

Instrumentation

Joseph Moerschell, Marc Nicollerat

4 Régression linéaire et calibration

- Calcul de la meilleure droite
- Etalonnage
- Chaîne de calibration

4.1 Calcul de la meilleure droite

Calcul de la meilleure droite de la fonction

$$signal = f(mesurande)$$

L'étalonnage du capteur fournit à l'expérimentateur un certain nombre de points associés (x_i, y_i) qui, même pour un capteur théoriquement linéaire, ne sont pas forcément tous alignés du fait de l'imprécision des mesures ou des imperfections dans la réalisation du capteur.

Solution : Le Calcul De La “meilleure droite” !

4.2 Meilleure droite

On cherche une droite qui minimise l'erreur entre les mesures et les points calculés. Ceci revient à chercher a et b dans l'équation de la droite :

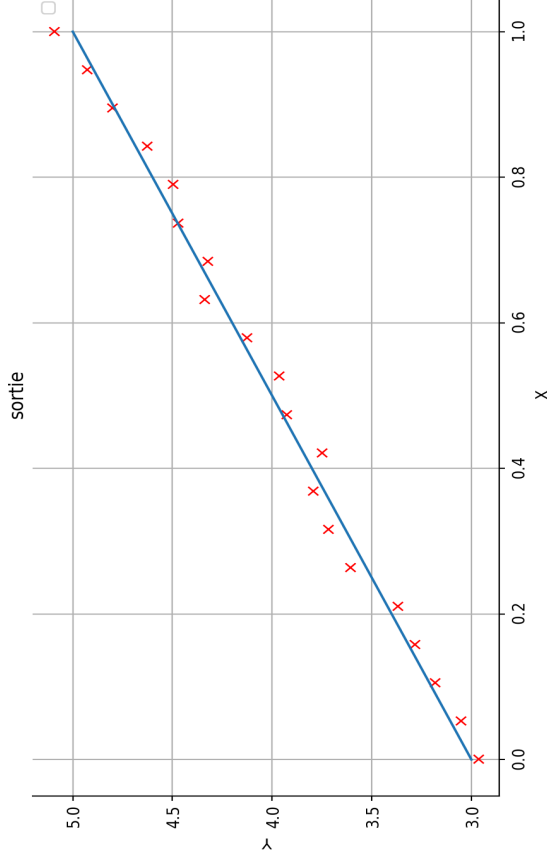
$$y = a \cdot x + b$$

Si on mesure N points x_i, y_i , on aura N erreurs de mesure $\sigma_i = y(x_i) - y_i$.

On définit :

$$S = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

qu'on veut minimiser en choisissant bien a et b .



❗ Important

Il s'agit d'une droite de **régression linéaire** basée sur la méthode des moindres carrés.

4.3 Calcul des coefficients de la meilleure droite

On peut calculer les coefficients de la meilleure droite avec les équations suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^N 1 = N & S_x &= \sum_{i=1}^N x_i \\ S_y &= \sum_{i=1}^N y_i & S_{xx} &= \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ D &= S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2 \\ a &= \frac{S_1 \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{D} & b &= \frac{S_y \cdot S_{xx} - S_x \cdot S_{xy}}{D} \end{aligned}$$

ou avec python :

▼ Code

```
1 import numpy as np
2 poly=np.polyfit(Gs, RSs,1)
3 poly
```

```
array([2.03439267, 2.97474592])
```

4.4 Résolution avec calcul matriciel

On peut résoudre le problème avec le calcul matriciel :

$$y = A \cdot \theta$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$E2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 = (y - A \cdot \theta)^T \cdot (y - A \cdot \theta)$$

$$E2 = y^T y - (A\theta)^T y - y^T A\theta + (A\theta)^T A\theta$$

$$E2 = y^T y - 2(A\theta)^T y + (A\theta)^T A\theta$$

$$\frac{\partial E2}{\partial \theta} = -2 * A^T y + 2A^T A\theta$$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y$$

4.5 Exercice

Soient les trois points suivants de calibration :

- x correspond à la mesurande (mesurée en °C).
- y correspond au signal (mesuré en volts).

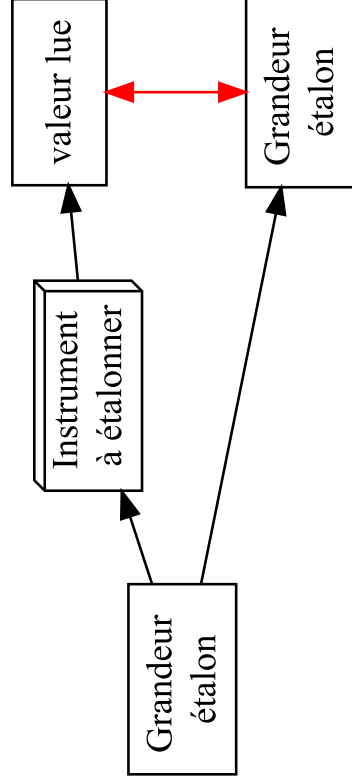
i	x	y	σ
1	1	2	1.0
2	3	3	0.1
3	5	5	0.1

1. Déterminer a et b de la meilleure droite passant par les points de calibration
 - a. sans tenir compte de l'erreur
 - b. en tenant compte de l'erreur
2. Quelle est la sensibilité de ce capteur

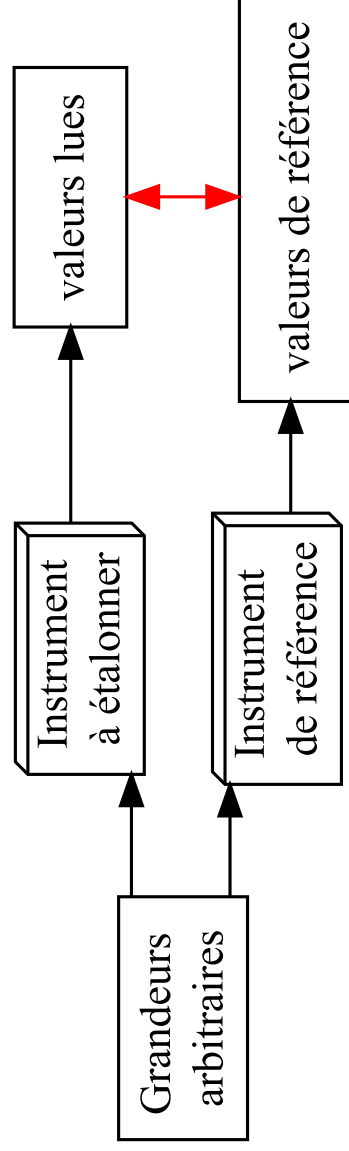
4.6 Etalonnage

L'étalonnage consiste à vérifier qu'un instrument fonctionne correctement et avec la précision convenue.

4.6.1 Comparaison à une référence



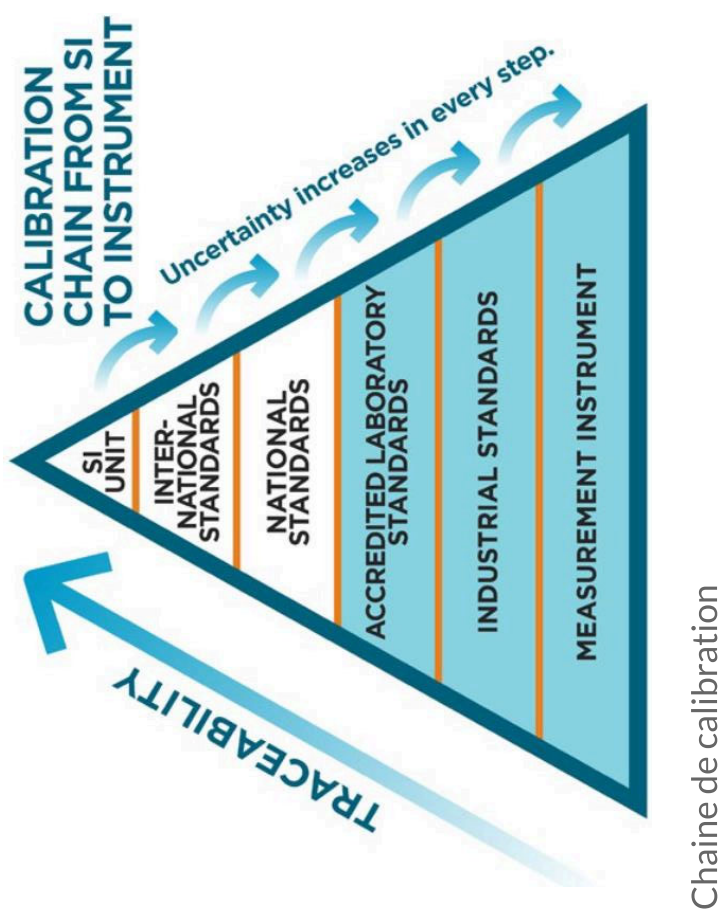
4.6.2 Comparaison avec un instrument de référence



4.7 Chaîne de calibration

Afin d'avoir tous les mêmes références, le système est organisé en pyramide. Chaque pays y va de son institut !

- Institut fédéral de métrologie METAS
- Bureau international des poids et mesures
- Physikalisch-Technische Bundesanstalt
- National Metrology Institute of Italy
- National Institute of Standards and technology
- National Metrology Institute of Japan



4.8 Exercice : Etalonnage par comparaison

- Selon documents Pr. Joseph Moerschell (cyberlearn)
- ex_4.1-etalonnage-par-comparaison.ipynb