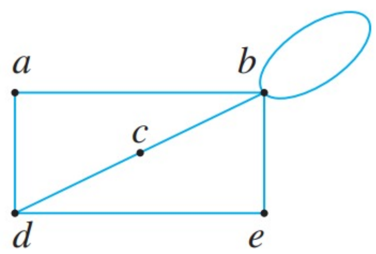
Matemática Discreta 2023
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitores José Arthur e Nicole dos Santos 25 de agosto de 2023

Lista 2

Exercício 1 Em cada item a seguir, diga se os caminhos dados no grafo são:

- Um caminho simples
- Um ciclo
- Um ciclo simples



(a) (b, b)

(b) $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$

(c) (a, d, c, b, e)

(d) (d)

Solução.

(a) Ciclo simples.

(b) Caminho. (repete arestas)

(c) Caminho simples.

(d) Caminho simples.

Exercício 2 Nos itens a seguir, desenhe um grafo tendo as propriedades dadas ou explique por que não existe tal grafo.

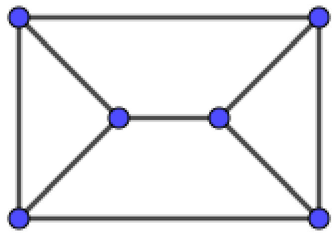
(a) Seis vértices, cada um com grau 3.

(b) Grafo simples; seis vértices tendo sequência de graus $(5, 5, 4, 3, 2, 1)$.

(c) Grafo simples; cinco vértices tendo sequência de graus $(4, 4, 4, 2, 2)$.

Solução.

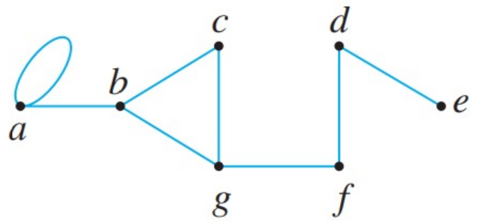
(a)



(b) Não existe. Num gráfo simples com seis vértices, o grau máximo de um vértice é 5. Além disso, como o grafo é simples, o grau de um vértice é exatamente o número de vértices ao qual ele está conectado (pois só pode se conectar uma única vez com cada um para não haver arestas paralelas e não pode se conectar consigo mesmo para não haver loop). Existe um vértice com grau máximo, fazendo com que todos os outros cinco vértices devam estar ligados a ele. Existe ainda um segundo vértice com grau máximo, fazendo todos os outros quatro vértices devam estar ligados aos dois. Desta maneira, todos os vértices (os dois com grau 5 e os outros ligados a ambos) deveriam ter grau maior ou igual a 2, mas isso seria um absurdo, pois um vértice deve ter grau 1.

(c) Não existe. Seguindo um raciocínio análogo ao do item (b), três vértices com grau máximo (neste caso, 4) forçariam todos os vértices a terem grau maior ou igual a 3, o que, de novo, seria um absurdo, porque um vértice deve ter grau 2.

Exercício 3 Encontre todos os subgrafos conexos do grafo seguinte contendo todos os vértices do grafo original e tendo o mínimo de arestas possível. Quais desses subgrafos são caminhos simples? Quais são ciclos? Quais são ciclos simples?

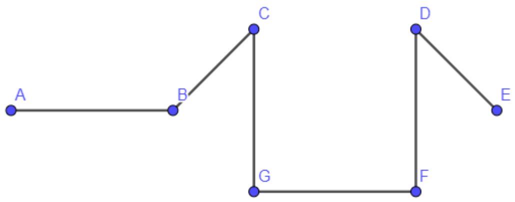


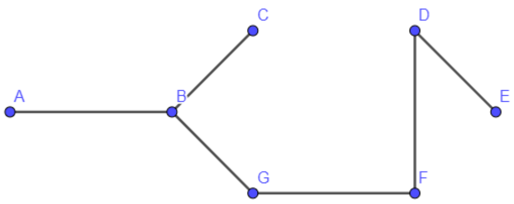
Solução. Como devemos manter todos os vértices do grafo original ($V' = V$), nos resta retirar arestas de G para formar subgrafos. As arestas que podemos retirar sem tornar o grafo desconexo são (a, a), (b, c), (c, g), (b, g), sendo que das três últimas podemos retirar apenas uma por vez. Sendo assim, os subgrafos são:

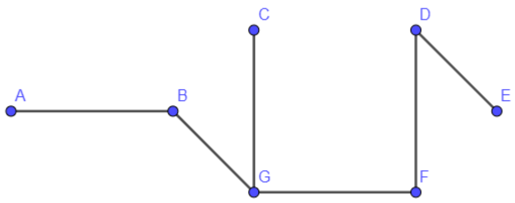
1. $V' = V$, $E1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, g), (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$
2. $V' = V$, $E1 = \{\quad, (a, b), (b, c), (b, g), (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$
3. $V' = V$, $E1 = \{\quad, (a, b), \quad, (b, g), (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$
4. $V' = V$, $E1 = \{\quad, (a, b), (b, c), \quad, (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$

5. $V' = V$, $E1 = \{ \qquad , (a, b), (b, c), (b, g), \qquad , (g, f), (f, d), (d, e)\}$
6. $V' = V$, $E1 = \{(a, a), (a, b), \qquad , (b, g), (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$
7. $V' = V$, $E1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), \qquad , (c, g), (g, f), (f, d), (d, e)\}$
8. $V' = V$, $E1 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, g), \qquad , (g, f), (f, d), (d, e)\}$

Destes, os grafos com menor número de arestas são os 3., 4. e 5. O grafo resultante de 4. é um caminho simples. Nenhum é ciclo e nenhum é ciclo simples.

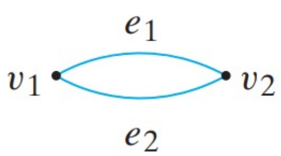




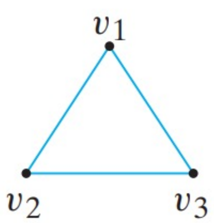


Exercício 4 Nos itens a seguir, encontre todos os subgrafos não-vazios dos grafos dados.

(a)



(b)



Solução.

(a)

1. $V' = \{v_1, v_2\}, E' = \{e_1, e_2\}$

2. $V' = \{v_1, v_2\}, E' = \{e_1 \}$
3. $V' = \{v_1, v_2\}, E' = \{ e_2\}$
4. $V' = \{v_1, v_2\}, E' = \{\}$
5. $V' = \{v_1 \}, E' = \{\}$
6. $V' = \{ v_2\}, E' = \{\}$

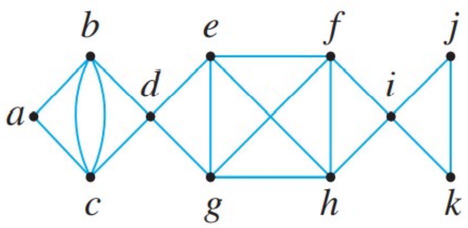
(b)

1. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{e_1, e_2, e_3\}$
2. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{ e_2, e_3\}$
3. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{e_1, e_3\}$
4. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{e_1, e_2 \}$
5. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{e_1 \}$
6. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{ e_2 \}$
7. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{ e_3\}$
8. $V' = \{v_1, v_2, v_3\}, E' = \{\}$
9. $V' = \{v_1, v_2 \}, E' = \{e_1 \}$
10. $V' = \{v_1, v_2 \}, E' = \{\}$
11. $V' = \{ v_2, v_3\}, E' = \{ e_2 \}$
12. $V' = \{ v_2, v_3\}, E' = \{\}$
13. $V' = \{v_1, v_3\}, E' = \{ e_3\}$
14. $V' = \{v_1, v_3\}, E' = \{\}$
15. $V' = \{ v_3\}, E' = \{\}$
16. $V' = \{v_1 \}, E' = \{\}$
17. $V' = \{ v_2 \}, E' = \{\}$

Exercício 5 Nos itens a seguir, decida se o grafo tem um ciclo euleriano. Se o grafo tiver um ciclo euleriano, exiba um.

(a) Grafo do Exercício 3

(b)

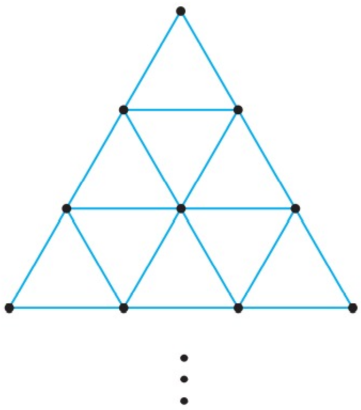


Solução.

(a) Não tem.

(b) Tem. Um ciclo euleriano d grafo é $(a, b, c, b, d, e, f, i, k, j, i, h, f, g, h, e, g, d, c, a)$.

Exercício 6 O grafo a seguir continua até uma profundidade arbitrária finita. Este grafo contém um ciclo euleriano? Em caso positivo, descreva um.



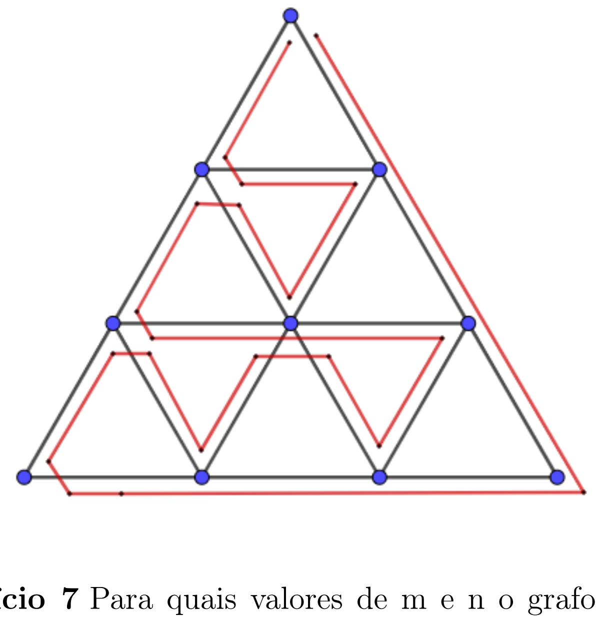
Solução.

Sim, possui.

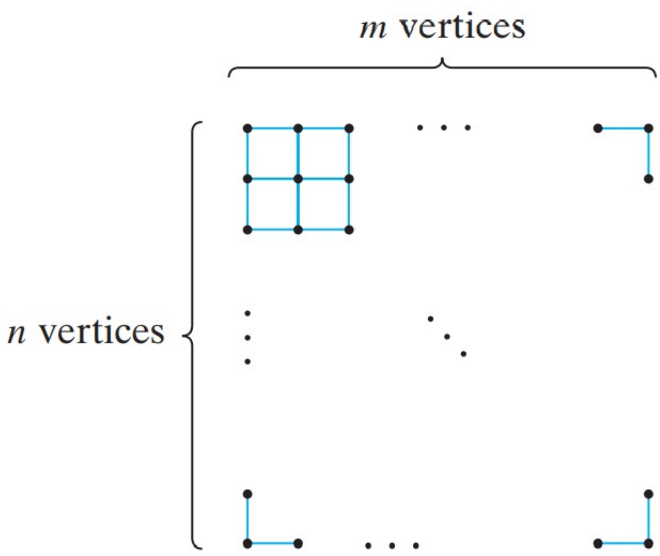
Pode-se construir um ciclo euleriano começando pelo vértice superior, desçendo para o primeiro vértice do nível imediatamente abaixo, indo em linha reta até o último vértice do nível, voltando para o primeiro em zigue-zague por baixo e repetindo o processo até o último nível, quando ao fim da linha reta até o útimo vértice do nível, em vez de voltar em zigue-zague até o primeiro, sobe-se até o vértice superior onde começamos o processo.

Isso é possível porque os primeiros vértices de cada nível estão conectados entre si por uma aresta e a pirâmide tem um número finito de níveis.

Além disso, o ciclo é euleriano porque para cada uma das arestas vai ser usada uma vez em uma única etapa (as arestas horizontais ao andar em linha reta, as diagonais interiores nos zigue-zagues e as diagonais exteriores para se descer e subir de nível).



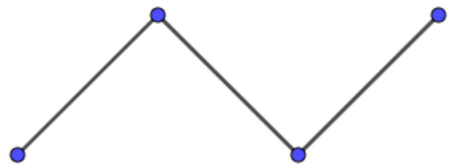
Exercício 7 Para quais valores de m e n o grafo a seguir contém um ciclo euleriano?



Solução. Para $n = m = 0$, $n = m = 1$ ou $n = m = 2$ apenas. No primeiro caso, o grafo é vazio. No segundo caso. o grafo consiste de um vértice apenas. No terceiro, o grafo é um quadradinho. Em todos os outros casos, ou não haveria ciclo (caso $n = 1$ e $m = 2$) ou haveriam pelo menos dois vértices do grafo que estariam no "lado"(e não no "canto") do retângulo, tendo grau 3, um número ímpar, o que faz com que não haja ciclo euleriano.

Exercício 8 Dê um exemplo de um grafo conexo tal que a remoção de uma aresta qualquer resulta em um grafo que não é conexo. (Assuma que a remover uma aresta não remove nenhum vértice).

Solução.



Exercício 9 Mostre que se G' é um subgrafo conexo de G, então G' está contido em uma componente conexa de G.

Solução. Suponhamos por absurdo que G' não estivesse contido em uma componente conexa de G. Então devem existir $u \in V'$ e $v \in V'$ de forma que não haja caminho de u para v em G. Mas se assim for, não pode haver caminho de u para v em G' tampouco, pois G' não tem aresta a mais do que G. Assim G' é desconexo, o que é um absurdo, pois supusemo-no conexo. Então G' deve estar contido numa componente conexa de G.

Exercício 10 Mostre que o número máximo de arestas em um grafo simples e desconexo com n vértices é $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Solução. O número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices é, como já foi mostrado na lista 1, $\frac{(n)(n-1)}{2}$.

Seja G um grafo com n vértices desconexo. É claro que para G ter o máximo de arestas possível, ele deve ter apenas duas componentes conexas, pois se tivesse três ou mais, poderíamos juntar duas delas, mantendo o grafo desconexo e aumentando o número de arestas.

Sejam G_1 e G_2 as duas componentes conexas de G com respectivos números de vértices p e q, com $p \leq q$ sem perda de generalidade, dado que podemos só "espelhar"o grafo nos outros casos. O número máximo de arestas de G é a soma do número máximo de arestas em cada componente conexa (pois uma coisa não interfere na outra). O número máximo de arestas para um grafo assim é:
$\frac{(p)(p-1)}{2} + \frac{(q)(q-1)}{2}$

Se quiséssemos retirar um vértice de G_1 para colocar em G_2, esse vértice deixaria de fazer $q-1$ ligações para passar a fazer p ligações. Se $q-1 > p$, isso não vale para quem quer maximizar o número de arestas. Se $q-1 = p$, tanto faz. O caso em que $q-1 \leq p$ ocorre quando $q = p$ (pois $p \leq q$) e, neste caso, tirar de G_1 para dar à G_2 é o mesmo que tirar de G_2 para dar à G_1. Em todos os casos, não vale a pena tirar da componente com mais vértices para dar a com menos vértices (e vale a pena fazer o contrário). Assim, o grafo com maior número de arestas é aquele em que uma componente acumula todos os vértices menos um, que fica com a outra componente. Neste caso, com $p = 1$ e $q = n-1$, temos que o número máximo de arestas é: $\frac{(1)(1-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-1-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$\blacksquare$

Definição. Um vértice v em um grafo conexo G é um *ponto de articulação* se a sua remoção (e a de todas as arestas incidentes nele) torna o G desconexo.

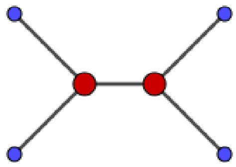
Exercício 11 Dada a definição acima, resolva os itens a seguir.

(a) Dê um exemplo de um grafo com seis vértices que tem exatamente dois pontos de articulação.

(b) Mostre que um vértice v em um grafo conexo é um ponto de articulação se, e somente se, existem vértices w e x em G tais que qualquer caminho de w a x passa por v.

Solução.

(a)



(b) IDA: Seja v ponto e articulação de G. Sejam G_1 e G_2 duas componentes conexas que se formam ao retirar-se v de G, formando G'. Tome $w \in G_1$ e $x \in G_2$ e um caminho qualquer em G que leve w a x (esse caminho existe poris G é conexo). Esse caminho não pode ser possível sem v, pois se fosse, bastaria tomá-lo para ir de w a x em G' também, o que faria G_1 e G_2 conectadas, um absurdo. Então este caminho contem o vértice v. Como o caminho tomado foi qualquer, podemos dizer que todo caminho de w a x passa por v.

■

VOLTA: Sejam w e x tais que qualquer caminho de w a x em G passe por v. Assim, tirando v, não podemos ir de w a x. Ou seja, tirando v, acabamos por separar w e x em duas componentes conexas diferentes, fazendo de G', o grafo G sem o vértice v, um grafo desconexo. Como tomamos um caminho quaquer, isso vale para todos os caminho de w a x. Aí v é ponto de articulação.

■

.

Definição. Um *caminho fechado* é um caminho de v a v.

Exercício 12 Dada a definição acima, mostre que um grafo conexo G é bipartido se e somente se todo caminho fechado em G tem tamanho par.

Solução. IDA: Seja G um grafo bipartido e sejam A e B suas duas partes. Todo caminho em G é da forma $(AB, BA, AB, BA, \dots)$, sendo AB uma aresta tomada a partir de um vértice em A e levando a um vértice em B e BA o contrário. Para ir de um vértice em A para outro vértice em A deve-se sempre dar um passo indo a B e outro voltando para A. Não importando quantos são os passos dados, eles são sempre dados de dois em dois, resutando ao final num número par de passos. Isso vale para caminhos de B a B também, evidentemente. Assim, para ir de v a v, seja qual for a parte de qual o vértice faz parte, deve-se dar um número par de passos, isto é, deve-se usar um caminho de tamanho par.

■

VOLTA: Seja G um grafo tal que todo caminho fechado tem tamanho par. Seja v um vértice qualquer de G. Tome uma caminho fechado qualquer de v a v e numere os vértices do caminho de acordo com o número de passos dados no caminho para chegar de v até eles. Agora separe os vértices numerados em duas partes: a com os vértices numerados com pares, que chamarei de P, e a com os vértices numerados com ímpares, que chamarei de I. v está em P. Nenhum vértice p_1 de P tem ligação com nenhum outro p_2 de P, pois se isso ocorresse, seria possível fazer um caminho fechado de tamanho ímpar de v a v da seguinte maneira: toma-se o caminho de v até p_1 (o que daria um número par de passos), indo de p_1 a p_2 (o que somaria um passo ao total, resultando num número ímpar) e indo de p_2 para v de novo (o que soma um número par ao total, mantendo a paridade ímpar). Mas isso seria absurdo, pois todo caminho fechado deveria ter tamanho par. Fazendo o mesmo para todos os vértices, separamos o grafo em duas partes.

Note que ora uma parte é chamada de par, ora é chamada de ímpar, dependendo do vértice para que se olha, mas isso não importa; importa apenas que são duas as partes e que seguem as exigências de um grafo bipartido, o que foi mostrado.

■

Exercício 13 Mostre que se um grafo G contém um ciclo de v a v, então G contém um *ciclo simples* de v a v.

Solução.

Seja $V = (v, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v)$ um ciclo de v a v. Seja $U = (v_1, u_1, u_2 \dots, u_m, v_n)$ o menor caminho de v_1 a v_n sem passar por v. Então $(v, v_1, , u_1, u_2 \dots, u_m, v_n, v)$ é um ciclo simples de v a v. Se não for, então existe vértice repetido em U. Mas aí, ele não pode ser o menor caminho de v_1 a v_n sem passar por v, pois aí existe um "atalho": ir de v_1 até o vértice repetido, ignorar todo o caminho até a repetição dele e seguir para v_n.

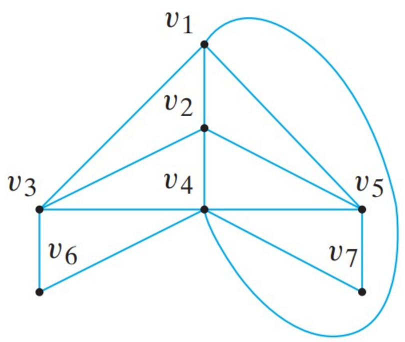
■

Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e v, w vértices de G. A *distância* entre v e w, $dist(v, w)$, é o comprimento do caminho mais curto de v para w. O diâmetro de G, denotado por $d(G)$, é definido como

$$d(G) = \max_{v,w \in V} dist(v, w)$$

Exercício 14 Dada a definição, faça o que se pede:

(a) Encontre o diâmetro do grafo abaixo.



(b) Encontre o diâmetro de K_n, o grafo completo de n vértices.

Solução.

(a) O diâmetro do grafo é 2. Todo vértice tem um caminho de tamanho no máximo 2 até todo outro vértice.

(b) O diâmetro se qualquer K_n é 1, pois todo vértice está conectado com todo outro vértice.

Exercício 15 Mostre que o número de caminhos começando e terminando em v_1 que têm comprimento n no grafo a seguir é igual ao $(n + 1)$-ésimo número de Fibonacci f_{n+1}.

Solução.

O número de caminhos de v_1 a v_1 de tamanho 1 é 1 (o loop somente).

O número de caminhos de v_1 a v_1 de tamanho 2 é 1 (a ida até v_2 e a volta).

Seja $f(n)$ o número de caminhos de v_1 a v_1 de tamanho n. Temos que $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$, pois para conseguir um caminho de tamanho $n+2$ basta tomar um de tamanho $n+1$ e aumentar em uma unidade o tamanho pegando o loop uma vez ou tomar um de tamanho n e aumentar em duas unidades o tamanho indo a v_2 e voltando. Note que só faz sentido pensar nos caminhos que se pode completar com esses dois tipos de passos (de tamanho 1 e 2), pois todos os outros são combinações desses (um passo de tamanho 3, por exemplo, é uma combinação de um loop com uma ida de volta ou três loops); esses caminhos já serão contemplados por essas duas análises.

■

Material adicional: Relações Binárias

Definição. Uma *relação (binária)* $\mathcal{R}$ de um conjunto X a um conjunto Y é um subconjunto do produto Cartesiano $X \times Y$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, escrevemos $x\mathcal{R}y$ e dizemos que x está relacionado com y. Se $X = Y$, chamamos $\mathcal{R}$ de uma *relação (binária)* em X

Definição. Uma relação em um conjunto X é uma *relação de equivalência* se respeita as seguintes propriedades:

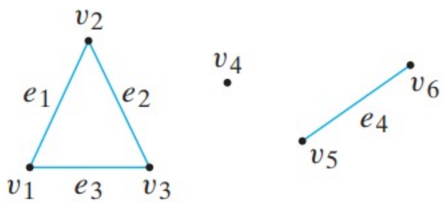
- **Reflexividade:** Para todo $x \in X$, $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- **Simetria:** Para todo $x, y \in X$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$
- **Transitividade:** Para todo $x, y, z \in X$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$

Definição. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em um conjunto X. Uma *classe de equivalência* é um conjunto definido, para $a \in X$, como

$$[a] = \{x \in X \mid x\mathcal{R}a\}$$

Em outras palavras, é o conjunto de todos os elementos de X que se relacionam com a.

Exemplo: Seja G o grafo a seguir:



O componente de G que contém v_3 é o subgrafo

$$G_1 = (V_1, E_1) \qquad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

O componente de G contendo v_4 é o subgrafo

$$G_2 = (V_2, E_2) \qquad V_2 = \{v_4\} \qquad E_1 = \varnothing$$

O componente de G que contém v_5 é o subgrafo

$$G_3 = (V_3, E_3) \qquad V_3 = \{v_5, v_6\} \qquad E_3 = \{e_4\}$$

Outra caracterização para os componentes do grafo $G = (V, E)$ é obtida definindo uma relação $\mathcal{R}$ no conjunto de vértices V com a regra

$$v_1 \mathcal{R} v_2 \text{ se existe um caminho de } v_1 \text{ a } v_2.$$

Pode ser mostrado que $\mathcal{R}$ é uma *relação de equivalência* em V e que se $v \in V$, o conjunto de vértices na componente contendo v é a *classe de equivalência*

$$[v] = \{w \in V \mid w \mathcal{R} v\}$$

.