INF333 - Programacao Competitiva
Geometria: predicados de orientação

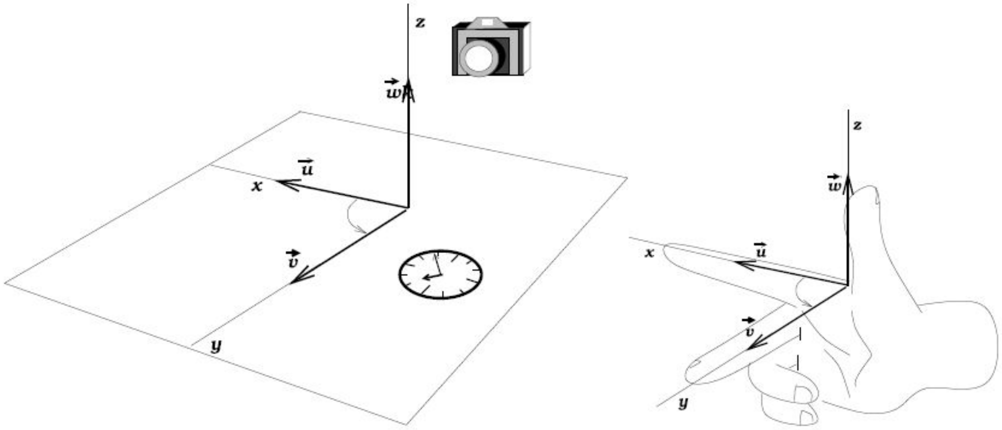
Profs. Andre Gustavo, Salles Magalhaes

Operações com Pontos e Vetores (3D)

- **Produto vetorial**
  - O produto vetorial entre dois vetores envolve o conceito de *orientação do espaço*
  - Informalmente, a orientação de uma base pode ser determinada pela *regra da mão direita*
  - Dizemos que uma base está *positivamente orientada* se os vetores que a definem satisfazem a regra da mão direita

Operações com Pontos e Vetores (3D)

- **Produto vetorial**
  - Isto é, a base formada pelos vetores *u, v* e *w* está positivamente orientada



Operações com Pontos e Vetores (3D)

- **Produto vetorial**
  - Dados dois vetores u e v linearmente independentes, o produto vetorial $u \times v$, é um vetor tal que
    - seu módulo é $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen} \measuredangle(u, v)$
    - sua direção é ortogonal a u e a v (simultaneamente)
    - seu sentido é tal que $\{u, v, u \times v\}$ é uma base positivamente orientada do espaço.

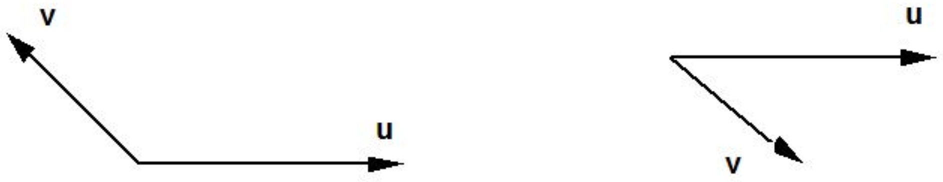
- **Cálculo do produto vetorial**
  - Dados os vetores $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ então

$$u_1 \times u_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1,\ x_2 z_1 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

  - Supondo a base canônica de R^3, C = {i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)}, podemos escrever

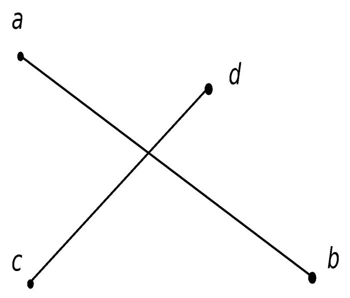
$$u \times v = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{Vmatrix} i - \begin{Vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{Vmatrix} j + \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Vmatrix} k$$

- O sinal positivo ou negativo do produto vetorial *u x v* denota se o ângulo orientado de *u* para *v* é positivo ou negativo, ou equivalentemente se *v* está à esquerda ou à direita de *u* .
- Isso é conhecido como predicado de orientação.



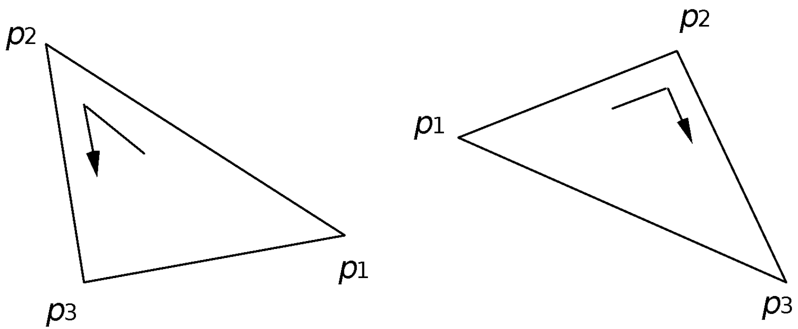
(a) *u x v* > 0: *v* à esquerda de *u* (b) *u x v* < 0: *v* à direita de *u*

- **Exemplo:** Dados dois segmentos (abertos) *ab* e *cd* do plano, determinar se eles se interceptam.
- **Solução:**
  - Os segmentos se interceptam se *c* e *d* estão em lados opostos em relação a *ab* e, ao mesmo tempo, *a* e *b* estão de lados opostos em relação a *cd*.
  - A primeira condição ocorre se os vetores *ac* e *ad* têm orientação oposta com relação ao vetor *ab*. Isto é, se os produtos vetoriais (*ab* x *ac*) e (*ab* x *ad*) tem sinais opostos.
  - Analogamente, os produtos vetoriais (*cd* x *ca*) e (*cd* x *cb*) devem ter sinais opostos.
  - Isto é, os segmentos se interceptam se e somente se (*ab* x *ac*) (*ab* x *ad*) < 0 e (*cd* x *ca*) (*cd* x *cb*) < 0.



Operações com Pontos e Vetores (3D)

- Frequentemente, empregamos isso com o único intuito de obter a orientação do triângulo $p_1p_2p_3$.
- Em muitas aplicações é conveniente definir uma primitiva anti-horário (p_1, p_2, p_3), que indica se o triângulo $p_1p_2p_3$ é orientado positivamente.



Operações com Pontos e Vetores (3D)

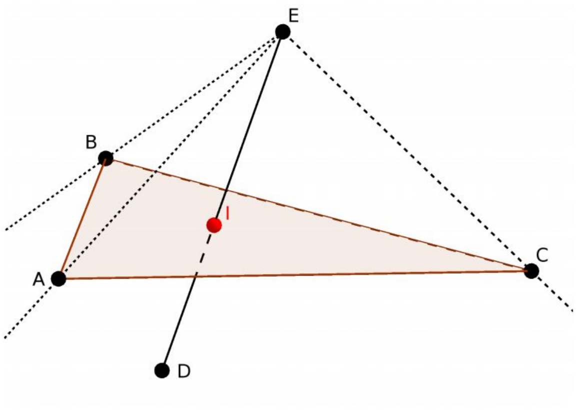
- A orientação de 3 pontos no plano é dado pelo sinal do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos pontos e 1 na última coluna

$$P_1 = (x_1, y_1) \quad P_2 = (x_2, y_2) \quad P_3 = (x_3, y_3)$$

$$\mathrm{Or}_2(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

Operações com Pontos e Vetores (3D)

- Orientação de 4 pontos em 3D



- *O conceito pode ser estendido a qualquer número de dimensões ...*

Exemplo: E possui orientação positiva em relação ao triângulo CBA, D possui orientação negativa

Operações com Pontos e Vetores (3D)

- A orientação de n+1 pontos em um espaço n-dimensional é dado pelo sinal do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos pontos com o 1 na última coluna

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) \quad P_4 = (x_4, y_4, z_4)$$

$$\mathrm{Or}_3(P_1, P_2, P_3, P_4) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

Exemplo de problema

Problema J (Um dia no museu) da Maratona Mineira 2022:

https://codeforces.com/group/YgJmumGtHD/contest/103794/problem/J