Matemática Discreta 2023
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna

Lista 1

Exercício 1 Em um torneio, o Flamengo venceu o Fluminense uma vez, o Botafogo venceu o Vasco uma vez, o Flamengo venceu o Botafogo duas vezes, o Fluminense venceu o Vasco uma vez e o Fluminense venceu o Flamengo uma vez. Nos itens a seguir, use um grafo para modelar o torneio. Os times são os vértices. Descreva o tipo de grafo usado em cada item (grafo trivial, grafo não-direcionado, grafo direcionado, grafo simples).

(a) Há uma aresta entre os times se eles se enfrentaram no torneio.

(b) Há uma aresta entre os times para cada partida jogada entre eles.

(c) Há uma aresta do time t_i para o time t_j se t_i venceu t_j pelo menos uma vez.

(d) Há uma aresta do time t_i para o time t_j para cada vitória de t_i sobre t_j.

Exercício 2 Faça a representação gráfica dos seguintes grafos G = (V,E):

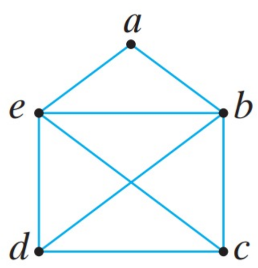
(a) $V = \{\square, \bigcirc, \lozenge, \triangle\}$, $E = \{\{\square, \bigcirc\}, \{\bigcirc, \lozenge\}, \{\bigcirc, \triangle\}, \{\lozenge, \triangle\}\}$

(b) $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{\}$

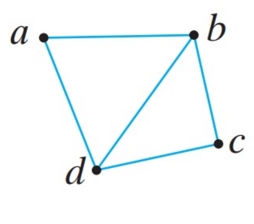
(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

Exercício 3 Explique por que nenhum dos grafos dos itens a seguir contém um caminho que começa e termina no vértice a passando em cada aresta uma única vez.

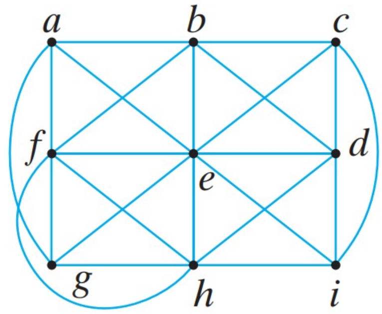
(a)



(b)

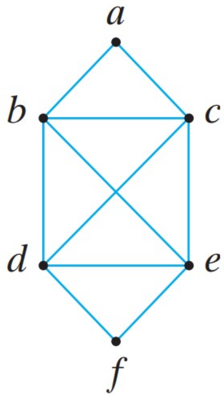


(c)

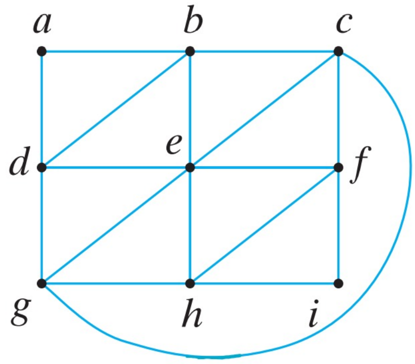


Exercício 4 Mostre que cada grafo dos itens a seguir tem um caminho que começa e termina no vértice a passando em cada aresta exatamente uma vez, encontrando tal caminho por inspeção.

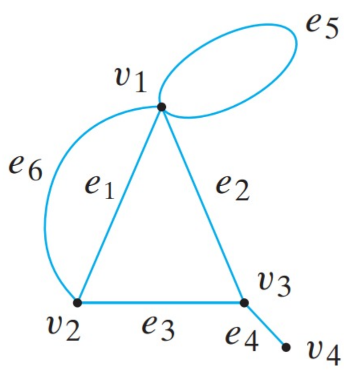
(a)



(b)



Exercício 5 Para o grafo $G = (V, E)$ abaixo, encontre V, E, todas as arestas paralelas, loops, vértices isolados e determine se G é um grafo simples. Também escreva em quais vértices a aresta e_1 é incidente.



Exercício 6 Esboce grafos G_1, G_2, G_3 e G_4, cada um com 5 vértices e 8 arestas, satisfazendo as seguintes condições:

(a) G_1 é um grafo simples;

(b) G_2 é um grafo não-simples sem loops;

(c) G_3 é um grafo não-simples sem arestas paralelas;

(d) G_4 é um grafo não-simples contendo tanto loops quanto arestas paralelas.

Exercício 7 Abaixo temos a definição de K_n:

Definição (K_n)**.** Chamamos de *grafo completo com* n *vértices*, denotado por K_n, o grafo simples de n vértices no qual existe uma aresta entre cada par de vértices distintos.

(a) Desenhe K_3 e K_5.

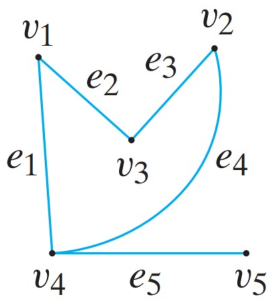
(b) Encontre uma fórmula para o número de arestas em K_n.

Exercício 8 Vejamos a definição de Grafo Bipartido:

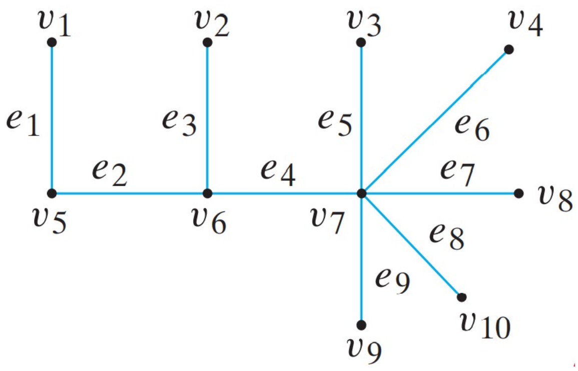
Definição (Grafo Bipartido)**.** Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se existem subconjuntos V_1 e V_2 (ambos possivelmente vazios) de V tais que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = V$ e cada aresta em E é incidente em um vértice de V_1 e um vértice de V_2.

Diga quais dos grafos a seguir são bipartidos. Se o grafo for bipartido, especifique os conjuntos disjuntos de vértices.

(a)



(b)



Exercício 9 Vamos introduzir também a definição de $K_{m,n}$:

Definição ($K_{m,n}$)**.** É chamado de *grafo bipartido completo com m e n vértices*, denotado por $K_{m,n}$, um grafo simples cujo conjunto de vértices é particionado nos conjuntos V_1 e V_2, com $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, no qual o conjunto de arestas consiste em todas as arestas da forma $\{v_1, v_2\}$ com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.

(a) Desenhe $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$.

(b) Encontre uma fórmula para o número de arestas em $K_{m,n}$.

Exercício 10 É possível existir um grupo de 7 pessoas tal que cada pessoa conheça exatamente 3 outras pessoas neste grupo?

Exercício 11 (a) Seja G um grafo com 4 vértices e com a sequência de graus $(4, 3, 2, 1)$. Dê o número de arestas de G e contrua um grafo com tais características.

(b) Existe algum grafo simples com 4 vértices e com sequência de graus $(4, 3, 2, 1)$?

Exercício 12 Paul Erdös (1913-1996) foi um dos matemáticos mais prolíficos de todos os tempos. Ele foi o autor ou co-autor de por volta de 1500 artigos. Matemáticos que foram co-autores de um artigo com Erdös têm o número de Erdös igual a 1. Matemáticos que não foram co-autores de um artigo com Erdös mas foram co-autores de um artigo com um matemático cujo número de Erdös é 1 têm o número de Erdös igual a 2. Os números de Erdös seguintes são definidos de maneira similar. Por exemplo, Richard Johnsonbaugh (o autor do livro onde consta este exercício) tem o número de Erdös 5. Johnsonbaugh foi co-autor de um artigo com Tadao Murata, Murata foi co-autor de um artigo com A. T. Amin, Amin foi co-autor de um artigo com Peter J. Slater, Slater foi co-autor de um artigo com Frank Harary e Harary foi co-autor de um artigo com Erdös. Desenvolva um modelo gráfico para os números de Erdös. No seu modelo, o que é um número de Erdös?