

Fórmulas Matemáticas para Programação Competitiva

1. Aritmetica e Teoria dos Numeros

- Maximo Divisor Comum (MDC): $\gcd(a, b)$
- Minimo Multiplo Comum (MMC): $\text{lcm}(a, b) = |a * b| / \gcd(a, b)$
- Algoritmo de Euclides: $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \% b)$
- Exponenciacao Modular: $(a^b) \% m$ com Binary Exponentiation
- Inverso Modular (m primo): $a^{(-1)} = a^{(m-2)} \bmod m$
- Crivo de Eratostenes: marcar todos os primos ate N em $O(N \log \log N)$

1. Aritmetica e Teoria dos Numeros - Exemplos e Exercicios Resolvidos

Exemplo 1 - MDC com Euclides:

$$\gcd(48, 18) = \gcd(18, 48 \% 18) = \gcd(18, 12) = \gcd(12, 6) = \gcd(6, 0) = 6$$

Exemplo 2 - Exponenciacao Modular:

Calcule $(3^{13}) \% 7$

$$3^{13} = 1594323 \quad (3^{13}) \% 7 = 1594323 \% 7 = 3 \text{ (usando exponenciacao binaria)}$$

Exemplo 3 - Inverso Modular:

$$a = 3, m = 11. \text{ Inverso modular} = 3^{(11-2)} \bmod 11 = 3^9 \bmod 11 = 4$$

2. Combinatoria

- Fatorial: $n! = n * (n-1) * \dots * 1$
- Permutacao: $P(n, k) = n! / (n-k)!$
- Combinacao: $C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!)$
- Combinacao com Repeticao: $C(n + k - 1, k)$
- Binomio de Newton: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) * a^{(n-k)} * b^k$

Fórmulas Matemáticas para Programação Competitiva

2. Combinatoria - Exemplos e Exercícios Resolvidos

Exemplo 1 - Combinação Simples:

Quantas formas de escolher 2 pessoas entre 5?

$$C(5, 2) = 5! / (2! \cdot 3!) = 10$$

Exemplo 2 - Combinação com Repetição:

Quantas maneiras de escolher 3 doces entre 5 tipos?

$$C(5 + 3 - 1, 3) = C(7, 3) = 35$$

3. Aritmética Modular

- $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
- $(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m) + m) \bmod m$
- $(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$
- Inverso Modular (m primo): $a^{-1} = a^{(m-2)} \bmod m$
- Teorema de Fermat Pequeno: $a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ se p é primo
- Função Totiente de Euler: $\phi(n)$ = quantidade de inteiros $\leq n$ que são coprimos com n

3. Aritmética Modular - Exemplos e Exercícios Resolvidos

Exemplo 1 - Soma Modular:

$$(17 + 23) \% 5 = 40 \% 5 = 0$$

Exemplo 2 - Inverso Modular com Fermat:

$$a = 7, p = 13 \text{ (primo)} \quad \text{inverso} = 7^{(13-2)} \bmod 13 = 7^{11} \bmod 13 = 2$$

Exemplo 3 - Congruência Linear:

$$\text{Resolver } 3x \equiv 1 \pmod{7}$$

Fórmulas Matemáticas para Programação Competitiva

Inverso de $3 \bmod 7 = 5$ x $5 \bmod 7$

4. Series e Recorrencias

- Soma PA: $S = n(a_1 + a_n) / 2$
- Soma PG: $S = a_1(1 - r^n)/(1 - r)$, $r \neq 1$
- Fibonacci: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, $F(0)=0$, $F(1)=1$
- Fechamento Fibonacci (aproximacao): $F(n) \approx n / \sqrt{5}$, onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$

4. Series e Recorrencias - Exemplos e Exercicios Resolvidos

Exemplo 1 - Soma PA:

$$a_1 = 2, a_n = 10, n = 5 \quad S = 5(2+10)/2 = 30$$

Exemplo 2 - Fibonacci (recursao):

$$F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$

Exemplo 3 - Fechamento Fibonacci:

$$F(10) \approx (1.618^{10}) / \sqrt{5} \approx 55$$

5. Bitwise e Conjuntos

- Verificar bit i: $(x \gg i) \& 1$
- Ligar bit i: $x \mid (1 \ll i)$
- Desligar bit i: $x \& \sim(1 \ll i)$
- Trocar bit i: $x \oplus (1 \ll i)$
- Mascara de subconjuntos: 0 a $(1 \ll n) - 1$ para gerar todos subconjuntos de n elementos

5. Bitwise e Conjuntos - Exemplos e Exercicios Resolvidos

Fórmulas Matemáticas para Programação Competitiva

Exemplo 1 - Verifica bit:

$x = 42$ (101010), bit 1 $(x \gg 1) \& 1 = 1$

Exemplo 2 - Subconjuntos com mascara:

Para $n = 3$ elementos: 0 a 7 (000 a 111) 8 subconjuntos

Exemplo 3 - Ligar bit:

$x = 5$ (0101), ligar bit 1: $x \mid (1 \ll 1) = 0101 \mid 0010 = 0111 = 7$

6. Geometria Computacional (Basica)

- Distancia Euclidiana: $d = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{0.5}$
- Distancia de Manhattan: $d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
- Produto Vetorial: $(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$ serve para orientacao e area
- Area do Poligono (Shoelace Formula): $A = 1/2 \cdot |(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)|$

6. Geometria Computacional (Basica) - Exemplos e Exercicios Resolvidos

Exemplo 1 - Distancia Euclidiana:

Entre (1,2) e (4,6): $d = \sqrt{((4-1)^2 + (6-2)^2)} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Exemplo 2 - Produto Vetorial:

A(1,2), B(3,4) $A \cdot B = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$ sentido horario

Exemplo 3 - Area de Poligono (Shoelace):

(0,0), (4,0), (4,3) $A = 1/2 \cdot |0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - (0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0)| = 6$