Trabajo Práctico de Métodos Numéricos

En este informe se busca comparar tres métodos de aproximación de funciones, los cuales son:

1. Método de Bisección
2. Método Punto Fijo
3. Método de Newton-Raphson

1- Método de Bisección

En el método de bisección la técnica consiste en: ¨dado dos puntos cualesquiera a y b, se evalúa a la función en dichos puntos, luego se multiplica el valor $f(a)$ por el valor $f(b)$, este resultado puede ser negativo, cero o positivo.

Si es negativo entonces hay al menos una raíz en el intervalo, se divide al intervalo en dos obteniendo el punto c, se hace lo mismo, pero en este caso entre el punto a y c, si es negativo se llega a la misma conclusión de antes, pero si no, entonces la conclusión es que la raíz se encuentra entre c y b, existiendo al menos una raíz, el algoritmo se repite hasta llegar a la precisión deseada. La precisión está dada por el módulo del valor de la resta de la semisuma nueva menos la anterior y dividido la nueva multiplicado el valor absoluto por cien calculando así el porcentaje.

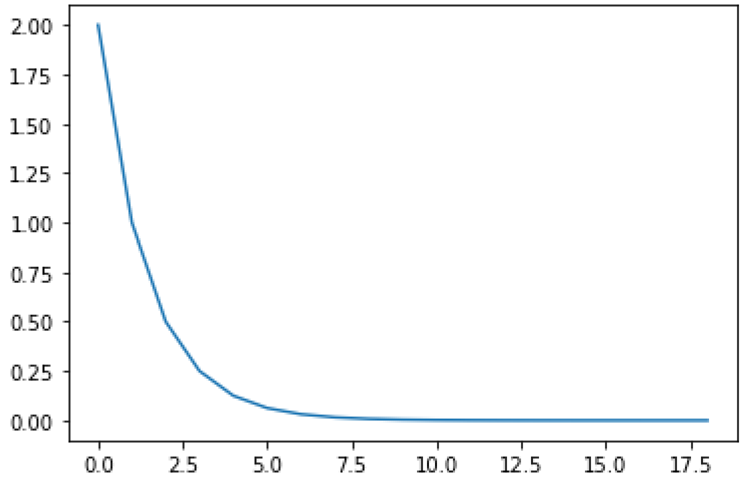
Si el resultado de $f(c)$ es cero esa es la raíz.

Si es positiva es posible que no existan raíces en el intervalo o que la cantidad de ellas sea un número par, pudiendo realizar el método algunas veces para saber si existen o no estas

Analizando esto para la función $sen(x)$, puede llegar a la siguiente gráfica para las siguientes condiciones

1. Punto inferior: -1
2. Punto superior: 1
3. Precisión: 0.00001

En el eje de abscisas se muestra el número de iteraciones que realizó el algoritmo, y en el eje de ordenadas se muestra como disminuye el error de la aproximación, el algoritmo realizó 18 iteraciones, antes de dar el resultado



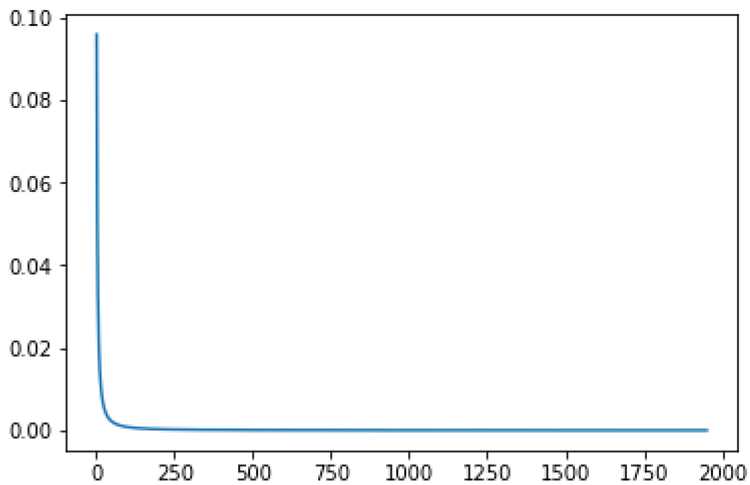
En la gráfica se puede ver como cerca de las 7/8 iteraciones se vuelve lento, aun así, esto se podría mejorar, por ejemplo con algún sistema que solo requiera de un solo punto: este método podría ser por ejemplo el método de punto fijo

2- Método Punto Fijo

Este método consiste en que dada una función $f(x)$, si se puede obtener una función equivalente tal que $g(x) = x$ entonces se cumple que si existe un x_0 tal que $f(x_0) = 0$ entonces también se cumple que $g(x_0) = 0$. Dado un x_0 se evalúa a la función $g(x_0)$ y el resultado obtenido es el nuevo x_0 y esto se repite hasta llegar a la precisión requerida

Analizando esto para la función $sen(x)$, puede llegar a la siguiente gráfica para las siguientes condiciones

1. Punto inferior: -1
2. Precisión: 0.00001



El número de iteraciones de este algoritmo es 1951

Como resumen el método puede ser mejor en el sentido que solo necesita de un punto inicial, pero necesita de muchas más iteraciones, lo cual puede ser un gran costo computacional, para intentar solucionar este problema una posible solución es el tercer y último método

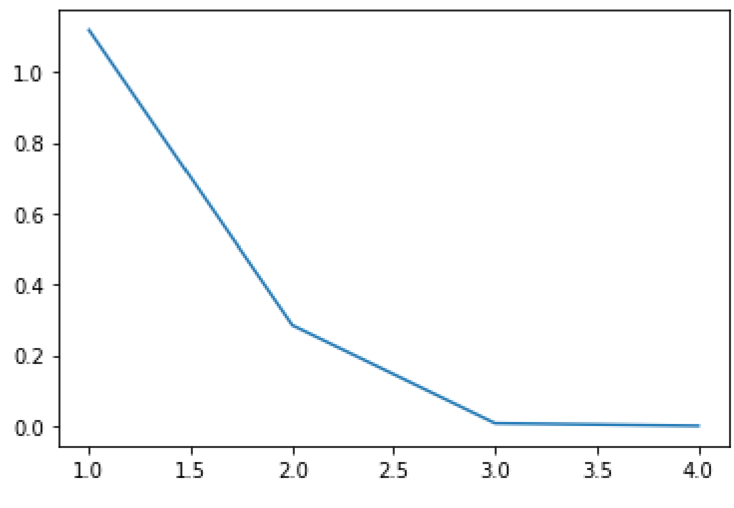
3- Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson consiste en usar el polinomio de Taylor, más específicamente usa hasta el punto de aproximación lineal del mismo. Si una función tiene una raíz en x_0 entonces se puede aproximar que:

$f(x_0) \approx f(x) + (x_0 - x)f'(x)$

Analizando esto para la función $sen(x)$, puede llegar a la siguiente gráfica para las siguientes condiciones

1. Punto inferior: -1
2. Precisión: 0.00001



El número de iteraciones de este algoritmo es 4

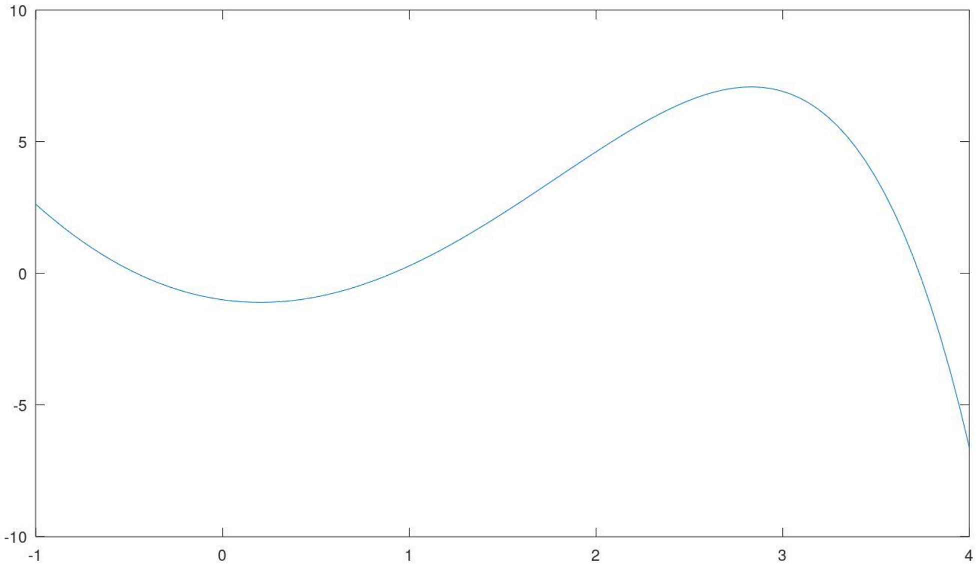
Algunas funciones de prueba para los métodos descritos antes:

1. $f_1(x) = 3x^2 - e^x$
2. $f_2(x) = 4 \cdot sin(x) - e^x$
3. $f_3(x) = e^x - 2 - x$
4. $f_4(x) = ln(x^2) - 0.7$

Todas las funciones antes listadas se van a obtener bajo la misma precisión que es

Primera función

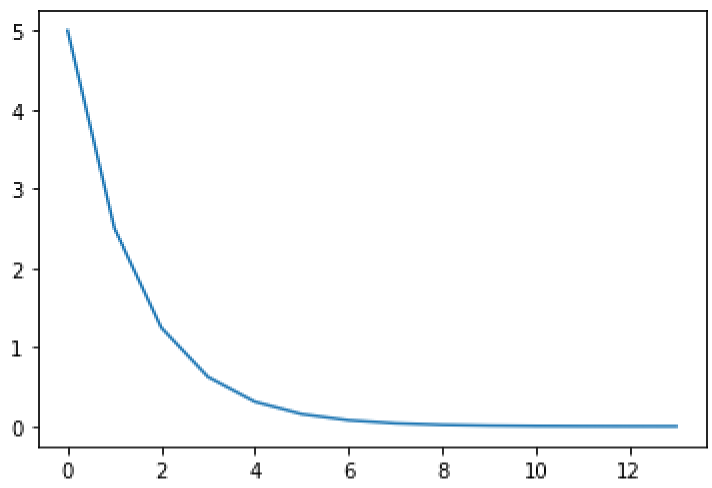
$f(x) = 3x^2 - e^x$



Según se puede apreciar en la gráfica $f(x)$ tiene raíces alrededor de los puntos:
-0.4, 0.9 y 3.7

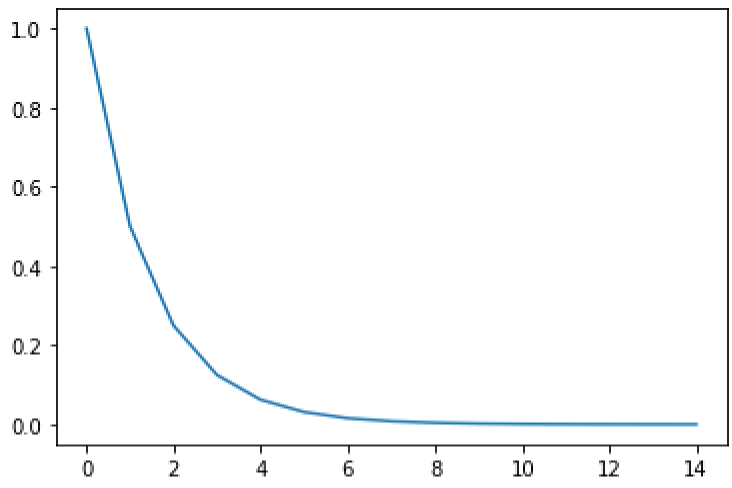
Bisección

Con una precisión de 0.0001



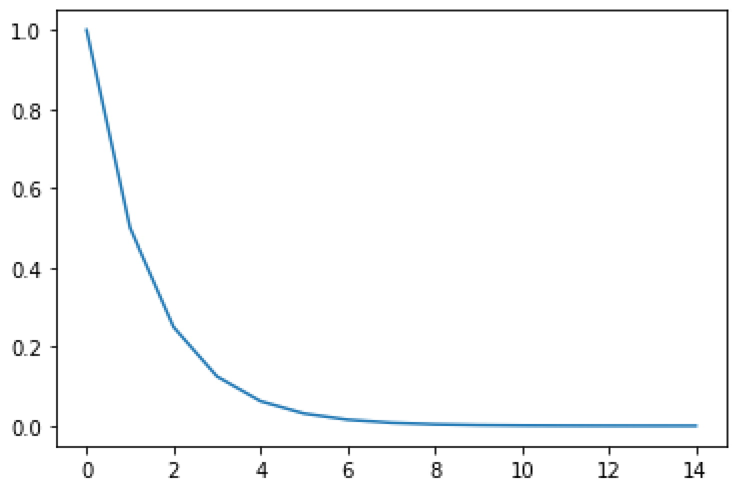
N° Iteración	a	b	X0	ε
1	0	-1	-0.5	1
2	0.0	-0.5	-0.5	0.5
3	-0.25	-0.5	-0.25	0.25
4	-0.375	-0.5	-0.375	0.125
5	-0.4375	-0.5	-0.4375	0.0625
6	-0.4375	-0.46875	-0.46875	0.03125
7	-0.453125	-0.46875	-0.453125	0.015625
8	-0.453125	-0.4609375	-0.4609375	0.0078125
9	-0.45703125	-0.4609375	-0.45703125	0.00390625
10	-0.45703125	-0.458984375	-0.458984375	0.001953125
11	-0.4580078125	-0.458984375	-0.4580078125	0.0009765625
12	-0.45849609375	-0.458984375	-0.45849609375	0.00048828125
13	-0.458740234375	-0.458984375	-0.458740234375	0.000244140625
14	-0.4588623046875	-0.458984375	-0.4588623046875	0.0001220703125
15	-0.45892333984375	-0.458984375	-0.45892333984375	6.103515625e-05

Con una precisión de 0.0001



N° Iteración	a	b	X0	ε
1	0.0	1.0	0.5	1.0
2	0.5	1.0	0.5	0.5
3	0.75	1.0	0.75	0.25
4	0.875	1.0	0.875	0.125
5	0.875	0.9375	0.9375	0.0625
6	0.90625	0.9375	0.90625	0.03125
7	0.90625	0.921875	0.921875	0.015625
8	0.90625	0.9140625	0.9140625	0.0078125
9	0.90625	0.91015625	0.91015625	0.0078125
10	0.908203125	0.91015625	0.908203125	0.001953125
11	0.9091796875	0.91015625	0.9091796875	0.0009765625
12	0.90966796875	0.91015625	0.90966796875	0.00048828125
13	0.909912109375	0.91015625	0.909912109375	0.000244140625
14	0.909912109375	0.9100341796875	0.9100341796875	0.0001220703125
15	0.90997314453125	0.9100341796875	0.90997314453125	6.103515625e-05

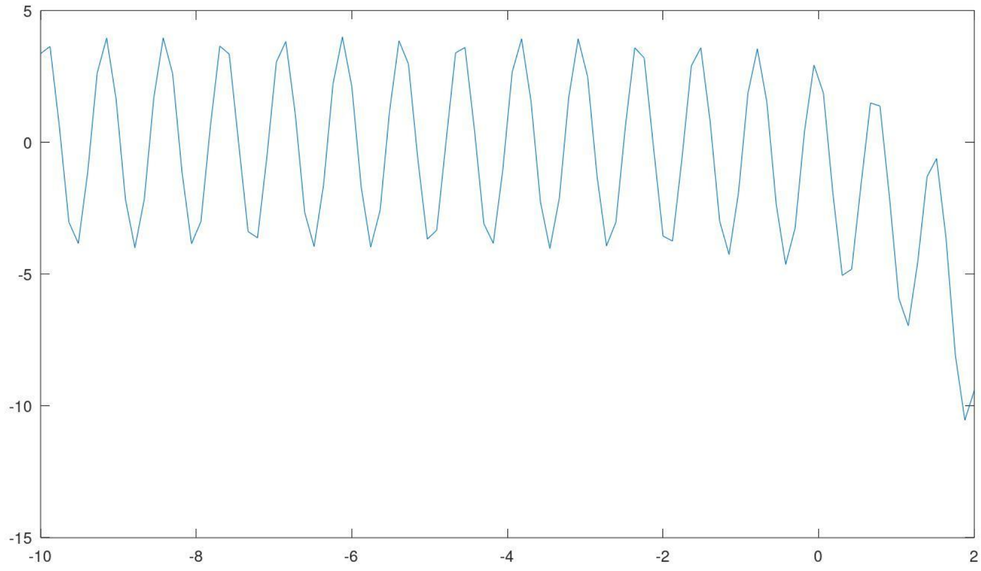
Con una precisión de 0.0001



N° Iteración	a	b	X0	ε
1	3.0	4.0	3.5	1.0
2	3.5	4.0	3.5	0.5
3	3.5	3.75	3.75	0.25
4	3.625	3.75	3.625	0.125
5	3.6875	3.75	3.6875	0.0625
6	3.71875	3.75	3.71875	0.03125
7	3.71875	3.734375	3.734375	0.015625
8	3.7265625	3.734375	3.7265625	0.0078125
9	3.73046875	3.734375	3.73046875	0.00390625
10	3.732421875	3.734375	3.732421875	0.001953125
11	3.732421875	3.7333984375	3.7333984375	0.0009765625
12	3.73291015625	3.7333984375	3.73291015625	0.00048828125
13	3.73291015625	3.733154296875	3.733154296875	0.000244140625
14	3.7330322265625	3.733154296875	3.7330322265625	0.0001220703125
15	3.7330322265625	3.73309326171875	3.73309326171875	6.103515625e-05

Segunda función

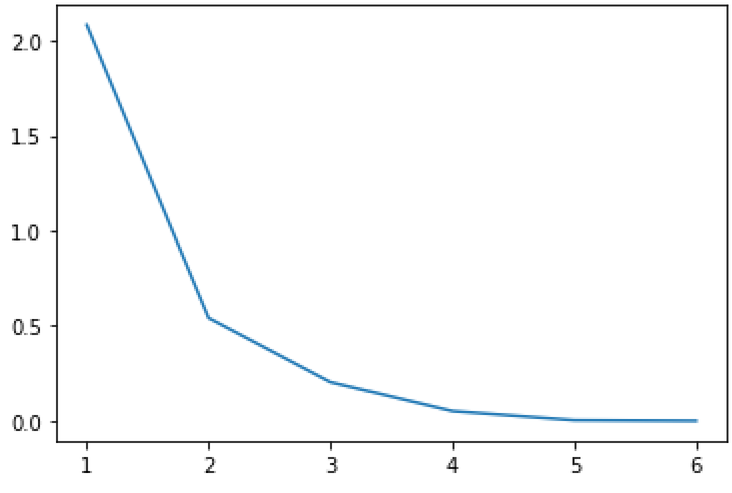
$$f(x) = 4 \cdot sin(x) - e^{x}$$



Esta función por ser periódica tiene infinitas raíces, pero se destacan dos una cerca de 0.3 y otra cerca de 1.3

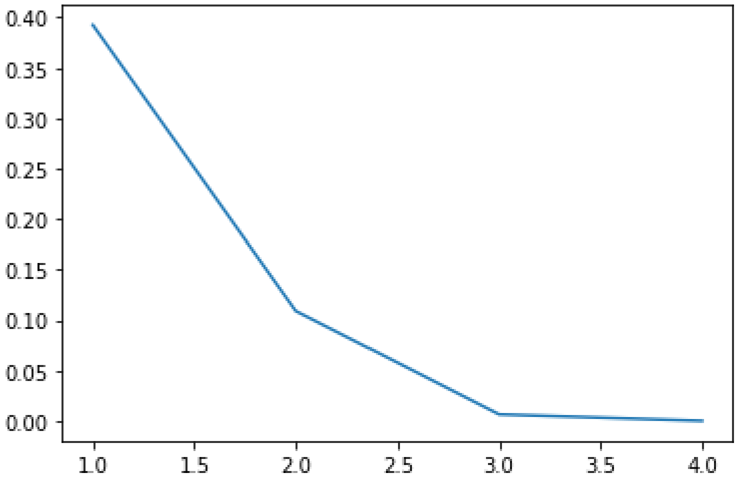
Método Newton-Raphson

Con una precisión de 0.001



N° Iteración	X	ε
1	0.0	1.0
2	-1.0	2.0820283125014734
3	1.0820283125014734	0.5417130991848436

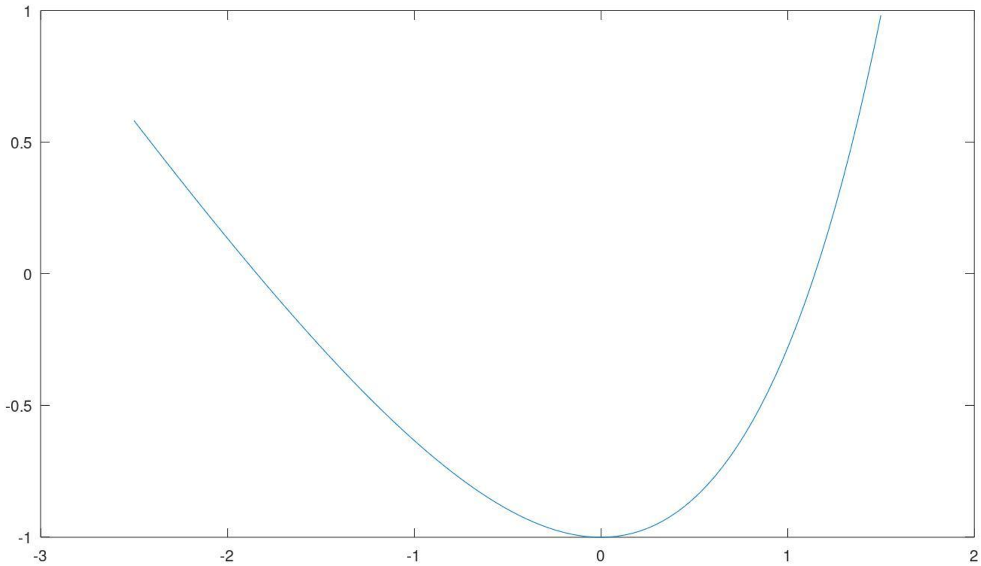
4	1.623741411686317	0.203954398775837
5	1.41978701291048	0.051424713122783405
6	1.3683622997876965	0.0033893273210561237
7	1.3649729724666404	1.4538466396540883e-05



N° Iteración	X	ε
1	1.0	0.35239788922745907
2	0.6476021107725409	0.3925568242644928
3	0.25504528650804814	0.10905178574082969
4	0.36409707224887783	0.006434918898795439
5	0.37053199114767327	2.6104389220960034e-05

Tercera Función

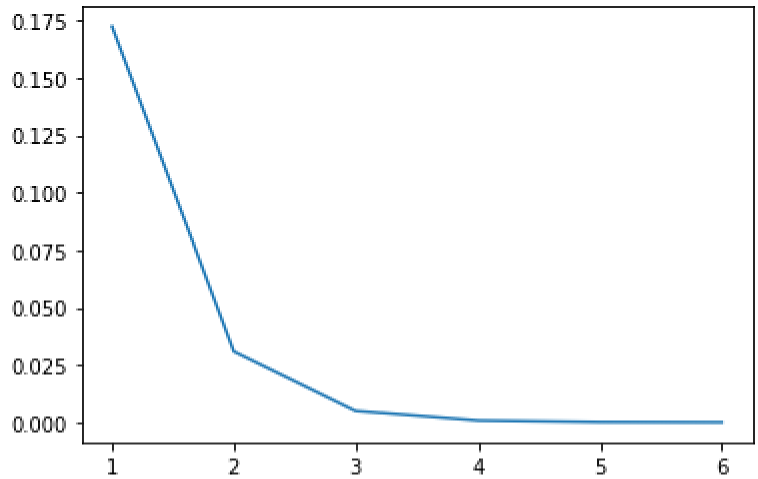
$f(x) = e^{x} - 2 - x$



Según se puede apreciar en la gráfica $f(x)$ tiene raíces alrededor de los puntos: $-\ 1.8$ y 1

Punto fijo

Con una precisión de 0.001

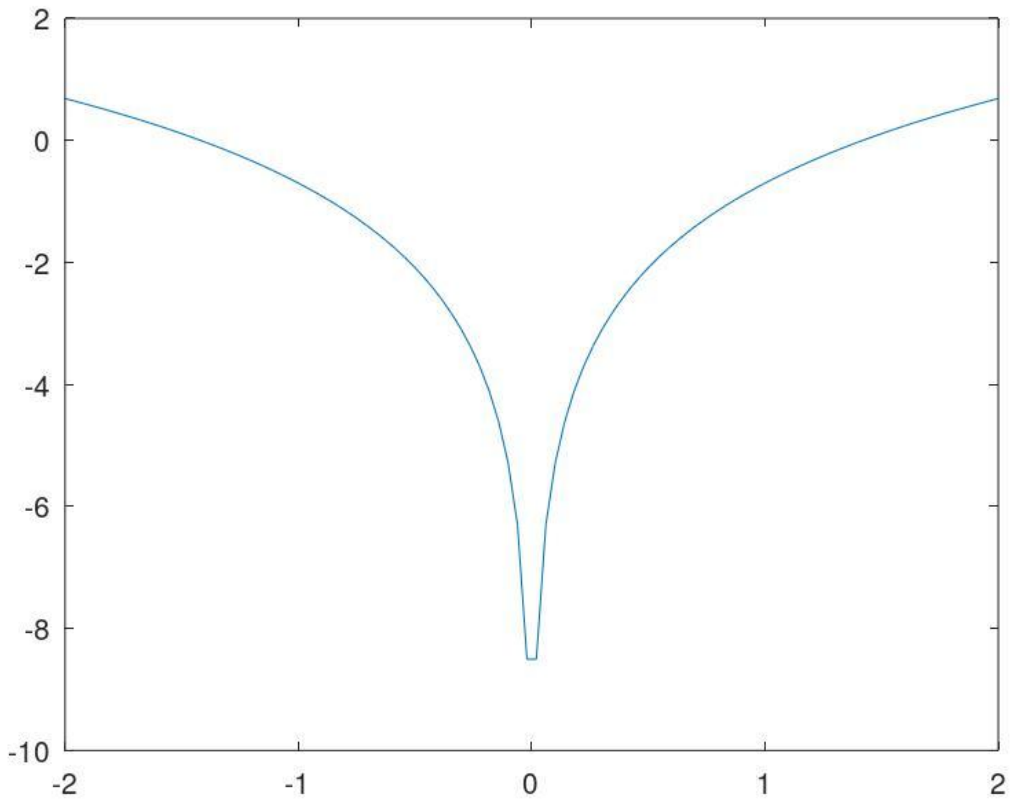


N° Iteración	X	ε
1	-1.0	0.6321205588285577
2	-1.6321205588285577	0.1723649070188542
3	-1.8044854658474119	0.030955428074633806
4	-1.8354408939220457	0.0050159614214910775

5	-1.8404568553435368	0.0007982585678969478
6	-1.8412551139114337	0.00012666890143586684
7	-1.8413817828128696	2.0090722857135646e-05

Cuarta función

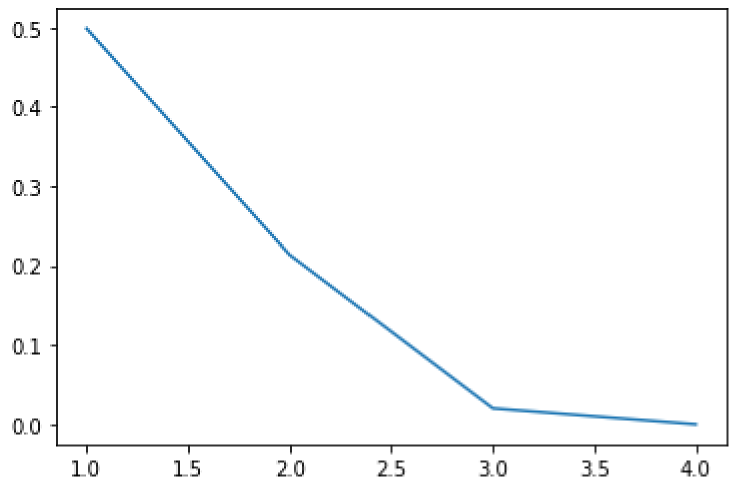
$f(x) = ln(x^2) - 0.7$



Según se puede apreciar en la gráfica $f(x)$ tiene raíces alrededor de los puntos: ± 1.4

Método Newton-Raphson

Con una precisión de 0.001



N° Iteración	X	ε
1	±2.0	1.3137056388801094
2	±0.6862943611198906	0.49855760901551593
3	±1.1848519701354066	0.21372614927990718
4	±1.3985781194153137	0.02034079215474538
5	±1.4189189115700591	0.00014862923860170518

Conclusión

Como conclusión los métodos de *punto fijo* y *newton raphson* son muy parecidos de hecho tienen los mismos criterios de convergencia aunque el segundo es más rápido en encontrarlas, el primero puede requerir de miles de iteraciones para una misma precisión mientras que el segundo solo unas pocas unidades o decenas.

En cuanto al metodo de biseccion no garantiza encontrar las raíces, aunque si es capaz de encontrar alguna es un método lineal y requiere de muchas iteraciones