ex_accelerometres_sol

November 10, 2023

[69]:
```python
import sympy as sp
sp.init_printing()
def deq(name, value):
    return sp.Eq(sp.Symbol(name),value)
```

1 Exercices sur les accéléromètres

1.1 7.1 Accéléromètre capacitif

On a un accéléromètre capacitif constitué d'une masse sismique de masse m montée sur un ressort de coefficient K_f. L'air ambiant cause un amortissement c proportionnel à la vitesse de déplacement de la masse. La masse est un disque de diamètre d et d'épaisseur e.

La distance entre les électrodes externes et la masse est de x0 au repos. La masse est centrée entre les électrodes.

On soumet l'accéléromètre à une vibration sinusoïdale $x = x_0 \sin(\omega t)$.

La position est déduite de la mesure de capacité entre la masse et chacune des électrodes.

1. Quelle est la fréquence maximum de la vibration si veut rester 10x sous la fréquence propre du capteur ?
2. Quelle accélération maximum le capteur peut-il mesurer ?
3. Donner l'expression des capacités comme fonction du déplacement. Comment tirer profit des 2 valeurs pour augmenter la résolution ?

[70]:
```python
# 1. Fréquence maximum mesurable

Kf, c, m, e, d, x0, omega, t = sp.symbols('K_f, c, m, e, d, x_0, omega, t')

w0=sp.sqrt(Kf/m)
print("La fréquence max est de ")
deq("f0",w0/10/2/sp.pi)
```

```
La fréquence max est de
```

[70]:

$$f_0 = \frac{\sqrt{\frac{K_f}{m}}}{20\pi}$$

[71]:
```python
# L'accélération maximum est atteinte quand le déplacement vaut x0
a_max=sp.symbols('a_max')
sol=sp.solve(sp.Eq(m*a_max , x0 * Kf),a_max)
print("L'accélération maximum est :")
deq("a_max",sol[0])
```

```
L'accélération maximum est :
```

[71]:

$$a_{max} = \frac{K_f x_0}{m}$$

[72]:
```python
# 3. Calcul de la variation de capacité pour un déplacement dx:
e0,S=sp.symbols('epsilon_0,S')
dx=sp.Symbol("\Delta x")
C1= S/(x0+dx)*e0
C2= S/(x0-dx)*e0
[C1,C2]
```

[72]:

$$\left[\frac{S\epsilon_0}{\Delta x + x_0}, \ \frac{S\epsilon_0}{-\Delta x + x_0}\right]$$

[73]:
```python
sp.simplify(C1-C2) # On soustrait les 2 valeurs pour augmenter la sensibilité
```

[73]:

$$\frac{2S\Delta x\epsilon_0}{(\Delta x - x_0)(\Delta x + x_0)}$$

On peut approximer le dénominateur avec $-x_0^2$, ce qui donne pour la variation de capacité

$$\Delta C = -\frac{2S\epsilon_0}{x_0^2} \cdot \Delta x = -2 \cdot C_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}$$

1.2 7.2 Briquet Piézo-électrique

Un cristal piézo-électrique est construit avec un matériel qui a les propriétés suivantes dans une direction : - coefficient β_l exprimé en [C/mm/N] qui représente la charge induite par unité de force et de longueur du cristal. - perméabilité relative ϵ_r du cristal - Un module d'élasticité E [N/m^2]

On décide d'employer un cristal cylindrique, définit par une hauteur h et un diamètre d.

On aimerait générer une étincelle pour un briquet. Pour celà, la tension doit atteindre V1 volts. Le briquet comporte une gachette qui permet de tendre un ressort avec une masse m et de le relâcher d'un coup contre le cristal piézo-électrique. On a besoin que la force lors de l'impact soit suffisante pour créer une tension qui provoque l'étincelle. La charge électrique générée charge la capacité du cristal et crée ainsi une tension.

Une capacité en parallèle de C_{stray} est présente.

1. Calculer la sensibilité du cristal comme fonction de sa longueur et la capacité électrique comme fonction de la longeur et de la surface. Calculer la tension induite qui en résulte.
2. Comment choisir le rapport entre largeur et longeur ?
3. Quelle force est nécessaire pour créer la tension requise ?
4. Supposont que la masse soit tirée sur un ressort de charge lié à la gachette d'une distance $x1$, que l'énergie est complètement transférée en énergie de compression sur le cristal et que la

force est maximum juste avant l'arrêt. A partir du calcul sur l'énergie stockée par la masse sur un ressort, écrivez une relation entre $x1$ et la force F juste avant l'arrêt.
5. Sur la base des valeurs numériques proposées, quelle est la force nécessaire pour tirer la gachette ?

[74]:
```
# 1. Sensibilité et capacité du cristal
beta_l, d,h,er,e0,F,Cstray = sp.symbols('beta_l,d,h,e_r,e_0,F,C_stray',␣
 ↪positive=True)
Se=beta_l*h # Sensibilité du cristal complet
C=sp.pi*d**2/(4*h)*er*e0
C
# Tension pour une force F
U= Se * F / (C+Cstray)
print("Tension obtenue pour une force F")
U
```

```
Tension obtenue pour une force F
```

[74]:
$$\frac{F\beta_l h}{C_{stray} + \frac{\pi d^2 e_0 e_r}{4h}}$$

[75]:
```
# 2. Le diamètre à intérêt à être petit et la hauteur grande.
#    On a plutôt un cylindre allongé qu'une pastille.
```

[76]:
```
# 3. La force minimale nécessaire pour obtenir une tension V1 est
V1=sp.symbols('V_1', positive=True)
F_min=sp.solve(sp.Eq(V1,U),F)[0]
print("Force nécessaire pour obtenir V1")
F_min
```

```
Force nécessaire pour obtenir V1
```

[76]:
$$\frac{V_1 \cdot (4C_{stray}h + \pi d^2 e_0 e_r)}{4\beta_l h^2}$$

[77]:
```
# 4.1 Relation de l'énergie d'une masse sur un ressort
Kr,x,x1,m,v0,E = sp.symbols('K_ressort,x,x_1,m,v_0,E', positive=True)
F=Kr*x
E_r=F.integrate((x,0,x1))
print("Energie contenue dans un ressort")
deq("E_r",E_r)
```

```
Energie contenue dans un ressort
```

[77]:
$$E_r = \frac{K_{ressort}x_1^2}{2}$$

[78]:
```
# La force maximum qu'une masse subit en ralentissant sur un ressort est␣
 ↪données par
F_max=Kr*x1
```

[79]:
```python
# L'énergie sur le ressort de la poignée doit être égale à l'énergie nécessaire␣
↪pour obtenir la tension
```

[80]:
```python
# 4.2 Pour obtenir une relation entre v0 et la force maximum, on a l'énergie␣
↪cinétique avant l'impact
#        qui doit être égale à l'énergie sur le ressort

# a) On calcule la constante de compressibilité du cristal
E=sp.symbols('E') # Module de compressibilité du cristal
K_cristal, E_min=sp.symbols('K_cristal, E_min', positive=True)
# Pour le cristal piézoélectrique, le module d'élasticité est
K_cristal = E*d**2*sp.pi/(4*h)
print("Constante d'élasticité du cristal")
deq("K_cristal",K_cristal)
```

```
Constante d'élasticité du cristal
```

[80]:

$$K_{cristal} = \frac{\pi E d^2}{4h}$$

[81]:
```python
# b) La force maximum est liée à l'énergie stockée dans le cristal par la␣
↪valeur de K_cristal.
#       L'énergie sur le ressort de la poignée doit être la même que celle␣
↪nécessaire pour générer l'étincelle
Kc=sp.Symbol("K_c", positive=True)
x_charge=sp.Symbol("x_charge", positive=True)
F=sp.Symbol("F", positive=True)

# Relation entre x1 et la force
x1_min=F / Kc

# Résolution de l'équivalence des énergies pour x1
ex1=sp.solve(sp.Eq(x_charge**2/2*Kr, x1_min**2/2*Kc), x_charge)[0]
deq("x1",ex1)
```

[81]:

$$x_1 = \frac{F}{\sqrt{K_c}\sqrt{K_{ressort}}}$$

[82]:
```python
# 5. Force nécessaire sur le ressort de la poignée (constante Kr) pour obtenir␣
↪la force nécessaire
#     même formulation... on a un rapport entre la contraction et la constante␣
↪du ressort
```

[86]:
```python
# Valeur numériques. Force sur le piezzo
valeurs={d:0.003, e0:8.85e-12, er:4.5, E:8e12,beta_l:2.26e-12/0.001, V1:1000,␣
↪Kr:10/0.01, Cstray:20e-12, h:0.01}
F_min.subs(valeurs).subs(h,0.01).evalf()
```

[86]: 886.201355472194

[87]:
```python
# Force pour armer le ressort
F_ressort = ex1*Kr
F_ressort
```

[87]:
$$\frac{F\sqrt{K_{ressort}}}{\sqrt{K_c}}$$

[91]:
```python
F_ressort.subs(Kc,K_cristal).subs(F,F_min).subs(valeurs).evalf()
```

[91]:
0.372667243508373

[92]:
```python
C.subs(valeurs).subs(h,0.01).evalf()
```

[92]:
$2.8150633671573 \cdot 10^{-14}$

[94]:
```python
[K_cristal.subs(valeurs), Kr.subs(valeurs)]
```

[94]:
$[1800000000.0\pi,\ 1000.0]$

1.3 7.3 Equilibrage d'une roue

Une installation permet de faire tourner une roue de voiture. Le moteur est monté sur une suspension avec un accéléromètre. Un codeur incrémental permet d'avoir la position angulaire de la roue. Un index est utilisé pour repérer la position absolue.

Le moteur fait tourner la roue à une vitesse N[rpm]. Le compteur associé au codeur incrémental de N stries compte toutes les transitions des signaux A et B.

Le signal venant de l'accéléromètre est de forme sinusoïdale $s(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)[V]$. On a relevé que le compteur atteint une valeur M1 lorsque le signal est en début de période ($t = 0$).

On utilise un accéléromètre piézo-électrique de sensibilité S connecté à un amplificateur de charge de gain g[V/C]. Il est monté sur le moteur. L'ensemble d'entraînement a une masse m_E.

A quelle position M2 du compteur faut-il placer une masse d'équilibrage, et de quelle grandeur ?

[ ]:
```python

```

[97]:
```python
# L'accélération observée correspond à un excès de masse dans une direction.␣
↪Cet excès
# de masse provoque une force qui "secoue" le moteur.
m_e,a,w,d,m, F_c=sp.symbols('m_e,a,omega,d,m,F_c')

# Expression de la force centrifuge
eF_c=w**2*d*m

# La force centrige est équivalent à une masse à une distance de l'axe
print("la masse doit être de ")
deq("m_eq",sp.solve(sp.Eq(F_c,eF_c),m)[0])
```

```
la masse doit être de
```

[97]:

$$m_{eq} = \frac{F_c}{d\omega^2}$$

[98]:

```
# La position est doit être à l'opposé du pic d'accélération. La position M1␣
↪correspond
# à 90° avant le pic. Il faut mettre la masse à M2=M1-2*N
```

[ ]:

```
```