Combinatória

André Gustavo dos Santos

Departamento de Informática
Universidade Federal de Viçosa

INF 333 - 2024/1

Introdução

Combinatória

É a arte de contar *sem contar* !

Regras básicas

Regra da soma

Se A tem $|A|$ elementos e B tem $|B|$ elementos então existem $|A| + |B|$ maneiras de escolher um elemento de A **ou** de B

assumindo que os elementos são distintos: não há elementos repetidos

Regra do produto

Se A tem $|A|$ elementos e B tem $|B|$ elementos então existem $|A| \times |B|$ maneiras de escolher um elemento de A **e** um de B

assumindo que os elementos são independentes: um não influencia a escolha do outro

Regras básicas

Exemplo: regra do produto

Certa moça tem 5 saias e 8 blusas diferentes. Ela pode combinar essas roupas de 5×8 maneiras diferentes, usando uma saia **e** uma blusa.

assumindo que os elementos são independentes: um não influencia a escolha do outro, ou seja, qualquer saia combina com qualquer blusa

Exemplo: regra da soma

Certa moça tem 5 saias, 8 blusas, e 7 vestidos diferentes. Então ela tem $(5 \times 8) + 7$ opções diferentes, usando uma saia **e** uma blusa, **ou** um vestido.

os elementos são disjuntos, se ela usar vestido, não vai usar saia e blusa, e vice-versa

Regras básicas

Inclusão-Exclusão

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

a regra da soma é um caso especial, quando os conjuntos não tem interseção

Inclusão-Exclusão: para 3

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

pode ser estendida para 4, 5, ... n conjuntos

Regras básicas

Exemplo: inclusão-exclusão

Uma pessoa vence certa aposta se tirar de um baralho uma carta que seja Dama ou de Paus. Quantas chances ela tem?

Considerando um baralho de 52 cartas, existem 4 damas e 13 de paus. Porém uma das damas é de paus. Sua chance é $4 + 13 - 1 = 16$ em 52.

Exemplo: inclusão-exclusão

Quantos números de 1 a 1000 são divisíveis por 2 ou 5?

Existem 1000/2 = 500 números divisíveis por 2.
Existem 1000/5 = 200 números divisíveis por 5.
Existem 1000/10 = 100 números divisíveis por 2 e 5 (logo, por 10).
Então o total é $500 + 200 - 100 = 600$.

Bijeção

Bijeção

É uma mapeamento um-pra-um entre os elementos de um conjunto e os elementos de outro

- Desta forma, contando um, saberá o tamanho do outro

Exemplo

Quantas respostas possíveis para um questionário de 8 perguntas V ou F?

As respostas podem ser armazenadas como 8 bits, $V \rightarrow 1$ e $F \rightarrow 0$. É uma bijeção, cada resposta é um valor binário, e vice-versa. Como há 256 valores de 8 bits, então há 256 respostas diferentes.

- Um repertório de alguns conjuntos clássicos ajuda a contar vários outros, por bijeção

Contagem

Permutações

sequências de n itens, com cada um aparecendo exatamente uma vez

Existem $n!$ diferentes permutações. As $3! = 6$ permutações de $\{1, 2, 3\}$ são:
`123, 132, 213, 231, 312, 321`

para n=10 temos 3.638.800 permutações e já nos aproximamos do limite da busca exaustiva

Subconjuntos

seleções de elementos entre n possíveis

Existem 2^n diferentes subconjuntos. Os $2^3 = 8$ subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ são:
$\emptyset$, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123

para n=20 temos 1.048.576 subconjuntos e já nos aproximamos do limite da busca exaustiva

Strings

sequências de m itens escolhidos de um conjunto de n, permitindo repetição

Existem n^m diferentes strings. Os $3^3 = 27$ strings de tamanho 3 de $\{1, 2, 3\}$:

```
111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233,
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333
```

o número de strings binários de tamanho n é igual ao de subconjuntos de n itens. Por que?

Contagem

Combinação

Existem $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ maneiras de escolher k pessoas de um grupo de n

Representado por $\binom{n}{k}$

Arranjo

Existem $\frac{n!}{(n-k)!}$ maneiras de escolher k pessoas de um grupo de n, se importa a ordem de escolha

Multiset

Existem $\binom{n+k-1}{k}$ maneiras de escolher k de um grupo de n, se não importa a ordem e pode repetir

Exemplo: cada peça de dominó tem 2 números, escolhidos entre 7 valores (0 a 6); não importa a ordem dos valores e pode repetir na mesma peça; existem então $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ *dominós*

Relações de recorrência

Relação de recorrência

Uma equação definida em termos de si mesma

- Facilitam contar numa variedade de estruturas recursivas
- Por exemplo, listas e árvore, algoritmos dividir-para-conquistar, ...
- Muitas funções são facilmente expressas por relações de recorrências
  - $a_n = a_{n-1} + 1, a_0 = 0 \ \rightarrow a_n = n$
  - $a_n = 2a_{n-1}, a_0 = 1 \ \rightarrow a_n = 2^n$
  - $a_n = na_{n-1}, a_0 = 1 \ \rightarrow a_n = n!$
- Geralmente é fácil achar uma recorrência para calcular a resposta de um problema de contagem
- *Resolver* a recorrência, ou seja, encontrar uma fórmula fechada, pode não ser simples, mas um programa pode calcular o valor mesmo sem a fórmula fechada

Recursão e Indução

Prova por indução

Parece mágica: prove a fórmula para uns casos bases, tipo 1 ou 2, *assuma* que vale até k e daí prove que vale para $k + 1$; pronto, está provado para todo n...

Recursividade

Parece mágica: teste se o argumento é algum valor base, tipo 1 ou 2, e se for retorne a solução; para outros valores k chame a mesma função para $k - 1$, *assumindo* que funciona até $k - 1$; pronto, funciona para todo n...

Solução de relações de recorrência

"Adivinhar" uma solução e prová-la por indução

- Faça uma tabela para valores pequenos da função
- Fique olhando pra ela até enxergar um padrão
- Se estiver correto, poderá prová-lo por indução

Exemplo: $T_n = 2T_{n-1} + 1$, com $T_0 = 0$

- Faça uma tabela para valores pequenos da função

n	0	1	2	3	4	5	6	7
T_n	0	1	3	7	15	31	63	127

- Fique olhando pra ela até enxergar um padrão

  Bom, parece que $T_n = 2^n - 1$

- Se estiver correto, poderá prová-lo por indução
  - Base: $T_0 = 2^0 - 1 = 0$. OK!
  - Assumindo que vale até $n = k$
  - $T_{k+1} = 2T_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 1$. OK!!!

Coeficientes binomiais

Coeficiente binomial

Número de combinações de k elementos de um conjunto de n

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- comitês: quantas maneiras de formar um comitê de k pessoas de um conjunto de n? $\binom{n}{k}$
- coeficientes de $(a+b)^n$: qual o coeificiente de $a^k b^{n-k}$? $\binom{n}{k}$
- triângulo de Pascal: os valores são os coeficientes binomiais
- caminhos numa grade: quantas maneiras de ir do canto inferior esquerdo para o superior direito numa grade $n \times m$, caminhando somente para cima ou para a direita? $\binom{n+m}{n}$: são $n+m$ passos, dos quais n são para cima

Coeficientes binomiais

Como calcular?

- em princípio bastaria calcular fatoriais, e avaliar $n!/(k!(n-k)!)$, mas os cálculos intermediários facilmente dão overflow, mesmo que o resultado final caiba numa variável inteira.

Como calcular sem perigo de overflow intermediário?

- uma forma é usar a relação de recorrência $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- isso está implícito na construção do triângulo de Pascal
- casos bases: $\binom{n-k}{0} = 1$ e $\binom{k}{k} = 1$

Note que uma função recursiva ficaria lenta pois calcularia mais de uma vez um mesmo coeficiente binomial; em vez disso, usaremos uma matriz para guardar os valores já calculados. Isso é a base da programação dinâmica, poderosa técnica que será vista futuramente

Coeficientes binomiais

```
/* calcula combinacao (n m) */
long binomial_coefficient(int n, int m)
{
  int i,j;                  /* contadores */
  long bc[MAXN][MAXN];  /* tabela com os coeficientes */

  for (i=0; i<=n; i++) bc[i][0] = 1;

  for (j=0; j<=n; j++) bc[j][j] = 1;

  for (i=1; i<=n; i++)
    for (j=1; j<i; j++)
      bc[i][j] = bc[i-1][j-1] + bc[i-1][j];

  return( bc[n][m] );
}
```

Outras sequências de contagem - Fibonacci

Fibonacci

Definida pela recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

- Primeiros termos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
- Fórmula fechada: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Sugerstão: implemente o código e veja até que valor de n não dá problema de precisão

Outras sequências de contagem - Catalan

Catalan

Definida pela recorrência $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$

- Primeiros termos: 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...
- Fórmula fechada: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

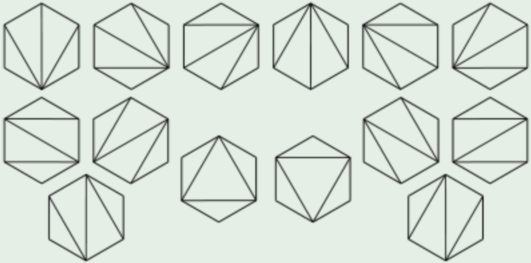
- Quantas maneiras de fazer uma fórmula com n parênteses balanceados?
- Por exemplo, com $n = 3$ temos 5 formas: ((())), ()(()), (())(), (()()), e ()()()

- Quantas triangulações de um polígono convexo de $n + 2$ lados?
- Quantas árvores binárias com raiz de $n + 1$ folhas?
- Quantos caminhos numa grade não passam acima da diagonal principal?
- Resposta para todas as perguntas: C_n

Outras sequências de contagem - Catalan

Existem C_n maneiras de triangular um polígono convexo de $n + 2$ lados

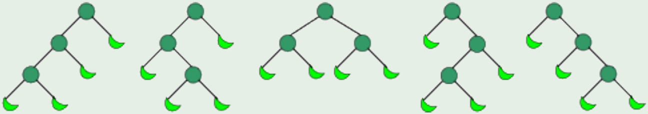
Exemplo: um hexágono (4+2 lados) tem $C_4 = 14$ triangulações



Outras sequências de contagem - Catalan

Existem C_n árvores binárias com raiz de $n + 1$ folhas

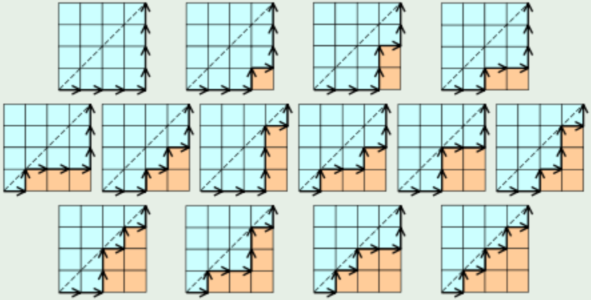
Exemplo: há $C_3 = 5$ árvores binárias de 4 folhas



Outras sequências de contagem - Catalan

Existem C_n caminhos sem passar acima da diagonal em uma grade $n \times n$

Exemplo: há $C_4 = 14$ caminhos numa grade 4×4



mais exemplos na Wikipedia, de onde foram tiradas as figuras