Teoria de jogos - Grundy number - Nim game

André G. Santos

INF 333 - Programação Competitiva

2024-1

Teoria dos jogos

Definição

Teoria dos jogos é uma modelagem matemática de situações estratégicas[a] em que o sucesso de um jogador em suas escolhas depende das escolhas dos demais jogadores.

[a] não necessariamente de jogos literalmente

Soma-Zero

Em jogos de soma zero, a vitória de um jogador implica na derrota do(s) outro(s), ou seja, não há mais de um vencedor.

Exemplos

Jogo da velha, xadrez, vários jogos em que 2 jogadores se alternam

Jogos combinatórios

Definição

Jogos de duas pessoas com informação perfeita e nenhum movimento dependente de sorte. Jogadores se alternam fazendo movimentos permitidos, movendo de um estado para outro, até uma posição terminal.

Considerando que jogam de forma ótima (nenhum comete erro), é possível determinar quem vence pelo estado inicial e quem começa.

Árvore de decisão

Árvore de decisão

Uma forma de solução é gerar recursivamente a árvore de decisão

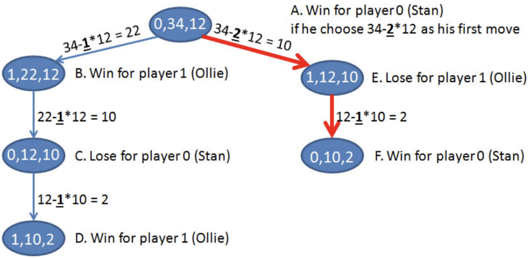
- cada vértice representa o jogador e o estado corrente do jogo
- arestas ligam um vértice aos que podem ser atingidos por uma jogada
- a raiz representa o jogador e estado inicial do jogo
- folhas que representam estado vitória representam vitória do jogador corrente (e derrota do adversário)
- em um vértice interno, o jogador corrente escolhe a jogada que garante a vitória, a que agrega maior valor (em caso de vitória não possível, a que gera menos perda) - **minimax**

- backtracking se não há sobreposição, prog. dinâmica caso contrário

Árvore de decisão

UVa 10368 - Euclid's Game (link)

- 2 jogadores, Stan e Ollie, se alternam nas jogadas
- Há dois números inteiros no início do jogo
- Uma jogada é subtrair do maior número um múltiplo do menor
- Não pode gerar valor negativo; quem gerar o zero vence

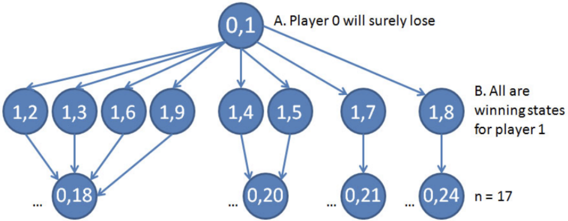


Ex.: 34 12

Árvore de decisão

UVa 847 - A multiplication game (link)

- 2 jogadores, Stan e Ollie, que se alternam nas jogadas
- O jogo começa com um número 1 e um valor de alvo n
- Uma jogada é multiplicar o número atual por valor entre 2 e 9
- Vence quem atingir ou ultrapassar o alvo n



Ex.: $n = 17$

Jogos combinatórios imparciais

Definição

Num jogo combinatório imparcial, todos os movimentos permitidos a partir de um estado são os mesmos para ambos jogadores.

Podem ser resolvidos usando Grundy numbers.

Contraexemplo

Xadrez não é imparcial: cada jogador só pode movimentar suas próprias peças

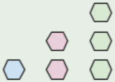
Jogo de Nim

Nim

Dado um conjunto de pilhas, cada uma contendo um certo número de pedras, dois jogadores se alternam retirando qualquer quantidade de pedras (pelo menos 1) de uma das pilhas.

Perde quem não puder jogar; i.e., vence quem retira a última pedra

Exemplo: Nim 1-2-3



Nim 1-2-3

Se ambos jogam de forma ótima, quem vence?

Jogo de Nim - Nim-Sum

Nim-Sum

A Nim-Sum de um estado do jogo de Nim é o XOR acumulado do número de pedras em cada pilha

Exemplo

Pilhas com 1, 2, 3 pedras

Nim-Sum $= 1 \oplus 2 \oplus 3 = 01_2 \oplus 10_2 \oplus 11_2 = 0$

Jogo de Nim - solução

Nim

Se ambos jogam de forma ótima, o primeiro jogador vence se a Nim-Sum do início é diferente de zero, e perde se for zero.

Prova (informal)

Observe que

- se o XOR acumulado é 0, qualquer movimento torna-o $\neq 0$
- se não é 0, existe movimento que o torna $= 0$

Estratégia

- Se todas as pilhas estão vazias (perdeu), XOR acumulado é 0
- Após a jogada do adversário, jogue para torná-lo igual a 0

Minimum excludant (Mex)

Mex

O mex de um conjunto de inteiros é o menor inteiro não-negativo que não pertence ao conjunto

Exemplos

$\text{mex}(\emptyset) = 0$
$\text{mex}(\{1, 2, 3\}) = 0$
$\text{mex}(\{0, 2, 4, 6\}) = 1$
$\text{mex}(\{0, 1, 2, 4, 8\}) = 3$
$\text{mex}(\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}) = n + 1$

Grundy number - definição

Grundy number

O Grundy number de um jogo é **0** se o jogador perde imediatamente; caso contrário é o **mex** dos Grundy numbers de todos próximos estados (atingidos por jogadas permitidas)

Grundy number - exemplo 1

Nim (1 pilha)

O jogo começa com uma pilha com n pedras, e cada jogador pode retirar qualquer número de pedras. O último jogador a jogar vence.

Grundy numbers

- Se não houver pedra o jogador perde, então $\text{Grundy}(0) = 0$
- Se $n = 1$, ele pode retirar 1 pedra; $\text{Grundy}(1) = \text{mex}(\{0\}) = 1$
- Se $n = 2$, pode retirar 1 ou 2; $\text{Grundy}(2) = \text{mex}(\{1, 0\}) = 2$
- De forma geral, ele pode retirar de 1 a n pedras, restando de $n - 1$ a 0, então $\text{Grundy}(n) = \text{mex}(\{n - 1, n - 2, \dots, 0\}) = n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grundy(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Grundy number - exemplo 2

Nim (1 pilha, com restrição)

O jogo começa com uma pilha com n pedras, e cada jogador pode retirar 1, 2 ou 3 pedras da pilha. O último jogador a jogar vence.

Grundy numbers

- Se não houver pedra o jogador perde, então $\text{Grundy}(0) = 0$
- Se $n = 1$, ele pode retirar 1 pedra; $\text{Grundy}(1) = \text{mex}(\{0\}) = 1$
- Se $n = 2$, pode retirar 1 ou 2; $\text{Grundy}(2) = \text{mex}(\{1, 0\}) = 2$
- Se $n = 3$, sobrarão 2, 1 ou 0; $\text{Grundy}(3) = \text{mex}(\{2, 1, 0\}) = 3$
- Se $n = 4$, sobrarão 3, 2 ou 1; $\text{Grundy}(4) = \text{mex}(\{3, 2, 1\}) = 0$
- De forma geral, $\text{Grundy}(n) = \text{mex}(\{\text{Grundy}(n-1), \text{Grundy}(n-2), \text{Grundy}(n-3)\})$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grundy(n)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Sprague-Grundy theorem

Sprague-Grundy theorem

Em um jogo composto, se os dois jogadores jogam de forma ótima, o primeiro vence se o XOR acumulado dos Grundy numbers dos estados iniciais de cada sub-jogo for $\neq 0$; e perde se for $= 0$.

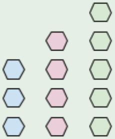
Sprague-Grundy theorem - exemplo 1

Nim (várias pilhas)

Dado um conjunto de pilhas, cada uma contendo um certo número de pedras, dois jogadores se alternam retirando qualquer quantidade de pedras (pelo menos 1) de uma das pilhas.

Perde quem não puder jogar; i.e., vence quem retira a última pedra

Nim 3-4-5



Solução

- Nim-Sum $= 3 \oplus 4 \oplus 5 = 11_2 \oplus 100_2 \oplus 101_2 = 10_2$
- Por Sprague-Grundy: Grundy(3) $\oplus$ Grundy(4) $\oplus$ Grundy(5)

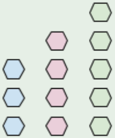
Sprague-Grundy theorem - exemplo 2

Nim (várias pilhas, com restrição)

Dado um conjunto de pilhas, cada uma contendo um certo número de pedras, dois jogadores se alternam retirando 1, 2 ou 3 pedras de uma das pilhas.

Perde quem não puder jogar; i.e., vence quem retira a última pedra

Nim 3-4-5



Solução, por Sprague-Grundy

- $\text{Grundy}(3) \oplus \text{Grundy}(4) \oplus \text{Grundy}(5) = 3 \oplus 0 \oplus 1 = 11_2 \oplus 0_2 \oplus 1_2 = 10_2$

Juntando tudo

Exercício: jogo dos cavalos

- Há K cavalos em um tabuleiro de xadrez $N \times N$
- Dois jogadores se alternam, movendo qualquer dos cavalos
- Eles podem se mover apenas como indicado na figura (em cada jogada a soma das coordenadas deve decrescer)
- Eles não se atacam; pode haver mais de um na mesma casa
- Perde quem não puder movimentar nenhum cavalo