

Matemática Discreta 2022 - Prova A1

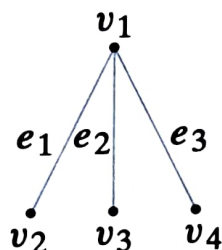
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas

Professora Maria Soledad Aronna

Monitor Felipe Vieira Costa

Setembro 2022

Exercício 1 (1 ponto) Mostre todos os subgrafos do seguinte grafo que contêm exatamente duas arestas:

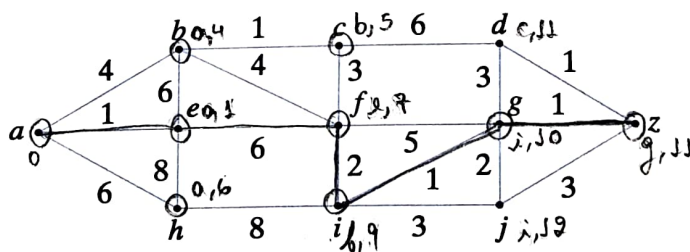


Exercício 2 (1 ponto) Prove que o máximo número de arestas de um grafo simples bipartido de n vértices é $\lfloor n^2/4 \rfloor$, isto é, o maior inteiro menor ou igual a $n^2/4$.

Exercício 3 (1,5 pontos) Desenhe um grafo cuja matriz de adjacência é $A = (a_{ij})$ de tamanho 7×7 e tal que:

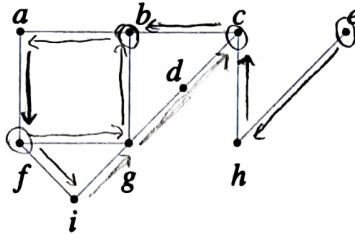
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \text{ e } i+1 \text{ é divisor de } j+1, \\ 1 & \text{se } i \neq j, \text{ e } j+1 \text{ é divisor de } i+1, \\ 2 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício 4 (1,5 pontos) Use o algoritmo de Dijkstra para achar o caminho de a a z de menor comprimento no seguinte grafo. Detalhe as iterações do algoritmo.



Exercício 5 (2 pontos) Seja G um grafo conexo que possui quatro vértices de grau ímpar: v_i para $i = 1, 2, 3, 4$, (G pode ter mais de quatro vértices em total). Prove que existem caminhos P_1 de v_1 a v_2 , e P_2 de v_3 a v_4 , sem arestas repetidas, tais que cada aresta de G pertence a exatamente um desses caminhos.

Ilustre esta propriedade no seguinte grafo:



$$P_1: (f, g, b, a, f, i, g, d, c)$$

$$v_1 = f, v_2 = c$$

$$P_2: (c, d, b)$$

$$v_3 = c, v_4 = b$$

Exercício 6 (3 pontos) Determine e justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. São as justificativas que contam pontos.

- (a) Não existe grafo cuja matriz de incidência tenha uma coluna com todos zeros.
- (b) Não existe grafo cuja matriz de incidência tenha uma linha com todos zeros.
- (c) Todo grafo completo K_n contém um ciclo Hamiltoniano.
- (d) O seguinte grafo é Hamiltoniano:

