

Procesos dinámicos en redes complejas

año 2023

Práctico N°5: Modelo de Ising

Problema 1: Considere el Hamiltoniano del modelo de Ising ($\sigma = \pm 1$) montado sobre una red no direccionada de N sitios, en la aproximación de campo medio,

$$H = -J \sum_{i \neq j} a_{ij} \sigma_i \langle \sigma_j \rangle - h \sum_i \sigma_i,$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz de adjacencia y $J > 0$ y $\langle \sigma_j \rangle$ es el valor medio de la magnetización en el sitio j .

- i) Calcule la función partición del sistema,

$$Z_{CM} = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[-\beta H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)],$$

donde $\sum_{\{\sigma_i\}} = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \dots \sum_{\sigma_N}$

- ii) muestre que por autoconsistencia en esta aproximación la magnetización de cada sitio i , está dada por,

$$\langle \sigma_i \rangle = \tanh \left(\beta J \sum_j a_{ij} \langle \sigma_j \rangle + \beta h \right)$$

Problema 2: Considere una cadena de espines Ising con condiciones periódicas e interacciones a primeros vecinos ferromagnéticas. Cada espín a su vez puede interactuar con probabilidad p con un nodo cualquiera del anillo de espines, también ferromagnéticamente, formando una red de mundo pequeño¹. Desarrolle un programa que implemente una dinámica de Glauber en los espines de la red a temperatura $T = 0$. Es decir, un cambio en el estado de un espín individual $\sigma \rightarrow \sigma'$ sigue la siguiente regla de aceptación, si $\Delta E < 0$ se acepta, si $\Delta E = 0$ se acepta con probabilidad 0,5 y si $\Delta E > 0$ no se acepta el cambio. Estudie esta dinámica en un anillo con 10^5 nodos que parte de una configuración de espines completamente aleatoria y que se deja equilibrar 10^6 pasos de Monte Carlo (MCS).

- a) Calcule la función correlación de dos puntos $C(r, t) = \langle \sigma_i(t) \sigma_{i+r}(t) \rangle$ a $t = 10^6$ usando redes generadas con los siguientes valores de $p = 0,01, 0,02, 0,04, 0,06$ y $0,1$.
- b) Grafique la longitud de correlación ξ , definida como la distancia a la cual $C(r, t) = 0,5$ en función de p y determine la pendiente de la recta.
- c) Grafique la función correlación en función de r/ξ para distintos valores de p verificando que las curvas escalan de esa manera. Utilice para p los valores del punto a).

¹Interface motion and pinning in small-world networks, Denis Boyer and Octavio Miramontes, Phys. Rev. E 67, 035102R 2003.