TALLER # 1 - ONDAS Y FLUIDOS

1. Usando la notación exponencial para:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Verifique las siguientes identidades trigonométricas:

I. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

II. $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B)$

Solución

Demostramos $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta+\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
\triangle &= -\frac{e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}}{4} + \frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4} \\
\triangle &= \frac{\cancel{-e^{2i\theta}}+2-\cancel{e^{-2i\theta}}+\cancel{e^{2i\theta}}+2+\cancel{e^{-2i\theta}}}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Demostramos ahora $\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B)$

$$: \quad \cos A\cos B - \sin A\sin B = \left(\frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}\right)\left(\frac{e^{iB}+e^{-iB}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i}\right)$$

$$\begin{aligned}
\triangle &= \left(\frac{e^{i(A+B)}+e^{i(A-B)}+e^{i(B-A)}+e^{-i(A+B)}}{4}\right) + \left(\frac{e^{i(A+B)}-e^{i(A-B)}-e^{i(B-A)}+e^{-i(A+B)}}{4}\right) \\
\triangle &= \frac{e^{i(A+B)}+\cancel{e^{i(A-B)}}+\cancel{e^{i(B-A)}}+e^{-i(A+B)}+e^{i(A+B)}-\cancel{e^{i(A-B)}}-\cancel{e^{i(B-A)}}+e^{-i(A+B)}}{4} \\
\triangle &= \frac{2e^{i(A+B)}+2e^{-i(A+B)}}{4} = \frac{e^{i(A+B)}+e^{-i(A+B)}}{2} = \cos(A+B)
\end{aligned}$$

2. Una masa en el extremo de un resorte oscila con una amplitud de 5 cm a una frecuencia de 1 Hz. En $t=0$ la masa está en su posición de equilibrio ($x=0$).

I. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa en función del tiempo, en la forma $A\cos(\omega_0 t+\phi_0)$, dando valores numéricos de A, ω_0, ϕ_0.

II. Encuentre el valor de x,v y a en $t=\frac{1}{8}$ s.

Solución

Calculamos la frecuencia angular, mediante:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = 2\pi f \quad \omega_0 = 2\pi\ \frac{rad}{s}$$

Usando las condiciones iniciales calulamos la fase inicial ϕ_0 ($x=0$ en $t=0$)

$$0 = A\cos(\omega_0(0)+\phi_0) \quad \rightarrow \quad 0=\cos\phi_0 \quad \rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Luego la función que describe el movimiento es:

$$x = 5\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ cm$$

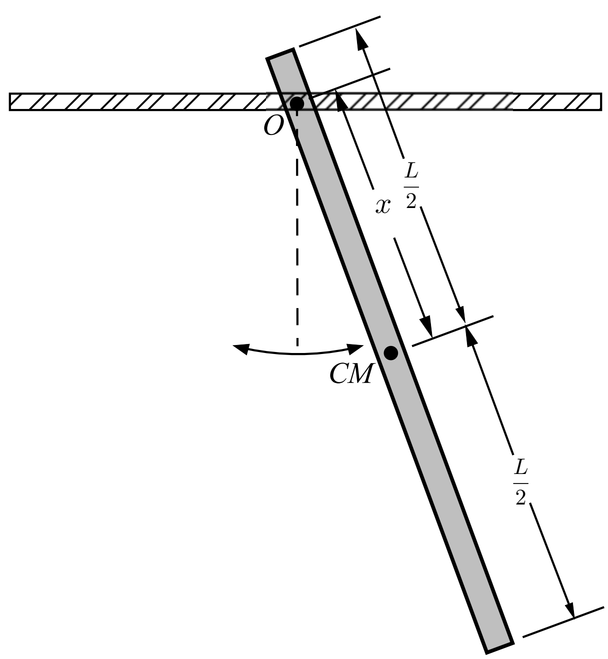
Usando las definiciones cinemáticas $v = \frac{dx}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$ calculamos las funciones de velocidad y aceleración.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -10\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ \frac{cm}{s} \\ a &= \frac{dv}{dt} = -20\pi^2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ \frac{cm}{s^2} \end{aligned}$$

para $t = \frac{1}{8}\ s$ tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 5\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -5\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -3.54\ cm \\ v &= -10\pi\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -10\pi\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -10\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\pi\sqrt{2} \approx -22.21\ \frac{cm}{s} \\ a &= -20\pi^2\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = -20\pi^2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 20\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\pi^2\sqrt{2} \approx 139.58\ \frac{cm}{s^2} \end{aligned}$$

3. Una barra de longitud $L = 1.85\ m$ oscila como un péndulo físico. Qué valor de distancia x entre el centro de masa de la barra y el pivote O da el **mínimo** periodo. Cuál es el valor del mínimo periodo?.



Solución

Para calcular el mínimo periodo de oscilación debemos calcular el valor de x para que $\frac{dT}{dx} = 0$. Veamos:

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgd}} \quad \rightarrow \quad I_0 = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2 \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\cancel{M}L^2 + \cancel{M}x^2}{\cancel{M}gx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{gx}} = \frac{2\pi}{\sqrt{12g}}\sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{x}} \\
T &= \frac{\pi}{\sqrt{3g}}\sqrt{\frac{L^2 + 12x^2}{x}} \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \frac{\pi}{2\sqrt{3g}}\left(\frac{L^2 + 12x^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{24x^2 - (L^2 + 12x^2)}{x^2}\right) \\
\frac{dT}{dx} &= \frac{\pi}{2\sqrt{3g}}\left(\frac{L^2 + 12x^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{12x^2 - L^2}{x^2}\right) = 0 \\
0 &= 12x^2 - L^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{L^2}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{L}{\sqrt{12}} = \frac{1.85\ m}{\sqrt{12}} \approx 0.53\ m.
\end{aligned}
$$

Con el valor de $x = \frac{L}{\sqrt{12}}$ calculamos el periodo mínimo.

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + x^2}{gx}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{12}L^2}{g\frac{L}{\sqrt{12}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}L^2}{g\frac{L}{\sqrt{12}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{12}L}{6g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}L}{3g}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}(1.85\ m)}{3(9.8\frac{m}{s^2})}} \approx 2.1\ s
\end{aligned}
$$