东 南 大 学 考 试 卷

课程名称	应用泛函分析	考试学期	19-20-2	得分	
适用专业	工科研究生	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 线 封 学号______ 密

一．（40′）简答（无须说明理由）：

1. 请问集合：N，（0，1），R 中哪些是可数集？那些是不可数集？

2. 请给出一个实数集 R 中 Lebesgue 测度为 0 且为无界子集的例子；

3. 请给出度量空间的定义；

4. 请给出 l^2 空间上内积的定义;

5. 请给出内积空间中元在子空间上投影的定义;

二．（１０′）问：函数 $D(x)=\begin{cases}0, x\text{是}[0,1]\text{中的无理数}\\1, x\text{是}[0,1]\text{中的有理数}\end{cases}$ 在[0，1]上是否 Lebesgue 可积的？若可积，并计算其 L 积分值。

三．（１０′）设 $f(t)$ 是区间[0, 1]上的连续函数，$|\lambda|<1$,证明积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t \sin(ts)x(s)ds,\quad t\in[0,1],$$

在区间[0, 1]上有唯一的连续解。

四．（１０′）在实平面R^2上定义$\|x\|=|x_1|+|x_2|$,其中$x=(x_1,x_2)$，证明$(X,\|\ \|)$是赋范空间；又问：此范数是否能有内积诱导？

五.（１０′）设$\boldsymbol{A}:(\boldsymbol{R}^2,\|\cdot\|_\infty)\to(\boldsymbol{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. 求$\|A\|$:

六．（１０′）设 X 是实的内积空间，$x, y \in X$．证明：$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$。
又问：这个结论对复空间是否成立？

七．（１０′）设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 X 中的标准直交系，设 $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$， $y = \sum_{n=1}^{\infty} s_n e_n$，

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < +\infty$，证明：$|\langle x, y \rangle|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$。