Aprendizaje Recursivo

Toma de Decisiones

Gian Franco Lancioni gianflancioni@gmail.com
Nicolas Mastropasqua mastropasquanicolas@gmail.com

July 31, 2020

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Contenido

1. Introducción
2. Hidden Markov Models
3. Kalman
4. Fin

Introducción

Introducción

- El aprendizaje como proceso de actualización de creencias sobre el mundo
- Con cada observación actualizamos estas creencias, que usualmente se vuelven más precisas (si el mundo no está cambiando) a lo largo del tiempo

Motivación

- Leemos la señal de un GPS que se actualiza periódicamente.
- Las señales son estimaciones de máxima verosimilitud: presentan un margen de error.
- Tenemos además información sobre nuestra dinámica: dirección y velocidad (también sujeta a ruidos).

Algoritmos de Filtering Bayesiano

- ¿Cómo combinar ambas cosas para producir estimaciones?
- ¿Debería nuestra estimación depender de *varias señales anteriores* o solamente de la última recibida?

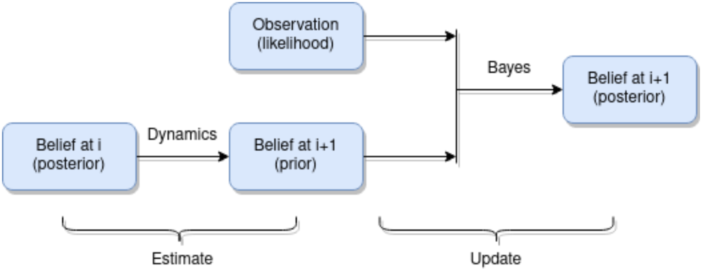

Figure 1: Esquema simplificado de los algoritmos que utilizan estos modelos.

Hidden Markov Models

Hidden Markov models (HMM)

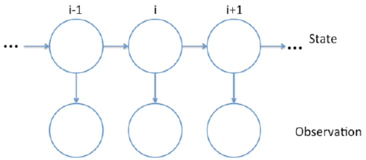

Figure 2: Modelo generativo. En cada estado se genera una observación con una distribución particular

- Cada cierto tiempo, el mundo cambia de estado independientemente de las observaciones
- Asumimos la propiedad de Markov: El estado "futuro" es independiente del pasado, **dado el presente**
- Las dinámicas dan las "reglas" que rigen las transiciones entre estados.
- Combinándolas con las observaciones en cada estado, podemos ir refinando nuestras creencias sobre el mundo

HMM: Predicción (Dynamics)

Noción: Dan la distribución de las transiciones a un estado $i+1$ dado el i

¿Como utilizo esa información para refinar el prior del próximo estado?

- Supongamos que en tiempo i estamos en un estado Q_i con valores posibles $\{s_1 ... s_t\}$
- Para ese tiempo, tenemos formadas creencias: $P(s_k)_i$ $k = 1...t$
- Para $k = 1...t$ marginalizamos $\mathrm{P}(s_k)_{i+1}$ aprovechando que conocemos $P(Q_{i+1} = s_k | Q_i = s_j)$ para todo j (usando las Dynamics)

Esto se convierte en el prior del estado Q_{i+1}

$$P(s_k)_{i+1,before} = \sum_{j=0}^{t} P(Q_{i+1} = s_k | Q_i = s_j) P(s_j)_i \; k \in \{1...t\}$$

HMM: Actualización

Ahora, en el estado Q_{i+1} obtenemos una nueva observación o_{i+1}. ¿Cómo incorporamos está información para actualizar las creencias en dicho estado?

- Aplicando Bayes

$$P(Q_{i+1} = s_k | o_{i+1}, o_i ... o_1)) \approx P(o_{i+1} | Q_{i+1} = s_k, o_i ... o_1) P(Q_{i+1} = s_k | o_i ... o_1)$$

- Usando que las observaciones solo dependen del estado actual

$$P(s_{i+1} | o_{i+1} ... o_1)) \approx P(o_{i+1} | Q_{i+1} = s_k) P(Q_{i+1} = s_k | o_i ... o_1)$$

Reescribiendo

$$P(s_k)_{i+1} \approx P(o_{i+1} | Q_{i+1} = s_k) P(s_k)_{i+1,before}$$

Kalman

KALMAN

- Retoman el concepto de los HMM pero para estados continuos.
- Modelan dinámicas lineales de la forma:

$$x_{t+1} = Ax_t + \eta$$

  - Donde $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ modela el ruido y $x_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$.
  - La probabilidad de x_{t+1} dado x_t es la de una normal.

Filtering con Kalman

Nuestro modelo

- $x_{t+1} = Ax_t + \eta$
- $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$
- $x_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$

- Primero estimamos la distribución de la siguiente observación en función de la dinámica que conocemos.
  - Para eso marginalizamos x_{t+1} en función de x_t.
  - El resultado es una convolución que arroja una normal $x_{t+1}^{before} \sim N(A\mu_t, \sqrt{A^2\sigma_t^2 + \sigma_\eta^2})$.
  - Ya tenemos nuestro *prior*.

Filtering con Kalman

Nuestro modelo

- $x_{t+1} = Ax_t + \eta$
- $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$
- $x_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$
- $x_{t+1}^{before} \sim N(A\mu_t, \sqrt{A^2\sigma_t^2 + \sigma_\eta^2})$

- Con ese *prior* podemos actualizar nuestra estimación con la regla de Bayes cuando accedamos a la siguiente observación.
  - Incorporamos una observación con distribución $N(\mu_{observe}, \sigma_{observe}^2)$
  - Nuestras *posteriors* vienen de *priors* y *likelihoods* normales.
  - $x_{t+1} \sim N(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1}^2)$

Filtering con Kalman

Nuestro modelo

- $x_{t+1} = Ax_t + \eta$
- $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$
- $x_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$
- $x_{t+1}^{before} \sim N(A\mu_t, \sqrt{A^2\sigma_t^2 + \sigma_\eta^2})$

- $\mu_{t+1} = A\mu_{t+1}^{before}(1 - W) + W\mu_{observe}$
  - $W = \frac{(\sigma_{t+1}^{before})^2}{\sigma_{observe}^2 + (\sigma_{t+1}^{before})^2}$ la ganancia de Kalman.
  - $\mu_{observe}$ y $\sigma_{observe}$ son la media y desvío estándar de la observación.
- $\sigma_{t+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{observe}^2} + \frac{1}{(\sigma_{t+1}^{before})^2 + \sigma_\eta^2}}}$

KALMAN - Algunas consideraciones

- Con el nuevo x_{t+1} podemos repetir el proceso iterativamente e ir mejorando las estimaciones.
- La *ganancia de Kalman* (W) decrece con nuestro nivel de información, por lo que es proporcionalmente inversa a nuestra confianza.
  - Se condice con hipótesis de cómo incorporamos información en distintos contextos.
- Cuando se aplican filtros de Kalman para modelar comportamiento humano se suelen *fittear* solamente medias y no la distribución exacta.
  - Esto se logra seteando el ruido en 0 al simular.
  - La varianza no solo es afectada por el factor modelado sino por distintas condiciones externas que impiden conseguir estimadores no sesgados.

Fin