“Análisis de Algoritmos”
José Helo Guzmán

```
 ___
|__    _    _   _|  _   _   __  _  |_   _   _
|    |_| | ) (_| (_| |||| (-_ | ) |_  (_) _)


|\/|  _  |_   __  _   _’ |_  .  __  _   _
|  | (_| |_  (-_ |||| (_| |_  | (__ (_) _)
```

Contenido

1. Fundamentos Matemáticos.

A continuación se presenta un repaso de los principales elementos de matemática que se utilizarán en este documento.

2. Propiedades de los Logaritmos.

Se tienen las siguientes propiedades:

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(x^y) = y*\log_a(x)$

$\log_a(x*y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$a^{(\log_k(x))} = x^{(\log_k(a))}$

$\log_a(x) = (\log_k(x) / \log_k(a))$

3. Fórmulas de Sumatorias.

$$\sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$1 + 1 + 1 + ... + 1 = n$

$$\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \left(\frac{n*(n+1)}{2} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \left(\frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} \right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i =$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \left(\frac{a^{(n+1)} - 1}{a - 1} \right) \text{ para } a \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i =$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{(n+1)} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} i*2^i =$$

$$0 + 1*2 + 2*2^2 + 2*2^3 + ... + n*2^n = (n-1)*2^{(n+1)} - 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \right) =$$

$$1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) + ... + \left(\frac{1}{n} \right) \approx \ln(n) + y, \text{ con } y = 0.5772$$

$$\sum^{n}$$

$\sum_{i=1} \log(i) \approx$

log(1) + log(2) + log(3) + ... + log(n) ≈ n*log(n)

4. Relaciones de Recurrencia.

Una secuencia numérica es una lista ordenada de números. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Enteros positivos pares:
2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Secuencia de Fibonacci:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Una secuencia de un algoritmo de ordenamiento:
0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

Una secuencia se denota usualmente por la letra “x_n” o “a_n” seguida de un subíndice. También se usa la notación alternativa x(n) o a(n).

Existen dos formas principales para definir una secuencia:

- Una fórmula general como:

t(n) = 2*n, para n ≥ 0

Tenemos que:

t(0) = 2*0 = 0

t(1) = 2*1 = 2

t(2) = 2*2 = 4

t(3) = 2*3 = 6

t(4) = 2*4 = 8

y así sucesivamente

Lo que genera la secuencia:

0, 2, 4, 6, 8, ...

- Por medio de una ecuación genérica que relaciona un término con otros términos de la secuencia, por ejemplo:

$t(0) = 0$

$t(n) = t(n-1) + n$, para $n \geq 1$

Lo que genera la secuencia:

$t(0) = 0$

$t(1) = t(0) + 1$
$t(1) = 0 + 1$
$t(1) = 1$

$t(2) = t(1) + 2$
$t(2) = 1 + 2$
$t(2) = 3$

$t(3) = t(2) + 3$
$t(3) = 3 + 3$
$t(3) = 6$

$t(4) = t(3) + 4$
$t(4) = 6 + 4$
$t(4) = 10$

y así sucesivamente.

Obtenemos la secuencia:

0, 1, 3, 6, 10, 15,...

Este último tipo de fórmulas es especialmente importante en el análisis de algoritmos. Esta fórmula se suele llamar una “ecuación de recurrencia” o “relación de recurrencia”. Observe que tiene además una condición inicial: $t(0)=0$. El número de condiciones iniciales depende de la forma de esta relación.

5. Métodos de Solución para Relaciones de Recurrencia.

El objetivo que se busca es encontrar una fórmula general que se comporte igual que la ecuación de recurrencia. Por ejemplo para:

$t(0) = 0$

$t(n) = t(n-1) + n$, para $n \geq 1$

Se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$t(n) = \left(\frac{n*(n+1)}{2} \right)$$

De manera tal que:

t(0) = 0

$$t(1) = \left(\frac{1*2}{2} \right) = 1$$

$$t(2) = \left(\frac{2*3}{2} \right) = 3$$

$$t(3) = \left(\frac{3*4}{2} \right) = 6$$

$$t(4) = \left(\frac{4*5}{2} \right) = 10$$

y así sucesivamente.

Con lo que obtenemos la secuencia:

0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

6. Sustitución Hacia Adelante.

Tenemos la siguiente relación de recurrencia:

t(0) = 0

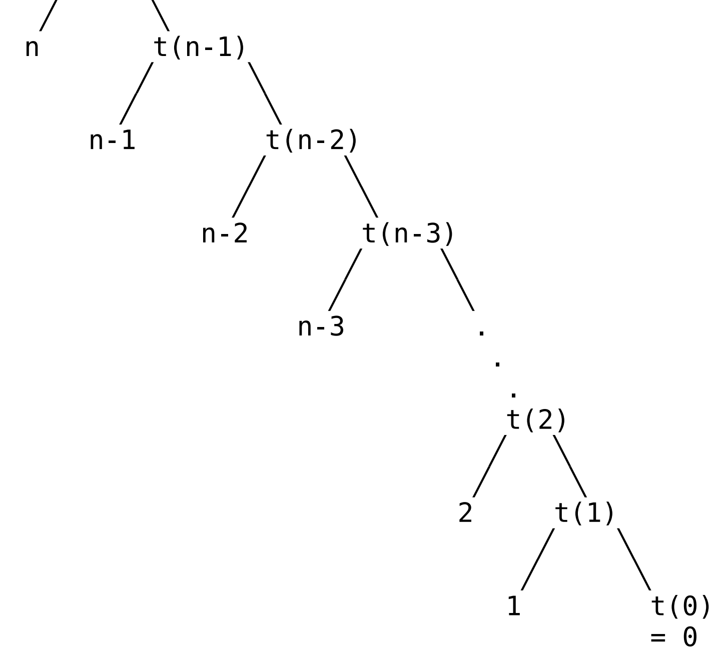
t(n) = t(n-1) + n, para n ≥ 1

Y la podemos expresar como:

t(0) = 0

t(n) = n + t(n-1), para n ≥ 1

```
    t(n)
   /    \
```



$t(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1 + 0$

$$t(n) = \left(\frac{n*(n+1)}{2} \right)$$

7. Sustitución Hacia Atrás.

Tenemos la relación:

Tenemos la siguiente relación de recurrencia:

$t(0) = 0$

$t(n) = t(n-1) + n$, para $n \geq 1$

Por facilidad en la prueba, escribimas la relación de recurrencia de esta manera:

$t(0) = 0$

$t(n) = n + t(n-1)$, para $n \geq 1$

Encontramos el valor de t(n-1) para unos cuantos pasos.

$t(n) \quad = n \quad + t(n-1)$

$t(n-1) = (n-1) + t(n-2)$

t(n-2) = (n-2) + t(n-3)

t(n-3) = (n-3) + t(n-4)

t(n-4) = (n-4) + t(n-5)

Sustituimos de manera sucesiva estos valores:

t(n) = n + t(n-1)

t(n) = n + (n-1) + t(n-2)

t(n) = n + (n-1) + (n-2) + t(n-3)

t(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + t(n-4)

t(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + t(n-5)

⋮

t(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + ... + t(0)

t(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + ... + 0

$$t(n) = \left(\frac{n*(n+1)}{2} \right)$$

>>> En Wxmaxima se obtiene:

```
load(solve_rec);
solve_rec(
t[n] = t[n-1] + n,
t[n],
t[0]=0
);
```

>>> Se puede usar esta herramienta en línea:

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences

t(0)=0, t(n)=t(n-1) + n

8. Recurrencias Lineales Homogéneas de Segundo Orden.

Desafortunadamente no todas las relaciones de recurrencia se pueden resolver utilizando los métodos anteriores. En particular existen las relaciones de recurrencia lineal de segundo orden.

Se denominan relaciones homogéneas si pueden escribirse de la siguiente forma:

$c_1*t(n) + c_2*t(n-1) + c_3*t(n-2) = 0$

Se construye la ecuación característica de la recurrencia de la forma:

$c_1*x^2 + c_2*x + c_3 = 0$

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación característica.
Entonces procedemos de acuerdo con los siguientes casos:

●● Caso 1:

Si x_1 y x_2 son reales y diferentes, entonces la solución está dada por:

$t(n) = a*(x_1)^n + b*(x_2)^n$

●● Caso 2:

Si x_1 y x_2 son iguales, tal que $x = x_1 = x_2$ entonces la solución está dada por:

$t(n) = a*(x)^n + b*n*(x)^n$

9. Ejemplo.

Se define la relación de recurrencia como:

t(0) = 7

t(1) = 16

t(n) = 5*t(n-1) - 6*t(n-2)

>>> Reescribimos la recurrencia:

t(n) = 5*t(n-1) - 6*t(n-2)

t(n) - 5*t(n-1) + 6*t(n-2) = 0

>>> Se construye la ecuación característica

$1*x^2 - 5*x + 6 = 0$

Al resolver esta ecuación se obtiene:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

Tenemos que:

$t(n) = a*(3)^n + b*(2)^n$

>>> Encontramos los valores de “a” y “b”.

$t(0) = 7$

$t(1) = 16$

$t(n) = a*(3)^n + b*(2)^n$

Por lo tanto:

$a*(3)^0 + b*(2)^0 = 7$

$a*(3)^1 + b*(2)^1 = 16$

Se tiene el sistema de ecuaciones:

$a + b = 7$

$a*3 + b*2 = 16$

Al resolverlo se obtiene:

$a = 2$

$b = 5$

>>> Se construye la solución final:

$t(n) = a*(x_1)^n + b*(x_2)^n$

$t(n) = 2*(3)^n + 5*(2)^n$

>>> En Wxmaxima:

```
load(solve_rec);
solve_rec(
t[n]= 5*t[n-1] - 6*t[n-2],
t[n],
t[0]=7, t[1]=16);
```

>>> En WolframAlpha:

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences

t(n)=5*t(n-1) - 6*t(n-2), t(0)=7, t(1)=16

10. Otro Ejemplo.

Resolvamos la relación de recurrencia dada por:

t(0) = 0

t(1) = 3

t(n) = 6*t(n-1) - 9*t(n-2)

>>> Reformulamos la Recurrencia.

t(0) = 0

t(1) = 3

t(n) - 6*t(n-1) + 9*t(n-2) = 0

>>> Se construye la ecuación característica.

$1*x^2 - 6*x + 9 = 0$

Las raíces de este polinomio están dadas por:

$x = x_1 = x_2 = 3$

>>> Construimos la primera parte de la solución:

$t(n) = a*(x)^n + b*n*(x)^n$

$t(n) = a*(3)^n + b*n*(3)^n$

>>> Encontramos los valores de “a” y “b”:

t(0) = 0

t(1) = 3

Que se convierte en:

$a*(3)^0 + b*0*(3)^0 = 0$

$a*(3)^1 + b*1*(3)^1 = 3$

Que se puede escribir como:

a = 0

a*3 + b*3 = 3

La solución está dada por:

a = 0

b = 1

>>> Solución final:

$t(n) = a*(3)^n + b*n*(3)^n$

$t(n) = 0*(3)^n + 1*n*(3)^n$

$t(n) = n*(3)^n$

>>> En Wxmaxima:

```
load(solve_rec);
solve_rec(
t[n]=6*t[n-1]-9*t[n-2],
t[n],
t[0]=0, t[1]=3);
```

>>> En Wolfram Alpha:

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences

t(0)=0, t(1)=3, t(n) = 6*t(n-1) - 9*t(n-2)

11. Recurrencias Lineales No Homogéneas de Segundo Orden.

Suponga que tenemos la siguiente relación de recurrencia:

t(0) = 0

t(1) = 3

t(n) = 6*t(n-1) - 9*t(n-2) + 4

t(n) - 6*t(n-1) + 9*t(n-2) = 4

En este caso encontramos primero una solución particular dada por:

c - 6*c + 9*c = 4

4*c = 4

c = 4/4

c = 1

Luego se busca la solución del sistema homogéneo, lo cual ya hicimos anteriormente:

t(0) = 0

t(1) = 3

t(n) - 6*t(n-1) + 9*t(n-2) = 0

La solución estaba dada por:

t(n) = $a*3^n + b*n*3^n$

Por lo tanto la solución de:

t(n) = 6*t(n-1) - 9*t(n-2) + 4

Estará dada por:

t(n) = $a*3^n + b*n*3^n + c$

t(n) = $a*3^n + b*n*3^n + 1$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

t(0) = $a*3^0 + b*0*3^0 + 1$

0 = a + 1

a = -1

t(1) = $a*3^1 + b*1*3^1 + 1$

3 = a*3 + b*3 + 1

3 = (-1)*3 + b*3 + 1

3 = -3 + b*3 + 1

3 = -2 + b*3

3 + 2 = b*3

5 = b*3

5/3 = b

b = 5/3

La respuesta general va a estar dada por”:

$t(n) = a*3^n + b*n*3^n + c$

$t(n) = (-1)*3^n + (5/3)*n*3^n + 1$

>>> En Wxmaxima tenemos:

```
load(solve_rec);
solve_rec(
t[n]= 6*t[n-1] - 9*t[n-2] + 4,
t[n],
t[0]=0, t[1]=3);
```

Cuya solución es:

t(n) = ((5*n)/3 - 1) * 3^n + 1

Que es equivalente a nuestro resultado:

$$t(n) = \left(\frac{5*n}{3} - 1 \right) * 3^n + 1$$

$$t(n) = \frac{5*n*3^n}{3} - 3^n + 1$$

$$t(n) = \left(\frac{5}{3} \right) *n*3^n - 3^n + 1$$

$$t(n) = (5/3)*n*3^n - 3^n + 1$$

$$t(n) = - 3^n + (5/3)*n*3^n + 1$$

$$t(n) = (-1)*3^n + (5/3)*n*3^n + 1$$

>>> En WolframAlpha:

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences

$t(0)=0$, $t(1)=3$, $t(n) = 6*t(n-1) - 9*t(n-2) + 4$

Tenemos el resultado de:

$t(n) = 3^{(n-1)} * (5*n - 3) + 1$

Que se puede simplificar como:

$t(n) = 3^{(n-1)} * (5*n - 3) + 1$

$t(n) = 3^{(n-1)}*5 - 3^{(n-1)}*3 + 1$

$t(n) = 5*3^{(n-1)} - 3*3^{(n-1)} + 1$

$t(n) = (5/3)*3^n - 3^n + 1$

$t(n) = (-1)*3^n + (5/3)*n*3^n + 1$

12. Recurrencia de Fibonacci.

Definamos la relación de fibonacci como:

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

>>> Reescribimos la recurrencia.

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0$

>>> Se construye la ecuación característica:

$1*x^2 - 1*x - 1 = 0$

Al resolver este polinomio se encuentran las raíces:

$$x_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$x_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

>>> Construimos la primera parte de la solución:

$$f(n) = a*(x_1)^n + b*(x_2)^n$$

$$fibo(n) = a*\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + b*\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

>>> Encontramos los valores de “a” y “b”.

Pare encontrar los valores de “a” y “b” se utiliza un sistema de ecuaciones con las condiciones iniciales:

fib(0) = 0

fib(1) = 1

Que se escriben como:

$$a*\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 + b*\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

$$a*\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + b*\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = 0$$

Y se pueden simplificar como:

a + b = 0;

$$a*\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + b*\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

Tenemos el sistema:

```
eq1: a + b = 0;

eq2: a*(1+sqrt(5))/2 + b*(1-sqrt(5))/2 = 1;
```

Al resolver el sistema con:

```
solve(
[eq1, eq2],
[a,b]
);
```

Se obtiene:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

>>> Fórmula final de Fibonacci.

Por lo que la fórmula final se puede escribir como:

$$f(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)*\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)*\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)*\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

$$f(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)*\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

$$f(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)*\left(\%phi^n - \%Phi^n \right)$$

Observe la diferencia entre la mayúscula y la minúscula

%phi = (1+√5)/2 ~ +1.61803...

$\%Phi = (1-\sqrt{5})/2 \sim -0.61803...$

Si definimos %phi:

$$\%phi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 1.6180339887...$$

$$1 - \%phi = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 - \%phi = \left(\frac{2 - (1 + \sqrt{5})}{2}\right)$$

$$1 - \%phi = \left(\frac{2 - 1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 - \%phi = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

Al sustituir %phi y (1 - %phi):

$$fibo(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) * \left(\%phi \right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) * \left(1 - \%phi \right)^n$$

$$fibo(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) * \left(\%phi^n - (1 - \%phi)^n \right)$$

$$fibo(n) = \left(\frac{\%phi^n - (1 - \%phi)^n}{\sqrt{5}} \right)$$

Adicionalmente se puede probar que:

$2*\%phi - 1 = \sqrt{5}$

Con lo que se escribe la fórmula como:

$$fibo(n) = \left(\frac{\%phi^n - (1 - \%phi)^n}{2*\%phi - 1} \right)$$

Esta es conocida como la fórmula de Binet.
Pero de igual manera todas producen un error.

Se puede programar como:

```
fibo(n):=(%phi^n - (1-%phi)^n)/(2*%phi - 1);
```

Que se puede obtener en maxima como:

```
(%i) fibtophi (fib (n));
```

>>> En Wxmaxima:

```
load(solve_rec);
solve_rec(
f[n]= f[n-1] + f[n-2],
f[n],
f[0]=0, f[1]=1);
```

>>> En WolframAlpha:

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/discrete-mathematics/recurrences

```
f(0)=0, f(1)=1, f(n) = f(n-1) + f(n-2)
```

13. Resumen.

En el presente capítulo se ha presentado un repaso de los conceptos matemáticos que se utilizarán en los siguientes capítulos.