EMAP - Escola de Matemática Aplicada
Fundação Getúlio Vargas
Disciplina de Curvas e Superfícies

Superfícies de Revolução

Nicole dos Santos de Souza

Rio de Janeiro
Junho de 2023

Sumário

1 Motivação

Uma importante classe de superfícies regulares é aquela formada pelas ditas superfícies de revolução. Essas superfícies são geradas pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo, criando uma forma tridimensional elegante e repleta de propriedades matemáticas interessantes.

As superfícies de revolução têm sido amplamente exploradas e aplicadas em diversas áreas da física e da engenharia. Quando determinados objetos são projetados digitalmente, revoluções como essas podem ser usadas para determinar a área da superfície sem que se faça necessário medir o comprimento e o raio do objeto que está sendo projetado, tornando as coisas mais rápidas e simples. Elas desempenham um papel significativo nos softwares de engenharia, especialmente aqueles dedicados à modelagem e simulação de objetos tridimensionais. Esses softwares oferecem uma variedade de ferramentas que permitem aos engenheiros criar e manipular superfícies de revolução de forma eficiente e precisa.

Desse modo, além de uma forma matemática elegante e curiosa, a superfície de revolução é uma excelente ferramenta para as mais variadas aplicações. Neste estudo veremos um pouco sobre suas características e como construí-las usando o software matemático Goegebra.

2 Definição

Vamos considerar uma curva regular C e uma reta r, ambas localizadas em um plano X. Podemos imaginar o movimento de rotação desse plano em torno da reta r. Agora, vamos pensar no conjunto de pontos no espaço descrito pela curva C ao dar uma volta completa em torno de r. Esses pontos formam uma superfície S que denominamos *superfície de revolução*.

A curva C é chamada uma geratriz de S e a reta r é dita eixo de revolução de S. Veja um exemplo na figura abaixo (onde a curva C está representada em azul e a curva r em preto).

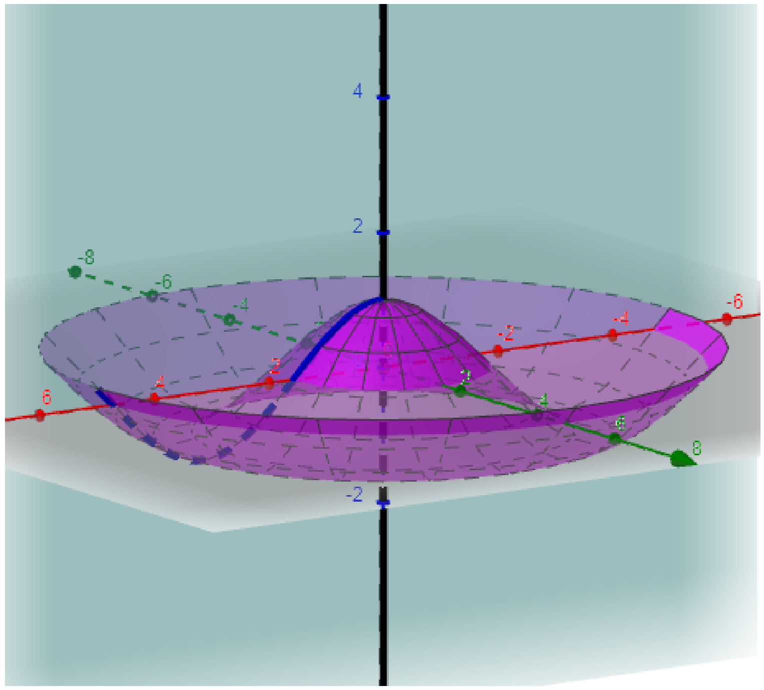

Figura 1: Exemplo de uma Superfície de Revolução

Com o movimento de rotação em torno da reta r, cada ponto P de C determina um círculo. Esses círculos são denominados paralelos da superfície. Por exemplo, abaixo, se encontram os paralelos de dois pontos da curva: A e B.

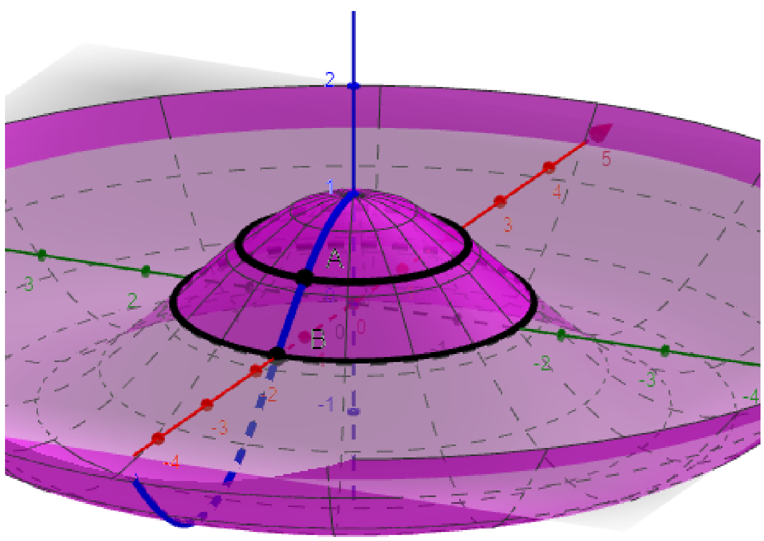

Figura 2: Paralelos da Superfície de Revolução

Cada um dos planos obtidos girando o plano X em torno da reta r contém uma cópia da curva C. Essas cópias de C são chamadas meridianos da superfícies S. Elas estão dispostas em cores diferentes abaixo para fácil visualização.

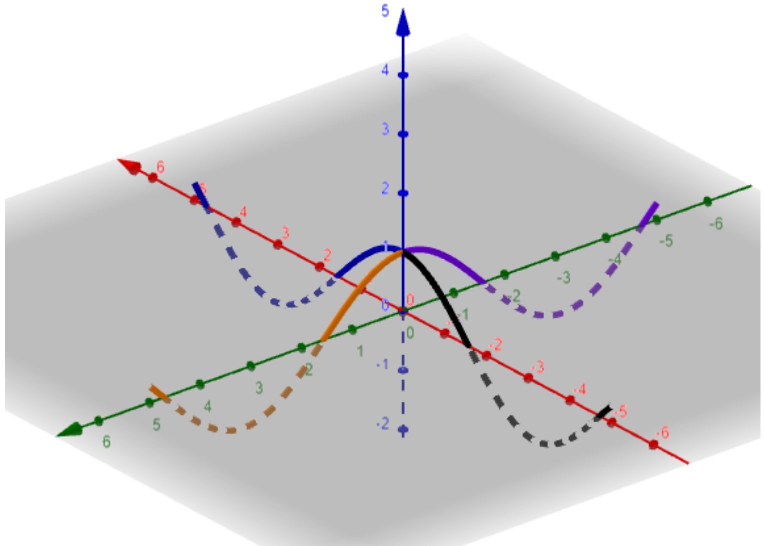

Figura 3: Meridianos da Superfície de Revolução

Note que os pontos da superfície (ou de uma geratriz C) que pertencem ao eixo de revolução permanecem fixos durante todo o movimento de rotação da curva C em torno de r. Assim, o paralelo que contém o ponto é um círculo degenerado que consiste de apenas um ponto. Nesse caso, o ponto A representa o círculo degenerado abaixo.

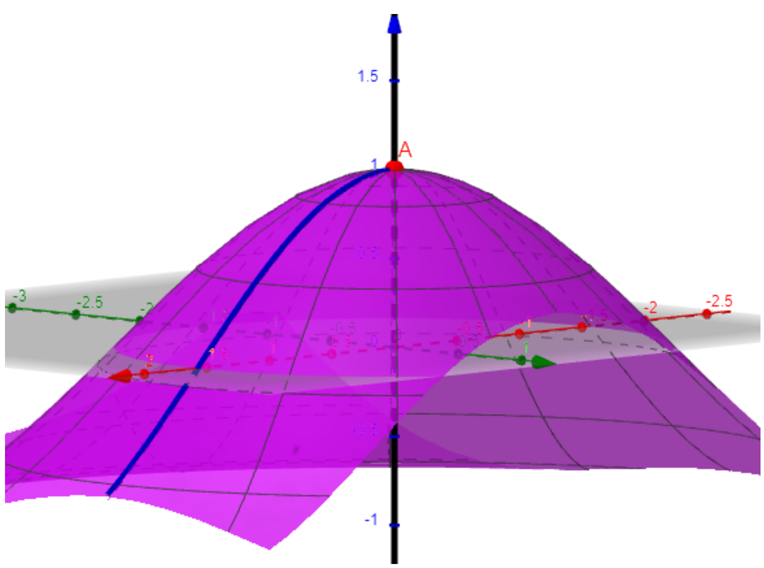

Figura 4: Paralelo degenerado da Superfície de Revolução

Veremos mais animações e visualizações de superfícies de revolução posteriormente.

3 Demonstração - Superfícies de Revolução são superfícies Regulares

Uma característica relevante das superfícies de revolução é que elas são superfícies regulares, o que as torna aptas para diversas aplicações por sua natureza bem-comportada. Nesta seção vamos demonstrar essa afirmação baseando-se no livro do Ronaldo.

Vamos descrever uma superfície de revolução S analiticamente. Tomemos um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, tal que o plano X coincida com o plano XZ, r com o eixo Z, e tal que C esteja contida no semiplano: $\{(x, 0, z); x > 0\}$

Assim, definimos S como o lugar geométrico dos pontos $p \in \mathbb{R}^3$ tais que, para algum $q \in C$ e algum $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se: $p = T^\theta(q)$, sendo T^θ a rotação do ângulo θ em torno do eixo Z (para $\theta > 0$, sentido anti-horário),

$$T^\theta(x, y, z) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta, z)$$

com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Os paralelos de S, por definição, são os círculos $T^\theta(q)$ com q fixo e θ variando em R, e seus meridianos são os conjuntos $T^\theta(C)$, com θ fixo. Foi assim que encontramos os meridianos e paralelos no *Geogebra* nas figuras apresentadas.

Com o intuito de demonstrar que S é uma superfície regular, tomemos $p \in S$ e $q \in C$, tais que $p = T^\theta(q)$, e suponhamos, inicialmente, que $-\pi < \theta < \pi$. Consideremos, então, uma parametrização local de C em q, $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, e observemos que a função f é positiva em I. Façamos $U = (-\pi, \pi) \times I \subset \mathbb{R}^2$, ponhamos

$$X(u, v) = T^u(\alpha(v)) = (f(v)cosu, f(v)senu, g(v)), (u, v) \in U,$$

e vamos verificar que X é uma parametrização local de S em p. Pela hipótese sobre θ, temos que $p \in V = X(U) \subset S$. Escrevendo-se,

$$X(u, v) = (f(v)cosu, f(v)senu, g(v)) = (x, y, z) \in V$$

tem-se que $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v)) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$. Portanto, v é univocamente determinado por (x, y, z) através da igualdade

$$v = v(x, y, z) = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), (x, y, z) \in V.$$

Observando-se que as funções $(x, y, z) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ e $(x, y, z) \to z$ estendem-se diferenciavelmente a $\mathbb{R}^3 - \{0\} \supset S$, tem-se que v é diferenciável em V, já que, por hipótese, α^{-1} é diferenciável em $\alpha(I)$. Considerando-se, agora, a igualdade, $tan\frac{u}{2} = \frac{senu}{1+cosu}$, válida para todo $u \in (-\pi, \pi)$, e lembrando-se que a função tangente é um difeomorfismo do intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sobre $\mathbb{R}$, conclui-se que

$$u = u(x, y, z) = 2tan^{-1}(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}0}), (x, y, z) \in V.$$

assim como essa função é diferenciável em V. Dessa forma, $X : U \to V$ é um difeomorfismo e, portanto, uma parametrização local de S em p. Por fim, se $\theta = \pm\pi$, obtém-se facilmente uma parametrização local X, de S em p, tomando-se $0 < \epsilon < \pi$ e um ponto $p_0 = T^{\theta+\epsilon}(p) \in S$. Nessas condições, pelo discutido acima, existe uma parametrização local Y, de S em p_0 . Assim, basta fazer $X = T^{-\epsilon}oY$.

Dessa forma, segue-se que toda superfície de revolução é uma superfície regular.
Note que é importante que as hipóteses a respeito da posição relativa entre a curva geratriz e o eixo de revolução sejam cumpridas, pois se isso não for satisfeito a superfície resultante pode não ser regular.

4 Identificação das superfícies de Revolução

O procedimento para verificar se uma superfície S é de revolução consiste em encontrar uma reta r (eixo de revolução de S), de modo que, se X é um plano perpendicular a r que intersecta S, então $S \cap X$ é uma circunferência com o centro no ponto de interseção entre r e X.

Na figura que segue, pode-se desconfiar de que a superfície seja de revolução e que a reta que cobre o eixo X seja seu eixo. Assim, para fazer a verificação, notamos que a interseção entre os planos perpendiculares ao eixo X e a superfície sempre resultam em circunferências com o centro no ponto de interseção entre o plano e o eixo.

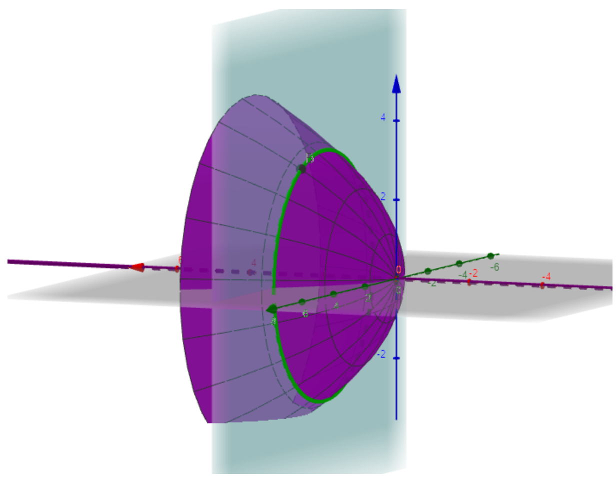

Figura 5: Identificando se a superfície é de Revolução

Uma vez que saibamos que S é uma superfície de revolução, podemos determinar uma curva geratriz da superfície S, encontrando a interseção entre ela e um plano que contém o eixo de rotação r.

Na nossa superfície de exemplo, podemos pegar a interseção entre um plano que contém essa reta e a superfície, identificamos a curva geratriz.

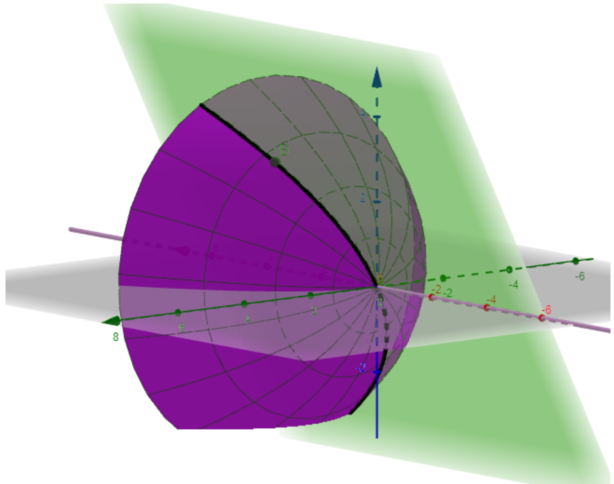

Figura 6: Identificando a geratriz

5 Área de uma superfície de Revolução

A área de uma superfície qualquer pode ser expressa em termos da primeira forma fundamental da seguinte forma[1]:

$$A(D) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Seja S uma superfície de revolução cuja curva geratriz, contida no plano XZ, admite a parametrização por comprimento de arco $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to S, \alpha(v) = (x(v), 0, z(v)), x(v) > 0$.
Fazendo-se $U = (-\pi, \pi) \times I$, tem-se que a aplicação definida por:

$$X(u, v) = (x(v)cosu, x(v)senu, z(v)), (u, v)U,$$

é uma parametrização de S, a qual a cobre, a menos de um meridiano. Uma vez que

$$X_u(u, v) = (x(v)senu, x(v)cosu, 0);$$
$$X_v(u, v) = (x'(v)cosu, x'(v)senu, z'(v))$$

Podemos calcular a primeira forma fundamental.

$E(u, v) = x(v)^2$
$F(u, v) = 0$
$G(u, v) = (x'(v)^2 + z'(v)^1) = 1$

Dessa forma, com a parametrização que utilizamos: $X(u, v)$, temos $X^{-1}(S) = (-\pi, \pi) \times (a, b)$ e reescrevemos:

$$A(S) = \int_{X^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b x(v) dudv$$

[1]⟨https://pt.wikipedia.org/wiki/Superf%C3%ADcie_param%C3%A9trica⟩

$$= 2\pi \int_a^b x(v)dv$$

Com isso, conclui-se que é bastante simples e direto calcular áreas de superfícies de revolução, e isso pode se fazer útil nas mais diversas aplicações.

5.1 Exemplos

5.1.1 Esfera

Vamos utilizar o Teorema de Pappus para confirmar que a área de uma esfera é: $4\pi r^2$.

Seja S esfera de $\mathbb{R}^3$ com centro na origem e raio $r > 0ep_0 = (0, 0, r)$, $p_1 = (0, 0, r)$ seus polos sul e norte, respectivamente. Observemos que $S - \{p_0, p_1\}$ é uma superfície de revolução cuja curva geratriz, C, é o semicírculo do plano XZ que liga p_0 a p_1 excluído de suas extremidades, isto é, o traço da curva:

$$r(cos(v/r), 0, sen(v/r), v \in (-r\pi/2, r\pi/2)$$

Aplicando o teorema de Pappus:

$$A(S) = 2\pi \int_{-r\pi/2}^{r\pi/2} rcos(v/r)dv$$

$$= 4\pi r^2$$

5.1.2 Cilindro

No caso particular em que a superfície de Revolução S é o cilindro circular reto de raio $r > 0$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = r^2\}$, tem-se $\alpha(v) = (r, 0, v), v \in \mathbb{R}$,
donde

$$A(S) = 2\pi r(b - a)$$

Assim, verificamos também a fórmula da área para o cilindro.

6 Exemplos no Geogebra

Uma maneira alternativa de visualizar a superfície de revolução no Geogebra é encontrar o rastro de todos os meridianos, deixando em função de um ângulo para que se possa construir uma animação. Abaixo está representado esse esquema para a mesma curva C trabalhada anteriormente.

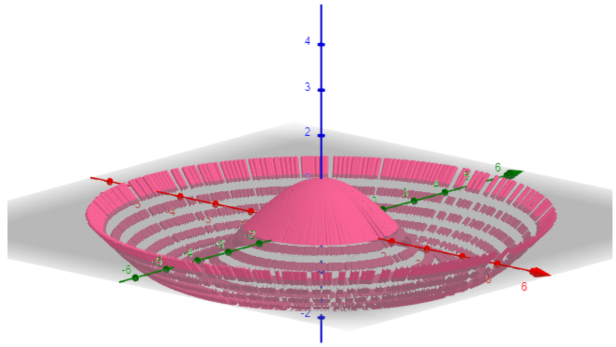

Figura 7: Superfície a partir dos meridianos

O geogebra, entretanto, possui uma ferramenta que torna muito rápida e simples a construção de superfícies de revolução. A função *Superficie(curva,ângulo,reta)* permite que, informando a equação da Curva e o eixo de revolução, juntamente com até qual ângulo se deseja construir a volta (2π para uma volta completa) qualquer superfície possa ser constrúida com poucos segundos. Abaixo vemos alguns exemplos de superfícies constuídas com essa ferramenta.

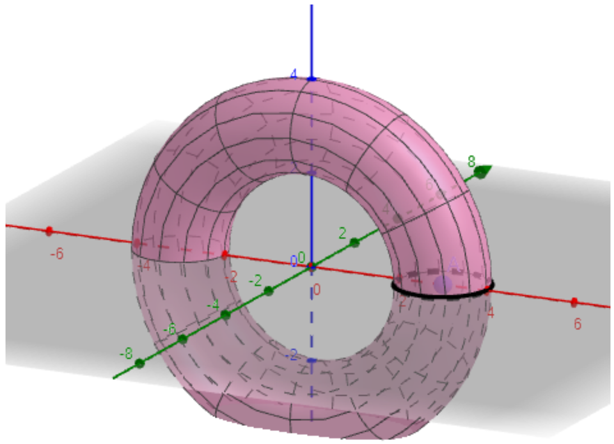

Figura 8: Toro

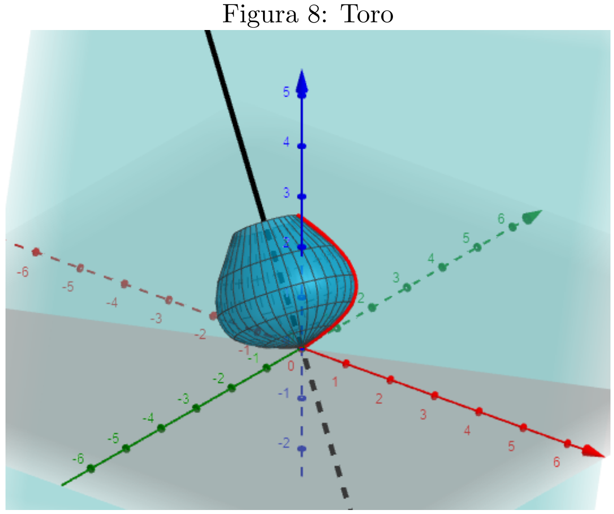

Figura 9: Superfície com eixo de rotação não paralelo aos eixos X,Y e Z

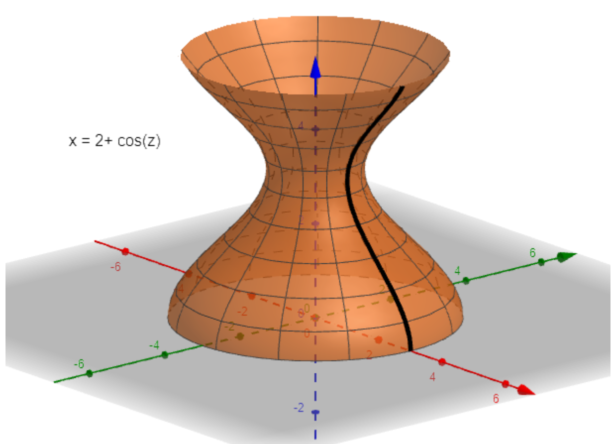

Figura 10: Parte da curva x = 2+cos(z)

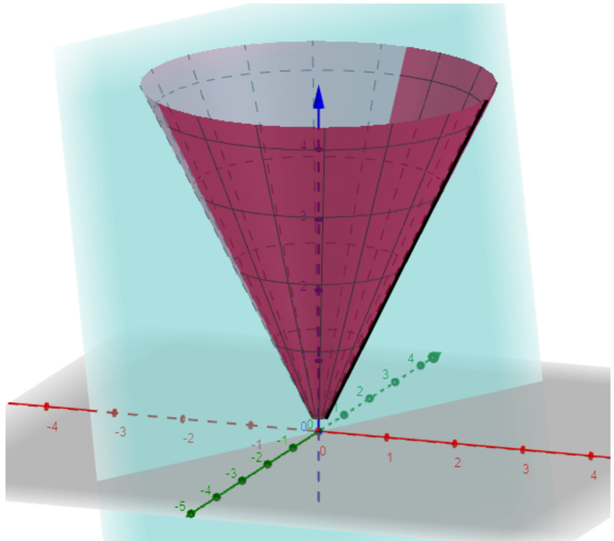

Figura 11: Cone

6.1 Superfícies a partir de funções

Nas pesquisas desse estudo foi encontrado um programa[2] muito interessante que calcula superfícies de revolução a partir de funções. Feito de maneira iterativa com o usuário, a aplicação pede uma função e sob qual eixo se quer o eixo de revolução, além dos pontos inicial e final da curva. É importante destacar que o programa adapta a curva (pedida em função de x) para o eixo escolhido, então as três diferentes versões da superfície alternando os eixos são apenas versões rotacionadas da mesma, e não a curva no plano XY com diferentes eixos de rotação.

Abaixo estão dispostos alguns testes utilizando a aplicação.

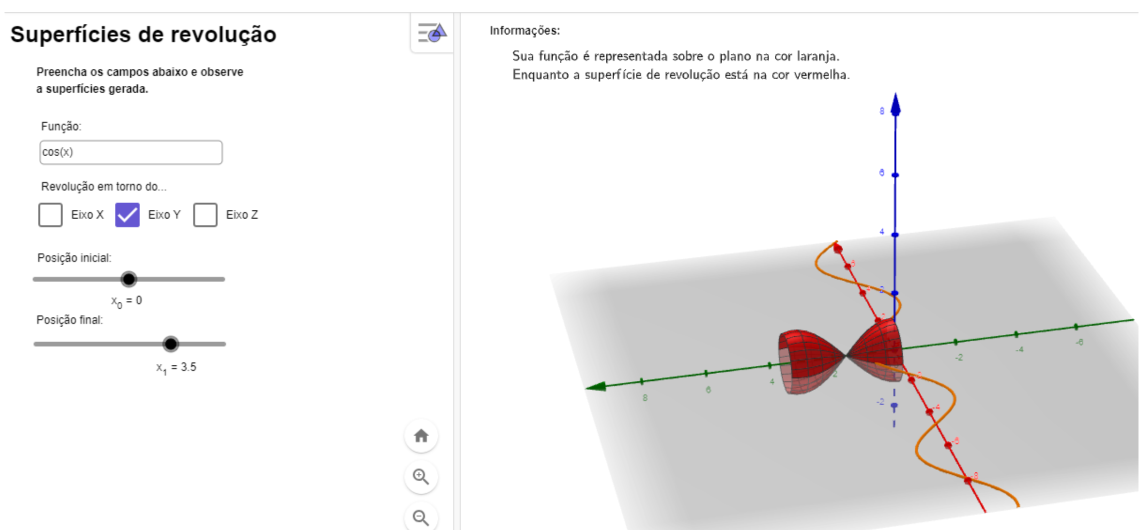

Figura 12: Função cosseno

[2]⟨https://www.geogebra.org/m/na9wBuEW⟩

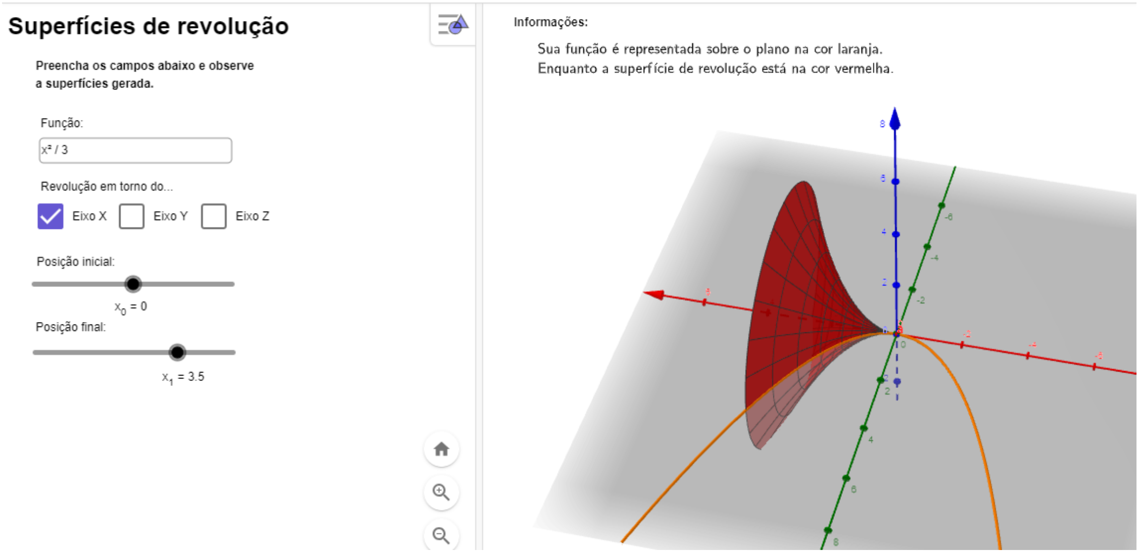

Figura 13: Função quadrática

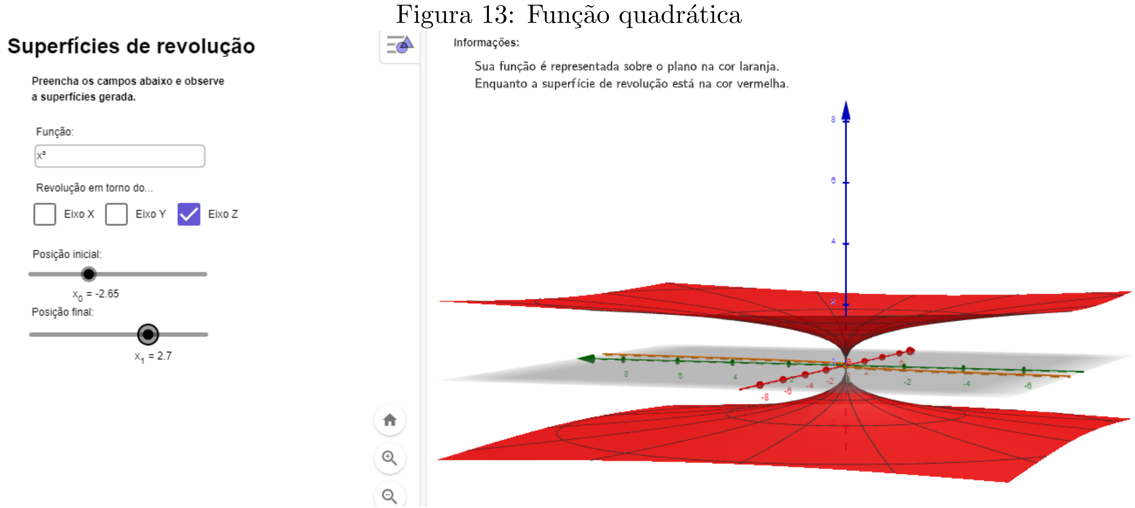

Figura 14: Função cúbica

7 Referências

[1] Carmo, M. P. (2014). Geometria diferencial para curvas e superfícies (6ª ed.). SBM. ISBN 9788583370246.

[2] Lima, R. F. (2016). Introdução à Geometria Diferencial. Sociedade Brasileira de Matemática.

[3] Notas fornecidas em aula. ⟨https://www.professores.uff.br/kowada/wp-content/uploads/sites/63/2017/08/ga2V1aula13.pdf⟩