题 8.1 确定下列传递函数矩阵 $G(s)$ 的一个右 MFD 和一个左 MFD:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s+1}{s^2-1} & \dfrac{s}{s^2+5s+4}\\ \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{2s+5}{s^2+7s+12}\end{bmatrix}$$

解 本题属于由线性时不变系统的传递函数矩阵确定 MFD 的基本题。

由传递函数矩阵 $G(s)$ 确定其右 MFD 和左 MFD 的方法和结果均为不惟一。

采用"最小公分母法"。表 $G(s)$ 为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s+1}{s^2-1} & \dfrac{s}{s^2+5s+4}\\ \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{2s+5}{s^2+7s+12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{(2s+1)}{(s+1)(s-1)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+4)}\\ \dfrac{1}{(s+3)} & \dfrac{(2s+5)}{(s+3)(s+4)}\end{bmatrix}$$

并先行定出

列最小公分母 $d_1(s)=(s-1)(s+1)(s+3)$，$d_2(s)=(s+1)(s+3)(s+4)$

行最小公分母 $d_{r1}(s)=(s-1)(s+1)(s+4)$，$d_{r2}(s)=(s+3)(s+4)$

表 $G(s)$ 的"各列元传递函数分母"为"列最小公分母"，即可导出 $G(s)$ 的一个右 MFD 为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{(2s+1)(s+3)}{(s-1)(s+1)(s+3)} & \dfrac{s(s+3)}{(s+1)(s+3)(s+4)}\\ \dfrac{(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+1)(s+3)} & \dfrac{(2s+5)(s+1)}{(s+1)(s+3)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(2s+1)(s+3) & s(s+3)\\ (s-1)(s+1) & (2s+5)(s+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s-1)(s+1)(s+3) & 0\\ 0 & (s+1)(s+3)(s+4)\end{bmatrix}^{-1}$$

表 $G(s)$ 的"各行元传递函数分母"为"行最小公分母"，即可导出 $G(s)$ 的一个左 MFD 为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{(2s+1)(s+4)}{(s-1)(s+1)(s+4)} & \dfrac{s(s-1)}{(s-1)(s+1)(s+4)}\\ \dfrac{(s+4)}{(s+3)(s+4)} & \dfrac{(2s+5)}{(s+3)(s+4)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(s-1)(s+1)(s+4) & 0\\ 0 & (s+3)(s+4)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(2s+1)(s+4) & s(s-1)\\ (s+4) & (2s+5)\end{bmatrix}$$

题 8.6 判断下列各 MFD 为非真、真或严真:

(i) $\begin{bmatrix}s^3+s^2+s+1 & s^2+s\\ s^2+1 & 2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^4+s^2 & s^3\\ s^2+1 & -s^2+2s\end{bmatrix}^{-1}$

(ii) $\begin{bmatrix}s^2-1 & s+1\\ 3 & s^2-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}s-1 & s+1\\ s^2 & 2s+2\end{bmatrix}$

解 本题属于判断 MFD 的真性和严真性的基本题。

(i) 对"右 MFD $N(s)\,D^{-1}(s)$，$D(s)$ 列既约"，$N(s)\,D^{-1}(s)$ 为真（严真）当且仅当对所有列的列次数满足 $\delta_{cj}\,N(s)<$（$\leqslant$）$\delta_{cj}\,D(s)$。对"右 MFD $N(s)\,D^{-1}(s)$、$D(s)$ 非列

既约”，先行导出 $\bar{N}(s)\ \bar{D}^{-1}(s)=N(s)\ D^{-1}(s)$ 且 $\bar{D}(s)$ 列既约，$N(s)\ D^{-1}(s)$ 为真（严真）当且仅当对所有列的列次数满足 $\delta_{cj}\ \bar{N}(s)<$（$\leqslant$）$\delta_{cj}\ \bar{D}(s)$。

对给定右 MFD

$$N(s)\ D^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s^3+s^2+s+1 & s^2+s \\ s^2+1 & 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^4+s^2 & s^3 \\ s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}^{-1}$$

可以定出

$$\delta_{c1}\ D(s)=4,\quad \delta_{c2}\ D(s)=3,\quad \deg\det D(s)=6$$

$$\text{“}7=(4+3)=(\delta_{c1}\ D(s)+\delta_{c2}\ D(s))\text{”} > \text{“}\deg\det D(s)=6\text{”}$$

$D(s)$ 非列既约

基此

$$引入单模阵\ \ W(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}(s)=D(s)\ W(s)=\begin{bmatrix} s^4+s^2 & s^3 \\ s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2 & s^3 \\ s^3-s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}(s)=N(s)\ W(s)=\begin{bmatrix} s^3+s^2+s+1 & s^2+s \\ s^2+1 & 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+1 & s^2+s \\ -s^2+1 & 2s \end{bmatrix}$$

由“$6=(3+3)=[\delta_{c1}\ \bar{D}(s)+\delta_{c2}\ \bar{D}(s)]=\deg\det\bar{D}(s)=6$”知 $\bar{D}(s)$ 列既约

由此，可以导出

$$2=\delta_{c1}\ \bar{N}(s)<\delta_{c1}\ \bar{D}(s)=3,\quad 2=\delta_{c2}\ \bar{N}(s)<\delta_{c2}\ \bar{D}(s)=3$$

从而，给定右 MFD $N(s)\ D^{-1}(s)$ 为严真。

题 8.7 判断下列各 MFD 是否为不可简约：

（i）$\begin{bmatrix} s+2 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ (s-1)(s+2) & s-1 \end{bmatrix}^{-1}$

（ii）$\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

（iii）$\begin{bmatrix} s^2+s & 0 \\ 2s+1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ -s^2+s+1 & -s+1 \end{bmatrix}^{-1}$

解 本题属于判断 MFD 的不可简约性的基本题。

右 MFD$N(s)D^{-1}(s)$为不可简约当且仅当$\{D(s),N(s)\}$右互质。左 MFD $D_L^{-1}(s)\ N_L(s)$ 为不可简约当且仅当$\{D_L(s),N_L(s)\}$左互质。

（i）对右 MFD $N(s)\ D^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s+2 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ (s-1)(s+2) & s-1 \end{bmatrix}^{-1}$，组成列分块阵

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ (s-1)(s+2) & s-1 \\ s+2 & s+1 \end{bmatrix}$$

并导出所有 2×2 矩阵的行列式方程及其根：

$$\det\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ (s-1)(s+2) & s-1 \end{bmatrix}=(s+1)(s-1)=0,\quad s=-1,\quad s=1$$

$$\det\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ s+2 & s+1 \end{bmatrix}=(s+1)^2=0,\quad s=-1$$

$$\det\begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & s-1 \\ s+2 & s+1 \end{bmatrix}=s(s-1)(s+2)=0,\quad s=0,\quad s=1,\quad s=-2$$

表明所有 2×2 子式方程没有共同根，即$\{D(s),N(s)\}$右互质，从而给定 MFD $N(s)\ D^{-1}(s)$ 为不可简约。

题 8.11 定出下列可简约右 MFD 的一个不可简约左 MFD

$$G(s)=\begin{bmatrix} s^3+s^2+s+1 & s^2+s \\ s^2+1 & 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^4+s^2 & s^3 \\ s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}^{-1}$$

解 本题属于由可简约右 MFD 导出其不可简约左 MFD 的基本题。

首先，由给定可简约右 MFD 导出传递函数矩阵 $G(s)$ 的有理分式矩阵表达式。为此，计算定出给定可简约 MFD 的分母矩阵的逆为

$$\begin{bmatrix} s^4+s^2 & s^3 \\ s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}^{-1}=\frac{-1}{s^3(s-1)(s^2+1)}\begin{bmatrix} -s(s-2) & -s^3 \\ -(s^2+1) & s^2(s^2+1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(s-2)}{s^2(s-1)(s^2+1)} & \dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)} \\ \dfrac{1}{s^3(s-1)} & \dfrac{-1}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

基此，可以计算得到传递函数矩阵 $G(s)$ 的有理分式矩阵表达式，并化为行最小公分母，有

$$G(s)=\begin{bmatrix} s^3+s^2+s+1 & s^2+s \\ s^2+1 & 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^4+s^2 & s^3 \\ s^2+1 & -s^2+2s \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} (s+1)(s^2+1) & s(s+1) \\ (s^2+1) & 2s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{(s-2)}{s^2(s-1)(s^2+1)} & \dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)} \\ \dfrac{1}{s^3(s-1)} & \dfrac{-1}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)}{s^2} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s-1)} & \dfrac{-s}{s(s-1)} \end{bmatrix}$$

进而，由 $G(s)$ 的上述有理分式矩阵表达式导出一个可简约左 MFD。对此，由上式可直接得到

$$G(s)=D_L^{-1}(s)\ N_L(s)=\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s(s-1) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & -s \end{bmatrix}$$

且由

$$\operatorname{rank}[D_L(s)\quad N_L(s)]_{s=0}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s^2 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & s(s-1) & 1 & -s \end{bmatrix}_{s=0}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=1<2$$

可知 $D_L^{-1}(s)\ N_L(s)$ 为可简约左 MFD。

再次，由可简约左 MFD $D_L^{-1}(s)\ N_L(s)$ 导出其一个不可简约左 MFD。为此，采用列初等变换法先来导出 $\{D_L(s),\ N_L(s)\}$ 的 gcld，有

$$[D_L(s)\quad N_L(s)]=\begin{bmatrix} s^2 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & s(s-1) & 1 & -s \end{bmatrix}$$ “列 4” ×s 加于 “列 2” →

$$\begin{bmatrix} s^2 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -s & 1 & -s \end{bmatrix}$$ “列 2” ×(−1) 加于 “列 4” →

$$\begin{bmatrix} s^2 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 3”} \times(-s) \text{ 加于“列 1”} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -s & 0 & s+1 & 0 \\ -s & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 2”} \times(-1) \text{加于“列 1”} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -s & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 1” 加于“列 3”} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 2” 加于“列 1”} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -s & 0 & 1 & 0 \\ -s & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 3”} \times s \text{ 加于“列 1”} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 2” 与“列 1” 交换} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{“列 3” 与“列 2” 交换} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{L}(s) \quad \boldsymbol{0}]$$

基此，得到 $\boldsymbol{L}(s)$ 并可导出其逆 $\boldsymbol{L}^{-1}(s)$ 为

$$\boldsymbol{L}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1/s & -1/s \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且有

$$\bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}(s) = \boldsymbol{L}^{-1}(s)\ \boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}(s) = \begin{bmatrix} 1/s & -1/s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s(s-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -(s-1) \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{L}}(s) = \boldsymbol{L}^{-1}(s)\ \boldsymbol{N}_{\mathrm{L}}(s) = \begin{bmatrix} 1/s & -1/s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$$

表明 $\boldsymbol{L}(s)$ 为 $\{\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}(s), \boldsymbol{N}_{\mathrm{L}}(s)\}$ 的一个 gcld。于是，据不可简约左 MFD 的算法，得到由可简约左 MFD $\boldsymbol{D}_{\mathrm{L}}^{-1}(s)\ \boldsymbol{N}_{\mathrm{L}}(s)$ 导出的一个不可简约左 MFD，即给定右 MFD 的一个不可简约左 MFD 为

$$\bar{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{L}}^{-1}(s)\ \bar{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{L}}(s) = \begin{bmatrix} s & -(s-1) \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$$