Trabajo Práctico N° 5

Problema 1

(i) $\mathcal{H} = -J\sum_{i\neq j} a_{ij}\,\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i \quad \rightarrow$ Hamiltoniano Ising ferromagnético $(J>0)$

a_{ij}: Elem. matriz de adyacencia.

Aproximación de campo medio: $\sigma_j \rightsquigarrow \langle\sigma_j\rangle$

$$\mathcal{H}_{CM} = -J\sum_{i\neq j} a_{ij}\,\sigma_i\langle\sigma_j\rangle - h\sum_i \sigma_i$$

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{\beta\left(J\sum_{i\neq j} a_{ij}\,\sigma_i\langle\sigma_j\rangle + h\sum_i \sigma_i\right)\right\}$$

$$= \sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_N} \exp\left\{\cancel{\beta}\sum_i \beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\sigma_i\right\}$$

$$= \sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_N}\prod_i^N \exp\left\{\beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\sigma_i\right\}$$

$$= \sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_{N-1}}\prod_i^{N-1} \exp\left\{\beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\sigma_i\right\}\left(\exp\left\{\beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\right\} + \exp\left\{-\beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\right\}\right)$$

Podemos ver que el término entre paréntesis es $2\cosh\left(\beta J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right]\right)$.

Además, el proceso puede hacerse iterativamente; es decir, definiendo

$$z_i = 2\cosh\left[\beta\left(J\left[\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle\right]+h\right)\right]$$

se tiene que

$$\mathcal{Z} = \prod_i z_i^{N} = 2\prod_i^{N}\cosh^{N}\left(\beta\left[J\left(\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle\right)+h\right]\right).$$

(ii)

$$\langle\sigma_i\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{\{\sigma\}}\sigma_i\exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma))$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_N}\sigma_i\exp\left[\beta\left(J\sum_i\left(\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right)\right)\sigma_i\right]$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_N}\sigma_i\prod_i^{N}\exp\left[\beta\left(J\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right)\sigma_i\right]$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{\sigma_1}\cdots\sum_{\sigma_{N-1}}\sigma_i\prod_i^{N-1}\exp\left[\beta\left(J\sum a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right)\sigma_i\right]\left(\ldots\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\ldots\right) = \exp\left(\beta\left(J\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right)\right) - \exp\left(-\beta\left(J\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + h\right)\right)$$

$$= 2\,\mathrm{senh}\left(\beta J\sum_j a_{ij}\langle\sigma_j\rangle + \beta h\right)$$

En la clase 12 se vio que

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)) = \frac{1}{Z_i} \sum_{\sigma_i} \sigma_i \exp\Big(\beta J \sum_j a_{ij} \langle \sigma_j \rangle + \beta h\Big)$$

$$= \frac{2 \operatorname{senh}\Big(\beta\big(J \sum_j a_{ij} \langle \sigma_j \rangle + h\big)\Big)}{2 \cosh\Big(\beta\big(J \sum_j a_{ij} \langle \sigma_j \rangle + h\big)\Big)} = \tanh\Big(\beta\big(J \sum_j a_{ij} \langle \sigma_j \rangle + h\big)\Big)$$