Instrumentation

Pr. Joseph Moerschell, Dr. Marc Nicollerat

4 Régression linéaire et calibration

4.1 Calcul de la meilleure droite

Calcul de la meilleure droite de la fonction

$$signal = f(mesurande)$$

L’étalonnage du capteur fournit à l’expérimentateur un certain nombre de points associés (xi, yi) qui, même pour un capteur théoriquement linéaire, ne sont pas forcément tous alignés du fait de l’imprécision des mesures ou des imperfections dans la réalisation du capteur.

Solution : Le Calcul De La “meilleure droite” !

4.2 Meilleure droite

On cherche une droite qui minimise l'erreur entre les mesures et les points calculés. Ceci revient à chercher a et b dans l'équation de la droite :

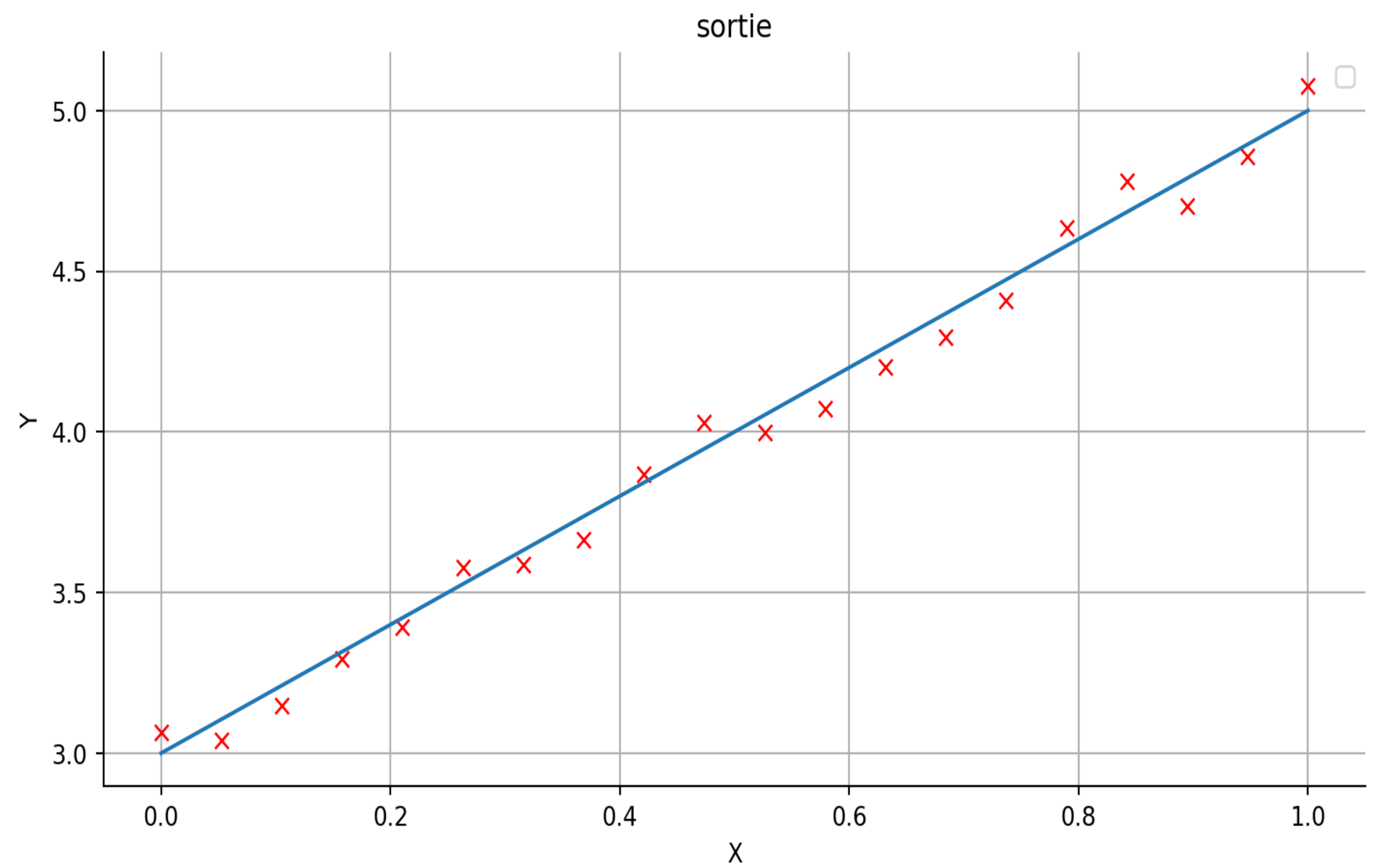
$$y = a \cdot x + b$$

Si on mesure N points x_i, y_i, on aura N erreurs de mesure $\sigma_i = y(x_i) - y_i$.

On définit :

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

qu'on veut minimiser.



Important

Il s'agit d'une droite de **régression linéaire** basée sur la méthode des moindres carrés.

4.3 Calcul des coefficients de la meilleure droite

On peut calculer les coefficients de la meilleure droite avec les équations suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad S_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \qquad S_x x = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$$

$$S_x y = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2}$$

$$D = S_1 \cdot Sxx - S_x^2$$

$$a = \frac{S_1 \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{D} \qquad b = \frac{S_y \cdot S_x x - S_x \cdot S_{xy}}{D}$$

ou avec python :

▼ Code

```python
import numpy as np
poly=np.polyfit(Gs, RSs,1)
poly
```

```
array([2.01530121, 2.97699598])
```

4.4 Résolution avec calcul matriciel

On peut résoudre le problème avec le calcul matriciel :

$$y = A \cdot \theta$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$E2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 = (y - A \cdot \theta)^T \cdot (y - A \cdot \theta)$$

$$E2 = y^T y - (A\theta)^T y - y^T A\theta + (A\theta)^T A\theta$$

$$E2 = y^T y - 2(A\theta)^T y + (A\theta)^T A\theta$$

$$\frac{\partial E2}{\partial \theta} = -2 * A^T y + 2A^T A\theta$$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y$$

4.5 Exercice

Soient les trois points suivants de calibration :

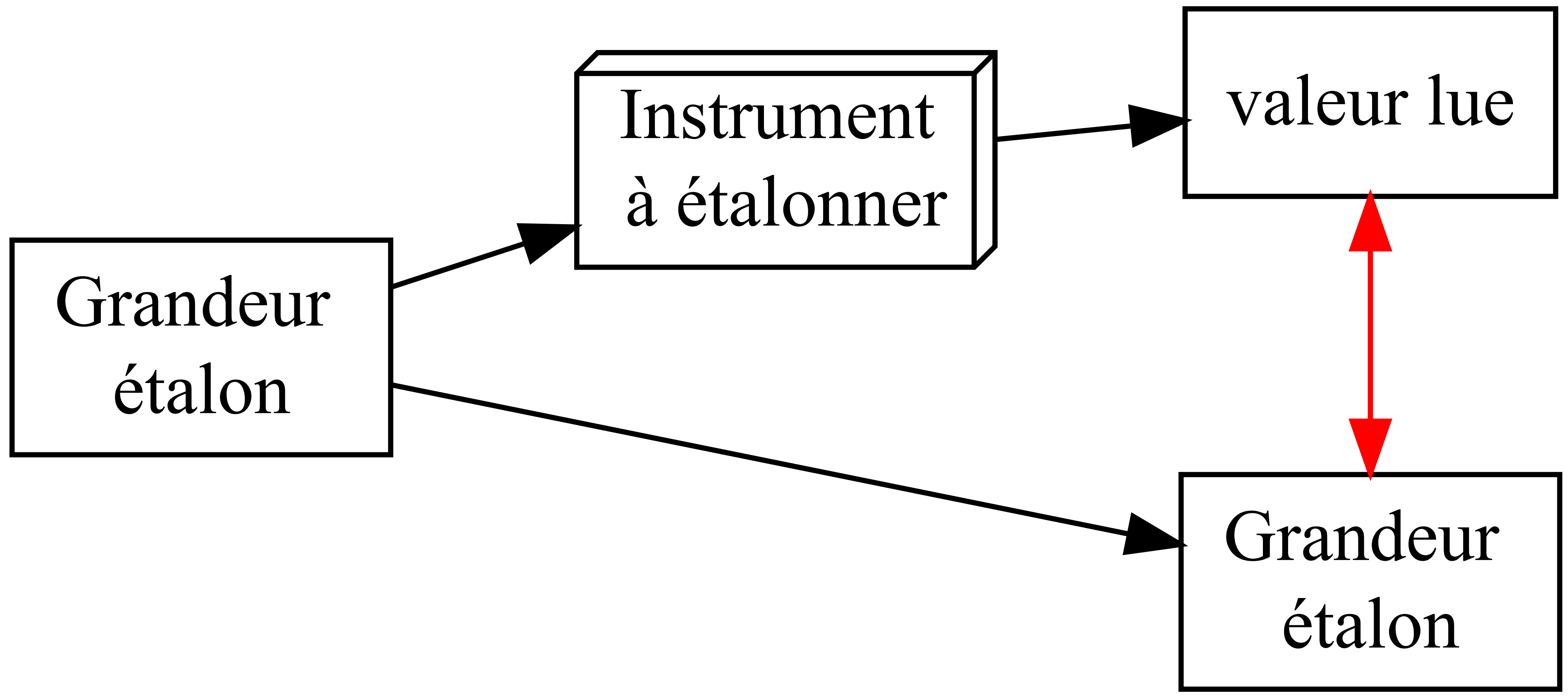
- x correspond à la mesurande (mesurée en ˚C).
- y correspond au signal (mesuré en volts).

i	x	y	σ
1	1	2	1.0
2	3	3	0.1
3	5	5	0.1

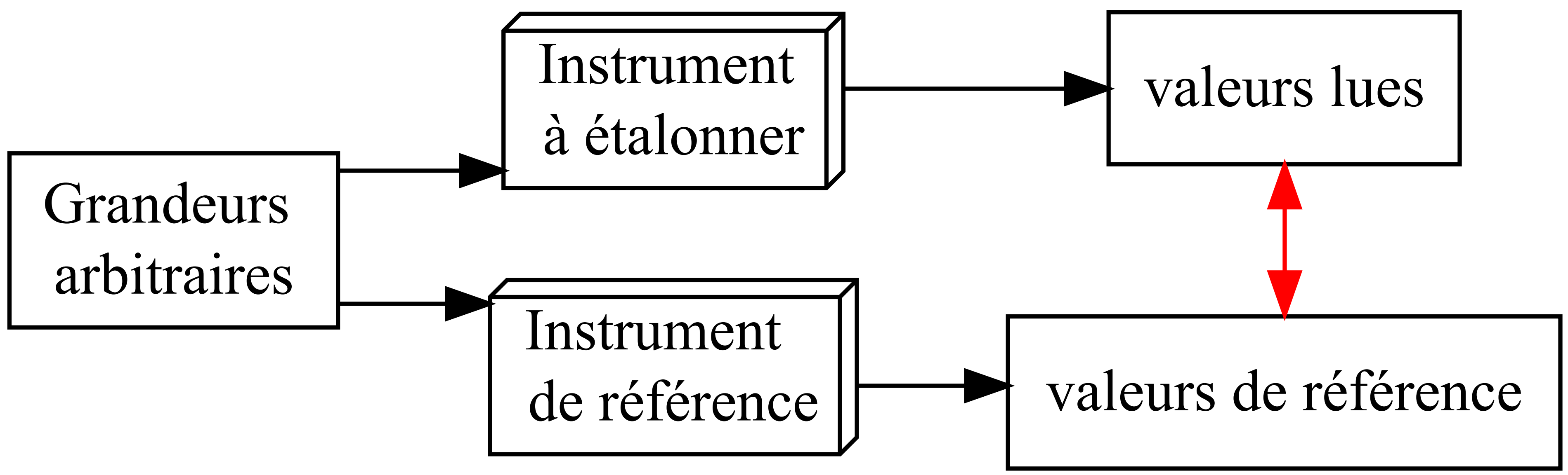
1. Déterminer a et b de la meilleure droite passant par les points de calibration (sans tenir compte de l'erreur)
2. Déterminer a et b de la meilleure droite passant par les points de calibration (en tenant compte de l'erreur)
3. Quelle est la sensibilité de ce capteur

4.6 Etalonnage

4.6.1 Comparaison à une référence



4.6.2 Comparaison avec un instrument de référence



4.7 Exercice : Etalonnage par comparaison

- Selon documents Pr. Joseph Moerschell (cyberlearn)
- ex-etalonnage-par-comparaison.ipynb