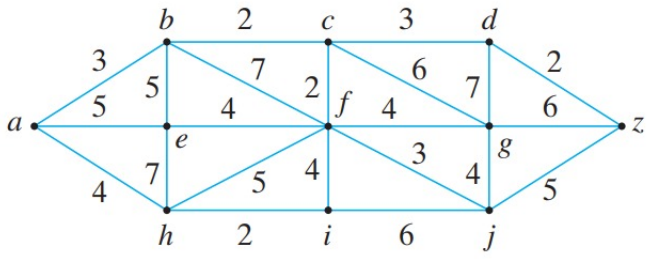
Matemática Discreta 2023
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitores: José Arthur e Nicole dos Santos 13 de setembro de 2023

Lista 4

Exercício 1 No grafo com pesos abaixo, encontre o caminho de menor comprimento entre cada par de vértices nos itens a seguir e diga qual o menor dentre eles.



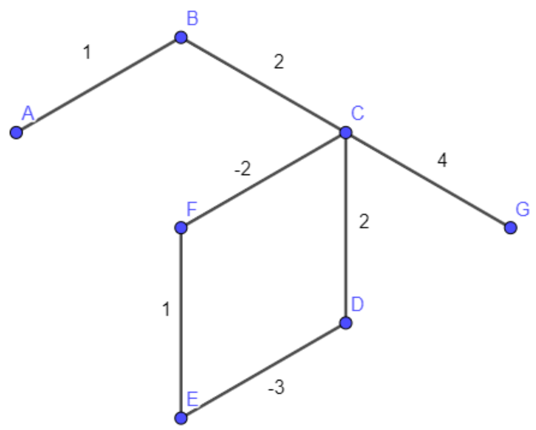
(a) a, f

(b) a, g

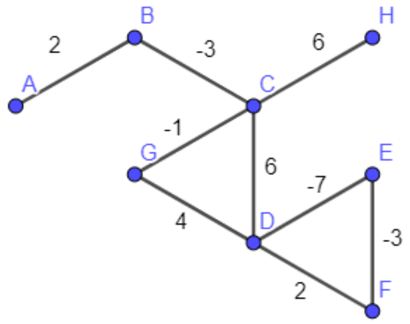
(c) b, j

(d) h, d

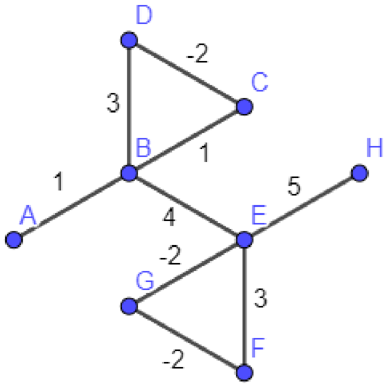
Exercício 2 Em cada um dos itens a seguir, determine o menor caminho entre o par de vértices no grafo.



(a) A,G

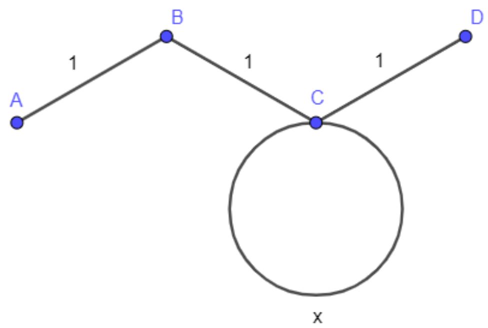


(b) A,H



(c) A,H

Exercício 3 Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, existe um único caminho mínimo de A a D, justificando-se.



Exercício 4 Escreva um algoritmo que encontre os comprimentos dos menores caminhos entre um vértice dado para todos os outros vértices em um grafo com pesos conexo G.

Exercício 5 Verdadeiro ou falso? Quando um grafo com pesos conexo e dois vértices a e z são dados como entradas para o algoritmo a seguir, ele retorna o tamanho do menor caminho de a a z. Se o algoritmo estiver correto, demonstre. Caso contrário, dê um exemplo de um grafo conexo com pesos e um par de vértices a e z para os quais o algoritmo falha.

$algor(w, a, z)$ {

$length = 0$
$v = a$
$T =$ conjunto de todos os vértices
while($v \neq z$) {
  $T = T - \{v\}$
  escolha $x \in T$ com menor $w(v, x)$
  $length = length + w(v, x)$
  $v = x$
}
return $length$
}

Exercício 6 Verdadeiro ou falso? O Algoritmo de Dijkstra encontra o comprimento do caminho mais curto em um grafo com pesos conexo mesmo se alguns pesos forem negativos. Se for verdade, demonstre. Caso contrário, dê um contraexemplo e explique o motivo do algoritmo falhar com ele.

Exercício 7 Considere um tabuleiro 3×4 como na figura abaixo. Cada quadro contém um número:

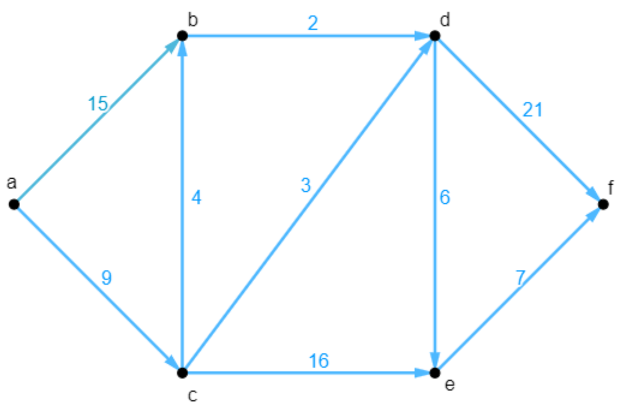
0	4	3	6
7	8	6	8
2	3	1	8

O objetivo deste jogo é mover um peão do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, seguindo uma série de movimentos para a direita ou para baixo. O objetivo é minimizar a soma dos pontos associados aos quadrados pelos quais o peão passa durante o percurso.

(a) Formule o jogo com um problema de caminho mínimo, exibindo o grafo correspondente.

(b) Resolva o problema usando o algoritmo de Dijkstra.

Exercício 8 Considere o seguinte grafo com pesos:



(a) Aplique o algoritmo de Dijkstra para calcular a distância mínima entre o vértice a e o vértice f, e identifique um ou o caminho correspondente a essa distância.

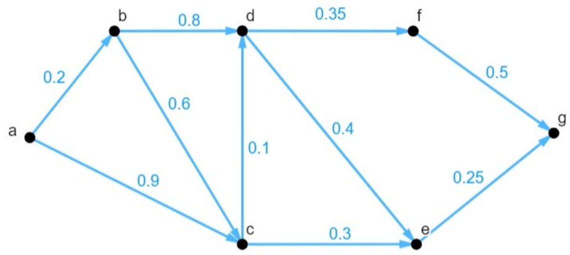
(b) Com base nos cálculos realizados no item (a), é possível determinar qual é a distância mínima do vértice a ao vértice d? Forneça uma justificativa.

(c) Mais uma vez com base nos cálculos realizados no item (a), seria possível indicar qual é a distância mínima entre os vértices b e f? Justifique.

Definição. Um *subcaminho* de uv é um caminho uw, onde w está em uv.

Exercício 9 Mostre que se uv é o caminho mínimo de u a v e uw é subcaminho de uv, então uw é caminho mínimo de u a w (isto é, mostre que todo subcaminho de um caminho mínimo é mínimo também).

Exercício 10 Rota mais confiável. Espertinho vai trabalhar de carro todos os dias. Como acabou de concluir um curso de análise de redes, Espertinho sabe determinar o caminho mais curto até seu local de trabalho. Infelizmente, a rota escolhida é muito bem policiada e, com todas as multas por excesso de velocidade que ele recebe, o caminho mais curto pode não ser a melhor opção. Por isso, Espertinho decidiu escolher uma rota que maximize a probabilidade de ele não ser multado por um policial. A rede a seguir mostra as possíveis rotas entre sua casa e seu trabalho, e as probabilidades de ele não ser parado associadas a cada trecho. A probabilidade dele não ser parado em um rota *é o produto das probabilidades associadas aos segmentos.*



Por exemplo, considerando-se a rota $a \to c \to e \to g$, a probabilidade de não receber a multa é $0,9 \times 0,3 \times 0,25 = 0,0675$.

O objetivo é encontrar a rota que maximize a probabilidade de não receber multa, no caminho de 1 até 7.

O problema pode ser transformado num problema de caminho mínimo, considerando a transformação logarítmica que converte o produto das probabilidades numa soma, isto é, se $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ é a probabilidade de não ser multado, então $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

Uma vez que $0 \leq p_{1k} \leq 1$, $\log p_{1k} \leq 0$. Assim, a maximização de $\log p_{1k}$ corresponde a minimizar $-\log p_{1k} = -\log p_1 - \ldots - \log p_k$.

Pede-se:

(a) Reescreva a rede, substituindo as probabilidades das arestas pelo negativo do seu logaritmo.

(b) Concluído o item anterior, temos em mãos um problema de caminho mínimo. Faça a formulação do problema de menor caminho entre nós a e g.

(c) Encontre a solução do problema, usando um algoritmo apropriado