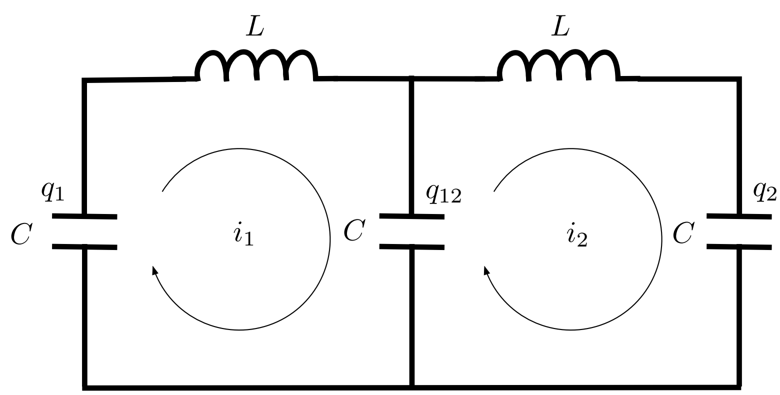
TALLER # 3 - ONDAS Y FLUIDOS

Oscilaciones Acopladas en un Circuito LC

El mostrado consta de dos inductores idénticos de inductancia L y tres capacitores de capacitancia C inicialmente cargados.



I. Aplique la regla de mallas de Kirchhoff para obtener las ecuaciones del circuito

II. Tenga en cuenta que de acuerdo al esquema mostrado, la corriente i_1 lleva a decrecer una carga q_1 y a incrementar la carga q_{12}. Simultáneamente una corriente i_2 llega a decrecer la carga q_{12} y aumentar la carga q_2. Derive las expresiones del ítem anterior y con base a esta información escriba las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden que rige el circuito.

III. Sabiendo que la frecuencia natural de un oscilador eléctrico LC es $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, reescriba las ecuaciones diferenciales en términos de ω_0 y obtenga los modos normales de oscilación para este sistema.

IV. Encuentre las razón de las amplitudes para los dos modos de oscilación calculados en el paso anterior.

Solución

Aplicando la ley de mallas.

$$\frac{q_1}{C} - L\frac{di_1}{dt} - \frac{q_{12}}{C} = 0 \quad ; \quad \frac{q_{12}}{C} - L\frac{di_2}{dt} - \frac{q_2}{C} = 0$$

$$\frac{1}{C}\frac{dq_1}{dt} - L\frac{d^2i_1}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dq_{12}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{C}\frac{dq_{12}}{dt} - L\frac{d^2i_2}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dq_2}{dt} = 0$$

De acuerdo al sistema mostrado, una corriente i_1 lleva a decrecer la carga q_1 y un incremento de la carga q_{12}. Simultáneamente una corriente i_2 disminuye la carga q_{12} y se le adiciona q_2. Luego:

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt} \quad \textbf{disminuye}$$

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt} \quad \rightarrow \quad i_1 - i_2 = \frac{dq_{12}}{dt}$$

Sustituyendo tenemos:

$$-\frac{i_1}{C} - L\frac{d^2 i_1}{dt^2} - \frac{i_1 - i_2}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{2}{LC} i_1 - \frac{1}{LC} i_2 = 0$$
$$\frac{i_1 - i_2}{C} - L\frac{d^2 i_2}{dt^2} - \frac{i_2}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i_2}{dt^2} - \frac{1}{LC} i_1 + 2\frac{1}{LC} i_2 = 0$$

La frecuencia natural de un oscilador LC es $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 i_1 - \omega_0^2 i_2 = 0$$
$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} - \omega_0^2 i_1 + 2\omega_0^2 i_2 = 0$$

Tomando la forma general de las funciones, tenemos:

$$i_1 = I_1 \cos \omega t \quad ; \quad i_2 = I_2 \cos \omega t$$
$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} = \ddot{i}_1 \quad \rightarrow \quad \ddot{i}_1 = -\omega^2 i_1$$
$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} = \ddot{i}_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{i}_2 = -\omega^2 i_2$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales, tenemos:

$$-\omega^2 i_1 + 2\omega_0^2 i_1 - \omega_0^2 i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-\omega^2 + 2\omega_0^2) i_1 - \omega_0^2 i_2 = 0$$
$$-\omega^2 i_2 - \omega_0^2 i_1 + 2\omega_0^2 i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -\omega_0^2 i_1 + (-\omega^2 + 2\omega_0^2) i_2 = 0$$

Al sustituír las soluciones generales de las corrientes, las ecuaciones homogéneas, quedan definidas como:

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2) I_1 - \omega_0^2 I_2 = 0$$
$$-\omega_0^2 I_1 + (-\omega^2 + 2\omega_0^2) I_2 = 0$$

Calculamos el determinante de los coeficientes:

$$: \quad \begin{vmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4 = 0$$
$$: \quad (2\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2)(2\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_0^2) = 0 \quad \rightarrow \quad (\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$
$$: \quad \omega^2 = \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$
$$: \quad \omega^2 = 3\omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{LC}}}$$

Calculamos la razón entre los coeficientes,

$$\omega = \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega_0^2} = 1 \quad \textbf{Modo simétrico (fase)}$$
$$\omega = \sqrt{3}\omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - 3\omega_0^2} = -1 \quad \textbf{Modo antisimétrico (antifase)}$$