Procesos dinámicos en redes complejas

año 2023

Práctico N°2: Matemática[1]

Problema 1: Sea $\mathbb{A}$ la matriz de adyacencia de una red no dirigida y $\mathbf{1}$ el vector columna cuyos elementos son todos iguales a 1. En término de estas cantidades derive expresiones para:

a) el vector $\mathbf{k}$ cuyos elementos son los grados k_i de los vertices;

b) el número m de conexiones en la red;

c) la matriz $\mathbb{N}$ cuyos elementos N_{ij} es igual al número de vecinos comunes de los vertices i y j;

d) el número total de triángulos en la red, donde un triángulo significa tres vértices, cada uno conectado a los otros dos.

Problema 2: Considere una red no dirigida con matriz de adyacencia $\mathbb{A}$. La centralidad por grado x_i del nodo i esta dada por el grado del nodo, es decir $x_i = k_i$. Muestre que la centralidad por grado $\vec{x}$ de la red no dirigida satisface la siguiente ecuación

$$\vec{x} = \mathbb{A}\mathbb{D}^{-1}\vec{x},$$

donde $\mathbb{D}$ es la matriz diagonal con elementos $D_{ii} = \kappa_i = \text{máx}(k_i, 1)$

Problema 3: Considere las siguientes dos redes de la figura 1. Donde (a) es una red dirigida y (b) una red bipartita. Escriba:

a) la matriz de adyacencia de la red (a);

b) la matriz de cocitaciones de la red (a);

c) la matriz de incidencia de la red (b);

d) la matriz de proyección, para la proyeccion de la red (b) en sus vértices negros;

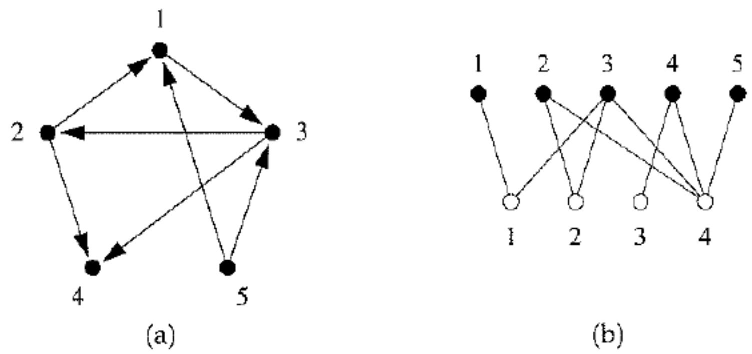

Figura 1:

[1]Mark Newman, Networks: An introduction, Cap. 6.

Problema 4: Considere una red acíclica dirigida con n vértices, denominados $i = 1...n$. Los vértices se encuentran ordenados de manera que siempre las conexiones de vértices de mayor denominación van a los vértices de menor denominación.

a) Encuentre expresiones para el número total de conexiones entrantes a los vértices $1...r$ y otra para el número total de conexiones salientes de los vértices $1...r$, en término de los grados entrantes y salientes de los vértices k_i^{in} y k_i^{out}, respectivamente.

b) Encuentre una expresión para el número total de vértices que salen del $r + 1...n$ y van a los nodos $1...r$

c) Muestre que en toda red acíclica los grados entrantes y salientes deben satisfacer

$$k_r^{out} \leq \sum_{i=1}^{r-1} (k_i^{in} - k_i^{out})$$

para todo r.

Problema 5: Considere una red no dirigida que forma un anillo de 4 nodos y 4 conexiones. Obtenga la matriz de adyacencia y sus autovalores κ_i. Empleando la expresión para el número de ciclos de longitud r,

$$L_r = \sum_{i=1}^{4} \kappa_i^r,$$

calcule el numero de ciclos de longitud $r = 2$ y $r = 4$ e interprete el resultado.

Problema 6: *C*onsidere una red bipartita, con sus dos tipos de vértices, y suponga que hay n_1 tipos de vértices 1 y n_2 tipos de vértices 2. Muestre que el valor medio de c_1 y c_2 de los grados de los dos tipos de nodos están relacionados de la siguiente manera.

$$c_2 = \frac{n_1}{n_2} c_1$$

Problema 7: *C*onsidere una red planar conectada con n vértices y m conexiones. Sea f el número de caras de la red, i.e., areas confinadas por las conexiones cuando la red es dibujada en forma planar. El exterior de la red, es decir el área que se extiende hacia el infinito en todos los lados, es también considerado una cara. La red puede tener muchas conexiones y auto-conexiones (ver figura 2).

a) escriba los valore de n, m, y f para la red con un único vértice y ninguna conexión;

b) Cómo cambian los valores n, m y f cuando se agrega un nodo con una conexión y se conecta a un nodo existente de la red;

c) Cómo cambian los valores n, m y f cuando se agrega una nueva conexión entre dos nodos existentes (o una auto-conexión agregada a un nodo) de manera que se mantenga la planaridad de la red.

d) Derive por inducción una relación entre los valores de n, m y f para toda red planar conectada.

e) Suponiendo que nuestra red es simple (no contiene conexiones multiples ni auto-conexiones). Muestre que el grado medio de estas redes es extrictamente menor que 6.

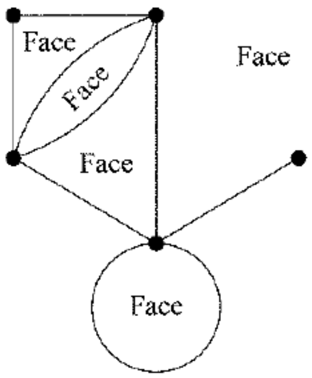

Figura 2:

Problema 8: Considere una red con N nodos con una distribución de grado de ley de potencia

$$P(k) = Ck^{-\gamma}$$

donde C es un factor de normalización y el exponente $\gamma > 1$. Asuma que el grado máximo es K está dado por,

$$K = \text{mín}(N, N^{1/(\gamma-1)}),$$

y que el grado mínimo es $k_{min} = 1$. Usando la aproximación continua de $P(k)$:

a Determine el valor de C.

b Evalue $\langle k \rangle$ y $\langle k^2 \rangle$ para $\gamma \in (1, 2]$, $\gamma \in (2, 3]$ y $\gamma \in (3, \infty)$.

c ¿Cuando la red es libre de escala?

Problema 9: Muestre que el coeficiente k_{nn}, en función del grado de los nodos,

$$k_{nn}(k) = \frac{1}{N_k} \sum_{i/k_i=k} k_{nn,i},$$

donde N_k es número de nodos de grado k y $k_{nn,i}$ es el coeficiente asociado al nodo i,

$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} k_j,$$

se puede expresar como,

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k).$$