Instrumentation

Marc Nicollerat

4 Lineare Regression und Kalibrierung

- Berechnung der besten Geraden
- Kalibrierung
- Kette der Kalibrierung

4.1 Berechnung der besten Geraden

Berechnung der besten Geraden der Funktion

$$signal = f(mesurande)$$

Die Kalibrierung des Sensors liefert dem Experimentator eine Reihe von zugehörigen Punkten (xi, yi), die selbst bei einem theoretisch linearen Sensor aufgrund von Messungenauigkeiten oder Unvollkommenheiten bei der Herstellung des Sensors nicht unbedingt alle auf einer Linie liegen.

Lösung: Die Berechnung Der “besten Geraden”!

4.2 Beste Gerade

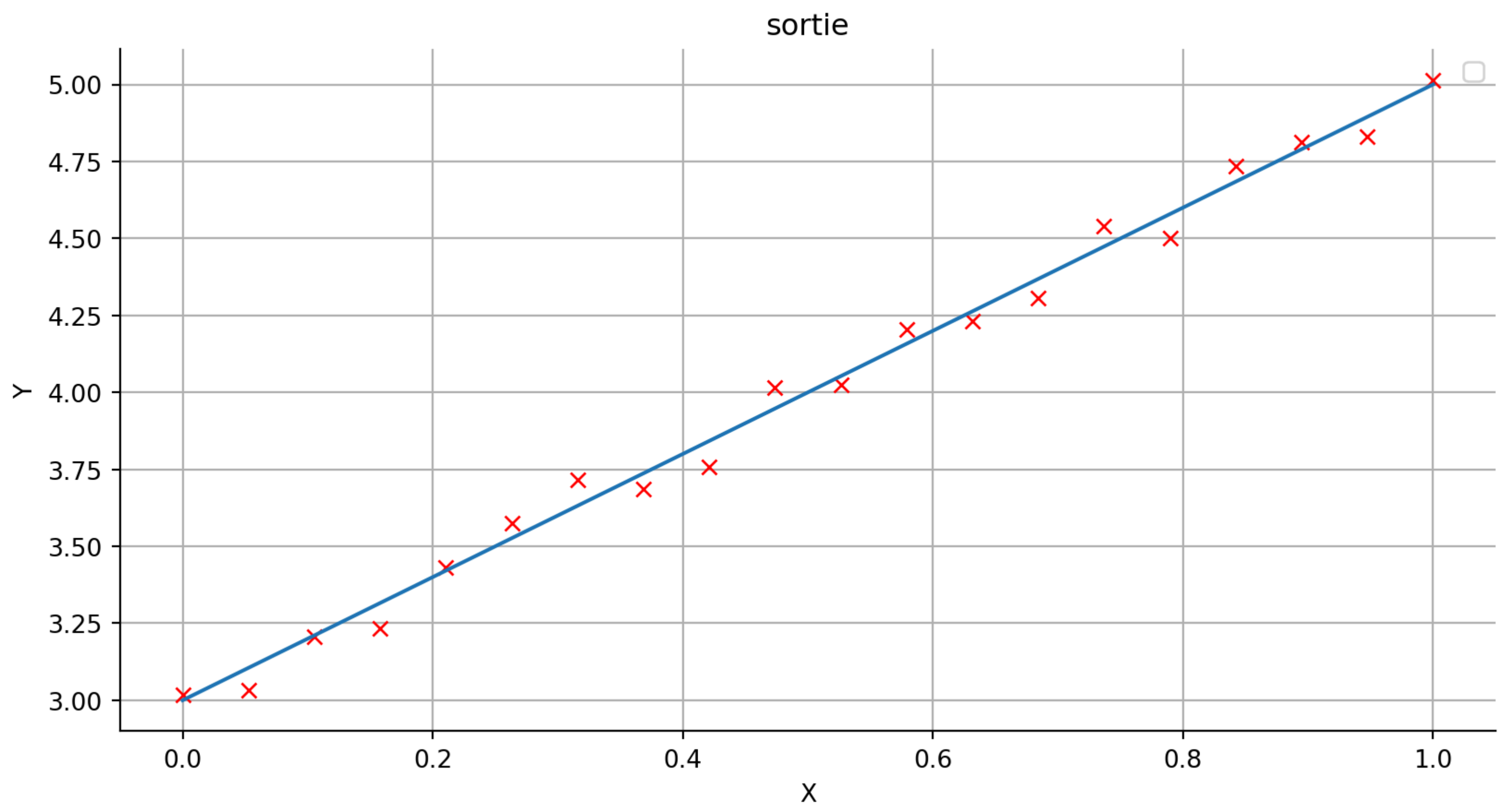
Wir suchen eine Gerade, die den Fehler zwischen den Messungen und den berechneten Punkten minimiert. Dies läuft auf die Suche nach a und b in der Gleichung der Geraden hinaus :

$$y = a \cdot x + b$$

Wenn man N Punkte x_i, y_i misst, hat man N Messfehler $\sigma_i = y(x_i) - y_i$.
Wir definieren :

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$$

den wir minimieren wollen, indem wir a und b gut auswählen.



> **Important**
>
> Es handelt sich um eine **lineare Regressionsgerade**, die auf der Methode der kleinsten Quadrate basiert.

4.3 Berechnung der Koeffizienten der besten Geraden

Man kann die Koeffizienten der besten Geraden mit den folgenden Gleichungen berechnen:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N} 1 = N \qquad S_x = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad S_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i$$

$$D = S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2$$

$$a = \frac{S_1 \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{D} \qquad b = \frac{S_y \cdot S_{xx} - S_x \cdot S_{xy}}{D}$$

oder mit Python :

▼ Code

```python
import numpy as np
poly=np.polyfit(Gs, RSs,1)
poly
```

```
array([2.01069999, 2.98818088])
```

4.4 Auflösung mit Matrizenrechnung

Wir können das Problem mit Hilfe der Matrizenrechnung lösen :

$$y = A \cdot \theta$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$E2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 = (y - A \cdot \theta)^T \cdot (y - A \cdot \theta)$$

$$E2 = y^T y - (A\theta)^T y - y^T A\theta + (A\theta)^T A\theta$$

$$E2 = y^T y - 2(A\theta)^T y + (A\theta)^T A\theta$$

$$\frac{\partial E2}{\partial \theta} = -2 * A^T y + 2A^T A\theta$$

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T y$$

4.5 Übung

Praktisch!

Seien die folgenden drei Kalibrierungspunkte :

- x entspricht dem Messwert (gemessen in °C).
- y entspricht dem Signal (gemessen in Volt).

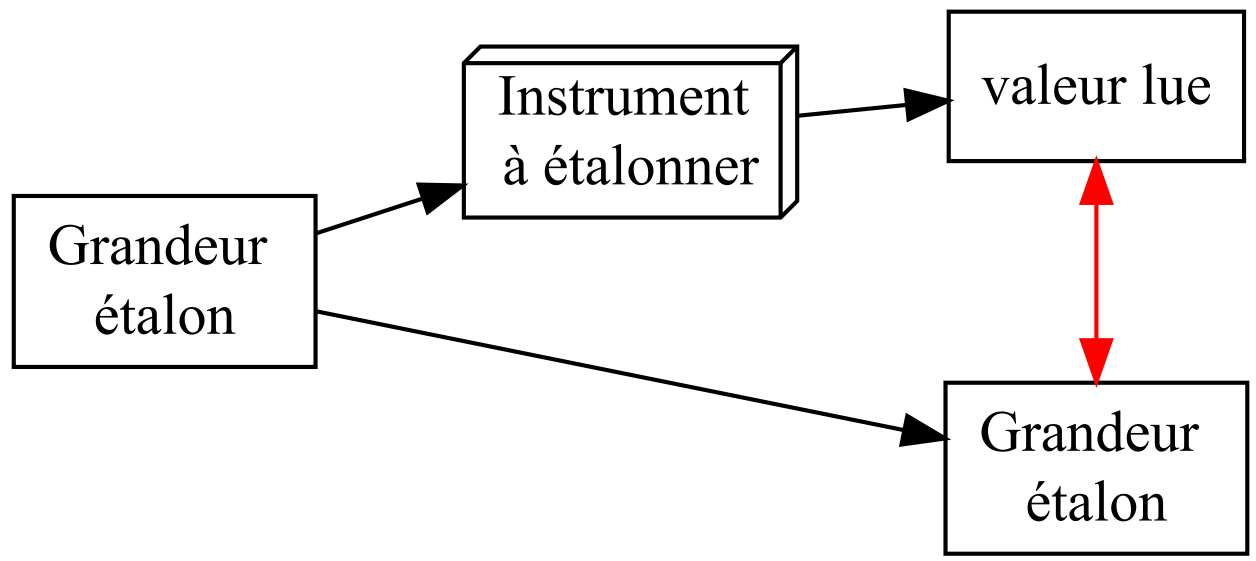
i	x	y
1	1	2
2	3	3
3	5	5

1. Bestimmen Sie a und b der besten Geraden durch die Kalibrierungspunkte.
2. Wie hoch ist die Empfindlichkeit des Sensors?

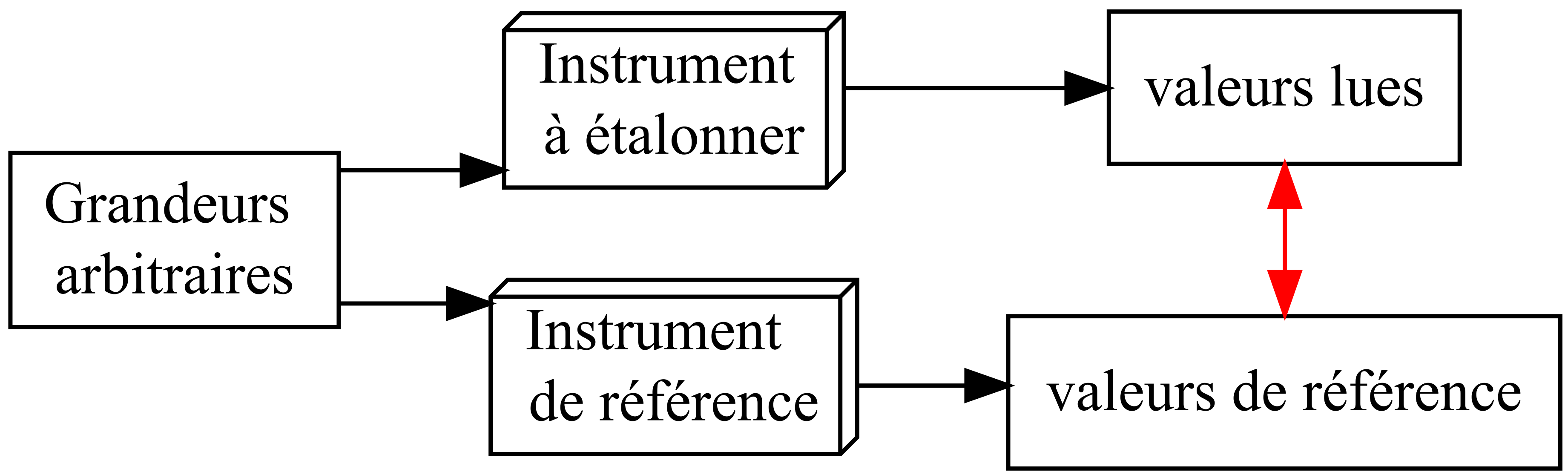
4.6 Kalibrierung

Bei der Kalibrierung wird überprüft, ob ein Instrument richtig und mit der vereinbarten Genauigkeit funktioniert.

4.6.1 Vergleich mit einer Referenz



4.6.2 Vergleich mit einem Referenzinstrument

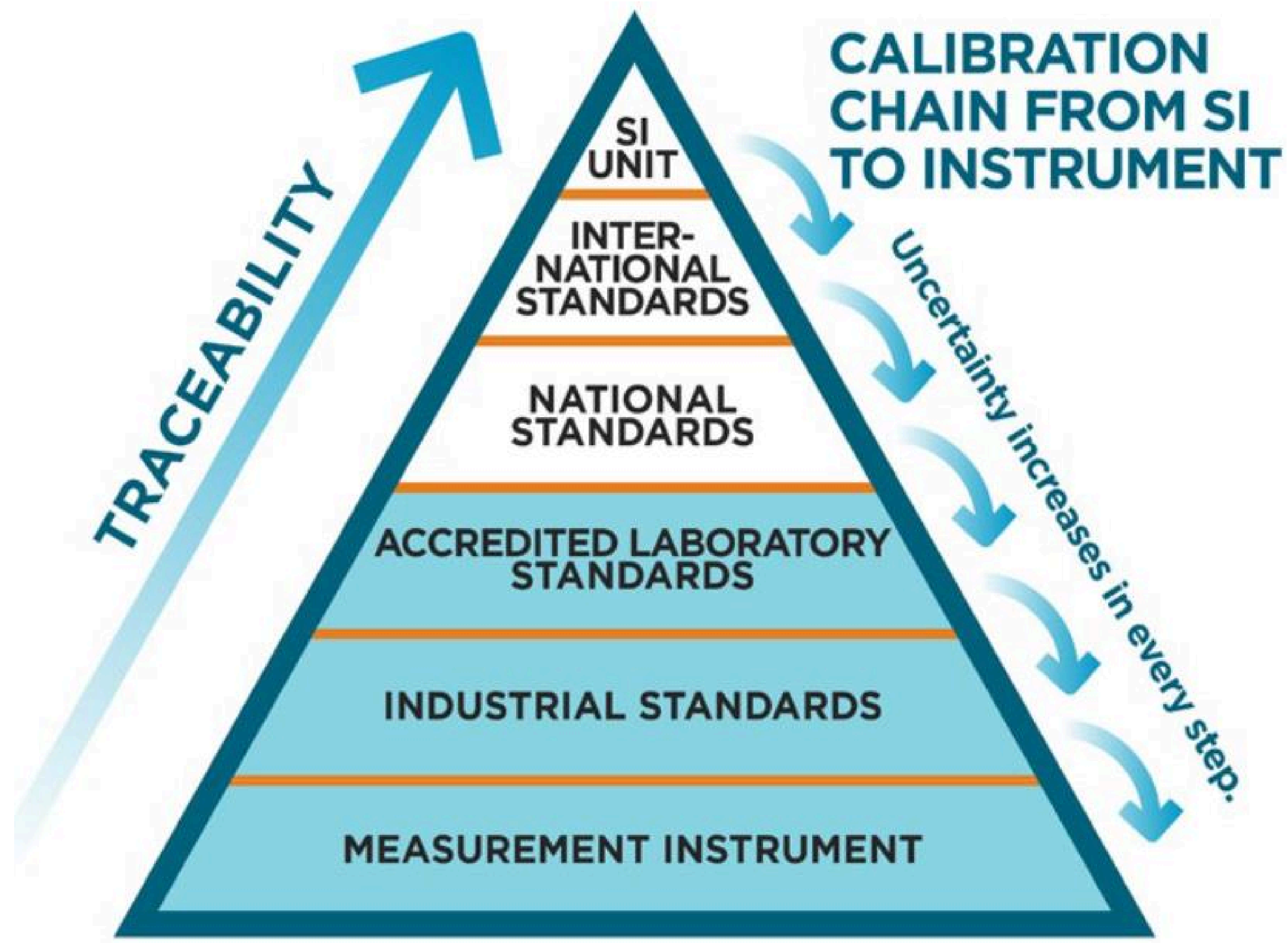


4.7 Kalibrierungskette

Damit alle die gleichen Referenzen haben, ist das System pyramidenförmig aufgebaut.

Jedes Land hat sein eigenes Institut!

- Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS
- Internationales Büro für Maße und Gewichte
- Physikalisch-Technische Bundesanstalt
- National Metrology Institute of Italy
- National Institue of Standards and technology
- National Metrology Institute of Japan



Kalibrierungskette

4.8 Übungen

Kalibrierung

- Übungen nach separater Angabe, 4.1,4.2 und 4.3
- ex_4.1-und-kalibrierung-durch-vergleich.ipynb