Corte supremo

Teoría de Juegos

Dario Turco, Nicolas Mastropasqua

November 8, 2023

1 Introducción

En este trabajo buscaremos un algoritmo para jugar el juego de *Cut and Choose* siendo el jugador que decide cortar la torta y enfrentándonos a un oponente racional que siempre decide el corte que maximiza su utilidad. En este caso nos enfocaremos en el caso de información perfecta, en el cual conocemos tanto nuestros gustos como los del jugador contrario.
Trabajaremos con una torta circular de longitud `T`, la cual tiene 3 gustos distintos. Cada jugador tiene una tabla de gustos que codifica cuales son las preferencias de cada usuario. Luego nosotros decidimos hacer un corte que delimita dos porciones. Finalmente el segundo jugador decide quedarse con el corte de mas utilidad le genere.
De esta manera podemos ofrecer dos cortes distintos y el rival decide cual quedarse y cual nos toca a nosotros. Por lo tanto, la única decisión que tenemos es cual corte proponer, aunque al ser de información perfecta y jugar contra un rival racional, sabemos exactamente que porción tomara.

2 Idea

Una idea inmediata para abordar el problema para tamaños de torta razonablemente pequeños, asumiendo racionalidad del otro jugador y conocimiento total de sus gustos, es simplemente ir iterando por todos los posibles cortes en la torta calculando la utilidad generada para cada jugador por cada corte y de esta manera quedarnos con el mejor. Como un corte esta delimitado por una tupla de 2 números enteros $i, j \in \{0, 1, ..., T\}$ en un arreglo de tamaño T, este algoritmo tiene complejidad T^2 donde T es el tamaño de la torta. De esta manera, al estar en el caso de información perfecta, es posible tener un algoritmo que calcule un corte perfecto.

A pesar de tener una estrategia de fuerza bruta que devuelve la mejor solución, si el valor de T llega a ser muy grande, tal vez un algoritmo con complejidad T^2 pueda ser muy costoso, por lo tanto decidimos adoptar una heurística que se basa en agrupar porciones contiguas de la torta en secciones llamadas *bines*. De esta manera, el arreglo puede ser particionado en una cantidad fija de bines dando lugar a dos parámetros a ajustar: el tamaño de los bines, b_s y el punto inicial de corte desde donde se toma el primer bin p_0.

Una vez más, optimizar este espacio de parámetros no mejoraría la complejidad del algoritmo sugerido anteriormente por lo que decidimos tomar el rango b_s como el mínimo entre la cantidad de veces que se puede dividir el tamaño de la torta en dos partes y una constante que garantice buenos tiempos de ejecución. Concretamente elegimos $C = min(T, \frac{1}{128})$ y miramos todos los cortes en un rango logarítmico hasta llegar al tamaño correspondiente a la mitad de la torta. Por último, para cada uno de los tamaños anteriores elegimos p_0 de manera aleatoria y considerando una cantidad acotada de puntos η de manera que los tiempos de corridas sigan siendo aceptables. En último lugar, habiendo encontrado la mejor combinación (b_s, p_0), probamos mejorar el corte con un margen a izquierda y a derecha también corriéndonos a lo sumo η posiciones válidas para cada lado. En definitiva, el algoritmo consiste en recorrer un subconjunto mucho más pequeño de los rangos del espacio de parámetros.

Es importante notar que el algoritmo podría ser poco efectivo para cierto tipo de tortas y tabla de gustos muy particulares. Por ejemplo, si los gustos son muy disimilares y además el otro jugador prefiere excesivamente un gusto por sobre los otros se podría pensar en encontrar un corte muy chico que contenga mucho de ese gusto para incentivarlo y quedarnos la porción más grande. Sin embargo, dado que estamos asumiendo una distribución uniforme en los sabores que la componen, esos escenarios son realmente poco probables.

3 Métrica de Perfección

Dado que es posible conocer el corte perfecto, podemos comparar la utilidad obtenida por el algoritmo heurístico con el mejor corte posible.
De esta manera, dado un corte C al realizar el cociente entre la utilidad del corte obtenido contra la del corte perfecto, podemos obtener el valor de "*Perfectness*" del corte como $P(C) = \frac{U(C)}{U(\hat{C})}$

Donde la función U calcula la utilidad de un corte y $\hat{C}$ es el corte perfecto. Esta métrica $P(C) \in [0, 1]$, nos indica que tanto se parece el corte C al corte corte perfecto. Notar que aunque $P(C)$ sea 1, esto no indica que la utilidad obtenida haya sido buena, si no que se hizo la mejor asignación posible en esa situación.

4 Casos de estudio

Fijando un tamaño de torta uniforme en $T = 256$ y realizando $N = 200$ iteraciones probamos varias tablas de gustos con distinta correlación para modelar situaciones extremas con gustos muy similares y antagónicos. En todos los casos, fijamos $\eta = 10$ y los gustos fueron normalizados tal que sumen 1. Los resultados pueden observarse en la Tabla 1. En general, notamos que los valores de P_C son considerablemente altos para distintos niveles de correlación entre gustos por lo que la utilidad conseguida por nuestro algoritmo es muy similar a la perfecta. Sin embargo, esto puede estar ligado a la distribución uniforme de sabores y tabla de gustos elegida, que hace que los mejores cortes sean en general cercanos a la mitad, algo que nuestro algoritmo debería poder replicar razonablemente.

Gustos	**Corr.**	**Util.**	P_C
$\{1:10, 2:3, 3:1\}$	1	8459	0.99
$\{1:10, 2:3, 3:1\}$		8611	
$\{1:100, 2:8, 3:1\}$	0.44	9076	0.94
$\{1:1, 2:0, 3:1\}$		8668	
$\{1:1000, 2:8, 3:1\}$	-0.5	9778	0.88
$\{1:1, 2:8, 3:1000\}$		9023	
$\{1:10, 2:2, 3:1\}$	-0.99	9446	0.94
$\{1:1, 2:8, 3:10\}$		8727	

Table 1: Resultados de las cuatro simulaciones para jugadores con gustos de distintos niveles de correlación. Para cada simulación, se observa la tabla de gustos usada junto con su correlación y las medidas de rendimiento Perfectness P_C y Utilidad total.

En efecto, en la Figura 1 observamos a partir de la primera fila, que para los gustos de correlación positiva la media de los tamaños de cortes perfectos es muy cercana a la mitad de la torta y la distribución asemeja una normal centrada allí. Luego, para correlaciones negativas la media se desplaza hacia cortes cercanos a 140. En todos los casos la varianza es tal que, cuando se evalúen particiones de mitades para nuestro algoritmo, el margen dado por η debería cubrir gran parte de esa varianza.

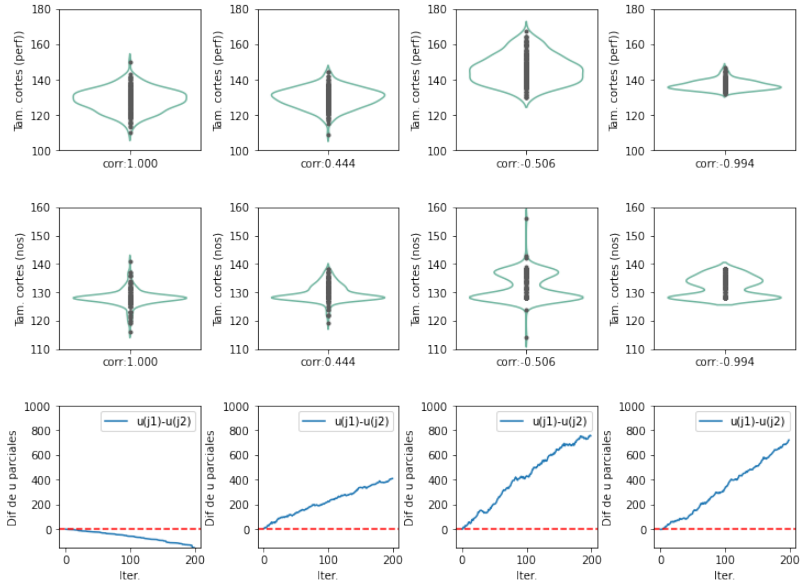

Figure 1: Resultados de las simulaciones para algoritmo de corte perfecto y el propuesto. La primera fila de violin plots muestra la distribución de los tamaños de cortes perfectos y la segunda los del algoritmo propuesto. La última fila representa, para nuestro algoritmo, la diferencia de utilidad acumulada para el jugador 1 durante las iteraciones de la simulación.

De hecho, como se ve en la segunda fila de la Figura 1 nuestro algoritmo termina consiguiendo cortes también cercanos a la mitad. Si embargo, a partir de la forma de las distribuciones, vemos que para correlaciones positivas la elección se toma con baja incertidumbre. Curiosamente, para los caso negativos, a pesar de que lo conveniente es correr la distribución hacia valores más cercano a 140, se da una suerte de bimodalidad donde se conservan muchos cortes de mitades.

La distribución de tamaños de corte está fuertemente ligada a la uniformidad de sabores y esto representa un caso favorable para nuestro algoritmo. Si tenemos una torta con $T = 256$ con una unidad del sabor 1 ubicada en la posición 0 y partes iguales del resto de los sabores, con los gustos dados por $\{1 : 0, 2 : 10, 3 : 10\}$ y $\{1 : 1000, 2 : 0, 3 : 0\}$ para j_1 y j_2 respectivamente, entonces la simulación con $N = 200$ da $P_C = 0.7$ mostrando claramente una caída del desempeño notoria.

Por otro parte, uno de los objetivos era que quien corta salga favorecido. A partir de la última fila corroboramos que la diferencia de utilidades tiene una tendencia lineal creciente para éste, con excepción del caso de gustos iguales, situación en la que siempre pierde contra quien elige. En ese caso, pensamos que ajustando un poco η podría mejorar.

En caso de que el jugador que decide el corte tenga información incompleta, o sea, no conoce los gustos del jugador que decide con que corte quedarse, debemos modificar como medimos que tan bueno es un corte. Antes, al conocer los gustos de ambos jugadores era fácil saber que corte elegirá el rival y por lo tanto cual seria la utilidad obtenida para cada jugador. Como no podemos predecir cual corte elegirá el oponente, pensamos que lo mejor es que ambos cortes tengan una utilidad muy similar para el jugador que decide el corte, de esta manera, no importa que corte elija el rival, el jugador 1 siempre puede asegurarse un corte con la mitad de su utilidad en la torta.