

LABORATORIO DE ONDAS Y FLUIDOS 2016-20
ONDAS MECÁNICAS EN UNA CUERDA

José Restom y Paula Ordóñez
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
23 de septiembre de 2016

Resumen

Se realizó un experimento en el cual se ensayaron diversos métodos para generar antinodos en una cuerda con una tensión T , uno de ellos consistía en dejar una longitud fija y variar la tensión agregando agua a un recipiente, otro consistía en dejar una masa fija dentro del recipiente y ésta agregarle agua; por último, el otro método era dejar una tensión fija y variar la longitud. De acuerdo con los resultados obtenidos se puede concluir que el mejor método para generar ondas estacionarias mecánicas en una cuerda es el de agregar agua a un recipiente (el primero).

1. Objetivos

- Estudiar diferentes métodos de generación de ondas mecánicas
- Estudiar diferentes maneras de hallar nodos y antinodos en una cuerda
- Analizar cómo los cambios en la tensión afectan la oscilación de una cuerda con dos extremos fijos
- Analizar cómo la variación de longitud en una cuerda afecta la oscilación de esta.

2. Marco Teórico

Para poder hallar la ecuación de onda, en este caso se aplica la segunda ley de Newton a un trozo de cuerda y luego se deriva. Se debe tener en cuenta las siguientes notaciones:

- $y(x, t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda, respecto al eje x en una posición x y en un tiempo t .
- $\theta(x, t)$ es el ángulo entre la cuerda y una línea horizontal que se traza en una posición x y un tiempo t .
- $T(x, t)$ es la tensión de la cuerda en una posición x y un tiempo t .
- ρ es la densidad de la cuerda en x .

También se deben tener en cuenta las fuerzas que actúan sobre la cuerda, las cuales son:

- Una Tensión que empuja hacia x_+ , la cual tiene una magnitud $T(x + \Delta x, t)$ y actúa con un ángulo $\theta(x + \Delta x, t)$ sobre la horizontal.
- Tensión que empuja en x_- y cuya magnitud y ángulo son $T(x, t)$ y $\theta(x, t)$ respectivamente.

- Probablemente hayan más fuerzas externas que actúan sobre la cuerda; en este caso se asume que todas son verticales y se denotará como $F(x, t) \Delta x$, la cual es la totalidad de las fuerzas externas que actúan sobre la cuerda.

La masa del trozo de cuerda es $\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. A partir de esto se obtiene que el componente vertical de la segunda Ley de Newton es:

$$\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T(x + \Delta x, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t) + F(x, t) \Delta x$$

Lo anterior se divide en Δx y se toma $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ y se obtiene que:

$$\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] F(x, t)$$

$$\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \sin \theta(x, t) + T(x, t) \cos \theta(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) + F(x, t)$$

Se considera que se están tomando oscilaciones pequeñas y se tienen las siguientes aproximaciones:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1$$

$$\sin \theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Lo anterior se sustituye en la ecuación general y se obtiene:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x, t)$$

Se tiene en cuenta la segunda Ley de Newton para x , sin embargo esta es 0 porque en ese sentido no hay movimiento y se tiene que

$$T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \cos \theta = 0$$

Se divide en Δx y se toma $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \cos \theta] = 0$$

y con esto se llega a la ecuación

$$\rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x, t)$$

Se asume que la densidad es lineal, es decir, $\mu = \frac{M}{L}$, que a su vez es independiente de x y que la tensión depende de t , además que no existen fuerzas externas, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

y se sabe que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En este caso se tienen ondas estacionarias, se aplican las condiciones de frontera y se tiene que:

$$y_n(x, t) = \left(A_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) \right) \cos(\lambda_n t - a_n) \quad (1)$$

En este caso se identifican λ y v_n inmediatamente. La solución general de esta ecuación de obtiene por medio de $\sum y_n$.

Si se toman las ondas con número de onda $k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$ y una velocidad angular $\omega = 2\pi f$; con esto se puede encontrar:

$$y(x, t) = A(x) \cos \omega t$$

donde la amplitud está dada por:

$$A(x) = 2a_n \sin kx$$

Los nodos se localizan donde la amplitud es 0; estos puntos en x son:

$$kx_m = \frac{2\pi x_m}{\lambda} = m\pi \text{ donde } m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La posición del m -ésimo nodo en:

$$x_m = m \frac{\lambda}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Para una cuerda de longitud fija L sólo es válida para:

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{2L}{m} \\ \frac{\lambda_m}{2} &= \frac{L}{m} \end{aligned} \quad (2)$$

para todos los $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Anteriormente se sabía que $\omega = 2\pi f$, en este caso $f = v_m$ y se tiene que:

$$\omega = 2\pi v_m$$

También se sabe que $v_m = \frac{v}{\lambda_m}$ se reemplaza y se tiene que:

$$\omega = 2\pi v_m = \frac{2\pi v}{\lambda_m} \quad (3)$$

Anteriormente se conocía que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; para el caso en que depende de m se obtiene:

$$v_n = \frac{1}{\lambda_m} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Se sabe que $\lambda_m = \frac{m}{2L}$

$$v_n = \frac{2}{\lambda_m} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4)$$

para todos los $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

3. Análisis cualitativo

¿Qué sucede con el número de antinodos n si la longitud L aumenta o disminuye?

Cuando la longitud varía y hay una tensión constante, el número de antinodos cambia. Cuando la longitud aumenta, hay más antinodos; mientras que si la longitud disminuye el número de antinodos disminuye. En conclusión, en este caso el número de antinodos es proporcional a si la longitud aumenta o disminuye.

¿Cuál de los dos métodos para calcular v resulta tener menos discrepancia con respecto al valor nominal de 60Hz?

En este caso, al aplicar las ecuaciones el mejor método para calcular v es el primer método; como se observará en las tablas desarrolladas en el resto del informe, éstos valores son los que menos tienen discrepancia con a frecuencia nominal.

4. Análisis Cuantitativo

Para este análisis se debe tener en cuenta μ que es la densidad lineal de la cuerda. Esta se obtiene con datos como la masa, en este caso $M = 0,4gr$, y la longitud que en este caso es $L = 130cm$. Se transforman las medidas a sistema internacional y se obtiene que:

$$\mu = \frac{M}{L}$$

$$\mu = \frac{4 \times 10^{-4} Kg}{1,3m}$$

$$\mu = 3,08 \times 10^{-4} \frac{Kg}{m} \pm 1 \times 10^{-4}$$

donde $\pm 1 \times 10^{-4}$ es la incertidumbre de la medida.

4.1. Relación de λ_n en función de T

Para esta sección se necesitan los datos obtenidos en el procedimiento 3;

PRIMERA PARTE

En esta parte se tenía una longitud fija de $L = 128\text{cm}$ y se agregaba agua al recipiente para variar la tensión y así lograr el número de antinodos deseados.

Antinodos	Masa(kg)	$\frac{\lambda_n}{2}$ (m)	T(N)
6	$1,04 \times 10^{-2}$	0.21	0.10
5	$3,02 \times 10^{-2}$	0.28	0.3
4	$3,79 \times 10^{-2}$	0.31	0.37
3	$7,72 \times 10^{-2}$	0.42	0.75

Cuadro 1: Resultados del procedimiento 3.1

Acatando las recomendaciones dadas se tiene la siguiente gráfica:

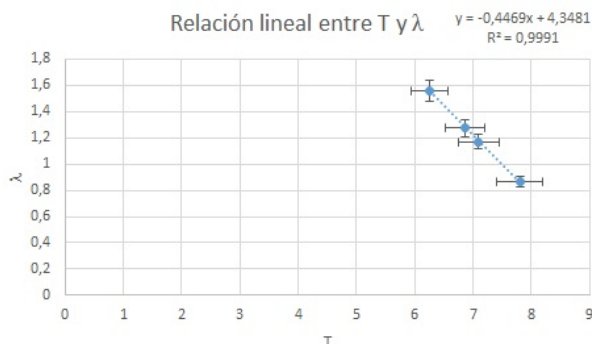


Figura 1: Relación lineal

ERROR

Error en la pendiente

En este caso se calcula el error porcentual de la pendiente y se tiene que:

$$e = \frac{\text{Experimental} - \text{Teorico}}{\text{Teorico}} * 100$$

Acá se reemplazan los datos y se tiene que

$$e = 10,62\%$$

En este caso el error se pudo dar porque al final de las medidas se observó que el frasco que contenía el agua estaba levemente apoyado en el soporte universal.

Error en el punto de corte

$$e = \frac{\text{Experimental} - \text{Teorico}}{\text{Teorico}} * 100$$

$$e = 92\%$$

En este caso el error pudo ser causado por la causa nombrada anteriormente y por rozamiento en el aire

que puede afectar. También se puede dar porque el aparato en realidad no producía 60 Hz de frecuencia. A pesar de estos resultados, el factor R^2 tiene un valor bastante cercano a 1, lo que significa que los datos están muy relacionados entre sí.

Usando la ecuación 6.5 de la guía:

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde n es el número de antinodos, T es la tensión y μ es la densidad lineal de la cuerda.

n	v_n
6	42.23
5	60.96
4	54.16
3	57.83

Cuadro 2: Resultados de v_n

SEGUNDA PARTE

En esta parte se tiene una longitud fija de $L = 118\text{cm}$ y al recipiente se le introduce una masa metálica de 10gr ; a esta luego se le agrega agua para lograr una tensión que de los antinodos necesarios.

Antinodos	Masa(kg)	$\frac{\lambda_n}{2}$ (m)	T(N)
6	$1,04 \times 10^{-2}$	0.21	0.10
5	$2,05 \times 10^{-2}$	0.26	0.20
4	$3,86 \times 10^{-2}$	0.30	0.38
3	$6,92 \times 10^{-2}$	0.38	0.68
2	0.2219	0.48	2.17

Cuadro 3: Datos procedimiento 3.2

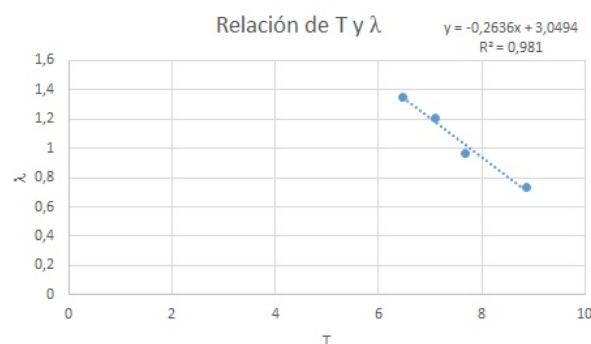


Figura 2: Relación lineal

ERROR

Error en la pendiente

Se usa la ecuación de error ya explicada anteriormente y se reemplazan los datos obtenidos; se tiene que:

$$e = 47,28\%$$

En este caso el error se pudo dar por error al medir las longitudes de onda; incertidumbre del metro usado y de la balanza usada para conocer la masa que generaba la tensión que permitía el n número de antinodos deseados.

Error en el punto de corte

$$e = 94,92\%$$

En este caso se pudo presentar el mismo error obtenido anteriormente. Además el valor obtenido de R^2 indica que los datos no están tan relacionados como se esperaba.

Acá se vuelve a utilizar la ecuación 6.5 y se obtiene:

n	v_n
6	45.81
5	53.99
4	59.53
3	59.73
2	71.13

Cuadro 4: Resultados de v_n

4.2. Relación entre antinodos y L

Para este caso se usan los datos del Procedimiento 4. En este procedimiento se tenía una tensión fija y se variaba la longitud de la cuerda para lograr el número de antinodos deseado. En este caso se tiene que $m = 177,9gr$

Antinodos	Longitud (m)	$\frac{\lambda_n}{2}$ cm	T
6	1.13	20	1.74
5	0.97	20	1.74
4	0.80	20	1.74
3	0.635	20	1.74
2	0.42	20	1.74
1	0.20	20	1.74

Cuadro 5: Datos procedimiento 4

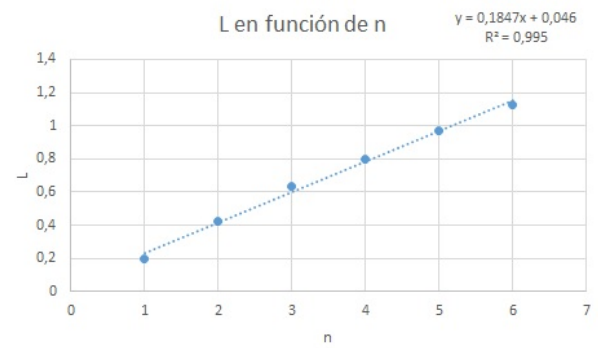


Figura 3: Longitud de la cuerda en función de los antinodos

ERROR

Error en la pendiente

Con la ecuación ya conocida y sabiendo que el valor de la pendiente debería ser $\frac{1}{2}$, se tiene que el error:

$$e = 63,06\%$$

Acá el error obtenido es bastante alto; más adelante se explicarán las posibles razones.

Error en el punto de corte

Con la ecuación anteriormente presentada se calcula el error del punto de corte obtenido. En este caso el valor teórico es 0. En este caso dividir por 0 es una indeterminación; por lo tanto se toma el valor obtenido y se multiplica por 100 porque esta es la diferencia que hay entre el punto de corte teórico y el obtenido. Se tiene que:

$$e = 4,6\%$$

Este error se pudo dar por la incertidumbre de metro al medir la longitud y por error humano al tomar dicha longitud. A pesar que los datos están correlacionados (se infiere a partir del valor de R^2 , el error de la pendiente es bastante alto, lo cual indica que la función no es totalmente lineal. En este caso también se usa la ecuación 6.5 de la guía y se obtiene que:

n	v_n
6	199.55
5	193.72
4	187.91
3	177.55
2	178.95
1	187.91

Cuadro 6: Datos de v_n

4.3. Comparación de λ_n

Para esta parte del análisis se usa la ecuación 6.3 de la guía:

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n}$$

PROCEDIMIENTO 3.1

n	$\frac{\lambda}{2}$ experimental (m)	$\frac{\lambda}{2}$ Teórico (m)	error %
6	0.21	0.213	1.41
5	0.28	0.256	9.38
4	0.31	0.32	3.13
3	0.42	0.426	1.41

Cuadro 7: Comparación procedimiento 3.1

En este caso los errores obtenidos relativamente bajos, por lo cual se puede inferir que las medidas fueron bien tomadas y que el error obtenido se puede dar por la incertidumbre del metro usado para tomar las medidas; este error también se puede dar por falla humana al no identificar bien los puntos para poder tomar una medida correcta.

PROCEDIMIENTO 3.2

n	$\frac{\lambda}{2}$ experimental(m)	$\frac{\lambda}{2}$ Teórico (m)	error %
5	0.26	0.236	10.17
4	0.30	0.265	13.21
3	0.38	0.393	3.31
2	0.48	0.59	18.64

Cuadro 8: Comparación procedimiento 3.2

En este caso se obtuvieron errores más altos que en el procedimiento anterior, lo cual puede significar

que es mejor el otro método para hallar las medidas correspondientes; ya que por su bajo error se puede inferir que se debe a error humano y de incertidumbre de los instrumentos.

PROCEDIMIENTO 4

n	$\frac{\lambda}{2}$ experimental(m)	$\frac{\lambda}{2}$ Teórico	error %
6	0.2	0.188	6.21
5	0.2	0.194	3.09
4	0.2	0.2	0
3	0.2	0.21	5.51
2	0.2	0.21	5.51
1	0.2	0.2	0

Cuadro 9: Comparación en el procedimiento 4

En este caso se observan errores muy bajos, lo cual significa que este método es bastante acertado para los objetivos que se plantearon.

5. Conclusiones

- El mejor método para hallar v es el primer método, en especial el que se maneja con sólo agua.
- El número de antinodos es inversamente proporcional a la tensión cuando la longitud es fija.
- El número de antinodos es directamente proporcional a la longitud cuando la tensión es fija.