Instrumentation

Marc Nicollerat

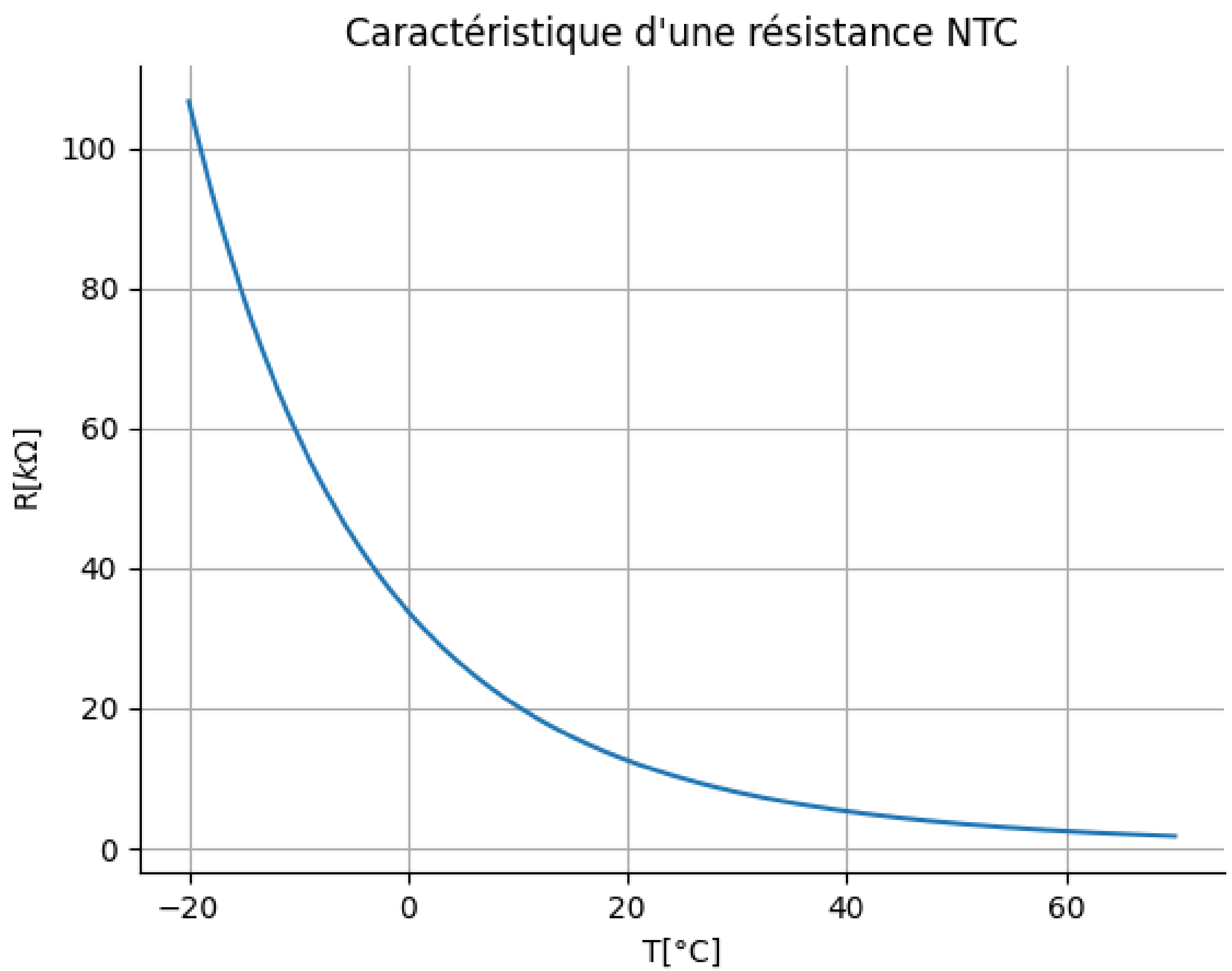
2 Caractéristiques statiques, linéarisation

- Caractéristique statique
- Comportement dynamique
- Limitations de la précision
- Linéarisation
- Gain en puissance

2.1 Caractéristique statique

Une caractéristique statique représente la réponse à un signal *lent*. La caractéristique est le lien entre la mesurande et la sortie du capteur. Si le capteur est linéaire, on peut déduire facilement la valeur de la mesurande.

Dans bon nombre de cas, la caractéristique n'est pas linéaire.



Caractéristique d'une résistance

> **Note**
>
> La caractéristique donne la valeur de la résistance comme fonction de la température. Ceci est une description du comportement physique du composant. En pratique, on va mesurer la résistance et devoir en déduire la température.

2.2 Système statique et système dynamique

Un système statique a une réponse instantannée. L'exemple typique est la résistance. Le courant est lié à la tension de façon statique, la relation ne dépend pas du temps.

$$U(t) = R \cdot i(t)$$

Un système dynamique dépend du temps, comme par exemple l'enclenchement d'un moteur. Il ne peut pas tourner instantanément à sa vitesse nominale.

Caution 1: Entraînement à courant continu

Un moteur produit un couple donné par l'équation suivante :

$$M(t) = K_i \cdot i(t)$$

Le courant répond à une équation différentielle

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + K_n\omega(t)$$

L'équation mécanique du moteur est donnée par

$$J\frac{d\omega}{dt} + f \cdot \omega(t) = M(t) - M_R(t)$$

2.3 Comportement dynamique

Lors d'un changement de condition, un système ne trouve pas instantanément un point d'équilibre.

Par exemple, une sonde Pt100 a une masse propre. Sa température ne peut pas changer instantanément.

La sonde lorsqu'elle est plongée dans un milieu, sa température doit prendre la valeur du milieu.

De plus, le courant utilisé pour la mesure chauffe la sonde, ce qui fait augmenter sa température. A mesure que la température est plus grande, sa dissipation vers l'extérieur (par exemple l'air ambiant) augmente.

⚠ **Défi**

Quelles sont les équations différentielles qui régissent ce système ?

2.4 Equation dynamique

La température répond à une équation différentielle :

$$\frac{\partial T_{sonde}}{\partial t} c_m = P_{el} - P_{th} = R \cdot i^2 - R_{th} \cdot (T_{sonde} - T_a)$$

Où T_a est la température ambiante et R_{th} une *résistance thermique.*

Après un temps suffisamment long, une température d'équilibre apparaît quand $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, soit quand :

$$R \cdot i^2 = R_{th} \cdot (T_{sonde} - T_a) \implies T_{sonde} = \frac{R \cdot i^2}{R_{th}} + T_a$$

Attention

La valeur de R_{th} dépend des conditions d'utilisation. Dans l'air, cette valeur sera plus grande que dans l'eau. Dans l'air, l'orientation et la vitesse de l'air peut influencer la valeur.

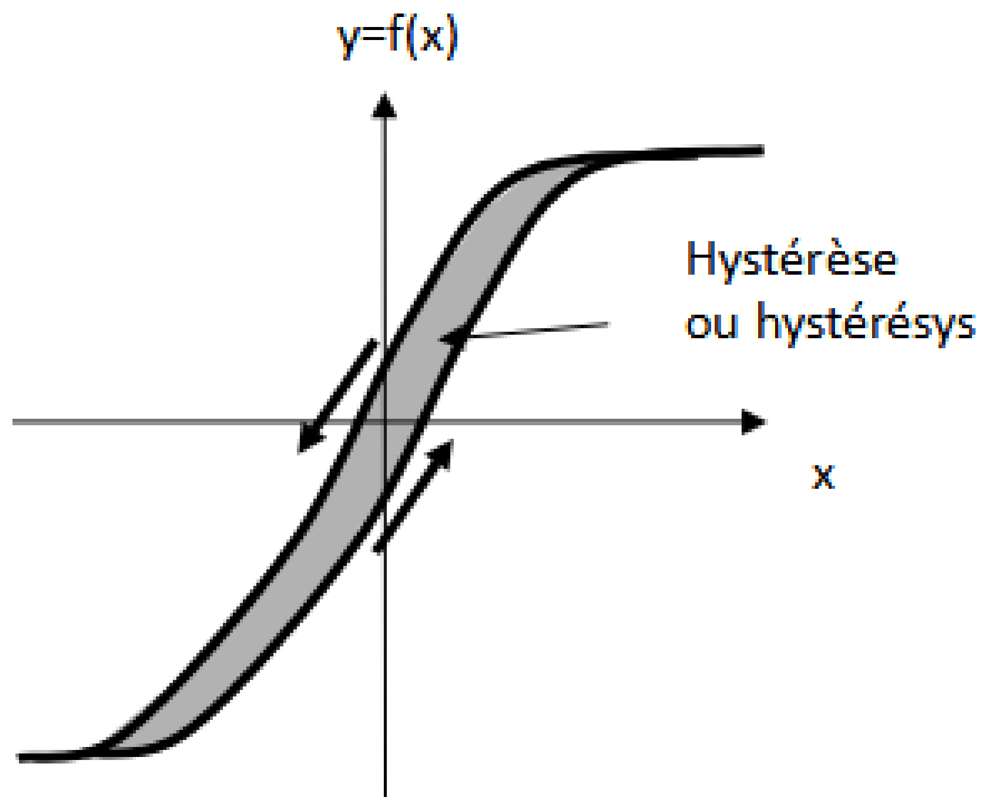
Tip

Quel intérêt y aurait-il à utiliser une sonde de résistance plus élevée ?

2.5 Limitations de la précision

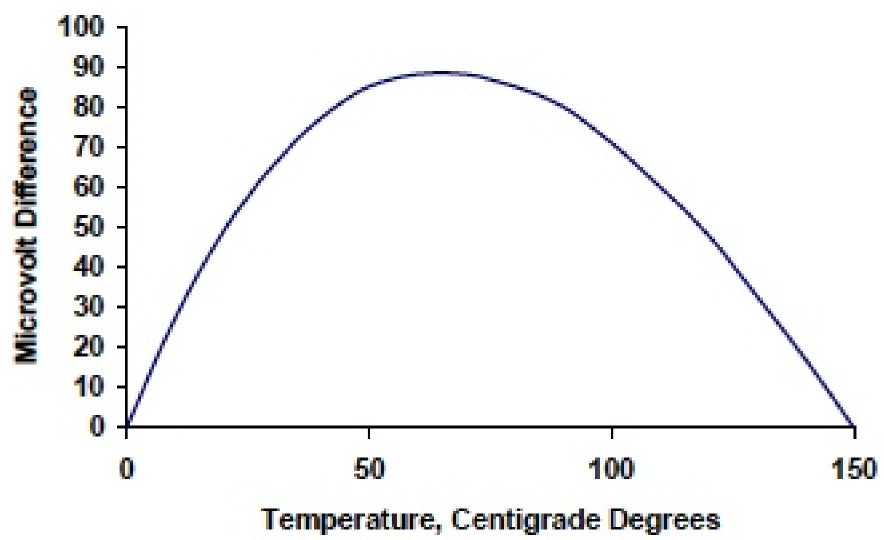
Certaines particularités limitent les possibilités de retrouver la mesurande avec précision.

- **Hystérèse**
  - Un jeu mécanique, typiquement un engrenage. Le jeu fait que le mouvement d'un axe à l'entrée ne se voit pas tout de suite à la sortie.
  - En magnétisme, l'aimantation a une hystérésis. La caractéristique n'est pas la même selon le sens de parcours.



- Un **offset** peut venir fausser la caractéristique.

- Fonction **non univoque**. Il n'est pas possible de trouver la bonne mesurande.
- **Saturation**. Si l'entrée est trop grande, le système va saturer, la sortie ne change plus quand l'entrée augmente.



2.6 Résolution

La résolution d'un appareil est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument.

- Un multimètre qui affiche une tension avec 3 digits 1.23 [V] aura une résolution de 10mV.
- La résolution d'un système numérique est typiquement liée à la résolution de son convertisseur A/D.

$$\Delta x = \frac{\text{Plage d'entrée}}{2^N}, N \text{ est le nombre de bits}$$

2.7 Etalonnage

L'étalonnage le plus simple est un réglage de l'offset et du gain d'un appareil. Il suffit d'avoir une valeur de référence à mesure pour définir le gain.

Réglage de l'offset	L'appareil indique zéro quand il n'y a pas de valeur à mesurer
Réglage du gain	On utilise une valeur connue pour régler le gain.

Tip

Les appareils de grande précision ont des références internes et peuvent s'étalonner tout seuls.

2.8 Exemples d'étalonnage

Les appareils utilisés pour du commerce ou pour une mesure officielle doivent être contrôlé et étalonnés à intervalle régulier pour garantir la précision dans le temps.

Etalonnage d'un compteur de volume	Le compteur de volume est remis à zéro à chaque mesure. Pour étalonner, on remplit un réservoir de volume connu, particulièrement bien gradué autour de la quantité de qualibration
Réglage d'un appareil de mesure du gaz	Pour étalonner ce genre d'appareil, on utilise des échantillon de gaz connu. Pour le zéro, on utilise par exemple de l'azote. Pour le réglage de l'échelle, on utilise un gaz aux propriétés connues

2.9 Linéarisation

Une caractéristique de capteur est parfois exprimée par une relation non linéaire. On peut simplifier les calculs en effectuant une linéarisation de la caractéristique.

$$y = f(m), \qquad y_{lin} = f(m_0) + S \cdot (m - m_0), \qquad S = \left.\frac{df(m)}{dm}\right|_{m_0} \tag{1}$$

Cette linéarisation permet de simplifier le calcul. Dans beaucoup de cas, l'approximation est suffisante.

L'inversion de la caractéristique n'est pas toujours facile. Par contre une linéarisation n'est pas difficile à inverser.

⚠ **Exercice**

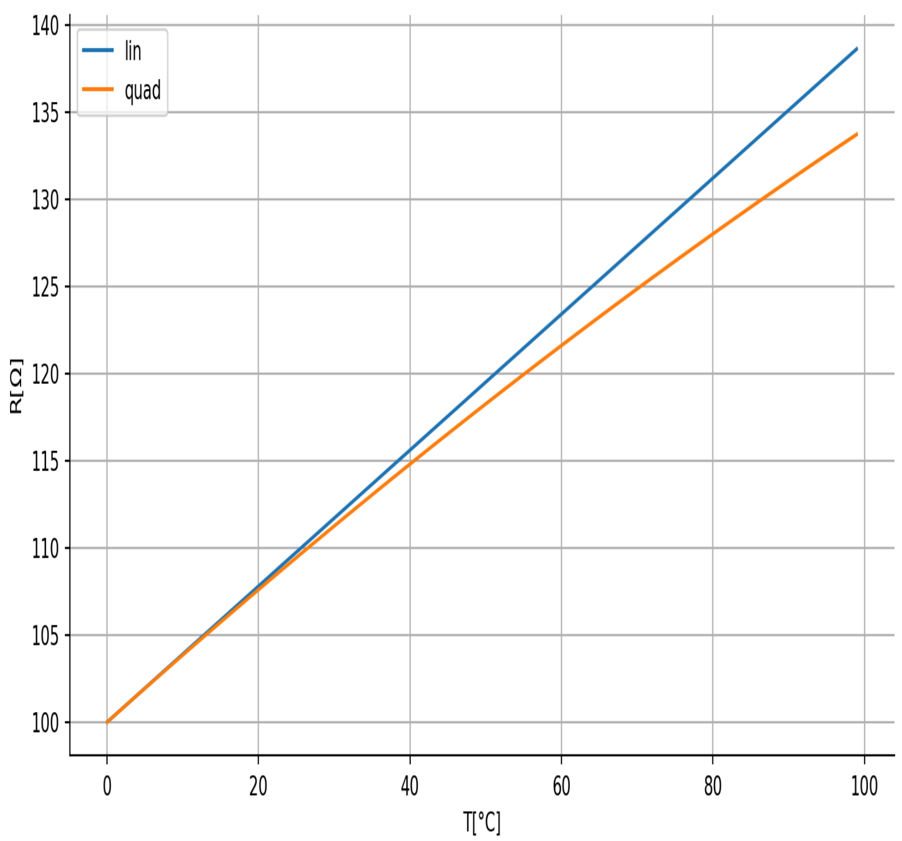
Linearisation de la caractéristique d'une résistance NTC

2.10 Interprétation de la linéarisation

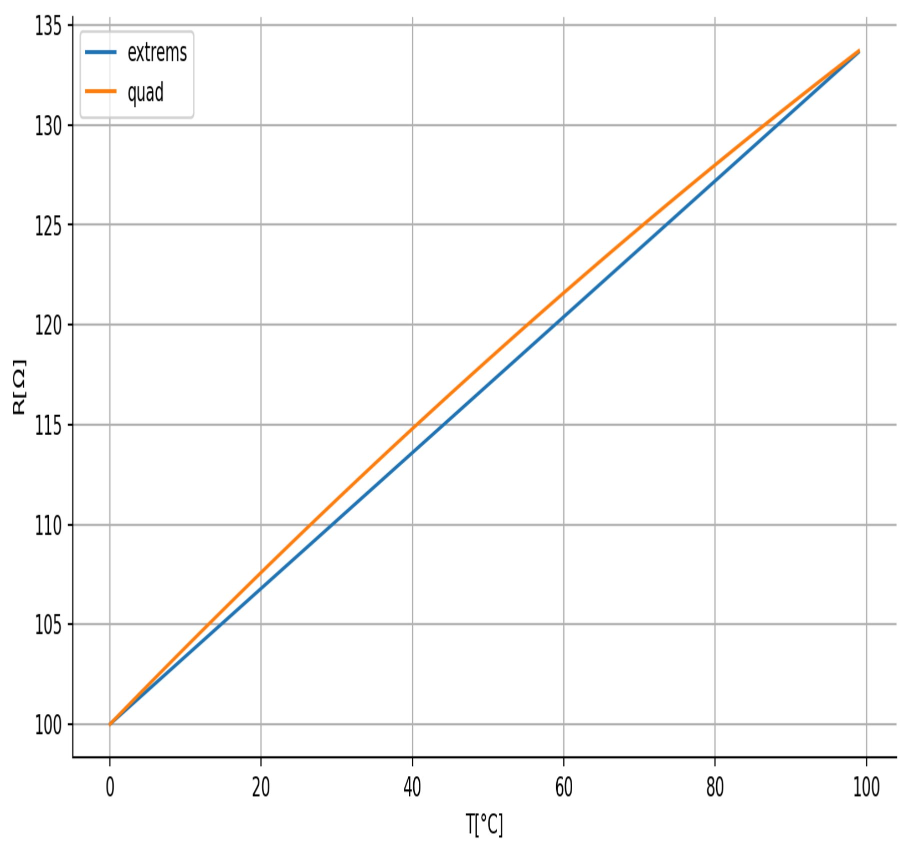
On peut interpréter de différentes façons la *linéarisation*. Par exemple la résistance d'une Pt1000 a la caractéristique pour T exprimée en °C. On peut linéariser de différentes façons :

$$R = R0\left(1 + \alpha T + \beta T^2\right), \alpha = 0.39 \cdot 10^{-2}, \beta = -5 \cdot 10^{-6}$$

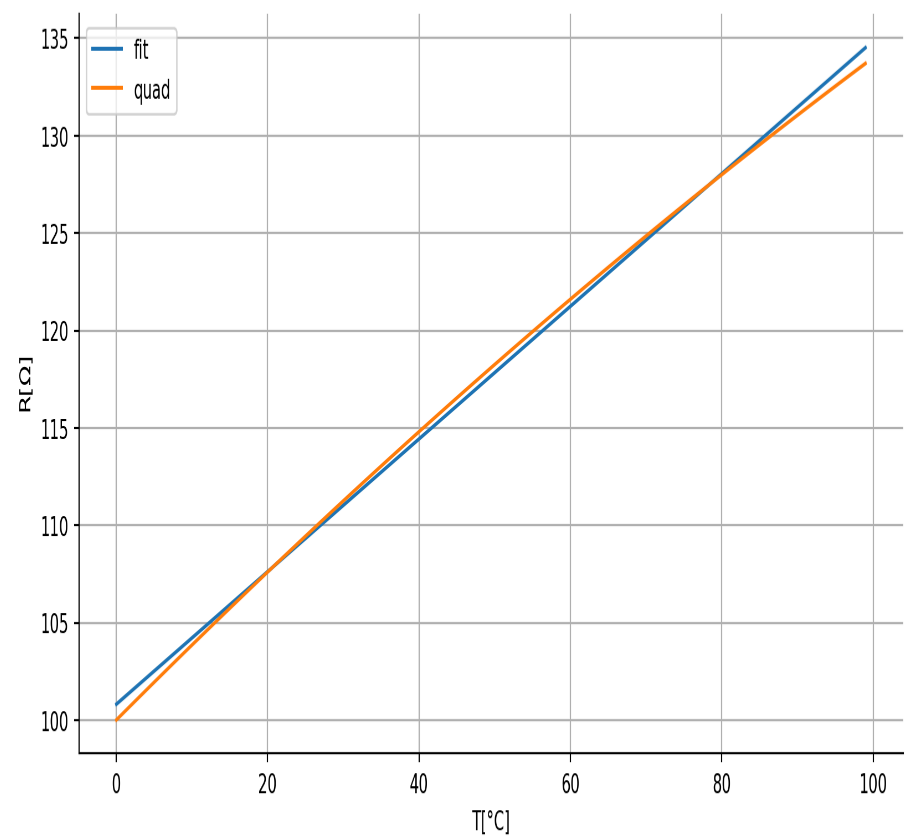
- Dérivée d'une caractéristique autour d'un point de fonctionnement
- Simplification de la relation
- Calcul d'une droite à partir des points (Identification)



Sans terme quadratique



Points extrêmes



Fit moindres carrés

2.11 Linéarisation d'un système multivariable

Pour un système multivariable du genre :

$$Y = f(a, b, c, \dots)$$

La généralisation de la linéarisation consiste à calculer la dérivée sur chaque variable qu'on évalue au point de fonctionnement. On a au final une expression du genre :

$$\begin{aligned} y_{lin} &= f(a_0, b_0, \dots) + Sa \cdot (a - a_0) + Sb \cdot (b - b_0) + \dots, \\ Sa &= \left.\frac{df(a,b,c,\dots)}{da}\right|_{a_0,b_0,..} \\ Sb &= \left.\frac{df(a,b,c,\dots)}{db}\right|_{b_0,b_0,..} \\ &\dots \end{aligned} \qquad (2)$$

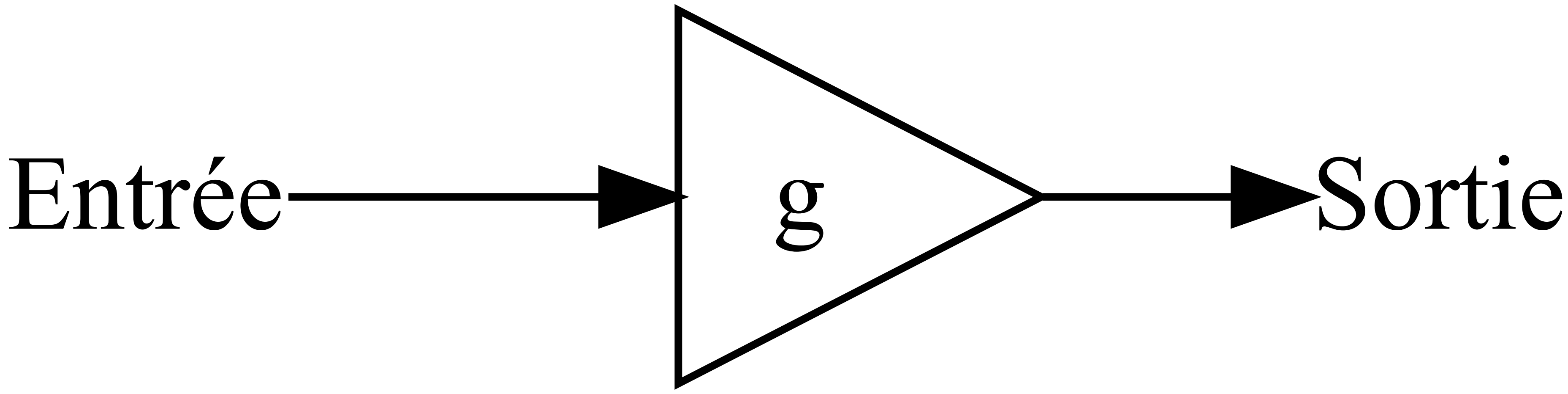
Exercice

Linéarisez cette fonction autour du point $x_1 = 3, x_2 = 4$:

$$y(x_1, x_2) = 0.5 \cdot x_1 \cdot x_2^2$$

2.12 Gain de puissance

- Les gains de puissance sont avant tout utilisés dans la transmission d'ondes (son, radio, lumière)



- On utilise les logarithmes pour représenter les puissances :

$$G_{puissance} = \frac{A^2_{sortie}}{A^2_{entrée}} = G^2_{amp}$$

$$G_{puissance}[dB] = 10 \cdot \log_{10}(G_{puissance}) = 10 \cdot \log_{10}(G^2_{amp}) = 20 \cdot \log_{10}(G_{amp})$$

2.13 Exemple en audio

Si on analyser une scène audio, où on veut faire une prise de son avec un micro. Les phénomènes suivants interviennent :

- La propagation dans l'air cause une perte de 3dB chaque fois que la distance double
- Le microphone a une caractéristique qui varie selon le type de micro, ce qui permet de *viser* un instrument per exemple.
- La réponse des micros, leur directivité dépend de la fréquence de la source sonore.
- Les cables peuvent introduire une attétuation

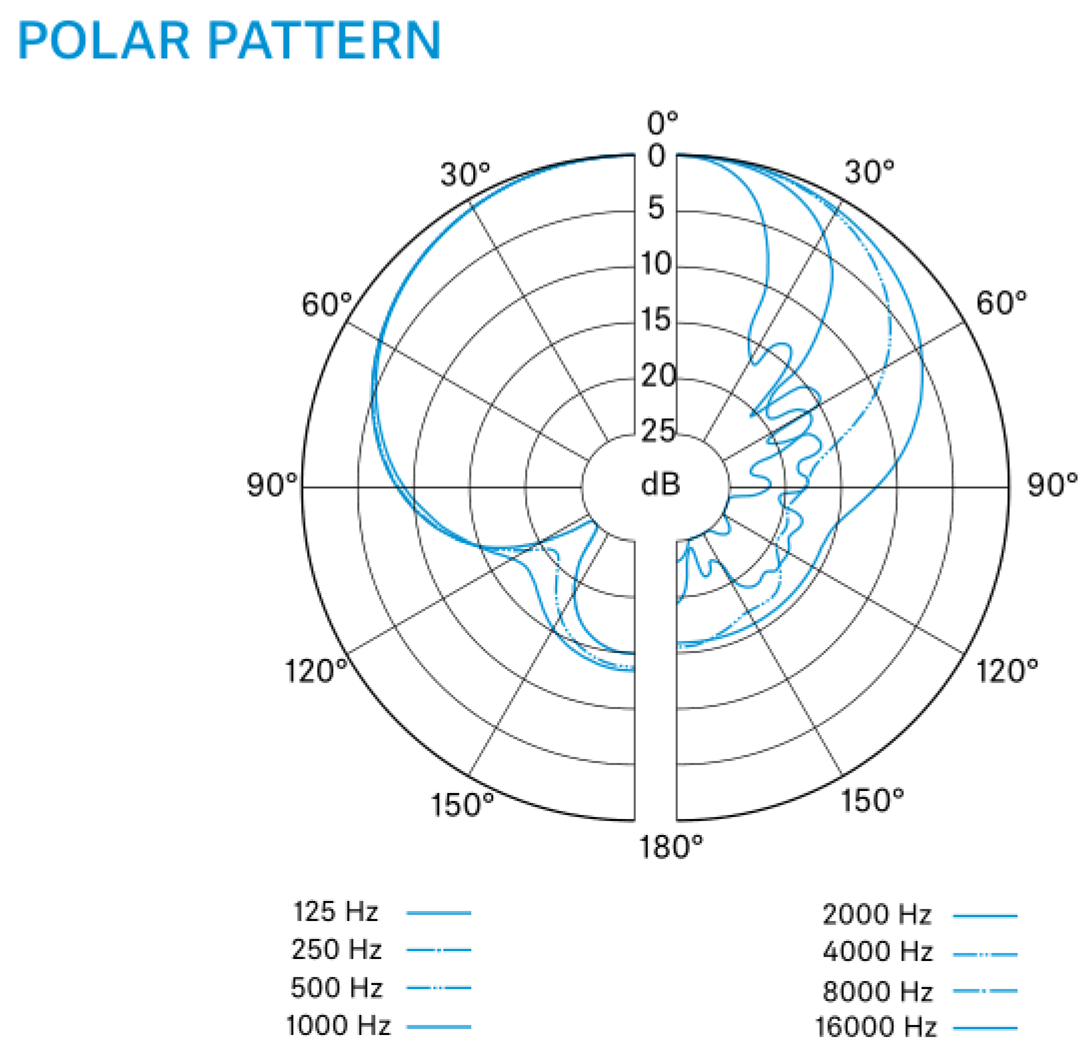


Diagramme polaire du micro MKH 416

2.14 Chain de gain en dB

- Une chaîne de gains cause un amplification ou une atténuation du signal à mesurer.

$$A_{sortie} = A_{entrée} \cdot g_{preamp} \cdot att_{line} \cdot g_{ampli}$$

- L'utilisation du *décibel* permet d'avoir une plage de valeur plus commode et simplifie le calcul du gain total.

$$A_{sortie}[dB] = 20\log_{10}(A_{entrée} \cdot g_{preamp} \cdot att_{line} \cdot g_{ampli}) =$$
$$20\log_{10}(A_{entrée}) + 20\log_{10}(g_{preamp}) + 20\log_{10}(att_{line}) + 20\log_{10}(g_{ampli})$$
$$P_{sortie}[dB] = P_{entrée}[dB] + G_{pream} + G_{line} + G_{amp}$$

Tip

- Les gains sont exprimé en dB pour *décibels*.
- Le décibel est un rapport : $Att[dB] = 10\log_{10}\left(\frac{P1}{P2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{U1}{U2}\right)$
- Des valeurs de références sont définies comme le dBm (1mV), dBu (0.775[V] RMS)…

2.15 Exemple de chaine de gain

- Quel est le niveau du signal en fin de chaîne ?

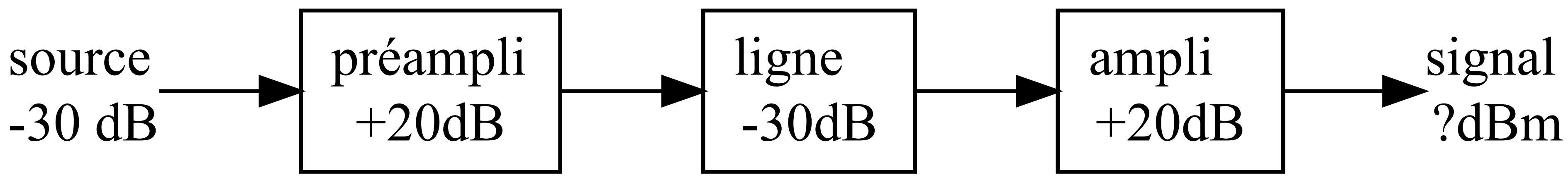


Figure 1: Exemple de chaine de gain de puissance

Tip

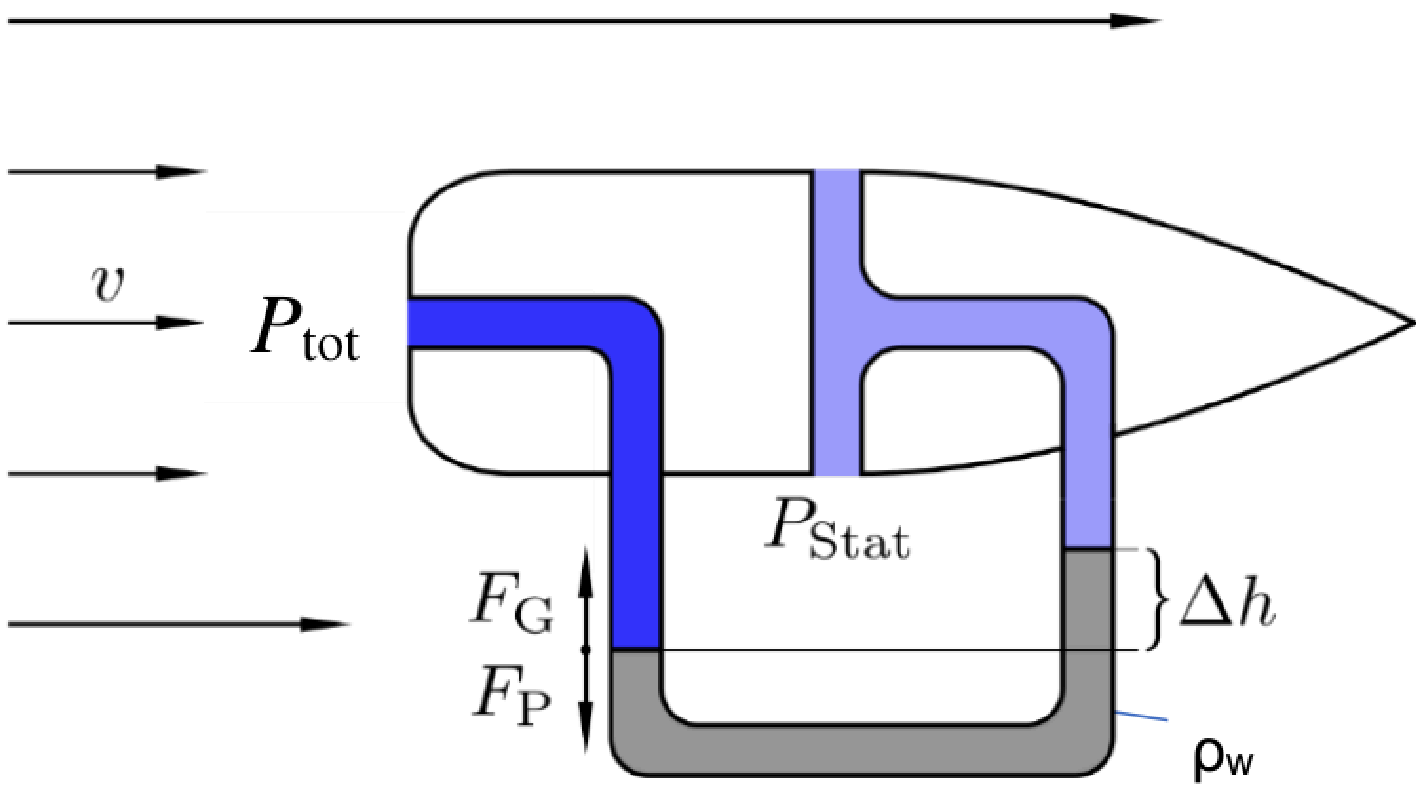
Pas besoin de calculette…

Il y a des valeurs remarquables :

- 6dB Gain de 2
- 20dB Gain de 10
- 14dB = 20-6dB => Gain de 10/2 = 5

2.16 Exercice 1

Sonde de Pitot



Une sonde de Prandtl, également appelée tube de Pitot, sert à mesurer la vitesse v d'un avion par rapport à l'air. Elle compare la pression statique Pstat avec la pression totale Ptot,

$$P_{tot} = P_{stat} + \frac{\rho}{2} v^2$$

Où la densité ρ de l'air dépend de la hauteur H de vol, selon

$$\rho(H) = \rho_{mer}(1 - k \cdot H)^{\alpha}$$

avec $\alpha = 5.26$, $\rho_{mer} = 1.29[kg/m3]$, $k = 22.6 \cdot 10 - 6[1/m]$, et H en [m] en dessus de la mer.

La différence entre P_{stat} et P_{tot} résulte en une différence de hauteur Δh de la colonne de liquide (mercure) avec la densité $\rho_{Hg} = 13^{'}600[kg/m3]$. Nous prenons $g = 9.81[m/s^2]$.

1. Montrer que la relation non linéaire de la vitesse v en fonction de Δh et H s'écrit

$$v(\Delta h, H) = sqrt\frac{2\rho_{Hg} g \Delta h}{\rho_{mer}(1 - k \cdot H)^{\alpha}}$$

2. Montrer que l'expression linéarisée de cette relation, autour du point de fonctionnement v_0, H_0 s'écrit :

$$v_{lin}(\Delta h, H) = v_0 + \frac{\alpha k v_0}{2(1 - kH_0)}(H - H_0) + \frac{v_0}{2\Delta h_0}(\Delta h - \Delta h_0)$$

et donner une expression pour Δh_0.

3. A l'approche de Cointrin, l'avion descend de sa hauteur de vol de croisière de $H_0 = 10[km]$, où il volait à $v_0 = 900[km/h]$, à une hauteur de vol d'attente $H_1 = 3[km]$, et l'instrument mesure maintenant $\Delta h_1 = 4.13[cm]$ au lieu d'auparavant $\Delta h_0 = 7.85[cm]$. Calculer v_1 de manière exacte et par linéarisation. Justifier brièvement, si la linéarisation se laisse bien employer dans ce cas-ci ?

Note

Exercice de la sonde de Pitot a été fait dans un jupyter notebook

Sonde de Pitot : python/ex_pitot_sol.ipynb

2.17 Exercice 2

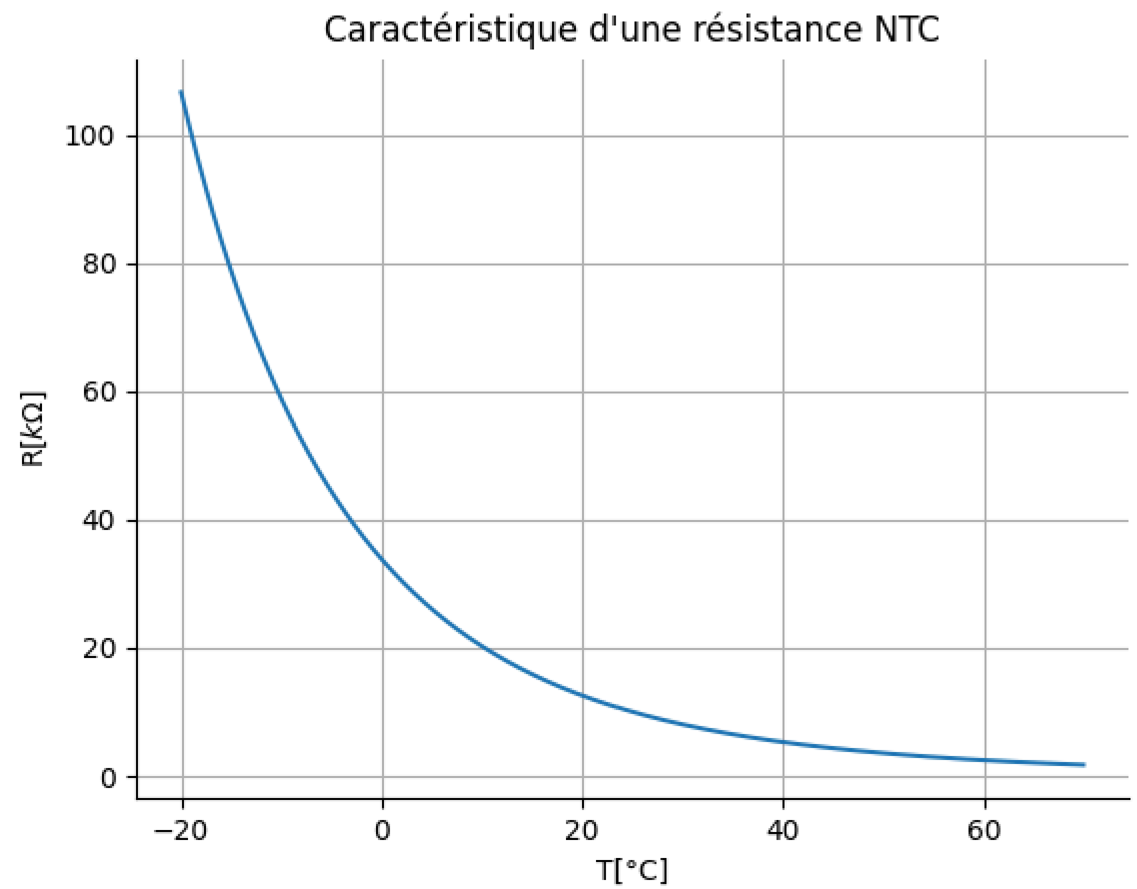
Résistance NTC

Nous considérons une résistance NTC (negative temperature coefficient = coefficient de température négatif) qui sert de capteur de température. Sa caractéristique est représentée à la figure ci-contre.

La résistance comme fonction de la température obéit à la loi

$$R(T) = R_{25} \exp(\beta(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{25}}))$$

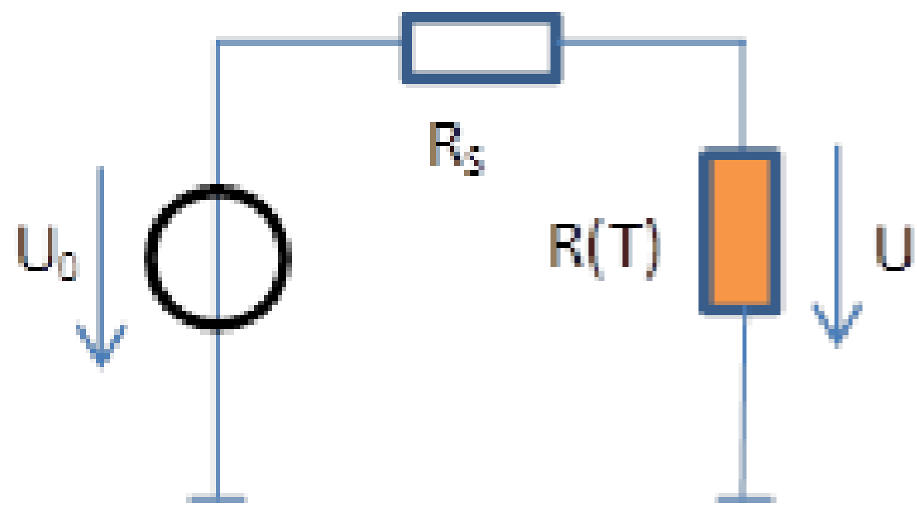
avec $R_{25} = 10k\Omega, \beta = 3965[K], T_{25} = 298[K]$ et la température T donnée en [K].



1. Linéariser cette équation autour de $T = T_{25}$.
2. Quelle est l'erreur de linéarisation en absolu (en Ω) et en relatif (en % de la valeur non- linéaire) à 0°C?
3. Admettons que ce capteur soit alimenté par un courant constant de 0.25mA. Quelle tension apparait à ses bornes à 25°C et à 0°C, en utilisant l'expression non-linéaire de R(T) ? Quelles valeurs de tension résulteraient par contre en utilisant l'estimation linéarisée de $R(T)$ autour de T_{25} ?

Le circuit électrique est modifié comme indiqué ci-contre.

$$R_S = 30[k\Omega] \qquad U_0 = 10[V]$$



4. Calculer à nouveau les valeurs de U pour les températures de 25°C et 0°C, en utilisant l'expression non-linéaire de $R(T)$, et comparer avec les résultats de la question précédente. Commenter.

2.18 Exercice 3

Altimètre

Une méthode courante de mesure de l'altitude h consiste à la déduire d'une mesure de la pression atmosphérique p. Celle-ci varie avec l'altitude selon

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

où la densité ρ dépend elle-même de la pression p selon la relation

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

L'indice 0 dénomme des valeurs prises à une altitude de référence h_0 et une température de référence T_0. $g = 9.81[m/s2]$ est l'accélération terrestre.

La pression ambiante complète p_a dépend en outre de la température selon la relation

$$p_a(h, T) = p(h) \cdot \frac{T}{T_0}$$

1. Montrer que la relation suivante pour $h(p_a, T)$ satisfait les équations de base données suivantes :

$$h(p_a, T) = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_0}{p_a} \cdot \frac{T}{T_0}\right)$$

   Indication : Inverser $h(p)$ en $p(h)$, puis vérifier que $p(h)$ est une solution des équations de base.

2. Montrer que l'altitude $h(p_a, T)$ peut être linéarisée à partir d'une altitude de référence h_0 selon

$$h_{lin}(p_a, T) = h_0 + S_p(p_a - p_0) + S_T(T - T_0)$$

   Montrer que pour

   $h0 = 500[m]$, $p_{a0} = p_0 = 1013.25[hPa]$ (1 [hPa] = 100 [Pa]), $T_0 = 288[K]$ (soit 15 [°C]), $\rho_0 = 1.225[kg/m3]$,

   on obtient $S_p = -8.32[m/hPa]$ et $S_T = 29.3[m/°C]$

3. Quelle est l'erreur absolue en [m] de mesure d'altitude avec cette linéarisation, si une personne voyage de Sion $(h0, T0)$ jusqu'au Gornergrat ($h = 3135[m], T = -5[°C]$).

4. Comme l'altimètre ne dispose pas d'une mesure précise de la température T, il applique une correction standardisée de -6.5 [°C] /1000 [m] de dénivelée. Quelle est l'erreur d'altitude en calculant avec cette correction standard dans notre cas ?

2.19 Exercice 4

Gain de système en série

Deux amplificateurs sont connectés en série. Le premier double l’amplitude du signal et le second à un gain de 34 [dB].

1. Quelle est la valeur du signal de sortie si l’on injecte une valeur de 3 à l’entrée du premier amplificateur ?
2. Quel est le gain global en [dB] des deux amplificateurs ?

2.20 Exercice 5

Sonorisation d’un orchestre

On enregistre une source sonore avec un micro MKH 416. On a 2 instruments qui sont un violon et un saxophone Les instrumentistes sont assis à 2m l’un de l’autre, on place le micro en face du violoniste, à 1m.

- A la mesure du signal du micro, quel sera le niveau sonore du violon comparée au saxophone
- Quel sera le niveau d’un éternuement à l’arrière de la salle

Paramètre	Valeur
Niveau sonore d’un violon	80 dBA
Niveau sonore d’un saxophone	90 dBA
Eternuement	90 dBA
Distance des spectateurs	20 mètres
Attenuation avec la distance	3dB / doublement de distance

2.21 Exercice 6

Entraînement à courant continu

Quel est le régime stationnaire de l'entraînement à courant continu (cf 1) ?