Trabajo Práctico N° 2

Problema 1

- $\overleftrightarrow{A}$: Matriz de adyacencia
- $\vec{1}$: Vector columna de unos

(a)

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \qquad (6.19 \text{ Newman})$$

Por otro lado,

$$(\overleftrightarrow{A}\vec{1})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(1) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = k_i = (\vec{k})_i$$

Esto implica que $\boxed{\vec{k} = \overleftrightarrow{A}\vec{1}}$

(b) En un grafo no dirigido, los enlaces tienen dos extremos, por lo tanto si en un grafo hay m enlaces, entonces hay 2m extremos. Pero el número total de extremos debe ser igual a la suma de los grados de todos los sitios de la red. Por lo tanto,

$$2m = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} (\overleftrightarrow{A}\vec{1})_i,$$

por la ecuación hallada en el inciso (a). Por otro lado

$$\vec{1}\cdot\vec{k} = \sum_{i=1}^{n} k_i = \vec{1}^{T}\overleftrightarrow{A}\vec{1}.$$

Esto implica que

$$2m = \vec{1}^{T}\overleftrightarrow{A}\vec{1}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{2}\vec{1}^{T}\overleftrightarrow{A}\vec{1}}$$

(c) La ec. 6.1 del libro de Newman define los elementos A_{ij} de la matriz de adyacencia $\overleftrightarrow{A}$:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si hay un enlace entre los sitios } i \text{ y } j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De acuerdo con esta definición, si dos sitios i,j de la red comparten un vecino k entonces $A_{ik} = A_{jk} = 1$. Entonces para el producto $A_{ij} A_{i'j}$ vale que

$$A_{ik} A_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ y } j \text{ comparten el vecino } k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sumando sobre todos los k, el número de vecinos comunes N_{ij} entre los sitios i,j es

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A^{T}_{kj}$$

que es el elemento ij de la matriz $\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{A}^{T}$.

$$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{N} = \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{A}^{T}}$$

(d) Un loop triangular en una red es un camino de longitud 3, que empieza y termina en el mismo sitio i.

La ec. 6.32 de Newman da una expresión para el número de loops de longitud r en un grafo con matriz de adyacencia $\overleftrightarrow{A}$:

$$L_r = \mathrm{Tr}\, \overleftrightarrow{A}^{r}$$

Para el caso $r=3$, recuperamos el número de loops triangulares en el grafo, L_3:

$$\boxed{L_3 = \mathrm{Tr}\, \overleftrightarrow{A}^{3}} \; *$$

* Si queremos descontar permutaciones/inversiones, hay que dividir este valor por 6

$$\boxed{\frac{1}{6} \mathrm{Tr}\, \overleftrightarrow{A}^{3}}$$

(2) (3)

Problema 2

Si los elementos de $\overleftrightarrow{D}$ son

$$D_{ij} = \max(k_i, 1)\, \delta_{ij},$$

entonces los elementos D^{-1}_{ij} son simplemente

$$D^{-1}_{ij} = \frac{1}{\max(k_i, 1)}\, \delta_{ij}$$

Luego los elementos de la matriz producto $\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}$ son

$$\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} D^{-1}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ik}}{\max(k_i, 1)}\, \delta_{kj} = \frac{A_{ij}}{\max(k_i, 1)}$$

Entonces el elemento i del vector $\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}\vec{x}$ es

$$\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}\vec{x}\right)_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}\right)_{ij} \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij}}{\max(k_j, 1)}\, k_j$$

Dos casos a evaluar:

- $k_j > 1 \Rightarrow \max(k_j, 1) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij} k_j}{\max(k_j, 1)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = K_i = x_i$ ✓
- $k_j = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0,\ \forall j \in [1, n] \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij} k_j}{\max(k_j, 1)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} k_j = 0 = x_i$ ✓

$$\therefore \quad \boxed{\vec{x} = \overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{D}^{-1}\vec{x}}$$

Problema 3

(a) La definición de los A_{ij} para una matriz de adyacencia de una red dirigida es (ec. 6.5 Newman):

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si hay un enlace desde } j \text{ hacia } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz C de cocitaciones se define (ec. 6.8 Newman)

$$C = A A^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La matriz de incidencia B es una matriz $g \times n$ para una matriz de g grupos y n sitios. Sus elementos se definen (ec. 6.15):

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el sitio } j \text{ pertenece al grupo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Voy a considerar que los puntos con círculo negro son los sitios, y que los círculos blancos son los grupos. Entonces nuestra matriz B es 4×5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) La matriz pedida por el ejercicio es $P = B^T B$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4

Nota: La matriz de adyecencia de una red como la que describe el ejercicio debe ser triangular superior, por el orden de los sitios

Es decir, $A_{ij} = 0$, $j < i$

(a) Sabemos que

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \quad , \quad k_i^{out} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}$$

Conexiones entrantes:

Para calcular el número de conexiones entrantes a los sitios $i \dots r$ hay que sumar los k_i^{in} desde $i=1$ hasta $i=r$:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} k_i^{in}}$$

Conexiones salientes

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} k_{out}^{i}}$$

Escaneado con CamScanner

(b) Ese cálculo implica sumar todos los enlaces salientes para los sitios $r+1, \ldots, n$ restando los enlaces entrantes para los sitios $r+1, \ldots, n$. Los enlaces entrantes para un sitio r sólo puede venir desde enlaces $r+1 \ldots n$.

$$\sum_{i=r+1}^{n} k_i^{out} - k_i^{in}$$

(c) La expresión que se pide demostrar, en el lado derecho, es el número de conexiones entrantes para los sitios $1 \ldots r-1$, menos el número de enlaces salientes para $1 \ldots r-1$. Como sabemos que un enlace que sale de un sitio r sólo puede dirigirse a sitios $1 \ldots r-1$, entonces este "número de conexiones entrantes neto" es equivalente a la expresión hallada en el inciso anterior; considerando la contribución del sitio r:

$$\sum_{i=1}^{r-1} (k_i^{in} - k_i^{out}) = \sum_{i=r+1}^{n} (k_i^{out} - k_i^{in}) - k_r^{in} + k_r^{out}$$

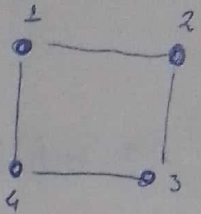
El término $\sum_{i=r+1}^{n} (k_i^{out} - k_i^{in}) - k_r^{in} \geq 0$, porque tiene en cuenta el número de conexiones salientes de nodos que son distintos a r. Para que la igualdad sea cierta debe valer que

$$k_r^{out} \leq \sum_{i=1}^{r-1} (k_i^{in} - k_i^{out}).$$

Problema 5

La red se puede representar así:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Autovalores: Soluciones de la ecuación $|A - \kappa I| = 0$

- $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$
- $\kappa_3 = 2$
- $\kappa_4 = -2$

$$\rightarrow L_2 = \sum_{i=1}^{4} \kappa_i^2 = 0 + 0 + 2^2 + (-2)^2 = 8$$

Un ciclo de longitud 2 es partir de un nodo, desplazarse hacia un nodo adyacente, y volver ~~po~~ finalmente al nodo de partida. Hay 8 formas de hacer esto en nuestro grafo no dirigido.

Ej:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
- $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
- etc.

$$\rightarrow L_4 = \sum_{i=1}^{4} 0^4 + 0^4 + 2^4 + (-2)^4 = 32$$

Hay 2 "tipos de ciclos" posibles de longitud 4 en el grafo. Un tipo es recorrer todos los sitios del grafo (recorriendo el cuadrado), lo cual se puede hacer en sentido horario y antihorario en el dibujo:

Ej: ✓ $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$
✓ $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
✓ $2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2$
✓ etc.

$\Big\}$ 8 comb. posibles

Otra forma posible es recorrer en sentido horario o antihorario dos nodos adyacentes:

Ej: ✓ $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$
✓ $1 \to 4 \to 3 \to 4 \to 1$
✓ etc.

$\Big\}$ 8 comb. posibles

También podríamos "ir y volver", una vez en sentido horario y otro en sentido antihorario, o viceversa:

Ej: ✓ $1 \to 2 \to 1 \to 4 \to 1$
✓ $1 \to 4 \to 1 \to 2 \to 1$
✓ etc.

$\Big\}$ 8 comb. posibles

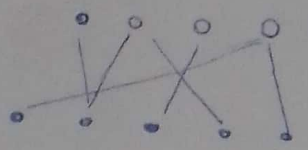
Por último, un ciclo posible sería ir y volver 2 veces entre 2 nodos conectados.

Ej: ✓ $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$
✓ $1 \to 4 \to 1 \to 4 \to 1$

$\Big\}$ 8 comb. posibles.

Esto nos da los 32 caminos posibles que nos da calcular L_4.

Problema 6



Supongamos que el conjunto de arriba es A y el de abajo B.

$$\therefore \quad \langle k_A \rangle = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} k_i = c_1$$

$$\langle k_B \rangle = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} k_j = c_2$$

Como los enlaces no puede ser entre sitios del mismo grupo, debe ser cierto que $\sum_{\substack{i=1 \\ i\in A}}^{n_1} k_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\in B}}^{n_2} k_j$, para los dos grupos A y B

Por lo tanto, juntando las dos expresiones se tiene

$$n_1 c_1 = n_2 c_2$$

$$\boxed{c_2 = \frac{n_1}{n_2} c_1}$$

Problema 7

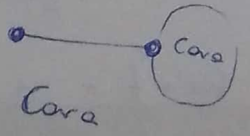
(a) Face

$n = 1$
$m = 0$
$f = 1$

(b) Agregar un nodo con una conexión = agregar un nodo auto-conectado?

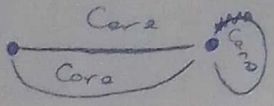
Si es así, el nuevo grafo es

$n = 2$
$m = 2$
$f = 2$

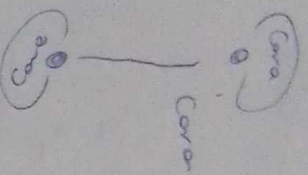


Para $x \geq 7$ ...

(c)



ó bien



En ambos casos,

$$n = 2$$
$$m = 3$$
$$f = 3$$

(d) Este ej lo resolví con un poco de ayuda de la literatura. La fórmula que se pide probar por inducción es la fórmula de Euler para redes planares:

$$n - m + f = 2.$$

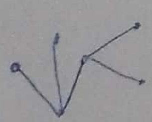
Demostración:

- Caso base: inciso (a) $\rightarrow$ $n=1$, $m=0$, $f=1$

$$n - m + f = 1 - 1 + 2 = 2 \quad \checkmark$$

- Supongamos ahora que la fórmula de Euler vale para grafos que tienen hasta $m-1$ enlaces, y consideremos un grafo de m enlaces.

  + Si el grafo no tiene ciclos (es un árbol), entonces además por estar conectado tiene $f=1$ y $m = n-1$, por lo tanto



$$n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2 \quad \checkmark$$

  + Si el grafo contiene al menos un ciclo, entonces lo que podemos hacer es ver que pasa si removemos un enlace del grafo conectado

El ciclo separa el plano en dos regiones, que se fusionan en una única región al quitar el enlace. Si G es el grafo original (n, m, f) y G' es el grafo con un enlace menos, entonces valen las siguientes relaciones:

(n', m', f')

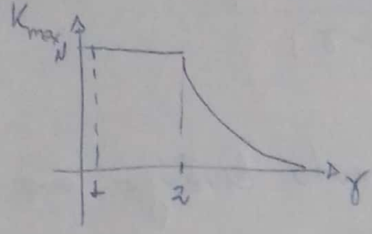
$$n' = n$$
$$m' = m - 1$$
$$f' = f - 1$$

$$\Rightarrow n' - m' + f' = n - (m-1) + (f+1) = n - m + f + 1 - 1 = 2 \checkmark,$$

lo que prueba el resultado por inducción.

Problema 8

$K_{max} = \min\left(N, N^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) \quad , \quad \gamma > 1$



- $K_{max} = N \quad (\gamma \in (1,2])$

$$1/C = \int_1^N k^{-\gamma}\, dk = \frac{1}{1-\gamma} k^{-\gamma+1} \Big|_1^N = \frac{N^{-\gamma+1} - 1}{1-\gamma}$$

$$C = \frac{1-\gamma}{N^{-\gamma+1} - 1}$$

- $K_{max} = N^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (\gamma > 2)$

$$\frac{1}{C} = \int_1^{N^{\frac{1}{\gamma-1}}} k^{-\gamma}\, dk = \frac{1}{1-\gamma} k^{-\gamma+1} \Big|_1^{N^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{1}{1-\gamma}\left(N^{\frac{-\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right)$$

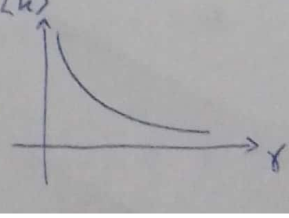
$$C = \frac{1-\gamma}{N^{\frac{-\gamma+1}{\gamma-1}} - 1}$$

$\langle k \rangle$

Caso $\gamma \in (1,2]$

$$\langle k \rangle = \int_1^N C k^{-\gamma+1}\, dk = \frac{C}{2-\gamma} k^{-\gamma+2} \Big|_1^N = \frac{1-\gamma}{2-\gamma\,(N^{-\gamma+1}-1)} k^{-\gamma+2} \Big|_1^N$$

$$= \frac{(1-\gamma)}{(2-\gamma)(N^{-\gamma+1}-1)} (N^{-\gamma+2} - 1)$$



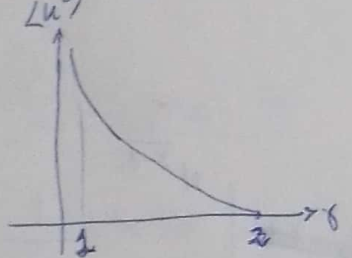
- Caso $\gamma \in (2,3]$ y $\gamma > 3$:

$$\langle k \rangle = C \int_1^{N^{\frac{1}{\gamma-1}}} k^{-\gamma+1} \, dk = \frac{(1-\gamma)}{N^{\frac{-\gamma+1}{\gamma-1}} - 1} \cdot \frac{\left(N^{\frac{-\gamma+2}{\gamma-1}} - 1\right)}{(2-\gamma)}$$

$\langle k^2 \rangle$

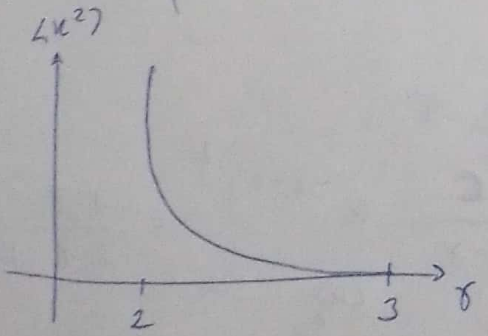
- Caso $\gamma \in (1,2]$

$$\langle k^2 \rangle = \int_1^N C \, k^{-\gamma+2} \, dk = \frac{1-\gamma}{(3-\gamma)(N^{-\gamma+1} - 1)} \left(N^{-\gamma+3} - 1\right)$$



- Caso $\gamma \in (2,3]$ y $\gamma > 3$

$$\langle k^2 \rangle = \frac{1}{N^{\frac{-\gamma+1}{\gamma-1}} - 1} \left(\frac{1-\gamma}{3-\gamma}\right) \left(N^{\frac{-\gamma+3}{\gamma-1}} - 1\right)$$



Escaneado con CamScanner

Si tomamos los límites $N \to \infty$ en las expresiones anteriores veremos que

- $1 < \gamma < 2$:

  $\langle k \rangle \to$ Diverge

  $\langle k^2 \rangle \to$ Diverge

- $2 < \gamma < 3$

  $\langle k \rangle \to$ Converge

  $\langle k^2 \rangle \to$ Diverge

- $\gamma > 3$

  $\langle k \rangle \to$ Converge

  $\langle k^2 \rangle \to$ Converge

Como dice en el libro, para un valor dado de γ todos los momentos m-ésimos para los que

$$m \geq \gamma - 1$$

divergen.

© Las redes "libres de escala" son redes con distribución de grado de tipo $P(k) = C k^{-\gamma}$, para algún $\gamma > 1$.

Problema 9

La suma se puede escribir como

$$k_{nn}(k) = \frac{1}{N_k k} \sum_{i/k_i = k} \sum_{j \in V(i)} k_j^{(i)}$$

La doble sumatoria se puede expresar en términos de la probabilidad de que el nodo i esté conectado a otros nodos con grado k':

$$\sum_{i/k_i = k} \sum_{j \in V(i)} \frac{k_j^{(i)}}{N_k k} = \sum_{k'} k' P(k'|k)$$

$$\therefore \quad k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k)$$

En la doble suma, cada término con grado $k_j = k'$ se suma tantas veces como haya vecinos con grado k' conectados a los nodos de grado

4. El denominador $\frac{1}{N_k k}$ hace que este número se pueda interpretar como esa probabilidad condicional.