第三章 线性系统的运动分析

3.1 引言

线性系统的运动分析：主要就是求解系统的零输入响应和零状态响应

零输入响应： $\dot{X} = A(t)X \quad X(t_0) = X_0, t \in [t_0, t_a]$

的解，用$X_{0u}(t)$表示，它称为自由运动

零初态响应： $\dot{X} = A(t)X + B(t)U \quad X(t_0) = 0, t \in [t_0, t_a]$在输入$U$

作用下的解，用$X_{0X}(t)$表示，它称为强迫运动

许瓦尔兹（Schwarz）不等式： $\sum_{k=1}^{p}\int_{t_0}^{t_a}|b_{ik}(t)u_k(t)|dt \le \sum_{k=1}^{p}\left[\int_{t_0}^{t_a}b^2{}_{ik}(t)dt \bullet \int_{t_0}^{t_a}u^2{}_k(t)dt\right]^{1/2}$

解存在且唯一的充分的条件：

(1) $\int_{t_0}^{t_a}|a_{ij}(t)|dt < \infty \quad i, j = 1,2,\cdots,n$

(2) $\int_{t_0}^{t_a}b^2{}_{ik}(t)dt < \infty \quad i = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,p$

(3) $\int_{t_0}^{t_a}u^2{}_k(t)dt < \infty \quad k = 1,2,\cdots,p$

问题：定常系统解存在应满足什么条件？零输入解存在充分条件是什么？

3.2 线性定常系统的运动分析

一、零输入响应 $\dot{X} = AX \quad X(0) = X_0, t \ge 0 \quad (1)$

定义矩阵指数函数： $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$

定理：由（1）所描述系统的解为： $X_{0U}(t) = e^{At}X_0 \qquad t \ge 0$

证： 令$X_{0U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k$,代入 (1) 有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}kb_kt^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)b_{k+1}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}Ab_kt^k$$

$$(k+1)b_{k+1} = Ab_k \Rightarrow b_{k+1} = \frac{A}{k+1}b_k \quad b_k = \frac{A}{k}b_{k-1} = \frac{A^2}{k(k-1)}b_{k-2} = \cdots = \frac{A^k}{k!}b_0$$

$$\therefore X_{0U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}b_0t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^kb_0 = e^{At}b_0$$

由$X_{0U}(0) = b_0 = X_0 \Rightarrow X_{0U}(t) = e^{At}X_0$

若t不是从零时刻开始，则： $X_{0U}(t) = e^{A(t-t_0)}X_0$

零输入响应形态：由 e^{At} **决定**

可见零输入响应和系统矩阵有很大关系，与矩阵指数函数有关

二、矩阵指数函数的性质

(1) $\lim_{t\to 0} e^{At} = I$ （在 $t = 0$时数值）

(2) $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau} = e^{A\tau}e^{At}$ （时间可交换）

(3) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ （可逆性）

(4) 若 $AF = FA$ 则 $e^{(A+F)t} = e^{At}e^{Ft} = e^{Ft}e^{At}$ （矩阵可交换）

(5) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$ （可微性）

(6) $(e^{At})^m = e^{A(mt)}, m = 0,1,2,\cdots$ （幂）

三、矩阵指数函数的计算方法（四种）

1、定义切尾部法： $e^{At} \approx \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^kt^k$

2、特征值法：

(1)若A的特征值两两互异，则存在非奇异矩阵P使：

$$A = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}, \text{于是} e^{At} = P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

(2)若A的特征值具有重根，则可类似求：

$$A = Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2\end{bmatrix}Q^{-1}, \text{则} e^{At} = Q\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ & & & & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}Q^{-1}$$

例

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix},\text{试用特征值方法求}e^{At}$$

解： det(sI-A)= $s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)$

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&5&1\\-6&-8&-2\\2&3&1\end{bmatrix}\qquad \overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Pe^{\overline{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-3t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

例

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-2&2\end{bmatrix},\text{试用特征值法求}e^{At}$$

解：

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\qquad \overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Pe^{\overline{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix}e^{t}&te^{t}&0\\0&e^{t}&0\\0&0&e^{t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}(t+1)e^{t}&2te^{t}&-te^{t}\\-te^{t}&(-2t+1)e^{t}&te^{t}\\-te^{t}&-2te^{t}&(t+1)e^{t}\end{bmatrix}$$

3、有限项展开法： $e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$

(1)若A的特征值两两互异，则：

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\\alpha_1(t)\\\vdots\\\alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\lambda_n^2&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_2 t}\\\vdots\\e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

(2)若A的特征值具有重根，则可类似下面： 假定λ_1三重，λ_2二重，$\lambda_3\cdots\lambda_{n-3}$一重

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\\alpha_1(t)\\\alpha_2(t)\\\alpha_3(t)\\\alpha_4(t)\\\alpha_5(t)\\\vdots\\\alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&3\lambda_1&\cdots&\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3}\\0&1&2\lambda_1&3\lambda_1^2&\cdots&\frac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2}\\1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\0&1&2\lambda_2&3\lambda_2^2&\cdots&\frac{(n-1)}{1!}\lambda_2^{n-2}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\lambda_2^3&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\1&\lambda_3&\lambda_3^2&\lambda_3^3&\cdots&\lambda_3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_{n-3}&\lambda_{n-3}^2&\lambda_{n-3}^3&\cdots&\lambda_{n-3}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t}\\\frac{t}{1!}e^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_1 t}\\\frac{t}{1!}e^{\lambda_2 t}\\e^{\lambda_2 t}\\e^{\lambda_3 t}\\\vdots\\e^{\lambda_{n-3}t}\end{bmatrix}$$

例

$$A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix},\text{试用有限项展开法求}e^{At}$$

解

$$\det(\lambda I-A)=0\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$
$$\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_1=1,\lambda_3=2$$

令 $e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$

$$e^{t}=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \qquad \alpha_0=-2te^{t}+e^{2t}$$
$$te^{t}=\alpha_1+2\alpha_2 \qquad \alpha_1=3te^{t}+2e^{t}-2e^{2t}$$
$$e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2 \qquad \alpha_2=-te^{t}-e^{t}+e^{2t}$$

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$$
$$=(-2te^{t}+e^{2t})I+(3te^{t}+2e^{t}-2e^{2t})A+(-te^{t}-e^{t}+e^{2t})A^2$$
$$=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{2t}&0&2e^{t}-2e^{2t}\\0&e^{t}&0\\-e^{t}+e^{2t}&0&-e^{t}+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

4、Laplace反变换方法（预解矩阵法）： $e^{At} = \wp^{-1}(SI - A)^{-1}$

证：

$$\wp[e^{At}] = \wp[I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots] = \frac{I}{S} + \frac{A}{S^2} + \frac{A^2}{S^3} + \cdots = (SI - A)^{-1}$$

例：设$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，用$Laplace$方法求$e^{At}$

解：

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{S+1} - \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+1} - \frac{1}{S+2} \\ \frac{-2}{S+1} + \frac{2}{S+2} & \frac{-1}{S+1} + \frac{2}{S+2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

四、零初态响应

$\dot{X} = AX + BU \quad X(t_0) = 0, t \in [t_0, t_a]$在输入$U$作用下的解

定理：$X_{0X}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$

证：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}X\right) = \frac{d}{dt}e^{-At}X + e^{-At}\dot{X} = e^{-At}(-AX + \dot{X}) = e^{-At}BU$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}X(\tau)\right) d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau$$

$$e^{-At}X(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau$$

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

(1)数学特征：卷积　**(2) 运动属性：**强迫　**(3) 可达属性：**不一定

五、线性定常系统的状态运动规律

设系统的状态空间描述为　$\dot{X} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0, \quad t \ge t_0$

则　$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad t \ge t_0$

说明：系统运动由两部分组成（自由运动和强迫运动）

六、基于特征结构的状态响应表达式

设系统的状态空间描述为 $\dot{X} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0, \quad t \ge t_0$

A有n个两两相异的特征值$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

$v_1, v_2, \cdots v_n$ = A的属于$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$线性无关右特征向量组

$w_1^T, w_2^T, \cdots w_n^T$ = A的属于$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$线性无关左特征向量组

右特征向量矩阵　$p = [v_1, v_2 \cdots v_n]$，　$p^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1^T \\ \bar{v}_2^T \\ \vdots \\ \bar{v}^T \end{bmatrix}$

左特征向量矩阵　$T = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}$，　$T^{-1} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \cdots \bar{w}_n]$

结论　对特征值两两相异一类n维连续时间线性时不变系统，基于特征结构的矩阵指数函数e^{At}的表达式为：

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v}_i^T e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i w_i^T e^{\lambda_i t}$$

证：

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1} = [v_1 \ \cdots \ v_n]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_1^T \\ \vdots \\ \bar{v}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v}_i^T e^{\lambda_i t}$$

结论　对特征值两两相异一类n维连续时间线性时不变系统，基于特征结构的零输入响应$x_{0u}(t)$、零初态响应$x_{0x}(t)$以及状态运动规律$x(t)$的表达式为：

$$x_{ou}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \bar{v}_i^T\right) x_0 e^{\lambda_i (t-t_0)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{w}_i w_i^T\right) x_0 e^{\lambda_i (t-t_0)} \qquad t \ge t_0$$

$$x_{ox}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \bar{v}_i^T\right) \left\{ \sum_{j=1}^{p} b_j \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{w}_i w_i^T\right) \left\{ \sum_{j=1}^{p} b_j \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right\} \qquad t \ge t_0$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \bar{v}_i^T\right) \left[x_0 e^{\lambda_i (t-t_0)} + \sum_{j=1}^{p} b_j \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{w}_i w_i^T\right) \left[x_0 e^{\lambda_i (t-t_0)} + \sum_{j=1}^{p} b_j \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i (t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right] \qquad t \ge t_0$$

总结

(1)系统运动特性主要由特征值所决定，特征值决定系统运动的振型。

1)当特征值两两不同时，若特征值为<0、>0、=0实数，则运动特性分别为指数衰减、指数上升、常数；若特征值为实部<0、 >0、=0复数，则运动特性分别为余弦振荡指数幅度衰减、余弦振荡指数幅度增加、余弦等幅振荡。

2）当特征值有重根时，系统运动振型与系统结构有关，可能在1)基础上要乘以t的整数次方(从约当标准形时矩阵指数函数求法可看出)。

(2)特征向量对运动体现在求和的“权重”上。

因此特征值及其特征向量对状态响应具有重大影响，在系统综合中特征结构具有非常重要地位

3.3　连续时间线性时不变系统的状态转移矩阵

引入其原因：状态运动本质和线性时变系统运动分析需要

设连续时间线性时不变系统，状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t_0) = x_0\,, \qquad t \ge t_0 \qquad (1)$$

基本解阵

矩阵方程 $\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t) \qquad \Psi(t_0) = H, \qquad t \ge t_0$

的解阵 $\Psi(t)$ 称为连续时间线性时不变系统(1)的基本解阵。

其中H为任意非奇异实常阵

结论：(1). 基本解阵不唯一

(2). 由系统自治方程 $\dot{x} = Ax \qquad x(t_0) = x_0\,, \qquad t \ge t_0$

的任意n个线性无关解为列可构成一个基本解阵。

(3).连续时间线性时不变系统(1)的一个可能的基本解阵为

$$\Psi(t) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \ge t_0$$

状态转移矩阵

矩阵方程 $\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0) \qquad \Phi(0) = I\,, \qquad t \ge t_0$

的解阵 $\Phi(t-t_0)$ 称为连续时间线性时不变系统(1)的状态转移矩阵。

问题：从定义看状态转移矩阵与基本解矩阵的区别是什么？

结论： 1:连续时间线性时不变系统(1)的状态转移矩阵可由基本解阵定出

$$\Phi(t-t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) \qquad t \ge t_0$$

2:状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 唯一，与基本解阵的选取无关。

3:状态转移矩阵的形式为

$t_0 = 0$时， $\Phi(t) = e^{At} \qquad t \ge 0$

$t_0 \ne 0$时， $\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \ge t_0$

基于状态转移矩阵的系统响应表达式 $x_{ou}(t) = \Phi(t-t_0)x_0$

$$x_{ox}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad t \ge t_0$$

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

状态转移矩阵的特性

(1) $\Phi(0) = I$

(2) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

$\Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t)$

(3) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0)$

(4) $\Phi(t_2+t_1) = \Phi(t_2)\Phi(t_1) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$

(5) $\Phi(mt) = [\Phi(t)]^m$

(6) $\dfrac{d}{dt}\Phi(t-t_0) = A\Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_0)A$

(7) $\dfrac{d}{dt}\Phi^{-1}(t-t_0) = -A\Phi(t_0-t) = -\Phi(t_0-t)A$

3.4　连续时间线性时不变系统的脉冲响应矩阵

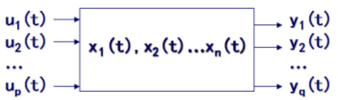
线性定常系统的输出为：

$$y(t)=C\phi(t-t_0)x(t_0)+C\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau+Du(t)$$

假设初始条件为零，输入信号中，$u_i(t)$为单位脉冲信号,其余的输入信号为零。即：

$$u(t)=e_i\delta(t-\tau)$$

$$e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i\text{位置}$$



则输出为 $y_i(t)=C\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau_1)Be_i\delta(\tau_1-\tau)d\tau_1+De_i\delta(t-\tau)$

$$=C\phi(t-\tau)Be_i+De_i\delta(t-\tau)$$

$$=h_i(t-\tau),(t\geq\tau)=\begin{bmatrix}h_{1i}(t-\tau)\\ \vdots\\ h_{qi}(t-\tau)\end{bmatrix}$$

定义： 表 $h_{ij}(t-\tau)$ 为第j个输入端在时刻 τ 加以单位脉冲$\delta(t-\tau)$ 而所有其他输入为零时，在第i个输出端的脉冲响应，对p维输入，q维输出连续时间线性时不变系统，脉冲响应矩阵定义为零初始条件下以脉冲响应 $h_{ij}(t-\tau)$ 为元构成的一个输出响应矩阵

$$H(t-\tau)=\begin{bmatrix}h_{11}(t-\tau) & h_{12}(t-\tau) & \cdots & h_{1p}(t-\tau)\\ h_{21}(t-\tau) & h_{22}(t-\tau) & \cdots & h_{2p}(t-\tau)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{q1}(t-\tau) & h_{q2}(t-\tau) & \cdots & h_{qp}(t-\tau)\end{bmatrix}$$

$$\text{且}H(t-\tau)=0,\qquad\forall t\leq\tau$$

结论： 对p维输入，q维输出连续时间线性时不变系统，假设初始状态为零，则系统在任意输入u作用下的输出响应y(t)为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}H(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}H(\tau)u(t-\tau)d\tau\qquad t\geq t_0$$

脉冲响应矩阵和状态空间描述

结论： 对连续时间线性时不变系统(A.B.C.D)，设初始状态为零，则系统的脉冲响应矩阵为

$$H(t-\tau)=Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)$$
$$=C\Phi(t-\tau)B+D\delta(t-\tau)$$

结论： ①两个代数等价的连续时间线性时不变系统具有相同的脉冲响应矩阵

证明见P109略

②两个代数等价的连续时间线性时不变系统具有相同的“输出零状态响应”和“输出零输入响应”。

证明见P109略

结论： 对连续时间线性时不变系统，其脉冲响应矩阵H(t)和传递函数矩阵G(s)之间有如下关系：

$$G(s)=L[H(t)]$$
$$H(t)=L^{-1}[G(s)]$$

例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x$$

求脉冲响应矩阵

解

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=L^{-1}(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$H(t)=C\,\Phi(t)B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ e^{-2t}\end{bmatrix}$$

也可以利用传递矩阵的拉氏反变换求得

3.5 连续时间线性时变系统的运动分析

状态转移矩阵

设连续时间线性时变系统，状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad x(t_0) = x_0 \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$$

对连续时间线性时变系统，矩阵方程：

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0), \qquad \Phi(t_0,t_0) = I$$

的解矩阵$\Phi(t,t_0)$称为状态转移矩阵。

矩阵方程 $\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t) \qquad \Psi(t_0) = H \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$

的解矩阵$\Psi(t)$称为基本解阵,其中H为任意非奇异实常值矩阵。

结论：①基本解阵不唯一

②对连续时间线性时变系统，其一个基本解阵可由系统自治状态方程

$$\dot{x} = A(t)x \qquad x(t_0) = x_0\,, \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$$

的任意n个线性无关解为列构成

③对连续时间线性时变系统，其一个基本解阵

$$\Psi(t) = \Phi(t,t_0)\Psi(t_0), \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$$

$$\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0), \qquad t \in [t_0, t_\alpha]$$

结论：①状态转移矩阵为唯一

② $\Phi(t,t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \cdots$

状态转移矩阵的性质

(1) $\Phi(t,t) = I$

(2) $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t)$

(3) $\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) = \Phi(t_2,t_0)$

(4) $\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t,t_0) = \frac{d}{dt}\Phi(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)A(t)$

系统的状态响应

结论：对连续时间线性时变系统，状态方程的解

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

脉冲响应矩阵

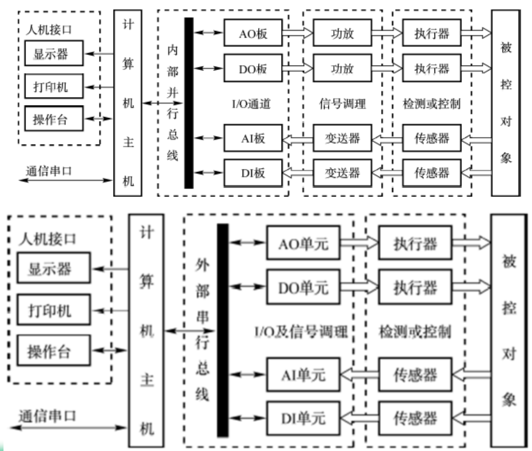
结论：对零初始状态的连续时间线性时变系统，脉冲响应矩阵

$$H(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

结论：对零初始状态的连续时间线性时变系统，其输出响应为:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

3.6 连续时间线性系统的时间离散化



内部总线结构

外部总线结构

基本约定　1）对采样方式的约定

采样方式取为以常数T为周期的等间隔采样，采样时间宽度△比采样周期T小得多。

2）对采样周期T大小的约定

满足Shamnon采样定理给出的条件

3）对保持方式的约定

零阶保持方式

基本结论　给定连续时间线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, t_2]$$

$$y(t) = C(t)x + D(t)u$$

则其在基本约定下的时间离散化描述为

$$x(k+1) = G(k)x(k) + H(k)u(k), x(0) = x_0, k = 1, 2, \cdots l$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

其中 $x(k) = [x(t)]_{t=kT} \quad u(k) = [u(t)]_{t=kT} \quad y(k) = [y(t)]_{t=kT}$

$$G(k) = \Phi((k+1)T, kT) \stackrel{\Delta}{=} \Phi(k+1, k)$$

$$H(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T, \tau)B(\tau)d\tau$$

$$C(k) = [C(t)]_{t=kT} \quad D(k) = [D(t)]_{t=kT}$$

证： $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$

$$x(k+1) = \Phi((k+1)T, kT)x(k) + \int_{kT}^{(K+1)T} \Phi((K+1)T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \Phi((k+1)T, kT)x(k) + \int_{kT}^{(K+1)T} \Phi((K+1)T, \tau)B(\tau)d\tau \bullet u(k)$$

结论　给定连续时间线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0, t \geq 0$

$$y = Cx + Du$$

则其在基本约定下的时间离散化描述为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2 \cdots$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

其中 $G = e^{AT}, H = (\int_0^T e^{At} dt)B$

证： $G = \Phi((k+1)T, kT) = \Phi((k+1)T - kT) = \Phi(T) = e^{AT}$

$$H = \int_{kT}^{(K+1)T} \Phi((K+1)T - \tau)Bd\tau \stackrel{t=(k+1)T-\tau}{=} -\int_T^0 \Phi(t)Bdt = \int_0^T e^{At}Bdt$$

结论　①时间离散化属性：时间离散化不改变系统的时变或时不变属性

②离散化系统属性：不管系统矩阵A(t)或A是非奇异或奇异，其离散化系统的系统矩阵G(k)和G必为非奇异。

例：　线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

设采样周期T=1秒，试求其离散化状态方程。

解：$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{S+1} - \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+1} - \frac{1}{S+2} \\ \frac{-2}{S+1} + \frac{2}{S+2} & \frac{-1}{S+1} + \frac{2}{S+2} \end{bmatrix}$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$G = \phi(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4651 & -0.0972 \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T \phi(\tau)Bd\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0.2325 \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6004 & 0.2325 \\ -0.4651 & -0.0972 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0.2325 \end{bmatrix} u(k)$$

3．7 离散时间线性系统的运动分析

不管是时变差分方程，还是时不变差分方程，都可采用迭代法求解。其思路是：基于系统状态方程，利用给定的或定出的上一采样时刻状态值，迭代地定出下一个采样时刻的系统状态。

定义： 矩阵方程Φ(k+1,m)=G(k)Φ(k,m), Φ(m,m)=I的解阵Φ(k,m)称为离散时间线性时变系统x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k)的**状态转移矩阵**。

矩阵方程Φ(k+1)=GΦ(k) ,Φ(0)=I的解阵Φ(k),称为离散时间线性时不变系统x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)的**状态转移矩阵。**

结论： 离散时间线性时变系统状态转移矩阵为：Φ（k,m）=G(k-1)G(k-2)…G(m)

离散时间线性时不变系统状态转移矩阵为：$\Phi(k) = G^k$

证：Φ(k,m)=G(k-1)Φ(k-1,m)= G(k-1) G(k-2) Φ(k-2,m)= G(k-1) G(k-2) …G(m)

$$\Phi(k-m) = G^{k-m}$$

结论： ①Φ(k,m)非奇异〈==〉G(i),I=m,m+1,…k-1均为非奇异

②Φ(k)非奇异〈==〉G非奇异

③对连续时间线性系统的时间离散化系统，其状态转移矩阵必为非奇异。

结论：对离散时间线性时变系统，其解为：

$$x(k)=\Phi(k,0)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)H(i)u(i)=\Phi(k,0)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,k-i)H(k-i-1)u(k-i-1)$$

对离散时间线性时不变系统，其解为

$$x(k)=\Phi(k)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i)=\Phi(k)x_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(i)Hu(k-i-1)$$

证：见书上,用迭代法,略

定义：对离散时间线性时不变系统

x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)　$x(0)=x_0$　（1）
y(k)=Cx(k)+Du(k)

脉冲传递函数矩阵 $\hat{G}(z)$　定义为零初始条件下，满足 $\hat{y}(z)=\hat{G}(z)\hat{u}(z)$

的一个q×p有理分式矩阵 $\hat{G}(z)$

$$\hat{u}(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{k=0}^{\infty}u(k)z^{-k}\qquad \hat{y}(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{k=0}^{\infty}y(k)z^{-k}$$

结论：离散时间线性时不变系统，脉冲传递函数矩阵为$\hat{G}(z)=c(zI-G)^{-1}H+D$

证：对(1)式第一个式子两边取Z变换，有

$$z\hat{x}(z)-zx(0)=z\hat{x}(z)=G\hat{x}(z)+H\hat{u}(z)$$

$$\hat{x}(z)=(zI-G)^{-1}H\hat{u}(z)$$

$$\hat{y}(z)=c\hat{x}(z)+D\hat{u}(z)=[C(zI-G)^{-1}H+D]\hat{u}(z)=\hat{G}(z)\hat{u}(z)$$