

Pero la presión no es independiente del desplazamiento  $\xi$ . Para hallar esta relación expresamos  $V$  en función de  $\xi$  y luego  $P$  en función del volumen  $V$ .

$$V(z, t) = V_0 + A [\xi(z + \Delta z, t) - \xi(z, t)] \approx V_0 + A \Delta z \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} \quad (9.17)$$

La presión  $P$  depende tanto del volumen como de la temperatura. Pero aquí supondremos una restricción adicional: o bien la expansión y la compresión del gas son procesos isotérmicos ( $T = \text{cte}$ ), o bien son adiabáticos ( $PV^\gamma = \text{cte}$ , donde  $\gamma$  es la relación entre las capacidades caloríficas  $\gamma = C_p/C_v$ ). Con cualquier restricción queda una sola variable independiente que puede ser  $V$ . Podemos entonces expandir  $P$  como una función de  $V$  en serie de Taylor alrededor del volumen  $V_0$ . Para pequeños cambios  $\Delta V$  puede hacerse la aproximación:

$$P(V) \approx P(V_0) + (V - V_0) \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{V_0} = P_0 + V_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} \left[ \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{V_0} \right] \quad (9.18)$$

donde hemos usado (9.17).

Se define el módulo de compresibilidad  $\kappa$  que relaciona el incremento de presión  $dP$  con el incremento fraccional en volumen  $-\frac{dV}{V}$  como:

$$-V \frac{\partial P}{\partial V} \equiv \kappa \quad (9.19)$$

El signo menos se debe a que un aumento de presión produce una disminución en volumen y  $\kappa$  es por definición una cantidad positiva. Entonces:

$$P(V) - P_0 = -\kappa_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (9.20)$$

En esta ecuación debe usarse el módulo de compresibilidad definido alrededor del equilibrio con la condición (adiabática o isotérmica) adecuada. Al derivar (9.20) y sustituir en (9.16) resulta:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\kappa_0 \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial z^2} \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = \left( \frac{\kappa_0}{\rho_0} \right) \kappa_0 \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial z^2} \quad (9.22)$$

Esto significa que en el tubo pueden propagarse ondas longitudinales no dispersivas con velocidad  $v = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho_0}}$ .

Como ya se anotó, para determinar  $\kappa_0 = -V_0 \frac{\partial P}{\partial V} \big|_{V_0}$  es necesario hacer alguna hipótesis respecto al proceso de propagación del sonido en el gas. ¿Se trata de un proceso isotérmico (a temperatura constante) o de uno adiabático (sin intercambio de calor del elemento de gas con sus alrededores)? Newton formuló la primera hipótesis ( $PV = \text{cte}$ ) y obtuvo una velocidad de propagación incorrecta para las ondas acústicas en el aire en condiciones normales ( $v \approx 280 \text{ m/s}$ ). Más tarde se vio que la hipótesis de un proceso adiabático (con  $PV^\gamma = \text{cte}$ ) conducía a un resultado más cercano a los datos experimentales:  $v_{\text{exp}} = 332 \text{ m/s}$  en condiciones normales de temperatura y presión. Al tomar el logaritmo de ambos lados de la ecuación  $PV^\gamma = \text{cte}$  y luego derivar con respecto a  $V$  obtenemos:

$$\ln P = \text{cte} - \gamma \ln V \quad \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{\text{ad}} = -\frac{\gamma}{V}$$

esto es:

$$-V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{\text{ad}} \equiv \kappa_{\text{ad}} = \gamma P \quad (9.23)$$



Esto implica que la velocidad de fase de las ondas acústicas, que coincide con la velocidad de grupo por tratarse de ondas no dispersivas, es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0} \frac{C_P}{C_V}} \quad (9.24)$$

La ecuación de onda que hemos deducido está expresada en función de una magnitud  $\xi(z, t)$  que es, en sentido estricto, inobservable, puesto que no es posible identificar un segmento fijo de gas, ni siquiera en condiciones de equilibrio, ni medir sus cambios de posición en el tiempo. Esto se debe a que las moléculas constituyentes están en movimiento térmico incesante intercambiándose con las de otros segmentos vecinos. Nuestro modelo ignora la constitución microscópica, y sólo toma en cuenta promedios o variables macroscópicas.

Por ello es más conveniente escribir la ecuación de onda en función de una cantidad medible que puede oscilar alrededor de cero como la presión acústica  $p$ , también llamada presión gauge, definida así:

$$p(z, t) \equiv P(z, t) - P_0 \quad (9.25)$$

Observe que la presión acústica es la diferencia entre la presión  $P$  dentro del gas en el tiempo  $t$  en la coordenada  $z$  y la presión de equilibrio que, generalmente, coincide con la presión ambiental.

Según la ecuación (9.20):

$$p = -\kappa_0 \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

Al derivar ambos lados de esta ecuación con respecto a  $t$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\kappa_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} &= -\kappa_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Pero, de acuerdo con la ecuación (9.16), como  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}$ , tenemos:

$$\frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = - \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial p(z, t)}{\partial z}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\kappa_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} \quad (9.26)$$

Esta ecuación describe ondas de presión en el tubo, con velocidad de fase

$$v = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0} \frac{C_P}{C_V}}$$

en la hipótesis de propagación adiabática.

De acuerdo con la ecuación (9.26), la velocidad de las ondas acústicas parecería depender de la presión. Pero cambios de presión van acompañados de cambios de densidad. Para un *mol* de gas debe cumplirse en equilibrio:

$$P_0 V_0 = RT_0 \quad \rho_0 = \frac{M}{V_0}$$

donde  $M$  es la masa molar o peso molecular del gas en gramos,  $T$  es la temperatura absoluta y  $R = 8,31 \times 10^7$  erg/(g mol K) es la constante de los gases.

Por tanto:

$$\frac{P_0}{\rho_0} = R \frac{T_0}{M} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\gamma R \frac{T_0}{M}} \quad (9.27)$$

Esto significa que la velocidad del sonido depende de la temperatura ambiente o de equilibrio, pero no de la presión.

## 9.8. Condiciones de frontera y modos normales en un tubo sonoro

- a. Es evidente que un *extremo cerrado*  $z_c$  corresponde a un extremo fijo y, por tanto, a un nodo de desplazamiento:

$$\xi(z_c, t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Esto implica que

$$\frac{\partial^2 \xi(z_c, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para todo } t$$

Y, según la ecuación (9.16) esto, a su vez, implica que en un extremo cerrado debe existir un extremo o antinodo de la presión acústica:

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = z_c, \text{ para todo } t$$

b. En un *extremo abierto* debe cumplirse:

$$\frac{\partial \xi(z_a, t)}{\partial z} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (9.20), debe tenerse un nodo de la presión acústica:  $p(z_a, t) = 0$ , esto es:

$$P(z_a, t) = P_0 \quad \text{para todo } t$$

Según los resultados del capítulo 6, los modos normales de un sistema como el tubo sonoro, regido por una ecuación de onda clásica, tienen frecuencias normales que constituyen una serie armónica de la forma:

$$\omega_n = n \omega_1 \quad \text{donde } n \text{ es un número entero.}$$

En un modo normal, la presión acústica varía de la manera siguiente:

- En tubos con ambos extremos libres:

$$p^{(n)} = C_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$\omega_n = v k_n \quad k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- En tubos con ambos extremos cerrados:

$$p^{(n)} = C_n \cos(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$\omega_n = v k_n \quad k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- En tubos con un extremo cerrado ( $z_c = 0$ ) y otro abierto ( $z_a = L$ ):

$$p^{(n)} = C_n \cos(k_n z) \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$\omega_n = v k_n \quad k_n = n \frac{\pi}{2L} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Observe que en estos tubos no están presentes los armónicos pares.

Es necesario tener en cuenta que en un tubo abierto la onda de presión se traslada un poco más allá del extremo libre, produciendo una longitud efectiva  $L_{\text{ef}}$  mayor que la longitud real. Así, la frecuencia fundamental en un tubo con

un solo extremo abierto es en realidad igual a  $\frac{v}{4L_{ef}}$ . Para hallar la longitud efectiva basta medir la frecuencia real de los modos normales (por ejemplo, comparándola con la de un diapasón) y hacer la correspondiente corrección de  $L$  en la ecuación anterior. En la práctica, esta corrección resulta aproximadamente igual a un tercio del diámetro del tubo sonoro y depende ligeramente de la frecuencia, lo cual da lugar a una leve falta de armonicidad.

Una flauta se comporta aproximadamente como un tubo con ambos extremos libres, esto es, como un sistema abierto–abierto. Un clarinete se asemeja en su comportamiento a un tubo cerrado–cerrado. En un órgano hay tubos de dos tipos: abierto–abierto y abierto–cerrado.

## 9.9. Sonido musical, armonía y disonancia

Las características percibidas de un sonido *musical* son: altura, volumen y timbre o calidad. La *altura* depende del rasgo físicamente medible de la frecuencia de las oscilaciones acústicas: a mayor frecuencia corresponde mayor altura. Aunque el rango de audibilidad humana se extiende entre 20 y 20.000 Hz, un gran piano de conciertos produce solamente notas comprendidas con frecuencias entre 32,7 y 4.186 Hz, y el rango de la voz humana es aún más limitado: un coro mixto produce sonidos con frecuencias comprendidas entre 64 y 1.500 Hz aproximadamente.

El *volumen* depende de la intensidad de la onda (que se expresa como potencia por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación y es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones). Pero la relación entre el volumen percibido y la intensidad no es lineal. Se define el nivel de volumen con respecto a una intensidad de referencia  $I_0$  (que usualmente es el umbral audible de  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ ) de la manera siguiente:

$$\beta = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{decibeles})$$

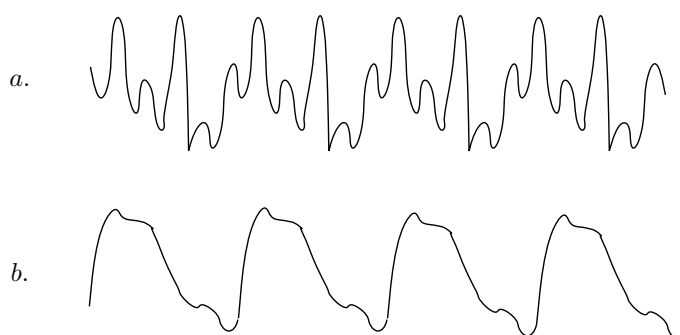
Así, un aumento de intensidad en un factor de 100 produce un aumento de nivel de 20 dB. El umbral superior, generalmente acompañado de una sensación de dolor, es de 120 dB.

El *timbre* o *calidad tonal*, que es lo que permite distinguir una misma nota tocada por distintos instrumentos o cantada por diferentes voces, depende de cuáles armónicos se excitan al mismo tiempo con el primero o fundamental y con qué amplitudes. Esto explica las diferencias en el sonido de los dos tipos de tubos de un órgano: mientras que en uno abierto–abierto al tocar una nota se excitan

simultáneamente todos los primeros armónicos, en un tubo abierto–cerrado sólo se excitarán los armónicos impares.

La figura 9.10 permite comprender por qué una misma nota suena diferente cuando es tocada por un violín o un piano (véase también el ejercicio 9.4). Aunque en ambos instrumentos pueden excitarse en principio todos los armónicos, las intensidades relativas varían, y por ello la superposición o sonido resultante tiene una calidad tonal diferente. Las cajas de resonancia de los instrumentos de cuerda amplifican de manera distinta los diferentes armónicos, y esto explica en buena parte el timbre característico de una guitarra, un violín y un piano, e incluso permite a los expertos identificar las tenues diferencias entre los sonidos producidos por dos violines diferentes.

La superposición de cualquier número de armónicos da como resultante una oscilación periódica con el período de la nota fundamental; por tanto, la frecuencia fundamental determina la altura de la nota que usualmente percibimos. Los demás armónicos “colorean” el sonido y dan el timbre característico de un instrumento musical o de una voz humana masculina o femenina.



**Figura 9.10** Nota *la* (440 Hz): a) en un violín, b) en un piano.

A Pitágoras (siglo V a. C.) se atribuye el descubrimiento de que dos notas simultáneas producen una sensación placentera o “armoniosa”, si son emitidas por cuerdas de igual tensión y densidad, cuyas longitudes están en relación de números enteros pequeños. A partir de los intervalos considerados más perfectos (la *octava*, con relación de longitudes 1 : 2, y la *quinta*, con relación 2 : 3) construyó la llamada escala diatónica de 7 notas<sup>3</sup>.

De aquí surgió posiblemente su doctrina según la cual: “Los principios de los números son los elementos de todos los seres, y el cielo entero es armonía y número”, doctrina en la cual subyace la idea, nueva entonces, de que la naturaleza puede ser analizada en términos matemáticos.

<sup>3</sup> Véase el artículo de G. N. Gibson, I. D. Johnson, en *Physics Today*, enero de 2002.

Mucho más tarde, en el siglo XVII, Galileo reconoció que estos intervalos son “consonantes” debido al hecho de que las frecuencias de las dos notas están en relación de pequeños números enteros, y por ello la superposición de estas vibraciones produce un patrón repetitivo (periódico) fácil de reconocer por el cerebro. Aquí vio una demostración de la tesis según la cual la armonía reside en la percepción del orden.

A finales del siglo XIX, Hermann Helmholtz avanzó una explicación más precisa de este hecho, que seguía asombrando desde la Antigüedad a los filósofos: Dos notas son consonantes cuando comparten uno o más armónicos. Cuantos más armónicos compartan, tanto más consonante nos parecerá el intervalo. Por esta razón se denominan “intervalos perfectos” los siguientes: el *unísono* (relación de frecuencias 1 : 1), la *octava* (1 : 2), la *quinta* (2 : 3) y (aunque a veces aparece como disonante) la *cuarta* (3 : 4). Otros intervalos consonantes, aunque no “perfectos”, son los mayores: *tercera* (4 : 5), *sexta* (3 : 5) y *segunda* (8 : 9), si bien éste es considerado por algunos como un intervalo disonante.

En los ejercicios al final del capítulo se sugiere precisar estas hipótesis que concuerdan con investigaciones modernas acerca de la tendencia del cerebro a seleccionar, en la compleja multitud de datos sensoriales, patrones o estructuras fácilmente reconocibles.

Como consecuencia de lo anterior, sólo instrumentos basados en cuerdas y columnas de aire, cuyos sobretonos constituyen una serie armónica, se consideran propiamente melódicos. Instrumentos no armónicos, como los tambores, los xilófonos y otros a base de varillas o láminas vibrantes, forman parte de la sección de percusión de una orquesta.

Pero no debe olvidarse que en la composición musical se utilizan disonancias para producir tensiones, cuya resolución rompe la posible monotonía de lo puramente armónico.

## Ejercicios

**9.1**  $\omega^2 = (1 + \alpha k^2)u^2k^2$  representa aproximadamente una relación de dispersión hallada empíricamente para una cuerda de piano, donde  $u^2 = \frac{T}{\mu}$  y  $\alpha$  es una constante positiva pequeña del orden de  $10^{-4} \text{ m}^2$ .

- Halle una expresión aproximada para la velocidad de fase.
- Muestre que existe una ecuación de onda que es compatible con esta relación de dispersión y que tiene soluciones de modos normales de forma idéntica a los de una cuerda elástica.

- c. Muestre que para una cuerda de longitud  $L$  con ambos extremos fijos el espectro de frecuencias normales está dado aproximadamente por:

$$\nu_n \approx \left(\frac{nu}{2L}\right) \left[1 + \alpha \left(\frac{n^2\pi^2}{2L^2}\right)\right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Compare estos valores con los primeros armónicos de una cuerda perfectamente elástica haciendo una gráfica de  $\frac{\nu_n}{\nu_1}$  en función de  $n$ .

- 9.2** a. Dibuje las líneas nodales de los ocho primeros modos normales de una membrana cuadrada y distinga las áreas que tienen desplazamientos de signos opuestos. Exprese las correspondientes frecuencias normales en función de la frecuencia fundamental  $\omega_{11}$  indicando su grado de degeneración, y compare con el caso unidimensional de la cuerda elástica.
- b. Muestre que si el cociente  $\left(\frac{L_x}{L_y}\right)$  de los lados de una membrana rectangular es un número racional (de la forma  $\frac{m}{r}$ ), dada una frecuencia normal  $\omega_{n_1, n_2}$  correspondiente a un modo normal, caracterizado por la pareja ordenada  $(n_1, n_2)$ , puede existir otra pareja  $(n'_1, n'_2)$  correspondiente a un modo normal diferente, pero con idéntica frecuencia. Ilustre gráficamente algunos casos. ¿Qué ocurre a este respecto con el modo fundamental?

**Nota:** una membrana cuadrada tiene una degeneración trivial debida a su simetría  $\omega(n_1, n_2) = \omega(n_2, n_1)$ . Pero puede existir un grado de degeneración aún mayor. Si la suma de los cuadrados de dos números enteros puede descomponerse en factores primos, de los cuales hay al menos dos diferentes de la forma  $(4n + 1)$ , donde  $n$  es un entero positivo, entonces la suma puede descomponerse en suma de cuadrados en más de una forma. Éste es un hecho matemático descubierto por Gauss.

Ejemplo: Si

$$\omega^2 \left[ \frac{L^2}{\pi^2 v^2} \right] = 65 = 5 \cdot 13 = (4 + 1)(12 + 1) = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$$

entonces tenemos cuatro conjuntos ordenados diferentes:  $(1, 8)$ ,  $(8, 1)$ ,  $(4, 7)$  y  $(7, 4)$ , correspondientes a cuatro modos normales de vibración con idéntica frecuencia normal, esto es, la frecuencia  $\omega$  tiene una degeneración cuádruple.

**9.3** Con ayuda de los datos siguientes:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{para gases monoatómicos (He, Ne, Ar, \dots)} \\ \frac{7}{5} & \text{para gases diatómicos (H}_2, \text{N}_2, \text{O}_2, \text{CO, \dots)} \end{cases}$$

$$M_{\text{N}_2} = 28 \text{ g}, \quad M_{\text{O}_2} = 32 \text{ g}, \quad M_{\text{He}} = 4 \text{ g}, \quad R = 8,31 \times 10^7 \text{ erg(g mol K)}^{-1}$$

- Calcule la velocidad del sonido en el aire a  $T = 293 \text{ K}$ . Suponga que el aire es una mezcla de 80 % de  $\text{N}_2$  y 20 % de  $\text{O}_2$  e ignore la presencia de vapor de agua y otros gases.
- Calcule la velocidad del sonido en helio a  $T = 173 \text{ K}$ .

**9.4** Dibuje dentro de un tubo sonoro de longitud  $L$  los cuatro primeros modos normales de la presión acústica  $p$  y del desplazamiento  $\xi$ :

- Con ambos extremos abiertos.
- Con un extremo abierto y otro cerrado.

Indique las correspondientes frecuencias y longitudes de onda en función de  $v$  y  $L$ .

**9.5** Con la ayuda de un programa de computador reproduzca la figura 9.10 superponiendo los ocho primeros armónicos de la frecuencia fundamental  $\nu_1 = 440 \text{ Hz}$ , correspondiente a la nota *la* con las amplitudes siguientes:

- 1; 0,9; 0,4; 0,5; 1; 0,1; 0,1; 0,1      Violín
- 1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,2; 0; 0; 0      Piano

**9.6** Con ayuda del computador obtenga las gráficas correspondientes a la superposición de dos notas con las relaciones de frecuencia siguientes: unísono 1 : 1; octava 1 : 2; quinta 2 : 3; cuarta 3 : 4; tercera mayor 4 : 5; sexta mayor 3 : 5; segunda mayor 8 : 9; no consonantes 15 : 16, 20 : 31.

Compare los períodos de las oscilaciones resultantes y explique la relación establecida por Helmholtz entre grado de consonancia y número de armónicos compartidos por las dos notas del intervalo.

*Sugerencia:* tome como referencia una nota, por ejemplo *la*, con una frecuencia de 440 Hz.



## Capítulo 10

# Ondas electromagnéticas

En este capítulo se aborda el estudio sistemático de las ondas electromagnéticas en el vacío y en medios materiales, en líneas de transmisión, guías de ondas, cavidades y fibras ópticas.

- Al tomar el límite continuo de una red de inductancias acopladas por condensadores se llega a la ecuación de onda para corrientes y voltajes en líneas de transmisión de placas paralelas.
- Después de una nota histórica sobre la teoría electromagnética de la luz, se presenta esquemáticamente el espectro de la radiación electromagnética.
- A partir de las ecuaciones fundamentales de Maxwell se deduce la ecuación de las ondas en el vacío.
- Con base en las ecuaciones de medios macroscópicos se obtiene la ecuación de ondas electromagnéticas en materiales dieléctricos homogéneos, lineales y transparentes.
- Se establece el carácter transversal de las ondas planas y las relaciones de magnitud y fase entre los campos eléctrico y magnético.
- Se definen estados de polarización lineal, circular y elíptica.
- A partir de la ecuación de onda amortiguada en medios conductores, se analizan las relaciones entre los campos eléctrico y magnético en el régimen óhmico.
- Se analizan los modos normales dentro de una cavidad y la propagación de ondas en una guía de sección rectangular.

- Se describe el mecanismo de transmisión de información a través de fibras ópticas. Esto permite aplicar nociones utilizadas en capítulos anteriores, como: ondas evanescentes, ensanchamiento de paquetes de ondas por “dispersión cromática”, relaciones de incertidumbre frecuencia–tiempo y técnicas de modulación de amplitud y frecuencia.

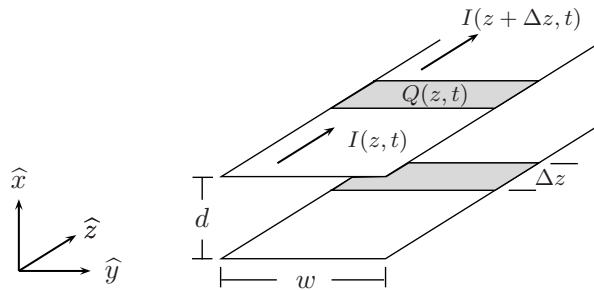
### 10.1. Ondas de corriente y voltaje en líneas de transmisión

Como se mostró en los capítulos 5 y 7, una red de inductancias acopladas por condensadores satisface en el límite continuo la ecuación de onda clásica:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \left[ \frac{1}{L_0 C_0} \right] \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = v^2 \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}$$

donde hemos definido  $v^2 \equiv \frac{1}{L_0 C_0}$ , con  $L_0 = \frac{L}{l_0}$ ,  $C_0 \equiv \frac{C}{l_0}$ , inductancia y capacitancia por unidad de longitud, respectivamente.

En el límite continuo este modelo puede representar una línea de transmisión constituida por un par de placas paralelas. Sin embargo, es instructivo deducir directamente esta ecuación a partir de un modelo continuo, porque este cálculo nos permite relacionar ondas de corriente y voltaje con ondas electromagnéticas propagándose en la región acotada por las placas.



**Figura 10.1** Línea de transmisión de placas paralelas.

Si se conecta una fuente de voltaje  $V(t)$  a la entrada de la línea, se producen cambios de corriente y voltaje que se propagan a lo largo de ésta en dirección  $\hat{z}$ . Al ignorar efectos de borde podemos suponer que los campos, voltajes y corrientes no varían en dirección  $\hat{y}$  en la región comprendida entre las placas, y se anulan fuera de éstas.

Consideremos en un instante  $t$  un segmento típico de la línea de transmisión con coordenada  $z$ , longitud  $\Delta z$ , ancho  $w$  y altura  $d$ . Si la corriente que entra a la placa superior del segmento por un extremo con coordenada  $z$  es diferente de la que sale por el extremo  $z + \Delta z$ , en un intervalo  $\Delta t$  se producirá un incremento de carga  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = [I(z, t) - I(z + \Delta z, t)] \Delta t \approx -(\Delta z \Delta t) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \quad (10.1)$$

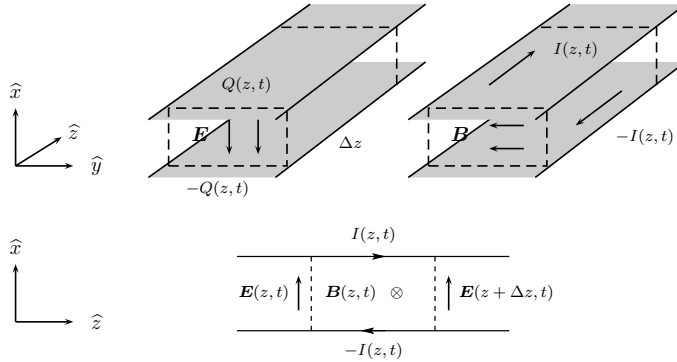
Pero esto acarrea automáticamente un incremento del voltaje entre las placas de este condensador elemental<sup>1</sup>.

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{\Delta Q}{C_0 \Delta z} \approx -\left(\frac{\Delta z \Delta t}{C_0 \Delta z}\right) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \quad (10.2)$$

En el límite  $\Delta z, \Delta t \rightarrow 0$  se obtiene:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = -\left(\frac{1}{C_0}\right) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \quad (10.3)$$

Por otra parte, el segmento infinitesimal de la línea de transmisión se comporta no sólo como un condensador, sino también como un pequeño solenoide de sección transversal  $d\Delta z$ , donde la corriente en la placa inferior fluye en sentido opuesto a la de la placa superior. Este solenoide produce un campo magnético paralelo al eje  $\hat{y}$  (figura 10.2).



**Figura 10.2** Campos  $E(z, t)$  y  $B(z, t)$  en la línea de placas paralelas.

<sup>1</sup> Un campo  $E$  variable en el tiempo no puede escribirse solamente en función de un potencial escalar. Esto no impide, sin embargo, definir el voltaje a lo largo de un camino determinado como menos la integral de línea del campo eléctrico; véase el apéndice A.

Como el campo eléctrico es perpendicular a las placas conductoras y espacialmente sólo varía en dirección  $z$ , podemos integrar la ecuación de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  sobre la sección transversal del solenoide elemental (superficie acotada por un rectángulo de altura  $d$  y ancho  $\Delta z$ , indicada en la figura 10.2), con el resultado siguiente:

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \phi_{mag}}{\partial t} = -L_0 \Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (10.4)$$

En (10.4) hemos usado la relación entre el flujo magnético a través de la sección transversal de un solenoide y su inductancia:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \phi_{mag} = LI = L_0 \Delta z I \quad (10.5)$$

Pero, de acuerdo con el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = [E_x(z, t) - E_x(z + \Delta z, t)]d \\ &= V(z + \Delta z) - V(z) \end{aligned} \quad (10.6)$$

Al igualar (10.4) y (10.6) y tomar el límite  $\Delta z \rightarrow 0$ , resulta:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (10.7)$$

Al derivar (10.3) con respecto a  $z$  y (10.7) con respecto a  $t$  e igualar las expresiones, obtenemos la ecuación de onda clásica para la corriente:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{L_0 C_0} \right) \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = 0 \quad (10.8)$$

Al derivar (10.3) con respecto a  $t$  y (10.7) con respecto a  $z$ , resulta una ecuación de forma idéntica para el voltaje:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{L_0 C_0} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (10.9)$$

Ya se ha mostrado que una ecuación de este tipo tiene soluciones de ondas viajeras no dispersivas con velocidad de fase  $v = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}$ .

Gracias a la simplicidad de la geometría podemos calcular fácilmente el valor de esta velocidad. Para obtener  $C_0$  usamos:

$$Q(z, t) = CV(z, t) = C_0 \Delta z V(z, t)$$

$$V(z, t) = -E_x(z, t) d = d \frac{\sigma(z, t)}{\epsilon_0} = \frac{d}{\epsilon_0} \frac{Q}{w \Delta z}$$

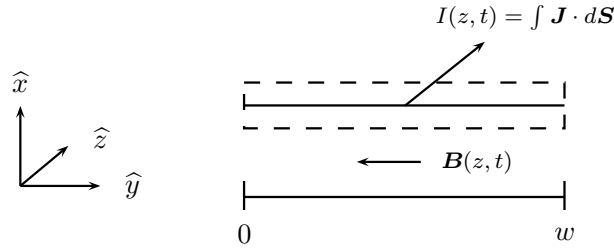
De aquí resulta:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 w}{d} \quad (10.10)$$

Para calcular la inductancia por unidad de longitud debemos obtener el campo  $\mathbf{B}(z, t)$  en función de  $I$ . Para ello basta integrar la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

sobre un rectángulo paralelo al plano  $xy$ , de altura infinitesimal  $\delta$  y ancho  $w$  que envuelve la placa superior (figura 10.3).



**Figura 10.3** Área infinitesimal para el cálculo de  $\mathbf{B}(z, t)$  en función de  $I(z, t)$ .

A partir del teorema de Stokes y del hecho de que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en el interior de un conductor perfecto y en la región exterior de la línea de transmisión son nulos, obtenemos:

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I(z, t)$$

De aquí resulta:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \frac{I(z, t)}{w} \hat{y}$$

Por tanto, el flujo magnético a través de la superficie  $\Delta S = d \Delta z (-\hat{y})$  es:

$$\phi_{mag} = \mu_0 I d \frac{\Delta z}{w}$$

De aquí podemos concluir:

$$L_0 = \mu_0 \frac{d}{w} \quad (10.11)$$

Finalmente, al unir los resultados (10.10) y (10.11) obtenemos para la velocidad de fase:

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2 \quad (10.12)$$

Esto significa que las ondas de voltaje y de corriente se propagan en el interior de la línea de placas paralelas con la velocidad  $c$  de la luz en el vacío.

Si el espacio entre las placas no es vacío sino que está ocupado por un aislante de permitividad eléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$ , basta remplazar en (10.12)  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$ , como se mostrará en la sección 10.4. En este caso la velocidad de fase de las ondas en la línea es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n} \quad (10.13)$$

donde  $n$  es el índice de refracción en este medio.

Este resultado puede generalizarse a líneas de geometrías diferentes, como un cable coaxial o un par de cuerdas paralelas, en la forma de un teorema:

*En líneas de transmisión homogéneas, constituidas por un par de conductores paralelos sin resistencia, la velocidad de fase de las ondas de corriente y de voltaje es exactamente la de una onda electromagnética en un medio no acotado con las mismas propiedades del medio que rodea los conductores. Por tanto, si el espacio entre las placas es vacío,  $v = c \approx 3 \times 10^8$  m/s.*

Así, la velocidad de propagación de las ondas de corriente y de voltaje es independiente de la geometría de los conductores y sólo depende del medio aislante que los rodea. (El ejercicio 10.1 permite comprobar este resultado para un cable coaxial, que es una línea de transmisión cerrada constituida por una cuerda conductora sólida rodeada por un cilindro coaxial conductor).

Este hecho abre la posibilidad de controlar la velocidad de las ondas electromagnéticas en una línea de transmisión eligiendo adecuadamente el dieléctrico

que rodea los conductores. Si en un cable coaxial se usa como aislante un material como el polietileno, con permitividad eléctrica  $\epsilon = 2,3$  y permeabilidad magnética  $\mu$  aproximadamente igual a  $\mu_0$ ,<sup>2</sup> la velocidad de las ondas se reduce a  $2/3$  de la velocidad de la luz en el vacío:

$$v_{\text{cable}} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{2,3}} \approx 0,66 c$$

Un metro de este cable coaxial produce un retardo de la onda con respecto a la que se propaga en el vacío del orden de  $10^{-9}$  segundos, que es significativo en la técnica electrónica. De aquí se deriva su amplia utilización como línea de retardo. En un osciloscopio de rayos catódicos, por ejemplo, se divide la amplitud del frente del pulso o señal de entrada en dos partes: una directa, que viaja a velocidad  $v \approx c$  y “anuncia” la llegada de la señal disparando el mecanismo de barrido, y otra retardada, que viaja por el cable coaxial con  $v < c$  y despliega la señal casi inmediatamente después de iniciado el barrido horizontal.

Para obtener retardos del orden de un milisegundo o mayores se requerirían cables coaxiales con longitudes de centenares o miles de kilómetros; esto ha inducido el desarrollo y empleo de otras técnicas.

Observe que en la línea de transmisión de placas paralelas  $I(z, t)$  y  $V(z, t)$  son proporcionales a los campos transversales  $B_y(z, t)$  y  $E_x(z, t)$ , respectivamente. Por tanto, las ecuaciones de onda (10.8) y (10.9) son, al mismo tiempo, ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético. Desde este punto de vista, voltajes y corrientes actúan como fuentes de los campos. Pero, como mostraremos a continuación, las ondas electromagnéticas pueden viajar en el vacío (sin fuentes) gracias a la propia dinámica de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ .

## 10.2. Teoría electromagnética de la luz. Espectro de la radiación

La visión predominante en la física actual está fundada sobre la idea de campos que transmiten energía, *momentum* e información. La sustitución del universo newtoniano de acción a distancia por uno de campos continuos fue preparada por los trabajos de Faraday sobre las líneas de fuerza y tuvo como uno de sus puntos culminantes la obra de James Clerk Maxwell.

Durante la primera mitad del siglo XIX, gracias a los experimentos de interferencia de Young y a los trabajos de Fresnel, se había establecido casi sin lugar a dudas el carácter ondulatorio de la luz. Pero sobre su naturaleza misma muy

<sup>2</sup> En la mayoría de los materiales paramagnéticos o diamagnéticos  $\mu/\mu_0$  es del orden de la unidad:  $\mu/\mu_0 \approx 1 \pm 10^{-5}$ .

poco se conocía. Óptica y electromagnetismo eran dos capítulos independientes e irreducibles entre sí. Su unificación fue obra de Maxwell, y en esta búsqueda de la unidad de las fuerzas fundamentales de la naturaleza se mostró como un precursor de nuestro tiempo.

Desde el punto de vista metodológico, Maxwell estableció como algo normal en la física un tipo de razonamiento fundado en argumentos de simetría y belleza matemática. Guiado por ellos alteró las ecuaciones del electromagnetismo adicionándoles un término, la llamada *corriente de desplazamiento*, que por su pequeñez se escapaba entonces a cualquier medición directa. Este término, que garantizaba cierta simetría de las ecuaciones pero no era sugerido por ningún dato experimental, condujo a Maxwell a predecir la existencia de ondas constituidas por campos eléctricos y magnéticos que se desplazan con una velocidad que podía deducirse a partir de constantes electromagnéticas. Después de comprobar que esta velocidad, medida con ayuda de un condensador y un galvanómetro, coincidía dentro de los límites del error experimental con la velocidad de la luz, medida directamente por Fizeau y Foucault, escribió en 1864:

*“La concordancia de los resultados parece mostrar que luz y magnetismo son afecciones de la misma sustancia y que la luz es una perturbación electromagnética que se propaga a través del campo de acuerdo con leyes electromagnéticas”*<sup>3</sup>.

De este modo Maxwell, usando la simetría matemática, puso al descubierto un mundo antes insospechado de radiaciones electromagnéticas de todas las frecuencias. (Véase en la figura 10.4 la tabla ilustrativa del espectro electromagnético conocido sólo en una pequeña fracción en la época de Maxwell. Hay que tener en cuenta que los diferentes rangos de frecuencias señalados en la tabla no son siempre disyuntos).

A partir de entonces, la idea de simetría se ha convertido en un concepto central de la física y ha conducido a predicciones teóricas como la existencia de la antimateria (P. A. M Dirac, 1928) y de numerosas partículas elementales, detectadas experimentalmente más tarde.

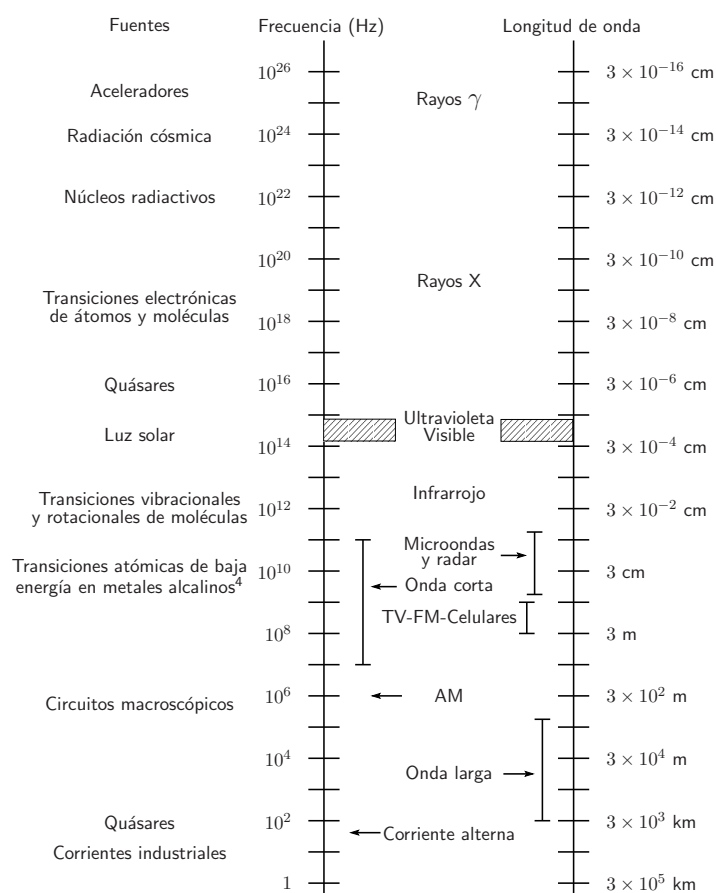
Pero la teoría electromagnética de la luz no sólo cambió la visión del mundo y planteó nuevas tareas con nuevos métodos a la física teórica y experimental. Sus repercusiones tecnológicas revolucionaron la vida de la sociedad de una manera tan vasta y profunda que hoy es casi imposible imaginar un mundo sin radio, ni televisión ni microondas, ni láser, ni computadores. Para ilustrar este proceso

---

<sup>3</sup> *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, reproducido en *The Scientific Papers of J. C. Maxwell*, New York, Dover, 1965, vol. 1, p. 580.



de rápida conversión de ciencia pura en tecnología, baste recordar que en 1887 Heinrich Hertz publicó sus primeros resultados experimentales sobre las ondas de radio, con base en las predicciones de la teoría electromagnética de Maxwell. Pero la potencia de su oscilador-emisor era tan baja que el máximo alcance, es decir, la máxima distancia a su receptor o resonador de chispas, era apenas de 20 metros. En 1896, Marconi logra un alcance de 3 kilómetros y obtiene la primera patente para la transmisión inalámbrica de señales e impulsos eléctricos. En 1901, las ondas electromagnéticas descubiertas por Maxwell conectan a Europa con América.



**Figura 10.4** Espectro de la radiación electromagnética.

<sup>4</sup> El período de una transición de baja energía en el cesio fue elegido en 1967 como estándar de tiempo: 1 segundo = 9 192 631 770  $T_{Cs}$ .

### 10.3. Ondas electromagnéticas en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell establecen la dinámica de los campos eléctrico y magnético. Dada una distribución de cargas y corrientes  $\rho(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ , respectivamente, las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético, en unidades SI, toman la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.17)$$

Consideremos una región espacio-temporal con  $\rho(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0$  a fin de obtener ecuaciones válidas para los campos en el vacío. Al tomar el rotacional de la ecuación (10.15) y usar  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , resulta:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Si invertimos el orden de las derivadas espacial y temporal, y usamos la ecuación (10.17), con  $\mathbf{J} = 0$ , obtenemos una ecuación de onda para el campo eléctrico en ausencia de fuentes (cargas y corrientes)

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.18)$$

Al tomar el rotacional de la ecuación (10.17) y proceder de manera similar, obtenemos una ecuación de idéntica forma para  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.19)$$

Hemos llegado así a una conclusión con grandes repercusiones teóricas y técnicas:

Las ecuaciones de Maxwell implican la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con velocidad  $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Esta velocidad es un invariante que sólo depende de constantes electromagnéticas.

## 10.4. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos transparentes

Las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético presuponen conocidas todas las distribuciones de cargas y corrientes sobre el trasfondo del espacio vacío. Son, en sentido estricto, ecuaciones microscópicas. Si queremos estudiar el comportamiento de los campos en medios materiales macroscópicos, es conveniente hacer una separación entre cargas “ligadas” y corrientes de polarización o magnetización, por una parte, y cargas y corrientes “libres”, por la otra:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{J}_{libre} + \mathbf{J}_{mag} + \mathbf{J}_{pol}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left( \mathbf{J}_{libre} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  representan densidades volumétricas de dipolo eléctrico y magnético, respectivamente.

Al definir nuevos campos:

$$\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \mathbf{D} \quad \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \equiv \mathbf{H} \quad (10.20)$$

las ecuaciones de Maxwell en medios macroscópicos toman la forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{libre} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{libre} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned} \quad (10.21)$$

En un medio dieléctrico transparente, lineal e isotrópico, la polarización  $\mathbf{P}$  es paralela y directamente proporcional al campo eléctrico  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (10.22)$$

Si el medio es homogéneo, la susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$  es constante.

De modo análogo, el momento magnético  $\mathbf{M}$  es proporcional al campo  $\mathbf{H}$  en un medio lineal e isotrópico:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (10.23)$$

Al sustituir (10.22) y (10.23) en las definiciones (10.20), resulta:

$$\epsilon_0 \mathbf{E} (1 + \chi_e) = \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

con  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ , la *permitividad eléctrica*.

$$\mathbf{H}(1 + \chi_m) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

esto es:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

con  $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ , la *permeabilidad magnética*.

En consecuencia, en un medio dieléctrico, transparente, lineal, isotrópico, homogéneo, sin cargas ni corrientes libres, las ecuaciones de Maxwell toman la forma simple:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Por un método similar al empleado para deducir las ecuaciones de onda en el vacío, obtenemos las siguientes ecuaciones de los campos en un medio dieléctrico, lineal, isotrópico, homogéneo y neutro:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - (\mu\epsilon) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - (\mu\epsilon) \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{10.25}$$

En tales medios pueden propagarse ondas armónicas con velocidad de fase:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$

donde  $n$  es el índice de refracción:

$$n \equiv \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$$

En medios cuyos parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$  varían con la frecuencia del campo externo, las ecuaciones (10.22) a (10.25) deben escribirse por separado para cada componente armónica. Esto implica que un paquete o haz constituido por una superposición de frecuencias se dispersa al propagarse en estos medios. Muchos dieléctricos transparentes, como agua, vidrio o plástico, son dispersivos. Esta dependencia del índice de refracción  $n$  respecto a la frecuencia explica la separación espacial de los diferentes colores o frecuencias mezclados en la luz blanca al atravesar un prisma de vidrio.

## 10.5. Ondas planas monocromáticas

Las ecuaciones de Maxwell admiten soluciones estáticas, pero quedarán excluidas de las consideraciones siguientes, porque campos estáticos no constituyen ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de onda en el vacío y en un medio lineal, homogéneo y transparente adquieren idéntica forma con las sustituciones:  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$ . Por tanto, es conveniente abordar el estudio de las soluciones armónicas de las ecuaciones de onda en su forma “genérica” (10.25), como si el vacío fuese un medio con susceptibilidades  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , e índice de refracción  $n = 1$ .

Puede verificarse que existen soluciones de la ecuación de onda para el campo eléctrico de la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta)\tag{10.26}$$

Estas soluciones representan ondas armónicas que se propagan en una dirección definida por el vector de onda  $\mathbf{k}$ , y reciben el nombre de “ondas planas” por razones que se verán con claridad más adelante.

La existencia de un campo eléctrico de la forma (10.26) implica, de acuerdo con la segunda ecuación del sistema acoplado (10.24), la existencia de un campo magnético  $\mathbf{B}$  tal que:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta)] &= -\mathbf{E}_0 \times \nabla \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) \\ &= (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{k}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.27) \end{aligned}$$

En (10.27) hemos usado la identidad vectorial

$$\nabla \times f \mathbf{A} = f \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f$$

y el hecho de que  $\mathbf{E}_0$  es un vector constante.

Al integrar la ecuación (10.27) entre tiempos  $t$  y 0 e ignorar las constantes de integración  $\mathbf{B}(x, 0)$  y  $\mathbf{E}(x, 0)$ , por ser campos estáticos, obtenemos:

$$\mathbf{B}(x, t) = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta)}{\omega} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) \quad (10.28)$$

donde hemos definido:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0}{v}$$

En ausencia de cargas libres y  $\epsilon$  constante, se cumple  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , de donde resulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta) = 0$$

Aquí hemos usado la identidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} f = f \nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

Una ecuación análoga es válida para  $\mathbf{B}$ , ya que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se cumple idénticamente. Por tanto:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (10.29)$$

En las ecuaciones (10.28) y (10.29) podemos reconocer las siguientes propiedades de estas ondas:

- Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares entre sí y con respecto a la dirección del vector de propagación  $\mathbf{k}$ , que coincide con la dirección del producto  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

Se dice entonces que las ondas electromagnéticas planas en el vacío o en un medio lineal, homogéneo, ilimitado y transparente son *transversales*.

- En cada punto, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  oscilan *en fase*. Esta propiedad es característica de soluciones de ondas viajeras en medios no conductores.

- Las magnitudes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son proporcionales entre sí:

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{v} \quad (\text{en unidades SI}).$$

- En un instante cualquiera  $t$  las superficies de fase constante son planos perpendiculares al vector de propagación  $\hat{\mathbf{k}}$  definidos por ecuaciones de la forma  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{cte}$ . Por esta razón se da el nombre de *ondas planas* a estas soluciones de las ecuaciones de Maxwell<sup>5</sup>.

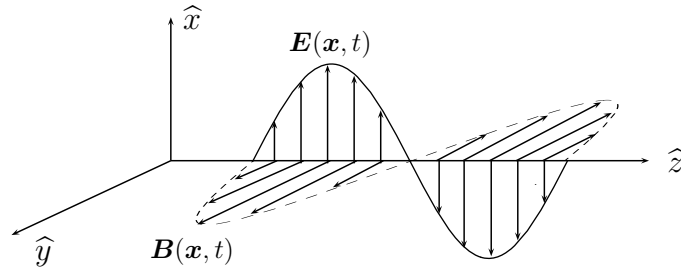
Si se tomara una instantánea de la onda en el instante  $t$ , se vería que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  (en fase y perpendiculares entre sí) presentan oscilaciones a lo largo de la dirección de propagación, pero no dependen de coordenadas transversales, es decir, son constantes en magnitud y dirección en cada plano perpendicular a  $\mathbf{k}$ , como se ilustra en las figuras 10.5 y 10.6.

Al ampliar los conceptos introducidos en el caso unidimensional, se definen para estas ondas armónicas (también llamadas *monocromáticas* por la correspondencia entre color y frecuencia en el espectro visible) las características siguientes:

- Vector de onda  $\mathbf{k}$ , que indica la dirección de propagación de la onda.
- Número de onda  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , tal que  $v = \frac{\omega}{k}$  se identifica con la velocidad de fase.

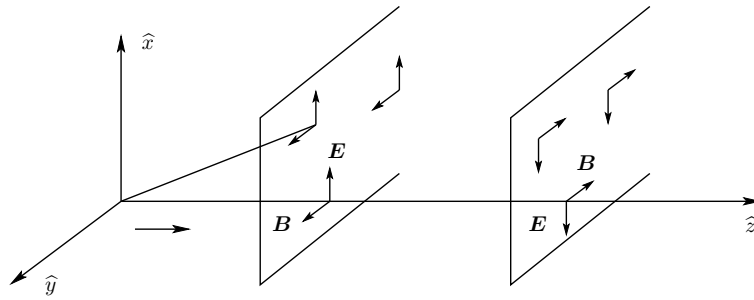
---

<sup>5</sup> Otras soluciones cuyas superficies de fase constante son cilindros o esferas se denominan ondas cilíndricas y esféricas, respectivamente.



**Figura 10.5** Campos de una onda plana monocromática.

- c. Longitud de onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , que es la longitud de una oscilación completa a lo largo de la dirección de propagación.
- d. Frente de onda, superficie de fase constante (por ejemplo, un máximo) que se mueve en dirección  $\hat{k}$  con velocidad  $v$ .



**Figura 10.6** Superficies de fase constante en ondas planas.

Cuando una onda monocromática pasa del vacío a un medio dieléctrico, su frecuencia no se altera por tratarse de medios lineales, pero su velocidad de fase y longitud de onda cambian de la manera siguiente:

$$c = \frac{\omega}{k_{\text{vacío}}} \rightarrow v_{\text{medio}} = \frac{\omega}{k_{\text{medio}}} = \frac{c}{n}$$

Esto implica

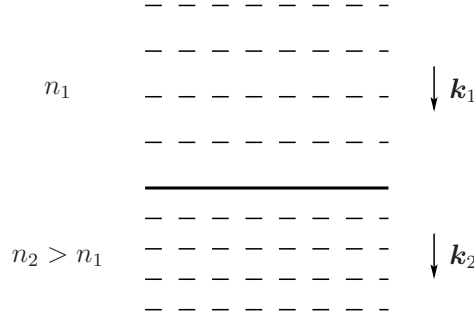
$$k_{\text{medio}} = \frac{n\omega}{c} = n k_{\text{vacío}}$$

y por tanto:

$$\lambda_{\text{medio}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{n}$$



La figura 10.7 ilustra este cambio para una onda plana que incide normalmente sobre la superficie de un dieléctrico con índice de refracción  $n_2 > n_1$ .



**Figura 10.7** Frentes de onda plana que se propaga en dos medios diferentes.

## 10.6. Polarización

Las ondas planas descritas en la sección 10.5 tienen un rasgo peculiar: el vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  oscila a lo largo de una dirección bien definida, que aquí hemos identificado con el eje  $\hat{x}$ . Se dice que estas ondas están “polarizadas linealmente” en dirección  $x$ . El plano formado por la dirección de propagación  $\hat{k}$  y el vector  $\mathbf{E}$  se denomina *plano de polarización*.

Cualquier campo transversal puede escribirse como superposición de componentes a lo largo de dos ejes ortogonales en el plano perpendicular al vector de onda  $\mathbf{k}$ ; esto implica que el campo eléctrico de cualquier onda plana con vector de onda  $\mathbf{k}$  en dirección  $\hat{z}$  puede expresarse así:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{E}_1(z, t) = E_{01} \cos(kz - \omega t) \hat{x}$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = E_{02} \cos(kz - \omega t + \alpha) \hat{y}$$

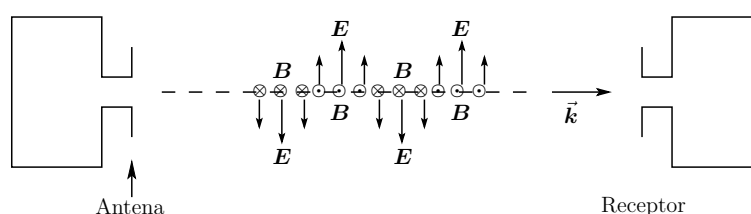
Es fácil ver que:

- Si  $\alpha$  es igual a  $0$  ó  $\pi$ , el campo  $\mathbf{E}$  oscila a lo largo de una línea.
- Si  $\alpha$  es igual a  $\frac{\pi}{2}$  ó  $\frac{3\pi}{2}$ , la punta del vector  $\mathbf{E}$  rota describiendo un círculo ( $E_{01} = E_{02}$ ), o una elipse ( $E_{01} \neq E_{02}$ ).

En estos casos se dice que la onda plana tiene polarización lineal, circular o elíptica, respectivamente. (En el ejercicio 10.4 se define polarización circular de mano derecha y de mano izquierda).

La luz de fuentes naturales como el sol está generalmente compuesta de muchos pulsos de ondas emitidos por fuentes independientes (y, por tanto, no correlacionadas), de modo que en un haz de luz ordinario el campo eléctrico, aunque siempre perpendicular a la dirección de propagación, varía al azar en magnitud y dirección. Se dice que tales haces de luz son no polarizados.

En algunos casos es posible obtener luz polarizada controlando directamente el proceso de emisión, como ocurre en las ondas de radio o microondas emitidas por antenas donde los electrones son forzados a oscilar en una dirección predeterminada (figura 10.8).



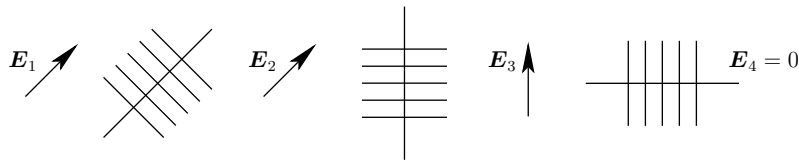
**Figura 10.8** Ondas polarizadas emitidas por antena dipolo.

A grandes distancias y en una dirección perpendicular al eje del dipolo, el campo eléctrico oscila paralelamente a éste (como puede comprobarse rotando la antena receptora).

Pero el método más simple de obtener luz polarizada consiste en filtrar haces no polarizados mediante un dispositivo o material que deje pasar prácticamente sin atenuación la componente del campo en cierta dirección (denominada *eje del polarizador*) y absorba o refleje la componente ortogonal a aquella.

Una rejilla constituida por cuerdas conductoras paralelas constituye un polarizador para ondas con frecuencias en el rango de microondas. Si incide un haz propagándose en dirección perpendicular al plano de la rejilla, el campo eléctrico en la dirección paralela a las cuerdas es eliminado del haz. Esto se debe, en parte, a la absorción (debida a la resistencia finita del conductor que implica una profundidad de penetración del campo del orden del *skin-depth*) y predominantemente a la reflexión en la superficie de las cuerdas conductoras.

La componente del campo eléctrico en la dirección perpendicular a las cuerdas prácticamente no puede realizar trabajo sobre los electrones del conductor y pasa sin atenuación. A esta dirección perpendicular a las cuerdas conductoras se le denomina *eje del polarizador*. El campo eléctrico que atraviesa el polarizador oscila a lo largo de este eje (figura 10.9).



**Figura 10.9** Pasos sucesivos de un campo eléctrico a través de polarizadores con diferentes ejes de polarización.

Aunque hoy es posible elaborar rejillas conductoras con separación entre líneas menor que la longitud de onda de la luz visible ( $\approx 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ), por ejemplo, evaporando oro sobre rejillas plásticas de difracción, el método más simple de construir polarizadores lineales para este rango de frecuencias fue descubierto por E. Land en 1938.

Este método consiste esencialmente en estirar una hoja de plástico (que consta de largas cadenas de hidrocarburos) en cierta dirección. Esto permite alinear las cadenas en un arreglo similar a la rejilla metálica descrita antes. Pero es necesario convertir estas cadenas en buenos conductores. Para ello se sumerge la hoja en una solución con yodo. Los átomos de yodo se ligan a las cadenas de hidrocarburos y les suministran electrones de conducción que pueden moverse en la dirección de las cadenas, pero no en dirección perpendicular a ellas.

El estado de polarización lineal de cualquier haz puede ser medido con ayuda de un polarizador que actúa como analizador. Si el haz está totalmente polarizado, existirá cierta orientación del analizador para la cual no hay ondas transmitidas, y otra, perpendicular a ésta, para la cual la transmisión es máxima. Si el haz es no polarizado, el campo eléctrico oscilará al azar, con igual probabilidad en todas direcciones y, por tanto, habrá una pequeña fracción transmitida a través de cualquier analizador de polarización, sin importar la dirección de su eje. Entre estos dos casos extremos pueden existir diversos grados de polarización parcial cuando predomina alguna dirección de oscilación del campo eléctrico.

## 10.7. Ondas electromagnéticas en medios conductores

Si para cierto rango de frecuencias el medio macroscópico se comporta como un conductor óhmico de conductividad  $\sigma$ , basta sustituir en la última ecuación del sistema 10.21  $\mathbf{J}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E}$ , manteniendo la condición de carga neta libre igual a cero, para obtener por el mismo procedimiento de la sección 10.3 una

ecuación de onda amortiguada, tal como se anticipó en el capítulo 7:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (10.30)$$

Pero en este rango óhmico los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  de una onda viajera ya no oscilan en fase, aunque siguen siendo perpendiculares entre sí. Si sustituimos en (10.30) una solución de la forma:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{x}}$$

encontramos que  $k$  debe ser un número complejo. Si usamos la aproximación  $\sigma \gg \epsilon \omega$ , válida en el rango óhmico, obtenemos  $k = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}}$ .

Entonces el campo eléctrico toma la forma:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\kappa z} e^{i(\omega t - Kz)} \hat{\mathbf{x}} \quad (10.31)$$

con  $K = \kappa = \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}}$ , en concordancia con el resultado obtenido en la sección 7.9.

La longitud de penetración del campo en el conductor (o *skin-depth*) es igual a:

$$\delta = \kappa^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\mu \sigma \omega}} \quad (10.32)$$

El campo magnético, que puede obtenerse a partir de  $\mathbf{E}$  integrando la ecuación de Maxwell (10.15), oscila a lo largo del eje  $\hat{\mathbf{y}}$  y está relacionado con el campo eléctrico de la manera siguiente:

$$\frac{E_y}{B_y} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega}{\mu \sigma}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Esto significa que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  oscilan con una diferencia de fase de  $\frac{\pi}{4}$ , como puede verse al tomar la parte real de las expresiones complejas

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B} &= E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{\mu \sigma}{\omega}} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (10.33)$$

Cuando una onda electromagnética en el rango resistivo de frecuencias incide sobre un metal se genera una onda reflejada y una onda transmitida; ésta se amortigua rápidamente, disipando su energía en forma de calor en una capa por lo general muy delgada del conductor. Los metales (con excepción del mercurio) se comportan como conductores sólo para bajas frecuencias (región infrarroja, microondas, ondas de radio y de corriente alterna). Pero aún para estas bajas frecuencias la longitud de penetración  $\delta$ , que depende de la conductividad y la frecuencia, suele ser muy pequeña: en el cobre es del orden de 1 mm para 60 Hz y de 1 nm para frecuencias del infrarrojo.

## 10.8. Guías de ondas electromagnéticas

Las líneas de transmisión de conductores paralelos son adecuadas para confinar dentro de una región finita las ondas electromagnéticas con frecuencias menores que  $10^9$  Hz. Pero líneas abiertas presentan pérdidas apreciables de energía por radiación al espacio exterior y, además, pueden causar efectos indeseados en conductores vecinos. En líneas de transmisión cortas, como las usadas en conexiones de teléfonos tradicionales, con frecuencia del orden de unos pocos kilociclos, se disminuyen estos efectos trenzando las cuerdas.

Una manera más eficiente de confinar las ondas consiste en rodear uno de los conductores con un tubo conductor concéntrico a fin de anular los campos externos. Pero a frecuencias mayores que  $10^8$  Hz, las pérdidas de energía en el conductor central (por el cual circulan altas corrientes) pueden ser apreciables, y existe el peligro de *break-down* en el dieléctrico que separa los conductores.

Para frecuencias en el rango óptico, la luz puede ser guiada con gran eficiencia a lo largo de fibras muy delgadas (con diámetros comprendidos entre décimas de milímetros y unos cuantos micrómetros), hechas de vidrio o plástico muy transparente. La propagación de la luz en estas fibras se describe en la sección 10.10 con base en el concepto de reflexión interna total.

Para el rango intermedio de frecuencias de microondas ( $10^9$  a  $10^{12}$  Hz) es posible canalizar o “guiar” la energía electromagnética a través de tubos conductores huecos, denominados *guías de ondas*. Pero, una vez desaparecido el conductor central, ya no puede describirse el comportamiento de los campos en términos de voltajes y corrientes como en las líneas de transmisión. Para longitudes de onda del orden de las microondas (3 mm a 30 cm) es necesario resolver directamente las ecuaciones de onda para los campos en el espacio interior de la guía, con condiciones de frontera sobre las superficies conductoras.

Al hacer esto, en el interior de un tubo conductor de cualquier sección transversal aparecen modos peculiares de oscilación de los campos y frecuencias

de corte por debajo de las cuales no hay propagación porque las soluciones toman la forma de ondas evanescentes.

### 10.8.1. Modos TE y TM en una guía de Ondas

Las ecuaciones de onda para los campos en la guía tienen la forma:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.34)$$

En una guía genéricamente cilíndrica (conductor hueco de cualquier sección transversal constante, con eje a lo largo del eje  $z$ ), por la simetría del problema es natural suponer que las soluciones de onda viajera que se propagan en la dirección  $\hat{z}$  tienen la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \mathbf{B}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (10.35)$$

donde hemos denominado  $k_z$  el número de onda dentro de la guía.

Al separar las partes longitudinales y transversales de los campos y sus derivadas

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \mathbf{E} &= E_z \hat{z} + \mathbf{E}_T \quad \mathbf{B} = B_z \hat{z} + \mathbf{B}_T \end{aligned} \quad (10.36)$$

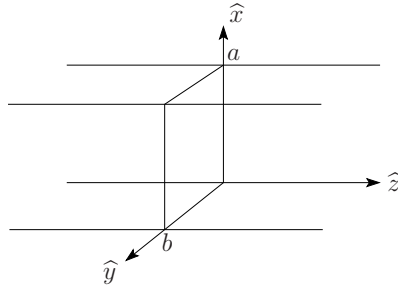
y escribir las ecuaciones de Maxwell en función de estos campos transversales y longitudinales, pueden obtenerse, después de un análisis cuidadoso<sup>6</sup>, dos conclusiones de carácter general, importantes para nuestro análisis:

- En una guía genéricamente cilíndrica no pueden propagarse ondas cuyos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sean transversales, es decir, campos con  $E_z = B_z = 0$ . Se expresa este hecho diciendo que un conductor hueco no puede transmitir ondas en modos TEM (transversal eléctrico y magnético).
- Todos los modos capaces de propagarse en una guía pueden dividirse en dos clases: TE (transversal eléctrico, con  $E_z = 0$ ) y TM (transversal magnético) con  $B_z = 0$ .

<sup>6</sup> Véase J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, New York, Wiley, 1999, sección 8.2.

Este comportamiento difiere de los resultados obtenidos para líneas de transmisión de conductores paralelos donde pueden propagarse campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  puramente transversales. Esto se debe a que los conductores separados por un aislante, con sus cargas y corrientes superficiales, pueden sustentar este tipo de ondas viajeras TEM. Pero aun en este caso, para frecuencias más altas (para las cuales ya no es válida la aproximación cuasiestática  $d < \lambda$ ) la solución de las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera conduce a otros modos de propagación TE y TM, además de los TEM, en líneas de transmisión. En los conductores huecos desaparece la posibilidad de los modos TEM.

### 10.8.2. Campos en guía de sección rectangular



**Figura 10.10** Guía de ondas de sección rectangular.

Para ilustrar algunos rasgos característicos de los campos en una guía de ondas, tomamos como prototipo una guía de sección rectangular. Al suponer soluciones de la forma (10.35) para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

la ecuación de onda toma la forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

Al sustituir:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -k_z^2 \mathbf{E}$$

y definir:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \equiv k^2, \quad k^2 - k_z^2 \equiv k_T^2 \quad (10.37)$$

podemos factorizar:

$$\nabla_T^2 \mathbf{E}_0(x, y) + k_T^2 \mathbf{E}_0(x, y) = 0 \quad (10.38)$$

Si aplicamos a esta ecuación diferencial el método de separación de variables, podemos escribir para cada componente del vector  $\mathbf{E}_0$ :

$$E_{0i}(x, y) = f(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k_T^2 f = 0$$

de donde resulta:

$$X''(x) = -k_x^2 X(x) \quad Y''(y) = -k_y^2 Y(y)$$

con:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_T^2 \quad (10.39)$$

Las soluciones son inmediatas:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \\ Y(y) &= C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \end{aligned} \quad (10.40)$$

Analicemos la forma de las soluciones para un modo TM (con  $B_z = 0$ ,  $E_z \neq 0$ ). En la suposición de conductor perfecto  $E_z$  debe satisfacer las condiciones de frontera:

$$E_z = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a \quad y = 0, b$$

Al imponer estas condiciones sobre la solución

$$\begin{aligned} E_z &= E_{0z} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= \left[ A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \right] \left[ C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

resulta:

$$E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (10.41)$$



Estas soluciones tienen forma de ondas estacionarias en las direcciones transversales, con números de onda  $k_x$  y  $k_y$  cuantizados:

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad m, n, \text{ enteros} \quad (10.42)$$

y forma de ondas viajeras en la dirección  $\hat{z}$  con número de onda  $k_z$  continuo pero sometido a la condición

$$k_z^2 = k^2 - k_T^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{mn}^2 \quad (10.43)$$

La velocidad de fase de las ondas electromagnéticas dentro de la guía es mayor que la velocidad de la luz en el vacío:

$$v = \frac{\omega}{k_z} > \frac{\omega}{k} = c$$

Pero la velocidad de grupo es menor que  $c$  y, por tanto, la dispersión es normal:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \frac{k_z}{k} < c$$

La ecuación (10.43) puede interpretarse como una relación de dispersión del tipo de Klein–Gordon, donde  $k_{mn}^2 c^2$  juega el papel de  $\omega_0^2$ :

$$\omega^2 = k_{mn}^2 c^2 + k_z^2 c^2 \quad (10.44)$$

Esto implica que, para valores dados de los enteros  $(m, n)$ , existe una frecuencia de corte,  $\omega_c(m, n) = k_{mn} c$ , por debajo de la cual no puede propagarse ese modo<sup>7</sup>.

Las condiciones de frontera para las componentes transversales de  $\mathbf{E}$  son:

$$E_y = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, a \quad E_x = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, b$$

Soluciones de la ecuación de onda de la forma:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_1 \cos \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y(x, y, z, t) &= E_2 \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z(x, y, z, t) &= E_3 \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (10.45)$$

<sup>7</sup> Como la relación  $\omega(k_z)$  es no lineal, las ondas viajeras dentro de la guía son dispersivas. Puede afirmarse, por tanto, que el vacío sometido a determinadas condiciones de frontera se convierte en un medio dispersivo.

con amplitudes  $E_i$  en general complejas, satisfacen las condiciones de frontera. La ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  dentro de la guía establece una conexión entre las componentes  $E_i$ . En efecto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (-k_x E_1 - k_y E_2 + i k_z E_3) \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

lo cual implica:

$$E_3 = e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{(k_x E_1 + k_y E_2)}{k_z} \quad (10.46)$$

Esto significa que las componentes transversales oscilan en cuadratura con la componente longitudinal del campo eléctrico.

A partir de aquí podemos hallar  $\mathbf{B}$  mediante las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

De la forma de (10.41) resulta evidente que en un modo TM ambos enteros  $(m, n)$  deben ser diferentes de cero, puesto que en estos modos la componente  $E_z$  no puede ser nula.

Por un procedimiento similar podemos hallar soluciones para modos TE. Campos eléctricos transversales que satisfacen las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera tienen la forma:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_1 \cos \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y(x, y, z, t) &= E_2 \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (10.47)$$

con la relación entre componentes:

$$k_x E_1 + k_y E_2 = 0 \quad \text{esto es} \quad E_1 \left[ \frac{m\pi}{a} \right] = -E_2 \left[ \frac{n\pi}{b} \right] \quad (10.48)$$

Las componentes del campo  $\mathbf{B}$  en los modos TE están dadas por:

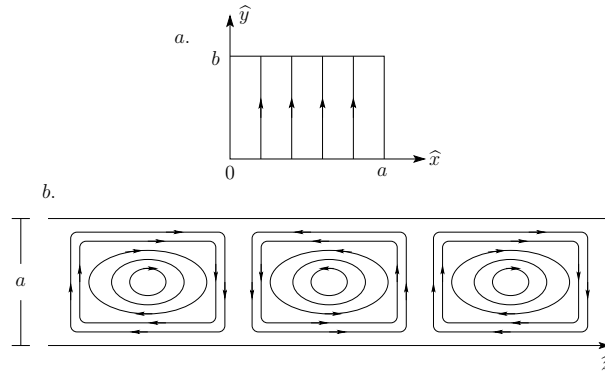
$$\begin{aligned} B_x(x, y, z, t) &= B_1 \sin \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_y(x, y, z, t) &= B_2 \cos \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \\ B_z(x, y, z, t) &= B_3 \cos \left[ \frac{m\pi}{a} x \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned} \quad (10.49)$$

La condición  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  implica que las componentes transversales del campo oscilan en cuadratura con la componente longitudinal  $B_z$ . Esta diferencia de fase entre componentes longitudinales y transversales de los campos en modos TE y TM tiene consecuencias físicas relativas al transporte de energía (véase el ejercicio 10.7).

Observe que para modos TE, uno de los enteros  $m, n$  puede ser cero sin que se anule la solución. Como la frecuencia de corte depende de  $m$  y  $n$  en la forma:

$$\omega_c^2 = k_{mn}^2 c^2 = \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] c^2$$

la mínima frecuencia de corte en la guía corresponde al modo  $TE_{10}$  o al  $TE_{01}$ , dependiendo de si  $a$  es mayor o menor que  $b$ . En la figura 10.11 se ilustra la forma de los campos en el modo mínimo  $TE_{10}$  para una guía con  $a \approx 2b$  cuya frecuencia de corte es  $\omega_{c\text{mín}} = \frac{c\pi}{a}$ .



**Figura 10.11** a) Campo eléctrico en el modo  $TE_{10}$ . b) Líneas de campo magnético en el modo  $TE_{10}$ .

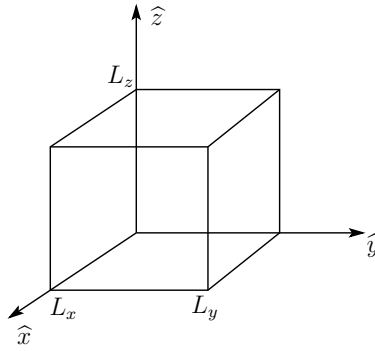
Así, en una guía de dimensiones dadas existe un modo mínimo que determina una frecuencia de corte absoluta, por debajo de la cual no hay solución de ondas viajeras sino evanescentes. Las guías se comportan, por tanto, como filtros de pasa-alto.

Para garantizar cierta estabilidad a pesar de posibles deformaciones (doblamientos o torsiones) de la guía, suele elegirse una relación  $\frac{a}{b}$  tal que el único modo que puede propagarse en cierta banda de frecuencias es el modo mínimo, que recibe el nombre de modo dominante. Esto implica que las frecuencias que se quieren transmitir son mayores que la frecuencia absoluta de corte, pero menores que la frecuencia de corte del siguiente modo.

Por simplicidad hemos analizado una guía de sección rectangular. Pero, aunque la forma precisa de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  depende de la geometría, ciertos rasgos, como existencia de modos normales, frecuencias de corte y modos TM y TE, son comunes a todas las guías genéricamente cilíndricas.

### 10.9. Cavidades resonantes, modos normales del campo EM

Así como una cuerda con extremos fijos sólo puede oscilar libremente con un conjunto discreto de frecuencias normales, una cavidad de paredes perfectamente conductoras, donde las componentes tangenciales del campo eléctrico deben anularse, sólo puede sustentar ondas electromagnéticas estacionarias con frecuencias dentro de un espectro discreto. Consideremos soluciones de las ecuaciones de onda para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  dentro de una cavidad conductora vacía de paredes rectangulares como la que se indica en la figura 10.12.



**Figura 10.12** Cavidad resonante de paredes rectangulares.

Para cada componente cartesiana de los campos es válida una ecuación de la forma:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.50)$$

Denominamos las componentes  $E_i$ ,  $B_i$  genéricamente  $\Phi(x, y, z, t)$ , y suponemos soluciones de modos normales de la forma:

$$\Phi(x, y, z, t) = f(x, y, z) \cos(\omega t + \delta)$$

Las ecuaciones (10.50) toman así la forma genérica:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (10.51)$$

Si aplicamos el método de separación de variables podemos escribir:

$$f(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

Al sustituir en (10.51) obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} X'' &= -k_x^2 X & Y'' &= -k_y^2 Y & Z'' &= -k_z^2 Z \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 &= k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \quad (10.52)$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones son inmediatas y pueden expresarse como superposición de senos y cosenos.

De las ecuaciones de Maxwell se desprende que las componentes tangenciales del campo eléctrico y las componentes normales del campo magnético son estrictamente continuas sobre cualquier superficie. Para corroborarlo desarrolle el ejercicio 10.5.

Para simplificar los cálculos supondremos que dentro del material conductor (considerado un conductor perfecto) los campos son nulos. Esto implica que las componentes tangencial de  $\mathbf{E}$  y normal de  $\mathbf{B}$  son nulas sobre la superficie de la cavidad.

Con estas condiciones de frontera y la condición  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  en el interior de la cavidad rectangular, las soluciones para el campo eléctrico tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_1 \cos \left[ \frac{l\pi}{L_x} x \right] \sin \left[ \frac{m\pi}{L_y} y \right] \sin \left[ \frac{n\pi}{L_z} z \right] \cos(\omega t + \delta) \\ E_y(x, y, z, t) &= E_2 \sin \left( \frac{l\pi}{L_x} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{L_y} y \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L_z} z \right) \cos(\omega t + \delta) \\ E_z(x, y, z, t) &= E_3 \sin \left( \frac{l\pi}{L_x} x \right) \sin \left( \frac{m\pi}{L_y} y \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L_z} z \right) \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (10.53)$$

Con la relación entre componentes<sup>8</sup>:

$$E_1 \left( \frac{l\pi}{L_x} \right) + E_2 \left( \frac{m\pi}{L_y} \right) + E_3 \left( \frac{n\pi}{L_z} \right) = 0 \quad (10.54)$$

<sup>8</sup> Verifique estos resultados desarrollando el ejercicio 10.6.

El campo magnético puede obtenerse por un procedimiento análogo, aplicando condiciones de frontera a la componente normal de  $\mathbf{B}$  sobre las paredes de la cavidad y la ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  en el interior de la misma. Pero, puede hallarse de manera más directa integrando la ecuación  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .

De aquí resulta que en un modo normal los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  oscilan en cuadratura, a diferencia de los campos en una onda plana viajera, que oscilan en fase.

De la ecuación (10.53) se ve que al menos dos enteros deben ser diferentes de cero para tener solución no trivial. Existe un modo mínimo que corresponde al de menor frecuencia entre los modos  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1)$ .

Las frecuencias normales, las únicas con las cuales pueden oscilar libremente los campos dentro de la cavidad, constituyen el conjunto discreto siguiente:

$$\omega_{lmn}^2 = k_{lmn}^2 = \pi^2 c^2 \left( \frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right) \quad (10.55)$$

En este caso, como en el bidimensional de la membrana vibrante analizada en el capítulo 9, también se presenta el fenómeno de degeneración de frecuencias si diferentes conjuntos ordenados de tres números enteros conducen a idéntico valor de la frecuencia.

Si alguno de los números enteros  $l, m, n$  es igual a cero, la relación (10.54) deja sólo dos constantes arbitrarias, correspondientes a un modo normal con dirección bien definida del campo eléctrico y amplitud y fase arbitrarias.

Si los tres enteros son diferentes de cero, para cada conjunto  $(l, m, n)$  existirán dos direcciones ortogonales de polarización que satisfacen la relación (10.54) y, por tanto, dos modos normales con idéntica frecuencia y diferente polarización. (La analogía con las oscilaciones transversales de una cuerda es pertinente: si la cuerda puede oscilar en dos direcciones linealmente independientes, el número de modos normales se duplica).

En conclusión:

Un modo normal de oscilación dentro de la cavidad está caracterizado por tres números enteros y una dirección de polarización.

Cualquier estado del campo electromagnético dentro de la cavidad puede expresarse como superposición de modos normales con amplitudes y fases que dependen de condiciones iniciales.

La energía electromagnética de la cavidad puede expresarse como suma de energías asociadas a los diferentes modos normales.

¿Qué ocurre si eliminamos cuatro paredes de la cavidad y dejamos sólo un par de placas conductoras paralelas?

De aquí puede resultar:

- a. Un resonador que juega un papel esencial en el proceso de amplificación del láser.
- b. Un arreglo experimental que permite medir el llamado “efecto Casimir”, o fuerza que ejerce el vacío sobre un par de placas conductoras. Esta fuerza, aunque es un efecto cuántico (explicable por la disminución de la energía cuando se introduce un par de conductores en un espacio antes vacío), depende crucialmente de los modos normales de oscilación del campo electromagnético que pueden existir entre un par de conductores. Para ver la dependencia de estos modos respecto a la distancia entre las placas paralelas, desarrolle el ejercicio 10.5.

## 10.10. Transporte de información en fibras ópticas

Hemos visto que un par de conductores paralelos, como las líneas de transmisión de potencia eléctrica, constituye una guía suficiente para ondas electromagnéticas de bajas frecuencias (y grandes longitudes de onda). A medida que aumenta la frecuencia se incrementa la pérdida de energía en líneas abiertas, por ello es conveniente aislar el sistema de los dos conductores paralelos en forma de cables coaxiales (ejercicio 10.1).

Para transmitir frecuencias del orden de las microondas ( $10^9$  a  $10^{12}$  Hz) se utilizan guías en forma de conductores huecos, que presentan frecuencias de corte y modos normales característicos dependientes de las condiciones de frontera.

A partir de la década de 1960 el desarrollo del láser y la posibilidad de fabricar hilos de vidrio del espesor de un cabello ( $d \simeq 50 \mu\text{m}$ ), unidos a considerables avances en electrónica, abrieron la puerta a un desarrollo que continúa hasta el presente: la transmisión de información codificada en señales electromagnéticas que se propagan a lo largo de fibras ópticas.

Una fibra óptica es esencialmente un hilo de dieléctrico transparente (vidrio o plástico) rodeado por un revestimiento de material con índice de refracción menor que el de la fibra.

Si el diámetro ( $d$ ) del núcleo de la fibra es menor o igual que la longitud de onda ( $\lambda$ ) de la radiación transmitida, la fibra se comporta como una guía de

ondas similar a la guía hueca con fronteras metálicas descrita en la sección 10.8, donde se propagan modos específicos del campo electromagnético<sup>9</sup>.

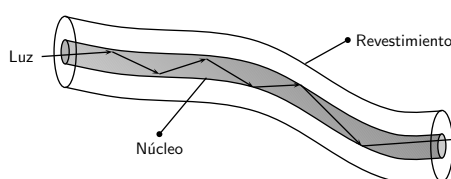
Si el diámetro del núcleo es mayor que la longitud de onda de la radiación ( $d > \lambda$ ) es posible usar la aproximación de la óptica geométrica: rayos que se propagan en forma rectilínea dentro de la fibra y se reflejan y refractan en la superficie de separación con el revestimiento que la rodea.

En este caso, el mecanismo que confina el rayo de luz, evitando que escape de la fibra óptica, es la *reflexión interna total*.

En general, cuando la luz pasa de un medio a otro con menor índice de refracción, el rayo transmitido se aleja de la normal a la superficie de separación entre los medios. Para cierto ángulo crítico de incidencia ( $\theta_C$ ) el rayo transmitido se hace paralelo a la superficie ( $\theta_2 = 90^\circ$ ). ¿Qué ocurre si el ángulo de incidencia ( $\theta_1$ ) es mayor que este ángulo crítico? En este caso no es aplicable la ley de Snell, pues nos daría un ángulo de refracción  $\theta_2$  que no puede ser real:

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_1 > \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_C = 1 !$$

Así, en el segundo medio, al otro lado de la frontera, no puede existir rayo transmitido. Sin embargo, al aplicar condiciones de frontera en la superficie, las ecuaciones de Maxwell predicen que cuando  $n_1 > n_2$  y  $\theta_1 > \theta_C$ , en el segundo medio (en el revestimiento de la fibra óptica) debe existir una onda electromagnética evanescente, como la descrita en el capítulo 7, que no implica transporte de energía<sup>10</sup>. El ángulo crítico para vidrio con índice de refracción  $n_1 = 1,5$  rodeado por aire ( $n_2 \simeq 1$ ) es de  $41,8^\circ$ . Fibras de vidrio típicas tienen un núcleo con índice de refracción solo uno por ciento mayor que el del revestimiento, con lo cual  $\theta_C \simeq 82^\circ$ . Esto significa que los rayos de luz deben viajar a lo largo de la fibra con un ángulo de incidencia rasante a fin de ser confinados por reflexión interna total (figura 10.13).



**Figura 10.13** Segmento de fibra óptica.

<sup>9</sup> Véase ilustración de estos modos en la sección 5.6 del texto *Óptica* de Hecht (Addison Wesley, 1998, tercera edición).

<sup>10</sup> Para una bella demostración, véase el capítulo 24 del texto *Óptica* de G. S. Landsberg (Editorial MIR, Moscú, 1984).



Hoy es común el uso de haces de fibras ópticas para transmitir imágenes o enfocar luz sobre regiones muy pequeñas, tanto en medicina (para examinar cavidades corporales internas, cauterizar, guiar cirugías, biopsias, etc.) como en industria (automóviles, reactores nucleares, motores de avión, sensores, etc.).

Pero la potencialidad mayor de las fibras ópticas reside en sus enormes ventajas como medio de transmisión de señales de audio, video y datos a largas distancias. En primer lugar, las frecuencias ópticas (del orden de  $10^{14}$ – $10^{15}$  Hz) permiten transmitir 10 000 veces más información que las más altas frecuencias de radio. En segundo lugar, las fibras ópticas son prácticamente inmunes a perturbaciones electromagnéticas, debidas por ejemplo a descargas eléctricas en la atmósfera o a la presencia de circuitos vecinos que interfieren con señales eléctricas en cuerdas, cables o guías delimitadas por conductores.

En tercer lugar, las pérdidas de energía, debidas predominantemente a esparcimiento (scattering) de la luz, ocasionado por impurezas o inhomogeneidades del dieléctrico<sup>11</sup>, se han reducido hasta el punto de que la señal puede viajar alrededor de 100 km sin atenuación considerable.

Las pérdidas de energía a lo largo de la fibra se miden en decibeles por kilómetro (dB/km). El número de decibeles es una función monótona del cociente de la potencia de salida  $P_f$  sobre la potencia de entrada  $P_i$ :

$$\text{dB} = -10 \log_{10} \frac{P_f}{P_i}$$

Así, cuando la potencia se reduce a 1 % de su valor inicial la pérdida es de 20 dB. Una reducción al 10 % equivale a 10 dB. La atenuación en el vidrio corriente es del orden de 1.000 dB/km, mientras que en fibras de sílice fundida (cuarzo) es de 20 dB/km.

Técnicas de purificación (eliminación de impurezas de hierro, níquel, cobre y restos de agua) han permitido obtener fibras de cuarzo de sólo 0,2 dB/km (para una longitud de onda de 1.550 nm). A pesar de tan baja atenuación, en un recorrido de 80 km la señal óptica pierde 16 dB de potencia. En transmisiones a distancias mayores de 100 km se requiere instalar amplificadores a intervalos regulares para compensar esta atenuación de la señal.

Un sistema básico de telecomunicaciones por fibra óptica requiere:

1. Un transmisor capaz de concentrar suficiente potencia sobre la pequeña sección transversal del núcleo (del orden de  $9 \mu\text{m}$ ). Típicamente se em-

<sup>11</sup> Este esparcimiento de los rayos de luz fuera de un dieléctrico rodeado de aire es el efecto que permite observar la luz parcialmente canalizada en un delgado chorro de agua en el clásico experimento realizado por primera vez por John Tyndall en 1870, y fácilmente reproducible en el aula o como "experimento casero" (Véase [www.fiberoptics.info/fiber--history.htm](http://www.fiberoptics.info/fiber--history.htm)).

plea un diodo láser, con una potencia de varios mW y sintonizable en varias longitudes de onda (1.310, 1.550 y 1.625 nanómetros). En el diodo láser la información se codifica en pequeñas corrientes eléctricas que al pasar a través de un chip semiconductor se convierten directamente en intensidades proporcionales de luz láser.

2. Una fibra que transmite los pulsos de luz láser donde está codificada la información en forma análoga (continua) o digital (en unos y ceros). A intervalos regulares se requieren amplificadores para compensar atenuación, regeneradores de señal y otros elementos para preservar la calidad de la información.
3. Un receptor, típicamente un fotodiodo capaz de registrar altas velocidades de información. En el receptor se convierte de nuevo la señal óptica en eléctrica y se decodifica la información.

La atenuación de la señal por pérdidas de energía no es el único problema que amenaza la transmisión de información.

La llamada “dispersión cromática”, que consiste en el ensanchamiento de paquetes o pulsos debido a las diferencias en velocidad de fase de las componentes con diferentes longitudes de onda (secciones 8.5.2 y 10.4), puede conducir a pérdidas de información si los pulsos en que ésta se codifica se confunden y se hacen indistinguibles.

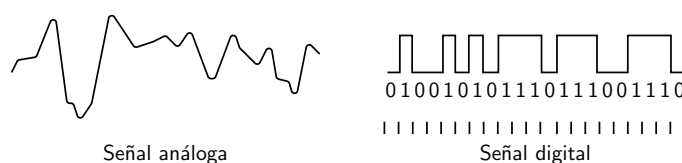
Para afrontar este problema es necesario elegir un rango de longitudes de onda donde la variación del índice de refracción con la frecuencia sea nula o prácticamente ignorable. Una fibra de vidrio estándar tiene un índice de refracción casi constante para  $\lambda = 1.300 \text{ nm}$ . Actualmente se usan, en comunicaciones ópticas, fibras con dispersión cromática casi nula para longitudes de onda alrededor de  $1.550 \text{ nm}$  (infrarrojo con frecuencia aproximada de  $2 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ).

Las señales ópticas, como las eléctricas, pueden ser codificadas en forma *análoga* (la amplitud de la señal varía con el tiempo de manera continua y la información se codifica mediante modulación de amplitud AM o de frecuencia FM) o en forma *digital* (la señal se codifica en una sucesión de ceros y unos que representan unidades de información o bits digitales) (figura 10.14).

Una señal análoga puede ser transformada en señal digital. En este caso una serie de bits representa la intensidad de la señal promediada sobre un pequeño intervalo de tiempo (por ejemplo, el tiempo requerido para transmitir esos bits).

En sistemas digitales la velocidad de la información se mide como número de bits que atraviesan un punto en un segundo (b/s). Para lograr velocidades de información del orden de  $10 \text{ Gb/s}$  ( $10^9$  bits por segundo) se requieren pulsos

extremadamente cortos en el tiempo. Pero estos pulsos satisfacen necesariamente relaciones de incertidumbre de la forma  $\Delta\omega \Delta t \geq 1$  (ecuación (8.36)), lo cual implica que tienen un ancho de frecuencias apreciable. Por ello, aunque el cambio de  $n$  con  $\lambda$  sea muy pequeño, en transmisión a grandes distancias se observará un ensanchamiento temporal de los pulsos, debido a dispersión cromática. (Recuérdese que el contenido espectral o ancho de frecuencias es constante en materiales lineales pero el ancho  $\Delta t$  tiende a aumentar con el tiempo). Este efecto suele contrarrestarse con segmentos especiales de fibra que actúan como compensadores de dispersión. Pero como este procedimiento implica disipación de energía y, por tanto, necesidad de más amplificadores de la señal, actualmente se desarrolla una investigación intensiva para encontrar soluciones más compactas y con menores pérdidas.



**Figura 10.14** Codificación analógica y digital de señales.

Una causa adicional del ensanchamiento de paquetes o pulsos es la diferencia de longitudes de camino recorridos por rayos que inciden con ángulos ligeramente diferentes. En comunicaciones de larga distancia este problema se afronta usando fibras de vidrio ultrapuro con un núcleo tan delgado ( $d \simeq 9 \mu\text{m}$  para  $\lambda \simeq 1.550 \text{ nm}$ ) que sólo pueden propagarse los rayos que son prácticamente paralelos al eje de la fibra. Esto es lo que suele denominarse *fibra mono-modo* o unimodal.

Pero en fibras unimodales se presentan nuevas formas de alteración o pérdida de información. Gracias a una técnica denominada “multiplexing”, es posible enviar simultáneamente en una sola fibra docenas de señales con diferentes longitudes de onda central o portadora<sup>12</sup>. Por ejemplo, la ventana de longitudes de onda alrededor de  $1.550 \text{ nm}$ , comprendida entre  $1.525$  y  $1.605 \text{ nm}$ , está dividida en canales (análogos a canales de radio) separados por una distancia mínima de  $50 \text{ GHz}$ , para permitir que señales de audio, video o datos, con distintas frecuencias portadoras, viajen simultáneamente a lo largo de la fibra.

Como cada canal tiene una potencia de entrada de  $3$  a  $10 \text{ mW}$ , en el núcleo se produce un enorme flujo de energía (del orden de  $\text{kW}/\text{mm}^2$ ), que corresponde a altas intensidades del campo eléctrico.

<sup>12</sup> Véase ilustración en el número de enero de 2001 de la revista *Scientific American*.

Estas intensidades provocan una respuesta no lineal en el dieléctrico, que tiene como consecuencia la alteración del perfil de frecuencias de la señal y la deformación y ensanchamiento adicional de los pulsos<sup>13</sup>. Tales efectos no lineales son compensados frecuentemente con regeneradores de la señal, a fin de lograr transmisión de información a grandes distancias con una tasa aceptable de bits erróneos.

En la técnica de comunicaciones es usual ensamblar haces de docenas de fibras en un solo cable óptico y, como cada fibra puede transmitir docenas de canales, cada uno con una capacidad de 10 Gb/s, actualmente es posible enviar en un solo cable información a una distancia de 4.000 km con una velocidad del orden de terabits por segundo (Tb/s). Algunos piensan que en un plazo no muy largo se podrá sobrepasar la barrera de los petabits ( $10^{15}$  b/s). Pero el explosivo crecimiento de internet está impulsando investigaciones sobre nuevas formas de fibras ópticas con diferentes mecanismos de confinamiento de la luz.

## Ejercicios

**10.1** Un cable coaxial es una línea de transmisión constituida por una cuerda conductora sólida de radio  $r_1$  y un cilindro coaxial conductor de radio  $r_2$ . Debido al confinamiento de los campos en el espacio entre los conductores, este tipo de línea suele usarse para transmitir frecuencias del orden de kHz y MHz, a fin de evitar influencias no deseadas en circuitos vecinos y disminuir pérdidas por radiación, que no son apreciables en las líneas abiertas usuales en transmisión de corriente alterna de 50–60 Hz.

Muestre que si el espacio entre ambos conductores es vacío, la capacitancia y la inductancia por unidad de longitud están dadas por:

$$\frac{C}{l_0} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \text{ Fm}^{-1} \quad \frac{L}{l_0} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \text{ Hm}^{-1} \quad (10.56)$$

Recuerde que  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

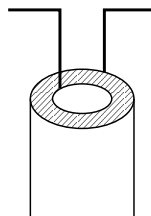
Justifique la suposición de que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son nulos fuera de la línea coaxial.

<sup>13</sup> Las secciones B.2 y B.3 ilustran algunos efectos no lineales, como la presencia de armónicos de la frecuencia fundamental, cuando en la ecuación de movimiento aparecen términos cuadráticos o cúbicos de la variable de oscilación. En el caso presente la polarización del dieléctrico ya no es proporcional a la primera potencia del campo eléctrico. Este y otros efectos no lineales contribuyen a la aparición de nuevas frecuencias y a la alteración de sus intensidades relativas.

- 10.2** Un cable coaxial que conecta una antena a un receptor de televisión tiene los siguientes valores de inductancia y capacitancia por unidad de longitud

$$L_0 = 6 \times 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$$

$$C_0 = 7 \times 10^{-11} \text{Fm}^{-1}$$



**Figura 10.15** Cable coaxial conectado a antena.

- a. Halle la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en esta línea. Calcule las longitudes de onda en la línea para frecuencias de 60 Hz y 600 Hz, y compárelas con las correspondientes longitudes de onda en el vacío.
- b. Con base en el resultado anterior, y suponiendo que el material aislante tiene permeabilidad magnética aproximadamente igual a  $\mu_0$ , halle su constante dieléctrica  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ .

- 10.3** a. Muestre que el campo  $\mathbf{E}$  de una onda plana con polarización circular que viaja en dirección  $\hat{z}$  puede expresarse como la parte real del vector:

$$\mathbf{E}_{\pm}(z, t) = E_0 e^{i(k \cdot z - \omega t)} (\hat{x} \pm i\hat{y}) = E_0 e^{i(k \cdot z - \omega t)} \hat{n}_{\pm}$$

donde  $\hat{n}_+$  denota polarización de mano derecha, según la convención de un tornillo que avanza en dirección  $\hat{z}$ , y  $\hat{n}_-$  polarización circular de mano izquierda.

- b. Haga gráficas para indicar la rotación del campo  $\mathbf{E}$  en un plano  $z = \text{cte}$ , para ambos casos.
  - c. Muestre que en una onda plana linealmente polarizada también puede expresarse el campo  $\mathbf{E}$  en función de vectores de polarización circular  $\hat{n}_{\pm}$ .
- 10.4** a. A partir de las ecuaciones de Maxwell en medios macroscópicos, halle la ecuación de onda de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en un medio homogéneo, neutro, lineal, de conductividad  $\sigma$  y permitividad eléctrica  $\epsilon$ .
- b. Suponga una solución de la forma (10.31) y halle explícitamente el campo  $\mathbf{B}$  y el número complejo  $k$ , usando la aproximación  $\sigma \gg \epsilon\omega$ .

Tome la parte real de las expresiones complejas para los campos y analice el resultado.

- 10.5** a. A partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

deduzca la continuidad de las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  y de las componentes normales de  $\mathbf{B}$  a través de cualquier superficie. (Use los teoremas de Stokes y de la divergencia de Gauss sobre regiones de espesor infinitesimal).

- b. Halle las frecuencias normales de oscilación de un campo eléctrico dentro de un resonador constituido por dos conductores paralelos que se comportan como espejos planos de alta reflectividad. (Ignore efectos de borde, como si las placas fuesen infinitas). Diga para qué rango de frecuencias son válidas las condiciones de frontera impuestas sobre los campos.

- 10.6** Aplique condiciones de frontera y la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  para hallar  $\mathbf{E}$  dentro de la cavidad de paredes conductoras rectangulares. Halle el correspondiente campo  $\mathbf{B}$  y muestre que en un modo normal  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  oscilan en cuadratura dentro de la cavidad. (Recuerde que para  $l, m$  y  $n$  diferentes de cero existen dos direcciones linealmente independientes de polarización y, por tanto, dos modos normales diferentes).

- 10.7** a. Escriba explícitamente las componentes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en el modo  $\text{TE}_{10}$  ilustrado en la figura 10.11. Halle la relación de fase entre  $E_y$  y las componentes longitudinal y transversal de  $\mathbf{B}$  en función de la amplitud  $E_2$ .
- b. Calcule el promedio temporal del llamado vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

sobre un número entero de períodos. Este vector,  $\mathbf{S}$ , determina el flujo de energía electromagnética a lo largo de la guía.

## Apéndice A

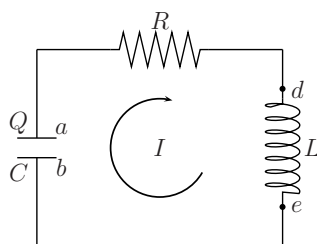
# La ecuación del oscilador electromagnético en aproximación cuasiestática a partir de las ecuaciones de Maxwell

### A.1. Circuito RLC en serie

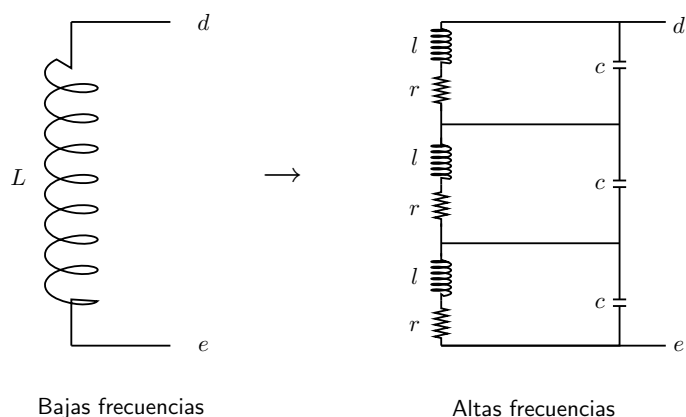
Una deducción rigurosa de la ecuación de cualquier sistema electromagnético clásico debe partir de las ecuaciones de Maxwell y de la ecuación de la fuerza de Lorentz sobre partículas cargadas (para velocidades no relativistas). Pero *si los campos no varían muy rápidamente en el tiempo y el espacio* es posible y conveniente hacer algunas aproximaciones.

En primer lugar, podemos describir nuestro sistema de cargas, corrientes, campos y conductores con ayuda de algunos parámetros macroscópicos, como resistencia ( $R$ ), capacitancia ( $C$ ) e inductancia ( $L$ ), que concentran en algunas regiones del espacio los efectos resistivos (calor de Joule), capacitivos (voltaje asociado a concentración de carga) e inductivos (voltaje asociado a variación de corriente en el tiempo), efectos que, en realidad, están distribuidos en todo el circuito.

Por convención llamamos  $Q(t)$  la carga sobre la placa superior del condensador en el instante  $T$  (suponemos que el circuito no tiene carga neta) y elegimos el sentido positivo de la corriente  $I(t)$  en la dirección indicada por la flecha en la figura A.1.

**Figura A.1** Circuito RLC.

Suponer concentrado todo el efecto capacitivo en el condensador significa que no se acumula carga en ningún punto del circuito, salvo en las placas del condensador. Pero esto, a su vez, implica que en el circuito fluye en cada instante una corriente única  $I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$  (debido a la conservación de la carga eléctrica)<sup>1</sup>. Esta aproximación corresponde en el sistema mecánico análogo masa-resorte a suponer que la tensión es idéntica en todos los puntos en cada instante, esto es, que todas las partes del sistema se “enteran” simultáneamente de los cambios en cualquier punto, ignorando así los efectos de retardo debidos a la velocidad finita de propagación de las señales.

**Figura A.2** Representación de la inductancia del circuito.

Si los cambios de los campos y corrientes ocurren a alta frecuencia, una aproximación más realista nos llevaría a ver la inductancia de la manera representada en la figura A.2. En este caso habría pequeñas concentraciones de carga en di-

<sup>1</sup> Por definición de la corriente,  $dq$  es la cantidad de carga que fluye a través de la sección transversal de la cuerda, en cualquier punto, durante el intervalo  $dt$ , mientras que, según la definición adoptada para  $Q$ ,  $dQ$  es el incremento de carga de la placa superior en el mismo intervalo.



versos puntos, y cada espira de la inductancia se comportaría aproximadamente como un pequeño circuito RLC.<sup>2</sup>

Las ecuaciones de Maxwell, que relacionan los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  entre sí y con las fuentes (cargas y corrientes), tienen en el vacío la forma siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.3})$$

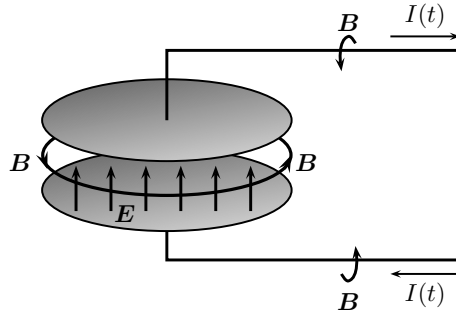
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

donde hemos usado la relación:

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Como los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  varían con el tiempo, la ecuación (A.4) implica que en la región entre las placas del condensador (donde  $\mathbf{J} = 0$  y  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq 0$ ) existe un campo magnético  $\mathbf{B}$  tal como se indica en la figura A.3.

Este campo  $\mathbf{B}$ , a su vez, varía en el tiempo y produce un campo eléctrico inducido que satisface la ecuación (A.2).



**Figura A.3** Campos entre las placas del condensador.

Sin embargo, si la variación de  $\mathbf{E}$  con el tiempo es lenta, podemos hacer la aproximación siguiente: el campo  $\mathbf{E}$  inducido por las variaciones de  $\mathbf{B}$  sólo es apreciable en la región de la inductancia. Esto equivale a suponer concentrados en esta región todos los efectos inductivos del circuito.

<sup>2</sup> Para una discusión más detallada sobre el comportamiento de condensadores, resistencias e inductancias reales a altas frecuencias, consulte las *Lectures* de Feynman, tomo II, cap. 23.

En general, el campo eléctrico puede descomponerse en un campo instantáneo de Coulomb  $\mathbf{E}_Q$  (o campo “longitudinal”) y un campo inducido  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  (o “transversal”) tales que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_{\text{ind}} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_Q = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_Q = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{ind}} = \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0 \quad (\text{A.7})$$

En términos simples:  $\mathbf{E}_Q$  lleva toda la divergencia y  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  toda la rotación del campo  $\mathbf{E}$ , de modo que la superposición de ambos satisface las ecuaciones de Maxwell.

Pero, por la ecuación (A.6),  $\mathbf{E}_Q$  puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar  $\phi$  (dependiente del tiempo y el espacio), que debe satisfacer la ecuación de Poisson:

$$\mathbf{E}_Q = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_Q = -\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{A.8})$$

Esta ecuación justifica el nombre de “campo instantáneo de Coulomb”.

Pero, como  $\nabla \times \mathbf{E}_Q = 0$ , su integral sobre un camino cerrado, calculada en cualquier instante  $t$ , es cero:

$$\oint \mathbf{E}_Q \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Esto implica que la integral de  $\mathbf{E}_Q$  entre dos puntos  $a$  y  $b$  (figura A.1) no depende del camino. Por tanto:

$$\int_a^b \mathbf{E}_Q \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \mathbf{E}_Q \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \phi_a - \phi_b = \frac{Q}{C} \quad (\text{A.10})$$

donde hemos usado la definición de capacitancia en función de la diferencia de potencial entre las placas del condensador  $V_C = \phi_a - \phi_b$ . Observe que el campo  $\mathbf{E}_Q$  satisface en cada instante las mismas ecuaciones de un campo electrostático.

Por otra parte, al aplicar el teorema de Stokes a la integral de línea de  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ , resulta:

$$\oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{A.11})$$

donde hemos usado la ecuación (A.7) y la definición de la inductancia  $L$  como relación entre el flujo magnético a través de la superficie encerrada por un circuito y la corriente  $I$  que circula en él, esto es:  $\phi_{mag} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = LI$ .

En nuestro modelo suponemos que el material del circuito satisface la ley empírica de Ohm:

$$V_R(t) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I(t) R \quad (\text{A.12})$$

donde  $R$  es la resistencia del circuito y el voltaje  $V_R$  está definido como integral de línea del campo eléctrico entre los extremos del conductor<sup>3</sup>.

Como se demuestra al final del apéndice, la ecuación (A.12) implica suponer que el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre las cargas responsables de la corriente es igual a la energía disipada en la resistencia. Es decir, no hay incremento promedio de la energía cinética de las cargas ni hay pérdidas de energía por radiación de ondas electromagnéticas.

Suponer toda la inductancia del circuito concentrada en la región del solenoide implica ignorar el cambio de flujo magnético en el resto del circuito y, por tanto, aproximar:

$$\oint \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} \approx \int_a^b \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} \approx \int_d^e \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{A.13})$$

A partir las ecuaciones (A.10), (A.12) y (A.13) podemos escribir:

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E}_Q \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (\text{A.14})$$

donde la integral, que depende del camino, se calcula a lo largo del conductor.

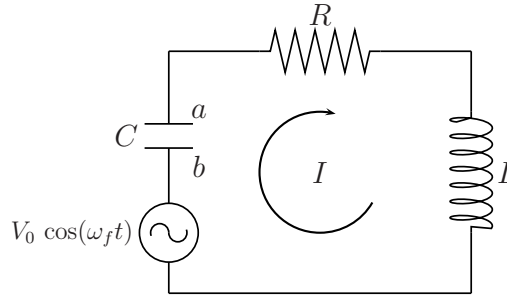
Finalmente, si usamos la relación  $I = -\dot{Q}$ , obtenemos la ecuación del circuito RLC en aproximación cuasiestática:

$$\ddot{Q}(t) + \left(\frac{R}{L}\right) \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0 \quad (\text{A.15})$$

## A.2. Circuito RLC en serie con fuente de voltaje

Si se conecta una fuente de voltaje en serie con los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ , debemos suponer que en su interior existe un campo  $\mathbf{E}'$  capaz de realizar trabajo sobre las

<sup>3</sup> La ley de Ohm supone una relación lineal entre la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y el campo eléctrico dentro del material, de la forma  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Si en alguna región la resistencia es cero, y por tanto la conductividad  $\sigma$  es infinita, el campo  $\mathbf{E}$  debe ser cero, porque de lo contrario la corriente sería infinita. En este caso suponemos la conductividad finita en todo el circuito.



**Figura A.4** Circuito RLC en serie con fuente de voltaje.

cargas responsables de la corriente eléctrica. A este campo se asocia el voltaje entre los extremos de la fuente, denominado  $fem$ . En el caso presente asumimos que el voltaje es armónico:

$$fem = \int_a^b \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = V_0 \cos(\omega_f t) \quad (\text{A.16})$$

Basta, pues, agregar este término en (A.14) para obtener la ecuación del circuito con fuente:

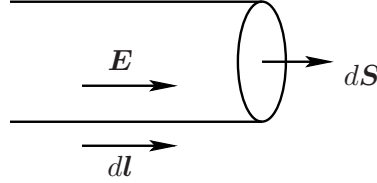
$$IR = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} + V_0 \cos(\omega_f t) \quad (\text{A.17})$$

Como puede verse, la ecuación del circuito resulta simplemente de igualar a  $IR$  (donde  $R$  incluye toda la resistencia del circuito) la integral de campo eléctrico total a lo largo del camino conductor y a través de la fuente, es decir, a lo largo de la región donde hay corriente eléctrica. De este modo, las ecuaciones de Maxwell nos permiten expresar las integrales de los campos  $\mathbf{E}_Q$  y  $\mathbf{E}_{ind}$  en función de parámetros fácilmente medibles, como  $Q$  e  $I$ .

### A.3. Significado físico de la integral de línea del campo eléctrico

La integral  $\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  a lo largo del conductor no tiene el significado de “trabajo realizado sobre una carga unitaria cuando se mueve desde  $a$  hasta  $b$ ”, como suele afirmarse en textos elementales, pues  $d\mathbf{l}$  no es un desplazamiento de alguna carga en algún tiempo, sino un elemento de línea del circuito, y la integral se calcula en el único instante  $t$ .

El significado físico de esta integral puede comprenderse mejor en relación con el trabajo realizado por el campo sobre *todas* las cargas responsables de la corriente eléctrica en la unidad de tiempo.



**Figura A.5** Elemento de carga.

Sobre cualquier pequeño elemento de carga  $dq = \rho dl \Delta S$  (figura A.5) actúa en el instante  $t$  una fuerza  $\mathbf{F} = \mathbf{E} dq$ . Si la carga  $dq$  tiene una velocidad  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , el trabajo realizado sobre este elemento en la unidad de tiempo es  $\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Pero

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dq = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rho dl \Delta S \quad (\text{A.18})$$

Por definición:  $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$  y  $J \Delta S = I$  (suponiendo por simplicidad que  $J$  es uniforme en toda la sección transversal  $\Delta S$  del conductor). Si suponemos el elemento de línea  $dl$  paralelo a  $\mathbf{v}$  (y, por tanto, a  $\mathbf{J}$ ), podemos reescribir la ecuación anterior así:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) I \quad (\text{A.19})$$

Esto significa que  $\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) I$  es el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre un elemento de carga  $dq$  por unidad de tiempo.

Para obtener el trabajo por unidad de tiempo sobre todas las cargas que contribuyen a la corriente debemos sumar (integrar) estos trabajos elementales sobre toda la cuerda:

$$\frac{dW}{dt} = \left[ \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right] I = I^2 R \quad (\text{A.20})$$

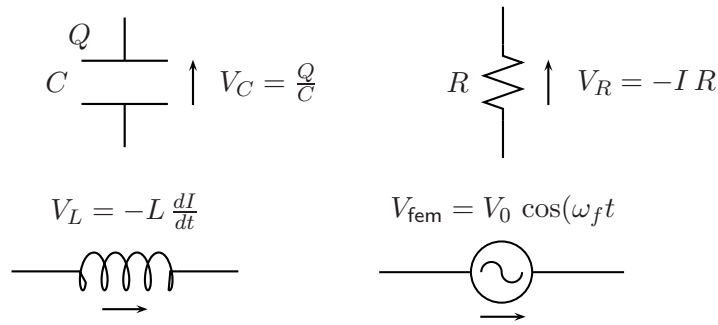
donde hemos usado la ecuación (A.12).

Este trabajo del campo  $\mathbf{E}$  sobre todas las cargas en la unidad de tiempo es precisamente igual al calor de Joule o potencia disipada en la resistencia.

### A.4. Acerca de una “ley” de Kirchhoff

Las ecuaciones de los circuitos pueden obtenerse rápidamente con ayuda de una regla práctica que tiene su justificación en el análisis anterior, a saber:

“Igual a cero la suma de todas las subidas de potencial en cada trayectoria cerrada”. Las “subidas de potencial” se calculan siguiendo la dirección positiva de la corriente  $I$  indicada por las flechas en la figura A.6.



**Figura A.6** Subidas de potencial en componentes del circuito.

Pero esta regla práctica, tan útil en los cálculos, oscurece un hecho fundamental:

La integral de línea cerrada del campo eléctrico (aun en ausencia de resistencia o fuente externa) no es igual a cero, puesto que *no se trata de un campo estático o irrotacional* (sólo lo es la parte longitudinal  $\mathbf{E}_Q$ ).

Por ejemplo, cuando no hay fuente externa, de acuerdo con las ecuaciones (A.9) y (A.11), tenemos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = -L \frac{dI}{dt}$$

Pero, según (A.14)

$$-L \frac{dI}{dt} = IR - \frac{Q}{C}$$

que en general es diferente de cero. Observe que en el caso límite de  $R = 0$  resulta:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{C}$$

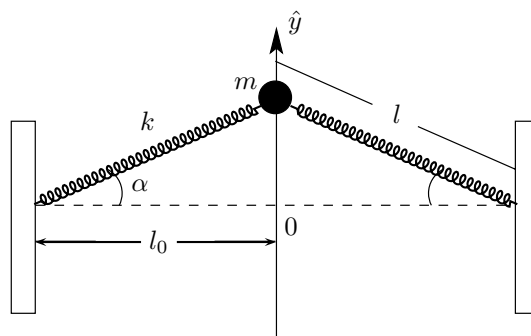
## Apéndice B

# Osciladores no lineales

Términos no lineales, con  $x$  elevada a potencias diferentes de cero o uno, aparecen usualmente en las ecuaciones de movimiento debido a la no linealidad de la fuerza recuperadora. También se presenta el caso de sistemas no conservativos con fuerzas de fricción no lineales en  $\dot{x}$ . Aquí nos restringiremos al análisis de algunos modelos mecánicos conservativos con fuerzas recuperadoras no lineales para ilustrar algunas consecuencias físicas de la no linealidad.

### B.1. Oscilaciones transversales de masa entre dos resortes

El sistema masa–resortes se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción apreciable, como se muestra en la figura B.1. Suponemos que en la posición de equilibrio ( $y = 0$ ) los dos resortes ejercen sobre  $m$  fuerzas iguales en magnitud pero de direcciones opuestas.



**Figura B.1** Oscilaciones transversales.

La ecuación de movimiento toma la forma:

$$m\ddot{y}(t) = -2k_0 \sin \alpha - 2k(l - l_0) \sin \alpha \quad (\text{B.1})$$

Pero

$$\sin \alpha = \frac{y}{l} = \frac{y}{\sqrt{l_0^2 + y^2}} \quad l - l_0 = \sqrt{l_0^2 + y^2} - l_0$$

Con estas sustituciones la ecuación (B.1) toma la forma no lineal:

$$m\ddot{y}(t) = -2k_0 \frac{y}{\sqrt{l_0^2 + y^2}} - 2ky \left[ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + y^2}} \right] \quad (\text{B.2})$$

Podemos hacer una aproximación de pequeñas oscilaciones mediante una expansión en serie de Taylor alrededor de  $y = 0$  y reteniendo sólo los dos primeros términos diferentes de cero, con el resultado siguiente:

$$m\ddot{y}(t) = -2 \frac{k_0}{l_0} y + (k_0 - kl_0) \left( \frac{y}{l_0} \right)^3 \quad (\text{B.3})$$

Observe que si la tensión del resorte en equilibrio es grande y los desplazamientos verticales pequeños, comparados con  $l_0$ , puede ignorarse el segundo término para llegar a una ecuación lineal idéntica a (1.8), que rige el movimiento de una masa en una cuerda de tensión constante  $T$ , con  $T = k_0$ .

Pero si no existe tensión en el resorte en equilibrio ( $k_0 = 0$ ), no es posible hacer una aproximación lineal a este sistema, ni siquiera en la hipótesis de pequeñas oscilaciones.

## B.2. Péndulo simple

La ecuación (1.3) para la fuerza tangencial sobre un péndulo simple tiene una forma evidentemente no lineal debido a la presencia de la función  $\sin \theta$ :

$$F_\theta = ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

Si sólo consideramos ángulos  $\theta < 1$  rad la serie de Taylor de la función  $\sin \theta$  converge, tanto más rápidamente cuanto más pequeño sea el ángulo:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$



Para desplazamientos muy pequeños del péndulo podemos retener sólo el primer término en la expansión y con ello obtenemos una ecuación de oscilador armónico. Sin embargo, si estamos interesados en ángulos un poco mayores o en una mayor precisión, por ejemplo, en el cálculo del período, podemos conservar el siguiente término. Pero con ello nos enfrentamos al difícil problema de resolver una ecuación no lineal de la forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ensayaremos una solución periódica, aunque no armónica, de esta ecuación<sup>1</sup>. Por la forma de (B.4) es necesario encontrar una función  $\theta(t)$  tal que términos lineales como los dos primeros puedan cancelar el término cúbico. Por fortuna, las funciones armónicas satisfacen identidades de la forma:

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\beta)] \quad (\text{B.5})$$

$$\cos^3 \beta = \frac{1}{4} \cos(3\beta) + \frac{3}{4} \cos \beta \quad (\text{B.6})$$

y ecuaciones similares para potencias mayores. Esto sugiere que usemos como Ansatz una función de la forma:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) - \epsilon \theta_0 \cos(3\omega t) \quad (\text{B.7})$$

con la condición inicial  $\dot{\theta} = 0$  en  $t = 0$  a fin de anular la constante de fase.

Al remplazar esta expresión en la ecuación de movimiento ignoraremos términos del orden  $\epsilon^2$  y  $\epsilon^3$ , puesto que  $\epsilon$  debe ser suficientemente pequeña para que el segundo término de (B.7) pueda considerarse una pequeña corrección a una solución armónica de frecuencia  $\omega$ .

Con esta aproximación:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t) + 9\omega^2 \epsilon \theta_0 \cos(3\omega t) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{g}{l} \theta = \frac{g}{l} \theta_0 [\cos(\omega t) - \epsilon \cos(3\omega t)] \quad (\text{B.9})$$

$$-\frac{g}{l} \frac{\theta^3}{6} = -\frac{g}{l} \frac{\theta_0^3}{6} \left[ \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) - 3\epsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right] \quad (\text{B.10})$$

<sup>1</sup> En la sección final de este apéndice se justifica esta elección.

Al sumar estos tres términos, la ecuación (B.4) se convierte en:

$$-\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t) + 9\omega^2 \epsilon \theta_0 \cos(3\omega t) + \frac{g}{l} \theta_0 [\cos(\omega t) - \epsilon \cos(3\omega t)] - \frac{g}{l} \frac{\theta_0^3}{6} \left[ \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) - 3\epsilon \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) \right] = 0 \quad (\text{B.11})$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo  $t$ , los coeficientes de  $\cos(\omega t)$ ,  $\cos(3\omega t)$  y  $\cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)$  deben anularse por separado.

Al anular el coeficiente de  $\cos(\omega t)$ , obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \left[ 1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right]$$

de aquí resulta:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \left[ 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right] \quad (\text{B.12})$$

Esto significa que la frecuencia fundamental  $\omega$  depende de la amplitud de la oscilación, un hecho que ya contiene una corrección al modelo de oscilador armónico simple cuya frecuencia natural sólo depende de los parámetros  $(g, l)$  y es independiente de la amplitud.

Al anular el coeficiente de  $\cos(3\omega t)$ , resulta:

$$9\omega^2 \epsilon \theta_0 - \frac{g}{l} \epsilon \theta_0 - \frac{g}{l} \frac{\theta_0^3}{24} = 0$$

Para amplitudes  $\theta_0$  pequeñas, al ignorar en esta ecuación la diferencia entre  $\omega^2$  y  $\frac{g}{l}$ , resulta:

$$\epsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192} \quad (\text{B.13})$$

Como puede verse, la anarmonicidad del movimiento periódico, que está determinada por el valor de  $\epsilon$ , depende de la amplitud de las oscilaciones. Observe que si  $\theta \approx 0,3$  rad,  $\epsilon \approx 0,001$ . Si llevamos  $\theta_0^2$  al coeficiente de  $\cos^2(\omega t) \cos(3\omega t)$ , vemos que es del orden de  $\epsilon^2$  y, por tanto, se anula en esta aproximación.

**En conclusión:**

Para amplitudes relativamente altas, aunque en todo caso menores que 1 rad, las oscilaciones del péndulo no son armónicas aunque siguen siendo periódicas, con período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . A la oscilación con frecuencia fundamental  $\omega$  y amplitud  $\theta_0$  se superpone un armónico de frecuencia  $3\omega$  y amplitud  $\epsilon \theta_0$ . En aproximaciones sucesivas encontraríamos una superposición de armónicos (múltiplos de la frecuencia fundamental) con frecuencias cada vez mayores y amplitudes cada vez menores.

Observe que la ecuación no lineal para el péndulo simple hasta términos de orden  $\theta^3$  tiene la misma forma matemática que la ecuación (B.3) para las oscilaciones transversales del sistema masa-resorte de la sección B.1. En consecuencia, métodos de solución y resultados son esencialmente idénticos para ambos casos.

### B.3. Osciladores con término cuadrático en la fuerza recuperadora

Analicemos un sistema cuya ecuación de movimiento, en alguna aproximación, puede escribirse en la forma:

$$m\ddot{x} + kx - kr x^2 = 0$$

o de manera equivalente:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \omega_0^2 r x^2 = 0 \quad (\text{B.14})$$

Observe que la fuerza  $f(x) = -kx + kr x^2$  se anula en dos puntos:  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{r}$ . La energía potencial

$$E_{pot} = - \int_0^x f(x) dx = k \frac{x^2}{2} - kr \frac{x^3}{3}$$

tiene un mínimo en  $x = 0$  y, por tanto, éste es un punto de equilibrio estable. El punto  $x = \frac{1}{r}$  corresponde a un máximo de  $E_{pot}$  y, por tanto, es un punto de equilibrio inestable. Si queremos obtener oscilaciones periódicas alrededor del origen debemos suponer que la amplitud de éstas es menor que  $\frac{1}{r}$ .

Ensayemos una solución de la forma:

$$x = A [\cos(\omega t) + \epsilon \cos(2\omega t)] + x_1 \quad (\text{B.15})$$

con condiciones iniciales

$$\dot{x}(0) = 0 \quad x(0) = [A(1 + \epsilon) + x_1] < \frac{1}{r}$$

Suponemos la constante positiva  $\epsilon$  pequeña comparada con la unidad y  $x_1 > 0$ .

El término constante en este Ansatz se debe al hecho de que la función  $\cos^2(\omega t)$ , a diferencia de la función cúbica de la sección anterior, introduce una constante adicional:

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t)]$$

Al remplazar la solución (B.15) en la ecuación de movimiento, anular independientemente los coeficientes de  $\cos(2\omega t)$  y  $\cos(\omega t)$ , ignorar términos del orden de  $\epsilon^2$  y usar la condición  $rA \ll 1$ , obtenemos en primer lugar:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \quad (\text{B.16})$$

Esto significa que en esta aproximación la no linealidad cuadrática, a diferencia de la cúbica, no produce corrimiento en la frecuencia fundamental y, por tanto, el período es idéntico al del oscilador lineal.

En segundo lugar, obtenemos:

$$\epsilon = r \frac{A}{6} \ll 1 \quad x_1 = r \frac{A^2}{2} = 3\epsilon A \quad (\text{B.17})$$

Estos resultados muestran que es consistente con esta aproximación ignorar términos  $x_1^2$  y  $x_1 r A$ , que resultaron del orden de  $\epsilon^2$ .

Un rasgo interesante de este modelo es que, a pesar de que el sistema oscila alrededor del punto de equilibrio  $x = 0$ , la oscilación no es simétrica debido a la asimetría del potencial, como ilustraremos con ayuda del espacio de fase en la sección B.5. Como consecuencia de esta asimetría, el valor medio de la posición de  $m$  es diferente de cero:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = r \frac{A^2}{2} = x_1 \quad (\text{B.18})$$

Este resultado sugiere que un modelo similar a éste podría ser adecuado para describir la interacción de pares de átomos de un sólido, con  $x$  como distancia interatómica. Un aumento de temperatura implica un aumento en la amplitud de las oscilaciones y por tanto de  $A^2$ . Pero esto implica, a su vez, según la ecuación (B.18), un aumento en  $\langle x \rangle$  y, por tanto, un aumento en la distancia media entre átomos, lo cual significa que el sólido se expande al elevar la temperatura. Cálculos realizados para sólidos cristalinos como KCl, donde la distancia interiónica puede medirse con ayuda de rayos X y el parámetro  $r$  se determina a partir de las curvas de energía potencial interiónica, dan una buena aproximación al coeficiente de expansión térmica.

#### B.4. Modelo no lineal de dieléctrico en campo externo

En el modelo clásico de interacción radiación-átomo, que sirvió de base a los cálculos del índice de refracción del vidrio en la sección 2.5, se usó una aproximación lineal en la ecuación de movimiento del electrón ligado al átomo por una fuerza recuperadora y sometido a la fuerza externa del campo eléctrico de una onda de frecuencia  $\omega_f$ . (Véase ecuación (2.29)).

Si tomamos en cuenta correcciones no lineales (cuadrática y cúbica) a la fuerza de ligadura al átomo, la ecuación del electrón forzado armónicamente puede escribirse así:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 + \Gamma \dot{x} = \frac{q}{m} E_0 \cos \omega_f t \quad (\text{B.19})$$

con  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Como asumimos que los términos no lineales pueden ser tratados como perturbaciones, podemos utilizar un método de aproximaciones sucesivas. En primer lugar, hallamos la solución particular de la ecuación (B.19) sin los términos no lineales. Del capítulo 2, sabemos que ésta puede separarse en una respuesta elástica (en fase con la fuerza externa) y una respuesta absorbente (en cuadratura con la fuerza).

En el caso presente suponemos que la frecuencia  $\omega_f$  está muy alejada de la banda de absorción ( $\omega_f \ll \omega_0$ ) y, por tanto, predomina la respuesta elástica. La polarización del material es precisamente la manifestación de esta respuesta elástica. Para calcularla podemos ignorar en la ecuación lineal de movimiento el término que contiene  $\Gamma$ , lo cual equivale a ignorar  $\Gamma \omega_f$  en comparación con  $\omega_0^2 - \omega_f^2$ .

Esta aproximación de orden cero es igual a:

$$x_0(t) = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \cos \omega_f t$$

Al sustituir  $x(t)$  por  $x_0(t)$  en los términos no lineales de (B.19), queda por resolver la ecuación lineal no homogénea:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E_0 \cos \omega_f t + \beta \left( \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^2 \cos^2 \omega_f t \\ + \gamma \left( \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^3 \cos^3 \omega_f t \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Al expresar  $\cos^2 \omega_f t$  y  $\cos^3 \omega_f t$  como en (B.5) y (B.6), y ensayar una solución de forma análoga a la parte no homogénea de la ecuación (B.20), resulta:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \cos \omega_f t + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^2 \left[ \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2\omega_f t}{\omega_0^2 - 4\omega_f^2} \right] \\ + \frac{3}{4} \gamma \left( \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^3 \frac{\cos \omega_f t}{\omega_0^2 - \omega_f^2} + \frac{\gamma}{4} \left( \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^3 \frac{\cos 3\omega_f t}{\omega_0^2 - 3\omega_f^2} \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

Observe: los dipolos atómicos,  $qx(t)$ , no oscilan solamente con la frecuencia  $\omega_f$  del campo externo (como en el caso lineal) sino también con frecuencias  $2\omega_f$ ,  $3\omega_f$ , que son múltiplos de aquella. Estos dipolos oscilantes emiten ondas secundarias que se superponen a la onda incidente, dando lugar a ondas transmitidas y reflejadas que contienen, además de la frecuencia de la onda incidente, diversos armónicos de ésta. Esta “generación de armónicos” es uno de los efectos típicos de la no linealidad del medio.

Si observamos el término proporcional al campo incidente en (B.21):

$$\left[ \frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} + \frac{3}{4} \gamma \left( \frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2)} \right)^3 \frac{E_0^2}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right] E_0 \cos \omega_f t$$

podemos ver que la polarización,  $P = Nqx(t)$ , relacionada con el campo de la onda incidente, depende de la intensidad de la onda ( $\propto E_0^2$ ). Esto conlleva una dependencia similar del índice de refracción ( $n = n_0 + n_2 E_0^2$ ), que acarrea nuevos efectos no lineales.

Por un método similar puede hallarse la respuesta de un oscilador no lineal a la superposición de dos fuerzas de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , con sus respectivas amplitudes y constantes de fase.

El efecto resultante no es la suma de los efectos que producirían las dos fuerzas individualmente, como en el caso lineal. En vez de ello, en el estado estacionario el dipolo (atómico o molecular) oscila y emite ondas secundarias, no sólo con las frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $3\omega_1$ ,  $3\omega_2$ , sino también con las llamadas “sumas de frecuencias”:  $\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $2\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $2\omega_2 \pm \omega_1$ . De aquí resulta que el espectro de frecuencias de un paquete o pulso que se propaga en un medio no lineal, lejos de ser constante, como en el caso lineal, se ensancha con la adición de nuevas frecuencias.

## B.5. Sistemas conservativos no lineales en el espacio de fase

Si a partir de la ecuación de movimiento o de la conservación de la energía total  $E = E_{pot}(x) + E_{cin}(\dot{x})$  expresamos la velocidad  $\dot{x}$  como función de  $x$  para cada valor de  $E$  y hacemos las gráficas correspondientes para diferentes valores de la energía total, podemos visualizar muchos rasgos del movimiento del sistema: a cada punto  $(\dot{x}, x)$  de una curva corresponde un posible estado en un instante  $t$ . Y cada curva describe el movimiento del sistema con una energía dada  $E$ . Aunque en el espacio de fase no aparece explícitamente el tiempo, podemos calcularlo a partir del dato de la posición en algún instante  $t_0$ , así:

$$\text{Al integrar } dt = \frac{dx}{\dot{x}} \quad \text{resulta: } t = t_0 + \int_{t_0}^t \frac{dx}{\dot{x}} \quad (\text{B.22})$$

En particular, si el movimiento es periódico, la ecuación anterior nos permite conocer el período  $T$ .

### B.5.1. Oscilador asimétrico

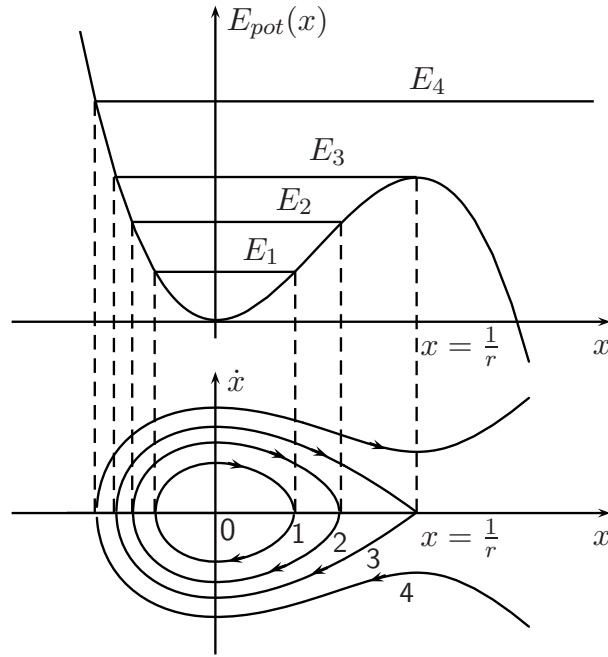
Para ilustrar algunos rasgos generales, tomemos el caso del oscilador con término cuadrático en la fuerza y cúbico en la energía potencial, analizado en la sección B.3

$$E = m \frac{\dot{x}^2}{2} + E_{pot} = m \frac{\dot{x}^2}{2} + k \frac{x^2}{2} - kr \frac{x^3}{3} \quad (\text{B.23})$$

de aquí resulta:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - k\frac{x^2}{2} + kr\frac{x^3}{3}} \quad (\text{B.24})$$

Curvas de  $\dot{x}(x)$  para varios valores del parámetro  $E$  nos dan un “retrato” del sistema en el espacio de fase, como se aprecia en la figura B.2.



**Figura B.2** Espacio de fase del oscilador asimétrico.

La curva de  $E_{pot}$  nos da información sobre los puntos de retorno ( $\dot{x} = 0$ ) en los cortes con las curvas  $E = cte$ . La energía cinética puede leerse directamente en la figura como diferencia entre  $E$  y  $E_{pot}$  para cada valor de  $x$ . De aquí es posible evaluar los correspondientes valores de velocidad  $\dot{x}_{\pm}$ .

Observe que el sentido en el cual el sistema recorre la curva está inequívocamente señalado por las flechas en la figura;  $\dot{x}$  sólo puede ser positivo en el semiplano superior, por ello  $x$  tiende a aumentar, mientras que en el semiplano inferior el sistema avanza hacia valores menores de  $x$  (en valor real) por ser la velocidad  $\dot{x}$  negativa.

Para valores de  $E < E_3 = \frac{k}{6r^2} = E_{pot}(\frac{1}{r})$  la masa ejecuta un movimiento oscilatorio periódico, representado por curvas cerradas en el espacio de fase. Sin



embargo, este movimiento no es simétrico alrededor del origen. Esta asimetría, que se ve directamente en el diagrama, obedece a que la energía potencial no es una función simétrica respecto al origen, esto es:  $E_{pot}(x) \neq E_{pot}(-x)$ .

Todas las curvas  $\dot{x}(x)$  deben tener pendiente cero en el origen. Esto se debe a que la energía potencial tiene un mínimo en  $x = 0$  y, por tanto, la energía cinética debe ser máxima en este punto. Esto implica que  $\frac{d\dot{x}}{dx} = 0$  en  $x = 0$ .

Todas las curvas cerradas con  $E < E_3$  deben cortar el eje  $x$  perpendicularmente en puntos de retorno diferentes de  $\frac{1}{r}$ . Esto puede verificarse derivando  $E$  con respecto a  $\dot{x}$  para  $x < \frac{1}{r}$  e igualando el resultado a cero en los puntos de retorno (con  $x \neq 0, \frac{1}{r}$ ). La ecuación resultante:

$$\dot{x} = \frac{kx}{m} (rx - 1) \frac{dx}{d\dot{x}}$$

implica que en los puntos de corte con el eje  $x$ , donde  $\dot{x} = 0$ , se debe cumplir  $\frac{dx}{d\dot{x}} = 0$ , o de manera equivalente,  $\frac{d\dot{x}}{dx} \rightarrow \infty$  para  $x \neq 0, \frac{1}{r}$ .

Si damos al cuerpo una energía  $E_3$  que coincida exactamente con el máximo valor de la energía potencial, la masa  $m$  puede recorrer parte de la curva 3, pero al llegar a  $\frac{1}{r}$  deberá permanecer allí de manera indefinida, puesto que en este punto tanto la velocidad como la fuerza son nulas. Sin embargo, por tratarse de un equilibrio inestable, una perturbación infinitesimal puede sacarla hacia uno de dos tipos de movimiento cualitativamente diferentes: o bien hacia un movimiento oscilatorio descrito por una curva cerrada, o bien hacia un movimiento no acotado que la lleva al infinito.

Para energías mayores que  $E_3$ , como  $E_4$ , el movimiento no es periódico ni acotado. Una partícula que viene desde la región positiva de  $x$  tiene un punto de retorno en el punto de corte  $E = E_{pot}$ , y luego avanza indefinidamente hacia valores cada vez mayores de  $x$ .

Como se ha ilustrado aquí, un “retrato” en el espacio de fase puede darnos información cualitativa sobre los tipos de movimiento de un sistema no lineal, aun fuera del rango de energías que permiten oscilaciones.

### B.5.2. El péndulo simple sin serie de Taylor

Con ayuda de la representación en el espacio de fase podemos obtener un “retrato” completo del movimiento del péndulo, sin necesidad de restringirnos a valores pequeños del ángulo  $\theta$ .

Al integrar la ecuación de movimiento con respecto al ángulo  $\theta$ , obtenemos:

$$\int_0^\theta ml\ddot{\theta} d\theta + \int_0^\theta mg \sin(\theta) d\theta = 0$$

esto es:

$$ml \frac{\dot{\theta}^2}{2} + mg[1 - \cos(\theta)] = ml \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2} = \text{cte}$$

Por razones dimensionales podemos identificar esta constante con  $\frac{E}{l}$ . Por tanto, podemos escribir:

$$E = E_{cin} + E_{pot} = ml^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2} + mgl[1 - \cos \theta] \quad (\text{B.25})$$

Observe que el cero de la energía potencial coincide con  $\theta = 0$  y su máximo valor es  $2mgl$  para  $\theta = \pm\pi$ , o más generalmente para  $\theta = (2n+1)\pi$ , con  $n$  entero.

De aquí podemos hallar una expresión para  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$ :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2} - \frac{2g}{l}[1 - \cos \theta]} \quad (\text{B.26})$$

Si definimos:

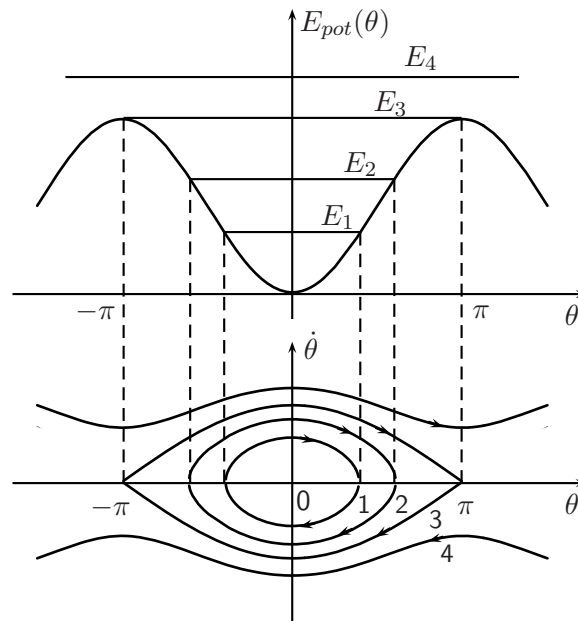
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad B = \frac{2E}{ml^2} - \frac{2g}{l} \quad (\text{B.27})$$

podemos escribir (B.29) de una manera más transparente:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2\omega_0^2 \cos \theta + B} \quad (\text{B.28})$$

Como puede verse, para todos los valores de  $E$  y, por tanto, de  $B$ ,  $\dot{\theta}$  es función periódica de  $\theta$  con período  $2\pi$ . Pero no todos los movimientos periódicos describen oscilaciones en sentido estricto, porque éstas implican la existencia de puntos de retorno, en que cambia el sentido de la velocidad, y están representadas por curvas cerradas en el espacio de fase, como se ilustra en la figura B.3.

El punto  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = 0$  representa un péndulo en reposo con  $E = 0$ . Como este punto coincide con un mínimo de la energía potencial, es un punto de equilibrio estable.



**Figura B.3** Espacio de fase del péndulo simple.

Para energías  $E_1$ ,  $E_2$ , menores que  $2mgl$ , todas las curvas son cerradas. Esto significa que el péndulo oscila periódicamente entre dos puntos de retorno, donde  $\dot{\theta} = 0$ , que están dados por los cortes de las curvas de energía total  $E$  y  $E_{pot}$ . Debido a la simetría de la energía potencial,  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ , las curvas son simétricas alrededor del origen  $\theta = 0$ .

Para una energía  $E_3 = 2mgl$ , que es el máximo de la energía potencial, la constante  $B$ , definida en (B.27), es igual a  $2\omega_0^2$ . En  $\theta = \pm\pi$  la fuerza se hace cero y la velocidad  $\dot{\theta}$  también. Si damos al péndulo suficiente energía para llegar a este punto con velocidad cero, en teoría debería permanecer indefinidamente allí. Pero como se trata de un punto de equilibrio inestable (correspondiente a un máximo de energía potencial), la más leve perturbación será suficiente para que la masa abandone esta posición vertical. Por ello es prácticamente imposible observar este punto de equilibrio inestable durante un tiempo finito.

Para condiciones iniciales tales que la energía es mayor que  $2mgl$ , como  $E_4$  en la figura, no existen puntos de retorno, esto es, la velocidad no se anula ni se invierte en ningún punto. La masa no oscila en sentido estricto, sino que posee suficiente energía para continuar rotando indefinidamente en la dirección inicial, ya que en el modelo estamos ignorando efectos disipativos. Esto se refleja en la figura en el incremento continuo del ángulo  $\theta$ .

Para un péndulo con  $E < 2mgl$ , la energía cinética en los dos puntos de

retorno ( $\pm\theta_0$ ) es nula y, por tanto, debe existir la relación siguiente entre la amplitud de oscilación  $\theta_0$  y la energía total:

$$E = mgl[1 - \cos \theta_0] \quad (\text{B.29})$$

Con esta sustitución podemos escribir:

$$\begin{aligned} B &= -2\omega_0^2 \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \pm \sqrt{2\omega_0^2 [\cos \theta - \cos \theta_0]} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Para obtener el período  $T$  de las oscilaciones basta calcular, de acuerdo con (B.22), el tiempo necesario para ir de  $\theta = 0$  a  $\theta = \theta_0$  y multiplicar por cuatro este valor.

$$T = \frac{4}{\sqrt{2\omega_0^2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (\text{B.31})$$

Mediante el cambio de variable:

$$\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) = k \sin \alpha \quad k = \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (\text{B.32})$$

la integral puede llevarse a una forma estándar de integral elíptica completa de primer género, cuyos valores están tabulados en función del parámetro  $k$ . En efecto, al usar la identidad  $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$ , obtenemos:

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left[ k^2 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = 2k^2 [1 - \sin^2 \alpha]$$

Además, al derivar la relación (B.32), resulta:

$$\cos \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2k} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

y por tanto:

$$d\theta = d\alpha \, 2k \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

Con estos resultados podemos escribir:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{4}{\omega_0} K(k) \quad (\text{B.33})$$

La solución de la integral elíptica completa de primer género  $K(k)$  puede consultarse directamente en tablas de funciones. Pero una expansión en serie de potencias de  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$  (válida para  $\theta_0 < \pi$ ) nos da información sobre los términos más relevantes:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^2 k^{2n} \right] \quad (\text{B.34})$$

De aquí se llega a la expansión siguiente para el período  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \cdots \right] = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{B.35})$$

Observe que el primer término de la expansión nos da el período calculado en la aproximación lineal,  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$ .

Al tomar los dos primeros términos de esta serie y hacer la aproximación  $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \approx \frac{\theta_0^2}{4}$ , obtenemos el siguiente valor para el período de las oscilaciones en función de la amplitud  $\theta_0$ :

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (\text{B.36})$$

de aquí podemos escribir para la frecuencia angular:

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)^{-1} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (\text{B.37})$$

Esta dependencia de la frecuencia con la amplitud concuerda con el resultado obtenido mediante serie de Taylor en la sección B.2 y es un efecto típico de la no linealidad del sistema, que debe ser tenido en cuenta en aplicaciones técnicas o experimentales.

El período de las oscilaciones crece lentamente con la amplitud para valores pequeños de  $\theta_0$ . Aun para amplitudes relativamente grandes, como  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ , la

corrección es pequeña:  $T \approx 1,039 T_0$ ,  $\omega \approx 0,961 \omega_0$ . Pero en el límite  $\theta_0 \rightarrow \pi$ , la expansión (B.35) diverge y  $T$  tiende a  $\infty$ , lo cual se explica por la aproximación a la curva con dos puntos simétricos de equilibrio inestable, donde la masa tiene aceleración y velocidad nulas.

## Apéndice C

# Ondas no dispersivas

En 1747, el físico francés D'Alembert escribió explícitamente la ecuación de onda clásica

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(z, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi(z, t) = 0 \quad (\text{C.1})$$

como ecuación de una cuerda vibrante. Mediante un ingenioso cambio de variables demostró que su solución general puede escribirse como superposición lineal de patrones arbitrarios que se propagan en una u otra dirección sin cambio de forma, por ello reciben el nombre de *ondas no dispersivas*. Esta peculiaridad hace de tales ondas vehículos especialmente aptos para transportar información sin distorsiones.

La solución completa de un problema específico requiere que la solución general se adecúe a las condiciones iniciales y a las condiciones de frontera. Sin embargo, si el sistema se comporta como si fuera infinito (lo cual puede ocurrir por una prolongación adecuada de sistemas finitos a todo el espacio sin alterar la región real) o si estamos interesados en intervalos de tiempo suficientemente pequeños para que aún no se hagan sentir efectos de frontera, podemos determinar la solución a partir de las condiciones iniciales. Tal es el llamado *problema de Cauchy*, que aplicaremos en este apéndice a ondas no dispersivas.

### C.1. Teorema de D'Alembert

El método de D'Alembert consiste esencialmente en expresar la ecuación (C.1) en función de nuevas variables que la hacen inmediatamente integrable.

El cambio de variables  $(z, t) \rightarrow (\xi, \eta)$ , con

$$\xi = z - vt \quad \eta = z + vt \quad (\text{C.2})$$

implica un cambio en la forma de la ecuación de onda. En efecto:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + v \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right]$$

Al sustituir (C.3) y (C.4) en la ecuación (C.1), resulta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Esta es la ecuación de onda clásica expresada en el lenguaje de las nuevas variables  $\xi$ ,  $\eta$ , y puede reescribirse así:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) = 0$$

con lo cual resulta evidente que  $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$  es independiente de  $\eta$ , y sólo puede ser función de  $\xi$ , esto es:

$$\frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} = h(\xi) \quad (\text{C.6})$$

Al integrar ambos lados de (C.6) entre los puntos  $(\xi_0, \eta)$  y  $(\xi, \eta)$ , resulta:

$$\int_{\xi_0, \eta}^{\xi, \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi, \eta) d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi} h(\xi) d\xi = f(\xi)$$

esto es:

$$\Phi(\xi, \eta) - \Phi(\xi_0, \eta) = f(\xi)$$



lo cual puede reescribirse así:

$$\Phi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (\text{C.7})$$

donde hemos definido  $\Phi(\xi_0, \eta) = g(\eta)$ .

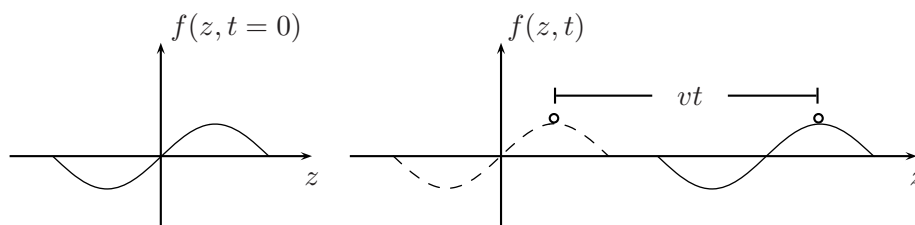
Se ha mostrado así que cualquier solución de la ecuación (C.1) debe ser de la forma  $\Phi(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt)$ . Recíprocamente, puede comprobarse que cualquier función  $\Phi(z, t)$  de esta forma, con los requerimientos obvios de diferenciabilidad, es solución de (C.1).

Podemos concluir entonces que la función arbitraria  $f(\xi) + g(\eta)$  es la integral general de la ecuación de onda unidimensional (C.1). Esta es la llamada *solución* de D'Alembert.

## C.2. Interpretación física de la solución general

### C.2.1. Enfoque espacial

La gráfica de  $f(z - vt)$  puede obtenerse a partir de la gráfica de  $f(z)$  trasladando ésta hacia la derecha la cantidad  $vt$ . Graficando  $f(z - vt)$  como función de  $z$  en diversos tiempos ( $t_0, t_1, \dots$ ) puede observarse cómo, a medida que avanza el tiempo, el patrón  $f(z) = f(z, 0)$  se desplaza hacia la *derecha* con velocidad  $v$  y sin cambio de forma, como se ilustra en la figura C.1.



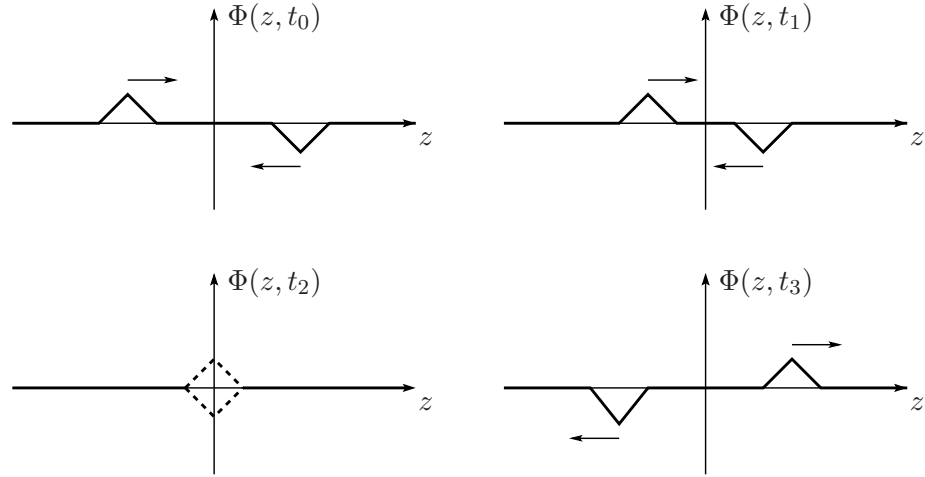
**Figura C.1** Propagación de una onda viajera no dispersiva.

De manera análoga, puede mostrarse que  $g(z + vt)$  describe un patrón  $g(z, 0)$  que viaja hacia la izquierda, sin deformación, con velocidad  $v$ .

A estos patrones que se propagan sin cambio de forma se les denomina *ondas viajeras no dispersivas*.

Pero tal como se ilustra en la figura C.2, una superposición de ondas viajeras que se propagan en direcciones opuestas *no* es una onda viajera: no tiene una dirección definida de propagación y el patrón resultante, o "perfil" de la onda, no conserva generalmente su forma en el transcurso del tiempo. Esto significa que

la ecuación de onda (C.1) admite soluciones que no representan ondas viajeras, aunque deben poder escribirse como superposición de éstas.



**Figura C.2** Superposición de ondas viajeras. Perfil de una cuerda en tiempos sucesivos.

### C.2.2. Enfoque temporal

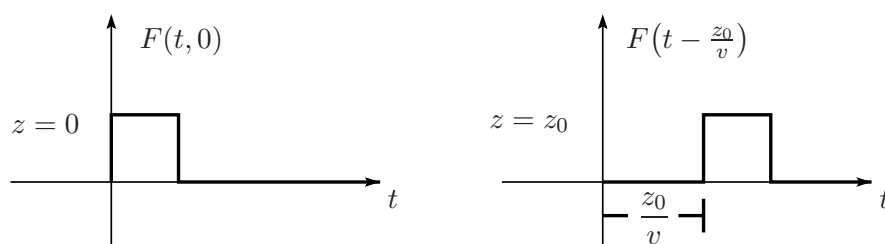
Al pasar del enfoque espacial representado en las figuras C.1 y C.2 a uno temporal, podemos examinar la perturbación en cualquier punto  $z$  como función del tiempo. Una onda viajera de la forma  $f(z - vt)$  puede reexpresarse así:

$$f(z - vt) = f\left[-v\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \equiv F\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

De nuevo la gráfica de  $F\left(t - \frac{z}{v}\right)$  puede obtenerse a partir de la gráfica de  $F(t, 0)$  trasladando ésta hacia el futuro en la cantidad  $\frac{z}{v}$ , como lo ilustra la figura C.3.

Esta es otra manera equivalente de expresar el fenómeno de propagación de ondas sin dispersión: cada punto  $z$  del espacio alcanzado por la onda experimenta una perturbación que reproduce la perturbación producida en cualquier otro punto  $z_0$  con un tiempo de retardo igual a  $\frac{z - z_0}{v}$ .

Así, las características de una onda viajera no dispersiva pueden determinarse observando el patrón espacial en un instante  $t$  o el patrón temporal en un punto  $z$ .



**Figura C.3** Descripción temporal de la propagación de una onda no dispersiva.

### C.3. Problema de Cauchy

El planteamiento completo de un problema ondulatorio exige la especificación de:

- La ecuación de onda.
- Las condiciones de frontera.
- Las condiciones iniciales.

Pero si el sistema no tiene fronteras o puede describirse como si fuera ilimitado<sup>1</sup>, basta especificar las condiciones iniciales para determinar completamente la solución de la ecuación de onda. Este es el denominado *problema de Cauchy*.

Soluciones de la ecuación de onda dependientes únicamente de las condiciones iniciales pueden ser también de interés para dar una descripción causal de lo que ocurre después de producida una perturbación, durante un lapso de tiempo limitado, mientras no se haya manifestado el efecto de las fronteras del sistema. Esta solución es en cierto sentido complementaria de la estacionaria, donde las condiciones de *frontera*, no las iniciales, juegan un papel determinante. Como se mostró en la sección C.1, la solución general de la ecuación de onda unidimensional no dispersiva tiene la forma:

$$\Phi(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt) \quad (\text{C.8})$$

<sup>1</sup> Por ejemplo, mediante continuación periódica de un sistema finito que incorpore las condiciones de frontera en todo tiempo, o gracias a una "terminación perfecta" que impida reflexión de ondas en los extremos.

A partir de las condiciones iniciales:

$$\Phi(z, 0) = \Psi(z) \quad -\infty < z < \infty \quad (\text{C.9})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) \right|_{t=0} = \chi(z) \quad -\infty < z < \infty \quad (\text{C.10})$$

donde  $\Psi$  y  $\chi$  son funciones dadas de  $z$  en todo el espacio que podrían representar el perfil de una cuerda y su perfil de velocidades en el instante  $t$  inicial, podemos determinar la solución única en el intervalo  $0 \leq t < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$ , de la manera siguiente:

$$\Phi(z, 0) = f(z) + g(z) = \Psi(z) \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) \right|_{t=0} &= \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{t=0} \frac{d\xi}{dt} + \left. \frac{dg}{d\eta} \right|_{t=0} \frac{d\eta}{dt} \\ &= -v \frac{df(z)}{dz} + v \frac{dg(z)}{dz} \equiv \chi(z) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Al integrar (C.12) a partir de un punto arbitrario  $z_0$ :

$$\int_{z_0}^z \chi(z') dz' = -v \int_{z_0}^z df + v \int_{z_0}^z dg = v [g(z) - f(z) - g(z_0) + f(z_0)]$$

resulta:

$$g(z) - f(z) = \frac{1}{v} \int_{z_0}^z \chi(z') dz' + \text{cte} \quad (\text{C.13})$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (C.11) y (C.13) para  $f$  y  $g$ , resulta:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \Psi(z) - \frac{1}{v} \int_{z_0}^z \chi(z') dz' - \text{cte} \right] \quad (\text{C.14})$$

$$g(z) = \frac{1}{2} \left[ \Psi(z) + \frac{1}{v} \int_{z_0}^z \chi(z') dz' + \text{cte} \right] \quad (\text{C.15})$$

Ahora que conocemos la forma funcional de  $f(z)$  y  $g(z)$  en función de las condiciones iniciales podemos regresar a (C.8) y hacer las sustituciones:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow (z - vt) && \text{en } f(z) \\ z &\rightarrow (z + vt) && \text{en } g(z) \end{aligned}$$

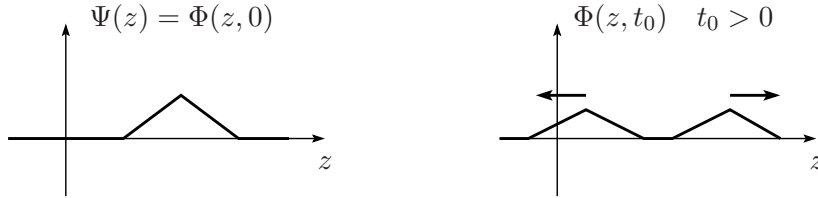
con lo cual la solución única del problema de Cauchy toma la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \frac{1}{2} \left[ \Psi(z - vt) + \Psi(z + vt) \right] + \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z+vt} \chi(z') dz' - \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z-vt} \chi(z') dz' \\ &= \frac{1}{2} \left[ \Psi(z - vt) + \Psi(z + vt) \right] + \frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z+vt} \chi(z') dz' \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

#### C.4. Interpretación causal de la solución al problema de Cauchy

Para simplificar analizamos casos especiales:

- $\Psi(z) \neq 0, \chi(z) = 0$
- $\Psi(z) = 0, \chi(z) \neq 0$



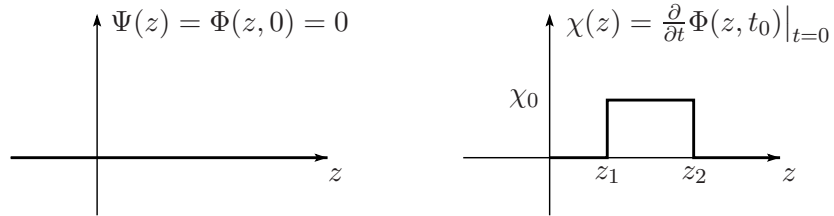
**Figura C.4** Desdoblamiento del perfil de una cuerda inicialmente en reposo.

En el caso *a* se produce un perfil de onda inicial  $\Psi(z)$ , que puede visualizarse como deformación transversal de una cuerda infinita, pero no se imprime velocidad inicial a ningún punto de la misma. De acuerdo con (C.16), en un tiempo posterior la cuerda tendrá un perfil descrito por la función:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \Psi(z - vt) + \Psi(z + vt) \right] = f(z - vt) + g(z + vt)$$

Esto significa que el patrón o perfil inicial se ha desdoblado en partes iguales que viajan en direcciones opuestas, tal como se ilustra en la figura C.4.

En el *caso b* se produce en el instante inicial un perfil de velocidades sin deformación visible de la cuerda, (figura C.5).



**Figura C.5** Cuerda sin deformación inicial. Perfil inicial de velocidades.

Según (C.16) el perfil de la cuerda en cualquier  $t \geq 0$  está dado por:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z+vt} \chi(z') dz'$$

Para hacer una representación causal, esto es, para examinar la evolución de la perturbación inicial representada en la figura C.5, es conveniente hallar explícitamente la forma de las ondas viajeras  $f$  y  $g$ . Al llevar a la ecuación (C.11) la condición inicial  $\Psi(z) = 0$ , resulta:

$$\Phi(z, 0) = f(z) + g(z) = 0$$

esto implica:

$$f(z) = -g(z)$$

y, como consecuencia de la ecuación (C.15),

$$g(z) = \frac{1}{2v} \int_{z_0}^z \chi(z') dz' + \text{cte}$$

Como  $z_0$  es arbitrario, podemos elegirlo de tal manera que se anule automáticamente la constante.

En el caso específico de la figura C.5, se tiene:

$$\chi(z') = \begin{cases} \chi_0 & \text{en el intervalo } [z_1, z_2] \\ 0 & \text{fuera de este intervalo} \end{cases}$$

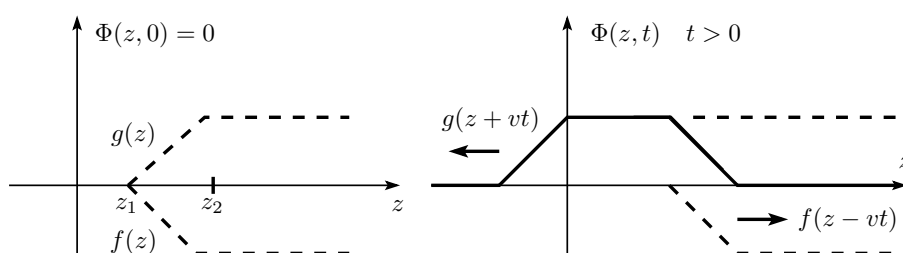
y resulta conveniente elegir  $z_0 < z_1$ .

Finalmente, se obtiene:

$$g(z) = \frac{1}{2v} \int_{z_0}^z \chi(z') dz' = \begin{cases} 0 & z < z_1 \\ \chi(z - z_1) & z_1 < z < z_2 \\ \chi(z_2 - z_1) & z > z_2 \end{cases}$$

A partir de los perfiles virtuales iniciales  $f(z)$  y  $g(z)$ , que se representan con trazos punteados en la figura C.6, puede hallarse el perfil real en cualquier  $t > 0$ :

$$\Phi(z, t) = f(z - vt) + g(z - vt)$$



**Figura C.6** Perfiles reales y virtuales de una cuerda inicialmente horizontal.





# Índice analítico

absorción resonante  
    aplicaciones, 74  
acelerómetro, 38  
acoplamiento  
    elástico, 58  
    inductivo, 58  
altura  
    de un sonido musical, 210  
amortiguamiento crítico, 13  
amortiguamiento débil, 13  
amplitud, 5  
amplitud absorbente, 24  
amplitud elástica, 24  
anaharmonicidad, 264  
antivibraciones  
    soporte, 75  
atenuación reactiva, 115  
  
bandas de resonancia, 97  
  
*c*, 224  
calidad  
    de un sonido musical, 210  
calidad de un oscilador, 15  
campo de polarización, 148  
campo longitudinal, 256  
campo transversal, 256  
cavidades resonantes, 242  
circuito LC, 8  
circuito RLC forzado, 20  
condiciones de frontera  
    extremos fijos, 104

    extremos libres, 105, 137  
    método de, 100  
constante de atenuación, 142  
constante de fase, 5  
coordenadas normales, 50  
cuarta, 212  
cuerda  
    ecuación de onda clásica, 193  
  
*D*, 225  
decibel, 247  
degeneración, 201  
diagonalización  
    de ecuaciones de movimiento,  
        55  
    de la energía, 61  
dieléctrico en campo externo  
    modelo no lineal, 267  
dispersión, 144  
    anómala, 175  
dispersión cromática, 175, 248  
  
ecuación de Klein–Gordon, 136  
ecuación de onda  
    bidimensional en membrana elástica, 197  
    clásica, 135  
        para el voltaje, 218  
        para la corriente, 218  
        para la cuerda, 193  
    de Klein–Gordon, 136  
    en medios conductores, 234

- para el campo  $B$ , 224
  - para el campo eléctrico, 224
- ecuación secular, 52
- ecuaciones de Maxwell, 224, 226, 255
  - en medios macroscópicos, 225
- ecuaciones de onda
  - para los campos  $E$  y  $B$ , 227
- efecto Casimir, 245
- eje del polarizador, 232
- electrones libres o de conducción, 151
- energía, 11
- envolvente, 175
- escala diatónica, 211
- espectro de frecuencias normales
  - análisis, 106
- espectro de la radiación electromagnética, 223
- estándar de tiempo, 223
- extremos fijos, 104
- extremos libres, 105
- factor de calidad
  - de oscilador forzado, 31
- fase
  - constante de, 5
- fase total, 5
- fibra óptica, 245
  - mono-modo, 249
  - sistema básico, 247
- filtro, 123
  - de frecuencias, 123
  - pasa-alto, 126, 147
  - pasa-bajo, 115, 127
  - pasa-banda, 115, 126
- frecuencia angular, 5
- frecuencia de corte, 123
- frecuencia de plasma, 148
- frecuencia fundamental, 193
- frecuencia natural
  - parámetros, 9
- frecuencia normal, 53
  - máxima, 107
  - mínima, 107
- frente de onda, 230
- fuerza de fricción, 12
- fuerza generalizada, 98
- función periódica, 162
- grado de libertad, 9
- guías de ondas, 235
- $H$ , 225
- hertz, 5
- Hooke
  - resorte de, 6
- incertidumbre
  - principio, 178
- índice de refracción, 37, 150, 220, 227
- infrasonido, 190
- interacción radiación-átomo, 35
- ionosfera, 147
  - ondas electromagnéticas, 149
- ley de Hooke, 203
- línea de transmisión, 216
- lineal
  - ecuación diferencial, 3
- linealidad, 4
- longitud de atenuación, 142
- longitud de onda, 143, 230
- lorentziana, 30
- metales
  - ondas electromagnéticas, 151
- método del determinante secular, 52
- modo normal, 137
- modo TE, 236
- modo TM, 236
- modo zig-zag, 110

- modos ficticios, 110
- modos normales, 51, 95
- modos TEM, 236
- modulación
  - de amplitud, 175, 177
  - de frecuencia, 176
- módulo de compresibilidad, 206
- módulo de Young, 203
- momento dipolar eléctrico, 36
- momento magnético, 226
- multiplexing, 249
- $N$  osciladores acoplados
  - respuesta estacionaria, 97
- número de onda, 108, 229
- octava, 212
- onda portadora, 175
- ondas amortiguadas, 153
- ondas armónicas viajeras, 143
- ondas dispersivas, 173
- ondas electromagnéticas en metales, 151
- ondas estacionarias, 146
- ondas evanescentes, 146
- ondas longitudinales, 202
- ondas monocromáticas, 229
- ondas no dispersivas, 173, 277
- ondas planas, 228, 229
- ondas sonoras, 190
- ondas viajeras no dispersivas, 279
- ortogonalidad
  - funciones armónicas, 164
- oscilación, 5
- oscilaciones amortiguadas, 14
- oscilaciones transversales, 261
- oscilador, 9
  - amortiguado y forzado, 19
    - absorción de potencia, 28
    - análisis físico, 24
  - resonancia, 28
    - solución general, 24
  - características generales, 9
  - factor de calidad, 15
  - libre amortiguado, 12
  - vida media, 15
- oscilador armónico
  - ecuación general, 9
- osciladores acoplados
  - amortiguados y forzados, 67
    - absorción de potencia, 72
    - amplitud de respuesta estacionaria, 71
  - ecuación general, 49
  - por inductancia mutua, 83
  - respuesta estacionaria
    - análisis físico, 71
  - sistema de  $N$ , 89
- osciladores no lineales, 261
- péndulo simple, 2
- péndulos acoplados, 45
- paquete cuasiarmónico, 182
  - desarrollo de Fourier, 183
- paquete de ondas, 171
- paquete gaussiano, 179, 181
- paquetes de ondas
  - propagación, 172
- pequeñas oscilaciones, 100
  - teorema, 98
- período, 5
- permeabilidad magnética, 226
- permitividad eléctrica, 36, 226
- polarización, 36, 148, 226, 231
  - plano de, 231
- potencia, 28
- primer sonido, 190
- primera zona de Brillouin, 139
- principio de superposición, 4
- problema de Cauchy, 277, 281

- solución, 283
- pulsaciones, 62
  - intercambio de energía, 64
- rango dispersivo, 115, 120, 140
  - respuesta elástica, 119
- rango reactivo, 123
- rango reactivo inferior, 126, 141
  - respuesta elástica, 121
- rango reactivo superior, 126
  - respuesta elástica, 124
- rangos de frecuencia
  - de la fuente externa, 119
- red de osciladores
  - longitud total, 108
- redes de osciladores, 90
- reflexión interna total, 246
- relación de dispersión
  - en rango dispersivo, 121
  - rango reactivo inferior, 123
  - rango reactivo superior, 125
- relación de incertidumbre
  - entre posición y número de onda, 179
  - entre tiempo y frecuencia, 185
- relaciones de dispersión, 108, 109
- relaciones de incertidumbre
  - de Heisenberg, 180
- resonancia
  - absorción de potencia, 28
  - bandas de, 97
  - curva experimental, 29
  - parámetros típicos, 30
  - rasgos característicos, 28
- respuesta elástica, 116
  - en rango dispersivo, 119
  - en rango reactivo inferior, 121
  - en rango reactivo superior, 124
- respuesta no resonante, 126
- respuesta resonante, 116
- ruido, 191
- ruido blanco, 191
- segunda, 212
- segundo sonido, 190
- sexta, 212
- sismógrafo, 39
- sistema masa–resorte
  - con soporte móvil, 38
- skin–depth, 156
  - en un conductor, 234
- sobreamortiguamiento, 13
- solución de D'Alembert, 279
- sonido, 190
  - velocidad en el aire, 190
- superposición
  - de fuentes, 33
- susceptibilidad eléctrica, 149
- teorema de Fourier, 162, 163
  - para funciones no periódicas, 168
- teorema de pequeñas oscilaciones, 98
- tercera, 212
- transformada de Fourier, 170
- ultrasonido, 190
- unísono, 212
- vector de onda, 228, 229
- velocidad de fase, 143, 172, 193, 196, 218, 220, 227, 229
  - promedio, 174
- velocidad de grupo, 174
- vida media, 15
- volumen
  - de un sonido musical, 210