<u>ERREURS DE MESURE (COURS 3)</u>

3.1. <u>Präzision</u>

1) Gegeben sei ein Voltmeter mit folgenden Angaben:

<u>Genauigkeit: 1 %</u>
<u>Genauigkeit proportional zur Messung: 1.5 %</u>
<u>Auflösung: 100 [mV]</u>
<u>Messbereich: 200 [V]</u>

1.1) Wie gross ist die maximale Abweichung zwischen der angelegten und der abgelesenen Spannung, wenn diese 150 [V] beträgt?

1.2) Bei welchem Messwert wechselt die Genauigkeit von einer (zur Messung) proportionalen Grösse zu einer konstanten Grösse.

1.3) Zeichnen Sie den maximalen Fehler (positiv und negativ) dieses Messgerätes in Abhängigkeit des Messwertes auf, unter der Annahme, dass der Offsetwert nicht richtig eingestellt ist (das Gerät zeigt eine Spannung von 1 [V] an, falls keine Spannung am Eingang des Gerätes anliegt).

2) Gegeben sei ein Messgerät mit einer numerischen Anzeige (2 Stellen plus Vorzeichen).

2.1) Der Hersteller garantiert eine Genauigkeit von 1 %. Kann diese Angabe stimmen? Wieso?

2.2) Der Hersteller garantiert eine Genauigkeit von 0.5 %. Kann diese Angabe stimmen? Wieso?

3) Man hat 2 Amperemeter A und B zur Verfügung, mit den folgenden technischen Spezifikationen :

Multimeter A

Bereich (AC Voltage)	**Proportionale Genauigkeit**	**Auflösung**
200 [mA]	**$\pm$ 1 % des abgelesenen Werts + 10 *x* LSBs** (LSB : Least Significant Bit (-> hier Digit)	**0.1 [mA]**
2 [A]	**$\pm$ 1.5 % des abgelesenen Werts + 10 *x* LSBs**	**1 [mA]**
20 [A]	**$\pm$ 2 % des abgelesenen Werts + 10 *x* LSBs**	**10 [mA]**

Multimeter B

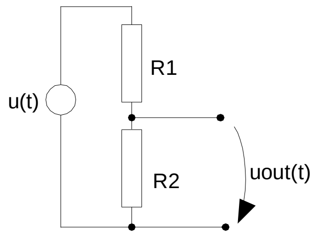
Bereich (AC Voltage)	**Konstante Genauigkeit**	**Auflösung**
200 [mA]	**$\pm$ 1.5 % + 5 *x* LSBs**	**10 [μA]**
2 [A]	**$\pm$ 2 % + 5 *x* LSBs**	**0.1 [mA]**
20 [A]	**$\pm$ 2 % + 5 *x* LSBs**	**1 [mA]**

3.1) Tragen Sie graphisch den Fehler der beiden Multimeter für jeden Messbereich auf.

3.2) Welches ist das genauere Instrument und für welche Messwerte ? Begründung.

3.2. Elektronischer Schaltkreis

Im nachfolgenden elektronischen Schaltkreis:



beträgt die Wechselspannung:

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

1) Bestimmen Sie die Entwicklung des Ausgangs $uout(t)$ in Funktion der Zeit.

2) Gegeben sind: $R1 = 1'000 \pm 20\ [\Omega]$, $R2 = 3'000 \pm 40\ [\Omega]$, $A = 240 \pm 15\ [V]$ und $\omega = 314 \pm 2 \left[\frac{rad}{s}\right]$,

Berechnen Sie mittels folgender drei Methoden den Höchstwert des Ausgangssignals:

a) Genaue Berechnung

b) Linearisierung

c) Anwendung der Regeln für die vier Operationen +, -, x, :

SOLUTIONS

3.1. **Präzision**

1)

1.1)Konstante Abweichung:

1% von 200 [V] = 2 [V]

Proportionale Abweichung:

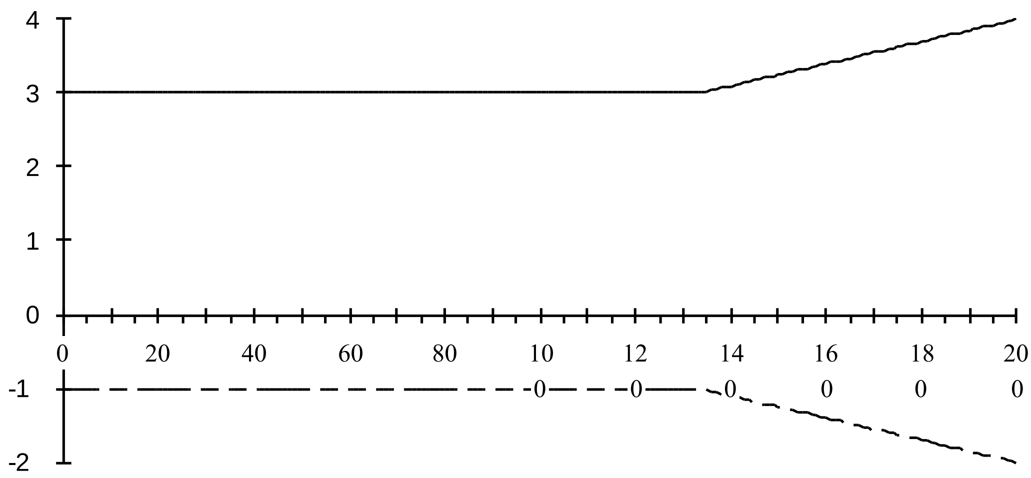
1.5 % von 150 [V] = 2.25 [V]

Die maximale Abweichung ist also:

1.2) Die konstante Abweichung muss gleich gross sein wie die proportionale Abweichung:

$$\frac{200V \cdot 1\%}{100\%} = \frac{x \cdot 1.5\%}{100\%} \quad \rightarrow \quad x = 133.33\ [V]$$

1.3) Maximaler Fehler in Funktion des Messwertes:

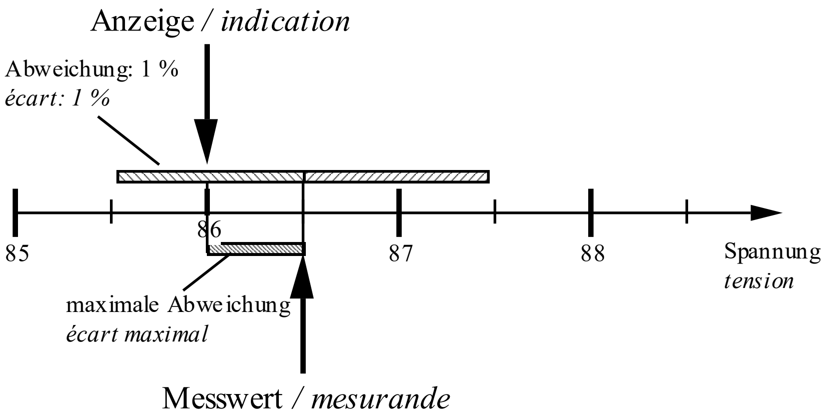


2) 2 Stellen => Anzeige -99 bis +99

Der Messbereichsendwert beträgt also 99 [V] .

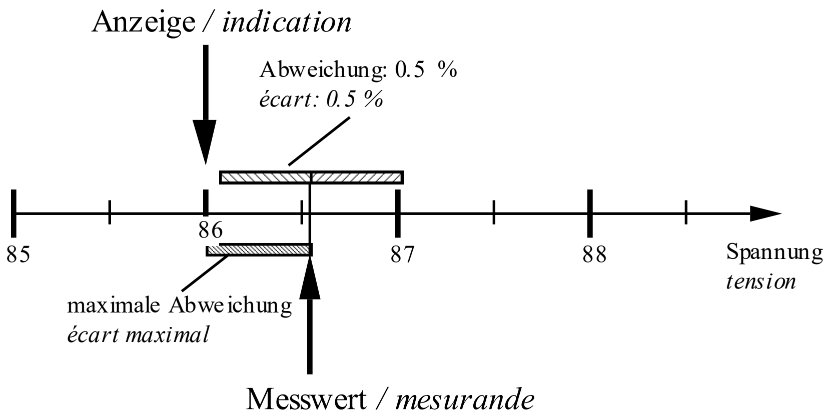
2.1) 1 % von / *de* 99 [V] = 0.99 [V]

Jede Anzeige darf also höchstens um 0.99 [V] vom Messwert abweichen:



Bei keinem Messwert wird die Abweichung grösser als 1 %. Die Angabe des Lieferanten ist also möglich.

2.2) Eine Genauigkeit von 0.5% ist praktisch nicht möglich, denn es bleibt keine mögliche Fehlermarge mehr für den Rest des Messgerätes:



3)

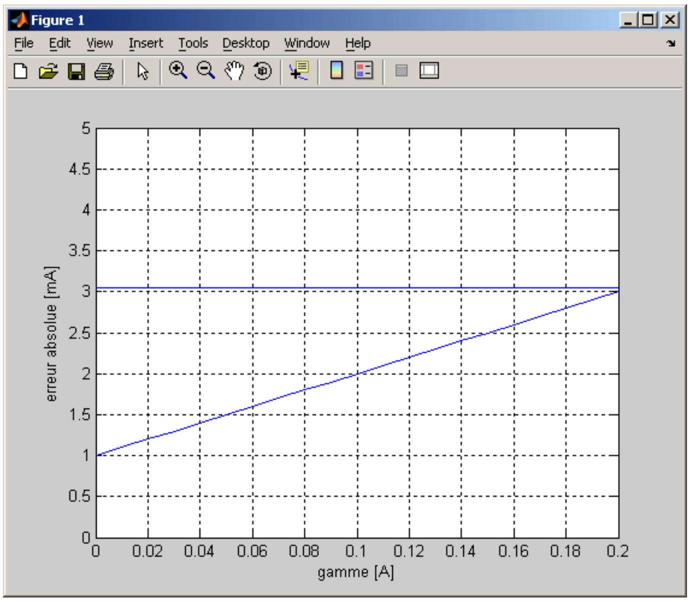
Multimeter A

Bereich (AC Voltage)	***max.*** *absoluter Fehler*	*Auflösung*
200 [mA]	*± 1 % (200 [mA]) + 10 (0.1 [mA]) = 3 [mA]*	*0.1 [mA]*
2 [A]	*± 1.5 % (2 [A]) + 10 (1mA) = 40 [mA]*	*1 [mA]*
20 [A]	*± 2 % (20 [A]) + 10 (10 [mA])= 500 [mA]*	*10 [mA]*

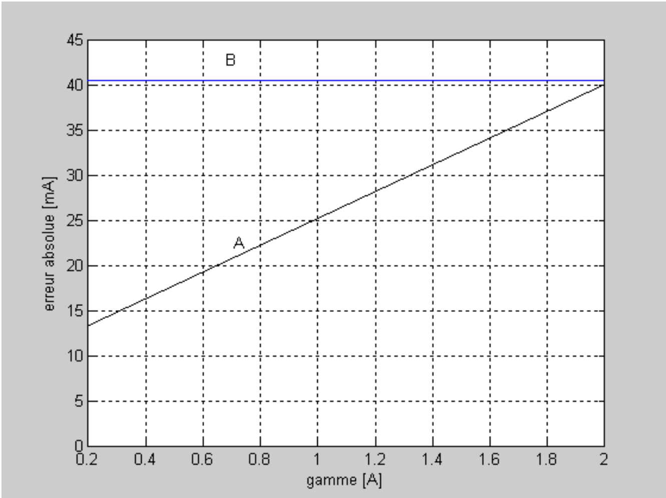
Multimet B

Bereich (AC Voltage)	***Konstanter*** *absoluter Fehler*	*Auflösung*
200 [mA]	*± 1.5 % (200 [mA]) + 5 (10 [µA])=3.05 [mA]*	*10 [µA]*
2 [A]	*± 2 % (2 [A]) + 5 (0.1 [mA]) = 40.5 [mA]*	*0.1 [mA]*
20 [A]	*± 2 % (20 [A]) + 5 (1 [mA])= 405 [mA]*	*1 [mA]*

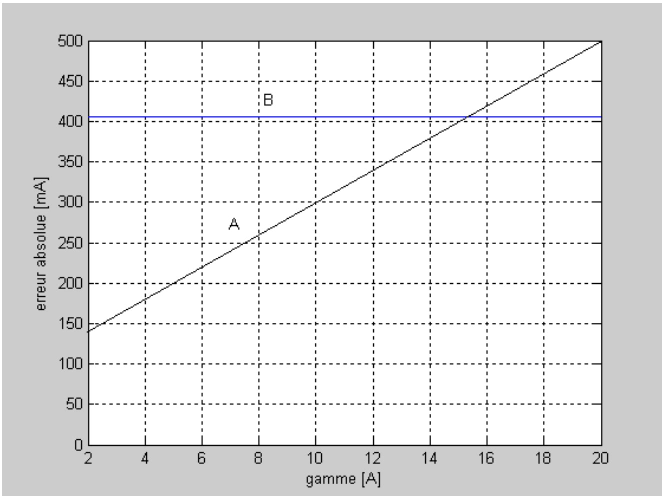
Im Bereich 0..200 [mA] ist das Multimeter A besser.



Im Bereich 200 [mA] .. 2 [A] ist das Multimeter A immer besser.



Im Bereich 2 [A] .. 20 [A] ist das Multimeter A besser für Werte x kleiner als15.25 [A].



2% x + 100 [mA] = 405 [mA] $\rightarrow$ x = 15.25 [A]

Elektronischer Schaltkreis

1) Der Ausgang ist gegeben durch: $u_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

2) Da der Sinus zwischen –1 und +1 schwingt, muss man sich nicht darum kümmern. Wir beschäftigen uns deshalb ausschliesslich mit der Amplitude.

a) Berechnung des genauen Höchstwerts:

Man weiß nicht „a priori", ob R_2 klein oder groß sein muß, und muß die zwei Fälle berechnen. Man findet, daß das Ausgangsspannung maximal ist, wenn der Wert R_2 maximal ist:

$$\hat{u}_{out\,\max} = \frac{R_{2\,\max} \cdot A_{\max}}{R_{1\,\min} + R_{2\,\max}} = \frac{3040 \cdot 255}{980 + 3040} = 192.83$$
$$\Rightarrow E_{uout} = 12.83$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{uout} = 0.0713$$

b) Linearisierung:

$$\hat{u}_{out} = \frac{R_2 \cdot A}{R_1 + R_2} \approx \frac{R_{20} \cdot A_0}{R_{10} + R_{20}} + \frac{R_{20}}{R_{10} + R_{20}} \cdot E_A - \frac{R_{20} \cdot A_0}{(R_{10} + R_{20})^2} \cdot E_{R1} + \frac{R_{10} \cdot A_0}{(R_{10} + R_{20})^2} \cdot E_{R2}$$
$$= 180 + 0.75 \cdot E_A - 0.045 \cdot E_{R1} + 0.015 \cdot E_{R2}$$
$$\Rightarrow E_{uout} = |0.75 \cdot E_A| + |-0.045 \cdot E_{R1}| + |0.015 \cdot E_{R2}| = 11.25 + 0.9 + 0.6 = 12.75$$
$$\Rightarrow \varepsilon_{uout} = 0.0708$$
$$\Rightarrow u_{out\,\max} = 192.75$$

c) Näherungsmethode (+, -, x, :) : man wendet die im Kurs aufgestellten Regeln an. Es gilt:

$$E_{(R1+R2)} = E_{R1} + E_{R2} = 20 + 40 = 60\ [\Omega] \Rightarrow \varepsilon_{R1+R2} = \frac{60}{4'000} = 0.015$$
$$\varepsilon_{uout} = \varepsilon_{R1+R2} + \varepsilon_{R2} + \varepsilon_A = 0.015 + 0.01333 + 0.0625 = 0.0908$$
$$\Rightarrow E_{uout} = 16.35$$
$$\Rightarrow u_{out\,\max} = 196.35\ [V]$$

Im besonderen Fall dieser Übung gibt die vereinfachte Methode, die auf den Regeln der 4 Operationen basiert, ein übertriebeness Ergebnis! *Dies liegt daran, daß der Widerstand R_2 zweimal in der Funktion erscheint: einmal in der Berechnung des Zählers und ein anderes Mal in jener des Nenners. Im Fall der Division geht die Berechnungsregel davon aus, daß der Zähler maximal ist, und daß der Nenner minimal ist. Der Widerstand R_2 soll also gleichzeitig für den Zähler gross (positiver Fehler) und für den Nenner klein (negativer Fehler) sein, was selbstverständlich nicht möglich ist: die Werte von R_2 im Zähler und im Nenner müssen gleich sein!*

Die auf dem Entwurf b) basierte Schätzung besitzt diesen Nachteil nicht! Das erzielte Ergebnis ist sehr nah vom realen Wert, der in a) berechnet wurde! Man beachte, daß die Methode a) schwierig ist anzuwenden, wenn ein Parameter des Eingangs mehrmals in der Gleichung der Ausgangsgröße (wie es für R_2 in dieser Übung der Fall ist) eingesetzt wird. Die Methode durch Entwurf, selbst wenn sie ziemlich lang ist anzuwenden, ist dann deutlich einfacher anzuwenden. Sie gibt allerdings nur ein ungefähres Ergebnis, das nur dann gültig ist, wenn die Fehler auf den Parametern des Eingangs klein sind. Es sei ebenfalls erwähnt, daß man gewährleisten müßte, daß der Ausgang tatsächlich maximal ist, wenn die Abweichungen auf den Eingängen am grössten sind, das heißt minimal oder maximal. Im Falle einer stark nicht linearen Funktion kommt es vor, daß diese Bedingung nicht erfüllt wird. Man muß dann die extrema der Funktion suchen, was für eine Funktion mit mehreren Variablen nicht unbedingt einfach ist...