Dérivation complète du pricing des options asiatiques

1 Modèle sous la mesure risque-neutre

On considère le modèle de Black–Scholes sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} dS_t = (r-q)S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \\ S_0 > 0,\ \ r, q, \sigma > 0, \end{cases}$$

où W_t est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$. La solution explicite est

$$S_t = S_0 \exp\left[(r - q - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right].$$

2 Option asiatique géométrique : dérivation complète

On définit la moyenne géométrique continue :

$$G_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t\,dt\right),$$

et le payoff d'un call géométrique :

$$(G_T - K)^+.$$

2.1 Décomposition de $\ln S_t$

Comme

$$\ln S_t = \ln S_0 + (r - q - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t,$$

on obtient

$$\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t\,dt = \ln S_0 + (r - q - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{2} + \sigma\cdot\frac{1}{T}\int_0^T W_t\,dt.$$

Notons

$$Y := \frac{1}{T}\int_0^T W_t\,dt.$$

2.2 Distribution de Y

Comme combinaison linéaire de gaussiens, Y est gaussienne.

Espérance.

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[W_t]\,dt = 0.$$

Variance.

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T W_t\,dt\right) = \int_0^T\int_0^T \mathbb{E}[W_s W_t]\,ds\,dt = \int_0^T\int_0^T \min(s,t)\,ds\,dt = \frac{T^3}{3},$$

donc

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{T^2}\cdot\frac{T^3}{3} = \frac{T}{3}.$$

Ainsi :

$$Y \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{T}{3}\right).$$

2.3 Distribution de $\ln G_T$

On obtient immédiatement

$$\ln G_T = \frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t\, dt \sim \mathcal{N}\left(\mu_G,\ v_G\right),$$

avec

$$\mu_G = \ln S_0 + (r - q - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{2}, \quad v_G = \sigma^2\frac{T}{3}.$$

Donc G_T est lognormal.

On pose une volatilité *effective* :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}.$$

2.4 Prix du call géométrique

Comme G_T est lognormal, le prix du call géométrique est donné par une formule de type Black–Scholes :

$$C_0^{\text{geom}} = \widetilde{S}_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(\widetilde{S}_0/K) + (r - q + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2)T}{\widetilde{\sigma}\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \widetilde{\sigma}\sqrt{T},$$

et

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}.$$

On peut prendre

$$\widetilde{S}_0 = S_0 \exp\left(-\frac{(r-q)T}{2} - \frac{\sigma^2 T}{12}\right),$$

ce qui permet d'identifier exactement la moyenne de $\ln G_T$.

3 Option asiatique arithmétique : dérivation de la PDE

La moyenne arithmétique continue est

$$A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t\, dt.$$

Le payoff d'un call arithmétique est

$$(A_T - K)^+.$$

La difficulté provient de la dépendance au chemin. Pour rendre le problème markovien, on introduit le processus :

$$I_t := \int_0^t S_u\, du.$$

Alors :

$$A_T = \frac{I_T}{T}.$$

3.1 Dynamique du couple (S_t, I_t)

On a :

$$dS_t = (r - q)S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \qquad dI_t = S_t\, dt.$$

Le couple (S_t, I_t) est markovien.

3.2 Fonction de valeur

On note

$$V(t,s,i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} \Big(\frac{I_T}{T} - K \Big)^{+} \,\Big|\, S_t = s,\ I_t = i \right].$$

Condition terminale :

$$V(T,s,i) = \left(\frac{i}{T} - K \right)^{+}.$$

3.3 Générateur infinitésimal

Le générateur $\mathcal{L}$ associé au couple (S_t, I_t) est

$$\mathcal{L}V = (r-q)s\,V_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\,V_{ss} + s\,V_i,$$

puisque I_t n'a pas de diffusion et $dI_t = S_t dt$.

3.4 PDE de valorisation

Par Feynman–Kac, $V(t,s,i)$ satisfait :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)s\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + s\frac{\partial V}{\partial i} - rV = 0}$$

sur $[0,T) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$, avec condition terminale

$$V(T,s,i) = \left(\frac{i}{T} - K \right)^{+}.$$

Cette équation aux dérivées partielles est la forme exacte du problème de pricing pour les options asiatiques arithmétiques. Elle se résout numériquement (schémas de différences finies, méthodes spectrales, Monte Carlo via Feynman–Kac, LSMC, etc.).