Previsione dell'andamento di un portfoglio finanziario

April 2025

Introduzione

L'analisi dei rendimenti finanziari si confronta con una serie di difficoltà strutturali e statistiche che rendono complesso il compito della previsione e della gestione del rischio. Tra le principali sfide si possono identificare le seguenti:

- **Non stazionarietà**: le proprietà statistiche dei rendimenti (come media e varianza) possono variare nel tempo, rendendo inadeguati i modelli classici a parametri fissi.
- **Volatilità eteroschedastica**: l'ampiezza delle fluttuazioni dei rendimenti non è costante, ma soggetta a variazioni persistenti. Questo fenomeno è alla base della necessità di modelli in grado di descrivere una varianza condizionata dinamica (es. modelli GARCH).
- **Dipendenza tra asset**: i rendimenti dei diversi titoli finanziari non si comportano in modo indipendente, ma presentano correlazioni che variano nel tempo, in particolare nei periodi di crisi, rendendo più difficile la stima del rischio aggregato di portafoglio.
- **Incertezza predittiva**: la previsione puntuale dei rendimenti futuri, se non accompagnata da una misura dell'incertezza associata, può risultare fuorviante in contesti decisionali come l'allocazione del capitale.

Alla luce di queste difficoltà, si rendono necessari modelli più flessibili e capaci di cogliere la natura dinamica, correlata e incerta dei dati finanziari. In questo lavoro si confronteranno due approcci complementari per la stima e previsione del rendimento e del rischio di un portafoglio: da un lato, una modellazione puntuale basata su modelli ARMA-GARCH con dipendenze dinamiche (DCC), e dall'altro, un approccio probabilistico basato su processi gaussiani.

Modelli ARMA-GARCH

Modelli ARIMA e ARMA

I modelli ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) costituiscono una classe di modelli statistici per analizzare e prevedere serie temporali. Un modello ARIMA è generalmente denotato come ARIMA(p,d,q), dove i parametri p e q indicano rispettivamente gli ordini della componente autoregressiva (AR) e della componente a media mobile (MA), mentre d rappresenta il grado di integrazione, ovvero il numero di differenziazioni necessarie per rendere la serie stazionaria. La struttura generale di un modello ARIMA è data da:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

dove $\phi(B)$ e $\theta(B)$ sono polinomi nel backshift operator B, definito come $BX_t = X_{t-1}$, e ε_t sono gli errori o residui, generalmente assunti come rumore bianco con media zero e varianza costante.

Nel contesto finanziario, tuttavia, la componente integrativa (I) del modello ARIMA risulta spesso superflua o addirittura inadatta, poiché i rendimenti finanziari — ottenuti come differenze logaritmiche dei prezzi — mostrano tipicamente stazionarietà almeno debole, a differenza delle serie dei prezzi che sono invece chiaramente non stazionarie. Di conseguenza, è preferibile utilizzare direttamente un modello ARMA(p,q), caratterizzato dall'assenza del termine integrativo:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

dove μ è la media dei rendimenti e ε_t indica nuovamente il rumore bianco.

Eteroschedasticità condizionata e modelli GARCH

Nonostante l'utilità dei modelli ARMA, essi si basano su assunzioni stringenti, tra cui quella di omoschedasticità degli errori. Tuttavia, le serie finanziarie presentano spesso eteroschedasticità condizionata, ovvero una varianza che cambia nel tempo, fenomeno noto come volatilità clusterizzata.

Per superare questa limitazione, si introducono i modelli GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity). Un modello GARCH(p,q) descrive la varianza condizionata σ_t^2 degli errori come funzione delle sue realizzazioni passate e dei residui passati:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

dove $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, e gli ε_t sono i residui ottenuti dal modello ARMA per la media.

Limiti della modellazione univariata e necessità della modellazione multivariata

Questi modelli ARMA-GARCH vengono applicati singolarmente a ciascun asset che compone un portafoglio, fornendo stime puntuali della media e della volatilità condizionata per ogni serie. Tuttavia, tale approccio ignora la struttura di correlazione esistente tra gli asset, portando a una significativa perdita di informazione. In assenza di una modellazione accurata delle dipendenze tra asset, la stima complessiva del rischio del portafoglio risulta inevitabilmente imprecisa.

Per superare tale criticità, è necessario ricorrere a un modello multivariato che tenga conto della correlazione dinamica tra i diversi asset. A tal fine, si utilizza il modello Dynamic Conditional Correlation (DCC-GARCH), descritto dettagliatamente nella sezione successiva.

Il modello DCC-GARCH

Come già accennato, l'utilizzo dei modelli ARMA-GARCH per ciascun asset singolarmente consente di stimare dinamiche temporali delle medie e delle varianze individuali, ma trascura la struttura di correlazione che lega i diversi asset del portafoglio. Per ovviare a questa limitazione, si introduce il *Dynamic Conditional Correlation* (DCC) che consente di modellare esplicitamente la correlazione condizionata dinamica tra serie temporali finanziarie.

Il modello DCC si sviluppa in due fasi principali. Nella prima fase, si applicano modelli GARCH univariati a ciascuna serie storica, ottenendo stime puntuali delle varianze condizionate e dei residui standardizzati, indicati con:

$$z_{i,t} = \frac{r_{i,t} - \mu_{i,t}}{\sigma_{i,t}}$$

dove $r_{i,t}$ indica il rendimento dell'asset i al tempo t, mentre $\mu_{i,t}$ e $\sigma_{i,t}$ sono rispettivamente la media condizionata stimata con il modello ARMA e la volatilità condizionata stimata con il modello GARCH.

Nella seconda fase, il modello DCC introduce la dinamica della matrice di correlazione condizionata. In particolare, si definisce la matrice di covarianza condizionata dei rendimenti al tempo t come:

$$\Sigma_t = D_t R_t D_t$$

dove $D_t = \mathrm{diag}(\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t}, \ldots, \sigma_{n,t})$ è la matrice diagonale delle volatilità condizionate stimate precedentemente, e R_t è la matrice di correlazione dinamica degli asset.

La matrice R_t evolve dinamicamente nel tempo secondo una relazione ricorsiva basata sui residui standardizzati:

$$R_t = \mathrm{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}}\, Q_t\, \mathrm{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}}$$

La matrice ausiliaria Q_t è ottenuta attraverso un processo di aggiornamento ricorsivo definito come:

$$Q_t = (1 - a - b)\,\bar{Q} + a\,z_{t-1}z'_{t-1} + b\,Q_{t-1}$$

in cui:

- z_t è il vettore dei residui standardizzati degli asset al tempo t;
- $\bar{Q}$ è la matrice di covarianza incondizionata dei residui standardizzati, tipicamente stimata dalla media storica;
- a e b sono parametri scalari non negativi stimati dal modello, tali che $a + b < 1$, garantendo così stazionarietà del processo Q_t.

Questa procedura permette quindi di modellare efficacemente le variazioni nel tempo delle correlazioni tra i diversi asset finanziari, integrando la dimensione temporale nella struttura della covarianza condizionata. Pertanto, il modello DCC rappresenta uno strumento potente per la stima dinamica del rischio complessivo di portafoglio, superando la limitazione dei modelli GARCH univariati che considerano le serie storiche degli asset isolatamente.

Ottenere la previsione dal modello DCC-GARCH

Una volta stimata la matrice di covarianza dinamica Σ_t tramite il modello DCC-GARCH e le medie condizionate $\mu_{i,t}$ dei singoli asset tramite modelli ARMA, la previsione del rendimento atteso e della volatilità complessiva del portafoglio si ottiene combinando linearmente tali stime sulla base dei pesi del portafoglio stesso.

Indicato con $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)'$ il vettore dei pesi degli asset, la previsione della media attesa del rendimento del portafoglio al tempo t è data da:

$$\mu_{\text{port},\,t} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}_t$$

dove $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{1,t}, \mu_{2,t}, \ldots, \mu_{n,t})'$ è il vettore delle medie attese degli asset.

Analogamente, la previsione della varianza attesa (ossia della volatilità al quadrato) del rendimento del portafoglio al tempo t è data da:

$$\sigma^2_{\text{port},\,t} = \mathbf{w}'\Sigma_t\mathbf{w}$$

Pertanto, la previsione complessiva del rendimento del portafoglio avrà media $\mu_{\text{port},\,t}$ e varianza $\sigma^2_{\text{port},\,t}$, consentendo una valutazione puntuale del rischio tramite indicatori quali il Value-at-Risk (VaR) o il Conditional VaR (CVaR).

Si noti tuttavia che tale previsione è *puntuale*, ossia non offre direttamente un intervallo di confidenza o una misura di incertezza predittiva, che invece può essere ricavata tramite approcci alternativi quali, ad esempio, i processi gaussiani discussi nel seguito.

Modellazione del portafoglio con Processi Gaussiani

Un'alternativa flessibile e probabilistica alla modellazione ARMA-GARCH+DCC è offerta dai *Processi Gaussiani* (GP), una famiglia di modelli non parametrici particolarmente adatti per la previsione di serie temporali, grazie alla loro capacità di fornire stime distribuzionali dell'output piuttosto che mere previsioni puntuali.

Nel contesto della previsione di portafoglio, si assume che l'output da modellare sia il rendimento aggregato del portafoglio in ciascun istante temporale t, calcolato come combinazione lineare dei rendimenti dei singoli asset:

$$r_{\text{port},t} = \sum_{i=1}^{n} w_i \, r_{i,t}$$

dove w_i sono i pesi (normalizzati) assegnati a ciascun asset.

Feature di input e struttura del modello

L'input del modello sarà costituito, per ogni tempo t, dal vettore $\mathbf{x}_t \in R^n$ contenente i rendimenti dei singoli asset al tempo t, ovvero:

$$\mathbf{x}_t = (r_{1,t},\, r_{2,t},\, \ldots,\, r_{n,t})$$

Il processo gaussiano viene utilizzato per modellare la funzione ignota $f(\cdot)$ che mappa questi input sul rendimento futuro del portafoglio:

$$r_{\text{port},t} = f(\mathbf{x}_t) + \varepsilon_t$$

dove $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ è un rumore gaussiano i.i.d. Il processo gaussiano viene utilizzato per modellare la funzione ignota $f(\cdot)$ che mappa questi input sul rendimento futuro del portafoglio:

$$r_{\text{port},t} = f(\mathbf{x}_t) + \varepsilon_t$$

dove $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ è un rumore gaussiano i.i.d.

La funzione $f(\cdot)$ è assunta distribuita secondo un processo gaussiano $\mathcal{GP}(m(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))$, ovvero come una famiglia di funzioni le cui valutazioni in ogni insieme finito di punti seguono una distribuzione normale multivariata, caratterizzata da una funzione di media $m(\mathbf{x})$ e da una funzione di covarianza $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. La componente di rumore osservazionale omoschedastico ε_t viene sommata alla funzione latente per modellare l'incertezza residua nella previsione.

Si assume una funzione di media $m(\mathbf{x})$ che può eventualmente includere un termine costante o un trend stimato dai dati (ad esempio tramite regressione lineare preliminare o media mobile), ma il cuore del modello risiede nella funzione di covarianza $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ che definisce la struttura di dipendenza tra gli input.

Struttura della covarianza: kernel e confronto con DCC

Nei GP, la covarianza tra le predizioni future non è aggiornata ricorsivamente come nei modelli GARCH/DCC, ma è specificata esplicitamente attraverso un *kernel*, ossia una funzione di similarità tra input. In questo lavoro si è adottato un kernel del tipo Radial Basis Function (RBF), noto anche come squared exponential:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2\ell^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2\right)$$

dove:

- σ_f^2 rappresenta la varianza a priori della funzione latente,
- ℓ è un parametro di scala che controlla la distanza oltre la quale le osservazioni diventano debolmente correlate.

Questa scelta consente di modellare in modo flessibile la dipendenza tra istanti temporali sulla base della somiglianza tra i vettori dei rendimenti degli asset. A differenza del DCC, in cui la covarianza è aggiornata in modo ricorsivo e dipende esclusivamente dai residui recenti, nel modello GP la struttura della covarianza è *globale*: essa è appresa dall'intero dataset, e riflette quanto due configurazioni di rendimenti $\mathbf{x}_t$ e $\mathbf{x}_{t'}$ siano simili nel tempo.

Un'ulteriore differenza rilevante è che, nel GP, la covarianza fra due istanti t e t' dipende direttamente dai dati osservati in quei punti, e dalla forma del kernel, ma non viene aggiornata dinamicamente nel tempo sulla base di residui. Questa struttura non adattiva può essere vista come una limitazione in contesti di cambiamento strutturale rapido, ma garantisce maggiore stabilità e interpretabilità.

Natura probabilistica della previsione

Una delle principali caratteristiche distintive dell'approccio con Processi Gaussiani è la sua natura *bayesiana e probabilistica*. Infatti, per ogni input $\mathbf{x}_t$, il modello non restituisce una previsione puntuale, ma una distribuzione gaussiana predittiva:

$$r_{\text{port},t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$$

dove:

- μ_t è la media condizionata data dagli osservati precedenti,
- σ_t^2 è la varianza predittiva, che quantifica l'incertezza associata alla previsione.

Questo consente non solo di ottenere un valore atteso, ma anche un *intervallo di confidenza* attorno alla previsione, utile per stimare la probabilità di eventi estremi o per valutare indicatori di rischio come il Value-at-Risk (VaR) e il Conditional VaR (CVaR) in maniera più coerente con l'incertezza predittiva.

In definitiva, i Processi Gaussiani offrono una visione complementare rispetto al modello DCC-GARCH: mentre quest'ultimo fornisce previsioni puntuali e si adatta dinamicamente ai dati, il GP consente una modellazione flessibile e distribuzionale dell'intero rendimento di portafoglio, a partire dalla struttura delle relazioni tra gli asset in input.

Considerazioni sull'omoschedasticità nei Processi Gaussiani

Un'importante osservazione critica riguarda l'ipotesi di *omoschedasticità* implicita nei modelli a Processi Gaussiani standard. In questi modelli, infatti, si assume che il rumore osservazionale sia distribuito in modo identico e indipendente per tutte le osservazioni, ovvero:

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \qquad \forall t$$

con varianza costante σ_n^2. Questa assunzione, pur semplificando l'inferenza e l'implementazione computazionale, può risultare poco realistica nel contesto finanziario, in cui i rendimenti presentano notoriamente comportamenti *eteroschedastici*, ovvero varianze che cambiano nel tempo e tendono ad aggregarsi (cluster volatility).

Nel modello GP, la varianza predittiva dipende dalla configurazione dei dati osservati e dalla struttura del kernel, e quindi non è costante nel dominio dell'input. Tuttavia, ciò riguarda esclusivamente la componente di incertezza sulla funzione latente $f(\cdot)$, mentre il termine di rumore osservazionale è trattato come costante. In altre parole, il modello non distingue tra incertezza epistemica e volatilità intrinseca dei dati.

È possibile estendere i modelli a Processi Gaussiani introducendo un secondo processo latente per modellare esplicitamente una varianza osservazionale dipendente dall'input, ottenendo così un modello *eteroschedastico*. In tal caso, si ipotizza:

$$\log \sigma_n^2(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(\cdot)$$

Questo approccio permette di catturare variazioni locali nella volatilità dei rendimenti, ma comporta un aumento significativo della complessità computazionale e inferenziale.

In sintesi, rispetto all'approccio DCC-GARCH, che è specificamente progettato per gestire varianze condizionate dinamiche, il modello GP standard costituisce una modellazione più semplice e flessibile, ma meno aderente alla natura eteroschedastica dei dati finanziari. Tale aspetto va tenuto in considerazione nella scelta del modello, in particolare quando si lavora in scenari ad alta variabilità o in contesti di gestione del rischio.