# Instrumentation

Marc Nicollerat

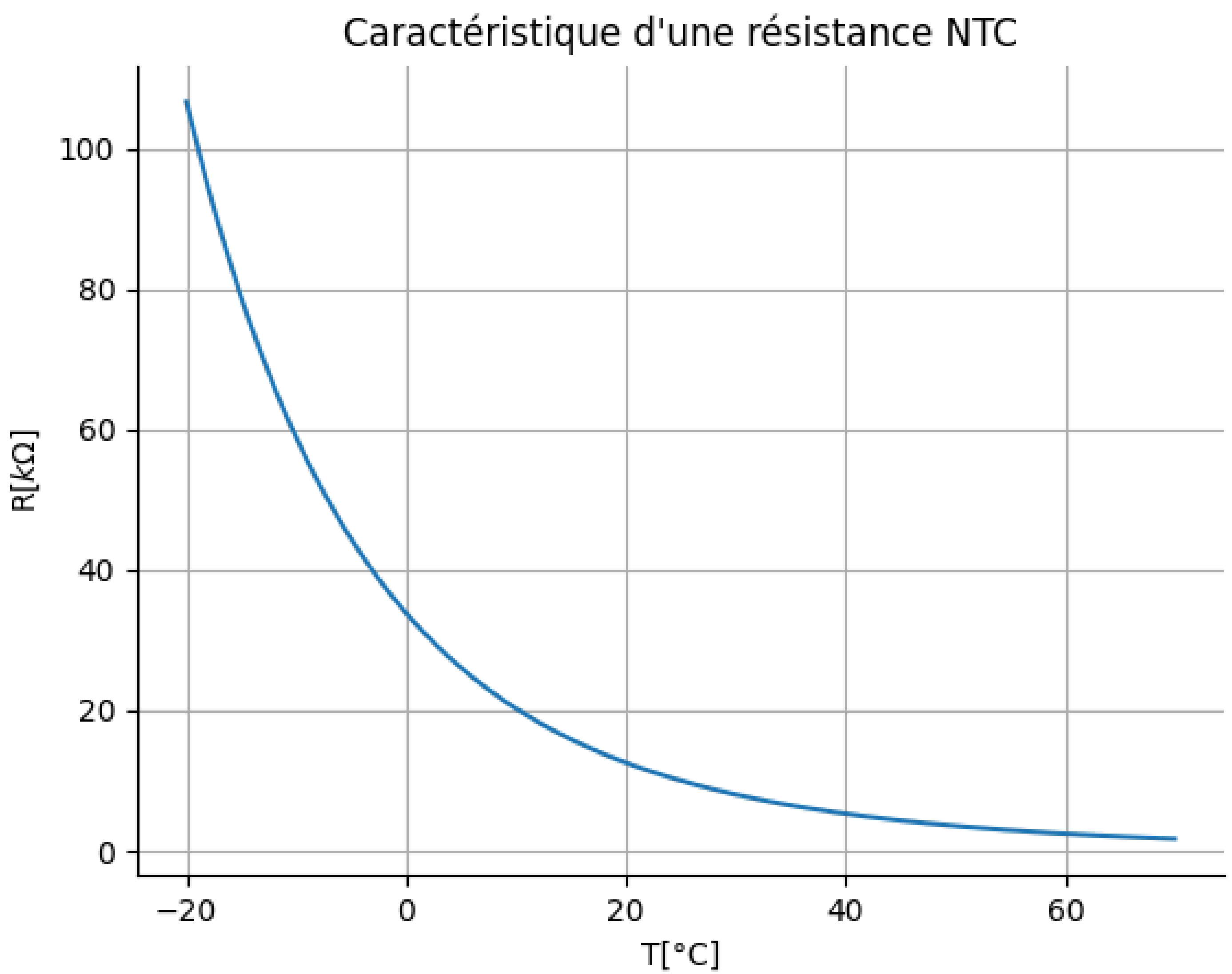
# 2 Statische Eigenschaften, Linearisierung

- Statische Eigenschaft
- Dynamisches Verhalten
- Begrenzungen der Genauigkeit
- Linearisierung
- Leistungssteigerung

# 2.1 Statische Eigenschaft

Eine statische Kennlinie stellt die Reaktion auf ein *langsames* Signal dar. Die Kennlinie ist die Verbindung zwischen der Messgröße und dem Ausgang des Sensors. Wenn der Sensor linear ist, kann man den Wert der Messgröße leicht ableiten.

In vielen Fällen ist die Kennlinie nicht linear.




Kennlinie eines Widerstandes

**Note**

Die Kennlinie gibt den Wert des Widerstands als Funktion der Temperatur an. Dies ist eine Beschreibung des physikalischen Verhaltens des Bauteils. In der Praxis werden wir den Widerstand messen und müssen daraus die Temperatur ableiten.

# 2.2 Statisches System und dynamisches System

Ein statisches System hat eine momentane Reaktion. Ein typisches Beispiel ist ein Widerstand. Der Strom ist statisch mit der Spannung verknüpft, die Beziehung ist nicht zeitabhängig.

$$U(t) = R \cdot i(t)$$

Ein dynamisches System ist zeitabhängig, wie z. B. das Einschalten eines Motors. Er kann nicht sofort mit seiner Nenndrehzahl laufen.

**Caution 1: Gleichstromantrieb**

Ein Motor erzeugt ein Drehmoment, das durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$M(t) = K_i \cdot i(t)$$

Der Strom entspricht einer Differentialgleichung

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + K_n\omega(t)$$

Die mechanische Gleichung des Motors ist gegeben durch

$$J\frac{d\omega}{dt} + f \cdot \omega(t) = M(t) - M_R(t)$$

# 2.3 Dynamisches Verhalten

Bei einer Änderung der Bedingungen findet ein System nicht sofort einen Gleichgewichtspunkt.

Ein Pt100-Fühler hat zum Beispiel eine eigene Masse. Seine Temperatur kann sich nicht augenblicklich ändern.

Wenn die Sonde in ein Medium getaucht wird, muss ihre Temperatur den Wert des Mediums annehmen.

Außerdem erwärmt der Strom, der für die Messung verwendet wird, die Sonde, wodurch ihre Temperatur steigt. Mit zunehmender Temperatur steigt auch ihre Ableitung nach außen (z. B. an die Umgebungsluft).

⚠ **Herausforderung**

Wie lauten die Differentialgleichungen, die dieses System regeln?

# 2.4 Dynamische Gleichung

Die Temperatur entspricht einer Differentialgleichung :

$$\frac{\partial T_{sonde}}{\partial t} c_m = P_{el} - P_{th} = R \cdot i^2 - R_{th} \cdot (T_{sonde} - T_a)$$

Dabei ist $T_a$ die Umgebungstemperatur und $R_{th}$ ein *Wärmewiderstand*.

Nach einer ausreichend langen Zeit tritt eine Gleichgewichtstemperatur auf, wenn $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, d. h. wenn :

$$R \cdot i^2 = R_{th} \cdot (T_{sonde} - T_a) \implies T_{sonde} = \frac{R \cdot i^2}{R_{th}} + T_a$$

**Achtung**

Der Wert von $R_{th}$ hängt von den Nutzungsbedingungen ab. In der Luft wird dieser Wert größer sein als im Wasser. In der Luft kann die Ausrichtung und die Geschwindigkeit der Luft den Wert beeinflussen.

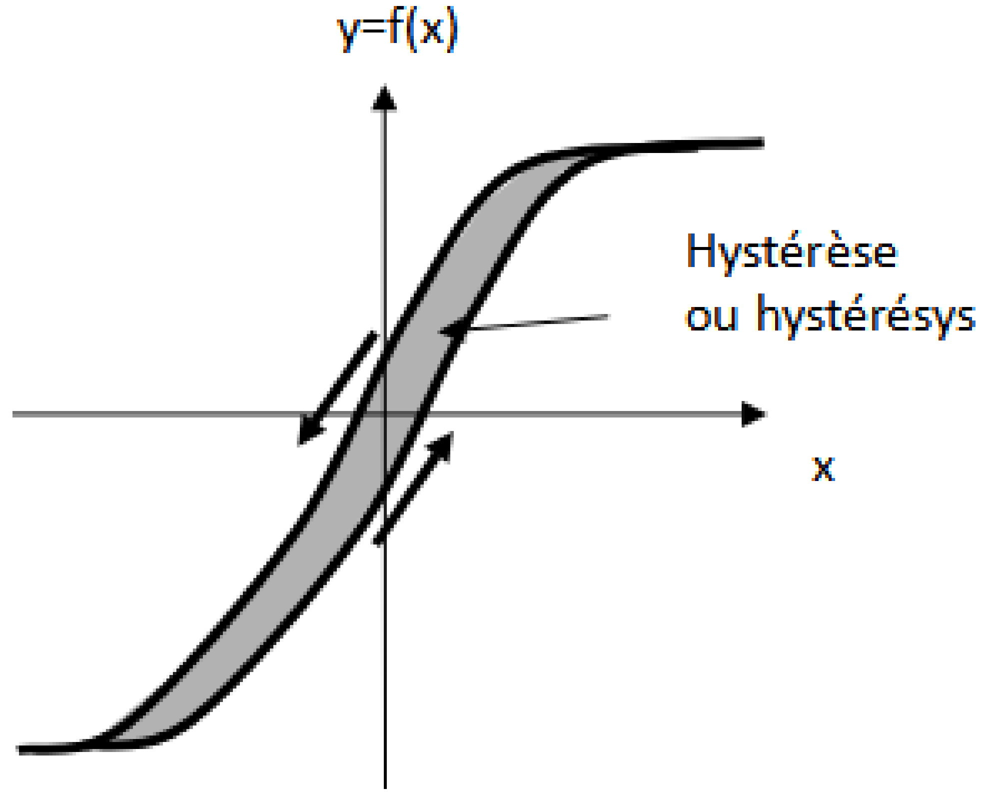
**Tip**

Welchen Sinn hätte es, eine Sonde mit höherem Widerstand zu verwenden?

# 2.5 Begrenzungen der Genauigkeit

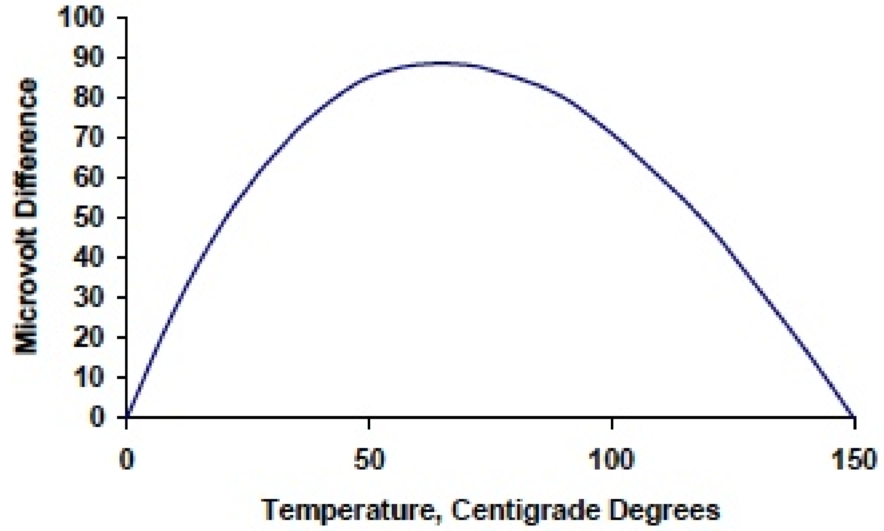
Einige Besonderheiten schränken die Möglichkeiten ein, den Messwert genau zu finden.

- **Hysterese**
  - Ein mechanisches Spiel, typischerweise ein Zahnrad. Das Spiel bewirkt, dass die Bewegung einer Achse am Eingang nicht sofort am Ausgang zu sehen ist.
  - Im Magnetismus hat die Magnetisierung eine Hysterese. Je nach Laufrichtung ist die Charakteristik nicht die gleiche.




- Ein **offset** kann das Merkmal verfälschen.

- Funktion **nicht eindeutig**. Es ist nicht möglich, die richtige Messgröße zu finden.
- **Sättigung**. Wenn der Input zu groß ist, wird das System gesättigt, der Output ändert sich nicht mehr, wenn der Input steigt.



# 2.6 Auflösung

Die Auflösung eines Geräts ist die kleinste Veränderung der gemessenen Größe, die eine wahrnehmbare Veränderung der vom Gerät ausgegebenen Anzeige bewirkt.

- Ein Multimeter, das eine Spannung mit 3 Stellen 1,23 [V] anzeigt, hat eine Auflösung von 10 mV.
- Die Auflösung eines digitalen Systems hängt typischerweise von der Auflösung seines A/D-Wandlers ab.

$$\Delta x = \frac{\text{Plage d'entrée}}{2^N}, N \text{ est le nombre de bits}$$

# 2.7 Kalibrierung

Die einfachste Art der Kalibrierung ist eine Einstellung des Offsets und der Verstärkung eines Geräts. Sie benötigen lediglich einen Referenzwert, der gemessen werden muss, um die Verstärkung einzustellen.

| | |
|---|---|
| Offset einstellen | Das Gerät zeigt Null an, wenn es keinen Messwert gibt |
| Einstellung der Verstärkung | Man verwendet einen bekannten Wert, um die Verstärkung einzustellen. |

**Tip**

Hochpräzise Geräte haben interne Referenzen und können sich selbst kalibrieren.

# 2.8 Beispiele für die Kalibrierung

Geräte, die für den Handel oder für eine offizielle Messung verwendet werden, müssen in regelmäßigen Abständen überprüft und kalibriert werden, um die Genauigkeit über die Zeit zu gewährleisten.

| | |
|---|---|
| Kalibrierung eines Volumenzählers | Der Volumenzähler wird bei jeder Messung auf Null zurückgesetzt. Zum Kalibrieren füllt man einen Behälter mit bekanntem Volumen, der besonders gut um die Qualibrationsmenge abgestuft ist |
| Kalibrierung eines Gasmessgeräts | Um ein solches Gerät zu kalibrieren, verwendet man Proben von bekanntem Gas. Für den Nullpunkt verwendet man z. B. Stickstoff. Für die Einstellung der Skala wird ein Gas mit bekannten Eigenschaften verwendet |

# 2.9 Linearisierung

Eine Sensoreigenschaft wird manchmal durch eine nichtlineare Beziehung ausgedrückt. Man kann die Berechnungen vereinfachen, indem man eine Linearisierung der Kennlinie durchführt.

$$y = f(m), \qquad y_{lin} = f(m_0) + S \cdot (m - m_0), \qquad S = \left.\frac{df(m)}{dm}\right|_{m_0} \tag{1}$$

Durch diese Linearisierung kann die Berechnung vereinfacht werden. In vielen Fällen ist die Näherung ausreichend.

Die Umkehrung der Charakteristik ist nicht immer einfach. Eine Linearisierung hingegen ist nicht schwer umzukehren.

⚠ **Übung**

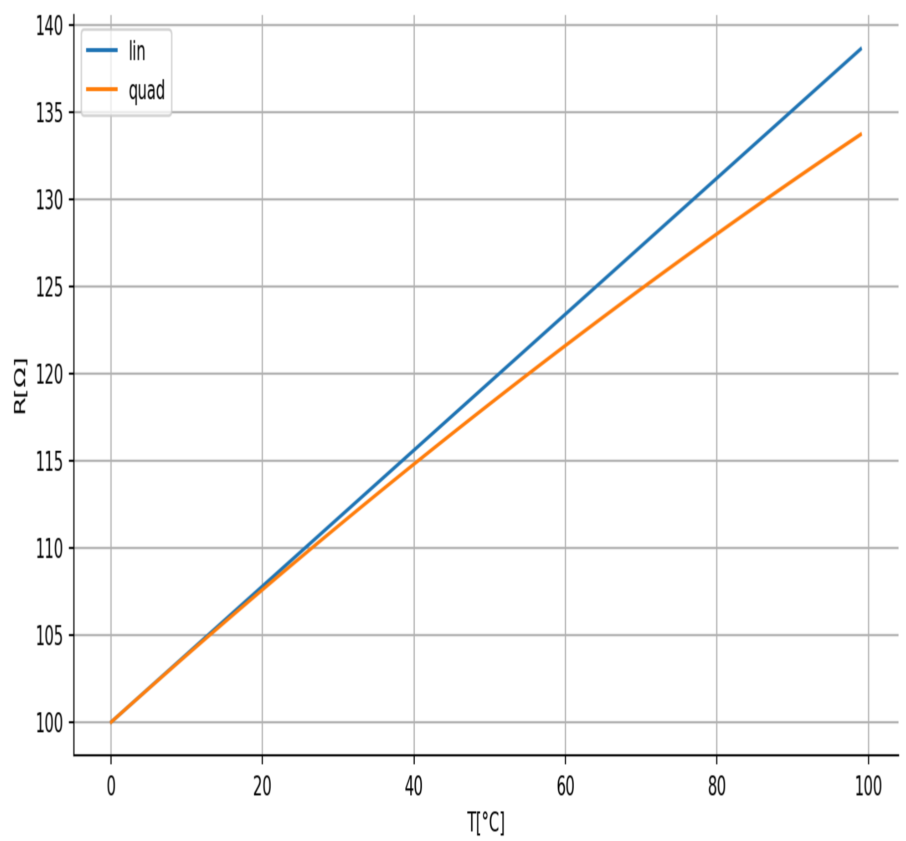
Linearisierung der Kennlinie eines NTC-Widerstands.

# 2.10 Interpretation der Linearisierung

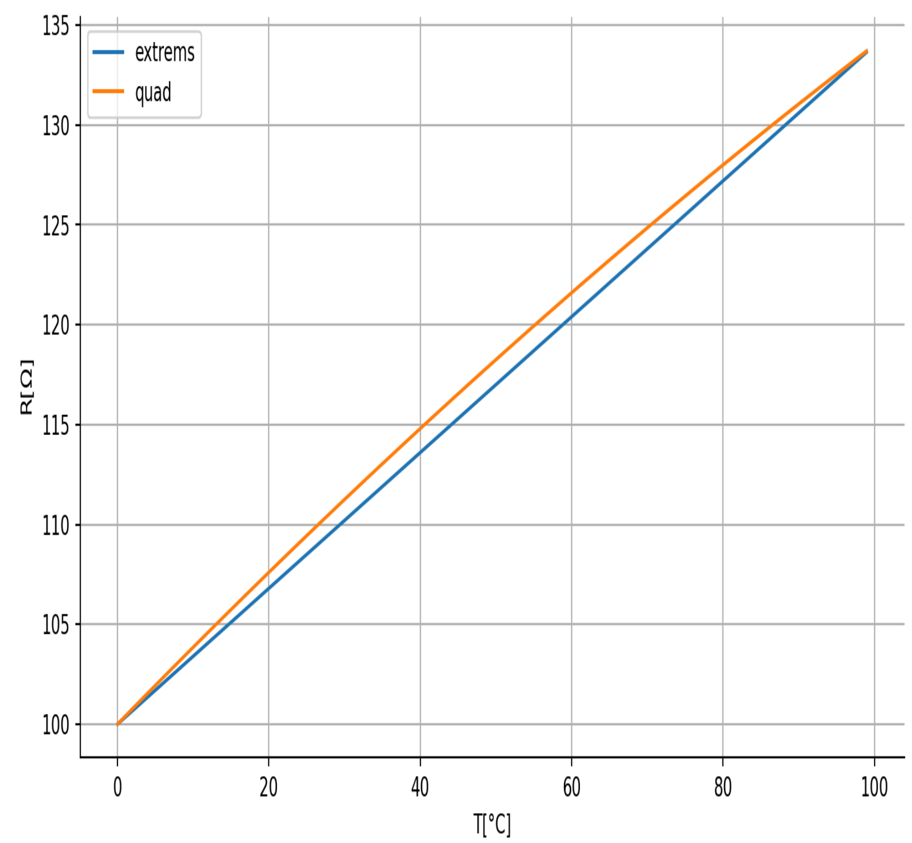
Die *Linearisierung* kann auf verschiedene Weise interpretiert werden. Zum Beispiel hat der Widerstand eines Pt1000 die Kennlinie für $T$ ausgedrückt in °C. Man kann auf verschiedene Arten linearisieren:

$$R = R0\left(1 + \alpha T + \beta T^2\right), \alpha = 0.39 \cdot 10^{-2}, \beta = -5 \cdot 10^{-6}$$

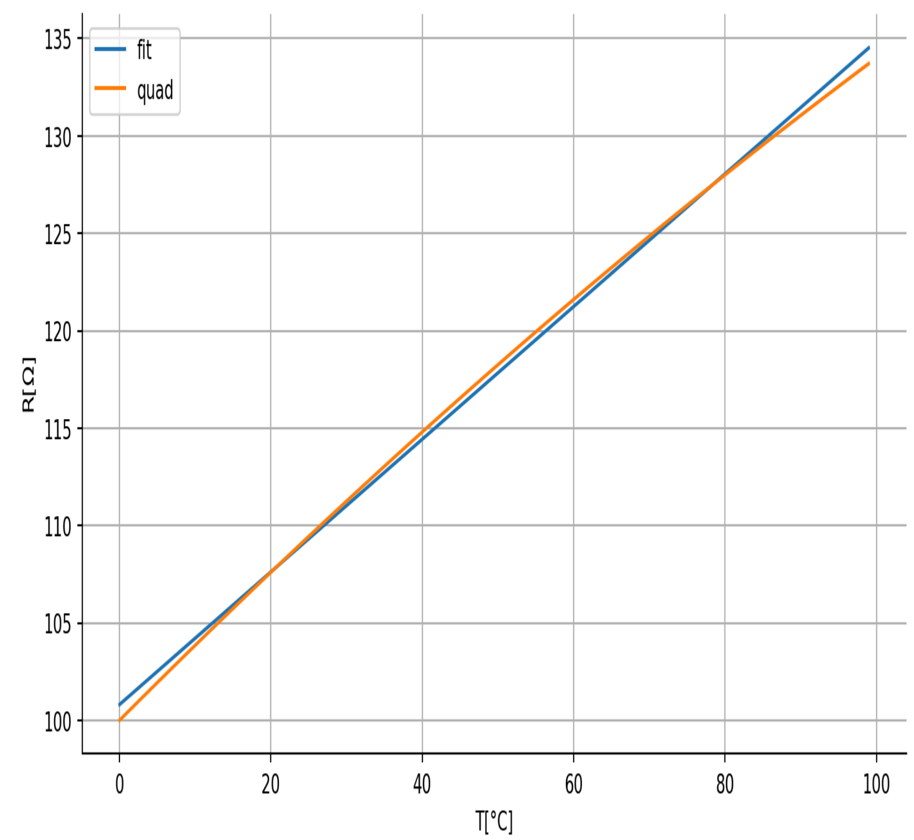
- Ableitung einer Kennlinie um einen Betriebspunkt.
- Vereinfachung der Beziehung
- Berechnung einer Geraden aus den Punkten (Identifikation)




Sans terme quadratique




Points extrêmes




Fit moindres carrés

# 2.11 Linearisierung eines multivariaten Systems

Für ein multivariates System der Art :

$$Y = f(a, b, c, \dots)$$

Die Verallgemeinerung der Linearisierung besteht darin, die Ableitung auf jeder Variablen zu berechnen, die man am Betriebspunkt auswertet. Am Ende erhält man einen Ausdruck wie :

$$\begin{aligned} y_{lin} &= f(a_0, b_0, \dots) + Sa \cdot (a - a_0) + Sb \cdot (b - b_0) + \dots, \\ Sa &= \left.\frac{df(a, b, c, \dots)}{da}\right|_{a_0, b_0, ..} \\ Sb &= \left.\frac{df(a, b, c, \dots)}{db}\right|_{b_0, b_0, ..} \\ &\dots \end{aligned} \tag{2}$$

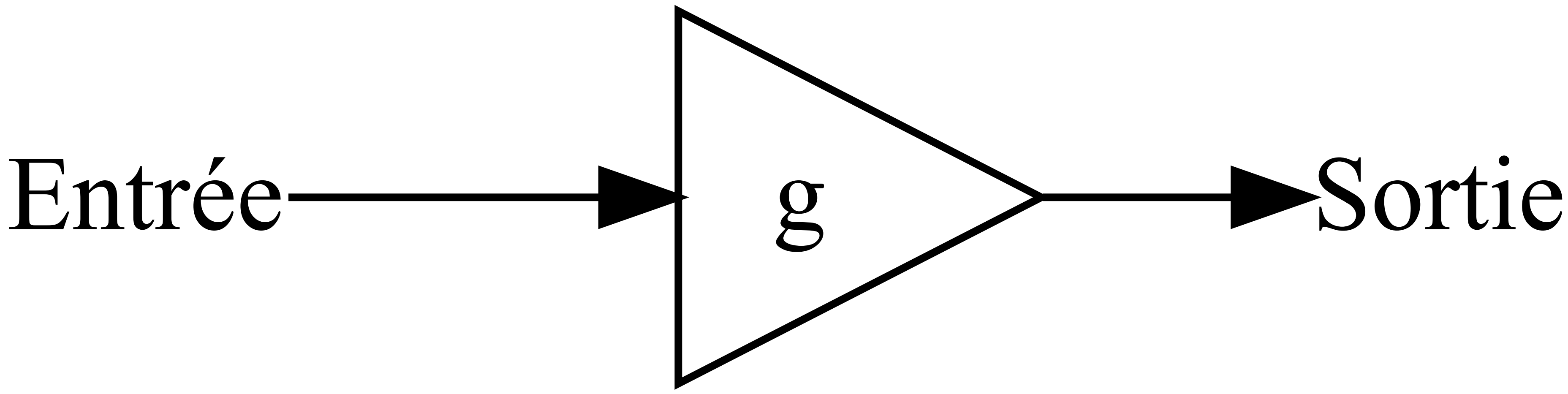
**Übung**

Linearisieren Sie diese Funktion um den Punkt $x_1 = 3, x_2 = 4$:

$$y(x_1, x_2) = 0.5 \cdot x_1 \cdot x_2^2$$

# 2.12 Leistungssteigerung

- Leistungsverstärkungen werden vor allem bei der Übertragung von Wellen (Ton, Radio, Licht) eingesetzt.




- Zur Darstellung von Potenzen werden Logarithmen verwendet:

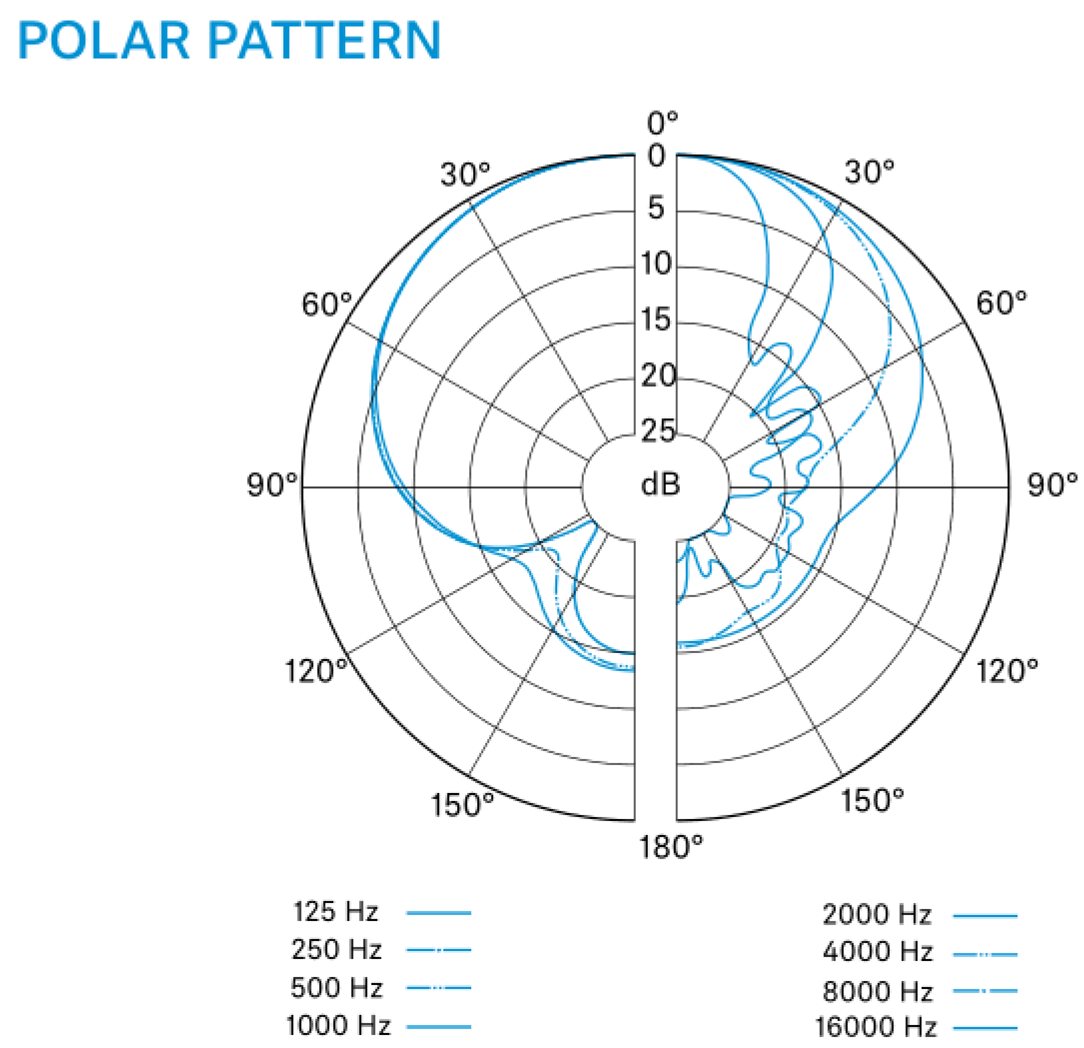
$$G_{puissance} = \frac{A_{sortie}^2}{A_{entrée}^2} = G_{amp}^2$$

$$G_{puissance}[dB] = 10 \cdot \log_{10}(G_{puissance}) = 10 \cdot \log_{10}(G_{amp}^2) = 20 \cdot \log_{10}(G_{amp})$$

# 2.13 Beispiel in Audio

Wenn wir eine Audioszene analysieren, in der wir eine Tonaufnahme mit einem Mikrofon machen wollen. Dabei treten folgende Phänomene auf:

- Die Ausbreitung in der Luft verursacht einen Verlust von 3dB jedes Mal, wenn sich die Entfernung verdoppelt.
- Das Mikrofon hat je nach Mikrofontyp eine unterschiedliche Charakteristik, die es ermöglicht, z. B. ein Instrument zu *visitieren*.
- Die Reaktion des Mikrofons, seine Richtcharakteristik, hängt von der Frequenz der Schallquelle ab.
- Kabel können eine Dämpfung einführen.




Polardiagramm des Mikrofons MKH 416

# 2.14 Verstärkungskanal in dB

- Eine Verstärkungskette bewirkt eine Verstärkung oder Abschwächung des zu messenden Signals.

$$A_{sortie} = A_{entrée} \cdot g_{preamp} \cdot att_{line} \cdot g_{ampli}$$

- Die Verwendung von *Dezibel* ermöglicht einen bequemeren Wertebereich und vereinfacht die Berechnung der Gesamtverstärkung.

$$A_{sortie}[dB] = 20\log_{10}(A_{entrée} \cdot g_{preamp} \cdot att_{line} \cdot g_{ampli}) =$$
$$20\log_{10}(A_{entrée}) + 20\log_{10}(g_{preamp}) + 20\log_{10}(att_{line}) + 20\log_{10}(g_{ampli})$$
$$P_{sortie}[dB] = P_{entrée}[dB] + G_{pream} + G_{line} + G_{amp}$$

**Tip**

- Die Gewinne werden in dB für *Dezibel* angegeben.
- Ein Dezibel ist ein Verhältnis: $Att[dB] = 10\log_{10}\left(\frac{P1}{P2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{U1}{U2}\right)$
- Es werden Referenzwerte definiert wie dBm (1mV), dBu (0.775[V] RMS)…

# 2.15 Beispiel für eine Verstärkungskette

- Wie hoch ist der Signalpegel am Ende der Kette?

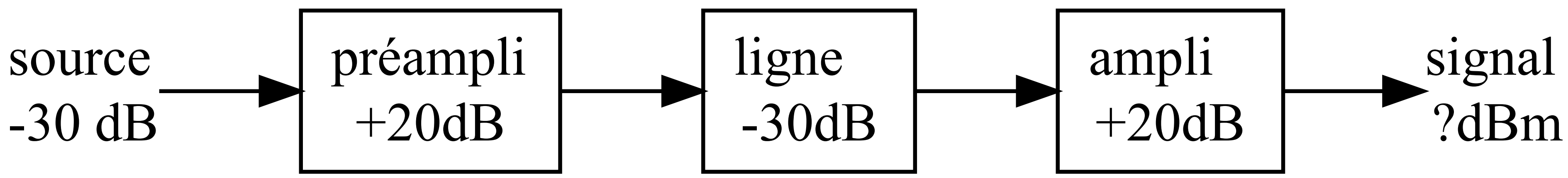



Figure 1: Exemple de chaine de gain de puissance

**Tip**

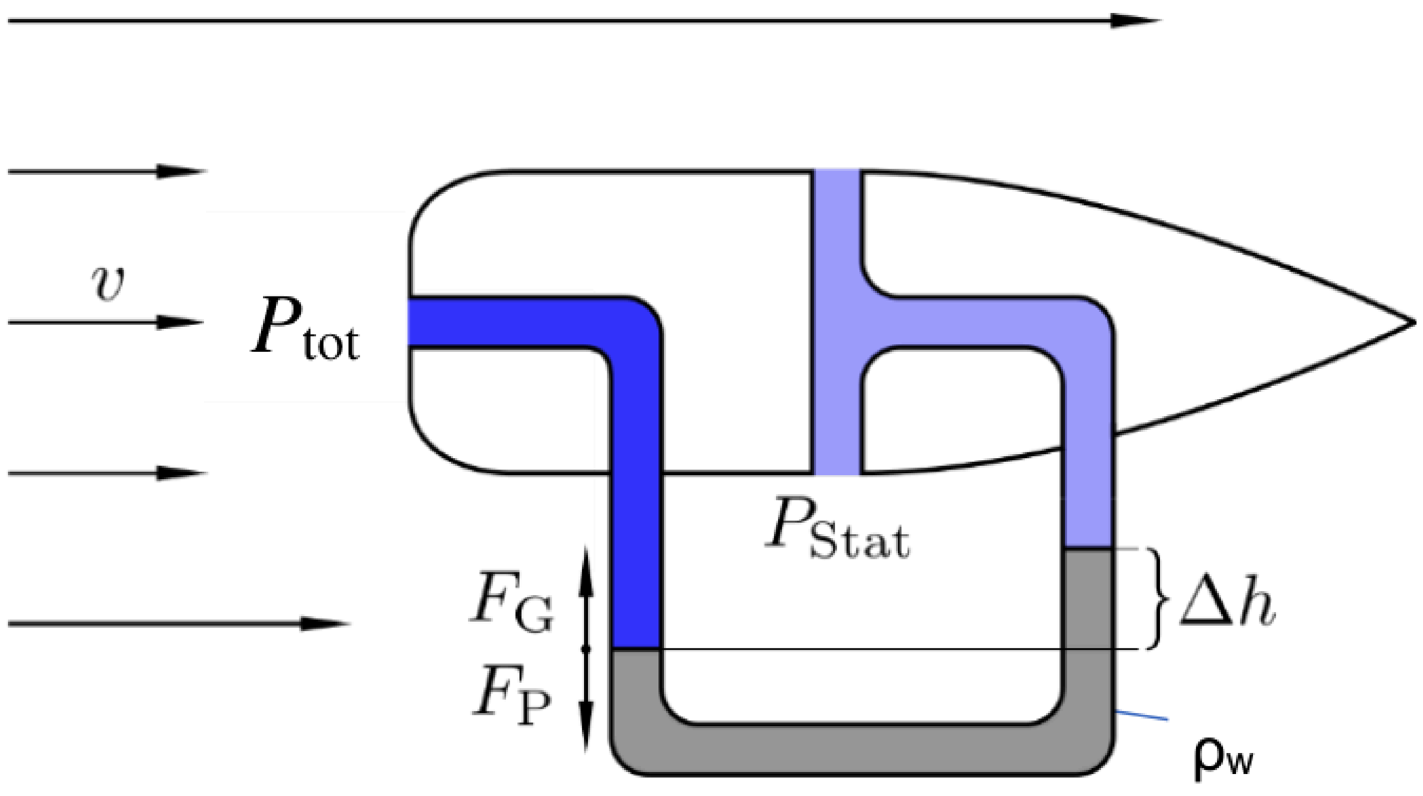
Man braucht keinen Taschenrechner …

Es gibt einige bemerkenswerte Werte:

- 6dB Gewinn von 2
- 20dB Verstärkung von 10
- 14dB = 20-6dB => Verstärkung von 10/2 = 5

# 2.16 Übung 1

## Pitot-Sonde





Eine Prandtl-Sonde, auch Pitot-Rohr genannt, dient dazu, die Geschwindigkeit v eines Flugzeugs zu messen. Flugzeugs in Bezug auf die Luft. Sie vergleicht den statischen Druck Pstat mit dem Gesamtdruck Ptot,

$$P_{tot} = P_{stat} + \frac{\rho}{2} v^2$$

Wobei die Dichte ρ der Luft von der Flughöhe H abhängt, gemäß

$$\rho(H) = \rho_{mer}(1 - k \cdot H)^{\alpha}$$

mit $\alpha = 5.26$, $\rho_{mer} = 1.29[kg/m3]$, $k = 22.6 \cdot 10 - 6[1/m]$, und $H$ in [m] über dem Meeresspiegel.

Der Unterschied zwischen $P_{stat}$ und $P_{tot}$ ergibt sich aus dem Höhenunterschied $\Delta h$ der Säule aus Flüssigkeiten. Flüssigkeit (Quecksilber) mit der Dichte $\rho_{Hg} = 13'600[kg/m3]$. Wir nehmen $g = 9.81[m/s^2]$.

1. Zeigen Sie, dass die nichtlineare Beziehung der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von Δh und H wie folgt lautet

$$v(\Delta h, H) = sqrt\frac{2\rho_{Hg} g \Delta h}{\rho_{mer}(1 - k \cdot H)^{\alpha}}$$

2. Zeigen Sie, dass der linearisierte Ausdruck dieser Beziehung um den Arbeitspunkt herum. $v_0$, $H_0$ geschrieben wird:

$$v_{lin}(\Delta h, H) = v_0 + \frac{\alpha k v_0}{2(1 - kH_0)}(H - H_0) + \frac{v_0}{2\Delta h_0}(\Delta h - \Delta h_0)$$

und geben Sie einen Ausdruck für $\Delta h_0$.

3. Beim Anflug auf Cointrin sinkt das Flugzeug von seiner Reiseflughöhe $H_0 = 10[km]$, wo es mit $v_0 = 900[km/h]$ flog, auf eine Warteflughöhe $H_1 = 3[km]$, und das Instrument misst nun $\Delta h_1 = 4.13[cm]$ anstelle von zuvor $\Delta h_0 = 7.85[cm]$. Berechnen Sie $v_1$ genau auf exakte Weise und durch Linearisierung. Begründen Sie kurz, ob sich die Linearisierung in diesem Fall gut anwenden lässt?

**Note**

Übung der Pitot-Sonde wurde in einem jupyter notebook durchgeführt.

Pitot-Sonde: python/ex_pitot_sol.ipynb

# 2.17 Übung 2

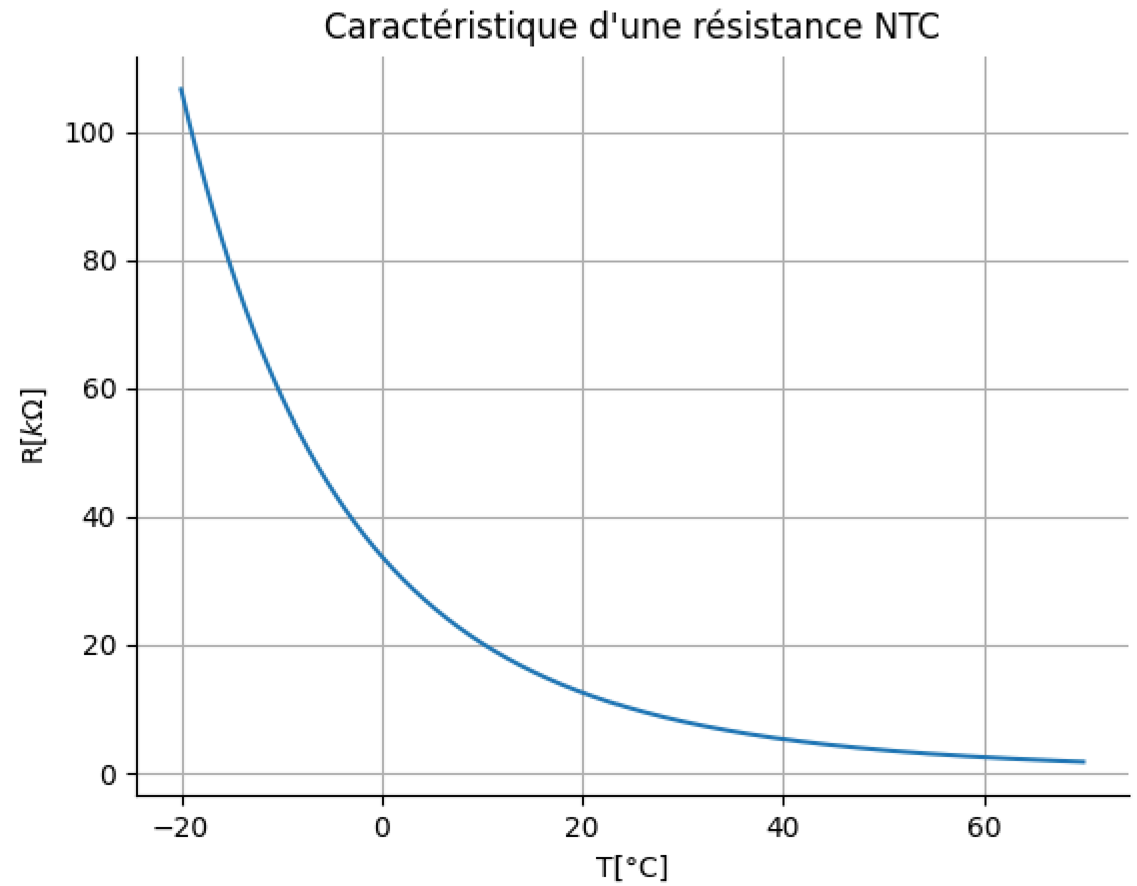
**NTC-Widerstand**

Wir betrachten einen NTC-Widerstand (negative temperature coefficient = negativer Temperaturkoeffizient negativer Temperaturkoeffizient), der als Temperatursensor dient. Seine Charakteristik ist ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

Der Widerstand als Funktion der Temperatur gehorcht dem Gesetz

$$R(T) = R_{25}\exp(\beta(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{25}}))$$

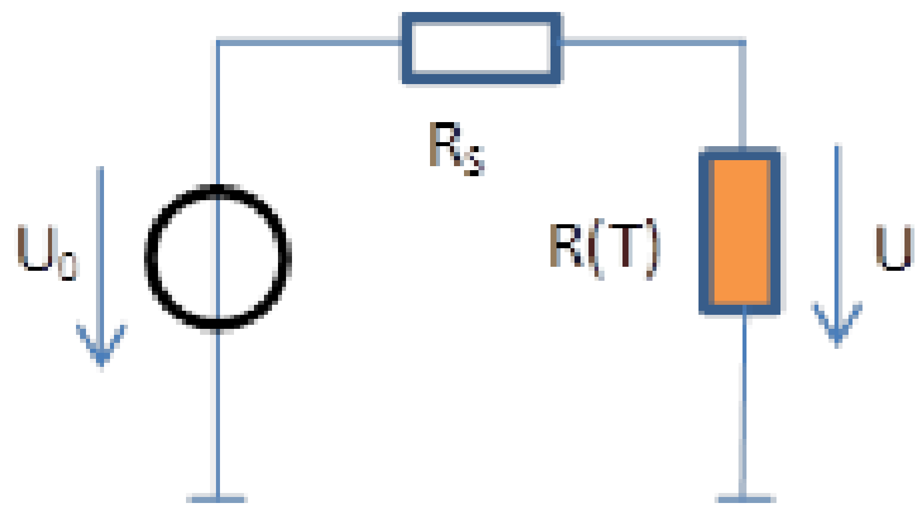
mit $R_{25} = 10k\Omega, \beta = 3965[K], T_{25} = 298[K]$ und der Temperatur $T$, die in [K] angegeben wird.




1. Linearisieren Sie diese Gleichung um $T = T_{25}$.
2. Wie groß ist der Linearisierungsfehler absolut (in $\Omega$) und relativ (in % des nicht-? linear) bei 0°C?
3. Nehmen wir an, dass dieser Sensor mit einem konstanten Strom von 0,25 mA versorgt wird. Welche Spannung erscheint an seinen Klemmen bei 25°C und bei 0°C, wenn man den nichtlinearen Ausdruck von R(T)? Welche Spannungswerte würden sich dagegen bei Verwendung der Schätzung ergeben? linearisiertem $R(T)$ um $T_{25}$?

Der Stromkreis wird wie nebenstehend beschrieben verändert.

$$R_S = 30[k\Omega] \qquad U_0 = 10[V]$$




4. Berechne erneut die Werte von U für die Temperaturen 25°C und 0°C mithilfe von den nichtlinearen Ausdruck von $R(T)$, und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus der Frage. der vorherigen Tabelle. Kommentieren Sie.

# 2.18 Übung 3

**Höhenmesser**

Eine gängige Methode zur Messung der Höhe h ist die Ableitung der Höhe aus einer Messung des Luftdrucks Der Luftdruck p ändert sich mit der Höhe wie folgt

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

wobei die Dichte $\rho$ ihrerseits vom Druck $p$ abhängt gemäß der Beziehung

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

Der Index 0 bezeichnet Werte, die bei einer Höhe von $h_0$ und einer Referenztemperatur $T_0$. $g = 9.81[m/s2]$ ist die Erdbeschleunigung.

Der vollständige Umgebungsdruck $p_a$ hängt außerdem von der Temperatur ab. Temperatur gemäß der Beziehung

$$p_a(h, T) = p(h) \cdot \frac{T}{T_0}$$

1. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung für $h(p_a, T)$ die folgenden gegebenen Grundgleichungen erfüllt:

$$h(p_a, T) = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_0}{p_a} \cdot \frac{T}{T_0}\right)$$

   Hinweis: Invertiere $h(p)$ zu $p(h)$, und überprüfe dann, dass $p(h)$ eine Lösung der Grundgleichungen ist.

2. Zeigen Sie, dass die Höhe $h(p_a, T)$ von einer Referenzhöhe $h_0$ aus linearisiert werden kann nach

$$h_{lin}(p_a, T) = h_0 + S_p(p_a - p_0) + S_T(T - T_0)$$

   Zeigen Sie, dass für

   $h0 = 500[m]$ $p_{a0} = p_0 = 1013.25[hPa]$ (1 [hPa] = 100 [Pa]), $T_0 = 288[K]$ (oder 15 [°C]), $\rho_0 = 1.225[kg/m3]$,

   ergibt sich $S_p = -8.32[m/hPa]$ und $S_T = 29.3[m/°C]$

3. Wie groß ist der absolute Fehler in [m] bei der Höhenmessung mit dieser Linearisierung, wenn eine Person von Sion $(h0, T0)$ bis zum Gornergrat ($h = 3135[m], T = -5[°C]$) reist.

4. Da der Höhenmesser nicht über eine genaue Messung der Temperatur T verfügt, korrigiert er wendet eine standardisierte Korrektur von -6.5 [°C] /1000 [m] Höhenunterschied an. Wie groß ist ist der Höhenfehler, wenn man in unserem Fall mit dieser Standardkorrektur rechnet?

# 2.19 Übung 4

**Gewinn eines seriellen Systems**

Zwei Verstärker sind in Reihe geschaltet. Der erste verdoppelt die Amplitude des Signals und der zweite auf eine Verstärkung von 34 [dB].

1. Wie groß ist der Wert des Ausgangssignals, wenn wir einen Wert von von 3 an den Eingang des ersten Verstärkers angelegt wird?
2. Wie hoch ist die Gesamtverstärkung in [dB] der beiden Verstärker?

# 2.20 Übung 5

### Beschallung eines Orchesters

Eine Schallquelle wird mit einem Mikrofon MKH 416 aufgenommen. Wir haben zwei Instrumente, eine Geige und ein Saxophon. Die Instrumentalisten sitzen 2 m voneinander entfernt.

- Wie laut wird bei der Messung des Mikrofonsignals die Geige im Vergleich zum Saxophon sein?
- Wie laut wird ein Niesen im hinteren Teil des Saals sein

| Parameter | Wert |
|---|---|
| Schallpegel einer Violine | 80 dBA |
| Schallpegel eines Saxophons | 90 dBA |
| Niesen | 90 dBA |
| Abstand zu den Zuschauern | 20 Meter |
| Dämpfung mit der Entfernung | 3dB / Verdoppelung der Entfernung |

# 2.21 Übung 6

**Gleichstromtraining**

Was ist der stationäre Zustand des Gleichstromantriebs (siehe 1)?