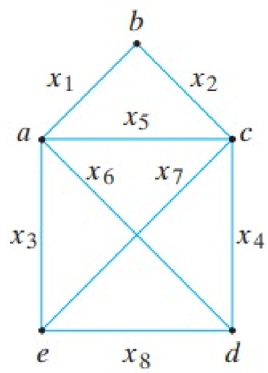
Matemática Discreta 2023
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitores José Arthur e Nicole dos Santos 17 de setembro de 2023

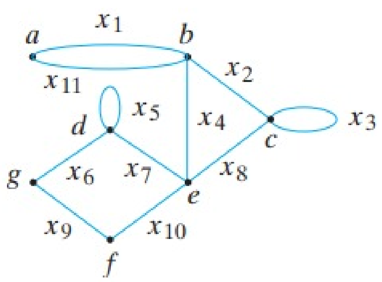
Lista 5

Exercício 1 Nos itens abaixo, exiba a *matriz de adjacência* de cada grafo.

(a)



(b)

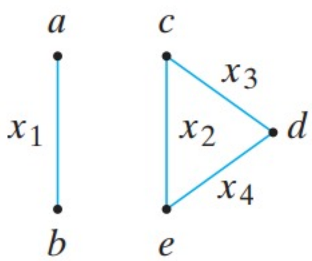


(c) O grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

Exercício 2 Nos itens a seguir, exiba a *matriz de incidência* de cada grafo.

(a) O grafo do Exercício 1(b).

(b)



Exercício 3 Nos itens a seguir, exiba o grafo representado por cada matriz de adjacência.

(a)

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ f & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Exercício 4 Seja A a matriz de adjacência do Exercício 1(a). Qual é a entrada na linha a, coluna d de A^5?

Exercício 5 Seja G um grafo simples e A sua matriz de adjacência. Mostre o seguinte:

(a) O traço de A^2 é duas vezes o número de arestas de G.

(b) o traço de A^3 é seis vezes o número de triângulos (ciclos de tamanho 3) em G.

Exercício 6 Seja G um grafo simples e A sua matriz de adjacência. Seja ainda $b_{ij} = A^2_{i,j}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mostre que o número de ciclos distintos de tamanho 4 em G é igual a:

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \binom{b_{ij}}{2}$$

Exercício 7 Suponha que um grafo tem uma matriz de adjacência da forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & A' \\ \hline A'' & \end{array} \right)$$

onde todas as entradas das submatrizes A' e A'' são 0. Como deve ser esse grafo?

Exercício 8 Repita o exercício anterior trocando "adjacência" por "incidência"

Exercício 9 Seja A a matriz de adjacência de um grafo G com n vértices. Seja

$$S_n = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$$

Se alguma entrada de S_n for igual a 0, o que podemos dizer sobre o grafo G?

Para o próximo exercício, relembre a definição de diâmetro de um grafo:

Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e v, w vértices de G. A *distância* entre v e w, $dist(v, w)$, é o comprimento do caminho mais curto de v para w. O diâmetro de G, denotado por $d(G)$, é definido como

$$d(G) = \max_{v,w \in V} dist(v, w)$$

Exercício 10 Seja G um grafo conexo e A a sua matriz de adjacência. Seja ainda d o diâmetro de G. Mostre que se existirem em A^d duas colunas c_i e c_j ortogonais, isto é, tais que $< c_i, c_j >= 0$, então G é um grafo bipartido.

Exercício 11 Seja G um grafo simples e A sua a matriz de adjacência. Mostre que o máximo autovalor de A é menor ou igual a $\Delta(G)$.

Supondo agora que G é *d-regular* (todos os vértices têm grau d), prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: *"d é o máximo autovalor da matriz A"*.

Para um grafo (não-dirigido ou dirigido), considere a *definição alternativa* (aceita por vários autores):

Definição (Matriz de adjacência - definição alternativa)**.** A *matriz de adjacência* de um grafo G (dirigido ou não) com n vértices é a matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{ij}$ tal que

$$a_{ij} = \text{quantidade de arestas } \{v_i, v_j\} \big((v_i, v_j) \text{ no caso } G \text{ dirigido} \big),$$

com a convenção de que **laços contam uma vez.**

Exercício 12 Assumindo a definição acima, prove ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação: *"se A é a matriz do grafo G (dirigido ou não-dirigido, não necessariamente simples), o coeficiente ij da matriz A^n é a quantidade de caminhos (dirigidos) de v_i a v_j"*.