Procesos dinámicos en redes complejas

año 2023

Práctico N°6: Sincronización y búsqueda en redes.

Problema 1: Considere una red de N osciladores en una red de Erdős-Rényi que interactuan via pulsos [1]. La fase de cada uno de los osciladores evoluciona linealmente en el tiempo,

$$\frac{d\phi_i}{dt} = 1, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

hasta que uno cualquiera de ellos alcanza el valor umbral $\phi_{th} = 1$. Cuando esto sucede el oscilador dispara y cambia su estado y el de sus vecinos de acuerdo a la siguiente regla:

$$\phi_i \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_i \rightarrow 0, \\ \phi_j \rightarrow \phi_j + \Delta(\phi_j), \end{cases}$$

donde $j \in \mathcal{V}(i)$ y $\mathcal{V}(i)$ es el conjunto de los vecinos del nodo i. Además $\Delta(\phi) = \epsilon\phi$ con $\epsilon > 0$. Desarrolle un programa que implemente la dinámica de estos osciladores en una red de Erdös-Renyi no direccionada para distintos valores de la conectividad $C = pN$ donde p es la probabilidad de conectar dos nodos. Evalue el siguiente parámetro para cuantificar el grado de sincronización de los osciladores

$$m \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [1 - \phi_i(t_1^+)],$$

donde t_1^+ es el tiempo al cual el oscilador $\phi_1 = 0$.

Partiendo de una configuración inicial aleatoria para las fases:

a) Realice un gráfico de m vs t con los siguientes valores para los parámetros $N = 300$, $p = 0{,}2$ y $\epsilon = 0{,}01$. Realice un promedio sobre 10 redes y 10 realizaciones. Determine el tiempo de sincronización T definido como el valor de t al cual $m = 1$.

b) Considere dos redes con $N = 100$ y $N = 300$. Repita los cálculos del punto anterior para determinar T usando los siguientes valores de $p = 0{,}05$, $0{,}1$, $0{,}2$ y $0{,}4$. Obtenga un gráfico log-log de T vs $l = p\frac{N(N-1)}{2}$ para los dos valores de N. Ajustando una ley de potencias determine el exponente.

Problema 2: Muestre que el algoritmo de PageRank definido como,

$$P_R(i) = \frac{q}{N} + (1-q) \sum_j x_{ji} \frac{P_R(j)}{k_{out,j}}$$

donde x_{ji} son los elementos de la matriz de adyacencia y $k_{out,j}$ es grado saliente del nodo j, puede expresarse como,

$$\vec{P}_R = \frac{q}{N} \vec{1} [\mathbb{I} - (1-q)\mathbb{D}^{-1}\mathbb{X}]^{-1} = \frac{q}{N} \vec{1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n [\mathbb{D}^{-1}\mathbb{X}]^n$$

donde $\mathbb{X}$ es la matriz de adyacencia y $\mathbb{D}$ es la matriz diagonal con elementos $D_{ii} = \text{máx}(k_{out,i}, 1)$. Considerando la siguiente matriz de adyacencia,

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

encuentre $\vec{P}_R$ y analice el resultado graficando la red.

Problema 3: Considerando que la probabilidad de que un caminante—en una red no direccionada y conexa—visite el sitio i al tiempo t dado que partió de algún sitio i_0 a $t = 0$, esta dada por

$$\partial_t P(i) = -\left(\sum_j x_{ij} d_{ij}\right) P(i) + \sum_j x_{ji} d_{ji} P(j),$$

donde d_{ij} tasa de transición del nodo i a j y x_{ij} son los elementos de la matriz de adyacencia.
a) Pruebe que en el estado estacionario se cumple,

$$\vec{P} = \vec{P}\mathbb{R},$$

donde los elementos de la matriz $\mathbb{R}$ son, $R_{ij} = x_{ij} d_{ij}$.

En el caso de que el caminante tenga un sesgo las probabilidades de transición d_{ij} se pueden expresar como,

$$d_{ij} = \frac{f_j}{\sum_r x_{ir} f_r},$$

donde f es una función que depende del nodo, por ejemplo del grado.
b) Verifique que,

$$P(i) = \frac{f_i \sum_j x_{ij} f_j}{\mathcal{N}},$$

es solución del estado estacionario. Encuentre $\mathcal{N}$ y exprese $P(i)$ para el caso en que f_i es constante.

Referencias

[1] X. Guardiola, A. Díaz-Guilera, M . Llas, and C. J. Pérez, Synchronization, diversity, and topology of networks of integrate and fire oscillators, Phys. Rev. E **62** (2000) 5565.