# Trabajo Práctico N° 4

## Problema N° 1

a) Partimos de considerar que a un tiempo dado, el nro de conexiones que recibe un nodo $i$ es $m\Pi_i = \frac{m\ (k_i + A)}{\sum_j (k_j + A)}$. Por lo tanto,

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = \frac{m\ k_i + A}{\sum_j (k_j + A)} \qquad (1)$$

Supongamos que la red a $t=0$ tiene una cantidad de nodos $n_0$ y de enlaces $m_0$. Entonces el denominador de (1) a tiempo $t$ se escribe

$$\sum_j (k_j + A) = \underbrace{\sum_j k_j} + \underbrace{\sum_j A} \qquad (2)$$

$$= 2(m_0 + mt) + (n_0 + t)A$$

Para $t \gg 1$ se puede hacer la siguiente aproximación

$$\sum_j (k_j + A) = 2(m_0 + mt) + (n_0 + t)A$$
$$\approx 2mt + tA = t(2m + A)$$
$$= mt\left(2 + \frac{A}{m}\right)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{\cancel{m}\ (k_i + A)}{\cancel{m}t\ (2 + A/m)} \Rightarrow \frac{dk_i}{k_i + A} = \frac{1}{2 + A/m} \frac{dt}{t}$$

$$\int_m^{k_i} \frac{dk_i}{k_i + A} = \frac{1}{2 + A/m} \int_{t_i}^{t} \frac{dt}{t}$$

donde $t_i$ es el tiempo de ingreso del nodo $i$.

$$\ln \frac{k_i + A}{m+A} = \ln\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{(2+A/m)}}$$

$$k_i(t) = (m+A)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{\left(2+\frac{A}{m}\right)}} - A$$

b) Seguimos la idea de la clase 8, en la que se vio que en la aproximación de campo medio vale

$$P_{(t_i < T)} = \frac{T}{t}, \quad \text{con } t_i < T \leq t$$

Luego consideremos

Del inciso anterior.

$$P_{(k_i(t) > k)} = P\left((m+A)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2+\frac{A}{m}}} - A > k\right)$$

$$= P\left(\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2+A/m}} > \frac{k+A}{m+A}\right)$$

$$= P\left(\frac{t}{t_i} > \left(\frac{k+A}{m+A}\right)^{2+A/m}\right)$$

$$= P\left(t_i < \underbrace{t\left(\frac{m+A}{k+A}\right)^{2+A/m}}_{=T}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{t}}\,\cancel{t}\left(\frac{m+A}{k+A}\right)^{2+A/m}$$

Luego $P(k_i \leq k) = 1 - P(k_i > k) = 1 - \left(\frac{m+A}{k+A}\right)^{2+A/m}$

Y finalmente $p(k) = \frac{dP(k_i \leq k)}{dk} = \left(2+\frac{A}{m}\right)(A+m)^{2+\frac{A}{m}}\,(A+k)^{-(3+A/m)}$