Instrumentation

Joseph Moerschell, Marc Nicollerat

11 Autocorrélation et corrélation croisée

- Définition de la *corrélation*
- Différence avec la *convolution*
- Propriétés de quelques signaux
- Version échantillonnées de la corrélation
- Mesure de distance par corrélation

11.1 Définition de la *corrélation croisée*

La corrélation croisée consiste à combiner deux signaux pour en déterminer les similitudes.

$$(A * B)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot B^*(t - \tau) dt$$

Tip

B^* est le complexe conjugué. Dans le cas de signaux réels, cette opération n'a pas d'effet.

Source

Wiki

11.2 Différence avec la *convolution*

La convolution de 2 signaux est une opération très présente dans le traitement du signal. D'un point de vue mathématique, il s'agit de faire cette opération :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt$$

La différence mathématique tient dans l'argument de la fonction g : la variable d'intégration t a un signe $-$. Dans le cas de la convolution, on fait une *symétrie verticale* d'un des signaux.

De façon générale, la corrélation est utilisée pour *modifier* un signal par un autre, par exemple pour faire un filtre.

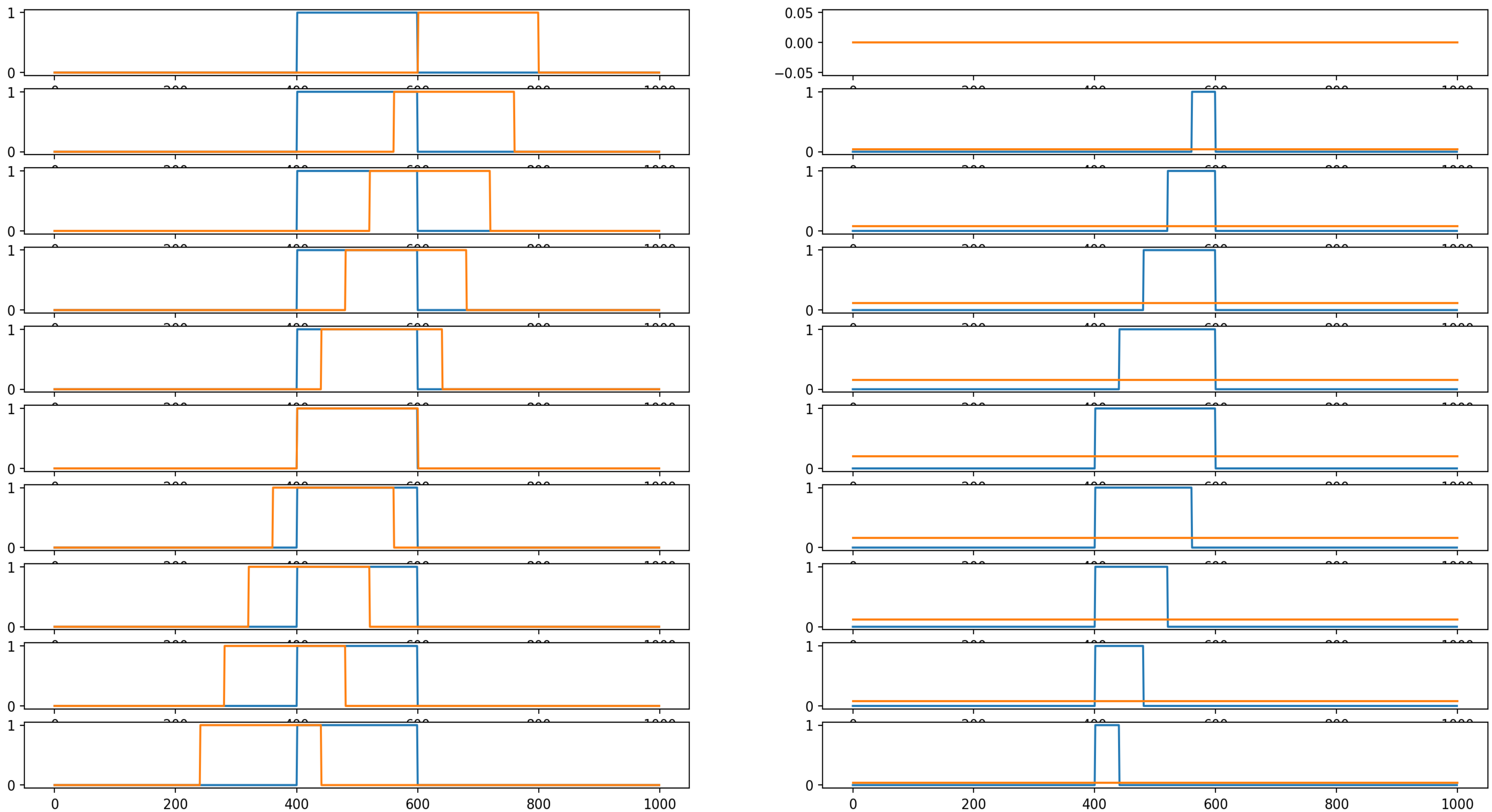
Source

Wiki

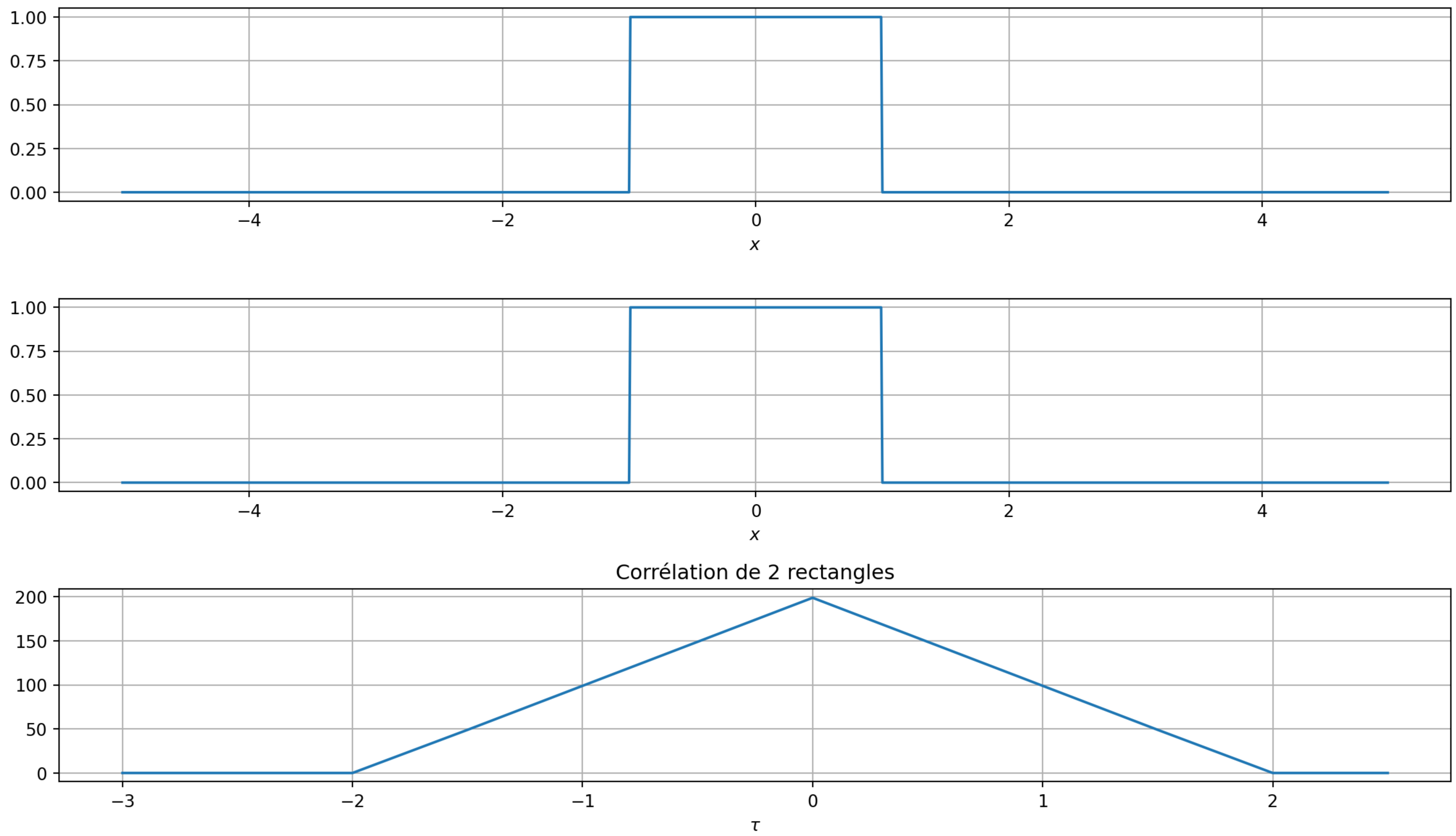
11.3 Principe de la corrélation

Le principe de la corrélation est de comparer 2 signaux en calculant l'intégrale du produit des 2 signaux.

On introduit une variable qui est un *décalage* entre les signaux. La figure illustre l'opération pour des signaux simples.



11.4 Corrélation de 2 rectangles

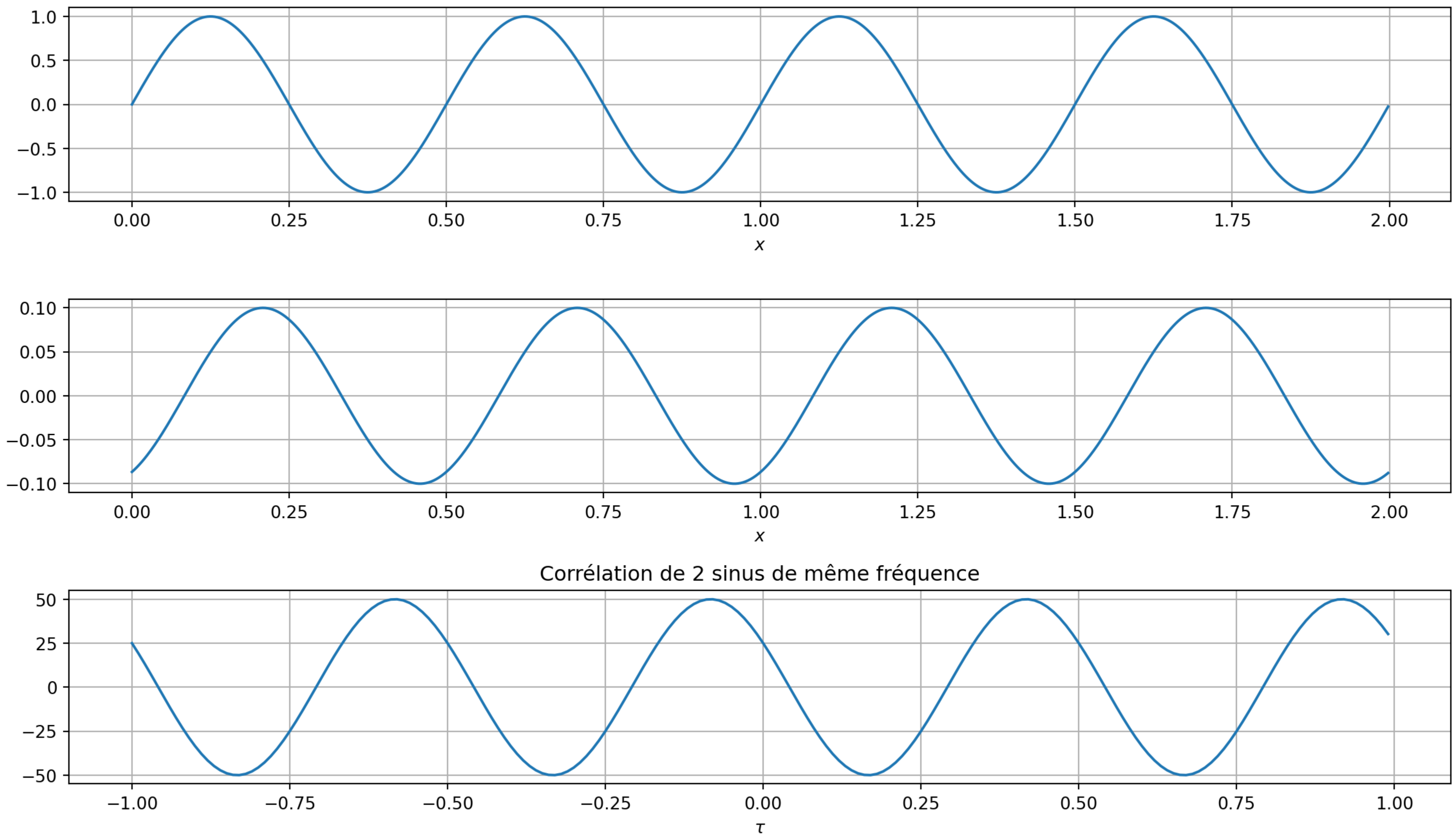


Tip

Le maximum de la fonction de corrélation de 2 signaux identiques est à l'origine.

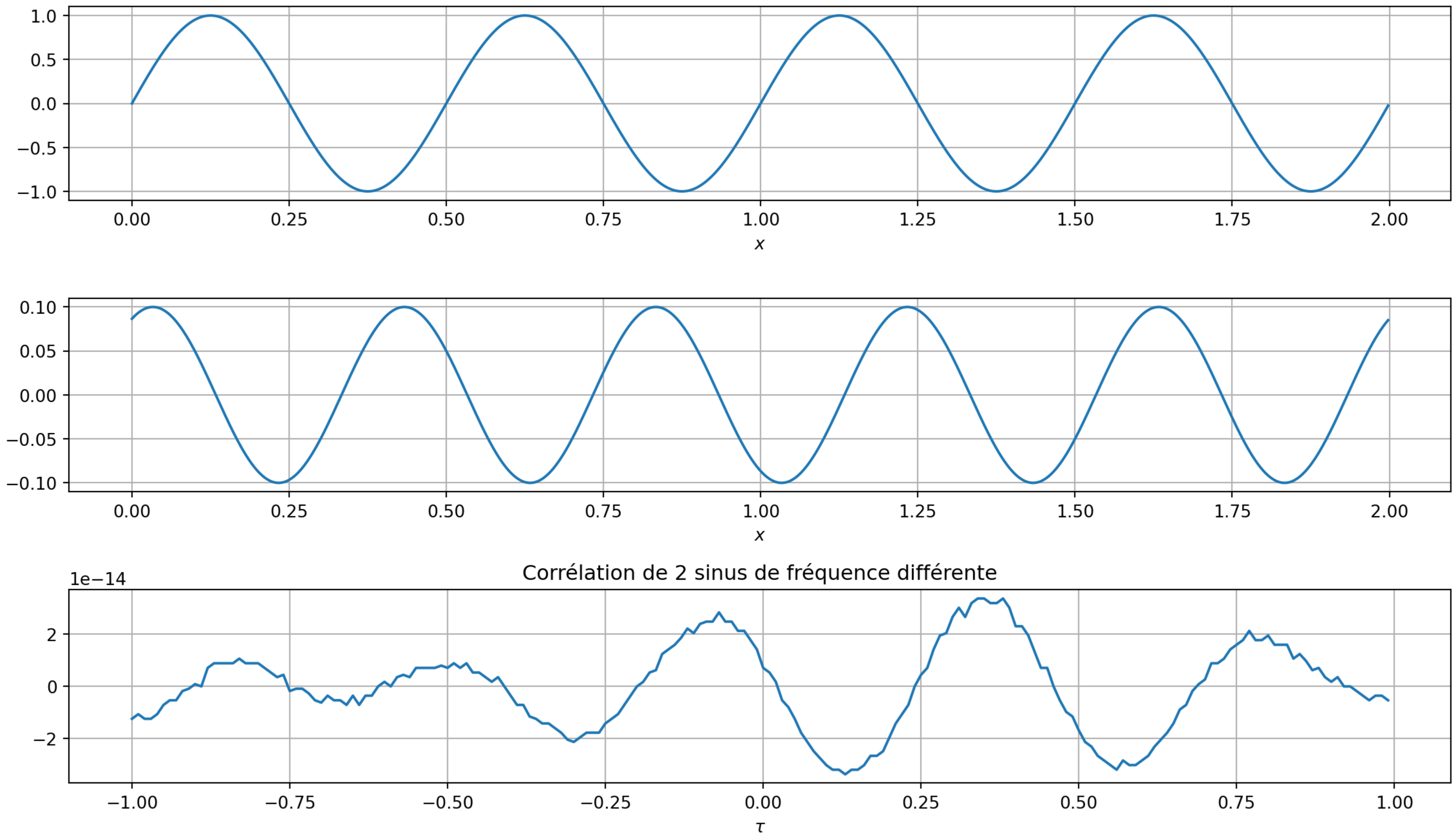
11.5 Résultat de la corrélation de 2 sinusoïdes

Si on corrèle 2 sinusoïdes de même fréquence, on obtient un résultat qui diverge vers l'infini. La figure montre le résultat *pour des bornes d'intégration finies*.



11.6 Résultat de la corrélation de 2 sinusoïdes de fréquences différentes

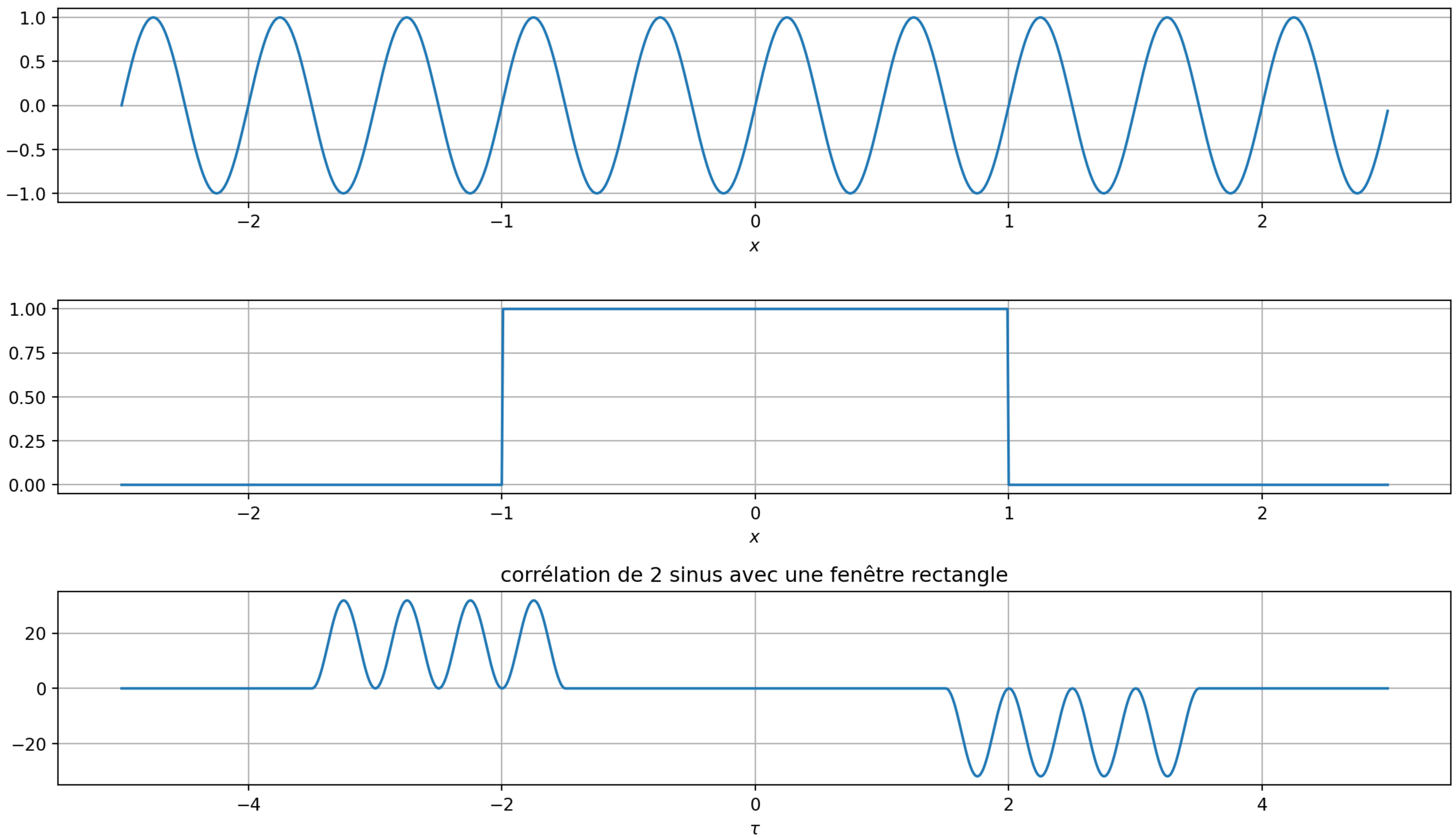
Si les sinusoïdes sont décalées, le résultat de la corrélation est quasi-nul.



Note

L'amplitude du résultat est nettement moins grande.

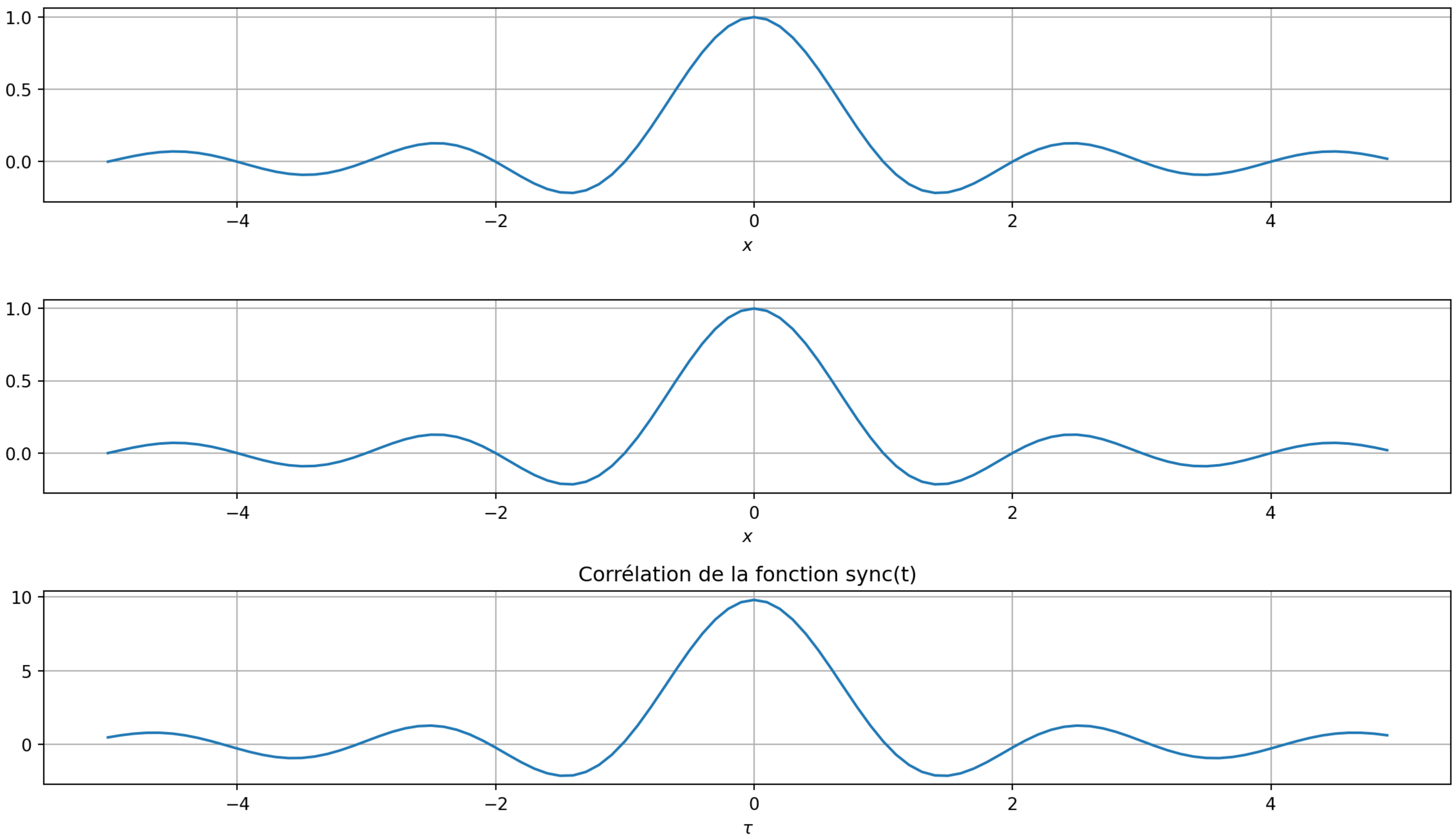
11.7 Resultat de la corrélation d'une sinusoïde et d'un rectangle



Note

Au centre, la corrélation est nulle, pourquoi ?

11.8 Corrélation de la fonction sync



11.9 Version discrète de la corrélation

Pour 2 signaux discrets A et B définis sur N1 et N2 échantillons, on peut définir la version discrète de la corrélation par :

$$(a * b)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a[n] \cdot b^*[n-k] \qquad (1)$$

où N est le nombre d'échantillons comparés.

- Les signaux on chacun un certain nombre d'échantillons qui peuvent être différents.
- On peut les corréler de façon étendue, en considérant que les échantillons sont nuls en dehors de la plage définie

$$A[n] = 0, \text{si } n < 0 \text{ ou } n \geq N1$$

- L'indice k peut être négatif

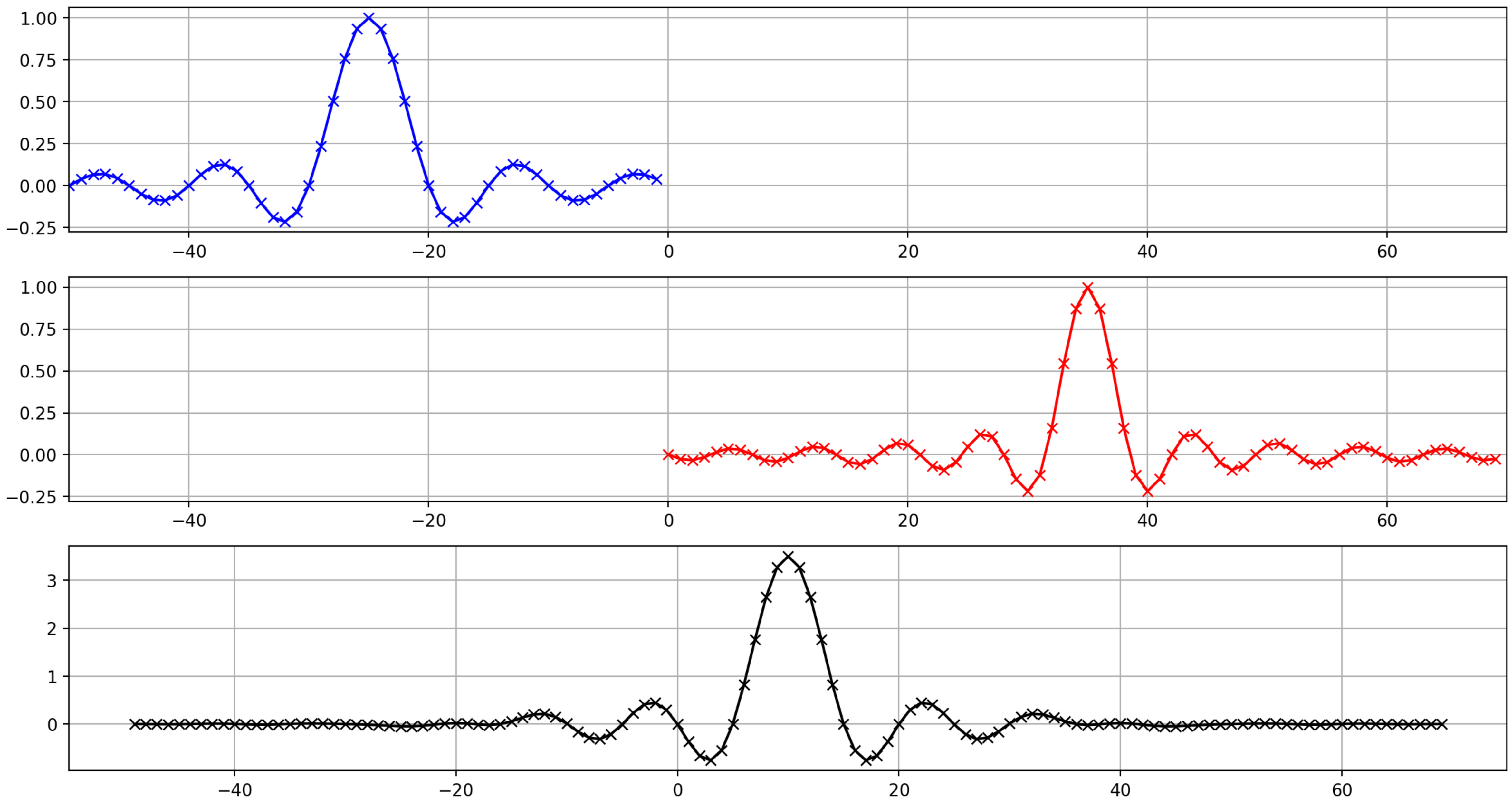
Exercice

- Dans la relation Equation 1 ci-dessus, comment choisir N et quelle est la plage de k qui fait qu'au moins 1 échantillon de part et d'autre des signaux est corrélé.
- Montrer que la formule ci-contre donne le même résultat

$$(a * b)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a[n+k] \cdot b^*[n]$$

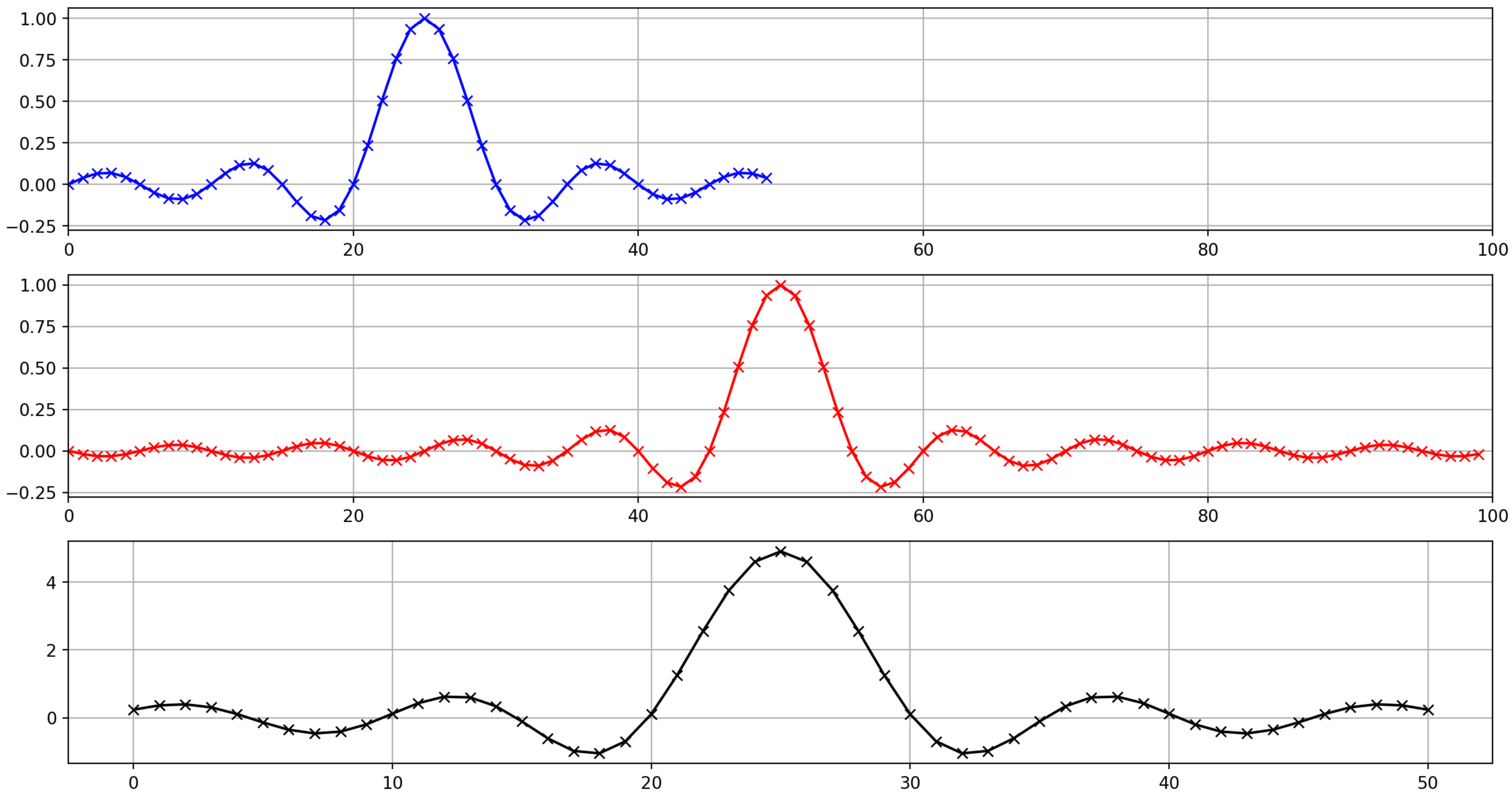
11.10 Exemple de corrélation étendue

Dans le cas de la corrélation étendue, la corrélation est effectuée en partant du croisement minimum des 2 signaux.



Le résultat a un nombre de points $M = N1 + N2 - 1$.

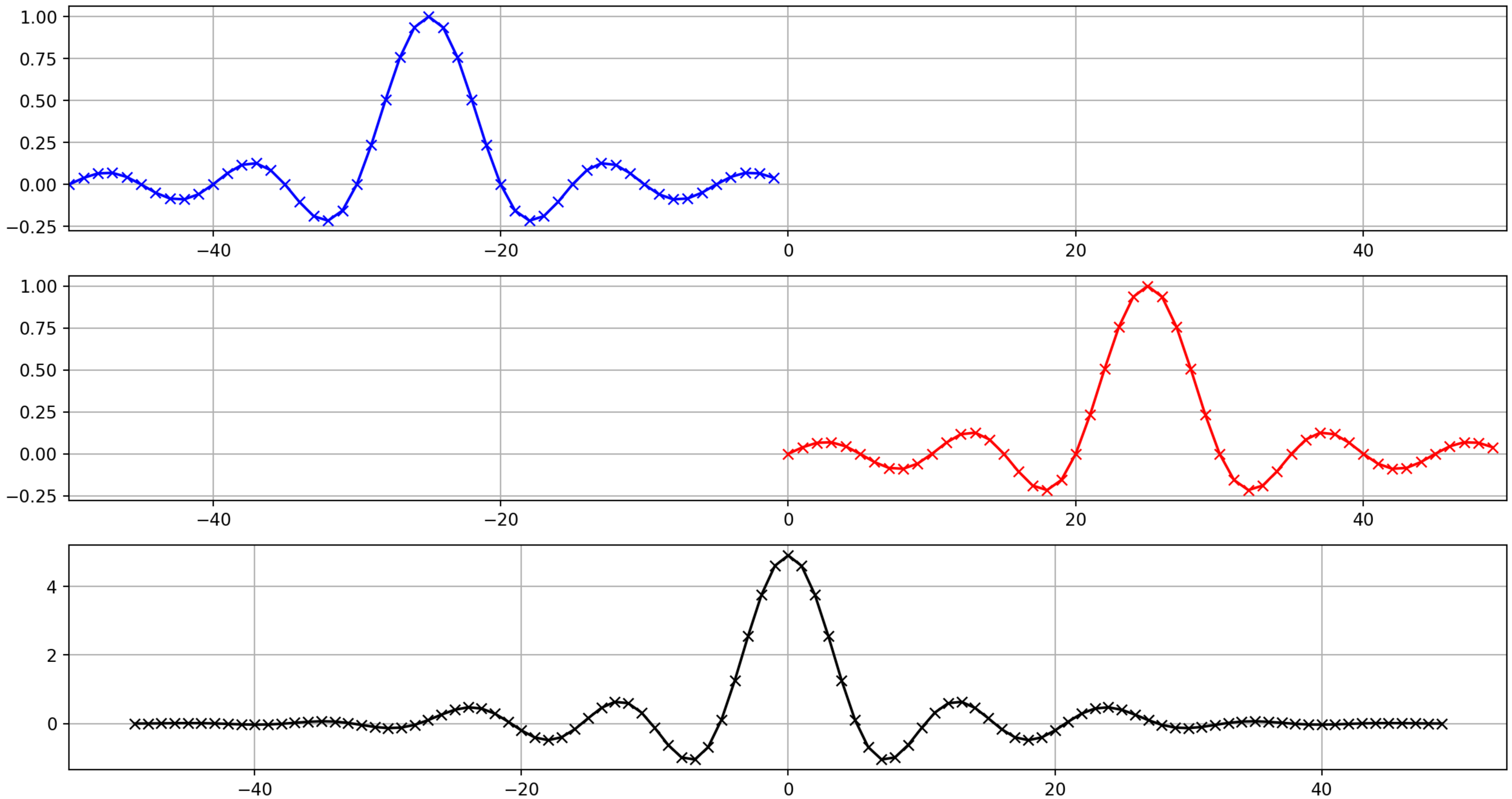
11.11 Exemple de corrélation limitée aux signaux valides



Le résultat a un nombre de point $M = N2 - N1 + 1$.

11.12 Autocorrélation

On peut corréler un signal avec lui-même et mesurer son autocorrélation.

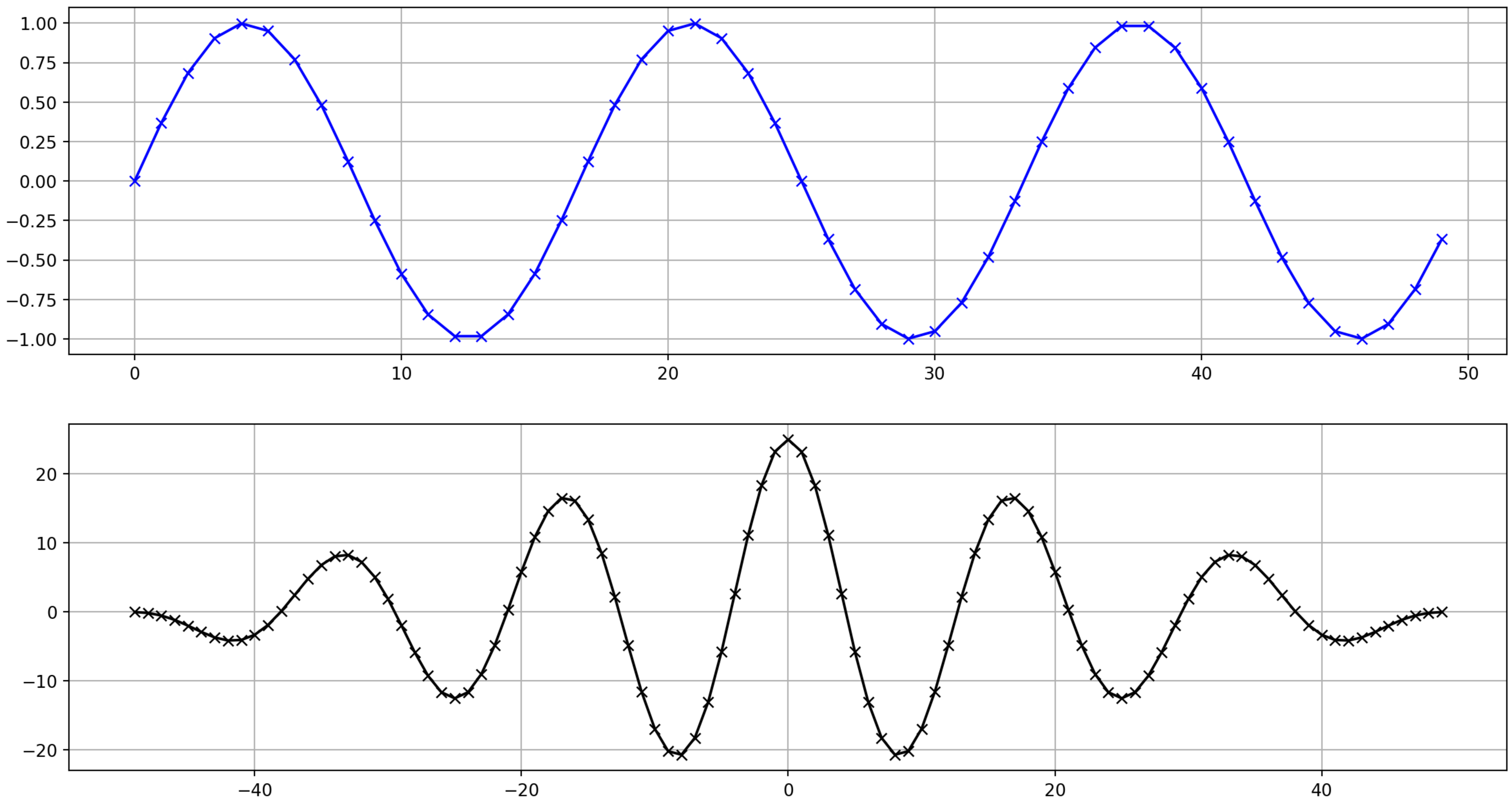


Tip

L'autocorrélation est maximum pour lorsque le décalage est nul.

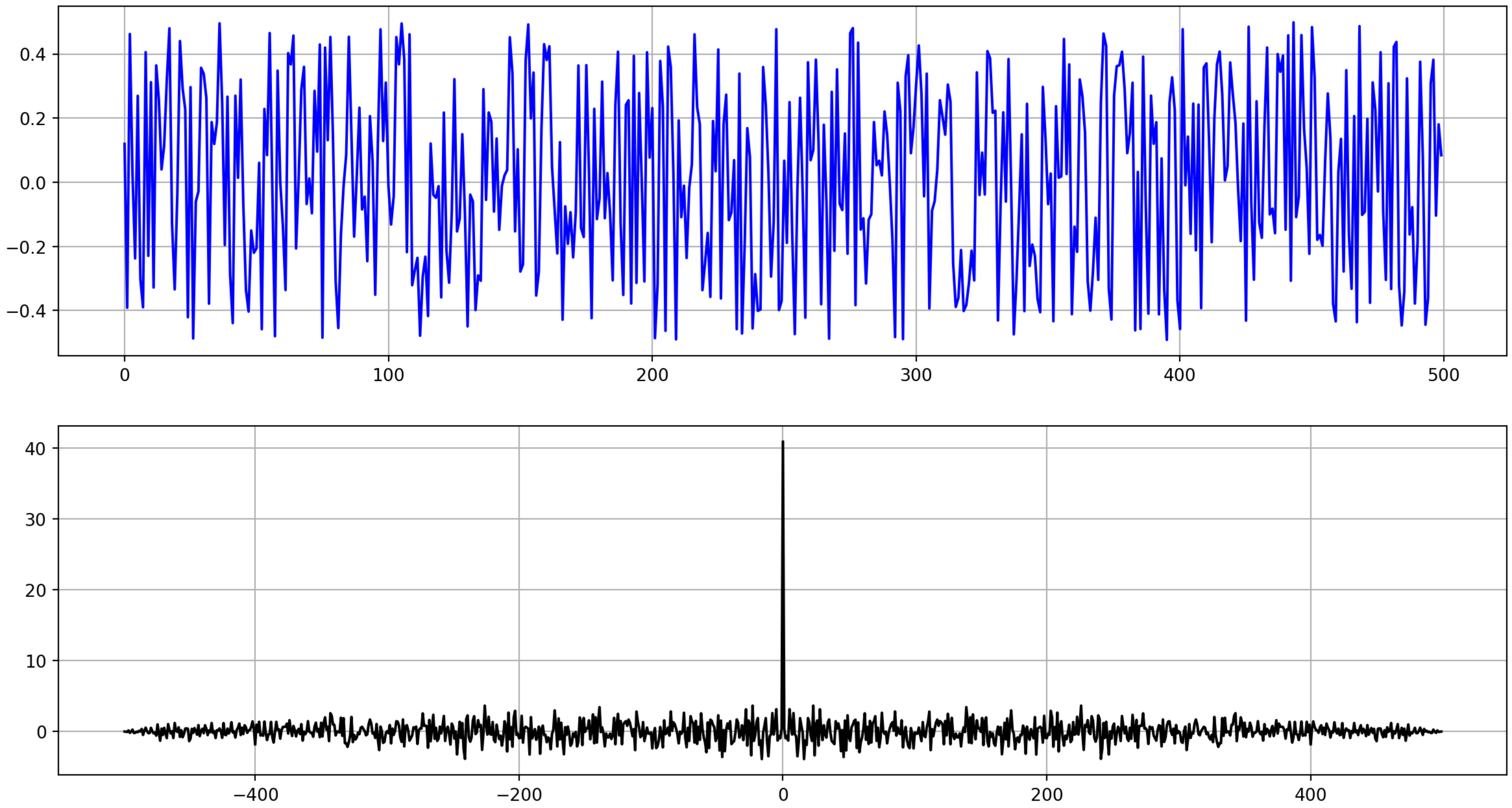
11.13 Autocorrélation d'un signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal de longueur limitée produit un signal alterné qui s'amplifie pour atteindre un maximum au centre.



11.14 Autocorrélation d'un signal aléatoire

Un signal aléatoire a une autocorrélation faible, sauf à l'origine.

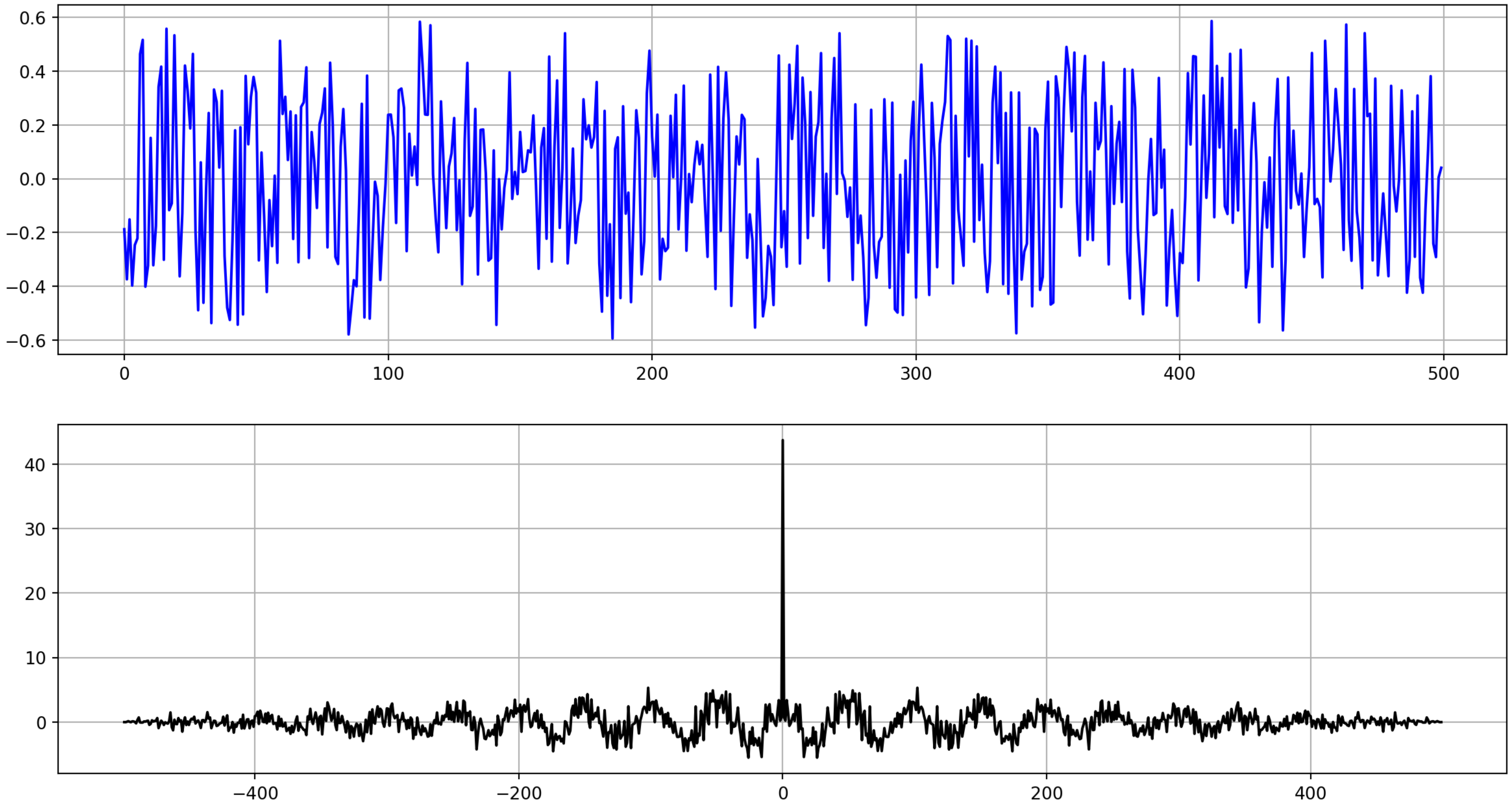


11.15 Autocorrélation d'un signal plus complexe

Dans cet exemple, on a modélisé un signal comme suit :

$$S[k] = \frac{1}{10}\sin(2\pi f_0 k / N) + rand() - 0.5$$

Il est difficile de voir le signal sinusoïdal dans le bruit.



Comme on peut le voir sur le graphique, l'autocorrélation permet de détecter la composante sinusoïdale du signal.

11.16 Exercices

- Quelle est le résultat de la corrélation de ces 2 signaux échantillonnés ?

```
S1=[1,0,0,-2,0,0,1]
S2=[-1,0,0,2,0,0,-1]
```

- Calculez le résultat de la corrélation de $sync(t)$ avec $\delta(t - t0)$?

Note

Le jupyter notebook ex_11.1_Correlations.ipynb reprend ces exercices.

11.17 Mesure de Distance

Un principe de mesure de distance est d'utiliser le temps de propagation d'un signal. Un sonar fonctionne sur ce principe : un son est émis, et on mesure le temps nécessaire à l'écho pour revenir.

Exercice

- Quelle durée doit avoir un signal si on veut qu'il soit terminé lorsque l'écho contre un objet situé à 10 cm revient ?
- Quelle fréquence devrait avoir le signal pour qu'au moins 10 périodes soient générées ?

11.18 Mesure de distance avec la corrélation croisée.

En utilisant la propriété du signal aléatoire, on peut faire une mesure de distance avec une corrélation croisée. En corrélant le signal émis avec le signal reçu, on pourra déduire la distance de la position

Exercice

- Faire un schéma de l'installation nécessaire

Tip

Ceci fait l'objet du TP