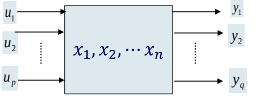
第一部分：线性系统的时间域理论

第二章　线性系统的状态空间模型

系统的数学描述(概述) 系统信号

(1)系统的外部描述　　输入 输出 状态

即输出—输入描述



例如. 对SISO线性定常系统：连续系统时间域的外部描述：

$$y^{(n)}+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_1 y^{(1)}+\alpha_0 y=b_m u^{(m)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u$$

离散系统时间域的外部描述：

$$y(k)+\alpha_1 y(k-1)+\cdots+\alpha_n y(k-n)=b_0u(k-d)+\cdots+b_m u(k-d-m)$$

连续系统复频域描述即传递函数矩阵描述或MFD(若SISO则是传函)

$$g(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$$

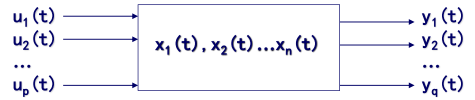
(2)系统的内部描述

状态空间描述是系统内部描述的基本形式,需要由两个数学方程表征——　状态方程和输出方程

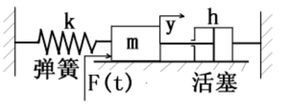
(3)外部描述和内部描述的比较

一般的说外部描述只是对系统的一种不完全描述,不能反映黑箱内部结构的不能控或不能观测的部分. 内部描述则是系统的一种完全的描述

2.1 状态和状态空间



状态： 系统状态可定义为信息的集合$\{x_1(t), x_2(t)\ldots x_n(t)\}$。在已知未来外部输入$u_1(t), u_2(t)\ldots u_p(t)$的情况下，这些信息对于确定系统未来输出$y_1(t), y_2(t)\ldots y_q(t)$是充分的,确定内部未来行为是充分必要的。



例： 典型力学系统：$m\ddot{y}+f\dot{y}+ky=F(t)$

取 $x_1=y, x_2=\dot{y}$ 则根据解存在与唯一性定理，只要X_1，X_2在任一时刻t0值已知，并确定了t>t0时的外力F(t),则y解存在且唯一，因此 y 和 $\dot{y}$ 可作为它的一组状态变量。

状态向量： $X(t)=(x_1(t), x_2(t)\ldots x_n(t))^T$

状态空间： 以各状态变量作为坐标轴所组成的n维空间叫做状态空间，状态空间实质上代表状态向量的一个集合。

几点解释：

1、状态变量组可完全表征系统行为属性

只要给定初始时刻 t_0 的任意初始状态变量组$\{x_1(t), x_2(t)\ldots x_n(t)\}$

和$t\geq t_0$ 各时刻的任意输入变量组$\{u_1(t), u_2(t)\ldots u_p(t)\}$

那么系统的任何一个内部和输出变量在$t\geq t_0$各时刻的运动行为也就随之而完全确定

2、状态变量组最小特性

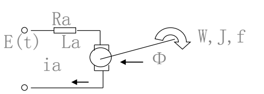
减少状态变量个数破坏表征完全性，增加状态变量个数出现冗余。数学上相当于系统内部变量组（各状态）线性独立

3、同一系统状态变量组选取不唯一，它们之间为线性非奇异变换关系。

$$\bar{X}=P^{-1}X \quad 或 \quad X=P\bar{X}$$

2.2 线性系统的状态空间描述

系统建模基本方法： **1.演绎法(解析法)**
2.归纳法(实验法)



一、状态空间描述的列写示例

例： 如图所示，已知磁通Φ为常量，W为直流电机转速，J为折合到电机轴上的转动惯量，f为折合到电机轴上的阻尼系数，电机反电势常数为Ce,电磁力矩常数为C_M，列出该系统的状态方程和输出方程。

解： 根据基尔霍夫定律：
$$R_a i_a+L_a\frac{di_a}{dt}+C_e w=E$$

根据牛顿定律：
$$J\frac{dw}{dt}+fw=C_M i_a$$

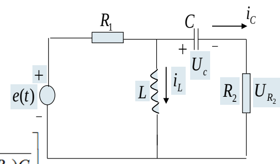
整理得：

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_a\\ \dot{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_a}{L_a} & -\frac{C_e}{L_a}\\ \frac{C_M}{J} & -\frac{f}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_a\\ w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_a}\\ 0\end{bmatrix}E \qquad \text{状态方程}$$

$$w=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_a\\ w\end{bmatrix} \qquad \text{输出方程。}$$

例：电路系统状态空间描述的列写示例

$$\begin{cases} u_c + R_2 C\dfrac{du_c}{dt} = L\dfrac{di_L}{dt} \\ R_1(i_L + C\dfrac{du_c}{dt}) + L\dfrac{di_L}{dt} = e \end{cases}$$

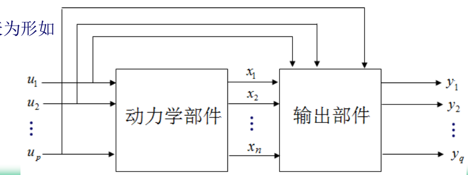


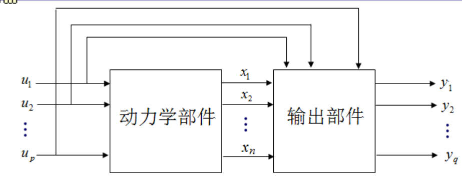
$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} e$$

$$u_{R_2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} e$$

状态空间描述方程可表为形如

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$





二、状态空间描述方程的标准形式

① **状态方程：** $\dot{x}_1 = f_1(x_1,\cdots x_n;u_1,\cdots u_p;t)$

$\vdots$

$\dot{x}_n = f_n(x_1,\cdots x_n;u_1,\cdots u_p;t)$

或写成向量形式： $\dot{X} = F(X,U,t)$

其中： $X = (x_1,\cdots,x_n)^T, U = (u_1,\cdots,u_p)^T, F = (f_1,\cdots,f_n)^T$

②**输出方程** $Y = G(X,U,t)$

其中： $Y = (y_1,\cdots,y_q)^T, G = (g_1,\cdots,g_q)^T$

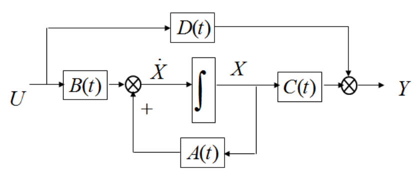
如果是线性系统：
$$\dot{X} = A(t)X + B(t)U$$
$$Y = C(t)X + D(t)U$$

其中： $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}, B(t) = (b_{ij}(t))_{n\times p}, C(t) = (c_{ij}(t))_{q\times n}, D(t) = (d_{ij}(t))_{q\times p}$

记为：(A(t),B(t),C(t),D(t))，注意A(t)被称为系统矩阵

若为定常系统，则系数为常数，例如可记为(A,B,C,D)

连续时间线性系统的方块图



离散系统的状态空间描述为：

$$X(k+1) = F(X(k),U(k),k)$$
$$Y(k) = G(X(k),U(k),k)$$

若为线性离散时间系统，有：

$$X(k+1) = G(k)X(k) + H(k)U(k)$$
$$Y(k) = C(k)X(k) + D(k)U(k)$$

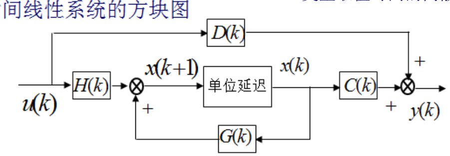
记为：(G(k),H(k),C(k),D(k))

特点1:状态方程形式上的差分型属性

2:描述方程的线性属性

3:变量取值时间的离散属性

离散时间线性系统的方块图



人口分布问题状态空间描述的列写示例

假设某个国家，城市人口为10^7，乡村人口为9×10^7，每年4%的城市人口迁移去乡村，2%的乡村人口迁移去城市，整个国家的人口的自然增长率为1% 。

设k为年变量，x1(k)、x2(k)为第k年的城市人口和乡村人口，u(k)为第k年所采取的激励性政策控制手段，设一个单位正控制措施会激励5×10^4乡村人口去城市，而一个单位负控制措施可导致5×10^4城市人口迁移乡村，y(k)为第k年全国人口数 ，列出其离散方程

$$x_1(k+1)=1.01\times(1-0.04)x_1(k)+1.01\times0.02x_2(k)+1.01\times5\times10^4u(k)$$
$$x_2(k+1)=1.01\times(1-0.02)x_2(k)+1.01\times0.04x_1(k)-1.01\times5\times10^4u(k)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9696 & 0.0202\\0.0404 & 0.9898\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5.05\times10^4\\-5.05\times10^4\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^7\\9\times10^7\end{bmatrix}$$

亦可表为 $x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$

$y(k)=Cx(k)+Du(k)$

2.3 非线性系统的线性化

设 $\begin{cases}\dot X=F(X,U,t)\\Y=G(X,U,t)\end{cases}$ $\begin{cases}\dot X_0=F(X_0,U_0,t)\\Y_0=G(X_0,U_0,t)\end{cases}$

则在(X_0,U_0)的邻域内进行Taler展开有：

$$F(X,U,t)=F(X_0,U_0,t)+\left(\frac{\partial F}{\partial X^T}\right)_0\Delta X+\left(\frac{\partial F}{\partial U^T}\right)_0\Delta U+o(\Delta X,\Delta U,t)$$

$$G(X,U,t)=G(X_0,U_0,t)+\left(\frac{\partial G}{\partial X^T}\right)_0\Delta X+\left(\frac{\partial G}{\partial U^T}\right)_0\Delta U+o(\Delta X,\Delta U,t)$$

其中：

$\Delta X=X-X_0,\Delta U=U-U_0$

$o(\Delta X,\Delta U,t)$为$\Delta X,\Delta U$的高阶无穷小

若定义

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X^T}\right)_0=A(t)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{\substack{X=X_0\\U=U_0}}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial U^T}\right)_0=B(t)\quad\left(\frac{\partial G}{\partial X^T}\right)_0=C(t)\quad\left(\frac{\partial G}{\partial U^T}\right)_0=D(t)$$

则

$$\Delta\dot X=F(X,U,t)-F(X_0,U_0,t)\approx A(t)\Delta X+B(t)\Delta U$$
$$\Delta Y=G(X,U,t)-G(X_0,U_0,t)\approx C(t)\Delta X+D(t)\Delta U$$

2.4 化外部描述为状态空间描述

一、化输入输出描述为状态空间描述

考虑单输入单输出系统 $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=b_mu^{(m)}+\cdots+b_0u$

算法一： 引入微分算子 $p=\dfrac{d}{dt}$ $\quad y=\dfrac{b_mp^m+\cdots+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}u$

(1) 当m<n时

$$\begin{cases}\tilde y=\dfrac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}u\\ y=(b_mp^m+\cdots+b_0)\tilde y\end{cases}$$

令： $x_1=\tilde y,x_2=\tilde y^{(1)},\cdots,x_n=\tilde y^{(n-1)}$

则：

$$\begin{cases}\dot x_1=\tilde y^{(1)}=x_2\\ \vdots\\ \dot x_{n-1}=\tilde y^{(n-1)}=x_n\\ \dot x_n=u-a_{n-1}x_n-\cdots-a_0x_1\end{cases}$$

$$y=b_mx_{m+1}+\cdots+b_0x_1$$

最终得：

$$\dot X=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}X$$

(2) 当m=n时 $\quad y=\dfrac{b_np^n+\cdots+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}u$

$$=\left[b_n+\frac{(b_{n-1}-b_na_{n-1})p^{n-1}+\cdots+(b_0-b_na_0)}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}\right]u$$

类似地可以得到：

$$\begin{cases}\tilde y=\dfrac{1}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0}u\\ y=b_nu+[(b_{n-1}-b_na_{n-1})p^{n-1}+\cdots+(b_0-b_na_0)]\tilde y\end{cases}$$

$$\dot X=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0-b_na_0 & \cdots & b_{n-1}-b_na_{n-1}\end{bmatrix}X+b_nu$$

书上P34-35例2.1和例2.2自己看一看

算法二： $x_1 = y - \beta_0 u$　　**其中β₀, β₁, …, β_{n-1}为待定系数**

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \quad = y^{(1)} - \beta_0 u^{(1)} - \beta_1 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-1} u \quad (*1)$$

分别用$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$乘相应方程得到：

$$a_0 x_1 = a_0 y - a_0 \beta_0 u$$

$$a_1 x_2 = a_1 y^{(1)} - a_1 \beta_0 u^{(1)} - a_1 \beta_1 u \quad (1)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} x_n = a_{n-1} y^{(n-1)} - a_{n-1} \beta_0 u^{(n-1)} - a_{n-1} \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - a_{n-1} \beta_{n-1} u$$

将(*1)最后一个方程对时间求导：

$$\dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} u^{(1)} \quad (2)$$

再将(1)，(2)相加，得：

$$\dot{x}_n + a_0 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_n = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y - \beta_0 u^{(n)}$$

$$-(\beta_1 + a_{n-1}\beta_0) u^{(n-1)} - \cdots - (a_{n-1}\beta_{n-1} + \cdots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0) u$$

$$= b_n u^{(n)} + \cdots + b_0 u - \beta_0 u^{(n)} - \cdots = (b_n - \beta_0) u^{(n)}$$

$$+ (b_{n-1} - \beta_1 - a_{n-1}\beta_0) u^{(n-1)} + \cdots + (b_1 - \beta_{n-1} - a_{n-1}\beta_{n-2} - \cdots - a_1\beta_0) u^{(1)}$$

$$+ (b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - \cdots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0) u \quad (*2)$$

为使上式不包含输入U的导数项，取：

$$b_n - \beta_0 = 0 \qquad \beta_0 = b_n$$

$$b_{n-1} - \beta_1 - a_{n-1}\beta_0 = 0 \qquad \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0$$

$$\vdots$$

$$b_1 - \beta_{n-1} - a_{n-1}\beta_{n-2} - \cdots - a_1\beta_0 = 0 \qquad \beta_{n-1} = b_1 - a_{n-1}\beta_{n-2} - \cdots - a_1\beta_0$$

令$\beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - \cdots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0$　　则：$\dot{x}_n + a_0 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_n = \beta_n u$

则由（*1）和（*2）得：

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u$$

最终得：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ \ 0 \ \ \cdots \ \ 0] X + \beta_0 u$$

书上P38例2.3和例2.4自己看一看

算法一和算法二比较：

算法一：

$$\tilde{y} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} u$$

$$x_1 = \tilde{y}, x_2 = \tilde{y}^{(1)}, \cdots, x_n = \tilde{y}^{(n-1)}$$

算法二：

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u$$

（1）算法一实现时将输入U经高阶滤波得到，成本较高，但抗噪声能力强

（2）算法二算法复杂，实现时较容易，但抗噪声能力弱

离散系统算法

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}$$

$$Y(z) = \left(b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) z^{-1} + \cdots + (b_0 - b_n a_0) z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}} \right) U(z)$$

$$\begin{cases} \tilde{Y}(z) = \dfrac{z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}} U(z) \\ Y(z) = b_n U(z) + \left[(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) z^{n-1} + \cdots + (b_0 - b_n a_0) \right] \tilde{Y}(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(z) = \tilde{Y}(z) \\ X_2(z) = z\tilde{Y}(z) = zX_1(z) \Rightarrow x_1(k+1) = x_2(k) \\ \vdots \\ X_n(z) = z^{n-1}\tilde{Y}(z) = zX_{n-1}(z) \Rightarrow x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ \left(z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \right) \tilde{Y}(z) = U(z) \Rightarrow x_n(k+1) = -a_{n-1} x_n(k) - \cdots - a_0 x_1(k) + u(k) \\ y(k) = b_n u(k) + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n(k) + \cdots + (b_0 - b_n a_0) x_1(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{X}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

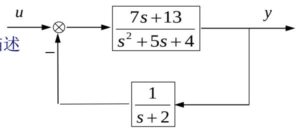
$$y(k) = \left[b_0 - b_n a_0 \ \ \cdots \ \ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \right] \mathbf{x}(k) + b_n u(k)$$

二、由方块图导出状态空间描述

1、化给定方块图为规范方块图（即一个方块只包含一个惯性环节或积分环节）

2、选定状态变量组，列出方程

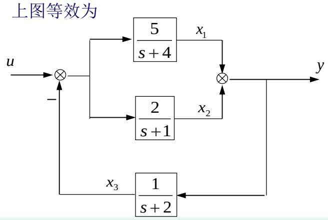
3、导出状态空间描述



例 设系统方块图如右，试列写其状态空间描述

解
$$\frac{7s+13}{s^2+5s+4}=\frac{5}{s+4}+\frac{2}{s+1}$$

上图等效为



指定状态变量组后，列写变量间的关系方程：

$$\dot{x}_1=-4x_1+5(u-x_3)$$
$$\dot{x}_2=-x_2+2(u-x_3)$$
$$\dot{x}_3=-2x_3+y$$
$$y=x_1+x_2$$

写成矩阵形式
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1=-4x_1+5(u-x_3)$$
$$\dot{x}_2=-x_2+2(u-x_3)$$
$$\dot{x}_3=-2x_3+y$$
$$y=x_1+x_2$$

2.5 线性定常系统的特征结构

什么是线性定常系统的特征结构？

指特征值和特征向量。对系统运动的特性和行为具有重要影响。

一、特征多项式和特征值

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}U$$

$\dot{X}=AX+BU$

特征矩阵 $\stackrel{\Delta}{=}(sI-A)$

预解矩阵 $\stackrel{\Delta}{=}(sI-A)^{-1}$

$$\begin{vmatrix}s-2 & 1 & 1\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & -2 & s-1\end{vmatrix}=(s-2)(s-1)(s+1)$$

特征多项式 $\stackrel{\Delta}{=}\det(sI-A)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0$

det(SI-A)=0为特征方程，其根为特征根或特征值.

凯莱-哈密顿定理（Caley-Hamilton）

系统矩阵必是其特征方程的一个“特征根”。即

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

该定理的重要意义是什么？

最小多项式。 $(SI-A)^{-1}=\dfrac{adj(SI-A)}{\det(SI-A)}=\dfrac{P(S)}{\phi(S)}$ （其中adj为伴随矩阵）

当多项式矩阵P(S)与Φ(S)只有常数公因子时Φ(S)称为A的最小多项式

注意：最小多项式满足Caley_Hamilton定理

最小多项式与特征多项式是什么关系？

循环矩阵： 若最小多项式与特征多项式只差一个常数倍数。

基于迹的特征多项式迭代算法（Leverrier）。

$$\det(SI-A)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0$$

$$\begin{cases}R_{n-1}=I & a_{n-1}=-\dfrac{tr(R_{n-1}A)}{1}\\ R_{n-2}=R_{n-1}A+a_{n-1}I & a_{n-2}=-\dfrac{tr(R_{n-2}A)}{2}\\ R_{n-3}=R_{n-2}A+a_{n-2}I & a_{n-3}=-\dfrac{tr(R_{n-3}A)}{3}\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ R_1=R_2A+a_2I & a_1=-\dfrac{tr(R_1A)}{n-1}\\ R_0=R_1A+a_1I & a_0=-\dfrac{tr(R_0A)}{n}\end{cases}$$

书上P45例2.6请自学

二、特征值特性及特征向量

特征值： det(SI-A)=0的根

1. 特征值的代数属性： 特征值使特征矩阵降秩

2. 特征值集： 特征值的全体 $\Lambda=\{\lambda\in C\mid \det(\lambda I-A)=0\}=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$

对n维线性时不变系统，有且仅有n个特征值。

3. 特征值的形态： 若系统矩阵为实数，特征值为实数或共轭复数

4. 特征值λ_i的代数重数σ_i： 特征多项式正好包含σ_i个$(S-\lambda_i)$因子

5. 特征值的几何重数： $a_i=n-rank(\lambda_i I-A), a_i$相当于$(\lambda_i I-A)$零空间的维数

6. 代数重数和几何重数的关系： 1≤几何重数≤代数重数（当A≠0）

特征向量： 若nX1向量V_i 满足 $\begin{cases}AV_i=\lambda_iV_i\\ V_i\neq 0\end{cases}$ 则称其为A的属于λ_i 的特征向量

左特征向量： 若1Xn向量V_i 满足 $\begin{cases}V_iA=\lambda_iV_i\\ V_i\neq 0\end{cases}$ 则称其为A的属于λ_i 的左特征向量

特征向量性质：

1、若λ_i（i=1,…,n)两两互异，则A对应的n个特征向量V_i 线性无关

2、特征向量不唯一

第二章 线性系统的状态空间模型 东南大学自动化学院周俊

广义特征向量： 若nX1向量V_i 满足 $\begin{cases}(\lambda_iI-A)^kV_i=0\\ (\lambda_iI-A)^{k-1}V_i\neq 0\end{cases}$ 则称其为A的属于λ_i 的k级广义特征向量

广义特征向量性质：

1、设V_i是A属于λ_i的k级广义特征向量，则如下定义的 k个向量必线性无关

$$\begin{cases}V_i^{(k)}=V_i\\ V_i^{(k-1)}=(A-\lambda_iI)V_i\\ \vdots\\ V_i^{(1)}=(A-\lambda_iI)^{k-1}V_i\end{cases}$$

且此向量组被称为广义特征向量链

证： 假定存在C_i (i=1,…,k)使：$C_1V_i^{(k)}+C_2V_i^{(k-1)}+\cdots+C_kV_i^{(1)}=0$

$$C_1V_i+C_2(A-\lambda_iI)V_i+\cdots+C_k(A-\lambda_iI)^{k-1}V_i=0$$

两边同时左乘$(A-\lambda_iI)^{k-1}$,可导出$C_1=0$,

然后两边同时左乘$(A-\lambda_iI)^{k-2}$,可导出$C_2=0$，……

2、属于不同特征值的广义特征向量链线性无关

第二章 线性系统的状态空间模型 东南大学自动化学院周俊

2.6 状态方程的约当标准形

约当形定义为以特征值表征系统矩阵的一种状态方程标准形，有利于分析系统的特征结构。

任何线性定常系统都可通过线性非奇异变换化成约当形

一、特征值两两互异情形

结论1：设线性定常系统特征值λ_i(i=1, …, n)两两互异，则在变换

$\bar X=P^{-1}X$ **下，系统可化成如下对角线标准形：**

$$\dot{\bar X}=P^{-1}AP\bar X+P^{-1}BU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\bar X+\bar BU$$

其中: $P=[V_1 \ \cdots \ V_n]$

证： $\dot{\bar X}=P^{-1}\dot X=P^{-1}(AX+BU)=P^{-1}AX+P^{-1}BU=P^{-1}AP\bar X+\bar BU$

$$P^{-1}AP=P^{-1}A[V_1 \ \cdots \ V_n]=P^{-1}[AV_1 \ \cdots \ AV_n]=P^{-1}[\lambda_1V_1 \ \cdots \ \lambda_nV_n]$$

$$=P^{-1}[V_1 \ \cdots \ V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

第二章 线性系统的状态空间模型 东南大学自动化学院周俊

结论2：若 $A=\begin{bmatrix}0&1&&\\ \vdots&\ddots&\ddots&\\ 0&\cdots&0&1\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ **且特征值两两互异，则P可按**

下式选取： $P=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$

证：

$$A\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&&\\ \vdots&\ddots&\ddots&\\ 0&\cdots&0&1\\ -a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i\\ \lambda_i^2\\ \vdots\\ \lambda_i^n\end{bmatrix}=\lambda_i\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}$$

注意：（1）在对角线标准形下各个状态变量间实现了完全解耦

$$\dot{\bar x}_i=\lambda_i\bar x_i+\bar b_iU$$

（2）若λ_i为复数则化成对角线标准形变换无意义

例：写出 $\dot{X}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}U$ **的约当标准形**

解： $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$$

由 $\lambda_i\begin{bmatrix}v_{i1}\\v_{i2}\\v_{i3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{i1}\\v_{i2}\\v_{i3}\end{bmatrix},i=1,2,3$ 得　$V_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$V_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$V_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

于是 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$　　$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

所求约当标准形为： $\dot{\bar{X}}=P^{-1}AP\bar{X}+P^{-1}bU=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\bar{X}+\begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}U$

二、特征值包含重值的情形

结论：设系统特征值 λ_i (i=1, …, l) 两两互异，相应重数为 σ_i（代数重数）和 a_i（几何重数），且 $\sum_{i=1}^{l}\sigma_i=n$ 则在变换 $\bar{X}=Q^{-1}X$ 下，系统可化成如下约当标准形：

$$\dot{\bar{X}}=Q^{-1}AQ\bar{X}+Q^{-1}BU=\begin{bmatrix}J_1&&\\&\ddots&\\&&J_l\end{bmatrix}\bar{X}+\bar{B}U$$

其中 J_i 为 $\sigma_i\times\sigma_i$ 阵，且 $J_i=\begin{bmatrix}J_{i1}&&\\&\ddots&\\&&J_{ia_i}\end{bmatrix},i=1,\cdots,l$

J_{ik} 称为相应特征值 λ_i 的约当小块，且 $J_{ik}=\begin{bmatrix}\lambda_i&1&&\\&\lambda_i&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{bmatrix}_{r_{ik}\times r_{ik}}$

其中：$k=1,\cdots,a_i$　　$\sum_{k=1}^{a_i}r_{ik}=\sigma_i$

变换阵Q由广义特征向量链组成，选取方法如下：

设 $n=10$，特征值 λ_i 的代数重数为 $\sigma_i=8$，计算

$rank\ (\lambda_i I-A)^m=n-\rho_m,m=0,1,2,\cdots$

直至 $m=m_0$ 且 $\rho_{m_0}=\sigma_i$ 为止，再按如下方式生成广义特征向量链　（设 $\rho_0=0$，$\rho_1=3$，$\rho_2=6$，$\rho_3=7$，$\rho_4=8$）

$\rho_4-\rho_3=1$	$\rho_3-\rho_2=1$	$\rho_2-\rho_1=3$	$\rho_1-\rho_0=3$
		$V^{(2)}{}_{i3}=V_{i3}$	$V^{(1)}{}_{i3}=(A-\lambda_i I)V_{i3}$
		$V^{(2)}{}_{i2}=V_{i2}$	$V^{(1)}{}_{i2}=(A-\lambda_i I)V_{i2}$
$V^{(4)}{}_{i1}=V_{i1}$	$V^{(3)}{}_{i1}=(A-\lambda_i I)V_{i1}$	$V^{(2)}{}_{i1}=(A-\lambda_i I)^2V_{i1}$	$V^{(1)}{}_{i1}=(A-\lambda_i I)^3V_{i1}$

V_{i1} 选取方法 $\begin{cases}(\lambda_i I-A)^4V_{i1}=0\\(\lambda_i I-A)^3V_{i1}\neq 0\end{cases}$

V_{i2} 选取方法 $\begin{cases}(\lambda_i I-A)^2V_{i2}=0\\(\lambda_i I-A)V_{i2}\neq 0\\V_{i2}\text{与}V^{(2)}{}_{i1}\text{线性无关}\end{cases}$

V_{i3} 选取方法 $\begin{cases}(\lambda_i I-A)^2V_{i3}=0\\(\lambda_i I-A)V_{i3}\neq 0\\V_{i3}\text{与}V^{(2)}{}_{i1}，V_{i2}\text{线性无关}\end{cases}$

Q 阵选取为

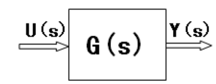
$Q=[Q_1\quad Q_2\quad\cdots\quad Q_l]$

$Q_i=[Q_{i1}\quad Q_{i2}\quad\cdots\quad Q_{ia_i}]$

$Q_{ik}=[V^{(1)}{}_{ik}\quad\cdots\quad V^{(r_{ik})}{}_{ik}]$

对照P61例2.9自学 $r_{i1}=4,r_{i2}=2,r_{i3}=2,a_i=3$

2.7 由状态空间描述导出传递函数矩阵



一、传递函数矩阵

输入：$u_1,\cdots,u_p$　对应 *Laplace* 变换 $U_1(S),\cdots,U_p(S)$

输出：$y_1,\cdots,y_q$　对应 *Laplace* 变换 $Y_1(S),\cdots,Y_q(S)$

定义： 如果 $Y(S)=G(S)U(S)$ 则称 $G(S)$ 为系统的传递函数矩阵

其中：$Y(S)=[Y_1(S)\cdots Y_q(S)]^T,U(S)=[U_1(S)\cdots U_p(S)]^T,G(S)=[g_{ij}(s)]_{q\times p}$

(1) G(s) 的真性和严真性： 若 $\lim_{S\to\infty}G(S)=0$，则 $G(S)$ 为严格真有理分式矩阵

若 $\lim_{S\to\infty}G(S)=$ 非零常阵，则 $G(S)$ 为真有理分式矩阵

(2) G(s) 的特征多项式、极点和最小多项式

$G(S)$ 的特征多项式 $=G(S)$ 的所有 1阶、2阶 … $\min(p,q)$ 阶子式的最小公分母

$G(S)$ 的极点 $=G(S)$ 特征多项式的根

$G(S)$ 的最小多项式 $=G(S)$ 的所有 1阶子式的最小公分母

(3) G(s) 的循环性　$G(S)$ 特征多项式和最小多项式只差常数

(4) G(s) 正则性和奇异性　$G(S)$ 的正则性：$G(S)$ 为方阵且行列式不恒为0

$G(S)$ 的奇异性：$G(S)$ 为方阵且行列式恒为0

例

设 $G(S)=\begin{bmatrix} \frac{S+1}{S+2} & \frac{S+3}{S+2} & 0 \\ \frac{1}{S+2} & 0 & \frac{1}{S+2} \end{bmatrix}$ 试求其特征多项式和最小多项式

解 显然，一阶子式最小公分母为(S+2)

二阶子式最小公分母为$(S+2)^2$

故所求特征多项式为：$(S+2)^2$，最小多项式为(S+2)

二、状态方程矩阵和传递函数矩阵的关系

结论： $G(S)=C(SI-A)^{-1}B+D$

$\lim\limits_{S\to\infty}G(S)=D$

若$D=0$,则$G(S)$严格为真,否则为真

证： $\dot{X}=AX+BU \qquad SX(S)=AX(S)+BU(S)$

$X(S)=(SI-A)^{-1}BU(S) \qquad Y=CX+DU$

$Y(S)=CX(S)+DU(S)=\{C(SI-A)^{-1}B+D\}U(S)$

A的特征多项式和G(S)的特征多项式之间的关系：

A的特征多项式包含G(S)的特征多项式，且只有系统能控能观两者才相差一个常数

A的特征值和G(S)的极点之间的关系：

A的特征值包含G(S)的极点，且只有系统能控能观两者才相同

三、G(S)的求解方法

结论：给定(A,B,C,D)，求出 $\det(SI-A)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0$ **和**

$$\begin{cases} E_{n-1}=CB \\ E_{n-2}=CAB+a_{n-1}CB \\ \vdots \\ E_1=CA^{n-2}B+a_{n-1}CA^{n-3}B+\cdots+a_2CB \\ E_0=CA^{n-1}B+a_{n-1}CA^{n-2}B+\cdots+a_1CB \end{cases}$$

则G(S)可按如下式子求出： $G(S)=\frac{1}{\det(SI-A)}\left[E_{n-1}S^{n-1}+\cdots+E_1S+E_0\right]+D$

证：　根据矩阵定义有：

$$(SI-A)^{-1}=\frac{adj(SI-A)}{\det(SI-A)}=\frac{R_{n-1}S^{n-1}+\cdots+R_1S+R_0}{\alpha(S)}\text{(其中}adj(SI-A)\text{为伴随矩阵)}$$

$$\alpha(S)I=\left[R_{n-1}S^{n-1}+\cdots+R_1S+R_0\right](SI-A)$$

$$IS^n+a_{n-1}IS^{n-1}+\cdots+a_1IS+a_0I=R_{n-1}S^n+(R_{n-2}-R_{n-1}A)S^{n-1}+\cdots+(R_0-R_1A)S-R_0I$$

比较系数得： $\begin{cases} R_{n-1}=I \\ R_{n-2}=R_{n-1}A+\alpha_{n-1}I \\ \vdots \\ R_0=R_1A+\alpha_1I \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{n-1}=I \\ R_{n-2}=A+\alpha_{n-1}I \\ \vdots \\ R_0=A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1I \end{cases}$

$$\begin{aligned} G(S)&=C(SI-A)^{-1}B+D \\ &=C\frac{1}{\alpha(S)}\left[R_{n-1}S^{n-1}+\cdots+R_1S+R_0\right]B+D \\ &=\frac{1}{\alpha(S)}\left[CR_{n-1}BS^{n-1}+\cdots+CR_1BS+CR_0B\right]+D \\ &=\frac{1}{\det(SI-A)}\left[E_{n-1}S^{n-1}+\cdots+E_1S+E_0\right]+D \end{aligned}$$

$$\begin{cases} E_{n-1}=CR_{n-1}B=CB \\ E_{n-2}=CR_{n-2}B=CAB+a_{n-1}CB \\ \vdots \\ E_0=CR_0B=CA^{n-1}B+a_{n-1}CA^{n-2}B+\cdots+a_1CB \end{cases}$$

注意：1、对于低阶系统可直接求 $(SI-A)^{-1}$，再求 G(S)

2、证明过程中可导出求 $(SI-A)^{-1}$ 方法

例：给定一个线性定常系统的状态空间模型如下，求其传递函数G(S)

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1&2\\1&0\\3&1\end{bmatrix}U$$

$$y=\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}X$$

解：(1)计算特征多项式：

$$\det(SI-A)=(S-2)^2(S-1)=S^3-5S^2+8S-4$$

$$S^3+\alpha_2S^2+\alpha_1S+\alpha_0$$

(2)计算系数矩阵：

$$E_2=CB=\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&4\end{bmatrix}$$

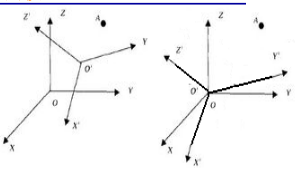
$$E_1=CAB+a_2CB=\begin{bmatrix}-24&-14\end{bmatrix}$$

$$E_0=CA^2B+a_2CAB+a_1CB=\begin{bmatrix}16&12\end{bmatrix}$$

(3)计算传递函数矩阵：

$$G(S)=\frac{1}{\det(SI-A)}\left[E_2S^2+E_1S+E_0\right]+D=\begin{bmatrix}\frac{8S^2-24S+16}{S^3-5S^2+8S-4}&\frac{4S^2-14S+12}{S^3-5S^2+8S-4}\end{bmatrix}$$

2.8 线性系统在坐标变换下的特性



一、坐标变换的表征

引入坐标变换的目的就是突出系统的某些特征或简化系统分析与综合。**坐标变换的实质就是换基。**

设状态空间的原基底为：$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ **新基底为：**$\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n\}$

新基底与老基底的变换关系为线性非奇异：

$$[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n]=[e_1,e_2,\ \ ,e_n]\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&&\vdots\\p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}=[e_1,e_2,\cdots,e_n]P$$

设状态在老基底的坐标为X，在新基底的坐标为 $\bar{X}$ **，则**

$$[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n]\bar{X}=[e_1,e_2,\cdots,e_n]P\bar{X}=[e_1,e_2,\cdots,e_n]X$$

$$X=P\bar{X}\text{或}\bar{X}=P^{-1}X$$

可见：状态在新基底表征与在老基底表征之间是线性非奇异变换关系！

二、系统状态空间描述在坐标变换下的表征

结论1：给定(A,B,C,D)，引入变换 $\bar{X}=P^{-1}X$**，则变换后状态空间描述为：**

$$(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})=(P^{-1}AP,P^{-1}B,CP,D)$$

证：

$$\dot{\bar{X}}=P^{-1}\dot{X}=P^{-1}(AX+BU)=P^{-1}AX+P^{-1}BU=P^{-1}AP\bar{X}+P^{-1}BU$$

$$Y=CX+DU=CP\bar{X}+DU$$

结论2：坐标变换不改变系统的特征多项式和特征值

证：

$$\det(SI-\bar{A})=\det(SI-P^{-1}AP)=\det[P^{-1}(SI-A)P]$$

$$=\det P^{-1}\bullet\det(SI-A)\bullet\det P=\det(SI-A)$$

代数等价系统：若相同输入和输出的同维线性系统的系数矩阵存在结论1关系。

代数等价的系统的基本特征是具有相同的代数结构特性，如特征多项式、特征值、极点、稳定性、能控性、能观测性等。

结论3：同一系统，采用不同的状态变量组所导出的状态空间描述必代数等价，因此具有相同的约当标准形

结论4：给定(A(t),B(t),C(t),D(t))，引入变换 $\bar{X}=P(t)X$ **，则变换后状态空间描述为：**

$$(\bar{A}(t),\bar{B}(t),\bar{C}(t),\bar{D}(t))=(\dot{P}(t)P^{-1}(t)+P(t)A(t)P^{-1}(t),P(t)B(t),C(t)P^{-1}(t),D(t))$$

三、系统传递函数矩阵在坐标变换下的特性

结论：线性定常系统的传递函数矩阵在坐标变换下保持不变

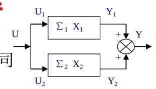
证：

$$\bar{C}(SI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D}=CP(SI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B+D$$

$$=C[P(SI-P^{-1}AP)P^{-1}]^{-1}B+D=C(SI-A)^{-1}B+D$$

2.9 组合系统的状态空间描述和传递函数矩阵

一、子系统的并联



$\Sigma_i: \dot{X}_i = A_i X_i + B_i U_i$ $\qquad U_1 = U_2 = U$ 输入相同

$Y_i = C_i X_i + D_i U_i \quad (i=1,2)$ $\qquad Y = Y_1 + Y_2$ 输出相加

则组合系统状态空间描述为： $\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}U$

$$Y = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + [D_1 + D_2]U$$

传函矩阵： $Y(S) = Y_1(S) + Y_2(S) = G_1(S)U_1(S) + G_2(S)U_2(S)$

$$= G_1(S)U(S) + G_2(S)U(S) = [G_1(S) + G_2(S)]U(S)$$

$$G(S) = \sum_{i=1}^{2} G_i(S)$$

一般并联系统状态空间描述为：

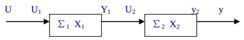
$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \vdots\\ \dot{X}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_m\end{bmatrix}U$$

$$Y = [C_1 \quad \cdots \quad C_m]\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_m\end{bmatrix} + [D_1 + \cdots + D_m]U$$

传函矩阵：

$$G(S) = \sum_{i=1}^{m} G_i(S)$$

二、子系统串联



$\Sigma_i: \dot{X}_i = A_i X_i + B_i U_i$

$Y_i = C_i X_i + D_i U_i \quad (i=1,2)$

状态空间描述： $\dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 U_1 = A_1 X_1 + B_1 U$

$$\dot{X}_2 = A_2 X_2 + B_2 U_2 = A_2 X_2 + B_2(C_1 X_1 + D_1 U_1) = B_2 C_1 X_1 + A_2 X_2 + B_2 D_1 U$$

$$Y = C_2 X_2 + D_2 U_2 = C_2 X_2 + D_2(C_1 X_1 + D_1 U_1) = D_2 C_1 X_1 + C_2 X_2 + D_2 D_1 U$$

即： $\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_2 C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ B_2 D_1\end{bmatrix}U$

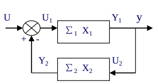
$$Y = [D_2 C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + [D_2 D_1]U$$

传递函数： $Y(S) = G_2 U_2(S) = G_2 Y_1(S) = G_2 G_1 U_1(S) = G_2 G_1 U(S)$

$$G(S) = G_2 G_1$$

一般m个子系统串联传递函数为： $G(S) = \prod_{i=1}^{m} G_i(S)$ **（注意顺序）**

三、子系统反馈



$\Sigma_i: \dot{X}_i = A_i X_i + B_i U_i$

$Y_i = C_i X_i \quad (i=1,2)$

状态空间描述： $\dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 U_1 = A_1 X_1 + B_1(U - Y_2) = A_1 X_1 + B_1(U - C_2 X_2)$

$$\dot{X}_2 = A_2 X_2 + B_2 U_2 = A_2 X_2 + B_2 Y_1 = A_2 X_2 + B_2 C_1 X_1$$

即： $\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & -B_1 C_2\\ B_2 C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}U$

$$Y = [C_1 \quad 0]\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

传递函数：

$$Y(S) = G_1 U_1(S) = G_1[U(S) - Y_2(S)] = G_1[U(S) - G_2 U_2(S)] = G_1[U(S) - G_2 Y(S)]$$

$[I + G_1 G_2]Y(S) = G_1 U(S)$ $\qquad Y(S) = [I + G_1 G_2]^{-1} G_1 U(S)$

$$G(S) = [I + G_1 G_2]^{-1} G_1 = G_1[I + G_2 G_1]^{-1}$$