Guía 6

Probleme 2

$$P_R(i) = \frac{q}{N} + (1-q)\sum_j \frac{x_{ji}\, P_R(j)}{k_{out,j}} \qquad (1)$$

Notemos por un lado que en notación vectorial

$$\frac{q}{N} \rightarrow \frac{q}{N}\vec{1}\,\mathbb{I}$$

Por otro lado,

$$\sum_j x_{ji} \longrightarrow \vec{1}\,\mathbb{X}$$

$$\Rightarrow \sum_j \frac{x_{ji}\, P_R(j)}{k_{out,j}} \rightsquigarrow \left(\vec{1}\, D^{-1}\,\mathbb{X}\right)\vec{P_R}$$

Entonces la ec. (1) en notación vectorial se escribe

$$\vec{P_R} = \frac{q}{N}\vec{1} + (1-q)\vec{1}\,\mathbb{D}^{-1}\mathbb{X}\,\vec{P_R}$$

Luego

$$\left[\mathbb{I} - (1-q)\,\vec{1}\,\mathbb{D}^{-1}\mathbb{X}\right]\vec{P_R} = \frac{q}{N}\vec{1}$$

Tomamos la inversa de la matriz que multiplica a $\vec{P_R}$ por ambos lados y llegamos al resultado deseado

$$\vec{P_R} = \frac{q}{N}\vec{1}\left[\mathbb{I} - (1-q)\,\mathbb{D}^{-1}\mathbb{X}\right]^{-1}$$

El desarrollo en series de potencia es el desarrollo en Taylor de la expresión hallada, en potencias de $(1-q)$, asumiendo $(1-q) < 1$. Es decir

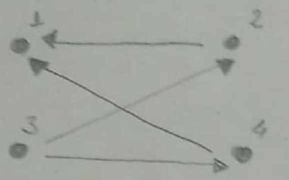
$$\frac{q}{N} \vec{1} \left[\mathbb{I} - (1-q) \mathbb{D}^{-1} \mathbb{X} \right]^{-1} = \frac{q}{N} \vec{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n \left[\mathbb{D}^{-1} \mathbb{X} \right]^n \right)$$

Ejemplo

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos la notación de Barrat, es decir

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si un enlace apunta desde } i \text{ a } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0,5 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Asumimos $q = 0,85$, siguiendo sugerencia del paper de Brin y Page, 1998

$$\vec{P}_R = \frac{0,85}{4} (1,1,1,1) \left[\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} - 0,15 \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0,5 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \frac{0,85}{4} (1,1,1,1) \left[\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} - 0,15 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \frac{0,85}{4} (1,1,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,15 & 1 & 0 & 0 \\ 0,225 & 0,075 & 1 & 0,075 \\ 0,15 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0,28103125 \quad 0,2284375 \quad 0,2125 \quad 0,2284375 \right)$$

- $P_{R(2)} = P_{R(4)}$, puesto que tienen mismo grado de salida
- $\max(\vec{P}_R) = P_{R(1)}$, puesto que es el nodo que tiene más conexiones entrantes

Problema 3

$$\partial_t P_{(i)} = -\left(\sum_j x_{ij} d_{ij}\right) P_{(i)} + \sum_j x_{ji} d_{ji} P_{(j)}$$

a) En estado estacionario $\partial_t P_{(i)} = 0$

$$\left(\sum_j x_{ij} d_{ij}\right) P_{(i)} = \left(\sum_j x_{ji} d_{ji} \quad P_{(j)}\right)$$

$$\underbrace{\left(\sum_j \frac{x_{ij} f_j}{\sum_r x_{ir} f_r}\right)}_{=1} P_{(i)} = \sum_j R_{ij} P_{(j)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{P}\,\mathbb{R}}$$

b)

$$\left[\vec{P}\,\mathbb{R}\right]_i = \sum_j P_{(j)} R_{ji}$$

$$\left[\vec{P}\,\mathbb{R}\right]_i = \sum_j f_j \frac{\sum_k x_{jk} f_k}{\eta} x_{ji} d_{ji} = \sum_j \sum_k \cancel{x_{jk}} f_k \, x_{ji} \frac{f_i}{\cancel{\sum_r x_{jr} f_r}}$$

$$= \sum_j \frac{f_j}{\eta} x_{ji} f_i$$

$$= f_i \sum_j \frac{x_{ji} f_j}{\eta} \quad , \text{ como } x_{ji} = x_{ij} \text{ (red no direccionada)}$$

$$\left(\vec{P}\,\mathbb{R}_1\right)_i = \frac{f_i \sum_j x_{ji} f_j}{\eta}$$

Para hallar η, podemos pedir $\sum_i (\vec{P}\,\mathbb{R})_i = 1$

$$\Rightarrow \sum_i f_i \sum_j x_{ji} f_j = \eta$$

Cuando $f_i = c \ \forall$,

$$\eta = \sum_i c^2 \sum_j x_{ij} = c^2 k(i),$$

con c^2 una constante de normalización, que debe ser el inverso de la suma de los grados de todos los nodos.