PROGRAMACIÓN FUNCIONAL

Lambda Cálculo: Semántica Operacional

Lambda Cálculo

- Semántica por reducción
  - regla β
  - regla η
- Propiedades de la reducción
  - Confluencia
  - Corrección respecto de la semántica algebraica

Lambda cálculo

- Semántica por reducción
  - **Contracción**: relación binaria entre λ-términos
    - Usualmente denotada $\rightarrow$
  - **Reducción**: cero o más contracciones
    - Usualmente denotada $\rightarrow^*$
  - Secuencia de reducción
    - Secuencia de expresiones relacionadas por contracción
  - Secuencia maximal de reducción
    - Secuencia que no es subsecuencia inicial de ninguna otra
      - finita (termina en una expresión que no se puede contraer)
      - infinita (no termina)

Lambda cálculo

- Semántica por reducción
  - El significado de una expresión *M* está dado por las secuencias maximales de reducción que comienzan en *M*
    - Si hay una secuencia maximal finita, el significado está dado por la última expresión de la misma
    - Si todas son infinitas, la expresión está indefinida
  - ¿Qué debe cumplirse para que la semántica por reducción esté bien definida?
    - Si hay más de una secuencia maximal finita para un término *M*, todas deben tener la misma expresión final

Lambda cálculo

- Semántica por reducción
  - **Forma normal**:
    - expresión que no pertenece al dominio de la contracción
    - la última expresión de cualquier secuencia maximal finita es necesariamente una forma normal
    - si una expresión está en forma normal, sólo puede aparecer al final de una secuencia maximal finita
  - **Redex** (*reducible expression*):
    - subexpresión que se puede reemplazar por otra
    - la contracción se define como el reemplazo de un redex
    - una expresión está en forma normal sii no contiene redexes

Lambda Cálculo

- Def: β-contracción
  - Sea $\rightarrow_\beta$ la menor relación que satisface las siguientes reglas (M,N,P,x se asumen universalmente cuantificadas):
    - $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M\{x \leftarrow N\}$ (regla β)
    - si $M \rightarrow_\beta N$, entonces (clausura contextual)

      $MP \rightarrow_\beta NP$, $PM \rightarrow_\beta PN$ y $\lambda x.M \rightarrow_\beta \lambda x.N$
- Observaciones
  - la β-contracción se define entre α-clases de equivalencia
  - no es una relación de equivalencia
  - en particular, no es simétrica
  - exactamente una aplicación es reemplazada por su resultado

Lambda Cálculo

- Nomenclatura
  - β-<u>contracción</u>
    - la relación $\rightarrow_\beta$ define el significado de la aplicación
  - β-<u>redex</u>: subexpresión reducible por la regla β
  - β-<u>forma normal</u>: expresión que no contiene β-redexes
  - β-<u>reducción</u>: la clausura reflexiva-transitiva de $\rightarrow_\beta$ ($\rightarrow_\beta{}^*$)
    - si $M \rightarrow_\beta N$, entonces $M \rightarrow_\beta{}^* N$
    - $M \rightarrow_\beta{}^* M$
    - si $M \rightarrow_\beta{}^* N$ y $N \rightarrow_\beta{}^* P$, entonces $M \rightarrow_\beta{}^* P$

Lambda Cálculo

- Ejemplos

$$\underline{(\lambda x.y)(\lambda z.z)} \to_\beta y$$

β-contracciones

$$\underline{(\lambda x.x)(\lambda z.z)} \to_\beta \lambda z.z$$

β-redexes

$$\underline{(\lambda x.xx)(\lambda z.z)} \to_\beta \underline{(\lambda z.z)(\lambda z.z)} \to_\beta (\lambda z.z)$$

$$\underline{(\lambda x.\underline{(\lambda y.yx)z})(zw)} \to_\beta \underline{(\lambda x.zx)(zw)} \to_\beta z(zw)$$

secuencias maximales de reducción

$$\underline{(\lambda x.\underline{(\lambda y.yx)z})(zw)} \to_\beta \underline{(\lambda y.y(zw))z} \to_\beta z(zw)$$

β-forma normal

Lambda Cálculo

- Observaciones
  - $M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \ldots \to_\beta M_n$ sii $M_1 \to_\beta^* M_n$
  - en particular, siempre se cumple que $M \to_\beta^* M$
  - Ejemplos: $(\lambda x.xx)(\lambda z.z) \to_\beta^* (\lambda z.z)(\lambda z.z)$

    $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)(zw) \to_\beta^* z(zw)$

    $(\lambda z.z) \to_\beta^* (\lambda z.z)$
  - Si $M \to_\beta^* N$ y N está en forma normal (fn), entonces N es el significado de M
    - las fns sólo aparecen al final de secuencias maximales
    - en este caso se dice que N es 'la forma normal de M'

Lambda Cálculo

- ¿Está bien definida esta semántica?
- Para ver esto debemos responder las preguntas:
  - ¿Todo término tiene una forma normal?
    - No. Hay expresiones que no tienen forma normal.
    - Ejemplo: $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_{\beta}^{*} (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
  - Si la fn de un término existe, ¿es única?
    - Sí. Lo demuestra el teorema de Church-Rosser.
  - ¿Coincide esta semántica con la algebraica?
    - Sí. Debemos demostrarlo.

Lambda Cálculo

- **Teorema de Church-Rosser** (confluencia)

  Si $M \to_\beta^* P$ y $M \to_\beta^* Q$, entonces existe N tal que $P \to_\beta^* N$ y $Q \to_\beta^* N$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ P \arrow[dr, dashed, "*"'] & & Q \arrow[dl, dashed, "*"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

- **Corolario** (unicidad de las formas normales)

  Si la forma normal de un término existe, es única.

  <u>**Dem:**</u> supongamos que P y Q son fns de M (o sea, $M \to_\beta^* P$ y $M \to_\beta^* Q$). Por Church-Rosser, existe N tal que $P \to_\beta^* N$ y $Q \to_\beta^* N$. Pero como una fn sólo reduce a sí misma, entonces P y Q son iguales a N, y por ello son iguales entre sí.

Lambda Cálculo

- Equivalencia con la semántica algebraica
- **Propiedad:** Si $M \to_\beta^* N$, entonces $M \approx_{\alpha\beta} N$
  - <u>Dem</u>: sencilla, utilizando las definiciones
- **Propiedad:** Si $M \approx_{\alpha\beta} N$, entonces
  existe P tal que $M \to_\beta^* P$ y $N \to_\beta^* P$
  - <u>Dem</u>: por inducción en la demostración de $\approx_{\alpha\beta}$
- **Corolario:** cada β-clase contiene a lo sumo una forma normal (salvo renombre de variables)

Lambda Cálculo

- Se sigue un camino similar para agregar la propiedad de extensionalidad (η)
- Def: η-contracción
  - Sea $\rightarrow_\eta$ la menor relación que satisface las siguientes reglas (M,N,P,x se asumen universalmente cuantificadas):
    - si x no ocurre libre en M, (regla η)
      entonces $(\lambda x.Mx) \rightarrow_\eta M$
    - si $M \rightarrow_\eta N$, entonces (clausura contextual)
      $MP \rightarrow_\eta NP$, $PM \rightarrow_\eta PN$ y $\lambda x.M \rightarrow_\eta \lambda x.N$

Lambda Cálculo

- Esta semántica deja indefinidos a términos útiles
  - en particular aquellos que no tienen forma normal, pero que al ser aplicados reducen a una forma normal
    - Ej: $(\lambda f.f\Omega)$ y $((\lambda f.f\Omega)(\lambda z.(\lambda w.w)))$
- Para definir bien la semántica debemos
    - cambiar la noción de forma normal (a *fn a la cabeza*)
    - cambiar la noción de secuencia maximal de reducción
  - Entonces, el significado de un término es su fn a la cabeza, si esta existe
- Eso escapa al alcance de este curso

Resumen

- Se definió una semántica operacional del λ-cálculo
- Se enunciaron algunas de propiedades de dicha semántica