Procesos dinámicos en redes complejas

año 2023

Práctico N°7: Epidemias e inmunización en redes heterogéneas

Problema 1: Considere un modelo SIS con infectividad $\lambda = \beta/\mu$ sobre una red sin correlaciones con una distribución de grado $P(k)$. En este modelo la probabilidad de que un nodo de grado k este infectado, ρ_k, está dada por,

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k + \lambda k(1-\rho_k)\Theta(\lambda),$$

donde,

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)\rho_k.$$

a) usando la aproximación lineal para tiempos cortos muestre que el tiempo característico para propagación de la epidemia es,

$$\tau = \frac{\langle k\rangle}{\lambda\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}.$$

b) Considere de ahora en más la dinámica a tiempos largos y asuma autoconsistentemente que $\Theta(\lambda)$ es conocida. Encuentre la solución estacionaria para ρ_k.

c) Verifique que por autoconsistencia $\Theta(\lambda)$ satisface,

$$\Theta = \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)\frac{k\lambda\Theta}{1+k\lambda\Theta}.$$

d) Muestre que en esta aproximación el modelo SIS predice una fase endémica para

$$\lambda > \lambda_c = \frac{\langle k\rangle}{\langle k^2\rangle}.$$

e) Considere una red de **BA** con distribución $P(k) = 2m^2k^{-3}$ en la aproximación del contínuo, donde m es el grado mínimo de la red. Muestre que en esta aproximación [1], para $\lambda \ll 1$ se cumple,

$$\rho \simeq 2\exp[-1/m\lambda],$$

donde $\rho = \int_m^\infty P(k)\rho_k dk$ es la prevalencia de la enfermedad. ¿Existe un umbral para epidemia?

Problema 2: Consideremos el proceso de *inmunización optimizada por bloques* [2] en el modelo SIS

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k + \lambda_k k(1-\rho_k)\Theta(\lambda),$$

donde $\lambda_k = \lambda(1-g_k)$. Si elegimos g_k de modo que $\lambda(1-g_k)k = \tilde{\lambda}$, donde $\tilde{\lambda}$ es una constante, luego la equación anterior no depende de k, es decir,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho + \tilde{\lambda}(1-\rho)\Theta(\lambda)$$

a) Muestre que la inmunización crítica para que no se dispare la epidemia es,

$$g_k^c = 1 - \frac{1}{k\lambda} \quad \text{donde} \quad k > \lambda^{-1} \quad \text{para que} \quad g_k^c > 0$$

b) Dado que $k > \lambda^{-1}$ la fracción crítica total de nodos inmunizados es,

$$g_c = \sum_{k>\lambda^{-1}} \left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right) P(k)$$

usando al aproximación del continua muestre que en el modelo de **BA** ($P(k) = 2m^2k^{-3}$),

$$g_c = \frac{1}{3}(m\lambda)^2.$$

Problema 3: Consideremos ahora el modelo del problema 1 con *inmunización dirigida* [2] donde se remueven los nodos de grado mayor a k_f de modo que la fracción de nodos removidos es,

$$g = \sum_{k>k_f} P(k),$$

es decir que $k_f(g)$ es una función de g. Podemos además definir la probabilidad de que una conexión apunte a un nodo removido en una red no correlacionada como,

$$p(g) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k>k_f(g)} kP(k),$$

además, después de la inmunización la distribución se modifica de la siguiente manera,

$$P_g(k) = \sum_{q \geq k} p(q) \binom{q}{k} (1-p)^k p^{q-k},$$

a) Muestre que,

$$\begin{aligned} \langle k \rangle_g &= (1-p)\langle k \rangle_t \\ \langle k^2 \rangle_g &= (1-p)^2 \langle k^2 \rangle_t + p(1-p)\langle k \rangle_t \end{aligned}$$

donde $\langle k^n \rangle_g = \sum_{k \geq m}^{k_f} k^n P_g(k)$ y $\langle k^n \rangle_t = \sum_{k \geq m}^{k_f} k^n P(k)$

b) y que en el umbral de la epidemia se cumple,

$$\lambda^{-1} = \frac{\langle k^2 \rangle_t}{\langle k \rangle_t} [1 - p(g_c)] + p(g_c).$$

Considerando el modelo de **BA** en la aproximación del continuo. Muestre que,

c) el corte en el grado debido a los nodos inmunizados es,

$$k_t = mg^{-1/2},$$

d) la probabilidad de llegar a un nodo removido por una conexión,

$$p(g) = g^{1/2},$$

e) la fracción crítica de nodos inmunizados es,

$$g_c \simeq \exp(-\frac{2}{m\lambda}).$$

Referencias

[1] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani, *Epidemic dynamics and endemic states in complex networks*, Phys. Rev. E **63** (2001) 066117.

[2] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani, *Immunization of complex networks*, Phys. Rev. E **65** (2002) 036104.