

Instrumentation

Joseph Moerschell, Marc Nicollrat

10 Analyse fréquentielle : DFT et FFT

- Dualité temps-fréquence
- Échantillonnage
- Transformée de Fourier discrète, FFT
- Fenêtrage

10.1 Rappel : Transformation de Fourier

La transformation de Fourier établit une relation entre un signal dans le temps et sa représentation spectrale :

$$X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\xi t} dt$$

Plusieurs formes sont possibles, la forme suivante permet de mettre en évidence la relation avec la fréquence :

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ permet d'avoir une symétrie entre transformée directe et inverse.

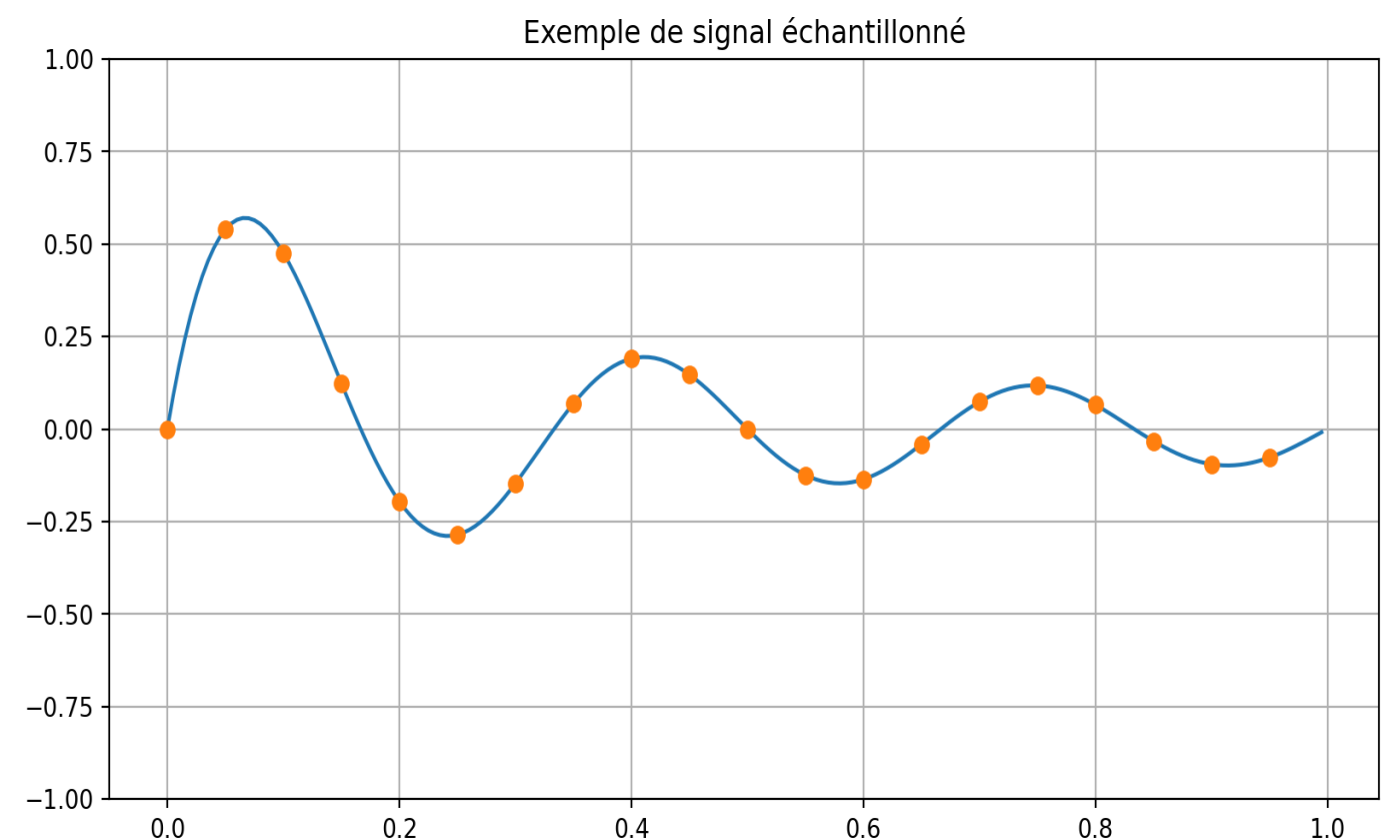
10.2 Échantillonnage d'un signal

On peut définir la version *discrète* de la transformée de Fourier qui agit sur un signal échantillonné. Un signal échantillonné à une fréquence d'échantillonnage T_e est défini comme suit :

$$x_e[n] = x(n \cdot T_e)$$

soit la valeur $x(t)$ pour $t = n \cdot T_e$.

Le signal échantillonné est quelque chose de moins abstrait, il est limité dans le temps, avec un nombre fini (N) d'échantillons. De façon similaire à la version continue, on peut définir la **Transformée de Fourier Discrète** ou TFD



```
signal: [ 0.00000000e+00  5.39344663e-01
 4.75528258e-01  1.23606798e-01
 -1.95928417e-01 -2.85714286e-01 -1.46946313e-01
 6.86704432e-02
 1.90211303e-01  1.47093999e-01  6.12323400e-17
 -1.24464153e-01
 -1.35865217e-01 -4.12022659e-02  7.34731565e-02
 1.17647059e-01
 6.53094725e-02 -3.25281047e-02 -9.51056516e-02
 7.70492376e-02]
```

10.3 Transformation de Fourier discrète

En anglais **Discrete Fourier Transform (DFT)**

La définition de la transformée discrète est proche de sa version continue :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}$$

L'opération est *inversible*, on a la relation suivante pour trouver x à partir de X:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j \frac{2\pi n}{N} k}$$

La transformée est définie pour $0 < k \leq N$.

Tip

Ceci revient à multiplier tous les échantillons de $x[n]$ par les échantillons $e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}$ pour une valeur de k. Pour avoir une valeur de $X[k]$, il faut multiplier et additionner N éléments.

Note

On note par une *majuscule* la transformée, et par une *minuscule* le signal

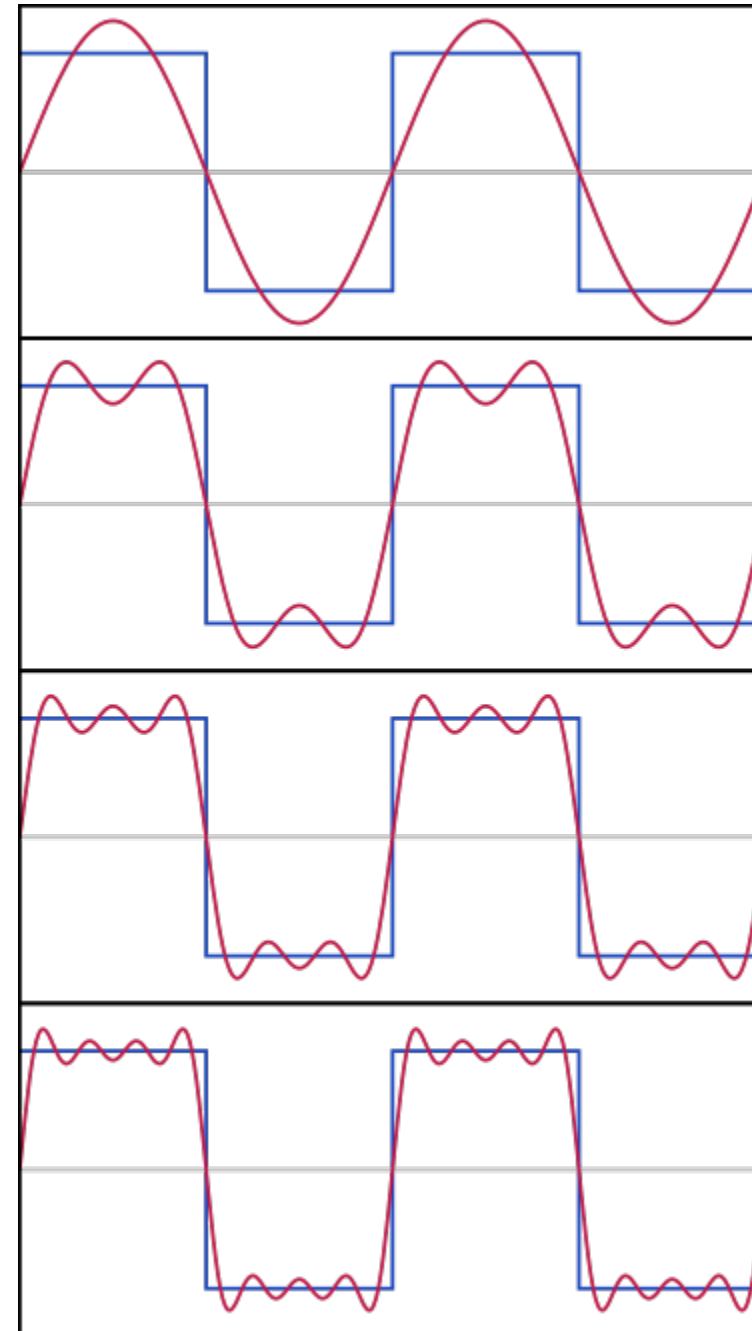
10.4 Illustration du principe de la décomposition

La Série de Fourier est la décomposition d'un signal périodique quelconque en une somme de composantes fondamentales (des sinus et des cosinus...).

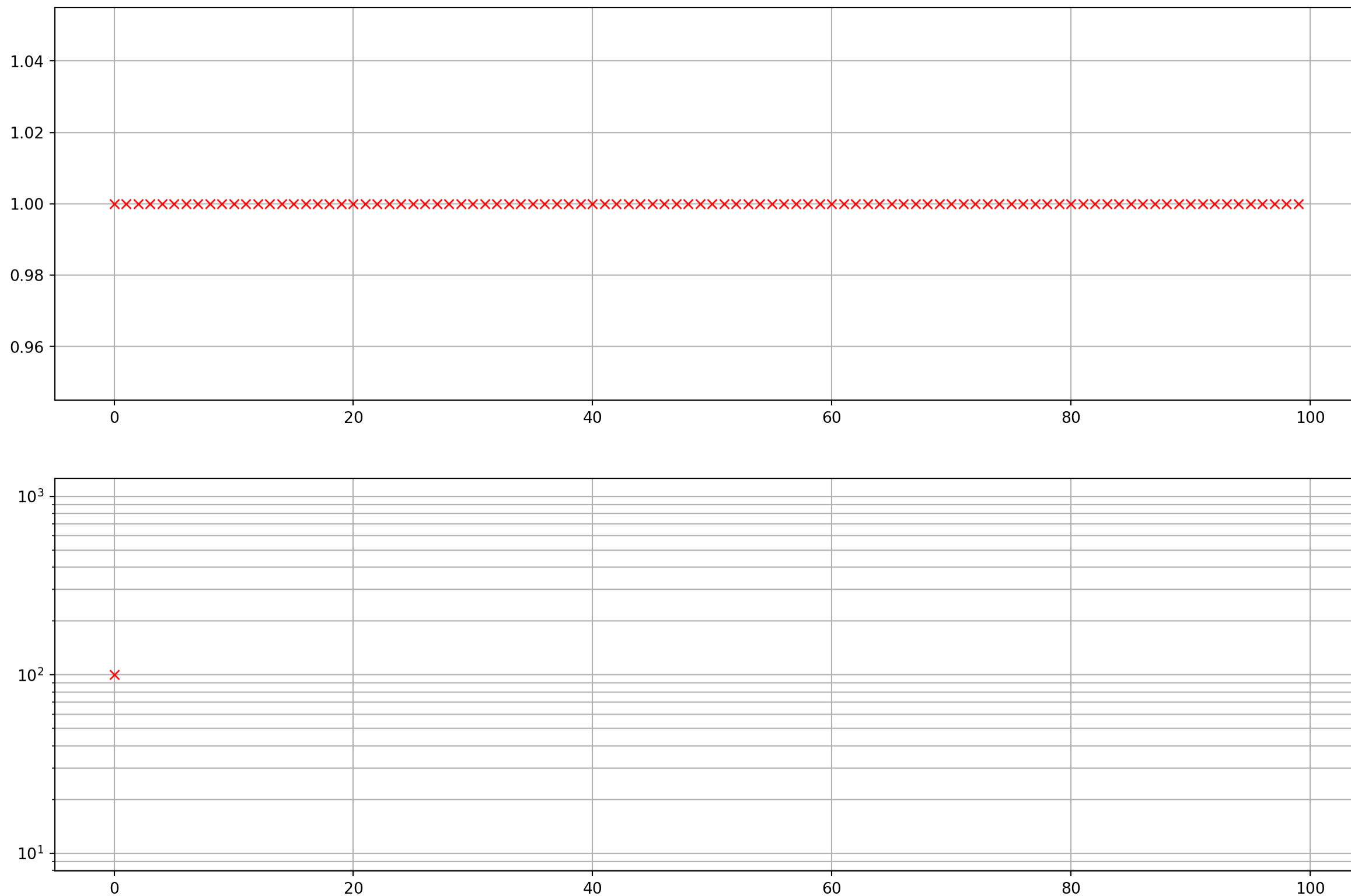
Expérimentation

Le jupyter notebook `dev_ch10.1_inside_dft` permet de jouer avec le principe de la décomposition.

- Signal carré
- Convolution avec un sin/cos de même période
- Soustraction du résultat
- Itération avec les fréquences, jusqu'à 0



10.5 Exemples : DFT d'une constante

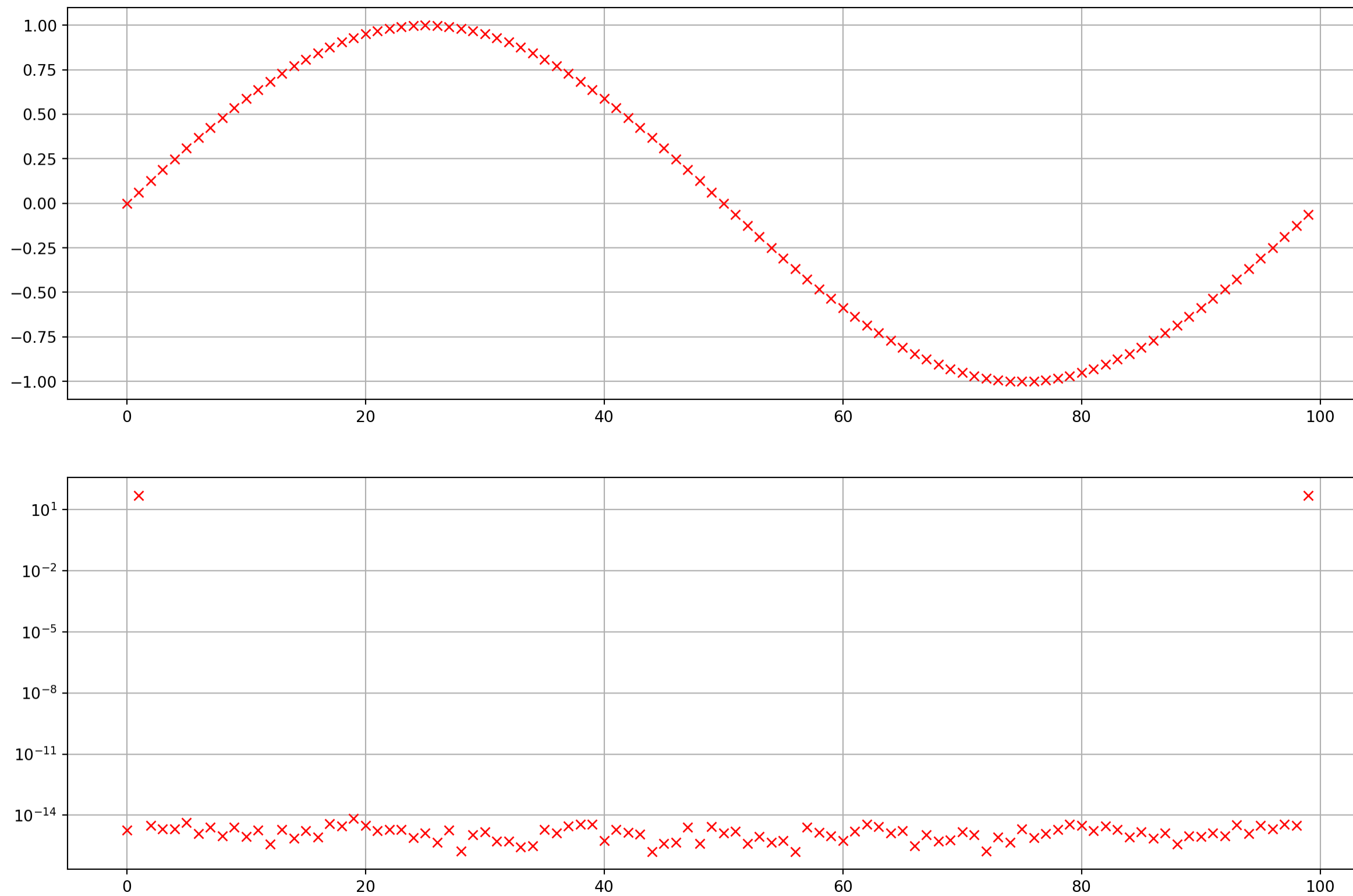


Seule la première valeur est non nulle.

Important

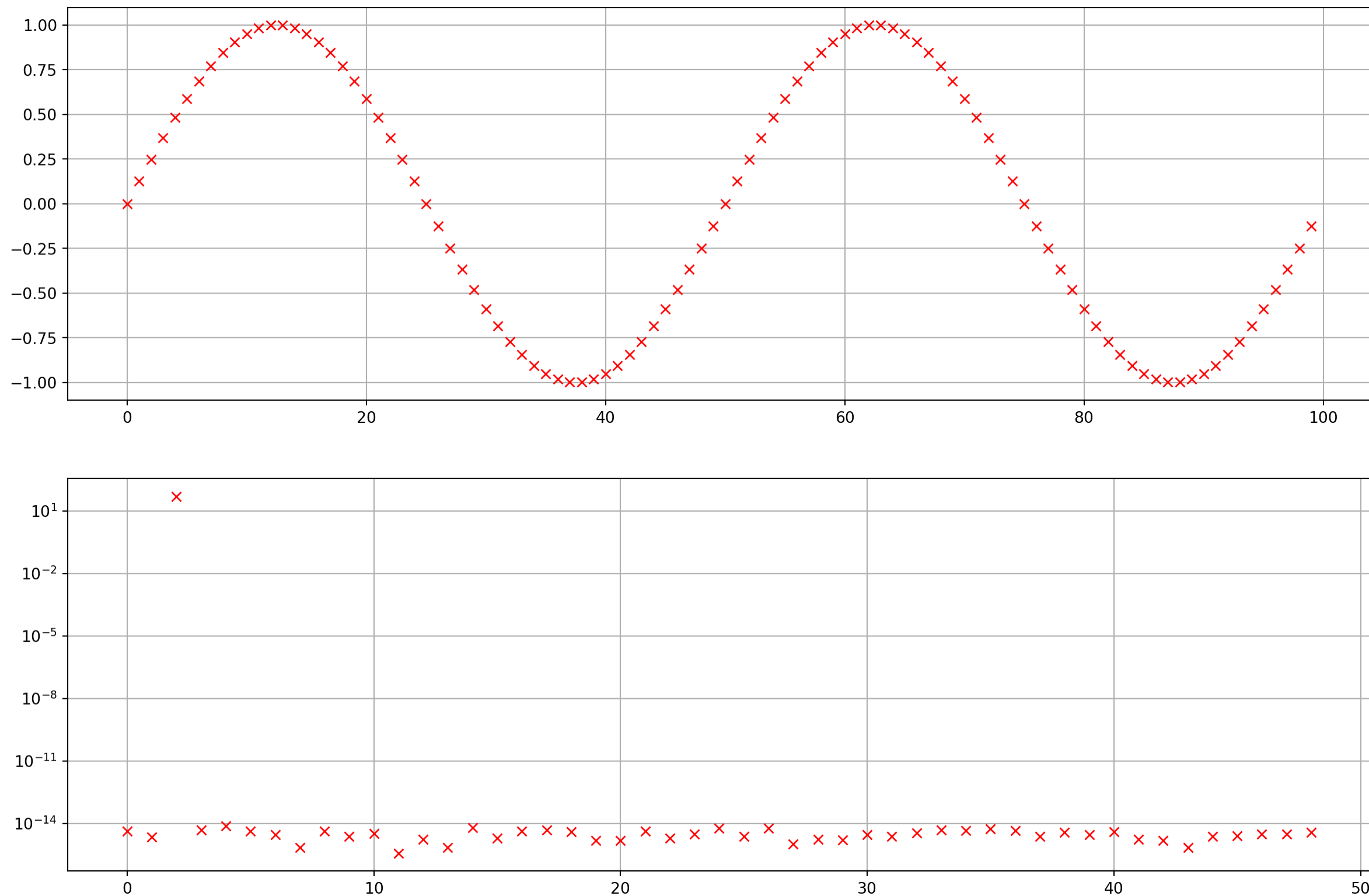
On trace sur le graphique les **valeurs absolues** de la FFT. La FFT retourne des nombres *imaginaires*. Ils représentent une fréquence et une *phase*

10.6 Exemples : DFT d'une fondamentale



La seconde et la dernière valeurs sont non nulles. La FFT retourne un résultat symétrique.

10.7 Exemples : Double de fréquence



Chaque fois que la fréquence est multipliée, un point suivant la représente. La fréquence maximum est atteinte au milieu de la FFT.

Important

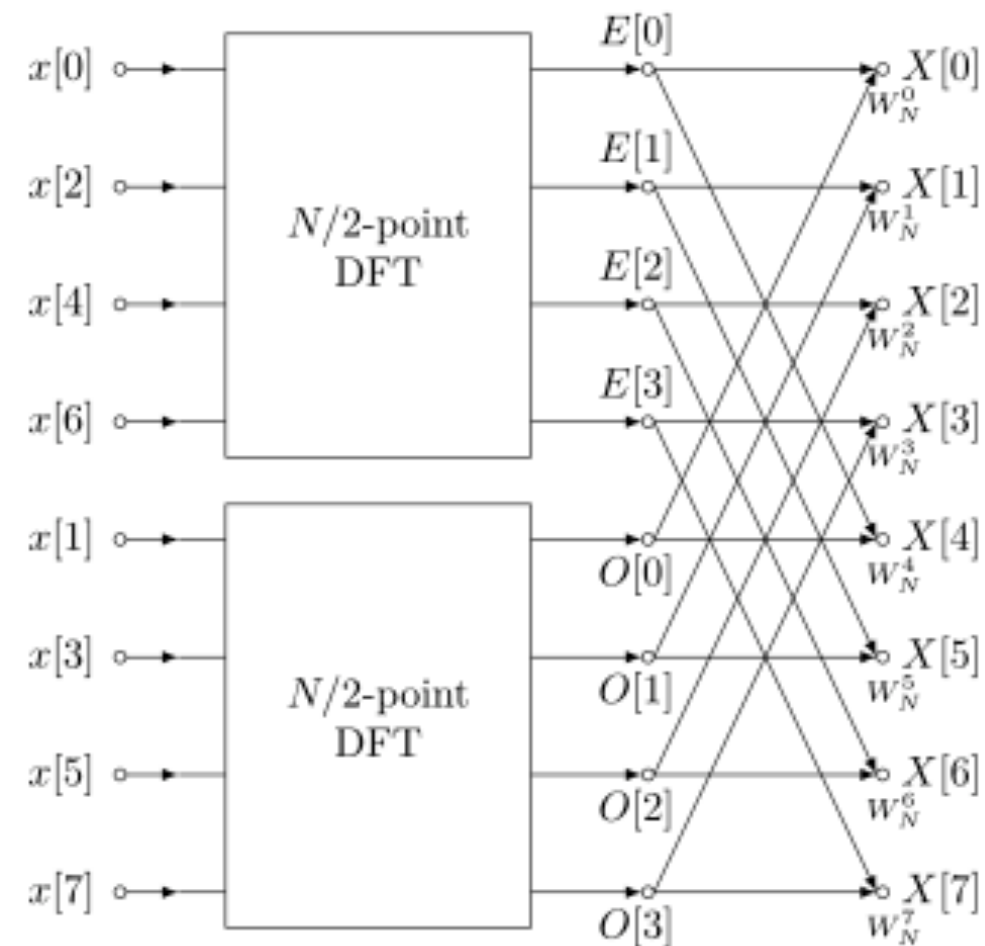
On a représenté que la moitié de la FFT

10.8 DFT et FFT

Le calcul de la DFT demande passablement de calculs. Si on a déjà calculé les valeurs $e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$, il reste $N*N$ multiplication-additions à faire. Il est possible d'optimiser le calcul.

FFT tient pour *Fast Fourier Transform*. C'est un algorithme qui permet d'accélérer le calcul.

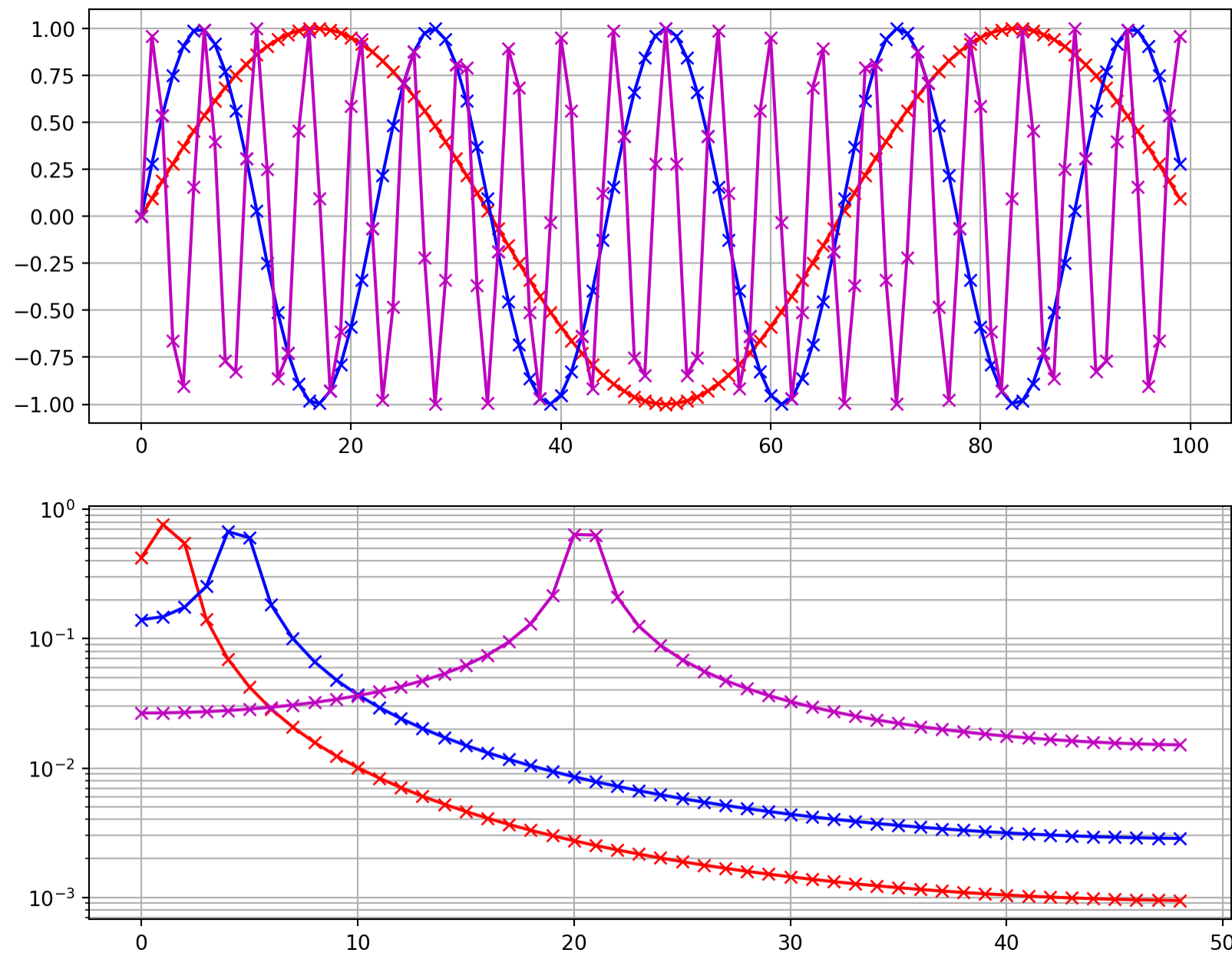
- L'algorithme est défini pour des échantillons longs d'une puissances de 2 (N=512,1024,...)
- Des variations de l'algorithme s'accomodent de n'importe quelle longueur



La FFT réduit le nombre d'opérations à $N * \log_2(N)$.

10.9 Limitations de la DFT

- On peut exprimer n'importe quel signal périodique avec une FFT
- Tout fonctionne bien tant que le signal a un nombre de périodes entier sur la *fenêtre*



Tip

Si la période n'est pas entière sur les échantillons, le résultat est moins bien défini.

10.10 L'effet des fenêtres

Intuitivement, on voit que si la période ne correspond pas, lors de la *convolution*, on perd la symétrie entre le signal et l'exponentielle.

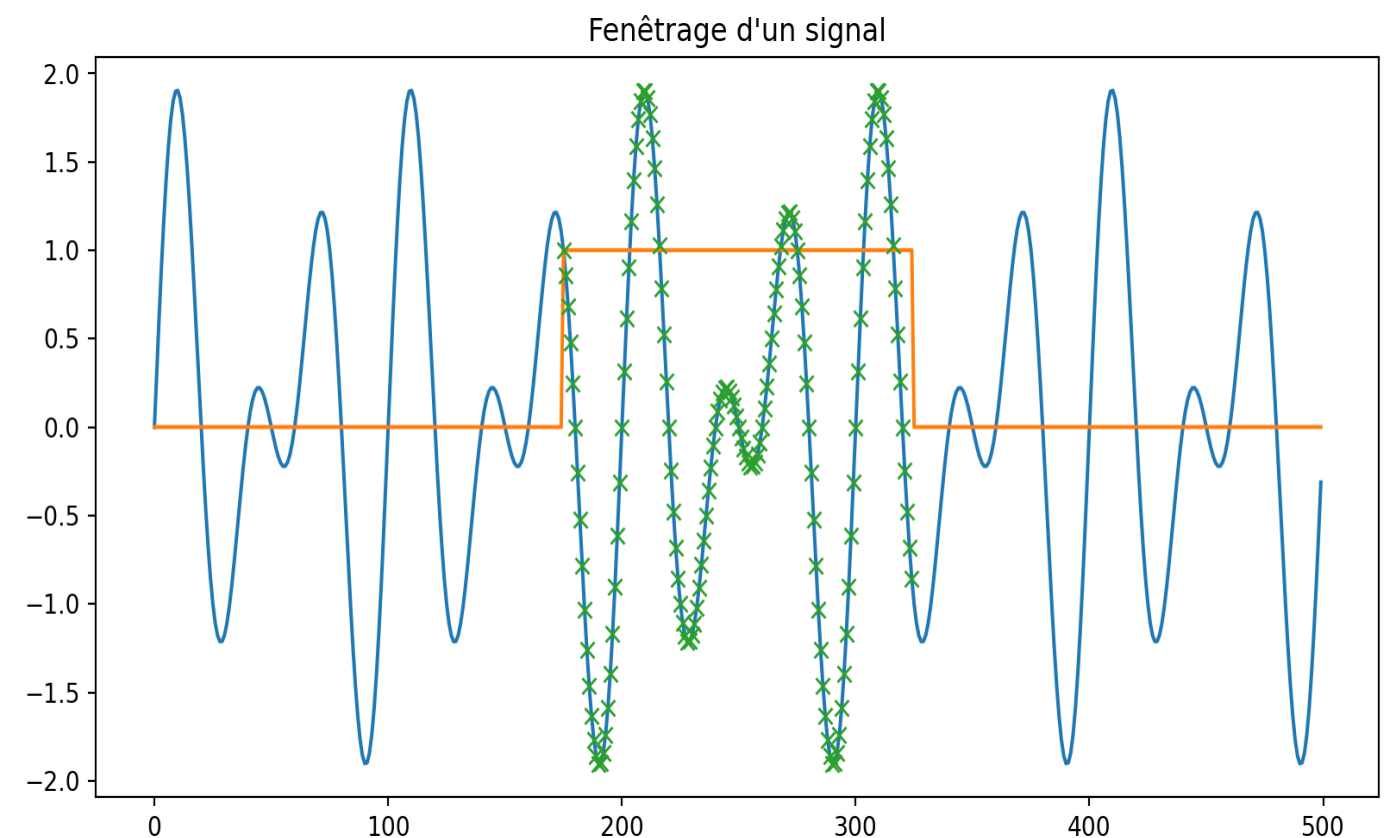
$$X[1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi 1 \frac{n}{N}}$$

Le fait de *tronquer* un signal sensé être infini revient à le multiplier par une fenêtre $w(t)$:

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$$

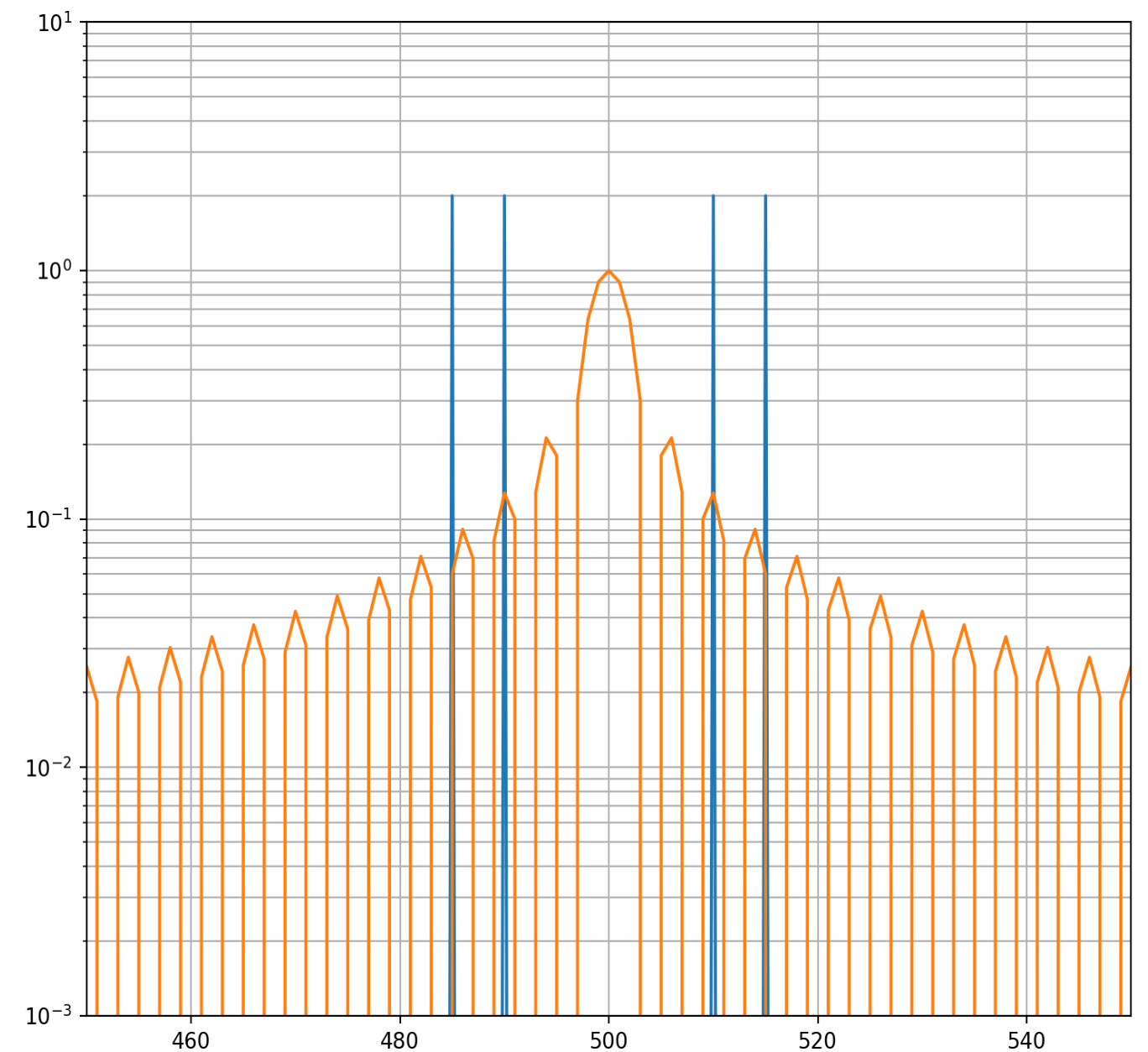
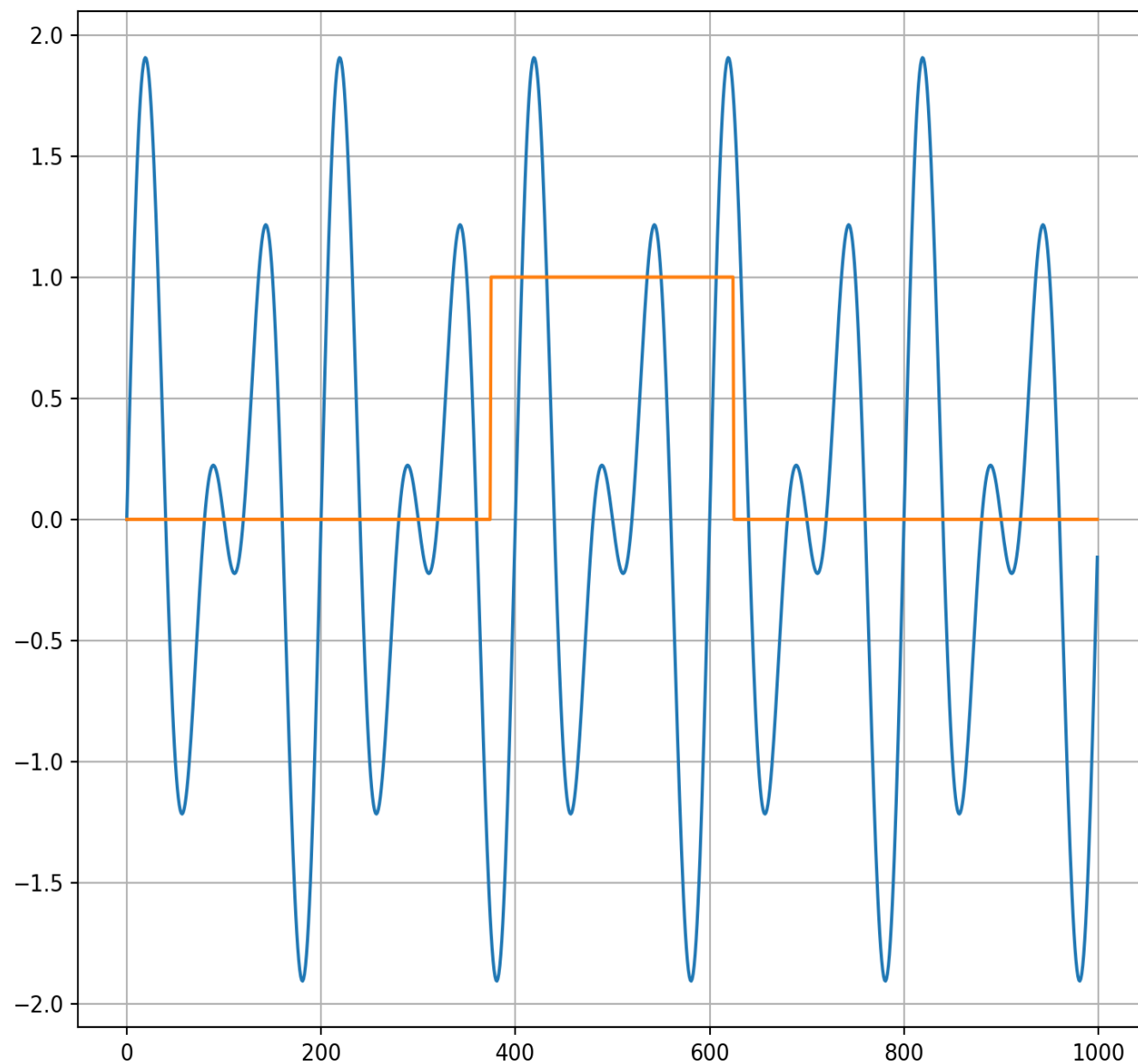
Le fait de multiplier 2 signaux dans le temps revient à les *convoluer* en fréquence.

$$X_w(f) = X(f) * W(f)$$



10.11 Effet des fenêtres, la suite

La fenêtre dans le temps agit comme un filtre en fréquences.



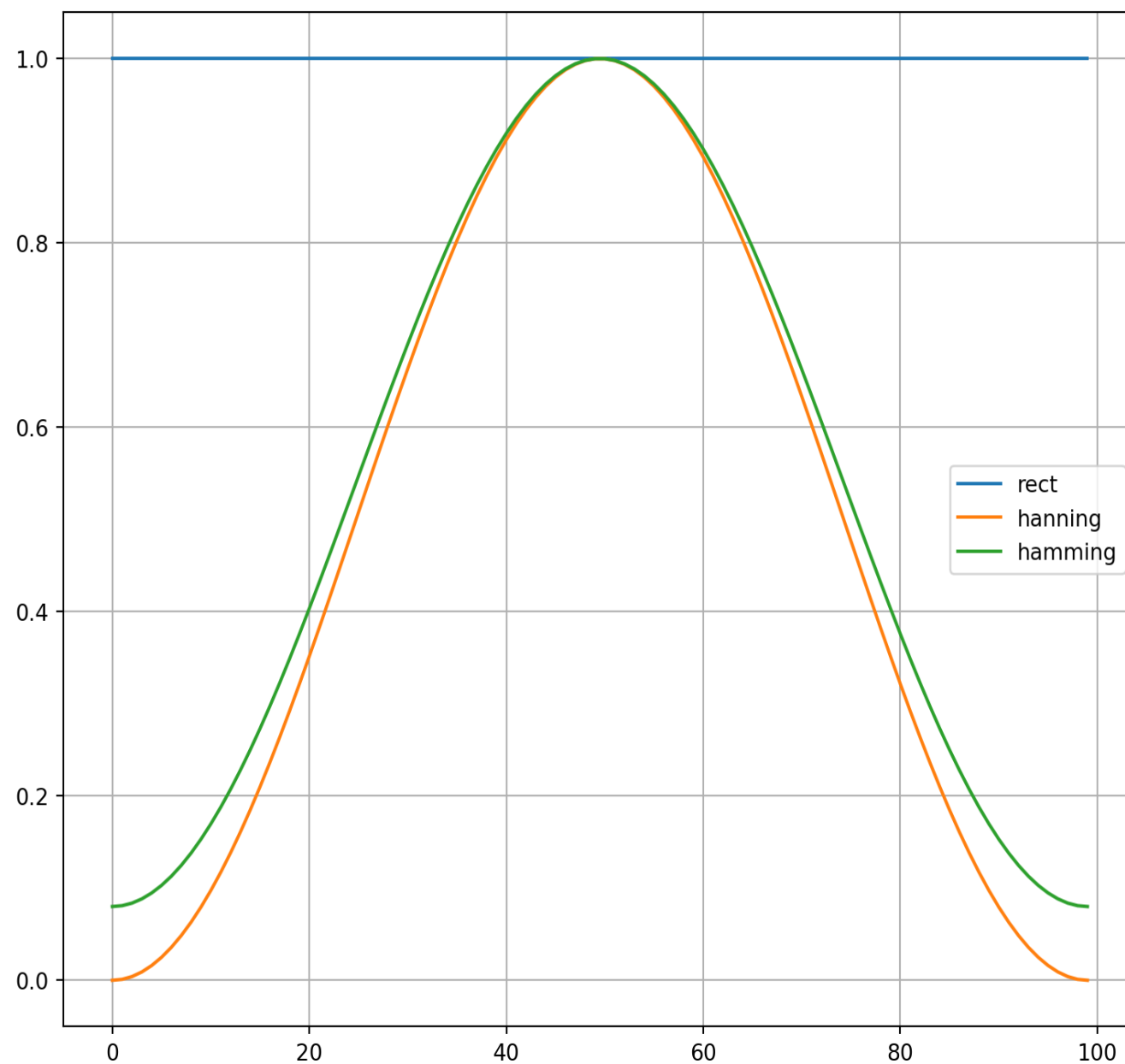
Dans la figure, le signal périodique en bleu se transforme en 4 raies, la fenêtre rouge en quelque chose de plus compliqué...

La *convolution*, dans le cas des *raies*, revient à superposer 4x le signal en orange sur les raies en bleu.

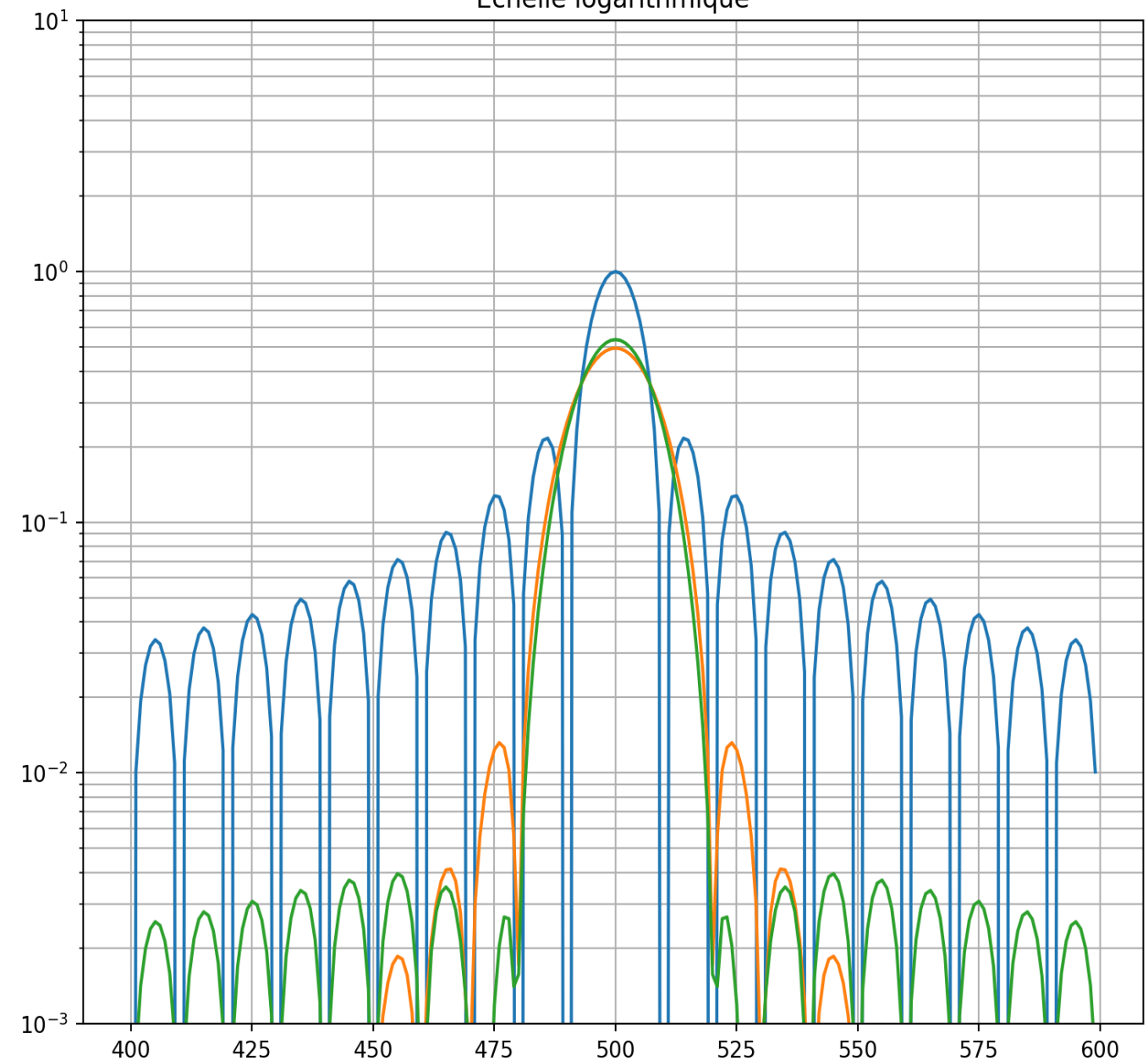
10.12 Type de fenêtres

Il y a plusieurs types de fenêtres, idéalement, $W(f)$ devrait ressembler à un $\delta(f)$ pour que X_w représente exactement $X(f)$.

Echelle linéaire



Echelle logarithmique



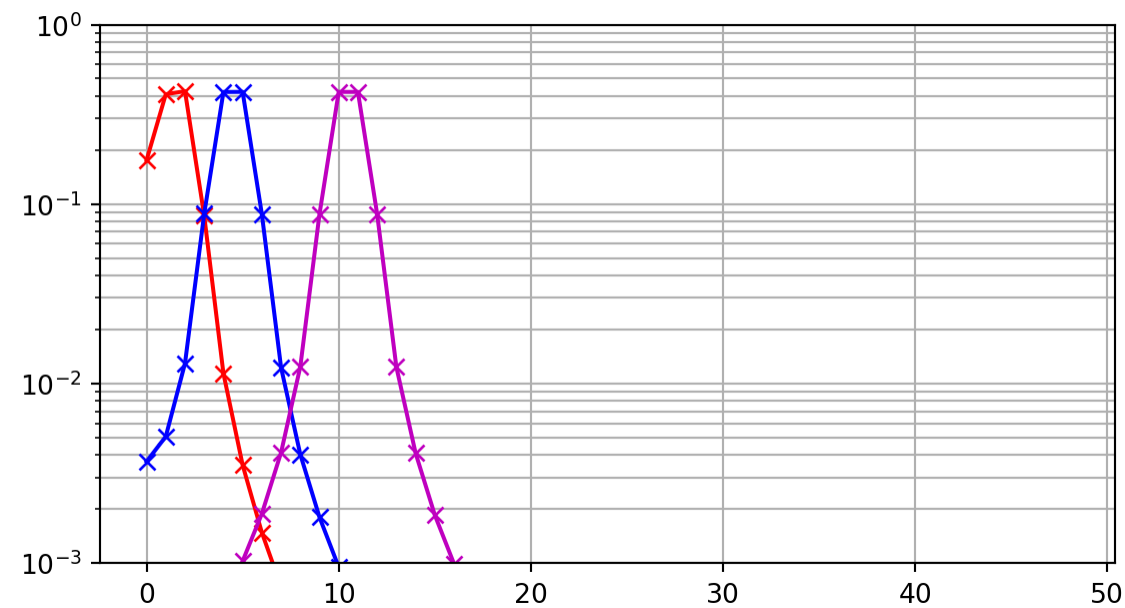
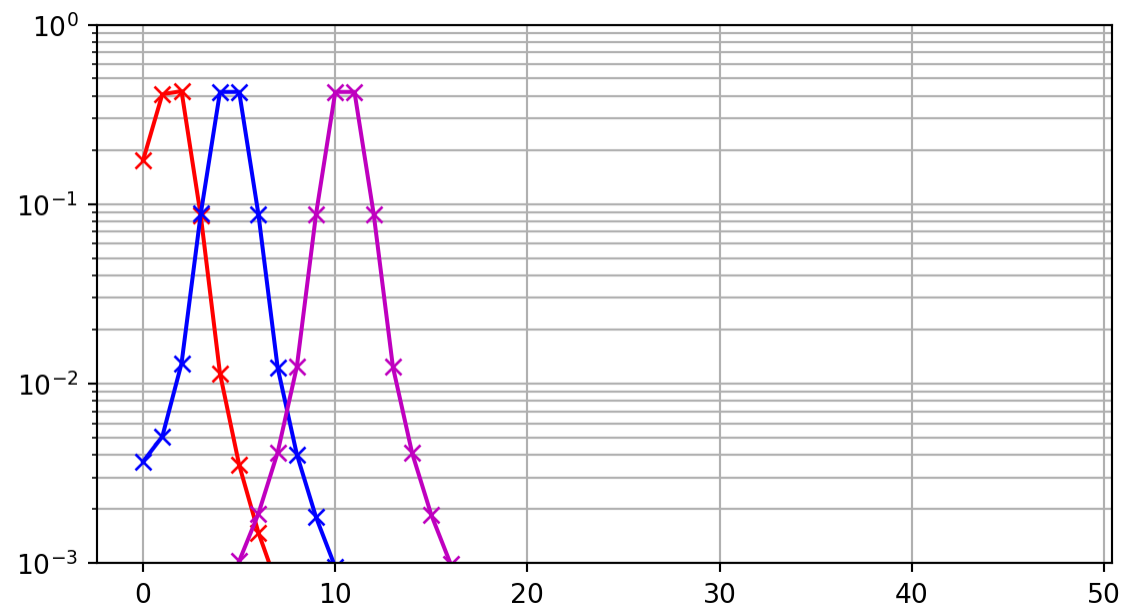
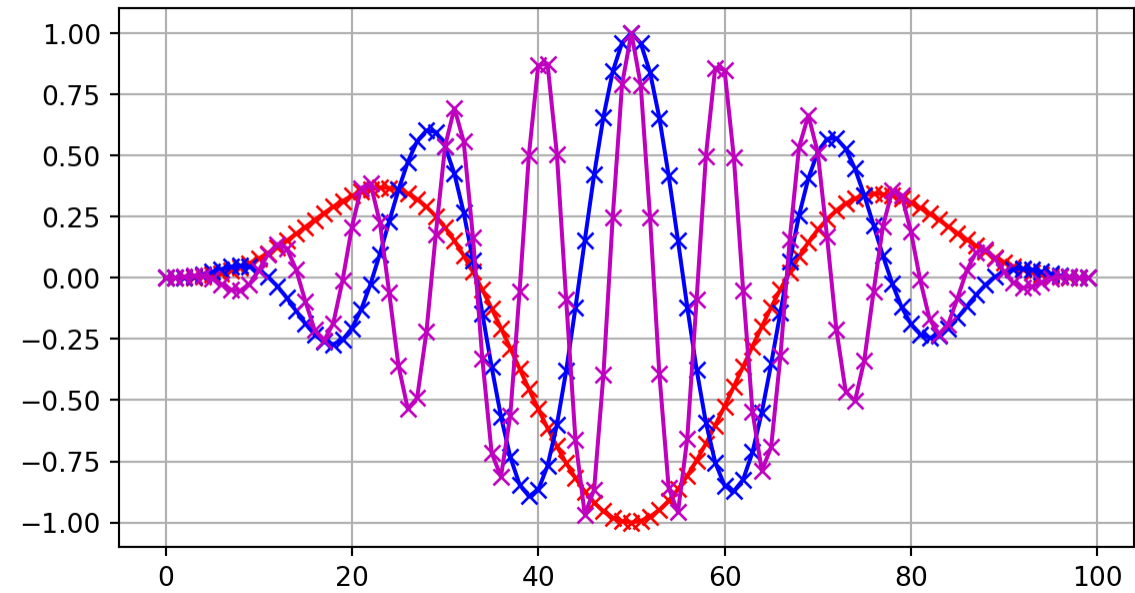
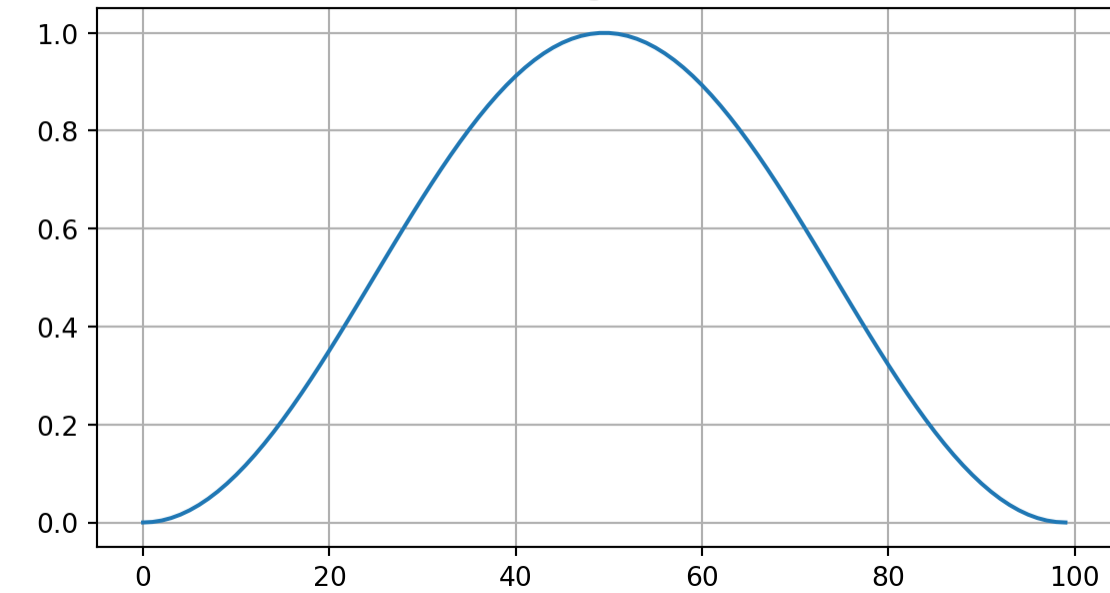
La fenêtre la plus pointue correspond au rectangle, mais les lobes vont sélectionner les fréquences voisines.

La fenêtre de hamming a des lobes secondaires très faible mais elle est plus large au centre.

10.13 Utilisation d'une fenêtre

L'utilisation d'une *fenêtre bien choisie* permet de réduire la largeur des raies.

Hanning window



10.14 Différentes fenêtres et leur FFT

Pratiquez !

exercice

Essayer de calculer la FFT de différents signaux :

- Signal composé de plusieurs fréquences.
- Signal aléatoire.

Une base est proposée dans `ex_10.1_TestFFT.ipynb`

Exercice

Utilisez le jupyter notebook `ex_10.2_CalcFFTwindow.ipynb` pour tester différentes fenêtres.