



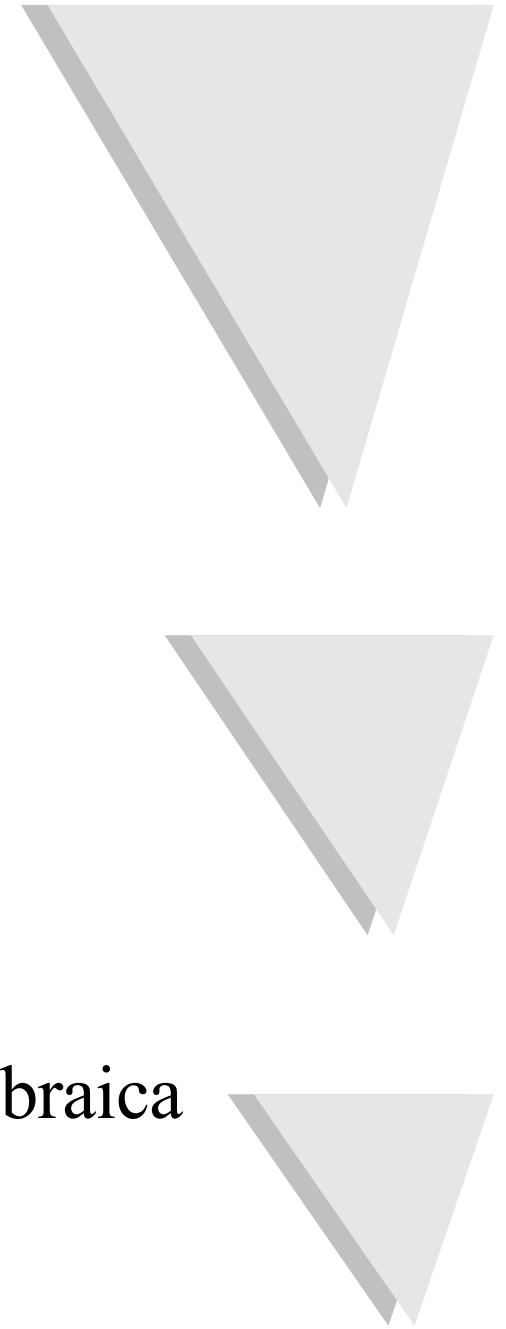
# **PROGRAMACIÓN FUNCIONAL**

## **Lambda Cálculo: Semántica Operacional**



# Lambda Cálculo

- ◆ Semántica por reducción
  - ◆ regla  $\beta$
  - ◆ regla  $\eta$
- ◆ Propiedades de la reducción
  - ◆ Confluencia
  - ◆ Corrección respecto de la semántica algebraica



# Lambda cálculo

- ◆ Semántica por reducción
  - ◆ **Contracción**: relación binaria entre  $\lambda$ -términos
    - ◆ Usualmente denotada  $\rightarrow$
  - ◆ **Reducción**: cero o más contracciones
    - ◆ Usualmente denotada  $\rightarrow^*$
  - ◆ Secuencia de reducción
    - ◆ Secuencia de expresiones relacionadas por contracción
  - ◆ Secuencia maximal de reducción
    - ◆ Secuencia que no es subsecuencia inicial de ninguna otra
      - ◆ finita (termina en una expresión que no se puede contraer)
      - ◆ infinita (no termina)

# Lambda cálculo

## ◆ Semántica por reducción

- ◆ El significado de una expresión  $M$  está dado por las secuencias maximales de reducción que comienzan en  $M$ 
  - ◆ Si hay una secuencia maximal finita, el significado está dado por la última expresión de la misma
  - ◆ Si todas son infinitas, la expresión está indefinida
- ◆ ¿Qué debe cumplirse para que la semántica por reducción esté bien definida?
  - ◆ Si hay más de una secuencia maximal finita para un término  $M$ , todas deben tener la misma expresión final

# Lambda cálculo

## ◆ Semántica por reducción

### ◆ **Forma normal:**

- ◆ expresión que no pertenece al dominio de la contracción
- ◆ la última expresión de cualquier secuencia maximal finita es necesariamente una forma normal
- ◆ si una expresión está en forma normal, sólo puede aparecer al final de una secuencia maximal finita

### ◆ **Redex** (*reducible expression*):

- ◆ subexpresión que se puede reemplazar por otra
- ◆ la contracción se define como el reemplazo de un redex
- ◆ una expresión está en forma normal sii no contiene redexes

# Lambda Cálculo

## ◆ Def: $\beta$ -contracción

- ◆ Sea  $\rightarrow_\beta$  la menor relación que satisface las siguientes reglas ( $M, N, P, x$  se asumen universalmente cuantificadas):

- ◆  $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M\{x \leftarrow N\}$  (regla  $\beta$ )
- ◆ si  $M \rightarrow_\beta N$ , entonces (clausura contextual)

$$MP \rightarrow_\beta NP, PM \rightarrow_\beta PN \text{ y } \lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N$$

## ◆ Observaciones

- ◆ la  $\beta$ -contracción se define entre  $\alpha$ -clases de equivalencia
- ◆ no es una relación de equivalencia
- ◆ en particular, no es simétrica
- ◆ exactamente una aplicación es reemplazada por su resultado

# Lambda Cálculo

## ◆ Nomenclatura

### ◆ $\beta$ -contracción

- ◆ la relación  $\rightarrow_\beta$  define el significado de la aplicación

### ◆ $\beta$ -redex: subexpresión reducible por la regla $\beta$

### ◆ $\beta$ -forma normal: expresión que no contiene $\beta$ -redexes

### ◆ $\beta$ -reducción: la clausura reflexiva-transitiva de $\rightarrow_\beta$ ( $\rightarrow_\beta^*$ )

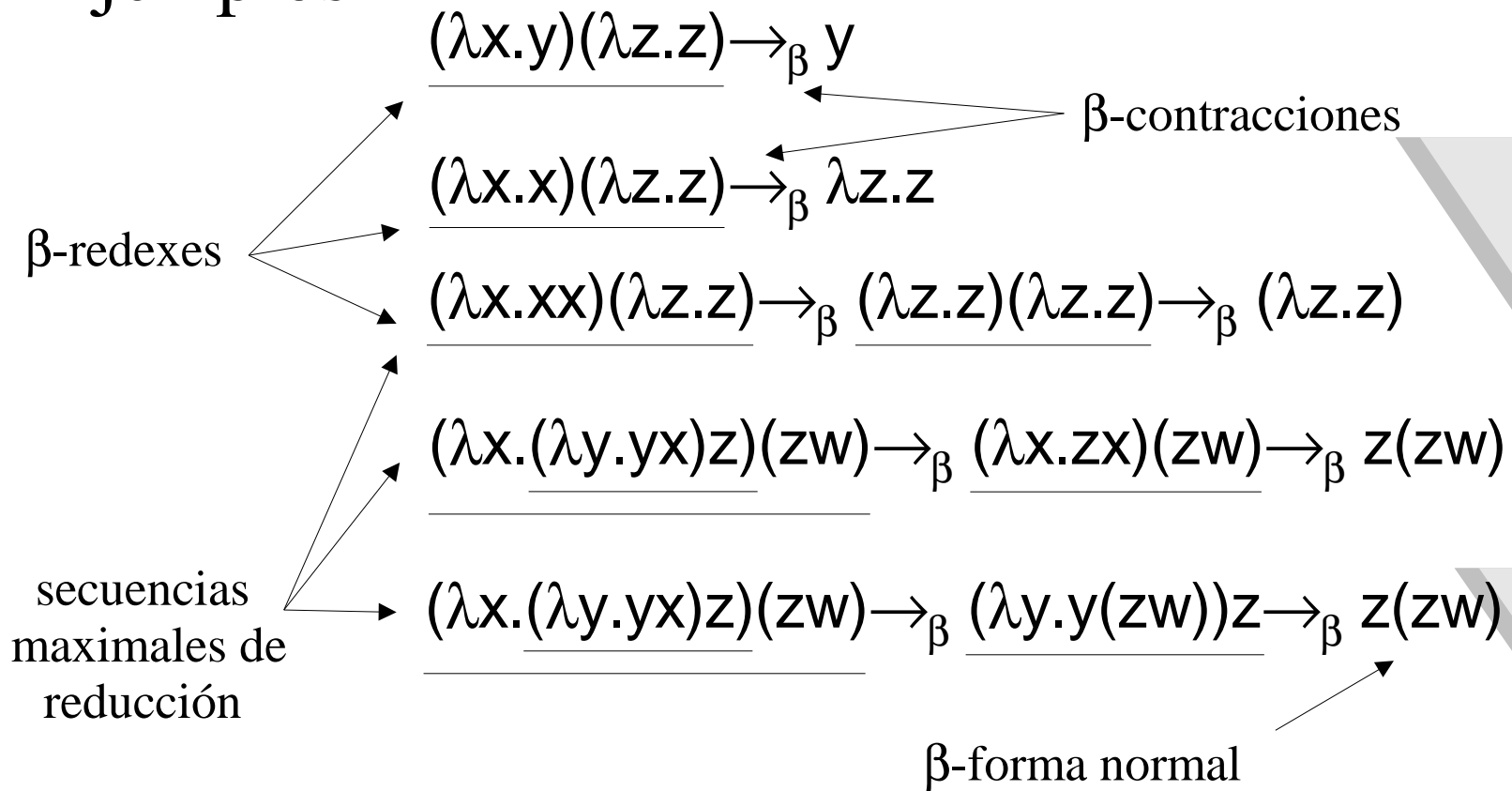
- ◆ si  $M \rightarrow_\beta N$ , entonces  $M \rightarrow_\beta^* N$

- ◆  $M \rightarrow_\beta^* M$

- ◆ si  $M \rightarrow_\beta^* N$  y  $N \rightarrow_\beta^* P$ , entonces  $M \rightarrow_\beta^* P$

# Lambda Cálculo

## ➤ Ejemplos





# Lambda Cálculo

## Observaciones

- $M_1 \rightarrow_{\beta} M_2 \rightarrow_{\beta} \dots \rightarrow_{\beta} M_n$  sii  $M_1 \rightarrow_{\beta}^* M_n$
- en particular, siempre se cumple que  $M \rightarrow_{\beta}^* M$
- Ejemplos:  $(\lambda x. xx)(\lambda z. z) \rightarrow_{\beta}^* (\lambda z. z)(\lambda z. z)$   
 $(\lambda x. (\lambda y. yx)z)(zw) \rightarrow_{\beta}^* z(zw)$   
 $(\lambda z. z) \rightarrow_{\beta}^* (\lambda z. z)$
- Si  $M \rightarrow_{\beta}^* N$  y  $N$  está en forma normal (fn), entonces  $N$  es el significado de  $M$ 
  - las fns sólo aparecen al final de secuencias maximales
  - en este caso se dice que  $N$  es 'la forma normal de  $M$ '

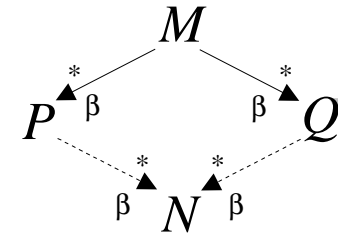
# Lambda Cálculo

- ◆ ¿Está bien definida esta semántica?
- ◆ Para ver esto debemos responder las preguntas:
  - ◆ ¿Todo término tiene una forma normal?
    - ◆ No. Hay expresiones que no tienen forma normal.
    - ◆ Ejemplo:  $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_{\beta}^* (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
  - ◆ Si la fn de un término existe, ¿es única?
    - ◆ Sí. Lo demuestra el teorema de Church-Rosser.
  - ◆ ¿Coincide esta semántica con la algebraica?
    - ◆ Sí. Debemos demostrarlo.

# Lambda Cálculo

## ◆ Teorema de Church-Rosser (confluencia)

Si  $M \rightarrow_{\beta}^* P$  y  $M \rightarrow_{\beta}^* Q$ , entonces  
existe  $N$  tal que  $P \rightarrow_{\beta}^* N$  y  $Q \rightarrow_{\beta}^* N$



## ◆ Corolario (unicidad de las formas normales)

Si la forma normal de un término existe, es única.

**Dem:** supongamos que  $P$  y  $Q$  son fns de  $M$  (o sea,  $M \rightarrow_{\beta}^* P$  y  $M \rightarrow_{\beta}^* Q$ ). Por Church-Rosser, existe  $N$  tal que  $P \rightarrow_{\beta}^* N$  y  $Q \rightarrow_{\beta}^* N$ . Pero como una fn sólo reduce a sí misma, entonces  $P$  y  $Q$  son iguales a  $N$ , y por ello son iguales entre sí.

# Lambda Cálculo

- ◆ Equivalencia con la semántica algebraica
- ◆ **Propiedad:** Si  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ , entonces  $M \approx_{\alpha\beta} N$ 
  - ◆ Dem: sencilla, utilizando las definiciones
- ◆ **Propiedad:** Si  $M \approx_{\alpha\beta} N$ , entonces  
existe  $P$  tal que  $M \rightarrow_{\beta}^* P$  y  $N \rightarrow_{\beta}^* P$ 
  - ◆ Dem: por inducción en la demostración de  $\approx_{\alpha\beta}$
- ◆ **Corolario:** cada  $\beta$ -clase contiene a lo sumo una forma normal (salvo renombre de variables)

# Lambda Cálculo

- ◆ Se sigue un camino similar para agregar la propiedad de extensionalidad ( $\eta$ )
- ◆ Def:  $\eta$ -contracción
  - ◆ Sea  $\rightarrow_{\eta}$  la menor relación que satisface las siguientes reglas ( $M, N, P, x$  se asumen universalmente cuantificadas):
    - ◆ si  $x$  no ocurre libre en  $M$ ,  
entonces  $(\lambda x.Mx) \rightarrow_{\eta} M$  (regla  $\eta$ )
    - ◆ si  $M \rightarrow_{\eta} N$ , entonces  
 $MP \rightarrow_{\eta} NP$ ,  $PM \rightarrow_{\eta} PN$  y  $\lambda x.M \rightarrow_{\eta} \lambda x.N$  (clausura contextual)

# Lambda Cálculo

- ◆ Esta semántica deja indefinidos a términos útiles
  - ◆ en particular aquellos que no tienen forma normal, pero que al ser aplicados reducen a una forma normal
    - ◆ Ej:  $(\lambda f.f\Omega)$  y  $((\lambda f.f\Omega)(\lambda z.(\lambda w.w)))$
- ◆ Para definir bien la semántica debemos
  - ◆ cambiar la noción de forma normal (*a fn a la cabeza*)
  - ◆ cambiar la noción de secuencia maximal de reducción
  - ◆ Entonces, el significado de un término es su fn a la cabeza, si esta existe
- ◆ Eso escapa al alcance de este curso

# Resumen

- ◆ Se definió una semántica operacional del  $\lambda$ -cálculo
- ◆ Se enunciaron algunas de propiedades de dicha semántica