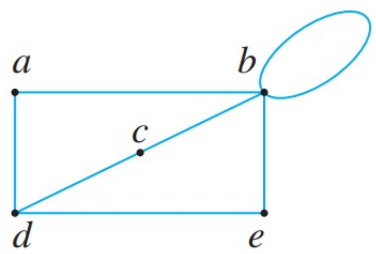
Matemática Discreta 2023
Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getulio Vargas
Professora Maria Soledad Aronna
Monitores José Arthur e Nicole dos Santos 19 de agosto de 2023

Lista 2

Exercício 1 Em cada item a seguir, diga se os caminhos dados no grafo são:

- Um caminho simples
- Um ciclo
- Um ciclo simples



(a) (b, b)

(b) $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$

(c) (a, d, c, b, e)

(d) (d)

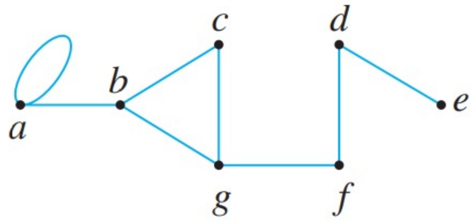
Exercício 2 Nos itens a seguir, desenhe um grafo tendo as propriedades dadas ou explique por que não existe tal grafo.

(a) Seis vértices, cada um com grau 3.

(b) Grafo simples; seis vértices tendo sequência de graus $(5, 5, 4, 3, 2, 1)$.

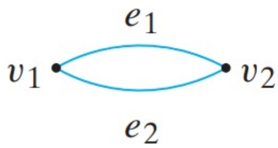
(c) Grafo simples; cinco vértices tendo sequência de graus $(4, 4, 4, 2, 2)$.

Exercício 3 Encontre todos os subgrafos conexos do grafo seguinte contendo todos os vértices do grafo original e tendo o mínimo de arestas possível. Quais desses subgrafos são caminhos simples? Quais são ciclos? Quais são ciclos simples?

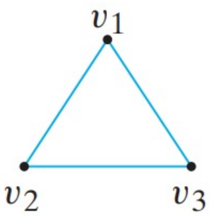


Exercício 4 Nos itens a seguir, encontre todos os subgrafos não-vazios dos grafos dados.

(a)



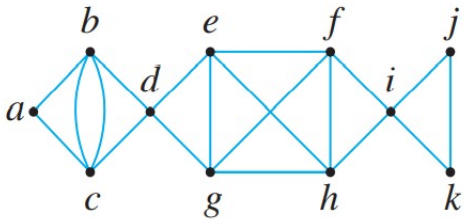
(b)



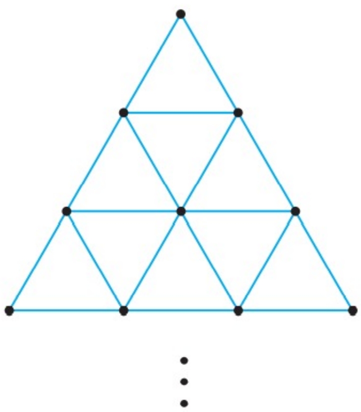
Exercício 5 Nos itens a seguir, decida se o grafo tem um ciclo euleriano. Se o grafo tiver um ciclo euleriano, exiba um.

(a) Grafo do Exercício 3

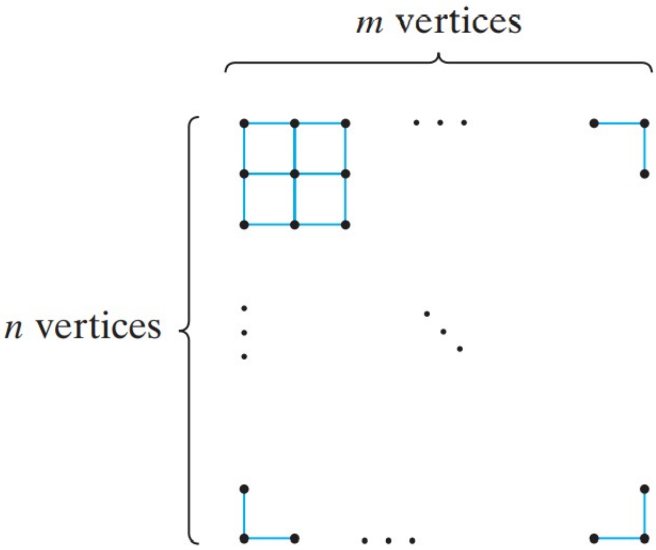
(b)



Exercício 6 O grafo a seguir continua até uma profundidade arbitrária finita. Este grafo contém um ciclo euleriano? Em caso positivo, descreva um.



Exercício 7 Para quais valores de m e n o grafo a seguir contém um ciclo euleriano?



Exercício 8 Dê um exemplo de um grafo conexo tal que a remoção de uma aresta qualquer resulta em um grafo que não é conexo. (Assuma que a remover uma aresta não remove nenhum vértice).

Exercício 9 Mostre que se G' é um subgrafo conexo de G, então G' está contido em uma componente conexa de G.

Exercício 10 Mostre que o número máximo de arestas em um grafo simples e desconexo com n vértices é $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Definição. Um vértice v em um grafo conexo G é um *ponto de articulação* se a remoção de todos os vértices incidentes em v torna o G desconexo.

Exercício 11 Dada a definição acima, resolva os itens a seguir.

(a) Dê um exemplo de um grafo com seis vértices que tem exatamente dois pontos de articulação.

(b) Mostre que um vértice v em um grafo conexo é um ponto de articulação se, e somente se, existem vértices w e x em G tais que qualquer caminho de w a x passa por v.

Definição. Um *caminho fechado* é um caminho de v a v.

Exercício 12 Dada a definição acima, mostre que um grafo conexo G é bipartido se e somente se todo caminho fechado em G tem tamanho par.

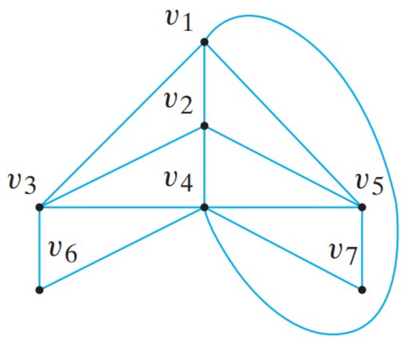
Exercício 13 Mostre que se um grafo G contém um ciclo de v a v, então G contém um *ciclo simples* de v a v.

Definição. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e v, w vértices de G. A *distância* entre v e w, $dist(v, w)$, é o comprimento do caminho mais curto de v para w. O diâmetro de G, denotado por $d(G)$, é definido como

$$d(G) = \max_{v,w \in V} dist(v, w)$$

Exercício 14 Dada a definição, faça o que se pede:

(a) Encontre o diâmetro do grafo abaixo.



(b) Encontre o diâmetro de K_n, o grafo completo de n vértices.

Exercício 15 Mostre que o número de caminhos começando e terminando em v_1 que têm comprimento n no grafo a seguir é igual ao $(n + 1)$-ésimo número de Fibonacci f_{n+1}.

Material adicional: Relações Binárias

Definição. Uma *relação (binária)* $\mathcal{R}$ de um conjunto X a um conjunto Y é um subconjunto do produto Cartesiano $X \times Y$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, escrevemos $x\mathcal{R}y$ e dizemos que x está relacionado com y. Se $X = Y$, chamamos $\mathcal{R}$ de uma *relação (binária)* em X

Definição. Uma relação em um conjunto X é uma *relação de equivalência* se respeita as seguintes propriedades:

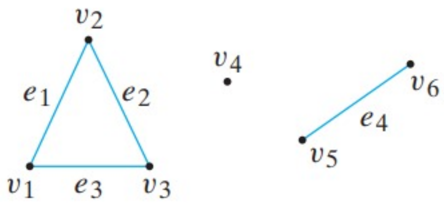
- **Reflexividade:** Para todo $x \in X$, $(x, x) \in \mathcal{R}$.
- **Simetria:** Para todo $x, y \in X$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então $(y, x) \in \mathcal{R}$
- **Transitividade:** Para todo $x, y, z \in X$, se $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, então $(x, z) \in \mathcal{R}$

Definição. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em um conjunto X. Uma *classe de equivalência* é um conjunto definido, para $a \in X$, como

$$[a] = \{x \in X \mid x\mathcal{R}a\}$$

Em outras palavras, é o conjunto de todos os elementos de X que se relacionam com a.

Exemplo: Seja G o grafo a seguir:



O componente de G que contém v_3 é o subgrafo

$$G_1 = (V_1, E_1) \qquad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

O componente de G contendo v_4 é o subgrafo

$$G_2 = (V_2, E_2) \qquad V_2 = \{v_4\} \qquad E_1 = \varnothing$$

O componente de G que contém v_5 é o subgrafo

$$G_3 = (V_3, E_3) \qquad V_3 = \{v_5, v_6\} \qquad E_3 = \{e_4\}$$

Outra caracterização para os componentes do grafo $G = (V, E)$ é obtida definindo uma relação $\mathcal{R}$ no conjunto de vértices V com a regra

$$v_1 \mathcal{R} v_2 \text{ se existe um caminho de } v_1 \text{ a } v_2.$$

Pode ser mostrado que $\mathcal{R}$ é uma *relação de equivalência* em V e que se $v \in V$, o conjunto de vértices na componente contendo v é a *classe de equivalência*

$$[v] = \{w \in V \mid w \mathcal{R} v\}$$

.